

ANÁLISIS DEL PROBLEMA DE CONTACTO SIN FRICCIÓN CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

F. Paris* y J.A. Garrido**

* E.T.S.I.I. de Sevilla / ** E.T.S.I.I. de Las Palmas

Resumen. Se formula la aplicación del método de los elementos de contorno al problema de contacto, en ausencia de fricción, de dominios bidimensionales en el campo elástico. Los resultados obtenidos se comparan con otras alternativas numéricas de contorno y dominio.

1. INTRODUCCION

Existe un gran número de problemas, tanto dentro de la Ingeniería Mecánica - como Civil, en los que se producen interacciones directas entre los contornos de dos o más dominios en estado de deformación.

El estudio de uniones atornilladas, problemas de zunchado, cojinetes, así como los pilotes de fricción, la interacción terreno estructura, los problemas relacionados con el impacto y la modelización de los planos de deslizamiento en la teoría de la plasticidad, son ejemplos que resaltan la importancia del estudio del contacto entre sólidos deformables.

No es de extrañar, por tanto, que desde que Hertz expusiera los primeros trabajos [1] hayan aparecido numerosas publicaciones sobre este tema. [2] representa una revisión actual del estado de conocimientos. Sin embargo, y dado que las soluciones analíticas sólo son posibles en casos de geometría simples, para condiciones ideales, teniendo en cualquier caso un desarrollo matemático complejo, el conocimiento del problema ha ido parejo al uso de métodos experimentales y más recientemente numéricos. En concreto el Método de los Elementos Finitos ha sido usado en la última década en forma profusa para abordar este problema. Referencias [3] a [11] representan una selecta colección de artículos que usan el Método de los Elementos Finitos.

En general el tratamiento del problema de contacto admite dos enfoques basados en modelar independientemente ambos dominios utilizando luego unas ecuaciones de restricción en la zona de contacto, ó bien en usar elementos de enlace en la zona de contacto cuyas propiedades reflejen el comportamiento de las superficies.

El Método de los Elementos de Contorno ha sido más recientemente utilizado por Andersson [12], [13], [14] y [15] para abordar el caso plano con y sin fricción. En el esquema de un método de contorno sólo la primera de las alternativas usadas en el M.E.F. cobra sentido.

Ciñendonos al problema de contacto sin fricción, para el caso de que la superficie de contacto sea constante se trata de un problema directo, es decir las condiciones de contorno pueden establecerse de forma definitiva a priori y la carga total puede aplicarse de una vez. En cambio si la superficie de contacto puede variar con la aplicación de las cargas, las condiciones de contorno no pueden establecerse previamente y caben dos posibilidades. Aplicar directamente toda la carga con una superficie de contacto supuesta y ajustar posteriormente esta superficie en sucesivas aproximaciones hasta que los resultados coincidan cualitativamente con la superficie de contacto supuesta. Esta es la alternativa de Andersson para problemas sin fricción [12] y [15]. La otra al-

ternativa consiste en dar incrementos de carga que correspondan con variaciones discretas de la superficie de contacto hasta que se termina de aplicar la carga. Esta técnica es la utilizada por ejemplo en [8].

En el presente trabajo se ha seguido esta segunda alternativa que no requiere ninguna idea previa sobre la solución del problema y que permitirá enlazar con la forma de resolver el problema con fricción que necesariamente ha de ser incremental.

En el apartado 2 se define el problema. En el apartado 3 se establece el planteamiento integral para el problema anteriormente presentado. En el apartado 4 se presenta la aproximación numérica con elementos discontinuos. En el 5 se establece el proceso de resolución, presentando los resultados en el apartado 6 para el problema de Punch elástico sobre cimentación elástica.

2. DEFINICION DEL PROBLEMA

Consideremos la situación indicada en la Fig. 1 en la que dos dominios D_A y D_B con contornos ∂D_A y ∂D_B se encuentran sometidos a la acción de acciones exteriores sobre dicho contorno \bar{t}_i^A , \bar{u}_i^A y \bar{t}_i^B , \bar{u}_i^B respectivamente. Bajo la acción de dichas acciones ambos dominios alcanzan una situación deformada con una superficie de contacto.

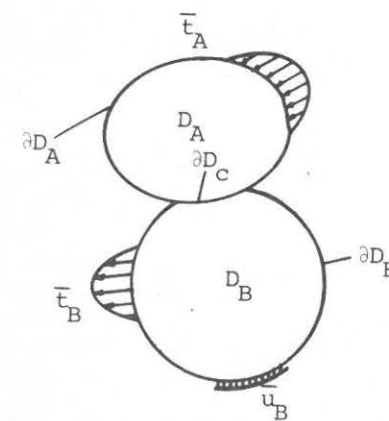


Fig. 1: Definición del problema.

Ambos contornos pueden partitionarse en la siguiente forma:

$$\partial D^K = \partial D_L^K + \partial D_C^K \quad K = A, B$$

donde ∂D_L^K representa la parte del contorno de K que queda fuera de la zona de contacto que asumimos.

La hipótesis de pequeñas deformacio-

nes, permite poner:

$$\partial D_C \approx \partial D_C^A \approx \partial D_C^B$$

Aunque la Fig. 1 representa la interacción entre dos dominios planos y la formulación que sigue recoge este caso, la extrapolación a más de dos contornos o más de una zona de contacto es inmediata.

Se supone que las tensiones que se alcanzan mantienen al material en su comportamiento elástico y se admite la posibilidad de que ambos dominios estén caracterizados por propiedades elásticas diferentes E^K , ν^K .

Para poder establecer las condiciones de contorno del problema, se define un sistema local de coordenadas tal como se indica en la Fig. 2.

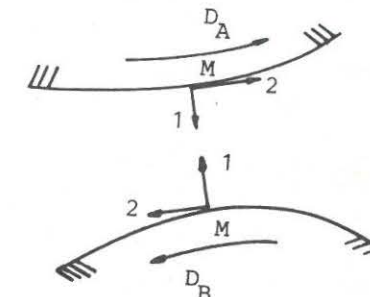


Fig. 2: Definición del sistema local de coordenadas.

La dirección 1 es normal a la superficie y la dirección 2 es su perpendicular en sentido de las agujas del reloj.

En la zona libre se darán algunas de estas tres condiciones:

$$\begin{cases} -t_i = \bar{t}_i \\ -u_i = \bar{u}_i \\ \begin{cases} u_i = \bar{u}_i \\ t_i = \bar{t}_i \end{cases} \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2 \end{cases}$$

En la zona de contacto, existen 4 variables asociadas a un mismo punto M en cada uno de los dominios,

$$u_1^K(M), u_2^K(M), t_1^K(M), t_2^K(M) \quad K=A, B$$

pero entre estas ocho variables existen las siguientes relaciones, supuesto que el contacto se realiza sin fricción

$$\begin{aligned} u_1^A(M) + u_1^B(M) &= 0 \\ t_2^A &= t_2^B = 0 \\ t_1^A(M) - t_1^B(M) &= 0 \\ \text{con } t_1(M) &< 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Por lo que en un punto de la zona de contacto existirán cuatro incógnitas.

$$u_1^A(M), t_1^A(M), u_2^A(M), u_2^B(M)$$

3. FORMULACION DEL PROBLEMA EN ECUACIONES INTEGRALES

La formulación del problema elástico en ecuaciones integrales se obtiene a través de la fórmula de Somigliana -- que relaciona tensiones y desplazamientos en el contorno. Así, para un dominio (Fig. 3) D, con contorno ∂D dicha fórmula toma la siguiente expresión, -- con fuerzas de volumen nulas:

$$\begin{aligned} C_{ij}(x) u_j(x) + \int_{\partial D} T_{ij}(x,y) u_j(y) ds(y) &= \\ = \int_{\partial D} U_{ij}(x,y) t_j(y) ds(y) \end{aligned} \quad (2)$$

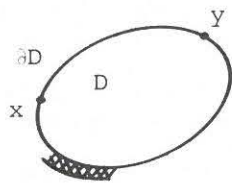


Fig. 3: Configuración del dominio.

donde:

$$x, y \in \partial D$$

$u_j(y), t_j(y)$ son desplazamientos y tensiones en ∂D

$U_{ij}(x,y), T_{ij}(x,y)$ representan la solución de Kelvin, -- desplazamientos y tensiones en y en la dirección j al aplicar una carga unidad en x en la dirección i.

$C_{ij}(x)$ es el término libre cuyo valor depende de la forma local del contorno en x. Si $x \in \partial D$ y la normal es continua en

$$x. C_{ij}(x) = \frac{1}{2} \delta_{ij}(x).$$

Una más detallada obtención de (2) puede encontrarse en [16]. Como es bien conocido (2) representa la ecuación básica para resolver un problema elástico mediante el método de los elementos de contorno. Por ello veamos la forma que adopta (2) al aplicarla a los dominios A y B del problema definido en la Fig. 1.

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_L} T_{ij}^*(x,y)^K u_j^K(y) ds(y) + \int_{\partial D_C} T_{ij}^*(x,y)^K u_j^K(y) ds(y) &= \\ = \int_{\partial D_L} U_{ij}^K(x,y) t_j^K(y) ds(y) + \int_{\partial D_C} U_{ij}^K(x,y) t_j^K(y) ds(y) \quad K=A,B \end{aligned} \quad (3)$$

donde T_{ij}^* representa el núcleo de integración de (2) incluyendo el efecto -- del término libre.

Si introducimos en (3) las condiciones de contorno (1) del problema, -- las dos ecuaciones adoptan la siguiente forma

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_L} T_{ij}^{*A} u_j^A ds + \int_{\partial D_C} T_{i1}^{*A} u_1^A ds + \int_{\partial D_C} T_{i2}^{*A} u_2^A ds &= \\ = \int_{\partial D_L} U_{ij}^A t_j^A ds + \int_{\partial D_C} U_{i1}^A t_1^A ds \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_L} T_{ij}^{*B} u_j^B ds - \int_{\partial D_C} T_{i1}^{*B} u_1^A ds + \int_{\partial D_C} T_{i2}^{*B} u_2^B ds &= \\ = \int_{\partial D_L} U_{ij}^A t_j^A ds + \int_{\partial D_C} U_{i1}^A t_1^A ds \end{aligned} \quad (5)$$

(4) y (5) representan un sistema de -- dos ecuaciones integrales que pueden aplicarse en puntos del contorno de A y B respectivamente. Por tanto, para cada punto de A y B que no pertenecen a la superficie de contacto y que tienen dos incógnitas se dispone de dos -- ecuaciones integrales, y para cada punto de la superficie de contacto se dispone de cuatro ecuaciones integrales -- (dos de (4) y dos de (5)) para determinar las cuatro incógnitas que anteriormente se habían especificado en el apartado 2.

4. APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO. DISCRETIZACION CON ELEMENTOS DISCONTINUOS

El Método de los Elementos de Contorno se basa, como es bien conocido,

en realizar una aproximación sobre las variables u_i y t_i que aparecen en la -- ecuación integral (2). Esta aproximación realizada en la forma:

$$\underline{u} = N_i \cdot a_i \quad \underline{t} = N_i \cdot b_i \quad (6)$$

donde a_i y b_i representan los desplazamientos y tensiones en puntos del contorno fijados como referencia para establecer la variación, permite que la ecuación (2), al aplicarla en diferentes puntos x del contorno, de origen a un sistema lineal de ecuaciones (7) cuyas incógnitas son los valores desconocidos de u y t en el contorno.

$$\begin{aligned} \sum_{K=1}^{NE} \left[\int_{\partial D_K} T_{ij}^*(x,y) u_j(y) ds_k - \int_{\partial D_K} U_{ij}(x,y) t_j(y) ds_k \right] &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

donde NE representa el número de elementos ∂D_K utilizados para representar el contorno ∂D .

La aproximación que se va a seguir en este estudio es lineal no conforme. El contorno ∂D se aproxima por elementos lineales ∂D_K , sobre los cuales se supone una variación lineal de la función a partir de los valores de dicha función en dos puntos interiores del -- elemento, lo que no garantiza la continuidad interelemental, al igual que sucede con los elementos constantes. La formulación detallada de este tipo de -- elementos puede encontrarse en [17]. Esta aproximación permite expresar las variables de (7) u_i y t_i en ∂D_K , a partir de los valores de las tensiones y desplazamientos en dos puntos interiores -- del elemento en un sistema local de -- coordenadas (Fig. 4).

$$\begin{aligned} \underline{u}_{\partial D_K} &= \underline{N}(\xi) \cdot \underline{Q}^k(a,b) \underline{L}^k(\theta) \underline{u}_{nL}^k \\ \underline{t}_{\partial D_K} &= \underline{N}(\xi) \cdot \underline{Q}^k(a,b) \underline{L}^k(\theta) \underline{t}_{nL}^k \end{aligned} \quad (8)$$

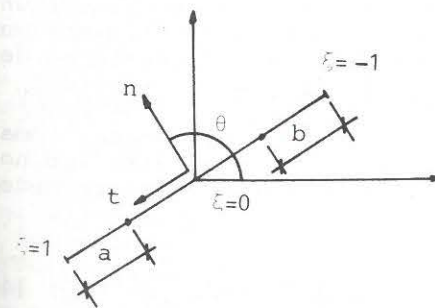


Fig. 4: Definición del elemento utilizado en la aproximación.

La introducción de (8) en (7) permite obtener un sistema lineal de ecuaciones que puede representarse en la forma

$$\begin{aligned} \underline{H} \quad \underline{u} &= \underline{G} \quad \underline{t} \\ (4NE \times 4NE) \quad (4NE \times 1) & \quad (4NE \times 4NE) \quad (4NE \times 1) \end{aligned} \quad (9)$$

donde \underline{H} y \underline{G} son matrices cuyos coeficientes dependen de los núcleos de integración de la Ecuación de Somigliana -- T_{ij} y U_{ij} , y de las matrices \underline{N} , \underline{Q} y \underline{L} -- introducidas en (8). \underline{u} y \underline{t} representan los valores de los desplazamientos y -- las tensiones en el sistema local de -- coordenadas definido para cada elemento.

Para el problema de contacto que se está tratando se puede obtener un sistema de ecuaciones similar al (9) para cada uno de los dominios implicados en el problema, estando estos sistemas relacionados a través de (1).

Si tomamos como referencia las ecuaciones integrales (4) y (5) que ya -- contemplaban las condiciones (1), e introducimos en ellas la aproximación, no resulta difícil establecer una configuración genérica del sistemas de ecuaciones que aparece. En orden a la claridad de dicha representación, y sin que se establezca restricción alguna sobre los problemas a tratar, supongamos que los contornos exteriores a la zona de contacto de ambos dominios ∂D_L se pueden -- particionar en una zona ∂D_u donde están prescritos los desplazamientos y otra -- ∂D_t donde están prescritas las tensiones.

$$\partial D^K = \partial D_L^K + \partial D_C^K = \partial D_u^K + \partial D_t^K + \partial D_C^K \quad K = A, B \quad (10)$$

Llamamos N^K el número de elementos de cada dominio que estará particionado en N_u^K, N_t^K y N_C^K asociados a $\partial D_u^K, \partial D_t^K$ y ∂D_C^K respectivamente, cumpliéndose obviamente:

$$\begin{aligned} N^K &= N_u^K + N_t^K + N_C^K \\ N_C^A &= N_C^B \end{aligned} \quad (11)$$

Con estas premisas, (3) para cada -- contorno K daría lugar a las siguientes N^K ecuaciones lineales:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \underline{H}_t^K & \underline{H}_u^K & \underline{H}_{C1}^K & \underline{H}_{C2}^K \\ \hline \underline{H}_t^K & \underline{H}_u^K & \underline{H}_{C1}^K & \underline{H}_{C2}^K \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{u}_L^K \\ \underline{u}_t^K \\ \underline{u}_C^K \\ \underline{u}_C^K \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{G}_t^K & \underline{G}_u^K & \underline{G}_{C1}^K & \underline{G}_{C2}^K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{t}_L^K \\ \underline{t}_L^K \\ \underline{t}_{C1}^K \\ \underline{t}_{C2}^K \end{Bmatrix} \quad (12)$$

El significado de cada submatriz está en función de las definiciones (10) y (11), siendo sus dimensiones:

$$\begin{aligned} \underline{H}_t^K &\rightarrow (4N_t^K, 4N_t^K) \\ \underline{H}_u^K &\rightarrow (4N_u^K, 4N_u^K) \\ \underline{H}_{C1}^K &\rightarrow (4N_C^K, 2N_C^K) \\ \underline{H}_{C2}^K &\rightarrow (4N_C^K, 2N_C^K) \end{aligned}$$

Finalmente las ecuaciones integrales (4) y (5) en las que se han aplicado las condiciones de contacto producirán, siguiendo la representación (12) el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}_t^A & 0 & -\underline{G}_u^A & 0 & \underline{H}_{C1}^A & \underline{H}_{C2}^A & 0 & -\underline{G}_{C1}^A \\ 0 & \underline{H}_t^B & 0 & -\underline{G}_u^B & -\underline{H}_{C1}^B & 0 & \underline{H}_{C2}^B & -\underline{G}_{C1}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_L^A \\ \underline{u}_L^B \\ \underline{t}_L^A \\ \underline{t}_L^B \\ \underline{u}_{1C}^A \\ \underline{u}_{2C}^A \\ \underline{u}_{2C}^B \\ \underline{t}_{1C}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\underline{H}_u^A \cdot \underline{u}_L^A + \underline{G}_t^A \cdot \underline{t}_L^A \\ -\underline{H}_u^B \cdot \underline{u}_L^B + \underline{G}_t^B \cdot \underline{t}_L^B \end{Bmatrix} \quad (13)$$

(13) representa un sistema de $4(N^A + N^B)$ ecuaciones con $4N_u^A + 4N_u^B + 4N_t^A + 4N_t^B + 2N_C^A + 2N_C^B + 2N_C^A + 2N_C^B$ incógnitas por lo que teniendo en cuenta (1) se trata de un sistema determinado cuya resolución permitirá, en la forma que se explica en el apartado siguiente, calcular las incógnitas (tensiones y/o desplazamientos) en los contornos de ambos dominios.

5. EL PROCESO DE RESOLUCION

En el caso en que la superficie de

contacto final del problema sea conocida, el sistema de ecuaciones (13) puede resolverse directamente aplicando toda la sollicitación exterior \underline{t}^K y \underline{u}^K ya que durante la actuación de estas acciones exteriores, las condiciones de contorno de ambos dominios no varían.

En el caso en que la superficie de contacto final sea desconocida puesto que dependa de la carga aplicada (contacto entre dos esferas, por ejemplo), el problema no puede resolverse de una sola vez, existiendo dos técnicas para abordarlo, al tratarse sólo de una no-linealidad geométrica, es decir, cambio de la longitud total de la zona de contacto y no cambio cualitativo de las condiciones dentro de dicha zona. Puesto que en el problema con fricción además de la primera existe también esta segunda no-linealidad, parece razonable de las dos alternativas, elegir aquella que permite también el tratamiento de los problemas de contacto con fricción, es decir, la técnica incremental. Por ello, en el caso de que la superficie de contacto sea susceptible de variar al evolucionar la sollicitación, todas las variables del problema, tanto las incógnitas \underline{u} y \underline{t} como los datos \underline{u} y \underline{t} que aparecen en (13) deben interpretarse en sentido incremental.

El valor del incremento está relacionado con la variación de sollicitación que provoca el contacto entre dos puntos. Puesto que en la zona prevista de contacto siempre mayor que la real, se ha modelado igual A y B (misma longitud de los elementos y misma situación de los nodos en ellas) los pares de nodos candidatos a contactar están claramente definidos.

Ahora bien, aunque cualquier pequeño incremento de carga permite conocer las direcciones de los desplazamientos en dos nodos candidatos, p^A , p^B , ello no implica la definición inmediata del incremento para que se produzca el contacto ya que ambos desplazamientos no necesariamente provocan que los dos nodos lleguen para el mismo valor de la carga al punto p. (Fig. 5).

Por ello es preciso establecer un criterio de contacto entre los dos puntos en función de las proyecciones de los vectores desplazamientos $\underline{u}(p^A)$ y $\underline{u}(p^B)$ sobre una dirección única, tomándose un valor intermedio entre las normales a los elementos a que pertenecen p^A y p^B .

$$\underline{v}^{AB}(p) = \frac{\underline{v}^A(p) - \underline{v}^B(p)}{|\underline{v}^A(p) - \underline{v}^B(p)|} = -\underline{v}^{BA}(p) \quad (14)$$

La abertura inicial A entre dos pun-

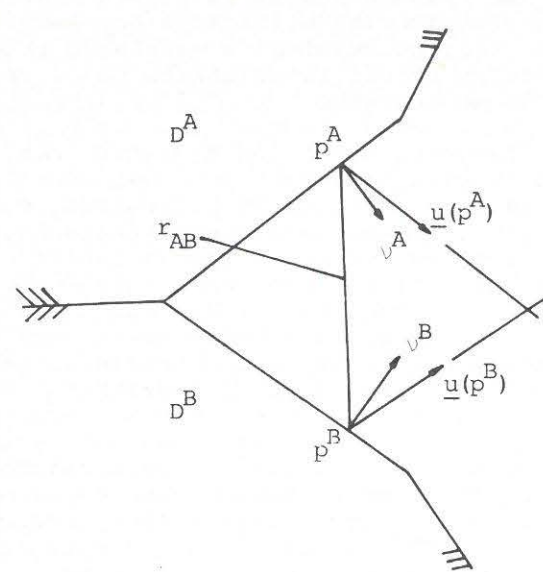


Fig. 5: Definición de la abertura entre dos puntos candidatos al contacto.

tos que van a contactar se establece pues como:

$$\Delta = r_{AB}(p) \cdot \underline{v}^{AB}(p) \quad (15)$$

El incremento de la carga, viene pues condicionado porque las proyecciones de los desplazamientos totales $\underline{u}(p^B)$ y $\underline{u}(p^A)$ sobre la dirección \underline{v}^{AB} sea igual a Δ .

Si en los nodos candidatos a entrar en la zona de contacto se utiliza como sistema local de coordenadas, el definido por \underline{v}^{AB} y su correspondiente normal, lo que puede obtenerse a través de la matriz $L(\theta)$ en (8), la solución del sistema (13) permite directamente establecer la comparación para determinar el menor valor del incremento. Asimismo, este sistema local de coordenadas común a elementos en contacto, es el que se utiliza para establecer las condiciones de contorno definidas en (1).

El uso de elementos discontinuos exige un cuidado extremo al considerar nuevas zonas de contacto, puesto que la introducción solamente de los dos primeros nodos del elemento en contacto puede conducir a incompatibilidades geométricas como se indica en la Fig. 6.

Por ello es preciso recurrir a un valor promediado de los incrementos de carga necesarios para unir los nodos p y los q de A y B, o bien, es preciso introducir restricciones cinemáticas en los desplazamientos de los cuatro nodos de los elementos que van a contactar para que dicho contacto se produzca de una sola vez.

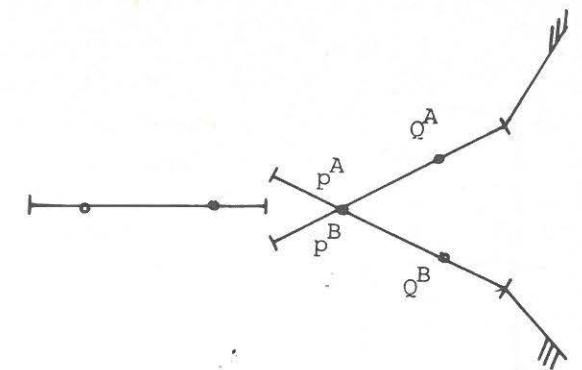


Fig. 6: Incompatibilidades geométricas en elementos discontinuos.

6. RESULTADOS

Se presentan los resultados obtenidos en la compresión de un dominio rectangular sobre una cimentación elástica también rectangular, como se indica en la Fig. 7.

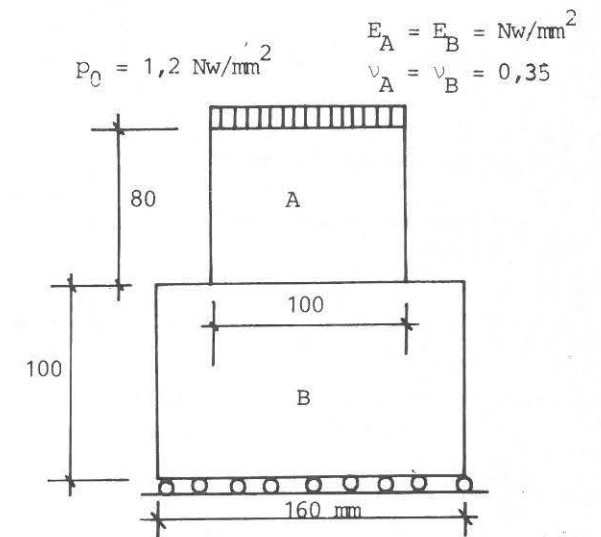


Fig. 7: Configuración del ejemplo.

La simetría del problema permite estudiar solamente la configuración representada en la Fig. 8 con la discretización que en ella se indica.

Los resultados se presentan en las Figs. 9 y 10. La primera representa el valor de la tensión normal en la zona de contacto referido a la carga unitaria. Se compara con los resultados obtenidos por Andersson [14] con elementos parabólicos. La Fig. 10 representa los deslizamientos relativos que se producen en la zona de contacto, relativos al deslizamiento máximo. Los resultados son comparados con los obtenidos por Fredriksson [3] con el Método de los Elementos Finitos, utilizando elementos triangula-

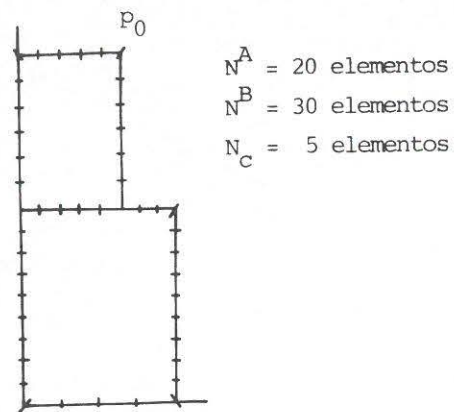


Fig. 8: Discretización utilizada.

res con variación lineal de desplazamiento con 496 elementos, 712 grados de libertad y 27 nodos de contacto.

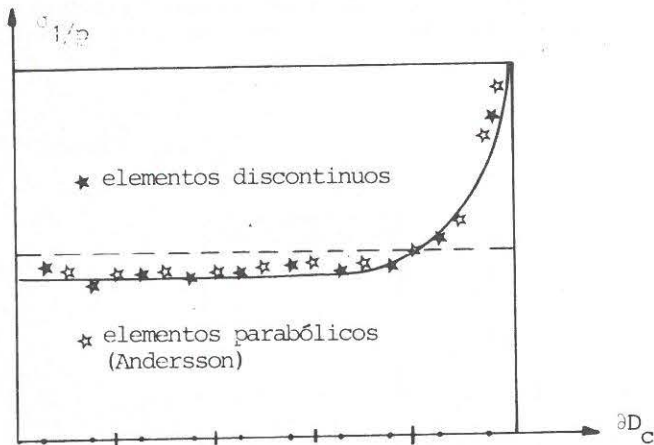


Fig. 9: Tensiones normales en la zona de contacto.

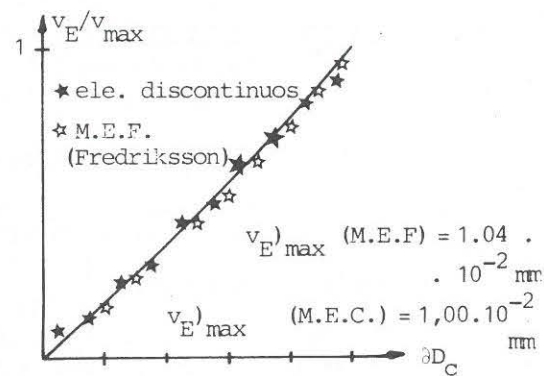


Fig. 10: Deslizamientos relativos en la zona de contacto.

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación en ecuaciones integrales que permite la aplicación del Método de los Elementos de Contorno para el problema de contacto de dominios bidimensionales sin fricción.

La formulación no incluye las variables intermedias utilizadas por Andersson [12], no resultando necesario establecer a priori la ubicación de la zona común de contacto.

La comparación con Elementos Finitos resulta para este problema, ventajosa para la formulación presentada. Por un lado, conceptualmente se trata de un problema en que todas las variables que interesan están en el contorno. En el M.E.F. es preciso utilizar elementos superiores o necesariamente se producirán errores al aplicar las condiciones de contorno en tensiones (Fredriksson [3]). Se trata de un problema que hay que resolver incrementalmente, una parte que puede ser considerada costosa computacionalmente en el M.E.C, como es el cálculo de desplazamientos y tensiones en puntos internos, si es que se está interesado en muchos puntos, no tiene para este problema una importancia destacable en el tiempo total de cálculo.

Los elementos discontinuos presentados en este trabajo para el problema de contacto han dado excelentes resultados lo que unido a la simplicidad para aplicar condiciones de contorno, para evitar el problema de las esquinas, hace pensar en su ventajosa aplicación para problemas tridimensionales.

Los mayores esfuerzos para disminuir los tiempos de computación deben encaminarse a mejorar la resolución del sistema de ecuaciones siguiendo líneas de actuación como las propuestas por Marks [11] y Bettess [18].

8. REFERENCIAS

1. Hertz. "Gesamelte Werke, Bdo. 1". Leipzig, 1895.
2. Gladwell, G.M.L. "Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity". Sijthoff and Noordhoff (1980).
3. Fredriksson, B. "Finite Element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems". Computers and Structures, Vol. 6, pp. 281-290, 1976.
4. Gaertner, R. "Investigation of plane elastic contact allowing for friction". Computer and Structure, Vol. 7, pp. 59-63, 1977.
5. Okamoto, N., y Nabazawa, M. "Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions". Int. J. Num. M. Eng., Vol. 14, pp. 337-357, 1979.

6. Herrmann, L.R. "Finite Elements analysis of contact problems", ASCE, pp. 1043-1057, octubre, 1978.

7. Nguyen Dang Hung y Gery de Saxce "Frictionless contact of elastic bodies by Finite Element Method and Mathematical programming technique" Computers and Structure, Vol. 11, pp. 55-67, 1980.

8. Mahmoud, F.F., Salamon, N.J., Marks, W.R. "A Direct automated procedure for frictionless contact problems". Int. J. Num. M. Eng., Vol. 8, pp. 245-257 (1982).

9. Haber, R.B., Abel, J.F. "Contact-Slip Analysis using Mixed Displacement". Journal of Eng. Mech. ASCE. Vol. 109, No 2. Abril, 1983.

10. Torstenfelt, B. "Contact Problems with friction in general purpose Finite Element computer Programs". Computers and Structures, Vol. 16, No 1-4, pp. 487-493 (1983).

11. Marks, W.R. y Salamon, N.J. "A modified Conjugate Gradient Method for frictionless Contact Problems". ASME. Vol. 105. April, 1983.

12. Andersson, T., Fredriksson, B., Allan Persson, B.G. "The Boundary Element Method applied to two dimensional contact Problems". New Developments in Boundary Element Methods Ed. by C.A. Brebbia CML Publications. 1980.

13. Andersson, T. "The Boundary Element Method applied to two-dimensional contact Problem with Friction". Boundary Element Method. Ed. by C.A. Brebbia. Springer-Verlag, 1981.

14. Andersson, T. "The Second generation Boundary Element Contact Program". Boundary Element Methods in Engineering Springer-Verlag, 1982.

15. Andersson, T. y Allan Persson, B.G. "The Boundary Element Method applied to two dimensional Contact problems". Progress in Boundary Element Method. Ed. by C.A. Brebbia. Vol. 2. Pentech Press. 1983.

16. Paris, F. "El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad". Tesis Doctoral. Madrid, 1979.

17. Paris, F. y Garrido, J.A. "Elementos discontinuos lineales en el análisis elástico bidimensional con el Método de los Elementos de Contorno". Anales de Ingeniería Mecánica. Año 1, No 1, pp. 20-25. 1983.

18. Bettess, J.A. "Economical solution technique for boundary integral matrices". Int. J. Num. Mat. Eng. Vol. 19, pp. 1073-1077. 1983.