FORMULACIONES INTEGRALES DEL PROBLEMA ELASTICO. RELACION CON LOS METODOS APROXIMADOS

Picón, R.; París, F.

Cátedra de Elasticidad y Reistencia de Materiales
E.T.S. Ingenieros Industriales. Universidad de Sevilla.

Resumen.- A partir de las formulaciones variacionales integrales clásicas del problema elástico (Principio de los Desplazamientos Virtuales y Principio de las Tensiones Virtuales) se da una interpretación variacional a los Teoremas de Reciprocidad, demostrándose que el Primer Teorema de Reciprocidad equivale a una formulación variacional de la ley de comportamiento y que el Segundo Teorema de Reciprocidad representa una formulación variacional de todas las ecuaciones del problema elástico. A continuación se relacionan los métodos aproximados más comunes (Método de los Elementos Finitos, Método de los Elementos de Contorno) con los Principios Variacionales de los que derivan. Mientras el MEF satisface exactamente, en forma discreta, el Principio Variacional del que deriva, ello no sucede estrictamente en el MEC. Algunos aspectos de este último método son comentados a la luz del enfoque propuesto.

1. NOTACION

V, S	: Volumen, superficie de un sólido.
σ_{ij}	: Tensor de tensiones.
ε_{ij}	: Tensor de deformaciones.
u_i	: Vector de desplazamientos.
X_i	: Fuerzas por unidad de volumen.
$\overset{n}{T}_i$	: Vector de tensiones según la normal n_i.
$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$	: Campos de desplazamientos virtuales.
$(.)^\alpha, (.)^\beta, (.)^\gamma$	: Correspondientes magnitudes virtuales.
C_{ijkl}	: Tensor de constantes elásticas.
U_n, T_n	: Vectores de parámetros que definen una aproximación.
ϕ_{in}, ξ_{in}	: Tensores de funciones aproximantes.
Γ_{ij}, T_{ij}	: Desplazamientos y vector de tensiones en dirección i creados por una fuerza concentrada aplicada en dirección j.
F_m^γ	: Vector de fuerzas concentradas arbitrarias.

Se admite el convenio de Einstein: índices repetidos significan suma sobre dichos índices; $A_{,j}$ significa $\partial A/\partial x_j$.

2. FORMULACIONES INTEGRALES DEL PROBLEMA ELASTICO

a) Principio de los Trabajos Virtuales

La deducción de las ecuaciones del problema elástico mediante el Principio de los Trabajos Virtuales es un resultado bien conocido /1/, /2/, /3/. Recordemos que las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad pueden ser obtenidas a partir de dos formulaciones duales, que podemos denominar Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV) y Principio de las Tensiones Virtuales (PTV).

Principio de los Desplazamientos Virtuales: Si se cumple

$$\int_V \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}^\alpha\,dV = \int_V X_i\,\alpha_i\,dV + \int_S \overset{n}{T}_i\,\alpha_i\,dS \qquad (1a)$$

para todo campo α_i, ε_{ij} compatible, es decir, tal que cumpla,

$$\varepsilon_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i}) \text{ en } V \qquad (1b)$$

$$\alpha_i = \alpha_i \qquad \text{en } S \qquad (1c)$$

ello implica que las magnitudes estáticas σ_{ij}, X_i, $\overset{n}{T}_i$, están en equilibrio, es decir que cumplen

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \text{en } V \qquad (1d)$$

$$\sigma_{ij}\, n_j - \overset{n}{T}_i = 0 \text{ en } S \qquad (1e)$$

Es conveniente remarcar el significado de la frase "para todo campo α_i, $\varepsilon^{\alpha}_{ij}$ compatible"; como tratamos con un medio continuo dicha frase implica que la Ec. la debe cumplirse para el conjunto infinito de funciones α_i, capaces de reproducir cualquier desplazamiento arbitrario del sólido. Sólo así está garantizado el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio, Ecs. 1d y 1e.

En las Ecs. 1 no aparece para nada la ley de comportamiento, por lo que el PDV es válido para cuerpos cuya ley de comportamiento sea no lineal.

Las Ecs. 1c representan identidades introducidas para mantener la simetría de la formulación. En este contexto son triviales, pero dejan de serlo cuando se quiere imponer condiciones adicionales en α_i (usualmente son cero en la parte del contorno deonde están prescritos los desplazamientos).

Principio de las Tensiones virtuales: Si se cumple

$$\int_V \sigma^{\beta}_{ij}\, \varepsilon_{ij}\, dV = \int_V X^{\beta}_i\, u_i\, dV + \int_S \overset{n}{T}{}^{\beta}_i\, u_i\, dS \qquad (2a)$$

para todo campo σ^{β}_{ij}, X^{β}_i, $\overset{n}{T}{}^{\beta}_i$ en equilibrio, es decir, tal que cumpla

$$\sigma^{\beta}_{ij,j} + X^{\beta}_i = 0 \quad \text{en } V \qquad (2b)$$

$$\sigma^{\beta}_{ij}\, n_j - \overset{n}{T}{}^{\beta}_i = 0 \quad \text{en } S \qquad (2c)$$

ello implica que los campos u_i, ε_{ij} son compatibles, es decir, que cumplen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{en } V \qquad (2d)$$

$$u_i = u_i \quad \text{en } S \qquad (2e)$$

Nuevamente, remarquemos que "para todo campo σ^{β}_{ij}, X^{β}_i, $\overset{n}{T}{}^{\beta}_i$, en equilibrio" significa que la Ec. 2a debe cumplirse para el conjunto infinito de funciones σ^{β}_{ij}, capaces de reproducir cualquier estado tensional arbitrario en el sólido. Sólo así está garantizado el cumplimiento de las ecuaciones de compatibilidad, Ecs. 2d y 2e.

Al igual que antes, el PTV es válido para cuerpos cuya ley de comportamiento sea no lineal.

Las Ecs. 2c vuelven a representar identidades, triviales en este contexto, pero plenamente significativas cuando a σ^{β}_{ij} se le imponen restricciones adicionales (usualmente que $\overset{n}{T}{}^{\beta}_i$ sea nulo en la zona del contorno donde están prescritas las tensiones).

b) Teoremas de Reciprocidad.

Nos planteamos en este punto hacer una interpretación variacional de los Teoremas de Reciprocidad. Aunque estos teoremas son bien conocidos, dicha interpretación no suele encontrarse en los textos.

Las formulaciones anteriores (PDV y PTV) proporcionan las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad del problema elástico. Aplicadas conjuntamente podríamos enunciar que: Si se cumplen las Ecs. 1a y 2a para todo campo $(\alpha_i, \varepsilon^{\alpha}_{ij})$ compatible y para todo campo $(\sigma^{\beta}_{ij}, X^{\beta}_i, \overset{n}{T}{}^{\beta}_i)$ en equilibrio, ello implica el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio (Ecs. 1d y 1e) y compatibilidad (Ecs. 2d y 2e). Evidentemente, para tener todas las ecuaciones del problema elástico sólo necesitamos añadir la ley de comportamiento. Vamos primero a reinterpretar el primer Teorema de Reciprocidad como un enunciado variacional de la ley de comportamiento. Para ello, los campos $(.)^{\alpha}$ y $(.)^{\beta}$ van a fundirse en uno único $(.)^{\gamma}$, que va a cumplir todas las ecuaciones del problema elástico.

Primer Teorema de Reciprocidad: Si se cumple

$$\int_V \sigma_{ij}\, \varepsilon^{\gamma}_{ij}\, dV = \int_V \sigma^{\gamma}_{ij}\, \varepsilon_{ij}\, dV \qquad (3a)$$

para todo campo σ^{γ}_{ij}, $\varepsilon^{\gamma}_{ij}$ tal que cumpla la ley de comportamiento

$$\sigma^{\gamma}_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon^{\gamma}_{ij} \qquad (3b)$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} \qquad (3c)$$

ello implica que σ_{ij}, ε_{ij} cumplen la ley de comportamiento

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \qquad (3d)$$

La prueba es simple. Sustituyendo la Ec. 3b en la Ec. 3a se tiene

$$\int_V \sigma_{ij}\, \varepsilon^{\gamma}_{ij} = \int_V C_{ijkl}\, \varepsilon^{\gamma}_{kl}\, \varepsilon_{ij}\, dV = \int_V C_{klij}\, \varepsilon_{kl}\, \varepsilon^{\gamma}_{ij}\, dV$$

En el último paso simplemente se han cambiado los índices mudos i,j, por los k,l. Usando ahora la Ec. 3c obtenemos

$$\int_V \sigma_{ij}\, \varepsilon^{\gamma}_{ij} = \int_V C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}\, \varepsilon^{\gamma}_{ij}\, dV$$

cuyo cumplimiento para todo campo $\varepsilon^{\gamma}_{ij}$ implica el cumplimiento de la Ec. 3d. Las condiciones impuestas por las Ecs. 3b y 3c son satisfechas en general, por los cuerpos de comportamiento elástico lineal, en los que puede defirnirse la función densidad de energía de deformación.

Observamos que la unión del PDV, del PTV y del Primer Teorema de Reciprocidad da como resultado todas las ecuaciones del problema elástico. El segundo Teorema de Reciprocidad resulta de la unión de esos tres teoremas, eliminando las variables σ_{ij}, ε_{ij} de las Ecs. 1a y 2a mediante la Ec. 3a, y poniendo todas las variables en función de los desplazamientos.

Segundo Teorema de Reciprocidad: Si se cumple

$$\int_V X_i\, \gamma_i\, dV + \int_S \overset{n}{T}_i\, \gamma_i\, dS = \int_V X^{\gamma}_i\, u_i\, dV + \int_S \overset{n}{T}{}^{\gamma}_i\, u_i\, dS \qquad (4a)$$

para todo campo γ_i, X^{γ}_i, $\overset{n}{T}{}^{\gamma}_i$ que cumpla todas las ecuaciones del problema elástico, es decir, tal que cumpla

$$C_{ijkl}\, \gamma_{k,lj} + X^{\gamma}_i = 0 \quad \text{en } V \qquad (4b)$$

$$C_{ijkl}\, \gamma_{k,l}\, n_j - \overset{n}{T}{}^{\gamma}_i = 0 \text{ en } S \qquad (4c)$$

$$\gamma_i = \gamma_i \quad \text{en } S \qquad (4d)$$

ello implica que u_i, X_i, $\overset{n}{T}_i$ cumplen todas las ecuaciones del problema elástico, es decir

$$C_{ijkl}\, u_{k,lj} + X_i = 0 \quad \text{en } V \qquad (4e)$$

$$C_{ijkl}\, u_{k,lj} - \overset{n}{T}_i = 0 \quad \text{en } S \qquad (4f)$$

$$u_i = u_i \quad \text{en } S \qquad (4g)$$

Las Ecs. 4e y 4f resultan de sustituir la Ec. 3d en las Ecs. 1d y 1e, teniendo en cuenta que

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} \qquad (5a)$$

por ser simétricos ε_{ij} y σ_{ij}.

El tensor de tensiones se expresa, por tanto

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} = C_{ijkl}\, [\tfrac{1}{2}\,(u_{k,l} + u_{l,k})] =$$

$$= C_{ijkl}\, u_{k,l} \qquad (5b)$$

que sustituida en las Ecs. 1d y 1e dan las Ecs. 4c y 4f. Las Ecs. 2d se convierten en identidades al usar los desplazamientos como variables básicas.

La demostración formal del enunciado del segundo Teorema de Reciprocidad es como sigue. Sustituyendo las Ecs. 4b en las 4a se tiene

$$\int_V X_i\, \gamma_i\, dV + \int_S \overset{n}{T}_i\, \gamma_i\, dS = -\int_V C_{ijkl}\, \gamma_{k,lj}\, u_i\, dV + \int_S \overset{n}{T}{}^{\gamma}_i\, u_i\, dS \qquad (6a)$$

Integrando por partes la primera integral del segundo miembro obtenemos

$$-\int_V C_{ijkl}\, \gamma_{k,lj}\, u_i\, dV = -\int_V (C_{ijkl}\, \gamma_{k,l}\, u_i)_{,j}\, dV + \int_V C_{ijkl}\, \gamma_{k,l}\, u_{i,j}\, dV$$

Aplicando el Teorema de Gauss a la primera integral del segundo miembro e integrando nuevamente por partes la segunda se tiene

$$-\int_V C_{ijkl}\, \gamma_{k,lj}\, u_i\, dV = -\int_S C_{ijkl}\, \gamma_{k,l}\, n_j\, u_i\, dS + \int_V (C_{ijkl}\, \gamma_k\, u_{i,j})_{,l}\, dV - \int_V C_{ijkl}\, \gamma_k\, u_{i,jl}\, dV$$

Aplicando nuevamente el Teorema de Gauss a la segunda integral del segundo miembro y cambiando los índices mudos i,j por los k,l en las dos últimas integrales se obtiene

$$-\int_V C_{ijkl}\, \gamma_{k,lj}\, u_i\, dV = -\int_S C_{ijkl}\, \gamma_{k,l}\, n_j\, u_i\, dS + \int_S C_{ijkl}\, u_{k,l}\, n_j\, \gamma_i\, dS - \int_V C_{ijkl}\, u_{k,lj}\, \gamma_i\, dV \qquad (6b)$$

Finalmente, sustituyendo la Ec. 6b en la 6a, teniendo en cuenta la Ec. 4c e imponiendo el cumplimiento de la Ec. 6a para todo γ_i se obtienen las Ecs. 4e, 4f y 4g.

3. RELACION CON LOS METODOS APROXIMADOS

Usualmente, los métodos aproximados utilizados en la resolución del problema elástico son métodos que hacen uso del PDV o del Segundo Teorema de Reciprocidad.

En este apartado vamos a intentar interpretar estos métodos aproximados a la luz de los enunciados variacionales de dichos principios.

a) Principio de los Desplazamientos Virtuales.

La aplicación del PDV en la forma descrita en las Ecs. 1 no garantiza el que las tensiones sean compatibles. Por tanto, pongamos σ_{ij} en función de los desplazamientos, usando la Ec. 5b.

$$\int_V C_{ijkl}\, u_{k,l}\, \varepsilon^{\alpha}_{ij}\, dV = \int_V X_i\, \alpha_i\, dV + \int_S \overset{n}{T}_i\, \alpha_i\, dS \qquad (7)$$

Aproximemos ahora $u_i(x_1,x_2,x_3)$ en la forma usual

$$u_i(x_1,x_2,x_3) = \phi_{in}(x_1,x_2,x_3).U_n \ , \ n=1,3N \qquad (8)$$

La Ec. 8 da los desplazamientos de cada punto del medio continuo a partir de la interpolación (mediante ϕ_{in}) de los 3N desplazamientos de N puntos del sólido.

Sustituyendo la Ec. 8 en la Ec. 7 se obtiene

$$\int_V C_{ijkl}\, \phi_{kn,l}\, U_n\, \varepsilon^{\alpha}_{ij}\, dV = \int_V X_i\, \alpha_i\, dV + \int_S \overset{n}{T}_i\, \alpha_i\, dS \qquad (9)$$

Reconsideremos ahora el enunciado del enunciado del PDV: desde el momento en que hemos hecho la aproximación dada por la Ec. 8, nuestro sólido ha dejado de tener infinitos grados de libertad e infinitas posibilidades de movimientos para pasar a tener 3N grados de libertad y las posibilidades de movimiento definidas por las funciones aproximantes ϕ_{in}. Reenunciando el PDV para dicho sólido aproximado, la frase "para toda α_i, $\varepsilon^{\alpha}_{ij}$ compatibles" debe ahora enunciarse diciendo "para toda α_i, $\varepsilon^{\alpha}_{ij}$ compatibles, posibles en el sólido aproximado". Dicho de otra manera, para respetar el enunciado variacional del PDV sobre el sólido de 3N grados de libertad, las funciones "proyectantes" deben ser las mismas que las aproximantes

$$\alpha_i(x_1,x_2,x_3) = \phi_{im}(x_1,x_2,x_3)U^{\alpha}_m \ , \ m=1,3N \qquad (10)$$

siendo U^{α}_m un conjunto de 3N parámetros arbitrarios. Sustituyendo la Ec. 10 en la Ec. 9 y teniendo en cuenta que el tensor que multiplica a $\varepsilon^{\alpha}_{ij}$ es simétrico en i,j (ver Ec. 5a) se obtiene

$$\int_V C_{ijkl}\, \phi_{kn,l}\, U_n\, \phi_{im,j}\, U^{\alpha}_m\, dV = \int_V X_i\, \phi_{im}\, U^{\alpha}_m\, dV + \int_S \overset{n}{T}_i\, \phi_{im}\, U^{\alpha}_m\, dS \qquad (11)$$

Como la Ec. 11 debe cumplirse para todo U^{α}_m se obtiene la ecuación vectorial

$$\left[\int_V C_{ijkl}\, \phi_{kn,l}\, \phi_{im,j}\, dV\right] U_n = \left[\int_V X_i\, \phi_{im}\, dV + \int_S \overset{n}{T}_i\, \phi_{im}\, dS\right] \qquad (12a)$$

Haciendo que las funciones aproximantes cumplan las condiciones de contorno en desplazamientos, y admitiendo, por simplicidad, que estas son nulas, la segunda integral del segundo miembro es conocida y la Ec. 12a puede ponerse en la forma

$$K_{mn}\, U_n = F_m \qquad (12b)$$

que es un sistema de ecuaciones que permite calcular U_n. Observese que K_{mn} es simétrica, pues $C_{ijkl}\, \phi_{km,l}\, \phi_{in,j} = C_{klij}\, \phi_{im,j}\, \phi_{kn,l} = C_{ijkl}\, \phi_{im,j}\, \phi_{kn,l}$, teniendo en cuenta la Ec. 3c.

El proceso descrito representa el método clásico de Galerkin (del que deriva el Método de los Elementos Finitos cuando las funciones aproximantes son de pequeño soporte, lo que da matrices en banda). Sin embargo, es frecuente deducir la expresión del PDV en base a la Teoría de Residuos Ponderados /4/, interpretando las funciones α_i como "funciones de ponderación", y dejando bastantes libertades sobre la elección de dichas funciones. En este contexto, incluso resulta chocante la ponderación del error con las mismas funciones usadas para aproximar las variables reales, lo que da lugar al método de Galerkin. A la luz de la interpretación realizada, sin embargo, esa es la única elección de funciones de peso (ó funciones proyectantes) que respeta el enunciado variacional del que deriva el método aproximado. En este sentido, cabe mencionar que el Método de los Elementos Finitos puede interpretarse como la "mejor solución" en el espacio de N dimensiones si la medida del error que se adopta es $X_i - (X_i)_a$, siendo $(X_i)_a$ las fuerzas por unidad de volumen obtenidas de la solución aproximada (ver, vg. /5/, /6/). En efecto, el PDV se obtiene formalmente de la integración por partes de la expresión

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + X_i)\, \alpha_i\, dV = 0 \qquad (13)$$

Si $\sigma_{ij,j}$ es aproximada (via desplazamientos) entonces el paréntesis es una medida del error obtenido y la Ec. 13 fuerza a que el error sea ortogonal a todas las funciones α_i.

b) Segundo Teorema de Reciprocidad.

En principio, y siguiendo la filosofía establecida sobre el PDV, se podrían aproximar las variables de la Ec. 4a de acuerdo a los siguientes puntos: 1) las funciones aproximantes de γ_i $\overset{n}{T}{}^{\gamma}_i$ y X^{γ}_i deben estar ligadas elásticamente (Ecs. 4b-4d); y 2) las funciones aproximantes de las variables reales deben ser las mismas que las de la función proyectante, para respetar el enunciado variacional del Teorema. Nos veríamos abocados, entonces a una aproximación del tipo

$$u_i = \phi_{in}\, U_n \quad ,, \quad \gamma_i = \phi_{im}\, U^{\gamma}_m$$

$$\overset{n}{T}_i = C_{ijkl}\, \phi_{kn,l}\, n_j\, U_j \quad ,, \quad \overset{n}{T}_i = C_{ijkl}\phi_{km,l}\, n_j\, U^{\gamma}_m$$

$$X_i = -C_{ijkl}\phi_{km,lj}\, U^{\gamma}_m$$

$$n,m = 1,3N \qquad (14)$$

La sustitución de dichas aproximaciones en la Ec. 4a daría lugar a una versión discreta del Segundo Teorema de Reciprocidad que contiene integrales de volumen y en las que las funciones aproximantes deben tener derivada hasta de grado dos; este método no parece tener ninguna ventaja respecto al derivado del PDV, en el que el grado de derivabilidad exigido en las funciones aproximantes era uno.

El siguiente paso que vamos a dar está basado en las siguientes ideas: 1) no es necesario forzar la relación elástica entre u_i y $\overset{n}{T}_i$ al hacer la aproximación, pues tal relación viene impuesta por el cumplimiento del principio variacional (Ec. 4f). Así pues, u_i y $\overset{n}{T}_i$ pueden aproximarse en forma independiente

$$u_i = \phi_{in}\, U_n \qquad (15a)$$

$$\overset{n}{T}_i = \xi_{in}\, T_n \qquad n = 1,3N \qquad (15b)$$

2) vamos a aproximar γ_i, $\overset{n}{T}{}^{\gamma}_i$ por un conjunto de funciones tales que la integral de volumen de la Ec. 4a desaparezca. La solución fundamental a la ecuación de Navier es la función adecuada. Así pues

$$\left.\begin{aligned} \gamma_i &= \Gamma_{im}\, F^{\gamma}_m && (16a)\\ \overset{n}{T}{}^{\gamma}_i &= C_{ijkl}\, \Gamma_{km,l}\, n_j\, F^{\gamma}_m = T_{im}\, F^{\gamma}_m && (16b)\\ X^{\gamma}_i &= -C_{ijkl}\, \Gamma_{km,lj}\, F^{\gamma}_m = \delta_{im}\, \Delta F^{\gamma}_m && (16c) \end{aligned}\right|_{m=1,3N}$$

La Ec. 16a expresa la función proyectante como una combinación lineal de los desplazamientos provocados por 3N fuerzas concentradas aplicadas según los tres ejes coordenados en cada uno de los N puntos usados para aproximar. En la Ec. 16c aparece la delta de Kronecker, que da carácter de carga concentrada a los 3N valores F^{γ}_m.

Nótese que, para seguir respetando los requerimientos de las Ecs. 4b-4d, las funciones Γ_{im}, T_{im}, $\delta_{im}\Delta$ están relacionadas elásticamente. Observese asimismo que, dado el carácter de solución fundamental de la función adoptada, las Ecs. 16 pueden verse como una aproximación (de las funciones proyectantes) que es capaz de reproducir, cuando el número de grados de libertad tienda a infinito, cualquier función ϕ_{in} y ξ_{in}.

De todo lo dicho hasta ahora se desprende que, a este nivel se ha introducido una aproximación, aparte de en los grados de libertad del sólido, en el propio enunciado variacional del Teorema de Reciprocidad. Cabe pensar, sin embargo, que a medida que se van aumentando los grados de libertad nos vamos acercando más al cumplimiento exacto de dicho teorema y, por tanto, a la satisfacción exacta de las ecuaciones elásticas.

Sustituyendo las Ecs. 15 y 16 en la Ec. 4c se obtiene

$$\int_V X_i\, \Gamma_{im}\, F^{\gamma}_m\, dV + \int_S \xi_{in}\, \Gamma_{im}\, T_n\, F^{\gamma}_m\, dS =$$

$$= \int_V \delta_{im}\, \Delta F^{\gamma}_m\, \phi_{in}\, U_n\, dV + \int_S T_{im}\, \phi_{in}\, U_n\, F^{\gamma}_m\, dS \qquad (17a)$$

En la primera integral del segundo miembro, aparecería el valor de ϕ_{mn} en cada uno de los puntos donde están aplicadas las cargas concentradas. Denominando C_{mn} a dichos valores ($C_{mn} = \delta_{mn}$ para las funciones aproximantes usualmente utilizadas) obtenemos, teniendo en cuenta que la Ec. 17a debe cumplirse para toda F^{γ}_m, la siguiente ecuación vectorial

$$\left[C_{mn} + \int_S T_{im}\, \phi_{in}\, dS\right] U_n + \left[-\int_S \xi_{in}\, \Gamma_{im}\, dS\right] T_n = \int_V X_i\, \Gamma_{im}\, dV \qquad (17b)$$

La Ec. 17b da lugar al denominado Método de los Elementos de Contorno, que constituye una interesante alternativa al Método de los Elementos Finitos.

Puede tomarse límite de la Ec. 17b cuando todos los puntos están en el contorno en cuyo caso el factor C_{mn} se transforma en otro, C^{*}_{mn}, dependiente de la forma que adopte el contorno en cada punto usado para la discretización. Ahora, los N puntos que permiten aproximar las funciones reales (Ecs. 15) y proyectantes (Ecs. 16) estarán todos, lógicamente, en el contorno.

Supuesto sustituido C_{mn} por C^{*}_{mn}, las Ecs. 17b pueden escribirse, en forma compacta en la forma usual del MEC:

$$H_{mn}\, U_n + G_{mn}\, T_n = Z_n \qquad (17c)$$

En cada punto del contorno se conocen tres condiciones de contorno luego de las 6N incógnitas que incluyen U_n y T_n sólo quedarán 3N que son obtenibles del sistema de Ecs. 17c.

Usualmente, las funciones aproximantes ϕ_{in} y ξ_{in} se toman iguales, por simplicidad; suelen adoptarse funciones polinómicas de pequeño soporte que permiten calcular los coeficientes de las matrices H_{mn} y G_{mn} mediante integraciones locales y, adicionalmente, permiten dar un sentido físico a los coeficientes U_n y T_n.

Mencionemos por último, que, admitida la aproximación de las funciones proyectantes dada por las Ecs. 16, el cumplimiento estricto del enunciado variacional llevaría a aproximar las funciones reales de la misma forma. Ahora bien, además del problema conceptual que significa aproximar las variables reales mediante funciones singulares (salvo el caso en que el problema real en estudio contenga singularidades /7/), habría que resolver una complicación adicional motivada por la presencia de núcleos de integración fuertemente singulares (los usuales del MEC elevados al cuadrado), que llevaría a integrales divergentes de difícil evaluación.

4. REFERENCIAS

1. Washizn, K. "Variational methods in elasticity and plasticity". 2ª Edición. Pergamon Press, 1975.

2. Fung, Y.C. "Foundations of solid mechanics" Prentice-Hall, 1965.

3. Dym, C.L. y Shames, I.H. "Solid mechanics. A variational approach". McGraw-Hill, 1973.

4. Zienkiewicz, O.C. y Morgan, K. "Finite Elements and approximation". Jhon Wiley, 1983.

5. Alarcón, E. "Cálculo dinámico de estructuras con un número finito de grados de libertad". S.P.E.T.S.I.I. Sevilla, 1977.

6. Becker, E.B. et al. "Finite Elements. An introduction". Vol. I, Prentice-Hall, 1981.

7. Gómez Lera, S., París, F. y Alarcón, E. "Treatment of singularities in 2-D domains using BIEM". Applied Mathematical Modelling Vol. 6, pgs. 111-118, 1982.