ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN EN LOS ALUMNOS DE BACHILLERATO Y PRIMER AÑO DE UNIVERSIDAD SOBRE LA NOCIÓN MATEMÁTICA DE DERIVADA (DESARROLLO DEL CONCEPTO)

Gloria Mª Sánchez-Matamoros García

Este libro ha sido posible gracias al apoyo del Proyecto de Investigación PSI2008-02289/PSIC correspondiente a la convocatoria de ayudas a proyectos I+D 2008 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN EN LOS ALUMNOS DE BACHILLERATO Y PRIMER AÑO DE UNIVERSIDAD SOBRE LA NOCIÓN MATEMÁTICA DE DERIVADA (DESARROLLO DEL CONCEPTO)

Autor: Gloria Mª Sánchez-Matamoros García

Imprime: Edición Digital @tres, S.L.L.
C/ Doctor Escobar Delmas nº, 7 Bjo-B
41018-SEVILLA

I.S.B.N.: 978-84-692-8430-8
Depósito Legal: SE-82-2010

IMPRESO EN ESPAÑA – PRINTED IN SPAIN

Si tuviésemos de alguna manera que sintetizar en una palabra lo que ha llevado a la realización de este libro, ésta sería compartir.

Compartir muchas horas de trabajo con personas que han sabido trazar senderos por los que la labor investigadora de una principiante pudiese discurrir, en especial Salvador Llinares Ciscar y Mercedes García Blanco.

Compartir lo que ha supuesto llevar a cabo una investigación en el campo de la Educación Matemática, en la que no sólo se ha identificado un problema coherente con unos planteamientos teóricos, formulado unos objetivos y elaborado un diseño, sino que también se ha aprendido a apreciar las particularidades que la investigación en este campo conlleva. Es indudable que los avances en dicho campo han permitido que se pueda profundizar en temas como el aquí presentado, en el que se aborda la comprensión de alumnos de niveles no obligatorios de conceptos matemáticos específicos, como es el caso de la derivada.

Compartir con esos alumnos, universitarios y de Bachillerato, los momentos de duda e incertidumbre que implica colaborar en un trabajo de estas características, y que ellos supieron superar mostrando en todo momento una gran disponibilidad.

Pero compartir también es agradecer. En este sentido, junto a nuestro agradecimiento a todos los que han hecho posible este trabajo, queremos mencionar la colaboración prestada por organismos que, con su ayuda, han hecho posible su impresión y facilitado su divulgación.

A mis padres

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO 1: Problemática de investigación

El estudio de la comprensión de conceptos matemáticos ha sido y es un campo de gran interés para la investigación en Educación Matemática, y es en este ámbito en el que queremos encuadrar nuestro estudio. En concreto nuestra investigación pretende profundizar en el desarrollo de la comprensión del concepto de Derivada. Este concepto matemático empieza a desarrollarse, desde la perspectiva de la enseñanza, en la Enseñanza Secundaria, en el nivel de Bachillerato (16-18 años). Por ello, desde nuestro punto de vista es necesario "mirar" en los cursos correspondientes a este nivel educativo. Pero además, al ser este nivel una preparación previa para seguir formándose a nivel superior, también es conveniente estudiar lo que pasa en el primer año de la Universidad, en concreto en primer año de la Licenciatura de Matemáticas.

En este primer capítulo haremos unas breves reflexiones sobre: la enseñanza / aprendizaje de las matemáticas en estos niveles, la noción de derivada desde el punto de vista histórico, y cómo aparece la derivada en el currículo de Bachillerato y primer año de la Universidad. Finalizaremos este capítulo comentando lo que conocemos de la comprensión de la noción de derivada a través de las aportaciones de diferentes investigaciones.

1.1. Desde el Bachillerato a la Universidad

Las Matemáticas nacen de la necesidad de resolver determinados problemas prácticos, y se sustentan en su capacidad para tratar, modelizar, explicar y predecir situaciones reales, y dar consistencia y rigor a los conocimientos científicos. Constituyen un conjunto muy amplio de conocimientos que tienen en común un determinado modo de representar la realidad. La necesidad de una fundamentación teórica aparece por primera vez en el Bachillerato. El desarrollo de esta faceta del proceder matemático conlleva la introducción de la demostración, entendida en su sentido más amplio como argumentación válida para uno mismo y para los demás. Dicha fundamentación debe adaptarse a la experiencia y características del alumnado (no se puede tratar del mismo modo en alumnos de Bachillerato que en alumnos de la Universidad). Según Dreyfus (2000) para la mayoría de los estudiantes de secundaria, la diferencia entre un teorema y su recíproco no es muy clara, debido a que casi todas las implicaciones que encuentran son bidireccionales.

La resolución de problemas matemáticos, entendida como una manera de enseñar matemáticas, permite mostrar en qué consisten estas, cómo se construyen, qué dificultades plantean y para qué sirven. Construir y presentar una argumentación o explicar los procesos seguidos al abordar la resolución de un problema constituyen aspectos importantes de la formación científica.

Cada estudiante debe tomarse el tiempo necesario para edificar un conjunto coherente de conocimientos y acceder al descubrimiento y a la experiencia de la comprensión. El alumno debe ser consciente de que la mayoría de las ideas matemáticas han necesitado tiempo para emerger y desarrollarse. La historia de las matemáticas es una fuente de problemas genuinos que pueden servir para introducir determinados contenidos, y conectarlos con otros campos del conocimiento. Un estudiante de Bachillerato debería situar las ideas matemáticas fundamentales en su contexto y en su momento histórico.

Las Matemáticas de Bachillerato deben desarrollar en el alumno la capacidad de razonamiento y el sentido crítico necesario para interpretar la realidad, y dotarles, al mismo tiempo, de las herramientas adecuadas para resolver problemas cotidianos, pero también, deben preparar al alumno para continuar sus estudios.

En las matemáticas de Bachillerato, sobre todo en las de segundo curso, los alumnos deben alcanzar el grado de madurez necesario, en el manejo del lenguaje formal y de los procesos lógicos deductivos, que les permitan interpretar y desarrollar demostraciones que no sean excesivamente complicadas (y que en estudios posteriores, en la Universidad, irán desarrollando con mayor complejidad), plantear conjeturas, analizar procesos lógicos y obtener conclusiones, generalizaciones, ...

Por otra parte, la transición del Bachillerato a la Universidad es un proceso complejo y difícil. La diferente manera en la que se presentan las matemáticas en Bachillerato y en la Universidad parece no tener en cuenta las diferentes características de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes en estos dos niveles educativos, y por tanto, no considera las características de la comprensión de los alumnos de los conceptos matemáticos (Fonseca, 2003). Esta situación define la necesidad de investigar en este proceso de transición del Bachillerato a la Universidad desde la perspectiva de la naturaleza de la comprensión de los conceptos matemáticos generados por los alumnos y de las características de la actividad matemática cuando resuelve problemas.

1.2. La noción de derivada

En este apartado indagaremos en los orígenes del cálculo diferencial, a través del desarrollo histórico de la noción de Derivada y a continuación analizaremos la presencia del concepto derivada en el currículo de Bachillerato y primer año de la Universidad.

1.2.1. Desarrollo histórico de la noción de derivada

La derivada es el concepto fundamental del Cálculo diferencial, existen distintas publicaciones que se pueden consultar para destacar aspectos del desarrollo histórico de dicha noción Bochner (1991), González (1992), Durán (1996) entre otros. Nosotros nos basaremos fundamentalmente en Aleksandrov et al. (1988) y Kline (1992). Dos tipos diferentes de problemas – el problema físico de calcular la velocidad instantánea de una partícula móvil, y el problema geométrico de encontrar la tangente a una línea de uno de sus puntos – conducen de manera natural a la misma idea básica de derivada.

El cálculo fue desarrollado sobre todo para tratar los principales problemas científicos del siglo XVII. Según Kline (1992, p.452) había cuatro tipos principales de problemas:

- Primer tipo de problemas: Dada la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo, obtener la velocidad y la aceleración en cualquier instante; y al revés, dada la fórmula que describe la aceleración de un cuerpo como función del tiempo, obtener la velocidad y la distancia recorrida. La velocidad de un movimiento no uniforme en un instante dado es un concepto puramente físico, que surge de la experiencia. (Aleksandrov et al.,1988, p.126)

- Segundo tipo de problemas: Obtener la tangente a una curva. Del estudio del movimiento surgía un problema científico que implicaba la tangente a una curva. La dirección del movimiento de un cuerpo móvil en cualquier punto de su trayectoria es la dirección de la tangente a la trayectoria. Según Kline (1992, p.457) para Descartes encontrar la tangente a una curva era importante porque permitía encontrar propiedades de las curvas. Escribió su método de Cálculo en el segundo libro de "*La Geometrie",* este método era puramente algebraico y no incluía el concepto de límite, a diferencia del método elaborado por Fermat que si implicaba dicho concepto, y se formulaba rigurosamente. El método de Descartes sólo era útil para curvas cuya función fuera y =f(x), donde f(x) es un polinomio sencillo. Otros científicos como Barrow también dieron un método para obtener tangentes a las curvas, se trata de un método geométrico bastante complicado y que hace uso de curvas curvilíneas.
- Tercer tipo de problemas: Obtener el valor máximo o mínimo de una función. Puede decirse que comienza con una observación de Kepler, de quien se dice que se interesó por el problema de los volúmenes porque notó la falta de precisión de los métodos utilizados por los tratantes de vinos, para obtener el volumen de los barriles. La identificación de las áreas y volúmenes curvilíneos con la suma de un número infinito de elementos infinitesimales es la esencia del método de Kepler, (Kline 1992, p.459)
- Cuarto tipo de problemas: Obtener longitudes de curvas como por ejemplo, la distancia recorrida por un planeta en un periodo de tiempo dado.

Según este mismo autor los cuatro problemas habían sido considerados como diferentes, sin embargo se detectaron relaciones entre ellos que, incluso, llegaron a utilizarse. Por ejemplo, Fermat había usado exactamente el mismo método para obtener tangentes que para obtener el valor máximo de una función. Este científico conocía la relación entre área y derivada en casos particulares pero no valoró su generalidad o importancia. Barrow expuso la relación entre obtener la tangente a una curva y el problema del área, pero planteada en forma geométrica y ni siquiera él mismo se dio cuenta de su significado (Kline 1992, p.471).

Así, los matemáticos del siglo XVII se fueron percatando gradualmente de que una gran parte de los problemas que surgían de distintos tipos de movimiento, así como de problemas geométricos que no se habían podido abordar con los métodos usuales, podían reducirse a dos tipos:

- Ejemplos de problemas del primer tipo: "hallar la velocidad en cualquier instante de un movimiento no uniforme", y "trazar una tangente a una curva dada". Estos problemas condujeron a una rama del análisis que recibió el nombre de "*cálculo diferencial*".
- Ejemplos del segundo tipo de problemas: "encontrar el área de una figura curvilínea" (el problema de la curvatura) o "el espacio recorrido en un movimiento no uniforme", o en general, "el efecto total de la acción de una magnitud continuamente variable". Este grupo de problemas condujo a otra rama del análisis, el "*cálculo integral*".

Así se concretizaron dos grupos de problemas fundamentales: "el problema de las tangentes", y "el problema de las cuadraturas".

Los problemas del Cálculo fueron abordados por muchos matemáticos del siglo XVII. Todas sus contribuciones fueron coronadas por las realizaciones de Newton y Leibniz (Kline 1992, p.454). El problema que se replantearon Newton y Leibniz, según el cual la inversión del problema de las tangentes resolvía el problema de la cuadratura, suministraba un método directo para calcular las áreas limitadas por curvas muy variadas. Newton generalizó las ideas ya adelantadas por muchos otros, estableció métodos ya maduros y mostró las interrelaciones entre varios de los problemas descritos anteriormente. Aunque aprendió mucho como alumno de Barrow, en sus trabajos de Álgebra y Cálculo estuvo más influido por el científico Wallis (Kline 1992, p.475).

La labor de los constructores del nuevo cálculo se desarrolló en dos direcciones:

- Búsqueda de los procedimientos adecuados para determinar el área de una superficie limitada por una curva de ecuación conocida, el volumen de un sólido de rotación cualquiera y el baricentro de las figuras de dos y tres dimensiones.
- Exploración de los procedimientos de determinación de la tangente para cada punto de una curva de ecuación conocida, sus eventuales máximos y mínimos, sus puntos de inflexión y su curvatura.

El segundo problema era más nuevo que el del área, y su solución era conocida solamente para algunos tipos particulares de curva; pero la importancia de ambas direcciones reside sobre todo en que la búsqueda del área es equivalente al cálculo de una integral, y la determinación de una tangente al de una derivada.

Es importante resaltar que Newton y Leibniz introdujeron símbolos cómodos y precisos para regular cada una de las operaciones fundamentales que se manejan. Este hecho eliminó para siempre la improvisación en la notación, tal sistematización no era sencilla pues implicaba la reorganización de todos los resultados conseguidos.

Centrándonos en las aportaciones de Newton, este científico no sólo dio un método general para obtener el cambio relativo de una variable respecto a la otra, sino que mostró que el área puede obtenerse invirtiendo el proceso de obtener un cambio relativo. Las áreas se habían obtenido y expresado como sumación de áreas infinitesimales. Newton aplicó el método para obtener el área encerrada bajo muchas curvas. Introdujo dos importantes tipos de sistematización: el cálculo de las fluxiones y el de las primeras y últimas razones, si bien los símbolos propuestos por él son menos adecuados que los empleados por Leibniz.

Newton elabora el método de las fluxiones partiendo de que líneas y superficies se pueden considerar constituidas no de sumas, sino de desplazamientos de puntos o de líneas, y de que las magnitudes que varían continuamente lo hacen en función de una "velocidad de crecimiento" que puede ser medida y comparada. Newton decide llamar fluxión a esta velocidad y fluyentes a las cantidades descritas mediante un movimiento continuo. Es decir, llama fluyente a una cantidad variable y a su cambio relativo fluxión. Se enfrenta en seguida con dos problemas fundamentales: cálculo de las fluxiones, o de la relación entre dos fluxiones cuando se conoce la relación entre las respectivas fluyentes, y cálculo de las fluyentes cuando se conoce la relación en que se hallan las fluxiones. Estos dos problemas son los que hoy día conocemos como cálculo de derivadas y de integrales, y fueron las reglas de ambos cálculos las que Newton descubrió. En el "*Method of Fluxions*" Newton incluyó aplicaciones de las fluxiones a la diferenciación de funciones implícitas y a la obtención de tangentes a la curva, máximos y mínimos de las funciones, curvatura de las curvas y puntos de inflexión de las mismas. También obtuvo áreas y longitudes de las curvas (Kline 1992, p. 481)

Por otro lado, Leibniz no llegó al cálculo infenitesimal a través de las situaciones prácticas (como hizo Newton), su aportación, entre otras, fue el símbolo de integración $\int$; este símbolo indicaba la suma de todos los "indivisibles" que llenaban un área, y para señalar la integral de una variable *y*, función de una variable independiente *x*, Leibniz recomienda no omitir la introducción de *dx* bajo el símbolo de la integral, escribiéndose así: $\int ydx$, notación que ha permanecido invariable hasta hoy. Según Aleksandrov et al. (1988, p.171), el hecho de que estas notaciones introducidas por Leibniz (dx, d^2x, d/dx, $\int ydx$) se utilicen todavía muestra lo acertado de su elección. La lectura de las obras matemáticas de Pascal permitió a Leibniz descubrir el triángulo característico, y llamó *diferenciales* a la razón entre las diferencias no nulas de sus abscisas y sus ordenadas; la condición esencial que impuso a las operaciones de obtención de las tangentes fue la de relacionar las diferenciales entre ellas. De este modo surgió la principal operación del nuevo cálculo, o sea, el estudio de la relación *dy/dx* entre las dos diferenciales correspondientes a los dos catetos del "triángulo característico".

Tanto a Newton como a Leibniz se les debe reconocer que vieran el Cálculo como un método nuevo y general, aplicable a muchos tipos de funciones. Después de sus contribuciones el Cálculo dejó de ser un apéndice de la Geometría griega para convertirse en una ciencia independiente capaz de manejar una cantidad de problemas ampliamente extendidos (Kline 1992, p.500)

La evolución de los conceptos del análisis matemático (derivada, integral, ...) continuó después de Newton y Leibniz, y continúa todavía en nuestros días. Según Aleksandrov et al. (1988, p.172) una etapa en esta evolución que merece ser destacada es la que tuvo lugar a comienzos del siglo XIX, y que está relacionada con el trabajo de Cauchy, que dio una definición formal y precisa del concepto de límite y la utilizó como base para sus definiciones de *continuidad, derivada, diferencial e integral*.

La descripción del desarrollo histórico de los conceptos fundamentales del cálculo muestra el vínculo existente entre la modelización de problemas, la visualización e interpretación de problemas desde una perspectiva geométrica y el desarrollo de la simbolización. La síntesis e integración paulatina de los significados generados en cada tipo de problema muestra el tipo de pensamiento y/o razonamiento que los matemáticos del siglo XVII generaron para caracterizar la idea de variación de la velocidad, y tangente a una curva, estableciéndose la generación de la idea de derivada en un punto como paso previo en la consideración de función derivada. Así, la conceptualización de la idea de variación continua se apoya en la integración y síntesis de planteamientos desde perspectivas numéricas y gráficas.

1.2.2. La derivada en el currículo. Bachillerato y primer año de la Universidad

Según se recoge en el Decreto 208/2002, de 23 de julio, refiriéndose al concepto de Derivada en Matemáticas I (materia de 1º Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud – Tecnológico):

> *"conceptos fundamentales como límite, continuidad, la derivabilidad, la integración, deben ser tratados y manejados de forma intuitiva antes de su formalización.... En el caso de la derivada se puede empezar por aproximaciones a la pendiente de una curva, sin olvidar las de estimar y medir sobre el papel, tratar los aspectos numéricos (tablas, límites por aproximación, cálculo directo) y la visión gráfica con medios informáticos. A continuación se puede generar la derivada punto a punto y reconocer las funciones derivadas de las funciones elementales más usuales, que ya quedarían disponibles para su uso".*

En dicho Decreto figuran como contenidos mínimos de esta asignatura:

- Idea intuitiva e interpretación gráfica de límite de una función.
- Límite en un punto y continuidad de una función en ese punto.
- Variación instantánea: concepto e interpretación geométrica y física de la derivada de una función en un punto.
- Función derivada. Definición. Derivadas de las funciones elementales.

Comellas y Serra (2000) afirman que en el currículo de Bachillerato hay que enfatizar aquellos aspectos de la materia que van a ser útiles para un amplio sector del alumnado. Así, en las unidades didácticas sobre el tema de derivada que aparecen en los libros de texto de diferentes editoriales (Editex, S.M., Anaya, Santillana, Oxford), se aprecia que los alumnos que cursan 1º de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, son estudiantes que han de trabajar la derivada en un punto (f ’(a)) y comienzan a trabajar con el operador derivada, aplicándolo a reglas de derivación. Trabajan con aspectos de la noción de derivada en un punto como pendiente de la tangente a la curva (modo gráfico) y como límite del cociente incremental (modo analítico). Los aspectos de la noción de derivada que trabajan en intervalos son la definición de función derivada y las reglas de derivación, realizándose el paso de la idea de derivada en un punto a la idea de función derivada de manera implícita. Un ejemplo de esto lo tenemos en el tipo de tareas que figuran en los libros de texto mencionados. Las tareas que aparecen a continuación corresponden al libro “Matemáticas I” Editorial Editex (1996)

1 Calcula la tasa de variación en el intervalo [1, 4] para las siguientes funciones:

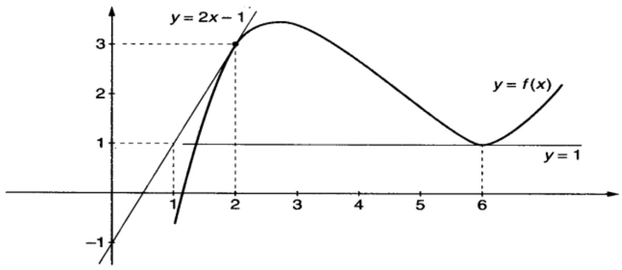
$$f(x) = 3x + 2; \quad g(x) = 4 - x^2; \quad h(x) = \sqrt{x+5}; \quad t(x) = \frac{8}{x^2+4}$$

4 Calcula, usando la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas siguientes e los puntos que se indican:

a) $f(x) = 2x^2 + 3;\ f'(1)$ *b)* $g(x) = \frac{-2}{x+1};\ D[g(1)]$ *c)* $h(x) = \sqrt{3x^2+4};\ h'(2)$

d) $k(x) = 6;\ D[K(0)]$ *e)* $l(x) = \frac{3}{x^2};\ l'(3)$ *f)* $t(x) = \sqrt{x-3};\ D[t(6)]$

7 Sea la función cuya gráfica aparece en el dibujo adjunto. Calcula, de forma razonada: $D[f(2)]$, $D[f(6)]$.



12 Halla las funciones derivadas de las siguientes, aplicando la definición:

a) $f(x) = -3x + 5$ *b)* $g(x) = (2x-3)^2$ *c)* $h(x) = x^3 - 2x^3 + 5$ *d)* $k(x) = 2\sqrt{x^2+3}$

Se observa que para la resolución de las tareas se pueden utilizar aspectos gráficos y analíticos referidos a la derivada en un punto (f ’(a)), y referido a la función derivada se puede usar la definición a través de su expresión analítica como límite del cociente incremental y las reglas de derivación de funciones sencillas.

Respecto a Matemáticas II (materia de 2º Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud – Tecnológico) el mencionado Decreto recoge:

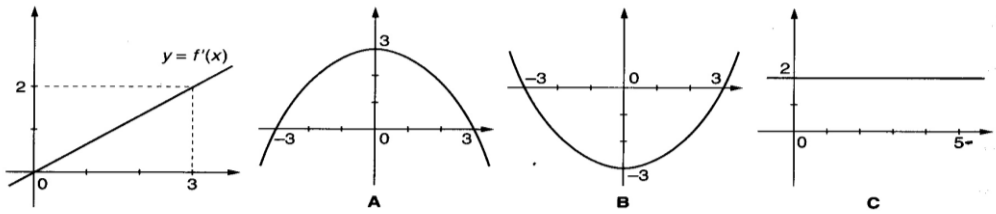
> *“en el bloque de análisis, se profundizan y fundamentan las ideas intuitivas construidas en Matemáticas I, completándose el bloque con el cálculo de derivadas, sus aplicaciones y la integral”.*

En dicho Decreto figuran como contenidos mínimos de esta asignatura:

- Límites, continuidad y derivación en un punto. Cálculo de límites.
- Asíntotas: concepto y determinación.
- Continuidad en un punto y en un intervalo.
- Derivadas de las familias de funciones conocidas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta.
- Derivación y continuidad en un punto.
- Aplicación de los conceptos de límite, continuidad y derivada, al estudio de propiedades locales de las funciones y a la representación gráfica de funciones elementales.

Los alumnos que cursan 2º de Bachillerato Tecnológico, son estudiantes para los que la noción de Derivada no es nueva, pues ya se les ha introducido en el curso anterior, según su currículo estos alumnos deben empezar a trabajar con aspectos del concepto de Derivada relacionados con f ’’ (relaciones de f ’ y f ’’ con los extremos y los puntos de inflexión de f, relaciones del signo de f ’’ con la concavidad y convexidad de f, ...). El currículo en 2º Curso de Bachillerato se centra en el estudio de la función derivada y del operador derivada (f ’ y f ’’). Debido a ello, los estudiantes pueden establecer relaciones entre aspectos del concepto utilizados por ellos en la resolución de una tarea. Además, la interpretación geométrica de la derivada se verá también con carácter global. Un ejemplo de esto lo tenemos en el tipo de tareas que figuran en los libros de texto (Santillana, Anaya, S.M., Editex, Oxford), las tareas que aparecen a continuación corresponden al libro “Matemáticas II” Editorial Editex (1996)

21 La primera gráfica corresponde a la función derivada de $f(x)$.



a) Obtén la expresión analítica de $y = f'(x)$.

b) Indica cuál de las gráficas, **A**, **B** o **C** corresponde a la función $f(x)$. Justifica la respuesta.

En tareas de este tipo para resolver el apartado b) el estudiante puede utilizar la expresión analítica de f ’(x) calculada en el apartado a) o puede resolverla desde el modo gráfico fijándose en las relaciones que se pueden establecer entre f y f ’ a través de distintos aspectos de la noción de derivada, por ejemplo la relación que existe entre el signo de f ’ y el crecimiento de f.

Otro tipo de tareas que figura en los textos de 2º Bachillerato es:

25 ¿Es derivable en el punto $x = 1$ la función $f(x) = x + |x - 1|$? Justifica la respuesta.

El estudiante para la resolución de tareas de este tipo necesita hacer uso de la idea de derivada en un punto y de la relación:

Si f derivable en (a, b) $\rightarrow$ *f continua en (a, b).*

Por último otra tarea muy frecuente en este nivel es:

10 Representa gráficamente la función $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

En este tipo de tareas el estudiante puede hacer uso de aspectos del concepto de derivada en modo analítico con carácter puntual o en intervalos. Con carácter puntual, por ejemplo, los aspectos del concepto de derivada que relacionan los puntos en los que f ’ es igual a 0 con los extremos o puntos de inflexión de f, y con carácter global (es decir en intervalos) los que relacionan el signo de f ’ con el crecimiento de f o el signo de f ’’ con la concavidad de f, y a través de ellos llegar al gráfico de f.

En conjunto, las características de los problemas que el currículo presenta a los estudiantes en los dos años de Bachillerato muestran la derivada desde la integración de una perspectiva analítica y geométrica, apoyándose en la presentación de la idea de derivada en un punto. De manera implícita, y a través de la definición, se introduce la idea de la función derivada y el operador derivada (a través del cálculo de derivadas sucesivas). Es de resaltar que el tipo de actividades que el currículo presenta a los estudiantes demanda de ellos la realización de ciertas conexiones lógicas entre algunos aspectos del concepto.

En primer año de la Universidad, la derivada de una función junto con la integral constituyen la fuente del Cálculo Infinitesimal, aunque previamente, son conceptos fundamentales el concepto de función, límite o continuidad. Estas ideas / nociones matemáticas, según aparece en los libros de consulta de Cálculo / Análisis Matemático en los que se contempla el concepto de derivada, se definen y se trabajan de manera formal, y se discuten su significado en términos de problemas matemáticos. Así, los contenidos según figura en el libro “Análisis Matemático” Apóstol. Editorial Reverté, s.a. (1982) en el capítulo 5, comienza por la definición de Derivada, para continuar con las relaciones entre derivadas y continuidad (Derivadas laterales y derivadas infinitas), álgebra de derivadas y regla de la cadena, pasando al estudio local de derivadas (relación entre los puntos en los que f ' es igual a 0 con los extremos locales o puntos de inflexión de f). Además se estudian diversos teoremas en relación a la derivada como: Teorema de Rolle, Teorema del valor medio para derivadas, Teorema del valor intermedio para derivadas, Fórmula de Taylor con resto. El contenido recogido en este libro, finaliza con el estudio de Derivadas de funciones vectoriales, Derivadas parciales, Diferenciación de funciones de una variable compleja, y Ecuaciones de Cauchy – Riemann.

Los estudiantes de primer curso de la Universidad de Sevilla (Licenciatura de Matemáticas) que hayan cursado la asignatura de Elementos de Análisis Matemático con contenidos del concepto de Derivada, podrán trabajar con todos los aspectos del concepto de derivada tanto desde su perspectiva gráfica, como pendiente de la tangente a la curva, como desde su perspectiva analítica como límite del cociente incremental, con carácter puntual o global (es decir, en intervalos) según les exija la resolución de la tarea. Además, estos estudiantes pueden utilizar aspectos del concepto de derivada que relacionan a f ' y f '', hecho que no sucedía en Bachillerato. Un ejemplo de esto lo tenemos en el tipo de tareas que figuran en los libros de consulta de estos estudiantes ("Análisis Matemático" Apóstol. Editorial Reverté; "Calculus" Spivak. Editorial Reverté...), la tarea que aparece a continuación corresponde al libro "Calculus" Spivak. Editorial Reverté (1974):

8. La figura 25 muestra la gráfica de la *derivada* de *f*. Hallar todos los puntos máximos y mínimos locales de *f*.

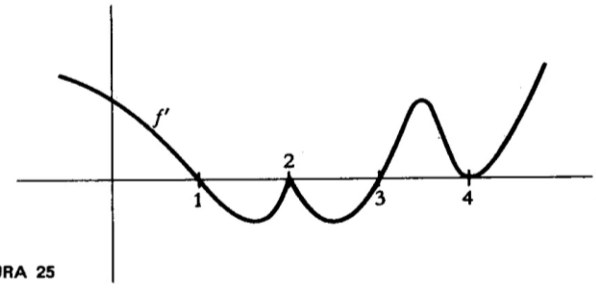


FIGURA 25

En esta tarea, f ’ muestra en su gráfico cambios de signo, cambios de crecimiento, puntos de corte con el eje X, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso, todo ello conlleva que para esbozar el gráfico de f el estudiante necesita establecer relaciones entre aspectos del concepto de derivada analíticos y/o gráficos globales (es decir, en intervalos) que vinculen el crecimiento de f ’ a la convexidad de f, el signo de f ’ al crecimiento de f y aspectos del concepto analíticos y/o gráficos puntuales vinculando f ’ a extremos y puntos de inflexión de f.

El estudiante puede resolver la tarea a través de aspectos del concepto de la noción de derivada gráficos como pendiente de la recta tangente a la gráfica o a través de aspectos del concepto analíticos puntuales y globales vinculados al crecimiento y a la concavidad. En ambos casos y para llegar al gráfico de f es necesario considerar f ’ como función y (f ’)’ como su derivada, al menos puntualmente, obteniendo así información sobre f ’’ desde el gráfico de f ’, sin el uso de estas relaciones el esbozo del gráfico de f no es posible.

Es necesario aplicar estas relaciones entre diferentes aspectos del concepto para resolver tareas que figuran en los libros de consulta de los estudiantes de 1º Licenciatura de Matemáticas. Sin embargo, no sucede lo mismo en las tareas que figuran en los libros de texto de Bachillerato, en las que no es necesario utilizarlas.

Este breve análisis de las características de las tareas-problemas que los alumnos deben realizar en Bachillerato y Universidad nos indica que la diferencia en el tipo de actividad matemática que deben generar los estudiantes radica no sólo en la cantidad de elementos matemáticos del concepto de derivada que se ponen en juego, sino también en la naturaleza de las relaciones que se deben establecer entre dichos elementos durante la actividad de resolución de problemas.

Por tanto, las relaciones entre los elementos del concepto de derivada, tanto de la idea de derivada en un punto, como de la idea de función derivada, desde perspectivas analíticas o gráficas, constituyen una característica esencial para determinar lo que los alumnos pueden llegar a ser capaces de resolver.

1.3. La problemática de la investigación

El desarrollo de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de términos relacionados con el cálculo diferencial e integral (funciones (García y Llinares, 1996), límites (Sierra et al., 1999, Espinoza y Azcárate, 2000), ...), así como nuestra experiencia como profesora de Educación Secundaria, nos ha permitido comprobar la enorme dificultad de la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos, en particular el concepto de Derivada. Respecto a este hecho, Artigue (1995) afirma que aunque se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, sin embargo se encuentran grandes dificultades para hacerles alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. Así, muchos estudiantes son capaces de llevar a cabo los ejercicios que se les proponen, por ejemplo, son capaces de aplicar de forma correcta las reglas de derivación, y sin embargo muestran dificultades al manejar el significado de la noción de Derivada (ya sea a través de su expresión analítica como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente). Realmente, el fondo de la cuestión es que estos estudiantes no han construido el concepto de Derivada.

Es frecuente, como hemos podido comprobar, que para la enseñanza del concepto de Derivada, se estudie previamente los conceptos de función y de límite. La derivada aparece como el límite de los cocientes incrementales o como el límite de las secantes. La función y el límite son conceptos matemáticos que presentan gran dificultad de aprendizaje a los estudiantes, como podemos observar en diversas investigaciones centradas en la comprensión de los mismos (Breidenbach et al., 1992; Cottrill et al., 1996), por tanto el aprendizaje de la derivada viene afectado por ello.

Las concepciones previas de los estudiantes que provienen de su experiencia pueden contener aspectos contradictorios que se manifiestan según las situaciones y son muy resistentes al cambio. Por todo esto, nos parece necesario profundizar en la comprensión de la noción matemática de la derivada de los alumnos de Bachillerato y primer año de la Licenciatura de Matemáticas, dado que es en estos cursos donde se inicia y construye los aspectos básicos que forman el concepto. Al centrarnos en el proceso de transición del Bachillerato a la Universidad hace que planteemos el problema de investigación sobre la comprensión desde una perspectiva del desarrollo que se da entre estos dos niveles educativos.

1.4. Lo que conocemos sobre la comprensión de la noción de derivada

La problemática de investigación que nos hemos planteado ha sido abordada por otros investigadores desde distintos planteamientos y con diferentes objetivos, pero todos ellos nos aportan información que nos sirve de base a nuestro trabajo. Por ello en lo que sigue vamos a comentar algunas de las ideas aportadas por dichos estudios.

Algunas investigaciones se han centrado en describir los errores y dificultades que tienen los estudiantes respecto al concepto de derivada, sin plantearse como se construye el concepto (Orton, 1983; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Porzio, 1997; entre otros). Así, Orton (1983) centrándose en la diferenciación y sus aplicaciones, nos habla de tres tipos de errores cometidos por los estudiantes: estructural (relacionado con los conceptos esenciales implicados), arbitrario (el alumno que se comporta arbitrariamente sin tener en cuenta los datos del problema) y ejecutivo (error en la manipulación, si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos) según esquema descrito por Donalson (1963).

Este estudio se llevó a cabo con 110 estudiantes, 60 de ellos entre 16-18 años procedentes de 4 escuelas y el resto entre 18-22 años procedentes de 2 centros para formación de profesores (55 hombres y 55 mujeres en total).

Como fuente de datos realizaron dos entrevistas: En la primera entrevista los estudiantes contestaban preguntas referidas a límites, áreas e integración. Y en la segunda entrevista preguntas referidas a rango de cambio, diferenciación y aplicaciones. Centrándose en la diferenciación y asociados al rango de cambio (cociente incremental), había un total de 21 items.

Los items que eran aplicaciones de la diferenciación fueron los que menos dificultades le presentaron a los estudiantes. Siendo los referidos a la comprensión de la diferenciación y a la gráfica asociada a la razón de cambio los que más dificultades les presentaron.

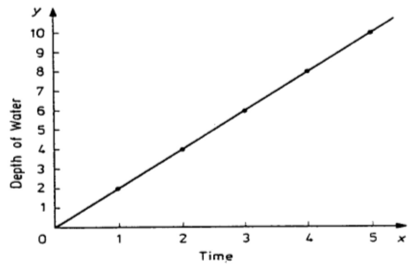
En las tareas con funciones lineales dadas por gráfico – tabla, y una línea de pendiente positiva, con rango de cambio constante, 22 estudiantes contestaron con el valor de *y*, y no con el valor del cociente incremental. Lo mismo sucede en cuestiones similares dadas por gráfico – ecuación en la que 29 estudiantes contestaron con el valor de *y*.

En lo que sigue mostramos ejemplos de tareas usadas por Orton (1983, pp. 245-247) en su estudio.

TASK C3

Water is flowing into a tank at a constant rate, such that for each unit increase in the time the depth of water increase by 2 units. The table and graph illustrate this situation.

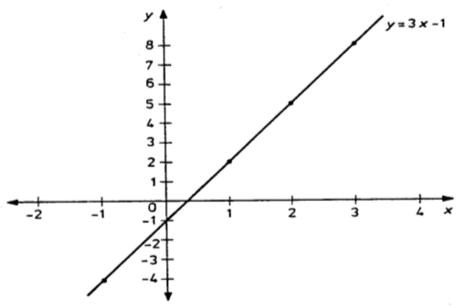
Time (x)	0		1		2		3		4		5
Depth (y)	0		2		4		6		8		10
1st difference (depth)		2		2		2		2		2	



(v) What is the rate of increase in the depth when $x = 2\frac{1}{2}$? when $x = T$?
(Item 27).

TASK C4

The graph below represents $y = 3x - 1$.

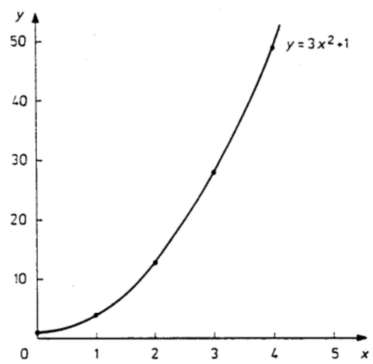


(i) What is the value of y when $x = a$? (Item 21).
(ii) What is the value of y when $x = a + h$? (Item 21).
(iii) What is the increase in y as x increases from a to $a + h$? (Item 21).
(iv) What is the rate of increase of y as x increases from a to $a + h$? (Item 28).
(vii) What is the rate of increase of y at $x = 2\frac{1}{2}$? at $x = X$? (Item 27).

En las tareas similares a las comentadas anteriormente, pero con funciones no lineales, donde en una tarea dada por gráfico – ecuación, distinguiendo entre la razón sobre un intervalo o sobre un punto, al preguntar que sucede al tomar límite cuando *h* tiende a cero, 96 estudiantes no pudieron contestar de forma correcta la cuestión. Un ejemplo de tarea usada por Orton (1983, p.247) es la siguiente:

TASK C6

The graph below represents $y = 3x^2 + 1$, from $x = 0$ to $x = 4$.



(i) What is the value of y when $x = a$? (Item 21).
(ii) What is the value of y when $x = a + h$? (Item 21).
(iii) What is the change in y as x increases from a to $a + h$? (Item 21).
(iv) What is the average rate of change in y in the x-interval a to $a + h$? (Item 28).
(v) Can you use the result of (iv) to obtain the rate of change of y at $x = 2\frac{1}{2}$? at $x = X$? If so, how? (Item 28).

Ortón cree que estas dificultades se deben a una visión conceptual débil del concepto de función. En este estudio, también plantea items vinculados con la idea de rotar la secante para entender la tangente como un límite, o con el uso de los símbolos δy, δy/δx, dx, dy, dy/dx.

Otras investigaciones de carácter descriptivo se centran en estudios de casos, así Ferrini-Mundy y Graham (1994) analizan las dificultades de los estudiantes al intentar esbozar un dibujo de la derivada de una función cuando la función se da por medio de su gráfica. La investigación la realizaron guiados por el constructivismo piagetiano, que según Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatly, Trigatti y Perlwitz (1991) afirma que el aprendizaje de las Matemáticas es un proceso en el cual el estudiante reorganiza su actividad mediante la resolución de problemas. El propósito de este estudio fue describir la comprensión de los estudiantes de Cálculo de función, límite y continuidad, derivada e integral, y explorar la interrelación entre sus comprensiones de estas áreas conceptúales.

La metodología usada es cualitativa, basada en entrevistas a los estudiantes. Los estudiantes seleccionados para participar en el estudio, fueron seis (tres hombres y tres mujeres), dos con notas por debajo de la media, dos con notas en la media, y dos con notas por encima de la media. A cada estudiante se le pidió que realizara cuatro entrevistas de aproximadamente una hora de duración, las entrevistas fueron grabadas, y en cada una de ellas se trataron los tópicos: - función, - límite, - continuidad, - derivada e integral. Estas entrevistas fueron espaciadas a lo largo del curso, y sólo fueron completadas por 4 de los estudiantes, los otros dos abandonaron el curso.

Los items elegidos para el estudio incluyen items presentados gráficamente e items presentados por fórmulas. En cada entrevista se incluían tareas que se podían resolver de forma rutinaria para el estudiante, ya que ellos habían hecho problemas similares en el texto.

La investigación adoptó la forma de estudio de caso de una estudiante cuyas compresiones y construcciones más ricas se dan en las nociones de funciones, límites y continuidad. Sus concepciones de derivadas e integrales fueron muy escasas y definidas principalmente a través de procedimientos.

Sobre derivada la mayor dificultad la tuvo en relacionar gráfica y fórmula. Tuvo facilidad en derivadas usando algoritmos, y habilidad para esbozar curvas siguiendo un algoritmo sobre puntos, mirando las derivadas positivas y negativas,... Esta estudiante admitió que no tiene la idea de la línea tangente relacionada con la derivada de una función. Las conexiones entre sus conocimientos procedimentales y conceptuales no eran fuertes. Para tomar decisiones sobre si ciertas gráficas representan funciones derivadas, ella volvió a su práctica previa de buscar fórmulas para funciones, viendo si podía encontrar una derivada por un procedimiento estándar.

De este estudio sus autores concluyen que:

1.- los contextos gráficos y algebraicos pueden considerarse por los estudiantes como modos separados donde se aplican algoritmos sin relación, para resolver problemas.

2.- en muchas ocasiones existen conflictos entre los significados matemáticos convencionales que tienen los profesores y libros de textos, y lo personal que hacen los estudiantes.

3.- los estudiantes de Cálculo formularon su propia teoría, construyendo sus conexiones propias. Estos procesos parecen estar fuertemente influidos por la experiencia previa.

4.- existen grandes inconsistencias entre representaciones, particularmente en items procedimentales y comprensión de conceptos.

5.- los estudiantes construyen una concepción en Matemáticas como resultado de la instrucción experimentada.

Otra investigación descriptiva que se realiza con un estudio de caso de un estudiante, Tim que había completado un año de estudio de Cálculo elemental, fue realizado por Aspinwall, Shaw y Presmeg (1997), a través de una serie de entrevistas, con dos objetivos: (1) estructurar el proceso de entrevista y (2) obtener información sobre los procesos de pensamiento del estudiante que, emparejado con los datos de las entrevistas previas, guiaría el desarrollo de las tareas adicionales designadas para demostrar las habilidades interpretativas del estudiante para discriminar gráficamente una función y su derivada. Los autores demostraron como a veces las imágenes incontroladas crean barreras para construir significados, en contra del punto de vista que sólo ve ventajas en el proceso de aprendizaje con imágenes mentales. No sugieren que se abandonen las imágenes mentales, pero si que los educadores matemáticos deben ser conscientes de ello.

Aspinwall et al. (1997) para llevar a cabo el estudio diseñaron 20 tareas, las 4 primeras tareas se elaboraron antes del estudio, el resto se diseñaron basadas en el análisis de entrevistas de tareas previas. La mayoría de las tareas eran problemas no rutinarios, y en muchos de ellos había que determinar las gráficas de las derivadas, dando sólo gráficos de funciones y explicar el proceso de pensamiento.

Varios aspectos de la posición de Krutetskii (1976) son de relevancia en la interpretación de los datos que se hace en este estudio. Este autor distingue tres tipos de habilidades matemáticas en el nivel escolar:

I. Analítica: predomina la componente lógico- verbal

II. Geométrica: predomina la componente pictórico-visual

III. Armónica: equilibrio de las dos componentes. En esta última distingue dos subtipos:

   a. Armónica abstracto: si puede usar soporte visual en la resolución de problemas, pero no es el preferido

   b. Armónico pictórico: si puede usar soporte visual en la resolución de problemas, y prefiere hacerlo así.

Los resultados obtenidos son los siguientes: i) respecto a la comprensión simbólica de fórmulas y procedimientos del cálculo de funciones derivadas, se observó que Tim es un experto en la aplicación de reglas para determinar derivadas en diversas situaciones. ii) respecto a la comprensión gráfica, aunque Tim utiliza soporte visual cuando resuelve problemas y prefiere hacerlo así, su habilidad para pensar sobre un problema fue obstaculizada por una imagen incorrecta. El estudiante construyó una imagen de una función polinómica de segundo grado como si tuviera asíntotas verticales. Sin embargo, afirmó que el dominio eran todos los números reales. Esta imagen errónea le hizo dibujar una gráfica de la derivada en forma de función cúbica. Este dibujo estaba en conflicto con su conocimiento analítico de que la derivada de una función cuadrática debía ser una recta. No obstante, no fue capaz de controlar sus imágenes mentales, las cuales continuaban interfiriendo en su pensamiento sobre la derivada.

Otra forma de estudiar la comprensión proviene de asumir determinados marcos teóricos de comprensión, que llevan a preguntas coherentes con dichos marcos. Los diferentes modelos teóricos que los investigadores han utilizado muestran donde cada uno de ellos coloca el énfasis y el significado dado a la comprensión y desarrollo de la comprensión.

Centrándonos en el caso de la derivada, los estudios realizados han usado aproximaciones centradas en elementos de cognición como

- la idea de "esquema conceptual" (Azcárate, 1990) derivada de la idea de Imagen del concepto (Tall, 1989),
- ideas procedentes de una aproximación piagetiana del conocimiento y su desarrollo visto a través de la teoría APOS (Asiala et al., 1997), y la teoría del desarrollo de los esquemas (Clark et al., 1997; Baker et al., 2000; Badillo, 2003),
- ideas procedentes del papel de las representaciones y las actividades con ellas en el desarrollo de los significados (Font, 1999, 2000 b), y
- las teorías de la reificación (Sfard, 1992) centradas en las relaciones entre proceso-objeto (Zandieh, 2000).

Así, el estudio de los esquemas conceptuales puede hacerse desde el marco teórico propuesto por Tall(1989). Tall definió "concept image" como el conjunto de estructuras cognitivas asociadas al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y todos los procesos y propiedades asociados al mismo. Desde esta perspectiva, Azcárate (1990) realizó una investigación que tuvo por objetivo evaluar en tres grupos de 2º BUP (son estudiantes de15-16 años de edad), la introducción al concepto de derivada de una función en un punto, siguiendo el material del grupo Zero, y sin tener estos alumnos conocimientos previos de límite y continuidad. El estudio se centró en el concepto de recta tangente a una gráfica en un punto, concepto que tiene un soporte gráfico que favorece un enfoque intuitivo.

El análisis permitió caracterizar los esquemas conceptuales que tienen los alumnos de tres conceptos: pendiente de una recta, velocidad instantánea de un movimiento variado y tasa instantánea de variación de una función. También se estudiaron las dificultades y errores más característicos. Así dos errores comunes consisten: en confundir los conceptos de pendiente de una recta y su ordenada en el origen, y en dar el valor de la ordenada en el origen como valor de la pendiente de la recta.

Se pasaron cuestionarios escritos a 111 alumnos y se le hicieron entrevistas a 6 alumnos por grupo (18 entrevistas en total)

La investigación tuvo dos dimensiones:

- Cognitiva: estudiar los esquemas conceptuales que tienen los alumnos de las nociones claves que aparecen en el estudio inicial del concepto de derivada.
- Evaluativa: estudiar la evolución y la situación final de un grupo de alumnos que ha seguido un material curricular preparado.

Respecto al concepto de pendiente de una recta se identificaron tres tipos de esquemas conceptuales, que se han llamado:

- Geométrico que caracteriza a los alumnos que utilizan imágenes gráficas.
- Operativo que caracteriza a los alumnos que tienen fijación numérica.
- Funcional que caracteriza a los alumnos que asocian la palabra "pendiente" a una relación de dependencia lineal entre los incrementos de las variables de la función, así como la imagen gráfica de una recta en la que destacan dichos incrementos.

Respecto a la velocidad instantánea y tasa de variación se identificaron tres tipos de esquemas conceptuales correspondientes a perfiles llamados "primitivo", "aproximación" y "límite":

- "Primitivo" corresponde a alumnos que no han construido un esquema conceptual específico de las nociones de velocidad instantánea o de tasa instantánea de variación de una función. La principal dificultad de estos alumnos consiste en la confusión entre velocidad media desde el origen y velocidad instantánea en un punto.
- "Aproximación" corresponde a alumnos que, en el caso del concepto de velocidad instantánea, han generalizado su esquema conceptual de la noción de velocidad media a la noción de velocidad media entre dos puntos próximos que le sirve ahora para describir de manera aproximada la velocidad en un punto dado, y en el caso de la descripción de la variación puntual de una función han realizado una transposición a partir de su esquema conceptual de velocidad media, que ha dado lugar a un esquema conceptual de tasa media de variación. En ambos casos los esquemas conceptuales son coherentes y sirven para resolver situaciones puntuales por aproximación.
- "Límite" corresponde a alumnos que, durante la fase de aprendizaje, han construido unos esquemas conceptuales tanto de la noción de velocidad instantánea como de la noción de tasa instantánea de

variación de una función en un punto, de manera que interpretan, describen y representan situaciones de variación instantánea de una función dada por su gráfica.

El estudio de la evolución de los perfiles durante la enseñanza reveló que había habido un cambio y una evolución de progreso en los esquemas conceptuales de los alumnos, ya que se apreció un desplazamiento importante desde un gran número de perfiles "primitivo" en la situación inicial hasta un gran número de perfiles "límite" en la situación final. Una gran mayoría de alumnos había aprendido a calcular la velocidad instantánea de un movimiento dado por la ecuación del espacio o bien la tasa instantánea de variación de una función dada por su ecuación. Un número significativo de alumnos hacían un cálculo por aproximaciones.

Otros investigadores han asumido la teoría APOS como marco teórico en sus estudios. Así, Asiala y sus colaboradores (1997) analizaron la comprensión gráfica de una función y su derivada. Los autores proponen inicialmente la descomposición genética basada en su propia comprensión de los conceptos y en su experiencia como aprendices y profesores. Dicha descomposición genética es:

- *Conocer y comprender la representación gráfica de puntos de una curva en los ejes de coordenadas.*
- *Conocer y comprender el concepto de pendiente de una línea.*
- *Conocer y tener una buena comprensión del concepto de función, una imagen bien desarrollada del concepto de función (Tall y Vinner).*
- *Para construir un esquema para la derivada, se deben recorrer dos caminos que están coordinados, el gráfico y el analítico.*

Los participantes fueron 41 estudiantes de Ingeniería, Ciencias y Matemáticas que previamente habían hecho dos semestres de Cálculo en una variable (17 habían completado un semestre en un curso C^4 L y 24 habían completado dos semestres de Cálculo de enseñanza tradicional). Para recoger los datos estos investigadores realizan una entrevista de una hora de duración, grabada, con ocho preguntas específicas divididas en dos grupos: 4 cuestiones sobre comprensión gráfica de una función, y otro grupo de 4 cuestiones sobre comprensión gráfica de su derivada. Cada uno de los 4 investigadores del estudio hizo un análisis preliminar de un subconjunto (10-11 entrevistas) de las 41 transcripciones con las siguientes preguntas específicas en la mente:

- ¿cómo comprende el estudiante la derivada de una función en un punto gráficamente?
- ¿está esto conectado con la comprensión gráfica del estudiante del valor de una función en un punto?
- ¿está relacionada la comprensión del estudiante con el hecho de que haya seguido el curso C^4 L o un curso tradicional de Cálculo?

Una vez terminado este proceso, cada investigador analizó cada una de las 41 transcripciones de las cuestiones 6 y 7 de las entrevistas, con las cuestiones mencionadas anteriormente, en la mente. En la cuestión 6 se daba información de una función dada por la gráfica y la recta tangente en un punto del cual se daban las coordenadas (5,4), y se pedía calcular f(5) y f ’(5) (Asiala et al., 1997 pp.404-405):

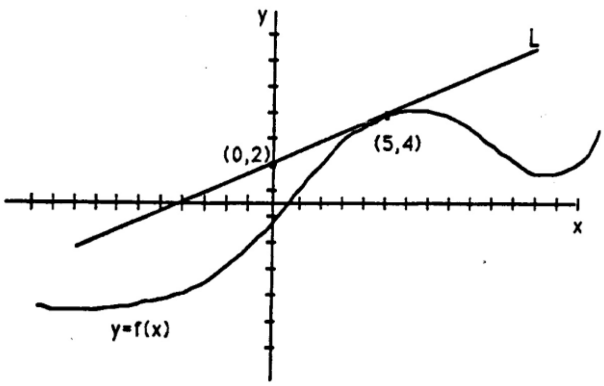


FIGURE 1. Question 6

2.2.1. INTERVIEW QUESTION 6

Suppose that the line L is tangent to the graph of the function f at the point (5,4) as indicated in the figure.[2] Find $f(5)$, $f'(5)$.
Each student was asked "Explain how you arrived at your answers." The student was given another sheet of paper and asked the following question:

En la cuestión 7 se daba información de tipo analítico sobre la función y su derivada y se pedía esbozar la gráfica de la función (Asiala et al., 1997 p.405):

2.2.2. INTERVIEW QUESTION 7

Sketch a graph of the function h which satisfies the following conditions:

$$h \text{ is continuous,}$$
$$h(0)=2,\ h'(-2) = h'(3) = 0, \text{ and } \lim_{x \to -\infty} h'(x) = \infty$$
$$h'(x) > 0 \text{ when; } -4 < x < -2, \text{ and when } -2 < x < 3,$$
$$h'(x) < 0 \text{ when } x < -4, \text{ and when } x > 3,$$
$$h''(x) < 0 \text{ when } x < -4, \text{ when } -4 < x < -2, \text{ and when } 0 < x < 5,$$
$$h''(x) > 0 \text{ when } -2 < x < 0, \text{ and when } x > 5,$$
$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty \text{ and } \lim_{x \to -\infty} h(x) = -2$$

El centro del análisis fue la interacción del concepto de función y la necesidad de una expresión analítica en algunos estudiantes.

Como conclusión, respecto a la descomposición genética inicial que describía una construcción paralela de la derivada en su definición analítica y su interpretación gráfica, se observó que ciertos aspectos de la concepción de función de los estudiantes había que enfatizarlos, y crear conexiones entre ambos caminos, analítico y gráfico.

También se comparó los estudiantes que habían seguido el curso C^4 L, y los estudiantes que habían seguido una enseñanza tradicional, y concluyeron que los estudiantes que siguieron el curso experimental (apoyado en análisis teórico de aprendizaje) tuvieron más éxito en el desarrollo de la comprensión gráfica de la derivada que los estudiantes que habían seguido los cursos tradicionales.

Este mismo marco teórico (APOS) es el adoptado por Clark et al. (1997), en su estudio. En él exploraron la comprensión de los estudiantes de la regla de la cadena y sus aplicaciones, planteando para ello el desarrollo del esquema de la regla de la cadena a través de los niveles Intra, Inter, Trans basado en la ideas de Piaget y García (1983/89).

En el estudio participaron 41 estudiantes que al menos habían completado dos semestres de Cálculo en una variable. Eran estudiantes de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias, de los que 17 había seguido un curso C^4 L, y el resto 24 un curso con un método estándar.

Las preguntas de investigación fueron:

- ¿cómo construye el estudiante su comprensión de la regla de la cadena?
- ¿cuáles son los elementos matemáticos del concepto que son necesarios para la construcción del concepto de la regla de la cadena?
- ¿cómo reconocen los estudiantes y aplican la regla de la cadena en varias situaciones matemáticas?

Estos autores realizaron una descomposición genética inicial del concepto de la regla de la cadena, y entrevistaron a los estudiantes sobre 11 tareas (en el artículo se recogen las tareas 1, 4, 5, 9 y 10) (Clark et al., pp.363-364). En la tarea 1 el estudiante tiene que derivar $(1-4x^3)^2$ de dos formas y comparar los dos métodos. En la tarea 4 se daba F(x) como la integral entre 0 y sen x de e^{t2}, para completar F'. La tarea 5 pregunta por qué la regla de la cadena es cierta. La tarea 9 sobre diferenciación implícita. La tarea 10 sobre razones. Estas tareas daban información sobre la comprensión de los estudiantes sobre la regla de la cadena.

1. Let f be the function given by $f(x) = (1-4x^3)^2$. Compute f'.
2. Can you think of another way of doing this problem?
3. Can you be sure that two methods will always give the same answer? Explain.
4. Let F be the function given by $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2}\,dt$. Compute F'. Explain what you did.
5. Why is the chain rule true?
9. Let A be a real number. Given that the following relation defines a function, $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = A$, find its derivative.
10. A ladder A feet long is leaning against a wall, but sliding away from the wall at the rate of 4 ft/sec. Find a formula for the rate at which the top of the ladder is moving down the wall.

A partir de los resultados estos autores concluyen que la comprensión de la regla de la cadena conlleva la construcción de un esquema. Este esquema debe contener el esquema de función, que incluye al menos una concepción proceso de función, composición y descomposición de funciones. El esquema de función está vinculado al esquema de diferenciación que incluye las reglas de diferenciación al menos a nivel de proceso. Desde los resultados este autor nos propone una descomposición genética revisada, apoyándose en el desarrollo del esquema de la regla de la cadena utilizando las características de los niveles: Intra, Inter, Trans. En el nivel Intra los estudiantes tienen una colección de reglas para encontrar derivadas incluyendo algunos casos especiales, pero no tienen reconocido las relaciones entre ellas. El segundo nivel de desarrollo, el nivel Inter., está caracterizado por la habilidad del estudiante para ver todos los casos diferentes, y reconoce que en algunos casos estos están relacionados. En el nivel Trans el estudiante debe construir la estructura de la regla de la cadena, debe vincular la composición o descomposición de funciones a la diferenciación. Los elementos en el esquema deben moverse desde sus descripciones esencialmente por una lista, a su descripción por una regla simple. Conjeturan que un esquema maduro de la regla de la cadena depende estrechamente del esquema de función del individuo.

Otra investigación que asume el marco teórico APOS y que se centra en el desarrollo del esquema a través de los niveles Intra, Inter, Trans, es la llevada a cabo por Baker et al. (2000) el objetivo de su estudio era analizar la comprensión de los estudiantes acerca de los conceptos de cálculo utilizados en la resolución de un problema atípico de cálculo gráfico. Para ello se les pidió a los alumnos que esbozaran la gráfica de una función, dando sus propiedades (en la primera, y segunda derivada, límites y continuidad) en intervalos específicos de su dominio (Baker et al., 2000, p. 563). Para determinar el nivel de comprensión de los alumnos se analizaron las respuestas detalladas de los estudiantes a las entrevistas orales y escritas.

Sketch a graph of a function h that satisfies the following conditions:
h is continuous;
$h(0) = 2$, $h'(-2) = h'(3) = 0$, and $\lim_{x\to 0} h'(x) = \infty$;
$h'(x) > 0$ when $-4 < x < -2$ and when $-2 < x < 3$;
$h'(x) < 0$ when $x < -4$ and when $x > 3$;
$h''(x) < 0$ when $x < -4$, when $-4 < x < -2$, and when $0 < x < 5$;
$h''(x) > 0$ when $-2 < x < 0$ and when $x > 5$;
$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \infty$ and $\lim_{x\to -\infty} h(x) = -2$.

Como se ha mencionado anteriormente para el análisis de las respuestas de los estudiantes se utilizó la triada (INTRA, INTER, TRANS) del desarrollo del esquema en el contexto de la teoría APOS. Los tres niveles del desarrollo del esquema de derivada fueron caracterizados de la siguiente forma:

- INTRA: un objeto en el nivel Intra no es reconocido por el estudiante como necesario, y su forma es similar a la forma de una generalización simple. Por ejemplo en el nivel Intra del esquema de derivada el estudiante interpreta la derivada como la pendiente de la recta tangente en puntos específicos.
- INTER: en el nivel Inter el estudiante es consciente de las relaciones presentes y puede deducir desde la operación inicial, una vez es comprendida, otras operaciones que son inferidas por esta o que pueden coordinarse con operaciones similares. Por ejemplo, en el nivel Inter

del esquema de derivada, el estudiante coordina la noción de derivada como pendiente de la recta tangente con la idea de derivada como razón de cambio en un punto dado.

- TRANS: a través de la síntesis de las transformaciones del nivel Inter, el estudiante construye una consciencia de la completitud del esquema, puede percibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en los otros niveles. Por ejemplo, en el nivel Trans del esquema de derivada el estudiante agrupa todas las derivadas como pendientes o razones de cambio de una función en un punto y reconoce que todas las situaciones en las que está implicada la variación se relacionan al concepto de derivada.

El estudio se realizó con 41 estudiantes que estaban matriculados en estudios de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias, y todos habían cursado, al menos dos semestres de cálculo en una variable. Antes de analizar las entrevistas realizaron una descomposición genética inicial de las técnicas de cálculo gráficas, y analizaron con profundidad tres entrevistas y descubrieron concepciones de los estudiantes, dificultades y estrategias, permitiendo revisar la descomposición genética inicial para reflejar más fielmente dicha información. Las 38 entrevistas restantes las analizaron con esta descomposición genética final. Los datos de cada una de las 41 entrevistas fueron analizados de manera independiente por, al menos, dos investigadores y comparados para su verificación.

Estos autores asumen al realizar este tipo de análisis que el esquema de cálculo gráfico, como cualquier esquema, variará de una persona a otra y podría evolucionar por caminos diferentes, pero cada esquema personal pasará de algún modo a través del proceso de los niveles de desarrollo.

Según estos autores, el esquema de cálculo gráfico para un estudiante está caracterizado por una combinación de los niveles de desarrollo en la comprensión de los conceptos del cálculo como la derivada, límites, continuidad e ideas de precálculo. El esquema de "cálculo gráfico" se conjeturó que estaba formado por dos esquemas que denominaron el "esquema propiedad" y el "esquema intervalo". Además, el desarrollo del esquema de "cálculo gráfico" lo describieron por la interacción de estos dos esquemas, utilizando para ello una terna bidimensional.

Baker et al. (2000) finalizan el estudio señalando varios puntos que causaron dificultades constantemente a los estudiantes: el punto cúspide, la tangente vertical, y la supresión de la condición de continuidad (que era una de las preguntas de la entrevista).

Un número significativo de estudiantes mostraron una comprensión muy limitada de la segunda derivada. Algunos ignoraron la segunda derivada, evidenciando falta de desarrollo del esquema de la propiedad, otros trabajaron sólo a partir de la memorización. Y por último, otros fueron incapaces de coordinar las condiciones de la primera derivada y la segunda derivada. Muy pocos estudiantes consideraron las derivadas como funciones, especialmente, no supieron interpretar la relación de la segunda derivada con la primera. Baker et al. (2000) concluyen diciendo que en algún punto los estudiantes necesitan considerar la primera derivada en sí misma como una función para entender la importancia de la segunda derivada.

La investigación llevada a cabo por Badillo (2003) también asume el marco APOS, en su investigación intenta inferir el nivel de comprensión que tienen los profesores de matemáticas y física de Colombia sobre derivada. Para ello se usó un cuestionario indirecto y entrevista, además de los documentos elaborados (programación, unidad didáctica y evaluación) por los cinco profesores participantes. El estudio de los niveles de comprensión del esquema de derivada que tienen los profesores mostró que existía pluralidad en los niveles de comprensión de los profesores que participaron en el estudio. La mayoría de los profesores tenían dificultad en la comprensión gráfica de los macro-objetos f(x), f '(a) y f '(x), e incluso algunos reprodujeron inconsistencias con relación a estos macro objetos , tales como:

1. la confusión de los macro objetos f '(a) y f '(x)
2. la reducción de la expresión simbólica del macro objeto f '(x) a la ecuación de la recta tangente y la gráfica del macro objeto f '(x) a la gráfica de la recta tangente
3. la no justificación del uso de las técnicas de derivación directas e indirectas (definición en término de límite y las reglas de derivación).

En la investigación se trabajó a partir de los datos obtenidos organizados en redes sistémicas y se definieron las categorías del concepto de derivada que consideraron relevantes para la comprensión del concepto:

a) los conceptos estructurales
b) la relación entre los objetos pendiente de la recta y razón de cambio en la construcción del macro-objeto f '(a) (función derivada en un punto)
c) la relación (tanto gráfica como algebraica) entre los macro-objetos f '(a) y f '(x) (función derivada en un punto y función derivada).

Para la autora el esquema de derivada está conformado por la coordinación de varios objetos matemáticos, centrándose en describir el esquema de derivada como la conexión interna de: el macro-objeto derivada en un punto f '(a) y el macro-objeto función derivada f '(x), estos macro-objetos son a su vez el resultado de la coordinación, consciente o inconsciente de tres objetos: pendiente de la recta (O_1), límites de las tasas de variación media (O_2), y razón de cambio (O_3). Para llegar a tener un esquema coherente de la derivada se requiere coordinar dos esquemas previos: algebraico y gráfico, resultado a su vez de la coordinación interna de O_1, O_2, O_3. Aunque señala que los macro-objetos f '(a) y f '(x) se encuentran fuertemente relacionados, comprender el macro-objeto f '(a) no implica tener construido el macro-objeto f ’(x), pero la comprensión del macro-objeto f ’(x) implica una comprensión simultánea o previa del macro-objeto f ’(a).

Por otra parte, basándose en el papel de las representaciones Font (1999) realiza una investigación en la que parte de la hipótesis de que el cálculo de f ’(x) a partir de f(x) se puede interpretar como un proceso en el que se ha de considerar:

1) traducciones entre distintas formas ostensivas de representar f(x)
2) el paso de una forma de representación ostensiva de f(x) a una forma de representación ostensiva de f ’(x)
3) traducciones entre las distintas formas ostensivas de representar f ’(x)

utiliza el término ostensivo en el sentido de que se puede mostrar a otro directamente. Por representación ostensiva entiende por ejemplo, la fórmula de la función que el profesor escribe en la pizarra y el alumno ve directamente.

Este autor diseña una unidad didáctica para alumnos de 3º B.U.P. y 1º Bachillerato Científico Tecnológico, con actividades en las que el alumno ha de realizar alguno de los tres subprocesos. Font llevó a cabo la experimentación de la unidad en un grupo de 41 alumnos completo, y un grupo mixto de 20 y 21 alumnos atendido por dos profesores.

Las representaciones ostensivas consideradas son:

- expresión simbólica
- gráfica
- tabla
- descripción verbal de la situación

En la investigación se analiza una secuencia de actividades que tiene por objetivo el cálculo de la función derivada. La implementación pone de manifiesto la dificultad que tienen los alumnos con contenidos que forman parte de conocimientos previos (función, traducción entre diferentes representaciones de una función, variación de una función, pendiente, tasa de variación media, velocidad, etc.). También muestra que la definición de función derivada f ’(x) como el límite del cociente incremental presenta una complejidad semiótica considerable, al igual que a través de la pendiente de la tangente. En cambio la introducción de la derivada a partir de una tabla resulta más fácil de entender.

Los tres procedimientos (límite del cociente incremental, pendiente de la tangente y tabla) utilizan ostensivos distintos: en expresión simbólica; en gráficos y en tablas, respectivamente. La conclusión es que la secuencia de actividades que combinan los tres procedimientos anteriores posibilita la comprensión del estudiante.

Asumiendo la Teoría de la Reificación, Zandieh (2000) lleva a cabo un estudio en el que considera como premisa inicial de su investigación que en la comprensión de un concepto multifacético como es la Derivada, no es apropiado preguntarse simplemente si un estudiante comprende el concepto o no, sino ¿qué aspectos del concepto conoce el estudiante y qué relaciones establece entre estos aspectos?. Para ello primero realiza una descripción del concepto de Derivada atendiendo a dos componentes principales: las múltiples representaciones o contextos y las capas (o estratos) de parejas de proceso-objeto.

Respecto a las diversas representaciones del concepto de derivada, considera (a) gráficamente como la pendiente de la línea tangente a la curva en un punto, (b) verbalmente como la razón de cambio instantánea, (c) en física como la velocidad, y (d) simbólicamente como el límite del cociente incremental.

En cuanto a las parejas proceso-objeto, Zandieh indica que matemáticamente el concepto de Derivada involucra una razón, un límite y una función. De acuerdo con la investigación de Sfard (1992) respecto a la evolución histórica y psicológica de los conceptos matemáticos, en la que se sugiere una transición desde un proceso o concepción operacional hasta una concepción estructural estática, y en la que los procesos son operaciones sobre objetos previamente establecidos, cada proceso es reificado en un objeto en el que actuarán otros procesos, formándose una cadena que Zandieh llama parejas de proceso-objeto.

En su estudio introduce la descripción de la noción del concepto de Derivada en término de tres parejas de proceso-objeto vinculadas en una cadena, cada una vista en varias representaciones o contextos. El proceso de razón toma dos objetos (dos incrementos, dos longitudes, una distancia y un tiempo, ...) y actúan por una división. El objeto reificado (razón, pendiente, velocidad,...) se usa para el próximo proceso, que es tomar un límite, el proceso del límite aproximándose a un valor particular (el valor del límite, la pendiente en un punto de la curva, la velocidad instantánea,...). El objeto reificado, el límite, se usa para definir cada valor de la función derivada. La función derivada actúa como un proceso pasando a través de (posiblemente) muchos valores de entrada, y para cada uno determinando un valor de salida dado por el límite del cociente incremental en ese punto. La función derivada también puede ser vista como un objeto reificado, como cualquier función (la función derivada puede pensarse como un objeto que ha salido de otro proceso, el operador derivada).

Zandieh (1997) investigó con 9 estudiantes de cálculo de “high school” la evolución de la comprensión del concepto de derivada en cada estudiante. Dicha evolución se trató como un estudio de caso individual (a través de notas de campo del investigador durante las clases (75) a lo largo de 9 meses, exámenes de los estudiantes y entrevistas (5) con varias preguntas hechas a los estudiantes para tratar de obtener su comprensión del concepto de Derivada). En este artículo los datos se centran en las entrevistas primera (después de que los estudiantes hubieran repasado límites y funciones, pero antes de que hubieran repasado las nociones teóricas y prácticas de Derivada), segunda (después de que hubieran terminado de estudiar la derivada) y quinta (al final del curso después de que ellos hubieran hecho el examen) realizadas a los estudiantes.

Comienza describiendo como piensa que puede ser la comprensión del concepto de Derivada de un estudiante, a continuación describe la comprensión de los estudiantes, para ello elabora una matriz donde se recoge aspectos de esta comprensión (si el estudiante menciona en su respuesta a una o más preguntas de las entrevistas, respecto del concepto de Derivada, un contexto o un estrato (capa) o un proceso o un pseudo-objeto). La matriz no recoge las conexiones que el estudiante puede o no puede hacer.

Además, define un pseudo-objeto como una comprensión intuitiva que no involucra la comprensión del proceso subyacente en el objeto. El uso de pseudo-objetos y de múltiples representaciones lleva al individuo a construir inicialmente una comprensión del concepto de Derivada muy diferentes unas de otras. En este sentido, la comprensión de Derivada de un estudiante se desarrolla desde una comprensión parcial, cada estudiante con diferentes piezas de un puzzle, cuanto más completa es la comprensión menos piezas quedan sin encajar.

El reto para el educador es dar a los estudiantes experiencias para que sean capaces de contemplar la comprensión de todas las capas (estratos) de estos tres proceso-objeto del concepto de Derivada. Una dificultad está en que muchos problemas relacionados con el concepto de Derivada se pueden resolver usando sólo una comprensión de pseudo-objetos.

Otro resultado de la investigación es que los estudiantes no conectan automáticamente una comprensión de un proceso en un contexto con el mismo proceso en otro contexto. Un estudiante no tendrá una comprensión completa del concepto de Derivada si no puede reconocer y construir cada uno de los tres procesos involucrados en la comprensión del concepto de Derivada en cualquier contexto relevante.

Una vez revisados aquellos estudios que nos hablan desde distintos puntos de vista de la comprensión de la derivada mostramos esquemáticamente la información que globalmente nos aportan. Así, las investigaciones nos han proporcionado información en relación a:

- las características de los significados del concepto de derivada construidos por el estudiante, y
- las características de la evolución de estos significados (desarrollo de la comprensión)

En relación a los significados construidos por el estudiante: se muestra la existencia de conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas por los estudiantes y los significados formales presentados por los estudiantes y los libros de texto (Ferini-Mundi-Graham, 1994). Se ha mostrado la influencia de los contextos en el sentido de que los estudiantes no conectan automáticamente una concepción proceso de las ideas de razón, límite, función vinculadas a las ideas de derivada dados en un contexto con el mismo proceso dado en otro contexto, por ejemplo la confusión de la velocidad media con la instantánea en un punto (Azcárate, 1990). En este sentido se aboga por la idea de que se conseguirá una comprensión completa de la idea de derivadas cuando se reconozca y reconstruya cada una de las ideas de razón límite y función en diferentes contextos (Zandieh, 2000).

Los modos de representación gráfico y analítico también han mostrado su influencia sobre la construcción de los significados por parte de los estudiantes. Los modos gráficos y analíticos pueden ser considerados por los estudiantes como separados donde se pueden aplicar algoritmos sin relación (Ferrini- Mundi-Graham, 1994). En este sentido las "imágenes incontroladas" construidas por los estudiantes crean barreras en el proceso de construir y usar los significados del concepto de derivada (Aspinwall-Shaw-Presmeg, 1997). Por ejemplo se han identificado dificultades referidas a la comprensión de la diferenciación y a la gráfica asociada al rango de cambio (Orton, 1983), y dificultades en dotar de significado gráficamente a la derivada de la función en un punto (f ’(a)) al confundirlo con la ordenada (f(a)) (Azcárate, 1990). Las dificultades en relacionar el modo gráfico y el modo analítico por parte de los estudiantes también se pone de manifiesto cuando en contextos eminentemente gráficos los estudiantes solicitan la expresión analítica de la función para resolver determinadas cuestiones (Asiala et al., 1997). Finalmente el comportamiento de los estudiantes ante aspectos característicos de las funciones como la existencia de puntos cúspides, tangentes verticales y los cambios en las condiciones de continuidad, características de la comprensión de la segunda derivada permiten discriminar aspectos característicos de la comprensión construida por los estudiantes (Baker et al., 2000). La instrucción apoyada en las traslaciones entre distintos modos de representación ayuda a la construcción del significado de la noción de derivada (Font, 1999).

En relación a las características de la evolución de estos significados (desarrollo de la comprensión): la evolución de los significados vinculados al concepto de derivada está vinculada a la integración de los significados de la noción de derivada en un punto (f’(a)) y la función derivada (f ´(x)) (Badillo, 2003). Esta necesaria integración se manifiesta en el contexto particular de la velocidad a través de la evolución de la comprensión de la idea de derivada en el contexto de velocidad cuando los alumnos pasan de tener dificultades con la velocidad media desde el origen y la velocidad instantánea en un punto, a la construcción de la noción de velación instantánea y la noción de tasa de variación instantánea interpretando, describiendo y representando situaciones de variación instantánea de una función dada por su gráfica (Azcárate, 1990). Otra característica del proceso de desarrollo que se ha identificado es la necesidad de establecer conexiones entre los modos gráfico y analítico (Asiala et a., 1997).

En todas estas investigaciones hay varias consideraciones comunes que deberemos tener en cuenta en nuestra investigación: la complejidad de la noción matemática que estamos tratando, la derivada. Esto lleva a los diferentes investigadores a considerar como señala Zandieh (2000) distintos aspectos del concepto y relaciones que se establecen entre esos aspectos. Como consecuencia en estas investigaciones se tienen en cuenta diversas componentes del concepto: gráfico y analítico; diversos aspectos que lo configuran: derivada en un punto (f ’(a)) y función derivada (f ’(x)), y las relaciones que se establecen entre ellos. En relación al desarrollo de su comprensión tratan de analizar dicho desarrollo adaptando la teoría del desarrollo de un esquema de Piaget (a través de los niveles Intra, Inter, Trans).

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 2: Marco teórico

El problema de investigación que nos hemos planteado se centra en la comprensión del concepto/ noción de derivada y cómo se desarrolla el proceso de construcción que de él realizan los alumnos. Puesto que nos preocupamos por la construcción del conocimiento sobre el concepto de derivada por parte de los alumnos, nos preguntaremos por los referentes teóricos que nos hablan de las distintas formas de conocer un concepto y por la forma en la que se construye el conocimiento de dicho concepto.

Lo que parece común a todas las teorías y que de alguna forma caracteriza al pensamiento matemático avanzado es la construcción de un objeto que se puede manipular en sí mismo a partir de un proceso que generalmente es realizado paso a paso. Varios autores han escrito sobre estos referentes teóricos (Azcárate (1995), Confrey y Costa (1996), Dörfler (2000), Meel (2003), Mason y Jonston - Wilder (2004)).

2.1. Pensamiento Matemático Avanzado: de proceso a objeto

Nuestra investigación estudia la construcción de la comprensión por parte de alumnos de Bachillerato y 1º de la Licenciatura de Matemáticas de la noción de Derivada. Muchas de las actividades que se llevan a cabo en la resolución de un problema en Matemáticas avanzadas, también se realizan en matemáticas elementales. El paso desde el pensamiento matemático elemental al avanzado conlleva una transición significativa: de describir a definir, de convencer a probar (o demostrar) de una manera lógica basada en esas definiciones. Esta transición requiere una reconstrucción cognitiva. Otro hecho que hay que tener en cuenta es que en la enseñanza preuniversitaria a menudo se presenta la forma final de la teoría deducida. En palabras de Skemp (1971) la enseñanza tiende a dar a los estudiantes el producto del pensamiento matemático antes que el proceso de pensamiento matemático.

Un matemático a menudo coge una idea matemática compleja y la "simplifica" rompiéndola en componentes más pequeñas, y puede enseñar cada componente en una secuencia lógica. Desde el punto de vista del experto las componentes pueden verse como partes de un todo, pero el estudiante puede verlas como piezas sueltas sin relación, el estudiante forma una imagen del concepto personal desde el contexto particular, la cual puede que no coincida con la idea formal. Por ejemplo, un análisis matemático de la noción de derivada $f'(x)$ requiere la noción de limite de $(f(x+h)-f(x))/h$ cuando h tiende a 0, así matemáticamente la derivada debe estar precedida de la noción de límite. Inicialmente se lleva a cabo para x fija, más tarde x empieza a variar, dando lugar a la noción de una función[1]. Así, la secuencia seguida en un análisis matemático formal es:

(1) noción de límite

(2) para x fija, considerar el limite de $(f(x+h)-f(x))/h$ cuando h tiende a 0

[1] El grupo Zero (Barcelona) presenta una alternativa al discutir la aplicación del análisis del concepto al diseño del curriculum

(3) llamo al límite f ’(x), entonces variando x, da la función derivada

el paso de (2) a (3) no es tan fácil cognitivamente como parece matemáticamente. Muchos estudiantes ven (2) como una actividad puramente simbólica, y no ven la derivada f ’(x) como una función, ni son capaces de buscar interrelaciones con el gráfico (Tall, 1991).

Así, leyendo los libros de texto de Matemáticas en relación a las diferentes nociones o conceptos matemáticos da la impresión de que estamos hablando sobre alguna clase de objetos. Ejemplos de estos objetos son: las funciones, los grupos ... Los textos usan nombres para llamar a estos objetos, y se le atribuyen por definición, o como consecuencia de las propiedades definidas una gran cantidad de propiedades y relaciones. Muchas nociones matemáticas son consideradas y habladas en forma de objetos matemáticos, este hecho predomina en matemáticas avanzadas. Pero, ¿qué entendemos por objeto matemático?

El platonismo estipula que los objetos matemáticos existen a priori fuera del tiempo y del espacio independiente del pensamiento humano. Los métodos desarrollados en Matemáticas (como la demostración ...) se ven como métodos legítimos para investigar estos objetos, y aprender no es otra cosa que recordar.

Otro punto de vista es el expuesto por Beth y Piaget (1966) , según el cual los objetos matemáticos son o reflejan estructuras, modelos y regularidades en/ y de acciones humanas y operaciones mentales (como contar, medir, comparar, mover). Piaget describe un modelo general de proceso de aprendizaje, que intenta estudiar como las ideas mentales se crean en la mente de cada individuo. Este autor considera la necesidad de que el individuo esté en equilibrio dinámico con su entorno, este equilibrio podía ser perturbado a través de la confrontación del conocimiento nuevo que entra en conflicto con el que tenía, y así hay un período de transición en el cual la estructura de conocimiento es reconstruida para llegar a un nivel más maduro de equilibrio.

La teoría de los estados de Piaget postula que un niño crece hasta llegar a adulto a través de una serie de estados de equilibrio, cada uno más rico que el anterior. Piaget identificó cuatro estados principales: el primer periodo es el sensoriomotriz, seguido por el pre-operacional, a continuación el niño va a través de una transición en el periodo de operaciones concretas donde considerara conceptos que están vinculados a objetos físicos, a un periodo de operaciones formales: razonamientos hipotéticos-deductivos usando ideas y símbolos sin necesidad de manipulación física (Mason y Joston-Wilder 2004, p. 162).

Los estudios y trabajos de Piaget han servido de base a trabajos relacionados con el pensamiento matemático avanzado. A través de estos trabajos nos podemos preguntar: ¿cómo construye el conocimiento el estudiante? y ¿qué tipo de construcciones realiza?. Las respuestas teóricas a estas cuestiones planteadas varían de unos autores a otros. En los párrafos siguientes mostraremos algunas de ellas.

Tall y Vinner (1981) distinguen entre la forma en la que el individuo piensa sobre el concepto, y su definición formal, distinguiendo entre matemáticas como una actividad mental y matemáticas como un sistema formal. Lo que es esencial para ellos es un enfoque cognitivo que da cuenta del desarrollo de la estructura de conocimiento y de los procesos de pensamiento de los estudiantes.

Tall et al. (2000) distingue tres tipos de construcciones de objetos mentales en matemáticas:

- Objetos percibidos: surgen a través de la abstracción empírica desde objetos en el entorno.

- “Procepts” los cuales envuelven procesos en objetos del mundo real, usando símbolos que ser manipulados como objetos, sobre los cuales se pueden realizar operaciones y simbolizar de la misma forma.
- Objetos axiomáticos, concebidos por criterios específicos (axiomas o definiciones) cuyas propiedades se deducen por demostración formal.

El nombre “procept” surge del dual del símbolo de process y concept. En Tall (1994, 1999) y Tall et al. (2000) se define un “procept” elemental como la amalgama de tres conceptos: un proceso, un concepto relacionado producido por ese proceso, y un símbolo que se usa para representar a ambos el proceso y el concepto. Los procepts surgen primero a través de la abstracción pseudo-empírica desde las acciones en los objetos del mundo real, y por un nivel superior de abstracción reflexiva en los objetos concebidos de resultados que se presentan por símbolos, permitiéndonos pivotar entre proceso y objeto.

En este mismo sentido, Barnard y Tall (1997) definen la “unidad cognitiva” como items enlazados que comienzan a asociarse en una sóla entidad. Una colección de items conexos, que podrían ser procesos, representaciones, objetos, propiedades, pasos (etapas) de una deducción lógica, comienzan a “comprimirse mentalmente” en una sola entidad que pueden manipularse fácilmente, usando un mínimo espacio del pensamiento, y posteriormente “desempaquetarlo” cuando es necesario. Tal trozo de estructura cognitiva la llaman unidad cognitiva. Según Barnard (1999) la noción de “comprimir mentalmente” es similar a la idea de encapsulación (Dubinsky (1991)), reificación (Sfard (1991)), y la entidad obtenida puede ser vista como un procept (Gray y Tall, 1994).

Otras aproximaciones teóricas nos hablan de la forma en que el estudiante construye el conocimiento. En concreto, el enfoque de Sfard (1991) y la teoría APOS propuesta por Dubinsky y co-investigadores, plantean varias etapas en el desarrollo de la construcción del conocimiento desde un procedimiento / proceso (generalmente realizado paso a paso) para finalizar en un objeto / concepto que se puede manipular en sí mismo. Los pasos intermedios no tienen una correspondencia directa entre ambas teorías. Por una parte Dubinsky caracteriza la habilidad del individuo de tomar el control de una acción repetida, y por otra Sfard se centra en la habilidad de pensar el proceso en términos de entrada-salida sin necesidad de considerar pasos intermedios.

Según Dörfler (2002) estas son teorías cognitivas, es decir consideran la construcción (de la noción) de un objeto matemático como un proceso cognitivo que implica la construcción del estudiante de estructuras cognitivas adecuadas. Estas teorías consideran la cognición como parte de la actividad humana consciente, y consideran al individuo y su contexto como una unidad inseparable. Para Dörfler, ver o tratar algo como objeto o entidad es un tipo de habilidad que puede y tiene que ser adquirida por el estudiante. La construcción de los objetos matemáticos puede ser experimentada como un esfuerzo personal que el individuo debe emprender de forma espontánea. Esta construcción es un proceso cognitivo que usa significados simbólicos, esquemáticos y lingüísticos para expresar cambios de perspectiva y puntos de vista.

2.2. La construcción de objetos matemáticos: la teoría de la reificación

Sfard (1991, 1992) plantea dos enfoques del concepto, uno operacional, y otro estructural, estableciendo dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático:

- las concepciones que se llaman “operacionales”, cuando se consideran las nociones matemáticas como procesos, algoritmos y acciones, y

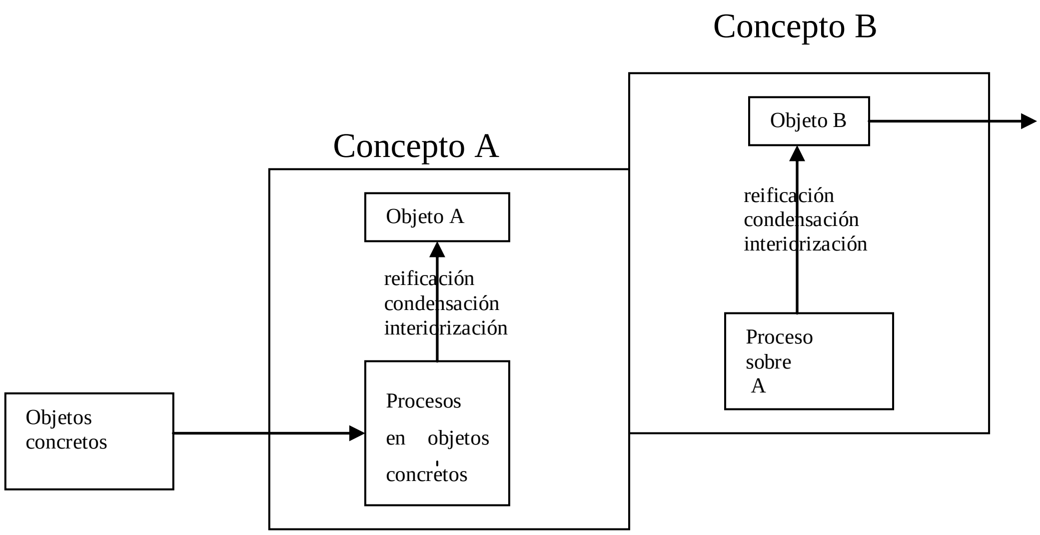
- las concepciones "estructurales", cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos.

Estos dos tipos de concepciones son complementarias y establece que las concepciones operacionales preceden a las estructurales. El proceso de aprendizaje y de resolución de problemas consiste en interacciones entre concepciones operacionales y estructurales de las mismas nociones. La concepción operacional es, para la mayoría de las personas, el primer paso en la adquisición de nuevas nociones matemáticas. Esta autora distingue tres etapas en el proceso de formación de concepciones, que corresponden a tres grados de estructuración progresiva, estas etapas se denominan: interiorización, condensación y reificación, y se caracterizan como sigue:

  - Interiorización: el estudiante entra en contacto con los procesos que van eventualmente a dar lugar a un nuevo concepto. Dichos procesos son operaciones con objetos matemáticos de nivel más elemental. Gradualmente se va familiarizando y adquiriendo las habilidades propias de dichos procesos.
  - Condensación: es un período en el cual se concentran las largas secuencias de operaciones en unas unidades más manejables. El alumno se siente cada vez más capaz de pensar en un proceso dado como un todo sin necesidad de considerar todos sus detalles. En esta etapa se puede dar un nombre al concepto que nace, se hace cada vez más factible combinar procesos, hacer comparaciones y generalizaciones, y aumenta la facilidad para alternar diversas representaciones del concepto. Este periodo de condensación dura mientras la nueva entidad permanece estrechamente unida a un cierto proceso.
  - Reificación: cuando la persona es capaz de concebir la nueva noción como un objeto en sí mismo, diremos que el concepto ha sido reificado. La reificación se define como un cambio

ontológico, una habilidad repentina para ver algo familiar con una perspectiva totalmente nueva. Se puede decir que un proceso solidifica en un objeto, en una estructura estática.

Según Sfard (1992) las etapas de interiorización y de condensación son procesos graduales y cuantitativos más que cualitativos mientras que la reificación es instantánea, se puede entender como un salto cualitativo. La nueva entidad reificada se desprende del proceso que la ha producido y empieza a adquirir su significado por el hecho de pertenecer a una cierta categoría. Varias representaciones del concepto comienzan a unificar este constructo imaginario abstracto. El estado de reificación es el punto en el cual empieza la interiorización de unos conceptos de nivel superior, aquellos que se originan a partir de procesos sobre el objeto en cuestión. El esquema de tres fases se comprende como una jerarquía que implica que no se puede pasar de un estado mientras no se hayan dado todos los pasos anteriores. Sfard representa gráficamente este proceso en el siguiente cuadro



Cuadro 2.1. Esquema de la teoría de la Reificación. Sfard (1991, p.22)

Se debe considerar la posibilidad de que la concepción estructural pueda ser la primera. Si un concepto nuevo se introduce estructuralmente, el estudiante interpretaría inicialmente, según Sfard, la definición de forma operacional. Sfard (1992) pone énfasis en que los términos procesos y objetos se comprenden como facetas distintas de una misma cosa, es decir, los modos de pensar operacional y estructural, aunque parecerían incompatibles son complementarios. Así mismo, esta autora expone que muchos estudiantes desarrollan concepciones pseudoestructurales. Refiriéndose al tema de función, considera que la tendencia de un alumno a asociar funciones con sus expresiones algebraicas es muy común, pero esto puede indicar una concepción operacional (ya que el estudiante puede percibir una fórmula como una descripción de un algoritmo computacional) o una concepción estructural (la fórmula se puede entender como una relación estática entre pares ordenados), y algunas veces es probable que la concepción del estudiante no sea ni operacional ni estructural, sino una concepción degradada semánticamente, que llama pseudoestructural.

Zandieh (2000) hace referencia a esta concepción pseudoestructural mencionada por Sfard, considerando que se puede pensar en una concepción pseudoestructural como en un objeto sin estructura interna. Este autor se refiriere a ella como pseudo-objeto, aclarando que no tiene una connotación negativa cuando se menciona. La concepción como pseudo-objeto solamente denota cuando el estudiante usa el objeto no bajo la estructura estática del objeto de verdad, es una comprensión intuitiva que no involucra una comprensión del proceso que subyace al objeto. Además, introduce la idea de que una persona puede usar un pseudo-objeto porque no conoce el proceso subyacente, o simplemente porque no tiene necesidad de referirse al proceso subyacente en el contexto en el que está trabajando.

2.3. Una aproximación piagetiana del desarrollo de un esquema

En nuestra investigación estudiamos el desarrollo de la comprensión de la noción de Derivada. Desde nuestro punto de vista podemos asimilar el desarrollo de un esquema propuesto por Piaget al desarrollo de una noción matemática. Así, necesitamos definir qué vamos a entender por esquema y cómo caracterizaremos el desarrollo del mismo. En primer lugar, nos centraremos en lo que Piaget nos dice al respecto. Según Piaget e Inherler (1978), un esquema es:

> *"la estructura o la organización de acciones, tales como se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas"(*p. 20)

El desarrollo de un esquema es un proceso dinámico y cambiante, Piaget y García (1983/1989) platean que el conocimiento crece según ciertos mecanismos, y que un esquema se desarrolla pasando por tres niveles o fases: INTRA – INTER – TRANS, denominado/a triada, que se suceden según un orden fijo. Estos autores han formulado la hipótesis de que estos niveles se pueden encontrar cuando se analiza el desarrollo de un esquema de cualquier noción matemática.

El mecanismo por el cual el individuo se mueve de un nivel a otro es denominado por Piaget y García (1983/89) *"abstracción reflexiva"* (p.10). Para Piaget, la abstracción reflexiva se lleva a cabo con actividades (físicas o mentales) del sujeto que tienen dos partes, necesariamente asociadas, una es la proyección del conocimiento existente a un plano superior del pensamiento, y la otra es la reorganización y reconstrucción de aquel conocimiento para formar nuevas estructuras.

Las tres fases del desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y García (1983/89) son definidas del siguiente modo:

- INTRA: *"lo propio de este periodo es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas,* *pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse".(*p. 163)

- INTER: *"una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos".(*p.165).
- TRANS: *"es fácil de definir en función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de "estructuras""* (p.167).

Por "síntesis" se entenderá el proceso por el que a partir de una cosa que se conoce, realizando operaciones con/ sobre ella se llega a la conclusión y a la comprensión de algo que no se conocía.

Una vez formado/construido el esquema, este puede ser tematizado. Piaget y García (1983/89) definen la tematización como:

> *"el pasaje del uso o aplicación implícita a la utilización consciente, a la conceptualización"* (p.103).

Así mismo, Piaget y García (1983/89) consideran que cada fase o nivel (intra, inter o trans) implica a su vez algunos subniveles siguiendo el mismo orden de progresión.

2.3.1. La teoría APOS

Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores (RUMEC) han desarrollado un marco teórico resultado de la interpretación de la teoría piagetiana relativa a la "abstracción reflexiva", aplicada al pensamiento matemático avanzado. Como hemos comentado anteriormente, la noción de abstracción reflexiva fue introducida por Piaget para describir la construcción de las estructuras lógico-matemáticas por un individuo durante el curso del desarrollo cognitivo. Dubinsky y sus colaboradores han denominado a la perspectiva teórica desarrollada por ellos APOS que corresponde Acción – Proceso – Objeto – eSquemas.

Para Dubinsky, la abstracción reflexiva será la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre estos objetos. Para elaborar el marco teórico considera además de los "mecanismos" de construcción, las "construcciones mentales" que realiza un individuo, poniendo especial énfasis en la noción de esquema. Dos ideas son claves en este modelo teórico: la idea de "construcción mental" y el "mecanismo" por el cual los individuos realizan dichas construcciones. Comentamos a continuación las construcciones mentales caracterizadas por el grupo RUMEC y que han aplicado en conceptos matemáticos.

- Esquema

  Es una colección más o menos coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente en la mente del individuo, en una estructura coherente, y que puede ser evocado para tratar una situación problemática. Una función importante y característica de la coherencia es su uso en determinar qué está en el ámbito del esquema y qué no. Incluido dentro de un esquema está un número de actividades y procedimientos que se pueden usar en la resolución de problemas. (Grupo RUMEC)

En la definición de esquema dada por Dubinsky se dice que es una colección de acciones, procesos, objetos, y otros esquemas (nombres referidos a tipos de construcciones mentales), veamos que se entiende por cada uno de ellos, según Asiala et al.(1996):

- Acción

  Es una transformación de objetos que el individuo percibe como algo externo a él. El individuo puede realizar transformaciones reaccionando sólo a indicaciones externas que le proporcionan detalles precisos sobre que pasos dar.

  Un ejemplo de acción / concepción acción es cuando dada la regla general para encontrar la derivada de una función polinómica, y dada una función polinómica concreta, una acción podría ser encontrar la derivada por sustitución de los números en la fórmula general. (Grupo RUMEC)

- Proceso

  Cuando una acción es repetida, el individuo reflexiona sobre ella, y puede ser interiorizada en un proceso. Usa el termino proceso o proceso mental cuando queramos poner énfasis en su naturaleza interna (al individuo).

  Un individuo que ha construido un proceso puede describirlo, o invertir los pasos del proceso sin necesidad de hacer los mismos. En contraste con una acción, un proceso es percibido por el individuo como interno, y bajo su control.

  Un ejemplo de proceso/ concepción proceso del concepto de función si puede diferenciar funciones especificadas por una fórmula pero tiene dificultades con las funciones definidas a trozos por combinaciones algebraicas de funciones con el objetivo de encontrar la derivada. (Grupo RUMEC)

- Objeto

 Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso decimos que el proceso se ha encapsulado en un objeto.

 Los individuos pueden construir objetos cognitivos de dos formas, una de ellas la que acabamos de describir. Una segunda forma de construir un objeto cognitivo es cuando el individuo reflexiona sobre un esquema, llega a ser consciente del esquema como una totalidad, y es capaz de realizar acciones sobre él, entonces decimos que el individuo ha "tematizado" el esquema en un objeto.

 El individuo es capaz de realizar acciones sobre el objeto. Y también es capaz de desencapsular un objeto en el proceso del cual proviene cuando es necesario, o en el caso de un esquema tematizado deshacerlo en sus distintas componentes.

 Un ejemplo de concepción objeto es cuando un individuo es capaz de pensar en una función como suma de dos funciones sin referencia a ejemplos concretos, está pensando en una función como un objeto.

Dubinsky, basándose en la teoría piagetiana de la "abstracción reflexiva" como método de construcción de las estructuras lógico-matemáticas, considera cinco tipos de abstracción reflexiva que permiten la construcción de acciones, procesos y objetos desde sus observaciones de estudiantes: interiorización, encapsulación, coordinación, generalización, e inversión:

- Interiorización

La construcción mental de un proceso interno (cuando Dubinsky hace referencia a un "proceso interno" implica una habilidad del sujeto para manipular mentalmente objetos cognitivos, y a menudo se refiere a ellos en forma abreviada como "proceso") comienza con acciones en objetos que están organizadas (posiblemente como un procedimiento, inicialmente) y se interiorizan, sin que sea necesario realizar todos los pasos concretos. En este caso decimos que la acción se ha sido interiorizada en un proceso.

- Encapsulación

Transformación mental de un proceso (dinámico) en un objeto cognitivo (estático). Este objeto puede ser visto como una entidad (o totalidad) y puede ser transformado (mentalmente) por acciones o procesos. En este caso decimos que un proceso se ha encapsulado en un objeto.

Des-encapsulación es el proceso mental de retroceder desde un objeto al proceso del cual el objeto fue encapsulado.

- Coordinación

Dubinsky explica la coordinación volviendo a los procesos, considerando el acto cognitivo de coger dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso. Piaget usa " coordinaciones de acciones", refiriéndose a todas las formas de usar una o más acciones para construir nuevas acciones u objetos.

- Generalización

Cuando un sujeto utiliza un esquema en una situación diferente a la vista previamente. El sujeto aplica el esquema ya existente a una gran colección de fenómenos, se dice que el esquema se ha generalizado.

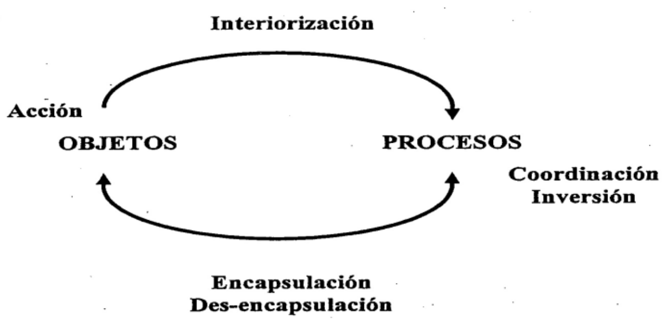
- Inversión

Una vez que el proceso existe internamente, al sujeto le es posible pensarlo invertido, en el sentido de deshacer, como un medio de construir un nuevo proceso que consiste en el inverso del proceso original. Piaget no lo trata en el contexto de la abstracción reflexiva, Dubinsky (1991) lo incluye como una forma adicional de construcción.

- Tematización

Asiala et al. (1996) consideran la tematización de un esquema, cuando uno reflexiona sobre la comprensión misma de un esquema, viéndolo como un todo y es capaz de realizar acciones sobre él, entonces se dice que el esquema se ha tematizado en un objeto.

Igual que cuando un proceso es encapsulado para formar un objeto, cuando un esquema es tematizado se crean otra clase de objetos, que pueden ser también de-tematizado para obtener el contenido original del esquema.



Cuadro 2.2. Esquema del marco teórico APOS. Asiala et al. (1996, p.9)

Uno de los objetivos de Dubinsky en la elaboración de la teoría general es identificar pequeñas porciones de esta estructura compleja y dar descripciones explícitas de posibles relaciones entre ellas. Cuando esto se hace para un concepto particular Dubinsky lo denomina descomposición genética del concepto, definido de la siguiente forma:

> *"la descomposición genética de un concepto matemático es un conjunto estructurado de constructos mentales, que pueden describir cómo el concepto se desarrolla en la mente del individuo"* (Asiala et al., 1996, p.7)

2.3.2. El desarrollo de un esquema en la teoría APOS

Dubinsky (1991) señala que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones percibidas de problemas matemáticos, por medio de la reflexión sobre los problemas y sus soluciones, a través de la (re-)construcción de acciones matemáticas, procesos y objetos, y de la organización de estos en esquemas usados al tratar con las situaciones. Pero lo que un individuo conoce o es capaz de hacer no está necesariamente disponible para él en un momento dado o en una situación dada.

Basándose en el trabajo de Piaget, Asiala et al. (1996) describen la noción de esquema de un individuo como la totalidad del conocimiento que para él está conectado (consciente o inconscientemente) con un tópico matemático particular. Así, un individuo tendrá un esquema de función, un esquema de derivada, ...

En el seno del grupo RUMEC se ha profundizado en la última década en la caracterización de la construcción y desarrollo de los esquemas de conceptos matemáticos. Este desarrollo está basado en la teoría de Piaget y en las etapas o fases que propone para el desarrollo de esquemas en general (Intra, Inter, Trans). Así, Clark et al. (1997), como hemos mencionado en la página 36, particulariza los tres niveles de desarrollo de un esquema a la noción de derivada mediante la siguiente caracterización:

- INTRA: caracterizado porque se centra en un objeto aislado de otras acciones, procesos u objetos. Ejemplo del esquema de la regla de la cadena dado por Clark et al. (1997):

  "los estudiantes tienen una colección de reglas para encontrar la derivada, incluyendo algunos casos especiales de la regla de la cadena como la potencia ly quizás la fórmula general, pero no podría reorganizar las conexiones o relaciones entre ellas", (p. 354).

- INTER: caracterizado por la reorganización de relaciones entre diferentes acciones, procesos u objetos y/o esquemas. Ejemplo del esquema de la regla de la cadena dado por Clark et al. (1997):

  "en el nivel Inter el estudiante empezaría a reorganizar estos casos especiales y empezaría a relacionarlos. La colección de elementos del esquema de la regla de la cadena se estaría formando",(p. 354).

- TRANS: caracterizado por la construcción de una estructura coherente a través de las relaciones descubiertas en el nivel Inter del desarrollo. Ejemplo del esquema de la regla de la cadena dado por Clark et al. (1997):

  "los estudiantes en el nivel Trans construirán la estructura de la regla de cadena. Derivarán funciones compuestas desde una regla genera",(p. 354).

Basada en esta misma descripción de los niveles de desarrollo del esquema dada por Clark et al. (1997), Mc Donald et al. (2000) describen los tres niveles de desarrollo del esquema de sucesión (para lo que afirma que los estudiantes tienden a construir dos objetos cognitivos distintos ambos referidos como una sucesión: SEQLIST y SEQFUNC) de la siguiente manera:

- INTRA: para un estudiante en el nivel Intra los enlaces entre SEQLIST, y SEQFUNC son prácticamente inexistentes, los dos constructor son distintos y cognitivamente no relacionados. Los estudiantes pueden usar ambos constructos para resolver un problema, pero lo ven como dos constructos y dos métodos para resolver el problema no relacionados, (p.92).
- INTER: un estudiante en el nivel Inter todavía no ha construido un objeto cognitivo de SEQFUNC. Sin embargo, puede demostrar la existencia de enlaces entre la sucesión como función y como una lista, aunque no lo vea como dos representaciones de la misma cosa, (pp.92-93).
- TRANS: los estudiantes en este nivel tiene construido los objetos cognitivos SEQLIST y SEQFUNC, y conexiones entre sucesiones como funciones y sucesiones como listas, son conscientes de estas conexiones, y pueden subordinar cada uno de estos objetos a un concepto global de sucesión. La estructura coherente subyacente de su esquema le ayudará a utilizar este esquema en nuevas situaciones, (p.93).

Cuando un individuo hace frente a una situación matemática (problema) se ha observado frecuentemente, que no siempre es capaz de movilizar las ideas, aunque posea cierto conocimiento no es capaz de usarlo. Baker et al. (2000) señalan que la teoría del desarrollo de un esquema puede explicar por qué los estudiantes tienen dificultades con diferentes partes de un tema y pueden tener incluso problemas diferentes con la misma situación en distintos casos. En su estudio definen un esquema maduro como una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, previamente construidos, que son coordinados y sintetizados por el individuo para formar estructuras utilizadas en situaciones problemas. Una persona demuestra la coherencia del esquema al discernir lo que se contiene en el esquema y lo que no (cuando la noción es aplicable o no).

En los últimos años Baker et al. (2000) concretan la descripción de los niveles de desarrollo del esquema. Así según estos investigadores:

- INTRA: Los objetos se analizan en término de sus propiedades, el estudiante no los reconoce como necesario y su forma es similar a la de una simple generalización. El estudiante se centra en repetir la acción u operación, pero carece de la capacidad para relacionar la acción con un sistema de condiciones a través de las cuales podría extender su aplicación e incluirlo en un sistema de transformaciones interdependientes.

  Ejemplos del nivel INTRA del esquema de derivada:

  > *"Los estudiantes interpretan la derivada como la pendiente de la línea tangente en un punto específico, demostrando esta interpretación con los intervalos de crecimiento y decrecimiento, o alternativamente, resolviendo un problema de tasa de variación. Sin embargo, los estudiantes no pueden hacer conexiones entre estos dos problemas".* Ejemplo del esquema de Derivada dado por Baker et al. (2000, p.559).

- INTER: El estudiante es consciente de las relaciones presentes y puede deducir desde una operación inicial, una vez que se comprende, otras operaciones que están implicadas en ella o que pueden coordinarse con operaciones similares. Este proceso permite al estudiante agrupar los sistemas, utilizando un método que incluye una nueva transformación.

  Un ejemplo del nivel INTER del esquema de Derivada dado por Baker et al. (2000) es el siguiente:

> *"El estudiante coordina la noción de derivada como la pendiente de la recta tangente con la idea de derivada como el cociente incremental en un punto dado. Y puede utilizar estas ideas para describir la variación local de la función",* (p.559).

- TRANS: Por medio de la síntesis de las transformaciones del nivel Inter, el estudiante toma conciencia de que el esquema está completo, y puede percibir propiedades globales que eran inaccesibles en otros niveles. En el nivel TRANS del desarrollo del esquema la colección (de acciones, procesos, ...) puede ahora referirse como un esquema, teniendo ahora la coherencia necesaria.

  Un ejemplo del nivel TRANS del esquema de Derivada dado por Baker et al. (2000) es el siguiente:

> *"Los estudiantes agrupan todas las derivadas como pendientes o cocientes incrementales de una función en un punto dado y reconocen que todas las situaciones en la cual la variación está involucrada, está relacionada con el concepto de derivada. Los estudiantes pueden discriminar entre aquellas relaciones que están incluidas y aquellas que no están, demostrando coherencia del esquema",* (p.559).

En cada nivel de la triada (INTRA, INTER, TRANS) el estudiante reorganiza el conocimiento adquirido durante el nivel anterior. La progresión es gradual y no necesariamente lineal.

Este mismo modelo de desarrollo de un esquema ha sido aplicado a otros conceptos como la divisibilidad (Brown et al. (2002)).

Desde nuestra perspectiva, vistas globalmente estas caracterizaciones del desarrollo de un esquema a través de los niveles Intra, Inter, Trans, indican que lo que define el desarrollo es el tipo de relaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que constituyen el concepto cuando resuelven un problema. Desde este punto de vista aunque en el planteamiento general de la teoría APOS se habla de "mecanismos" de construcción y estos se caracterizan a través de la idea de abstracción reflexiva piagetiana, identificándose diferentes tipos, queda por resolver cómo podemos ser capaces de dar una respuesta operativa a la cuestión de caracterizar el paso de un nivel a otro en el desarrollo de un esquema. Lo que si sabemos a partir de las investigaciones previas sobre el desarrollo de los esquemas es que hay que centrar la atención en

- el "tipo de relaciones" que los estudiantes son capaces de establecer, entre
- los "elementos matemáticos" del concepto comprendidos de alguna manera determinada (como acción, proceso u objeto).

2.3.3. El mecanismo de la triada para describir el desarrollo de un esquema

En nuestra investigación, basándonos en la definición de Piaget (1963):

> *"los elementos son siempre el producto de una disociación o de una segregación en el interior de una totalidad previa"*(p. 8),

un **elemento matemático** será el producto de una disociación o de una segregación en el interior del concepto o la noción matemática.

Contemplamos en nuestro estudio dos aspectos de los **elementos matemáticos**: **modos de representación** y carácter **local o global**. Respecto a los modos de representación, consideramos **analítico y gráfico**, ya que la noción de Derivada tiene componentes analíticas y gráficas reflejadas en sus elementos constituyentes, según han mostrado las investigaciones previas. Dentro de cada uno de estos modos (analítico y gráfico) se distinguen elementos matemáticos puntuales (si el elemento matemático conlleva una propiedad local x =a) y globales (si el elemento matemático conlleva una propiedad de un intervalo (a, b)).

Nos referiremos a un **esquema** como a

*"la estructura matemática formada por las **relaciones lógicas** que se establecen entre los elementos matemáticos que constituyen una noción matemática, y que puede ser evocado para la resolución de un problema".*

Para resolver un problema, los individuos usan los elementos matemáticos a través del establecimiento de "relaciones lógicas" entre ellos. Las relaciones lógicas que consideramos en el caso del esquema de derivada son las siguientes: **conjunción lógica**, **contrarrecíproco** y **equivalencia lógica**, definidas de la forma siguiente:

Conjunción lógica (y lógica): es la relación que se produce entre elementos matemáticos cuando se usan conjuntamente para hacer inferencias.

Contrarrecíproco: es la relación que se establece en un condicional directo y su contrarrecíproco $[(A\rightarrow B) \leftrightarrow (\rceil A\rightarrow \rceil B)]$

Equivalencia lógica (o doble implicación): es la relación que se establece en un bicondicional y la conjunción de los condicionales $[(A\leftrightarrow B);A\rightarrow B\wedge B\rightarrow A)]$

En definitiva **caracterizaremos el desarrollo de un esquema** a través del *"tipo de relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos y del uso paulatino de más elementos matemáticos de la estructura matemática en la resolución de problemas".*

Así, los tres niveles de desarrollo de un esquema los caracterizaremos como:

NIVEL INTRA: No se establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos (ya sean gráficos o analíticos, puntuales o globales), y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) entre ellos se realizarán con errores. Uso de elementos matemáticos de forma aislada (y a veces de forma incorrecta).

NIVEL INTER: Se establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos utilizados, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica y sólo relacionan elementos matemáticos puntuales o/ y globales que se encuentren en el mismo modo de representación analítico o gráfico. Se usan más elementos matemáticos de forma correcta que en el nivel anterior.

NIVEL TRANS: aumenta el repertorio de uso de las relaciones lógicas (y lógica, contrarrecíproco, equivalencia lógica) entre los elementos matemáticos. En este nivel se produce la "síntesis" de los modos de representación. Todo ello lleva a la construcción de la estructura matemática.

La "síntesis" se aplica a situaciones en las que hay que relacionar (relación lógica) información gráfica y analítica. Es decir, usar información procedente de dos sistemas de representación diferentes para considerarla conjuntamente y obtener una "cosa" que no se conocía. "Considerar la información conjuntamente" significa establecer algún tipo de relación lógica entre los elementos matemáticos para tomar una decisión relativa a la situación en la que se encuentra.

En algunos casos se llega a la **tematización del esquema**, hecho que se pone de manifiesto cuando el estudiante es capaz de determinar los dominios de validez de las propiedades. Es decir, sabe adaptarse a la nueva situación cuando se modifica alguna condición inicial del problema. Por ejemplo cuando es capaz de trasladar las relaciones entre f y f ', al par f ' y f ''.

Desde esta especificación del marco teórico relativo al desarrollo de un esquema estamos en condiciones de formular las preguntas de investigación específicas que queremos abordar.

2.4. Preguntas de investigación

Nuestras preguntas de investigación irán dirigidas a profundizar en la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada.

En concreto las cuestiones a las que pretendemos responder en este trabajo son:

- ¿cómo los estudiantes llegan a comprender el concepto derivada?
    - ¿cómo podemos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de derivada?
    - ¿qué relaciones lógicas y qué elementos matemáticos se manifiestan en cada nivel de desarrollo de la derivada?

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 3: Diseño de la investigación

En este capítulo describimos, en primer lugar las características de los participantes en la investigación, analizaremos después cómo se elaboraron los instrumentos de recogida de datos y cómo se aplicaron, y por último comentaremos el proceso de análisis de los datos obtenidos.

3.1. Sujetos

Los participantes fueron 150 estudiantes de primer curso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla y de primero y segundo de Bachillerato de tres Institutos de Enseñanza Secundaria durante el segundo y tercer trimestres del curso 2001/2002:

Participantes		
1º Bachillerato: 50	2º Bachillerato: 50	1º Licenciatura de Matemáticas: 50

Los 50 estudiantes de 1º de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, son estudiantes a los que se les había introducido por primera vez el tema objeto de nuestro estudio. Estos alumnos se les había introducido la noción de derivada en un punto (f ’(a)) y comienzan a trabajar con el operador derivada, aplicándolo a reglas de derivación. Pertenecían a dos Institutos de Educación Secundaria. El primero de ellos situado en un pueblo de gran población de la provincia de Sevilla y cercano a dicha ciudad, a unos 17 Km., de hecho muchos de los padres de estos alumnos se desplazan a trabajar a Sevilla. El segundo I.E.S. está situado en un pueblo pequeño, de unos tres mil habitantes, en la provincia de Huelva, a unos 70 Km. de Sevilla.

Los 50 estudiantes de 2º de Bachillerato, se les había introducido el tema de derivada en el curso anterior. Estos alumnos tenían que empezar a trabajar con elementos matemáticos del concepto de Derivada relacionados con f ’’ (relaciones de f ’ y f ’’ con los extremos y los puntos de inflexión de f, relaciones del signo de f ’’ con la concavidad y convexidad de f, ...). Además, la interpretación geométrica de la derivada la habían estudiado también con carácter global. Este grupo de estudiantes pertenecían dos Institutos de Educación Secundaria. Uno de ellos era el mismo que en el caso de los alumnos de primer curso, mientras que el otro I.E.S. está situado en la misma ciudad de Sevilla.

Los 50 estudiantes de primer curso de la Universidad, ya habían cursado en el primer cuatrimestre la asignatura de Elementos de Análisis Matemático en la que se les introducía el concepto de derivada. Por tanto, hay riqueza en los elementos matemáticos analíticos o/y gráficos (puntuales o/y globales) que pueden utilizar estos estudiantes, y pueden establecerse distintos tipos de relaciones lógicas entre elementos matemáticos analíticos o/y gráficos (puntuales o/y globales) relativos a f ’ y f ’’.

3.2. Instrumentos. Diseño y aplicación

El proceso de elaboración de los instrumentos de recogida de datos (cuestionarios y entrevistas) implicó dos fases:

A) análisis de la noción de Derivada, con el objetivo de identificar los elementos matemáticos y relaciones lógicas que pueden darse entre ellos para la resolución de problemas / situaciones.

B) selección de problemas que constituirán los distintos cuestionarios.

3.2.1. Elementos y relaciones en la noción de derivada

Desde nuestra perspectiva, un concepto matemático está formado por diferentes elementos matemáticos que lo configuran. Tal y como mostrábamos en nuestro marco, p. 72, entendemos por "elemento matemático" el producto de una disociación o de una segregación en el interior del concepto o la noción matemática (vinculado a la definición del concepto y a sus propiedades). Nosotros no hablamos de colecciones de acciones, procesos u objetos, que son formas de conocer los elementos matemáticos del concepto, hablamos de colección de elementos matemáticos que configuran la noción matemática.

Baker et al. (2000) dicen que en la tarea de resolver un problema los individuos "coordinan y sintetizan" las acciones, procesos y objetos para formar estructuras, es decir, "coordinan" los elementos del concepto matemático comprendidos de una determinada manera, ya que acciones, procesos y objetos son formas de conocer elementos matemáticos del concepto. Un paso previo en la investigación es determinar cómo se relacionan los elementos y qué elementos son los que se relacionan, como una forma de caracterizar el desarrollo del esquema, dichas **relaciones entre los elementos matemáticos del concepto se realizan a través de determinadas "operaciones cognitivas" (relaciones u operaciones lógicas) entre los elementos matemáticos**, por tanto el desarrollo de un esquema queda caracterizado por:

- los elementos matemáticos que se usan, y
- las relaciones lógicas que se establecen entre ellos

Con este planteamiento podemos observar el desarrollo del pensamiento de un individuo en el uso de elementos matemáticos, y en la capacidad de establecer las relaciones lógicas entre ellos necesarias para la resolución de problemas. Por ejemplo, un desarrollo pleno del esquema de derivada se da cuando el individuo es capaz de determinar cuando es pertinente o no usar dicho concepto o las reglas de derivación en una determinada situación (Clark et al., 1997)

Esta colección de elementos vinculados al concepto se refiere a la noción matemática del concepto, a diferencia de la descomposición genética que conlleva una secuencia de aprendizaje, es decir teniendo en cuenta la hipótesis del investigador de cómo se supone se aprende un concepto (ver p.67).

En lo que sigue haremos un análisis de la noción de Derivada, dicho análisis lo realizamos estudiando los elementos matemáticos y relaciones que forman la noción del Derivada, basándonos en cómo el concepto es presentado, usado en aplicaciones y justificado en los libros de textos de Bachillerato (Editex, Oxford, S.M., Anaya, Santillana), y algunos textos de Análisis Matemático que son referencia en la introducción al análisis en el primer año en la Licenciatura de Matemáticas (Spivak, Apóstol, Demidovich).

Los elementos matemáticos del concepto están vinculados a su definición y a las propiedades. Consideramos dos aspectos, ya mencionados:

- modo de representación: gráfico y analítico.
- si el elemento matemático conlleva una propiedad local, x=a (puntual) o a una propiedad de un intervalo (a, b) (global).

Los tipos de relaciones lógicas consideradas entre los elementos matemáticos pueden ser:

- conjunción lógica o "y lógica" ($A \wedge B$)
- contrarrecíproco $[(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B \rightarrow \neg A)]$
- equivalencia lógica $[(A\leftrightarrow B),\ A\rightarrow B \wedge B\rightarrow A]$

Pasamos a describir los elementos matemáticos del concepto, y posteriormente las relaciones lógicas que se pueden establecer entre ellos.

A) ELEMENTOS MATEMÁTICOS

En hojas adjuntas. Cuadros 3.1. /3.2. /3.3. /3.4. (pp. 81-82)

B) RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS MATEMÁTICOS

Un individuo ante la tarea de resolver un problema, utiliza los elementos matemáticos del concepto que conoce, y en muchas ocasiones necesita establecer relaciones lógicas entre estos elementos matemáticos.

Hemos identificado varios tipos de relaciones lógicas entre elementos matemáticos del concepto de Derivada, que ahora pasamos a describir:

- Conjunción lógica ($A\wedge B$) ("y lógica")

Es la relación que se produce cuando el estudiante relaciona a través de la "y lógica" dos elementos matemáticos para hacer inferencias. Por ejemplo: considerando conjuntamente

Sea f continua en (a, b) y derivable en (a, c) y (c, b)

A) si $f''>0$ en (a, c) y (c, b) $\rightarrow$ f convexa en (a, c) y (c, b)

B) f es creciente en (a, c)

f es decreciente en (c, a)

Considerando conjuntamente esta información (A y B) a través de la "y lógica", se infiere que $x = c$ es punto anguloso.

La información sobre el crecimiento de f en el intervalo (a, c) y el decrecimiento de f en (c, b) puede venir de haber considerado previamente

f '>0 en (a, c) → f es creciente en (a, c), y

f '<0 en (c, b) → f es decreciente en (c, b).

Sin embargo, aquí lo que se subraya es que cuando se tiene información de un determinado tipo (como en este caso:

- f convexa en (a, c) y (c, b), y

- f es creciente en (a, c)

f es decreciente en (c, a))

vincula los significados y permite tomar una decisión sobre la naturaleza del punto x =c (en este caso x =c es punto anguloso)

- Contrarrecíproco [(A→B)↔(⌉B →⌉A)]

Este tipo de relación se pone de manifiesto cuando usamos implicaciones como: “ f no es continua en (a, b) entonces f no es derivable en (a, b)”. Esta afirmación proviene del uso del **contrarrecíproco** del elemento matemático:

- *elemento* - *analítico* - *global condición necesaria de derivabilidad*

Si f es derivable en (a, b) entonces f es continua en (a, b)

- Equivalencia lógica [(A↔B), A→B ∧ B→A]

Este tipo de relación se presenta cuando las condiciones necesarias y suficientes entre dos elementos matemáticos se consideran conjuntamente para determinar una equivalencia.

Por ejemplo cuando se consideran las implicaciones entre el crecimiento de f y el signo de f ' de manera conjunta, es decir:

Sea f derivable en el intervalo (a, b)

* Si $f'(x) > 0$ para todo x del intervalo (a, b) entonces f es creciente en el intervalo.

Si $f'(x) < 0$ para todo x del intervalo (a, b) entonces f es decreciente en el intervalo.

Si $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo (a, b) entonces f es constante en el intervalo.

* Si f es creciente para todo x del intervalo (a, b) entonces $f'(x) > 0$ en el intervalo.

Si f es decreciente para todo x del intervalo (a, b) entonces $f'(x) < 0$ en el intervalo.

Si f es constante para todo x del intervalo (a, b) entonces $f'(x) = 0$ en el intervalo.

Podemos obtener la **equivalencia lógica**:

f es creciente $\leftrightarrow$ $f'>0$ (f es decreciente $\leftrightarrow$ $f'<0$) (f es constante $\leftrightarrow$ $f'=0$)

3.2.2. Los problemas de los cuestionarios

Una vez identificados los elementos matemáticos, que nosotros hemos considerado, del concepto de Derivada y las relaciones lógicas, pasamos al diseño y selección de problemas para la elaboración de los diferentes cuestionarios. Se diseñaron tres cuestionarios:

- Cuestionario 1: para alumnos que han cursado primero de Bachillerato de Ciencias

- Cuestionario 2: para alumnos que han cursado segundo de Bachillerato Tecnológico

- Cuestionario 3: para alumnos que han cursado la asignatura de Elementos de Análisis Matemático, en el primer curso de la Licenciatura de Matemáticas.

El procedimiento seguido fue el siguiente: en primer lugar, a través de las consultas de diferentes libros de texto de 1º y 2º de Bachillerato y libros de consulta de la Licenciatura de Matemáticas elaboramos un primer listado de elementos del concepto.

Teniendo en cuenta que según la hipótesis de partida, la construcción del esquema de Derivada es progresiva, las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos, y los elementos matemáticos que se utilizan y cómo se utilizan no es igual para estudiantes que entraban en contacto con la noción de derivada por primera vez, (alumnos de 1º de bachillerato), que para estudiantes que ya es el tercer año que lo estudian, como son los alumnos de 1º Licenciatura de Matemáticas.

Elaboramos una batería de problemas provenientes de los libros de texto consultados, pruebas de acceso a la Universidad y artículos publicados en revistas de investigación relacionados con la comprensión de la derivada. Se resolvieron estos problemas de varias formas y por varios investigadores y la información proporcionada por la resolución de estos problemas se recogió en una plantilla donde figuraba:

- Elementos matemáticos analíticos y gráficos puntuales y globales identificados
- Cómo se relacionaban estos elementos matemáticos en la toma de decisiones en la resolución de la tarea
- Cómo se utilizaban los modos (analítico y gráfico) en la resolución de la tarea.

Tras este proceso se modificó el listado de elementos matemáticos del concepto de Derivada, añadiendo algún elemento más, unificando elementos del listado inicial, llegando así al listado definitivo de elementos, que recogemos en los cuadros 3.1 / 3.2 / 3.3 / 3.4.

Los criterios que se siguieron para elegir los problemas de los distintos cuestionarios fueron:

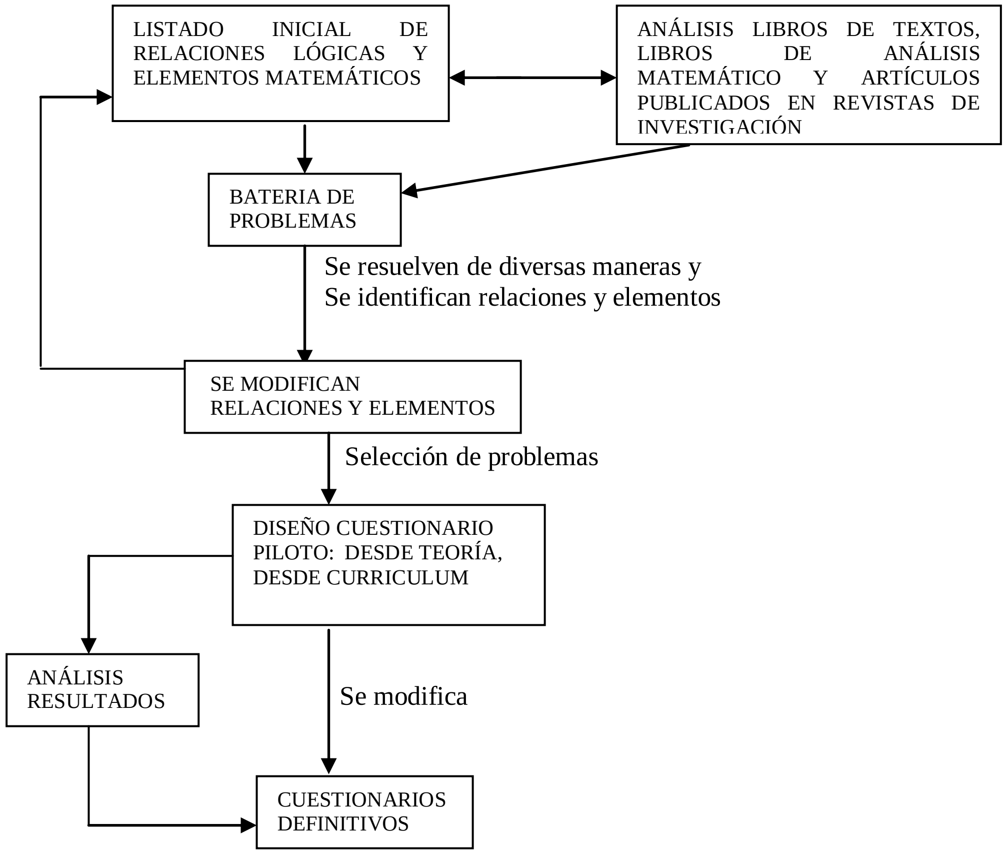
1. tipos de relaciones lógicas que se podían establecer entre los elementos matemáticos utilizados, y
2. tipos de elementos matemáticos (analíticos y gráficos, puntuales y globales) necesarios en la resolución de la tarea.

La idea fue que la "demanda del problema propuesto" al resolutor en cada curso fuera tal que pudiéramos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de derivada. Por ello tuvimos en cuenta el desarrollo progresivo del esquema y el currículo en los diferentes grupos (1º, 2º Bachillerato y 1º Licenciatura de Matemáticas).

Posteriormente, se agruparon los problemas según los elementos matemáticos que movilizaban y forma de resolución (relaciones lógicas entre los elementos, modos de representación utilizados,..), llegando así a una primera propuesta de cuestionarios pilotos pasados a una pequeña muestra de unos quince alumnos de los diferentes niveles en el curso académico 2000/2001.

El análisis de los resultados de esta prueba piloto hizo que modificáramos los cuestionarios en algunos puntos. Así por ejemplo, se vio la conveniencia de que existieran tareas comunes en los distintos cuestionarios, y que en el cuestionario 3, para alumnos que han cursado la asignatura Elementos de Análisis Matemático en primer año de la Licenciatura de Matemáticas, se suprimiera una de las tareas que figuraban en el cuestionario piloto pues la comprensión del enunciado de esta tarea presentó dificultades y la misma no aportaba nuevos aspectos a la investigación ya que los elementos matemáticos y las relaciones que se utilizaban en los posibles procesos de resolución estaban contemplados en otras tareas del cuestionario. Al final de este proceso se identificaron 12 problemas con los que se diseñaron los tres cuestionarios. Una vez diseñados los tres cuestionarios (ver secciones siguientes 3.2.2.1, 3.2.2.2, 3.2.2.3) se implementaron en 1º Bachillerato, 2º Bachillerato y 1º Licenciatura de Matemáticas. Las características de la implementación se describirán en la sección 3.2.3.

Posteriormente a la realización de los cuestionarios, se elaboraron guiones de entrevistas semiestructuradas, con el objetivo de obtener más información sobre la comprensión del concepto de Derivada que alcanzan los estudiantes en las diferentes poblaciones. Las entrevistas fueron transcritas y se analizaron junto con las respuestas dadas a las diferentes tareas de los cuestionarios. El proceso de análisis seguido será descrito en la sección 3.3. El cuestionario / entrevista fue realizado por 69 estudiantes (20 /20 /29) de los diferentes niveles. En el cuadro se muestra el esquema del proceso seguido en la elaboración de los cuestionarios:



Cuadro 3.5. Esquema del proceso de elaboración de los instrumentos de recogida de datos

Las tareas que utilizamos para la elaboración definitiva de los tres cuestionarios son las que mostramos a continuación. Comentamos en cada una de ellas su procedencia:

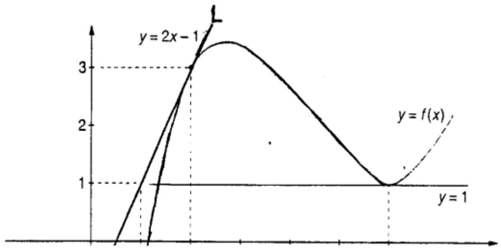
TAREA 1

Comprueba que la tasa de variación media de f (x) = (x+3)/(x+2) en el intervalo [1, 2] es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(1, f(1)) y Q(2, f(2)). ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de f(x) en el punto (1, f(1))?

Tarea que proviene de ejercicios similares en el libro de texto de 1º Bachillerato de Ciencias (Andalucía) de la editorial Anaya (2000)

TAREA 2

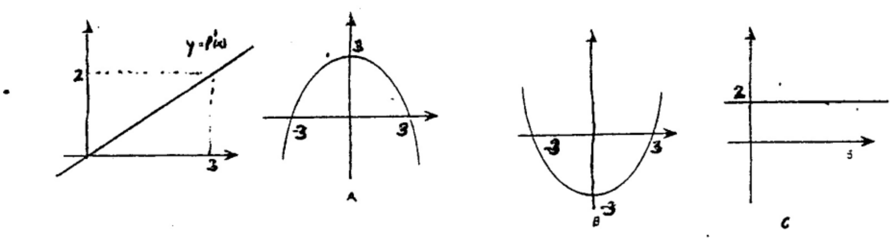
Suponer que la linea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (2,3) como aparece en la figura. Encontrar f(2) y f '(2).



Tarea que figura en el libro de texto de 1º de bachillerato de Ciencias de la editorial Editex (1996), y que es similar a la que figura en los artículos de Amit y Vinner (1990) y Asiala et al. (1997), en este artículo en el gráfico aparecían las coordenadas de dos puntos de la tangente a la curva, mientras que en esta tarea aparece la ecuación de la recta tangente a la curva.

TAREA 3

La primera gráfica corresponde a la función derivada de f(x). La expresión analítica de f '(x) =2x/3. Indica cuál de las gráficas A, B, C corresponde a la función f (x). Justifica la respuesta.

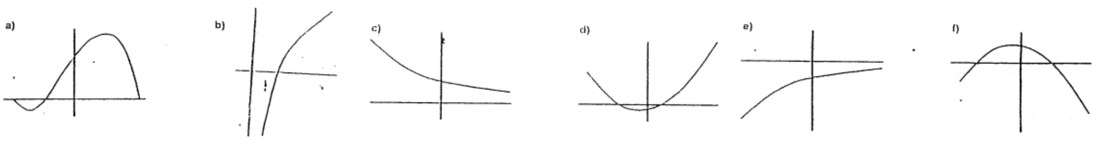


Esta tarea proviene del libro de texto de 2º de bachillerato de Ciencias de la editorial Editex (1996) y en el libro de texto de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales de la editorial S.M.(1996)

TAREA 4

Analiza las gráficas siguientes,

¿cuántas parejas producirías de cada función con su derivada?

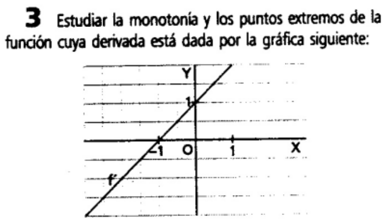


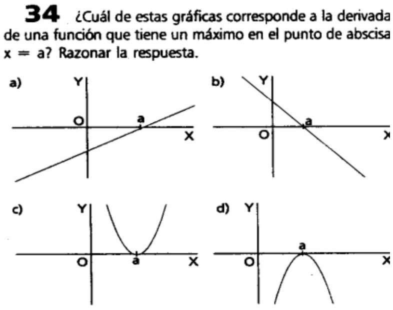
Tareas similares figuran en libros de texto 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales S.M., pruebas de selectividad Andalucía LOGSE 1996 de 2º de Bachillerato Tecnológico, libro Azcárate C., Casadevall M., Caselles E., Bosch D. (1996) "Cálculo Diferencial e Integral" editorial Síntesis En todos estos textos mencionados la tarea se plantea de manera que todas las funciones quedan emparejadas con sus derivadas respectivas, nosotros decimos incluir una variante que es que no todas las funciones se pudieran emparejar, tan sólo podríamos formar dos parejas (una en la que la coordinación de elementos de conocimiento puntuales y globales fuera necesario para formar la pareja, y otra en la que sólo con el uso de un elemento de conocimiento global que relacionara el signo de f ' y el crecimiento de f fuera suficiente para formar la pareja), quedando dos gráficos sueltos, sin emparejar, ya que de la forma original el resolutor podía formar alguna pareja por exclusión. Las gráficas a), c), d), e), f) de esta tarea aparecen en el artículo de Kyungmee Park y Kenneth J. Travers (1996), sustituimos la gráfica b) que figuraba en el mismo, por la que aparece en la tarea propuesta por nosotros, por el motivo mencionado anteriormente.

TAREA 5

La gráfica correspondiente a la función f '(x) primera derivada de una cierta función f(x) es una recta que pasa por los puntos (a,0) y (0,b). Esboza las posibles gráficas de f(x).

Tarea que proviene de modificar algunos ejercicios que figuran en el libro de texto de la editorial S.M. de 1º de bachillerato y de 2º de bachillerato de Ciencias (1996)


3 Estudiar la monotonía y los puntos extremos de la función cuya derivada está dada por la gráfica siguiente:


34 ¿Cuál de estas gráficas corresponde a la derivada de una función que tiene un máximo en el punto de abscisa x = a? Razonar la respuesta.

se vio que modificando el enunciado de la tarea tal y como lo hemos hecho, mostraba de forma más completa el uso que hacen los estudiantes de los elementos de conocimiento del concepto de Derivada y de las relaciones que entre ellos se establecen.

TAREA 6

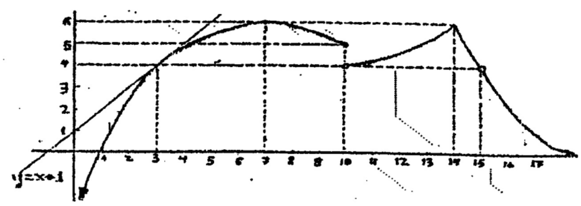
Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x<1 \\ bx^2 + 1 & x\geq 1 \end{cases}$

Calcular a y b para que f sea derivable en x =1

Tarea que se encuentra en el libro de texto de 1º de Bachillerato de Ciencias de la editorial Oxford (1998).

TAREA 7

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) *Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.*

b) *Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.*

El gráfico de la tarea procede de la prueba de selectividad Andalucía LOGSE de 1997 de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales, en el ejercicio de selectividad sólo se les pedía el valor de f '(7) y f '(3) y el cálculo de ciertos límites de f(x). Nosotros la modificamos pidiendo también el valor de f '(10), f '(14) y f '(15) por la diversidad del comportamiento de la función en estos puntos, entre los que se encuentra x =14 punto anguloso o cúspide (tratado en el artículo de Baker et al. 2000), y además decidimos sustituir el apartado b) que figuraba en la prueba de selectividad del cálculo de límites de f(x) en determinados puntos, ya que esto no era objeto de nuestra investigación, por el apartado b) que figura en la tarea donde se pide el esbozo del gráfico de f ' a partir del gráfico de f, pues nos daría información complementaria a otras tareas donde a partir del gráfico de f ' piden el esbozo del gráfico de f, como sucede en la tarea 5 anteriormente citada o en la tarea 11 que aparece a continuación.

TAREA 8

Dada la función f(x)=(x-1)(x-2)(x-3). Encontrar un punto, entre dos valores que tengan la misma imagen, en el que la recta tangente sea paralela al eje x.

Tarea que aparece en el libro "5000 Problemas de Análisis Matemático" B.P. Demidovich. Editoral Paraninfo (1976)

TAREA 9

A)De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x=2.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x =1?

B) Supón que f es una función para la que lim (f(x)-f(2))/(x-2) cuando (x ->2) es igual a 0. ¿cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuáles son obligatoriamente falsas?

1. f '(2) = 2 2. f(2) = 0 3. lim f(x) cuando (x ->2) igual a f(2) 4. f es continua en x=0 5. f es continua en x =2.

El apartado A) de esta tarea está basado en tareas similares a las que figuran en los libros Azcárate y Deulofeu (1990) "Funciones y Gráficas" Editorial Síntesis, y Azcárate et al. (1996) "Cálculo Diferencial e Integral" Editorial Síntesis. En dichos libros figuran tareas similares aplicadas a la velocidad de un móvil, nosotros consideramos la tarea sin el contexto físico de la velocidad y en las proximidades de un punto, como aparece en el libro de texto de la editorial S.M. para 1º de bachillerato de Ciencias Sociales en el que figura la idea de método numérico de la derivada en un punto. Aunque en el libro de texto figura la expresión analítica de f(x), nosotros en la tarea no la hemos puesto ya que para el cálculo por aproximación numérica de f ' en un punto no es necesario conocer la expresión analítica de f(x), basta con conocer el valor numérico de f en las proximidades del punto donde queremos calcular el valor de f ' que son los datos que les hemos facilitado a los estudiantes en la tarea. Además en la tarea consideramos el cálculo de f ' en dos puntos, uno en el que si existe f ' y otro en el que no existe f ' , para que se ponga de manifiesto que el estudiante conoce el elemento de conocimiento relativo a la existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental para que f sea derivable en un punto.

DERIVADA EN UN PUNTO
Método numérico

Función: f(x) = L x	
h ⟶ 0	TVM(1, h)
0,1	0,95...
0,01	0,995...
0,001	0,9995...
0,0001	0,99995...
0,00001	0,999995...
0,000001	0,9999995...
↓	↓
0	f'(1) = 1

El apartado B) de la tarea es independiente del apartado anterior se trata de una cuestión teórica del tipo de las que figuran en los libros de texto de 1º y 2º de bachillerato de Ciencias sobre derivabilidad y continuidad donde el estudiante debe tener la idea de derivada en un punto como límite del cociente incremental, aparece como modelo de prueba de acceso a la Universidad en el libro " Matemáticas II" de S.A.E.M. "THALES" (2000)

TAREA 10

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

- *f es continua* - $f(2)=0$ - $f'(3)=f'(5)=0$ - $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -4$ - $\lim_{x\to 8} f(x) = -\infty$

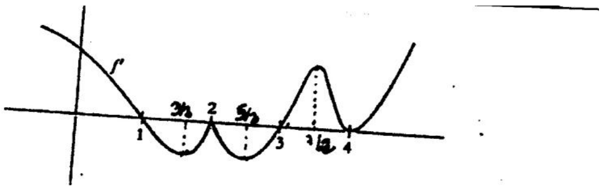
- $f'(x)<0$ *cuando* $5<x<8$ - $f'(x)>0$ *cuando* $x<5$ - $f''(x)<0$ *cuando* $3<x<8$

- $f''(x)>0$ *cuando* $x<3$

Tarea basada en las que figuran en los artículos de investigación de Asilala et al. 1997, y de Baker et al. 2000 en la que no hemos considerado algunas condiciones que figuraban en esta por no considerarlas relevantes en la investigación, y podían producir confusión en el resolutor, como es el límite de h '(x) cuando x tiende a -∞ (Asiala 1997) o cuando x tiende a 0 (Baker et al. 2000)

TAREA 11

La figura muestra la gráfica de la derivada de f ', esboza las posibles gráficas de f.



Tarea que figura en el libro "Calculus" M. Spivak, 1.974, editorial reverté,s.a.

TAREA 12

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

- *f es continua* - $f(-1)=0$ - $f'(1)=f'(3)=f'(5)=0$ - $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ - $\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$

- $f'(x)<0$ *cuando* $1<x<5$ *y cuando* $x>7$ - $f'(x)>0$ *cuando* $-2<x<1$ *y cuando* $5<x<7$

- $f''(x)<0$ *cuando* $-2<x<3$ - $f''(x)>0$ *cuando* $3<x<7$ *y cuando* $x>7$

Tarea similar a la tarea 10, se diferencia de esta en que para esbozar el gráfico de f es necesario considerar x =7 punto anguloso o cúspide (tratado en Baker et al. 2000) cosa que no sucedía en la tarea 10, por lo que en una aproximación a la resolución de la tarea 12 será necesario mayor variedad en los elementos de conocimiento y las relaciones entre estos utilizadas.

Con estas doce tareas pasamos a confeccionar los tres cuestionarios que quedaron distribuidos como se muestra en la siguiente tabla:

Cuestionarios		
1º Bachillerato: T1,T2,T3,T9A)	**2º Bachillerato**: T4,T5,T6,T7,T8,T9,T10	**1º Licenciatura de Matemáticas**: T6,T7,T11,T12

Como se puede observar, la tarea 9 apartado A) es común para el cuestionario 1 y para cuestionario 2, y las tareas 6 y 7 son comunes para el cuestionario 2, y para cuestionario 3.

A continuación, pasamos a analizar los diferentes cuestionarios. Para cada uno de ellos se mostrarán las tareas que lo constituyen, haciendo un análisis de las tareas, atendiendo a:

- los objetivos que se quiere alcanzar con ella y
- una aproximación a un posible proceso de resolución de la misma

Estos dos aspectos del análisis se harán a través de los elementos matemáticos y posibles usos y relaciones entre ellos. Se pretende que en cada cuestionario se contemplen todos los elementos matemáticos y posibles relaciones que se pueden establecer entre ellos en ambos modos de representación (analítico y gráfico). Además, tuvimos en cuenta que la construcción del esquema de derivada es progresiva, y consideramos la población a la que cada cuestionario está dirigida con las limitaciones del currículo que ello conlleva.

3.2.2.1. Cuestionario 1º Bachillerato

La selección de tareas de este cuestionario se hizo teniendo en cuenta que iba destinado a estudiantes que es la primera vez que habían sido introducidos a la noción de Derivada. El cuestionario 1 está diseñado para alumnos que cursaban 1º de Bachillerato de Ciencias lo que conllevaba también limitaciones propias del currículum a la hora de la elaboración del cuestionario, pues son alumnos que se les ha introducido la noción de derivada en un punto y comienzan a trabajar con el operador derivada, aplicándolo a reglas de derivación. (Ver capítulo 1, p.16)

El cuestionario constaba de cuatro problemas. Dos problemas en los que podía usarse los elementos matemáticos de la noción de derivada en un punto como límite del cociente incremental (tarea 1), y como pendiente de la recta tangente a la curva (tarea 2). Los otros dos problemas consideraban el modo gráfico (tarea 3) y el modo analítico (tarea 4), en las que en una aproximación a su proceso de resolución, había que relacionar los elementos matemáticos usados a través de la **“y lógica”**. Los elementos matemáticos utilizados podían ser analíticos y/o gráficos, puntuales y /o globales.

El cuestionario de 1º Bachillerato consta de las siguientes tareas:

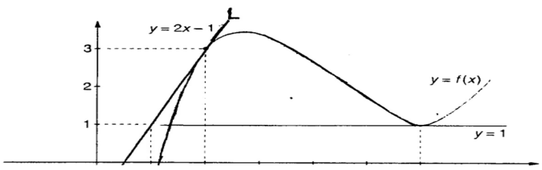
CUESTIONARIO 1º Bachillerato

TAREA 1

Comprueba que la tasa de variación media de f (x) = (x+3)/(x+2) en el intervalo [1, 2] es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(1, f(1)) y Q(2, f(2)). ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de f(x) en el punto (1, f(1))?

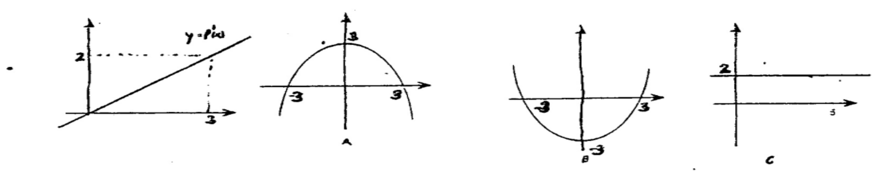
TAREA 2

Suponer que la linea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (2,3) como aparece en la figura. Encontrar f(2) y f ’(2).



TAREA 3

La primera gráfica corresponde a la función derivada de f(x). La expresión analítica de f ’(x) =2x/3. Indica cuál de las gráficas A, B, C corresponde a la función f (x). Justifica la respuesta.



TAREA 4

De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

tabla:

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x =2.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x =1?

Pasamos a analizar las tareas del cuestionario atendiendo a :

(A) los objetivos que se quieren alcanzar con ella y

(B) una aproximación a un posible proceso de resolución de la misma

TAREA 1

Comprueba que la tasa de variación media de f (x) = (x+3)/(x+2) en el intervalo [1, 2] es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(1, f(1)) y Q(2, f(2)). ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de f(x) en el punto (1, f(1))?

(A) En esta tarea dan la expresión analítica de una cierta función f y piden la tasa de variación media (TVM) en el intervalo [1, 2] y la tasa de variación instantánea en x =1. Su objetivo es que el estudiante haga uso de los elementos matemáticos relacionados con la expresión analítica de la derivada en un punto:

- los elementos matemáticos relativos a la tasa de variación media,
- el paso al límite a través de la tasa de variación instantánea.

La entrevista se centrará en comprobar el significado de la derivada en un punto es la tasa de variación instantánea en dicho punto, es decir como el límite del cociente incremental y como pendiente de la tangente a la función en dicho punto que nos puede mostrar el esbozo de síntesis de los modos de representación a través de la relación lógica –**"y lógica"-** del significado analítico y gráfico puntual).

(B) Un posible proceso de resolución usa los elementos matemáticos analíticos global y puntual:

- cociente incremental = tasa de variación media (TVM)

- tasa de variación instantánea (TVI) = límite del cociente incremental (expresión analítica de la derivada en un punto)

Para el cálculo de la tasa de variación media de f(x) = (x+3)/(x+2) en el intervalo [1, 2] a través del cociente incremental: TVM = (f(2)-f(1))/(2-1) = 5/4 – 4/3 = -1/12

Calculamos la pendiente de la recta secante que pasa por los punto P(1, 4/3) y Q(2, 5/4) y comprobar que su valor es –1/12, y por tanto coincide con la tasa de variación media de f(x) en el intervalo [1, 2] calculada.

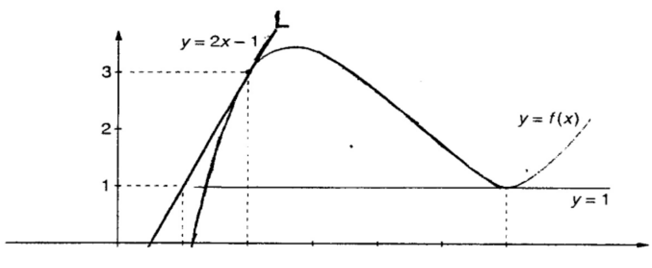
La segunda parte de la tarea pide la tasa de variación instantánea en x=1, que coincide con f ’(1):

f ’(1) = lim (f(1+h)-f(1))/h = -1

En esta tarea sólo se pone de manifiesto el uso de elementos matemáticos analíticos puntual y global, sin tener que relacionarlos, es la entrevista la que permitirá saber si el estudiante identifica la tasa de variación instantánea con la derivada en un punto, y si relaciona (**“y lógica”**) este elemento analítico puntual de la noción de derivada con el elemento gráfico puntual (interpretación geométrica de la derivada en un punto) lo que pondría de manifiesto el esbozo de síntesis entre los modos de representación analítico y gráfico.

TAREA 2

Suponer que la linea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (2,3) como aparece en la figura. Encontrar f(2) y f ’(2).



(A) En esta tarea dan el gráfico de una función f(x) y piden el valor de f y de f ’ en x =2. Su objetivo es que el estudiante haga uso del elemento matemático gráfico puntual de la noción de derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente en ese punto (interpretación geométrica de la derivada en un punto)**.** Esto implica el conocimiento por parte del estudiante de que en la expresión de la recta y=mx+n, m es la pendiente de la recta, con el significado de la inclinación respecto OX, y por tanto m = f ’(x)

(B) Un proceso de resolución permite usar el elemento matemático gráfico puntual:

- f ’(a) = pendiente de la recta tangente a f en x =a

Tenemos que dar el valor de f(2) y de f ’(2). El enunciado de la tarea nos informa que el punto (2,3) es un punto de f, luego f(2)=3, y nos indica que la recta de ecuación y = 2x-1 es tangente a la gráfica de f en el punto (2,3), la pendiente de esta recta es 2, luego f ’(2) =2.

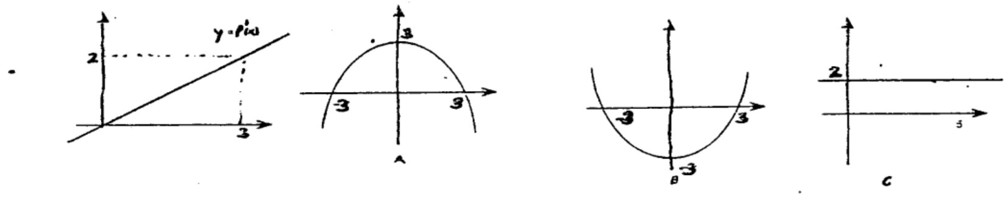
En esta tarea se pone de manifiesto el uso del elemento matemático gráfico puntual:

- noción de derivada como pendiente de la recta tangente a la curva en el punto,

sin tener que relacionarlo. Esto nos permite comprobar si el estudiante tiene este elemento gráfico puntual, aunque no sea capaz de haberlo usado en la tarea 1, estableciendo relación **“y lógica”** entre el elemento gráfico puntual citado y el elemento analítico puntual de la noción de derivada.

TAREA 3

La primera gráfica corresponde a la función derivada de f(x). La expresión analítica de f ’(x) =2x/3. Indica cuál de las gráficas A, B, C corresponde a la función f (x). Justifica la respuesta.



(A) Esta tarea está dada en modo gráfico (pues en el enunciado aparece el gráfico de f ’ y de las posibles f) y en modo analítico (ya que en el enunciado también aparece la expresión analítica de f ’(x) = 2x/3). Su objetivo es usar los significados que relacionan f ’ con f. Desde la información proporcionada por el enunciado sabemos que f ’ es una recta, esto implicará que f será una parábola. Esta asociación se puede hacer desde el modo gráfico por el inverso del operador derivada, o desde el modo analítico a través de las expresiones de ambas funciones de f ’ y f. Luego esta tarea puede resolverse desde el significado geométrico de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva, fijándose en el signo de f ’ para ir decidiendo que forma tendrá f, o desde el modo analítico movilizando los significados que vinculan el signo de f ’ al crecimiento de f .

Esto hará que se puedan establecer relaciones entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos, permitiéndonos saber si hay esbozos de síntesis entre los modos de representación (analítico y gráfico).

(B) Un proceso de resolución permite movilizar el elemento matemático analítico puntual:

- f ’(a) =0 → x =a máximo, mínimo o punto de inflexión
  - si f cambia de creciente a decreciente x =a máximo
  - si f cambia de decreciente a creciente x =a mínimo
  - si f no cambia el crecimiento, pero cambia la concavidad x=a punto de inflexión

y los elementos matemáticos gráfico y analíticos globales:

- inverso del operador derivada: f ’recta -> f parábola
- si f ’ es creciente en (a, b) → f es convexa en (a, b)
- si f ’<0 en (a, b) → f decrece en (a, b)
- si f ’>0 en (a, b) → f crece en (a, b)

El uso por parte del estudiante del elemento analítico global: f ’ es creciente en R → f es convexa en R, no se manifiesta en estos estudiantes ya que ello, indica hacer uso de elementos matemáticos relacionados con f ’’, hecho que empieza a manifestarse en estudiantes de 2º Bachillerato debido a las limitaciones del currículo.

Luego,

- f ’ es creciente en R → f es convexa en R
- f ’ es negativa en (-infinito, 0) → f es decreciente en este intervalo
- f ’ es positiva en (0, +infinito) → f es creciente en este intervalo
- f ’(0) =0 y en x =0 f pasa de ser decreciente a ser creciente → x =0 mínimo

De todo ello se concluye que la función f (x) se corresponde con el gráfico B.

En esta tarea se pueden relacionar (**“y lógica”**) elementos matemáticos analíticos y/o gráficos, pudiendo haber manifestación de esbozo de síntesis entre los modos analítico y gráfico.

TAREA 4

De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a)Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x=2.

b)A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x =1?

(A) El objetivo de esta tarea es movilizar los significados vinculados al cálculo de la derivada en un punto por aproximación numérica a través de la expresión analítica de la derivada (límite del cociente incremental) para lo que es preciso la existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental (como proceso, aproximación a través de las tablas de valores) para que exista f '(a).

(B) Un proceso de resolución permite usar los elementos matemáticos analíticos puntuales:

- derivada en un punto como límite del cociente incremental (expresión analítica de la derivada)
- existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental (como proceso, aproximación a través de las tablas de valores) para que f sea derivable.

En el apartado a) piden el valor de f '(2) por aproximación a través de la tabla de valores facilitada en el enunciado:

$f'(2) = \lim (f(x)-f(2))/(x-2)$ cuando $(x \to 2)$

usamos la tabla de valores para encontrar una aproximación por la izquierda y otra por la derecha:

- aproximación a la derivada de f en x =2 por la izquierda:

$f'(2^-) = \lim (f(x)-f(2))/(x-2)$ cuando $(x \to 2^-)$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999... $\to$2
(f(x)-f(2))/(x-2)	3.9	3.99	3.999	3.9999	... $\to$4

Luego f ’(2^-) = 4

- aproximación a la derivada de f en x =2 por la derecha:

f ’(2^+) = lim (f(x)-f(2))/(x-2) cuando (x $\to 2^+$)

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001... $\to$2
(f(x)-f(2))/(x-2)	4.1	4.01	4.001	4.0001	... $\to$4

Luego f ’(2^+) = 4

Por tanto, f ’(2^-) = f ’(2^+) = 4, luego el valor de la derivada de f en x =2 es f ’(2) = 4.

En el apartado b) se pregunta por la derivabilidad de f en x =1, si existe f ’(1) debe coincidir con el límite del cociente incremental:

f ’(1) = lim (f(x)-f(1))/(x-1) cuando (x $\to$1)

hay que usar la tabla de valores para ver si f es derivable en x =1, para ello hay que buscar una aproximación por la izquierda y otra por la derecha del cociente incremental, ya que para que f sea derivable en x =1, deben existir las dos aproximaciones y coincidir:

- aproximación a la derivada de f en x =1 por la izquierda:

f ’(1^-) = lim (f(x)-f(1))/(x-1) cuando (x $\to 1^-$)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999... $\to$1
(f(x)-f(1))/(x-1)	1	1	1	1	... $\to$1

Luego f ’(1^-) = 1

- aproximación a la derivada de f en x =1 por la derecha:

  $f'(1^+) = \lim (f(x)-f(1))/(x-1)$ cuando $(x \to 1^+)$

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001... $\to$1
(f(x)-f(1))/(x-1)	-2	-2	-2	-2	... $\to$-2

Luego $f'(1^+) = -2$

Por tanto, $f'(1^-) = 1$ y $f'(1^+) = -2$, luego no existe la derivada de f en x=1, $f'(1)$, ya que : $f'(1^-) \neq f'(1^+)$.

En esta tarea, el hecho de que el estudiante sea capaz de decidir si la función es derivable o no en x =2 y x =1, pone de manifiesto que tiene construido el significado de derivada en un punto como límite del cociente incremental, y no lo tiene sólo como algo “memorizado” de la instrucción previa.

En el cuadro 3.6. mostramos el objetivo de cada una de las tareas, así como los modos de representación utilizados tanto en la presentación como en sus posibles procesos de resolución:

TAREA	**MODOS DE REPRESENTACIÓN**	**OBJETIVOS**
T1	ANALÍTICO	- Identificar el nivel de uso correcto de elementos matemáticos analíticos de la noción de derivada - Identificar como el estudiante establece relación **"y lógica"** entre elementos analítico y gráfico puntual de la noción de derivada. Esbozos de síntesis de los modos analítico y gráfico.
T2	GRÁFICO	- Identificar el nivel de uso correcto del elemento gráfico puntual de la noción de derivada
T3	ANALÍTICO Y GRÁFICO	- Identificar como el estudiante establece relaciones lógicas (**"y lógica"**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos, puntuales y /o globales - Determinar el nivel de síntesis entre los modos de representación (analítico y gráfico) que manifiesta el estudiante.
T4	ANALÍTICO	- Poner de manifiesto el nivel de construcción que el estudiante tiene del significado de derivada en un punto como límite del cociente incremental, que no lo tiene sólo como algo "memorizado" de la instrucción previa, a través de una aproximación por tablas de valores (proceso).

Cuadro 3.6. Objetivos de las tareas del cuestionario de 1º Bachillerato

3.2.2.2. Cuestionario 2º Bachillerato

La selección de tareas de este cuestionario se hizo teniendo en cuenta que iba destinado a estudiantes para los que la noción de Derivada no era nueva, pues ya se les había introducido en 1º de Bachillerato. Estos alumnos cursaban 2º de Bachillerato Tecnológico lo que conllevaba también limitaciones propias del currículum a la hora de la elaboración del cuestionario, aunque considerados menos elementos matemáticos en relación a 1º Licenciatura, en este curso se introducen elementos matemáticos del concepto de Derivada relativos a f '' . (Ver capítulo1, p. 18)

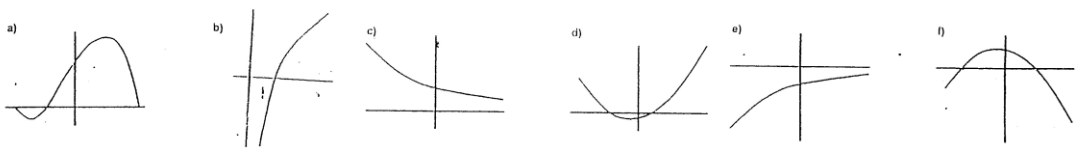
El cuestionario se diseñó con un par de tareas en las que podía ser necesario hacer uso de la derivada como límite del cociente incremental (tarea 3) y como pendiente de la recta tangente a la función (tarea 5). Además se incluyeron dos tareas dadas en modo gráfico (tarea1 y tarea 4), otras dos en modo analítico (tarea 6 y tarea 7) y una tarea dada en forma de texto pero haciendo referencia al modo gráfico. También se tuvo en cuenta que dentro de estas tareas hubiera apartados que sólo utilizaran elementos matemáticos puntuales desde el modo gráfico (apartado A tarea 4) o desde el modo analítico (tarea 6). En todas las tareas es necesario establecer relaciones lógicas (**“y lógica”**, **contrarrecíproco, equivalencia lógica**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntuales y/o globales para llegar a la resolución de la tarea, pero mientras en algunas sólo hay que establecer una o dos relaciones lógicas (**“y lógica”**) como sucede en las tareas 1,2,5,7. En otras hay que establecer varias relaciones lógicas y de diversos tipos (**“y lógica”**, **contrarrecíproco, equivalencia lógica**) como sucede en las tareas 3, 4 y 6. A continuación lo veremos con más detalle.

El cuestionario de 2º Bachillerato consta de las siguientes tareas:

CUESTIONARIO 2º Bachillerato

TAREA 1

Analiza las gráficas siguientes,



¿cuántas parejas producirías de cada función con su derivada?

TAREA 2

La gráfica correspondiente a la función f ’(x) primera derivada de una cierta función f(x) es una recta que pasa por los puntos (a,0) y (0,b). Esboza las posibles gráficas de f(x).

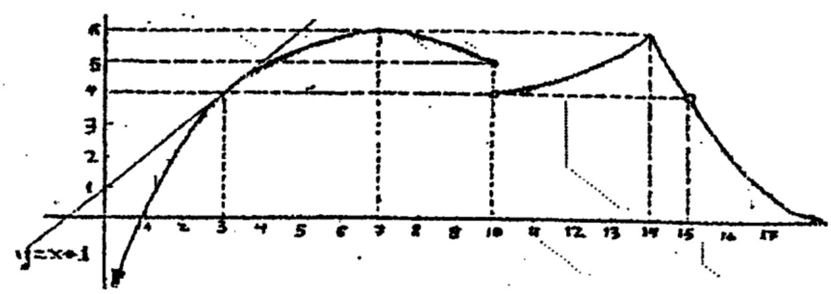
TAREA 3

Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x<1 \\ bx^2 + 1 & x\geq 1 \end{cases}$

Calcular a y b para que f sea derivable en x =1

TAREA 4

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a)Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.

b)Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.

TAREA 5

Dada la función f(x)=(x-1)(x-2)(x-3). Encontrar un punto, entre dos valores que tengan la misma imagen, en el que la recta tangente sea paralela al eje x.

TAREA 6

A) De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x =2.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x=1?

B) Supón que f es una función para la que lim (f(x)-f(2))/(x-2) cuando (x ->2) es igual a 0. ¿cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuáles son obligatoriamente falsas?

1. f ’(2) = 2 2. f(2) = 0 3. lim f(x) cuando (x ->2) igual a f(2)

4. f es continua en x =0 5. f es continua en x =2.

TAREA 7

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

- f es continua - f(2) =0 - f ’(3)=f ’(5)=0

- lim f (x) = -4 - lim f(x) = - ∞

x→ - ∞ x→ 8

- f ’(x) <0 cuando 5 <x <8 - f ’(x) >0 cuando x<5

- f ’’(x) <0 cuando 3<x<8 - f ’’(x) >0 cuando x<3

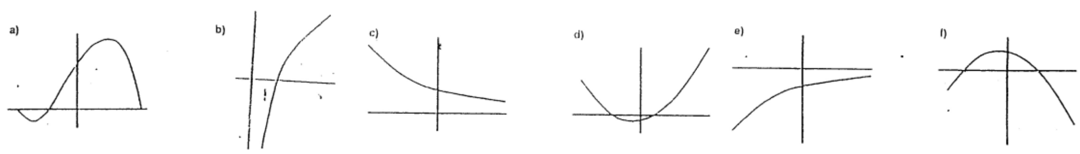
A continuación analizamos las tareas del cuestionario atendiendo a:

(A) los objetivos que se quieren alcanzar con ella y

(B) una aproximación a un posible proceso de resolución de la misma

TAREA 1

Analiza las gráficas siguientes,



¿cuántas parejas producirías de cada función con su derivada?

(A) En esta tarea se pide encontrar parejas de funciones con sus derivadas respectivas de entre las seis gráficas dadas, su objetivo es movilizar:

- el significado geométrico de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva
- los elementos matemáticos analíticos globales que relacionan el crecimiento de f con el signo de f ’, y la concavidad de f con el crecimiento de f ’, y
- los elementos matemáticos analíticos puntuales que se fijan en los puntos en los que f ’(a) =0.

Resolviendo la tarea a través de relaciones lógicas (**“y lógica”**) que se pueden establecer entre ellos, de tal forma que se puede mostrar esbozos de síntesis entre los modos analítico y gráfico si el estudiante establece relación lógica (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analítico y gráfico. Además, puede hacer uso de elementos matemáticos relativos a f ’’, hecho que empieza a manifestarse en los estudiantes de 2º Bachillerato debido a las limitaciones del currículo.

(B) Un proceso de resolución permite usar los elementos matemáticos analíticos puntuales:

- f ’(a) =0 → x =a máximo, mínimo o punto de inflexión
  - si f cambia de creciente a decreciente x =a máximo
  - si f cambia de decreciente a creciente x =a mínimo
  - si f no cambia el crecimiento, pero cambia la concavidad x =a punto de inflexión
- sea f derivable en (a, b) si f tiene un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en x =a → f ’(a) =0)

y los elementos matemáticos analíticos globales:

- sea f una función derivable en (a, b)

- si f ’<0 en (a, b) → f decrece en (a, b) y si f ’>0 en (a, b)→ f crece en (a, b)
- si f ’ es creciente en (a, b) → f es convexa en (a, b) y si f ’ es decreciente en (a,b) → f es cóncava en (a, b)

- sea f una función derivable en (a, b)
  - si f es creciente en (a, b)→ f ’>0 en (a, b) y si f es decreciente en (a, b) → f ’<0 en (a, b)
  - si f es cóncava en (a, b) → f ’ es decreciente en (a, b) y si f es convexa en (a, b) → f ’ es creciente en (a, b)

De todo este conjunto de elementos matemáticos, podemos identificar dos de ellos que pueden generar una aproximación a la resolución de esta tarea:

- si f ’<0 en (a, b) → f decrece en (a, b) y si f ’>0 en (a, b)→ f crece en (a, b)
- si f ’ es creciente en (a, b) → f es convexa (∪)en (a, b) y si f ’ es decreciente en (a,b) → f es cóncava (∩) en (a, b)

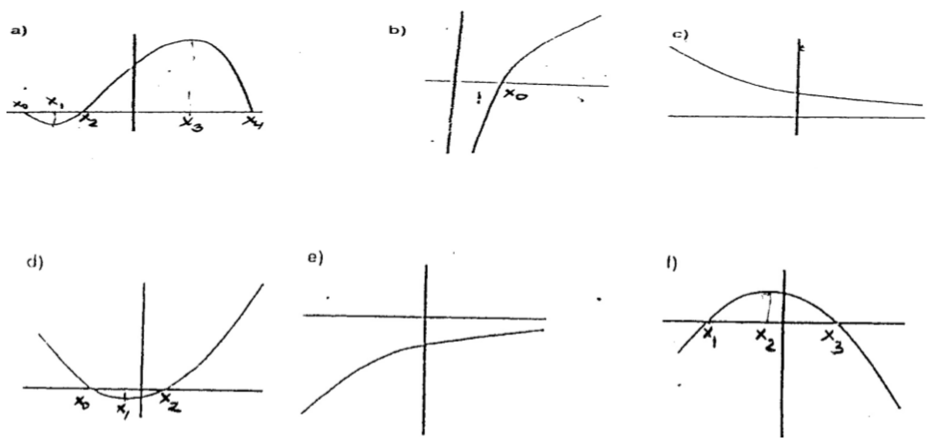
también:

- si f es creciente en (a, b)→ f ’>0 en (a, b) y si f es decreciente en (a, b) → f ’<0 en (a, b)
- si f es cóncava en (a, b) → f ’ es decreciente en (a, b) y si f es convexa en (a, b) → f ’ es creciente en (a, b)).

Analicemos una a una las gráficas que aparecen en el enunciado, utilizando las variables:

- crecimiento de la función
- signo de la función
- concavidad de la función

- puntos de corte con el eje X
- máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función



a) la función es positiva en (- ∞, x_0) ∪ (x_2, x_4), y negativa en (x_0, x_2) ∪ (x_4,+ ∞), tiene un mínimo en x_1 y un máximo en x_3 , puntos de corte en x_0, x_2 y x_4 , decrece en los intervalos (- ∞, x_1) ∪ (x_3, + ∞), crece en el intervalo (x_1,x_3), convexa en (- ∞, x_2) y cóncava en (x_2, + ∞)

b) la función es negativa en (- ∞, x_0), y positiva en (x_0, + ∞), crece en el intervalo (0, + ∞), punto de corte en x_0, cóncava en (0, + ∞)

c) la función es positiva, decreciente y convexa en R

d) la función es positiva en (- ∞, x_0) ∪ (x_2, + ∞), y negativa en (x_0, x_2), mínimo en x_1 , puntos de corte x_0, x_2, decrece en el intervalo (- ∞, x_1) y crece en el intervalo (x_1, + ∞), convexa en R

e) la función es negativa, creciente y cóncava en R

f) la función es positiva en (x_1, x_3) y negativa en (- ∞, x_1) ∪ (x_3, + ∞), máximo en x_2, puntos de corte en x_1 y x_3, decrece en el intervalo (x_2, + ∞) y crece en el intervalo (- ∞, x_2), cóncava en R.

Fijándonos en las relaciones lógicas (**“y lógica”**) que pueden establecerse, pueden formarse las siguientes parejas:

1) - la función a) decrece en los intervalos $(-\infty, x_1) \cup (x_3, +\infty)$, y la función f) es negativa en estos mismos intervalos

- x_1 es mínimo de la función a) y punto de corte de f) $(f'(x_1)=0)$
- x_3 es máximo de la función a) y punto de corte de f) $(f'(x_3)=0)$
- máximos y mínimos de f ' (sii f ''=0) son los puntos de inflexión de la función, es decir donde se producen los cambios de concavidad en la función. En este caso en x_2 hay un cambio de concavidad de a) que coincide con un máximo de f)
- la función a) es convexa en el intervalo $(-\infty, x_2)$, que coincide con el intervalo donde f) es creciente
- la función a) es cóncava en el intervalo $(x_2, +\infty)$, que coincide con el intervalo donde f) es decreciente.

2) - la función c) decrece en R, y la función e) es negativa en R

- la función c) es convexa en R, y la función e) es creciente en R

Por lo que podemos concluir que se pueden formar dos parejas:

- la formada por las funciones a) y f) donde a) es la función y f) su derivada
- y la formada por las funciones c) y e), donde c) es función y e) su derivada

Las funciones b) y d) no se pueden emparejar.

El proceso de resolución de la tarea expuesto se realiza a través del establecimiento de relaciones lógicas (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos puntuales y/o globales. Otro posible proceso de resolución se fijaría en elementos matemáticos gráficos puntuales y/o globales a través de la interpretación geométrica de la derivada con carácter puntual y global, se establecerían el mismo tipo de relaciones (**“y lógica”**) ahora entre elementos matemáticos gráficos, esto nos mostraría el mimo tipo de desarrollo del esquema. Se puede poner de manifiesto esbozo de síntesis entre los modos analítico y gráfico si el estudiante relaciona (**"y lógica"**) elementos matemáticos gráfico y analítico.

TAREA 2

La gráfica correspondiente a la función f '(x) primera derivada de una cierta función f(x) es una recta que pasa por los puntos (a,0) y (0,b). Esboza las posibles gráficas de f(x).

(A) Esta tarea da información en forma de texto pero haciendo referencia al modo gráfico, y se pide las posibles gráficas de f sabiendo que f ' tiene como representación gráfica una recta que pasa por los puntos (a,0) y (0,b), con a y b parámetros. Su objetivo es similar al objetivo de la tarea 3 del cuestionario de 1º Bachillerato comentado en el apartado anterior. Sin embargo presenta más dificultades en su resolución, ya que hay que utilizar más elementos matemáticos y más relaciones (**"y lógica"**) entre ellos, como veremos a continuación en una aproximación a un proceso de resolución de la tarea. En la tarea 3 del cuestionario de 1º Bachillerato nos facilitaban el gráfico f ' y tres posibles gráficas de f como solución y en esta tarea sólo nos dan información sobre el gráfico de f ' que además depende de dos parámetros.

En relación con la tarea 1 de este cuestionario, mientras que en ella se facilitaban gráficos de posibles funciones y sus derivadas permitiendo movilizar los significados globales y puntuales de los elementos matemáticos analíticos y/o gráficos que relacionan f ' con f o viceversa, aquí en la tarea 2 se movilizan los significados que relacionan f ' con f, pues nos proporcionan información sólo de f '. Esta tarea se puede resolver desde el significado geométrico de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva o desde el modo analítico utilizando los elementos matemáticos que vinculan el signo de f ' con el crecimiento de f y el crecimiento de f ' con la convexidad de f.

Además, la información proporcionada por el enunciado de la tarea sobre la forma de f ' nos indica la forma que tendrá f, pues si f 'es una recta, quiere decir que f será una parábola. Esta asociación se puede hacer desde el modo gráfico, por el inverso del operador derivada, o desde el modo analítico: si f ' es una recta su expresión analítica tendrá la forma y = mx+n, por tanto f será una función de segundo grado y = $mx^2/2$ +nx +c, por tanto el gráfico de f será una parábola. Esto puede poner de manifiesto esbozo de síntesis de los modos gráfico y analítico, pues el estudiante puede establecer relación (**"y lógica"**) entre elementos matemáticos analítico y gráfico.

En la entrevista se puede preguntar ¿qué sucede si se fija a y se varía b, o si se fija b y se varía a?, ya que es la pendiente de la recta la que determina la amplitud de la parábola, y la variación del parámetro b, va a determinar la traslación de la parábola en el eje OY.

(B) Un proceso de resolución permite usar el elemento matemático analítico puntual:

- f '(a) =0 $\rightarrow$ x =a máximo, mínimo o punto de inflexión
    - si f cambia de creciente a decreciente x =a máximo
    - si f cambia de decreciente a creciente x =a mínimo
    - si f no cambia el crecimiento, pero cambia la concavidad x=a punto de inflexión

y los elementos matemáticos analíticos globales:

Sea f una función derivable en (a, b)

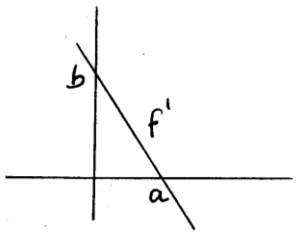
- si f '<0 en (a, b) $\rightarrow$ f decrece en (a, b) y si f '>0 en (a, b)$\rightarrow$ f crece en (a, b)
- si f ' es creciente en (a, b) $\rightarrow$ f es convexa en (a, b) y si f ' es decreciente en (a, b) $\rightarrow$ f es cóncava en (a, b)

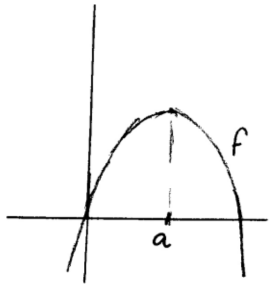
- operador derivada: si f ’ es una recta entonces f es una parábola.

La función f que pide el enunciado es una parábola, puesto que f ’ es una recta. Los valores a y b del enunciado, no son valores fijos, son parámetros, por tanto, los puntos (a,0) y (0,b) se pueden mover a lo largo de los ejes , y esto influirá en la forma de la función.

Distinguimos cuatro casos:

- Caso 1 : a>0 y b>0





en este caso,

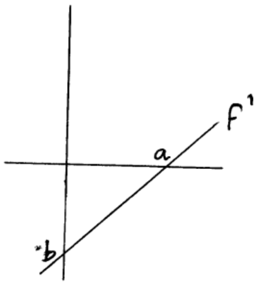
f ’ es decreciente en R → f es cóncava en R

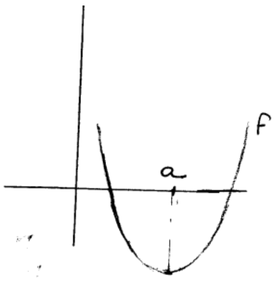
f ’ es positiva en (-∞, a) → f crece en este intervalo

f ’ es negativa en (a, +∞) → f decrece en este intervalo

f ’(a) =0 y en x =a f pasa de ser creciente a ser decreciente → x =a máximo

- Caso 2 : a>0 y b<0





en este caso,

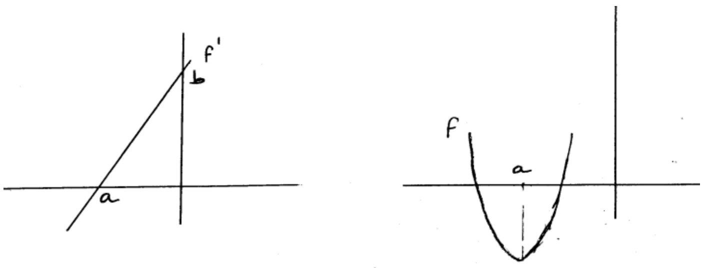
f ’ es creciente en R → f es convexa en R

f ’ es negativa en (-∞, a) → f decrece en este intervalo

f ’ es positiva en (a, +∞) → f crece en este intervalo

f ’(a) =0 y en x =a f pasa de ser decreciente a ser creciente → x =a mínimo

- Caso 3 : a<0 y b>0



en este caso,

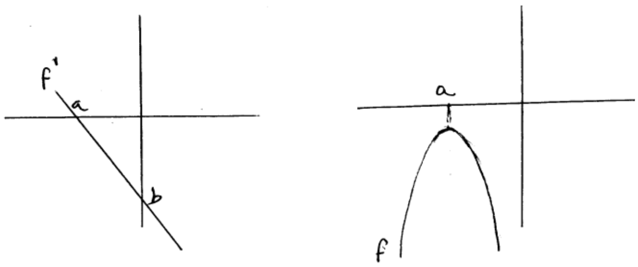
f ’ es creciente en R → f es convexa en R

f ’ es negativa en (-∞, a) → f decrece en este intervalo

f ’ es positiva en (a, +∞) → f crece en este intervalo

f ’(a) =0 y en x =a f pasa de ser decreciente a ser creciente → x =a mínimo

- Caso 4 : a<0 y b<0



en este caso,

f ’ es decreciente en R → f es cóncava en R

f ’ es positiva en (-∞, a) → f crece en este intervalo f ’ es negativa en (a, $+\infty$) $\rightarrow$ f decrece en este intervalo

f ’(a) =0 y en x =a f pasa de ser creciente a ser decreciente $\rightarrow$ x =a máximo

Esta tarea permite establecer relaciones (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos gráficos y/o analíticos, lo que pondrá de manifiesto posibles esbozos de síntesis en los modos analítico y gráfico. Además, el hecho de que la tarea presente dos parámetros a y b, nos permite determinar mediante la entrevista si el estudiante es capaz de establecer relaciones (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos variando estos parámetros.

TAREA 3

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x<1 \\ bx^2 + 1 & x\geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b para que f sea derivable en x =1

(A) En esta tarea se da una función definida a trozos dependiente de dos parámetro a y b, y se piden los valores de esos parámetros para que f sea derivable. Su objetivo es movilizar los significados vinculados a la expresión analítica de la derivada como límite del cociente incremental, viendo la existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental en x =1 para que f sea derivable en x =1 (continuidad de f ’ en x =1) y se pone de manifiesto tener construida la noción de la derivada en un punto como el límite del cociente incremental mediante la igualdad:

lim [f(a+h) -f(a)]/ h cuando h$\rightarrow$0 = lim f ’(x) (cuando x $\rightarrow$ a)

(B) Un proceso de resolución permite usar el elemento matemático analítico puntual:

- f ’(a) = lim [f(a+h) -f(a)]/ h cuando h$\rightarrow$0 y el elemento matemático analítico global:

- f derivable $\rightarrow$ f continua

mediante la relación del **contrarrecíproco**:

- f no continua $\rightarrow$ f no derivable

Las relaciones lógicas (**contrarrecíproco** e **"y lógica"**) entre los elementos matemáticos utilizados puede llevarnos a la resolución de la tarea, poniéndose de manifiesto cómo se va produciendo el desarrollo del esquema a través del uso y variedad en las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos utilizados.

Al estar f (x) formada por polinomios, que son derivables en los intervalos de definición, sólo tenemos que ver qué sucede en x =1, donde f(x) será derivable si la derivada por la derecha coincide con la derivada por la izquierda. Podemos entender que el resolutor se apoya en haber construido la noción de derivada en un punto como el limite del cociente incremental (en forma de proceso-paso al limite), en la expresión obtenida al aplicar las reglas de derivación a la función f (siempre que mediante la entrevista podamos corroborarlo).

De esta manera, y desde un punto de vista operativo, por ejemplo el limite del cociente incremental por la izquierda (y por la derecha)

Lim [f(1-h) - f(1)]/h (cuando h $\rightarrow 1^-$)

se traduce en calcular la continuidad de f ' en x =1

Lim(6 x^2 + 2) (cuando x $\rightarrow 1^-$) que es igual a lim f '(x) cuando x$\rightarrow 1^-$

Por tanto, en la resolución de la tarea, se empieza viendo bajo que condiciones f es continua en x =1:

f continua en x =1 sii lim f(x) cuando x $\rightarrow 1^-$ es igual que lim f(x) cuando x$\rightarrow 1^+$ sii 4+ a = b + 1 sii a=b-3 y a continuación una vez obtenida la expresión de f '(x), vemos bajo que condiciones es derivable en x =1 (continuidad de f 'en x =1):

$$f'(x)=\begin{cases} 6x^2+2 & x<1 \\ 2bx & x>1 \end{cases}$$

$f'(1^-)= \text{Lim}(6x^2 + 2)$ (cuando $x \to 1^-$)= 8

$f'(1^+)= \text{Lim}(2bx)$ (cuando $x \to 1^+$)= 2b

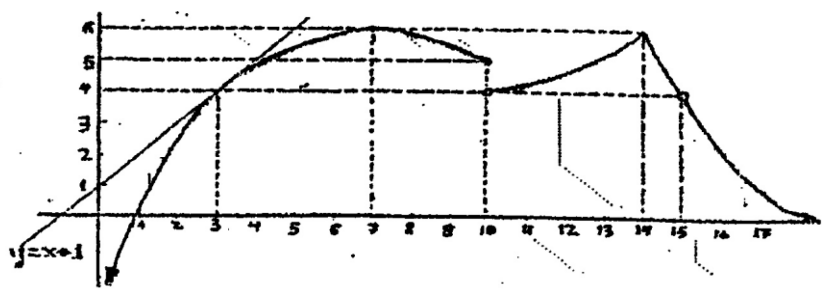
f ' continua en x =1 sii $f'(1^-)= f'(1^+)$ sii 8= 2b sii b =4

y como por la condición de continuidad de f : a =b-3 $\to$ a =1

En esta tarea, el estudiante puede poner de manifiesto que tiene construido el significado de derivada en un punto como límite del cociente incremental, y no lo tiene sólo como algo "memorizado" de la instrucción previa.

TAREA 4

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a)Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.

b)Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.

(A) Esta tarea consta de dos partes centradas una en el comportamiento local y otra en el comportamiento global de la función. Su objetivo es:

* En la primera parte los diferentes puntos en los se pide el valor de f ' a partir del gráfico de f, ejemplifican diferentes tipos de comportamientos de la función:

- un máximo (con concavidad hacia abajo) en x =7
- una discontinuidad de salto con f definida en un extremo en x =10
- un máximo en forma de pico y con concavidad hacia arriba a la derecha e izquierda del punto (otro tipo de pico hubiera sido con un cambio de concavidad a la derecha e izquierda del punto) en x =14 (punto cúspide)
- una discontinuidad esencial.

El tipo de información que hay que obtener de la gráfica de f está vinculada a la "razón de cambio" (perspectiva analítica de la gráfica) o a la pendiente de la recta tangente a un punto de la gráfica de f (perspectiva geométrica).

* La segunda parte de la tarea, que implica el esbozo de la gráfica de f ' a partir del gráfico de f, permite usar elementos matemáticos analíticos y/o gráficos globales procedentes de los elementos matemáticos que conllevan implicaciones contrarias a los que se usaron en la tarea 2 (en la que se nos daba la función derivada y se nos pedía el esbozo de la gráfica de f). En cierta medida, esta segunda parte de la tarea 4 deberá aportar información complementaria a la obtenida en al tarea 2, en el sentido de que los elementos matemáticos utilizados por los estudiantes en ambas tareas nos permitirán saber si establecen relaciones lógicas (**equivalencias lógicas**) entre elementos matemáticos.

Al igual que en la primera parte de la tarea el tipo de información que hay que obtener de la gráfica de f está vinculada a la "razón de cambio" (perspectiva analítica de la gráfica) o a la pendiente de la recta tangente a un punto de la gráfica de f (perspectiva geométrica).

Los diferentes "tipos" de puntos que aparecen en la gráfica (entendidos como diferentes comportamientos de la gráfica de la función en esos puntos) analizados en la primera parte de la tarea pueden permitir la aproximación al proceso de resolución de la segunda parte de la tarea mostrando los elementos matemáticos utilizados y sus relaciones lógicas: **contrarrecíproco**, **"y lógica"**.

(B) Un proceso de resolución permite usar relaciones lógicas (**contrarrecíproco**) mediante el uso de los elementos matemáticos gráfico y analíticos puntuales:

- f ' (a) = pendiente de la recta tangente a f en x =a
- x =a máximo → f '(a)=0
- f derivable en x =a→ f continua en x =a

  (**contrarrecíproco:** si f no es continua en x =a → f no es derivable en x=a)
- el valor de la función derivada de f en un punto [f '(a)] es el limite del cociente incrementar en ese punto: lim [f(a +h) - f{a)]/ h cuando h →0, y como consecuencia la igualdad de los limites laterales.

y los elementos matemáticos analíticos globales:

- sea f derivable en (a, b) si f crece en (a, b) → f '>0 y en (a, b), y si f decrece en (a, b) → f '<0 en (a, b)
- sea f derivable en (a, b) si f cóncava → f ' decrece en (a, b), y si f convexa en (a, b) → f ' crece en (a, b)
- operador derivada: f parábola → f ' recta

Veámoslo en los dos apartados:

a) - la pendiente de la recta tangente a un función en un punto a [y= mx+b] es la derivada de f en ese punto f '(a) = m . Lo que implica
   - que f '(3) = 1, la gráfica de f ' pasa por el punto (3,1)

- si la función tiene un máximo local implica que la pendiente de la recta tangente pasa de positiva a negativa por lo que valdrá cero en el máximo, lo que implica que la gráfica de f ’ cortará al eje OX (f ’tiene un cero en x =7)

- si la función tiene una discontinuidad de salto, no es derivable (ya que si fuera derivable implicaría que es continua). El uso de esta idea implica pues el uso de la equivalencia de "f derivable implica f continua" y la negación de la implicación (f no continua implica f no derivable). El que f no sea derivable implica que no existe la gráfica. En el punto x = 10, a la izquierda del punto la pendiente de la recta tangente es negativa y la concavidad de f es hacia abajo; y a la derecha del punto la pendiente es positiva y la concavidad es para arriba. Esto implica que la gráfica de f ’ en x=10 tendrá también una discontinuidad que hace cambiar de signo a la gráfica (de negativo a positivo).

  Además, el punto (10, a) en la gráfica de f ’ vendrá dado por la "cantidad de concavidad" hacia arriba de f en x = 10. Si la rama de la parábola a la derecha de x=10 podemos considerar que es el mínimo de la parábola, entonces el punto de arranque de la gráfica f ’ en x =10 (es decir el valor de f ’(l0)) será tendiendo a cero (tomando el valor de cero en el limite del cociente incremental por la derecha)

- en x= 14 gráfica de f tiene un pico (un máximo) sin cambio de concavidad eso implica que x = 14 la gráfica de f ’ tiene un cambio de signo (de positivo a negativo)pero no existe ya que los limites laterales del cociente incrementar de f son diferentes.

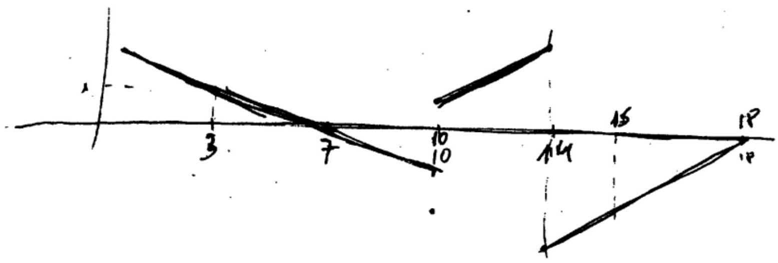
b) - el que la grafica de f este formada por ramas de parábolas indica que la gráfica de f ’ son trozos de recta.

  Esto puede implicar poner en relación la idea de que la parábola es de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, y por tanto la función derivada (aplicando las reglas de derivación) es f ’(x)=2ax+b, con la idea de que las gráficas de las funciones del tipo 2ax+b son rectas

- que la función f sea cóncava en el intervalo (0,7) implica que la función derivada será decreciente en (0,7)
- en el intervalo (7,10) la f ’es decreciente.
- en el intervalo (7,14) al ser la gráfica de f creciente sabemos que la gráfica de f ’ es positiva y como la concavidad de f es hacia arriba entonces sabemos que la gráfica de f ’ es creciente

  [si f es creciente implica f ’>0]

  [si f es convexa implica f ’ creciente; si f es cóncava implica f ’ decreciente]



En esta tarea se pone de manifiesto el uso de varias relaciones lógicas: **“y lógica”**, **contrarrecíproco**, e incluso **equivalencia lógica**. Esta última podemos detectarla en el uso del elemento matemático analítico global:

sea f derivable en (a, b), si f es creciente en (a, b) $\rightarrow$ f ’>0 en (a, b),

teniendo en cuenta que en la tarea 1 pudo hacer uso de la implicación contraria:

si f ’>0 en (a, b) $\rightarrow$ f es creciente en (a, b),

el estudiante puede hacer uso de estos elementos matemáticos como una relación de **equivalencia lógica**:

sea f derivable en (a, b), f es creciente en (a, b) $\leftrightarrow$f '>0 en (a, b).

Lo mismo sucedería con los elementos matemáticos que relacionan la concavidad de f y el signo de f ''. Esta tarea podrá poner de manifiesto posibles esbozos de síntesis entre los modos analítico y gráfico al poder establecer relaciones lógicas (**"y lógica"**) entre elementos matemáticos analíticos y gráficos.

TAREA 5

Dada la función f(x)=(x-1)(x-2)(x-3). Encontrar un punto, entre dos valores que tengan la misma imagen, en el que la recta tangente sea paralela al eje x.

(A) El objetivo de esta tarea es usar los elementos matemáticos gráficos de la noción de derivada como pendiente de la recta tangente a la función (interpretación geométrica). Al igual que la tarea 3 exige en su resolución tener la noción de derivada como límite del cociente incremental (expresión analítica), en esta tarea es necesario tener la noción de derivada en su interpretación geométrica.

(B) Un proceso de resolución permite usar el elemento matemático gráfico puntual:

- f '(a) = pendiente de la recta tangente a f en x =a

y el elemento matemático analítico global:

- operador derivada: si f(x) es una función polinómica de grado 3$\rightarrow$ f '(x) será una función polinómica de grado 2.

La relación lógica (**"y lógica"**) entre los elementos matemáticos mencionados nos lleva a la resolución de la tarea, ya que:

f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) es una función que verifica que: f(1) = f(2) = f(3) = 0

Además, f es continua y derivable en R, por ser una función polinómica. Luego existe f ’(x) y por el operador derivada será una función polinómica de grado 2, luego existirán dos puntos en los que f ’(x) =0:

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f'(x) = 0 \leftrightarrow 3x^2 - 12x + 11 = 0 \leftrightarrow x_1 = (6-\sqrt{3})/3 \in (1,2)$

ó $x_2 = (6+\sqrt{3})/3 \in (2, 3)$

Esto quiere decir que existe un punto en el intervalo (1, 2) y otro punto en el intervalo (2, 3) que verifican las condiciones del enunciado de la tarea.

Esta tarea puede ponerse de manifiesto esbozo de síntesis de los modos analítico y gráfico, si en su proceso de resolución se hace uso de la **“y lógica”** entre elementos matemáticos gráfico y analítico. El estudiante necesita hacer uso del elemento matemático gráfico de la noción de derivada (interpretación geométrica de la derivada) en la resolución de la tarea.

TAREA 6

A)De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

tabla:

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x =2.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x =1?

B)Supón que f es una función para la que lim (f(x)-f(2))/(x-2) cuando(x →2) es igual a 0. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuáles son obligatoriamente falsas?

1. f '(2) = 2	*2. f(2) = 0*	*3. lim f(x) cuando (x →2) igual a f(2)*
4. f es continua en x =0	*5. f es continua en x =2.*	

El apartado A) es la misma tarea analizada como tarea 4 del cuestionario de 1º Bachillerato, por lo que nos centramos en el apartado B).

(A) El objetivo de la segunda parte de la tarea, independiente de la primera parte de la misma, es usar los elementos matemáticos de la noción de derivada en un punto como límite del cociente incremental.

(B) Un proceso de resolución del apartado B) permite usar los elementos matemáticos analíticos puntuales:

- derivada en un punto como límite del cociente incremental (expresión analítica de la derivada)
- f derivable en x =a → f continua en x =a.

Por la expresión analítica de la derivada en un punto sabemos que:

f '(2) = lim (f(x)-f(2))/(x-2) cuando (x →2)

Luego si en el enunciado de la tarea figura que lim (f(x)-f(2))/(x-2) cuando (x →2) es igual a cero, esto quiere decir que f '(2) =0, y por tanto f es continua en x =2, al ser derivable en x=2. Luego lim f(x) = f(2) cuando (x→2)

Respecto a las afirmaciones dadas tendremos que:

1. f '(2) = 2 → FALSA pues f '(2) =0
2. f(2) = 0 → puede ser verdadera, no nos dicen nada
3. lim f(x) cuando (x →2) igual a f(2) → VERDADERA, ya que f derivable en x =2 → f continua en x =2
4. f es continua en x =0 →puede ser verdadera, no nos dicen nada
5. f es continua en x =2 → VERDADERA

En la primera parte de la tarea, el hecho de que el estudiante sea capaz de decidir si la función es derivable o no en x =2 y x =1, pone de manifiesto que tiene construido el significado de derivada en un punto como límite del cociente incremental, y no lo tiene sólo como algo "memorizado" de la instrucción previa.

En esta segunda parte de la tarea es necesario al menos identificar el límite del cociente incremental con la derivada en un punto para poder resolverla.

TAREA 7

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes: - *f es continua*   - *f(2) =0*   - *f '(3)=f '(5)=0* - $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -4$ - $\lim_{x\to 8} f(x) = -\infty$ - *f '(x) <0 cuando 5 <x <8*   - *f '(x) >0 cuando x<5* - *f ''(x) <0 cuando 3<x<8*   - *f''(x) >0 cuando x<3*

(A) En esta tarea se proporciona información sobre f ' y f '' y se pide el esbozo del gráfico de f. Su objetivo es usar los elementos matemáticos analíticos puntuales y globales que vinculan el signo de f ' al crecimiento de f, el signo de f '' a la concavidad de f, y los puntos en los que f ' es igual a 0 a los extremos y puntos de inflexión de f.

(B) Un proceso de resolución permite usar el elemento matemático analítico puntual:

- f '(a) =0 → x =a máximo, mínimo o punto de inflexión

y los elementos matemáticos analíticos globales:

- si f '>0 →f crece y si f '<0 →f decrece
- si f ''>0 → f convexa ∪ , y si f '' <0 →f cóncava ∩

Las relaciones lógicas (**“y lógica”**) entre estos elementos matemáticos analíticos puntuales y globales para tomar decisiones permite una aproximación al proceso de resolución:

- que la función en x =2 valga cero nos indica que la gráfica de f corta al eje OX
- que la primera derivada sea cero en 3, y 5 puede indicamos que la función tiene un extremo relativo o un punto de inflexión
- que la función tienda a - 4 cuando la x tiende a - ∞ indica que la gráfica tiene una asíntota en y =-4
- que la función tienda a - ∞ cuando x tiende a 8 indica que hay una asíntota en x=8, y que la gráfica decrece al acercamos a x = 8.

  Una consecuencia de esto es que la gráfica parece que debe estar definida en (-∞, 8) ya que al ser continua en su dominio de definición (por los datos dados), no puede existir a la derecha de x =8 ya que si existiera, al haber una asíntota, habría una discontinuidad
- el signo de la primera derivada indica el tipo de crecimiento de la gráfica de f, así
  - como f ’ es negativa en (5, 8) entonces la gráfica de f será decreciente en ese intervalo
  - como f ’ es positiva en (-∞,5) entonces la gráfica de f será creciente en ese intervalo
- el signo de la segunda derivada nos indicará el tipo de concavidad de la función. Así,
  - si la segunda derivada es negativa en un intervalo, implica que la primera derivada es decreciente, entonces la gráfica de f es cóncava
  - si la segunda derivada es positiva en un intervalo, implica que la

primera derivada es creciente, entonces la gráfica de f es convexa.

Con la información anterior sabemos que:

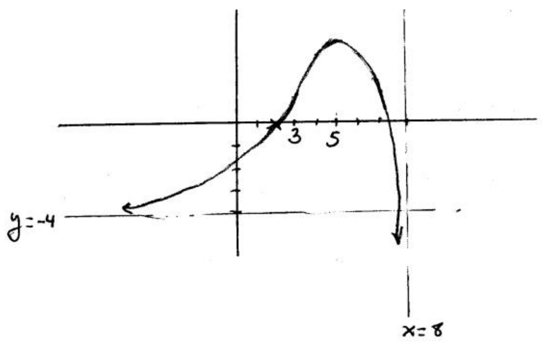
f es cóncava en el intervalo (3, 8) , y f es convexa en el intervalo (-∞, 3)

Considerando todo de manera conjunta (relación lógica (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos puntuales y globales sabemos que:

a) en x =3 hay un punto de inflexión al cambiar la concavidad, por lo que la f ’derivada cambia de signo en ese punto por lo que debe ser cero ya que sabemos que existe por los datos del problema.

b) en x = 5 hay un máximo local al ser un extremo relativo y ser la gráfica de f en (3,8) y f cóncava hacia abajo pasa de crecer a decrecer en ese punto.

Con todo estos datos se puede esbozar la siguiente gráfica que exceptuando en el punto x = 2 que sabemos que corta al eje OX su dibujo puede estar trasladado sobre el eje OY ya que la información que se utiliza (a excepción del corte al eje OX en x =2) procede del comportamiento de las derivadas, y por tanto siempre puede existir una constante en el desplazamiento de la gráfica sobre el eje OY.



En esta tarea las relaciones lógicas (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos puntuales y globales permite resolver la tarea. El establecimiento de estas relaciones es lo que permite determinar el nivel del desarrollo del esquema de derivada en el que se encuentra el estudiante.

Además esta tarea permite hacer uso al estudiante de elementos matemáticos en los que están implicados f ''.

En el cuadro 3.7. mostramos el objetivo de cada una de las tareas, así como los modos de representación utilizados tanto en la presentación como en sus posibles procesos de resolución:

TAREA	MODOS DE REPRESENTACIÓN	OBJETIVOS
T1	GRÁFICO Y/O ANALÍTICO	- Identificar como los estudiantes establecen relaciones lógicas (**"y lógica"**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos, puntuales y /o globales - Determinar el nivel de síntesis entre los modos de representación (analítico y gráfico)
T2	ANALÍTICO Y/O GRÁFICO	- Identificar como los estudiantes establecen relaciones lógicas (**"y lógica"**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos, puntuales y /o globales - Determinar el nivel de síntesis entre los modos de representación (analítico y gráfico)
T3	ANALÍTICO	- Identificar como los estudiantes tienen construido el significado de derivada en un punto como límite del cociente incremental, y que no lo tiene sólo como algo "memorizado" de la instrucción previa, a través del uso del elemento matemático analítico de la noción de derivada.
T4	ANALÍTICO Y GRÁFICO	-Determinar el nivel en que los estudiantes establecen relaciones lógicas (**"y lógica"**, **contrarrecíproco**, **equivalencias lógicas**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos, puntuales y /o globales - Determinar el nivel de síntesis entre los modos de representación (analítico y gráfico)
T5	ANALÍTICO Y GRÁFICO	- Identificar como los estudiantes establecen relaciones lógicas (**"y lógica"**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos, puntuales y /o globales. Siendo necesario usar el elemento matemático gráfico de la noción de derivada (interpretación geométrica) - Identificar el nivel de síntesis entre los modos de representación (analítico y gráfico)
T6	ANALÍTICO	- Identificar como el estudiante tiene construido el significado de derivada en un punto como límite del cociente incremental, y que no lo tiene sólo como algo "memorizado" de la instrucción previa, a través de una aproximación por tablas de valores (proceso).
T7	ANALÍTICO	- Determinar el nivel en el que los estudiantes establecen relaciones lógicas (**"y lógica"**) entre elementos matemáticos analíticos puntuales y /o globales. - Identificar características del uso de elementos matemáticos vinculados a f '' - Determinar el nivel de síntesis entre los modos de representación (analítico y gráfico)

Cuadro 3.7. Objetivos de las tareas del cuestionario de 2º Bachillerato

3.2.2.3. Cuestionario 1º Licenciatura de Matemáticas

La selección de las tareas de este cuestionario se hizo teniendo en cuenta que iba destinado a estudiantes de primer curso de la Universidad (Facultad de Matemáticas) después de que hubieran cursado la asignatura de Elementos de Análisis Matemático con contenidos del concepto de Derivada. (Ver capítulo 1, p.20)

El cuestionario se diseñó con cuatro tareas dos dadas en modo gráfico (tarea 1 y tarea 3) y dos dadas en modo analítico (tarea 2 y tarea 4).

La tarea 1 proporciona el gráfico de f ' y pide el esbozo del gráfico de f, la gráfica de f ' de esta tarea muestra en su gráfico cambios de signo, cambios de crecimiento, puntos de corte con el eje X, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso (puntos tratados por Baker et al. 2000), todo ello conlleva que para esbozar el gráfico de f es necesario establecer relaciones lógicas entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntuales y /o globales.

La tarea 2 es común con la tarea 3 del cuestionario de 2º de Bachillerato, y la tarea 3 es común con la tarea 4 del cuestionario de 2º de Bachillerato. En cierta medida, la segunda parte de la tarea 3 deberá aportar información complementaria a la obtenida en al tarea 1 ya que permite usar elementos matemáticos analíticos y/o gráficos globales procedentes de las relaciones inversas de los que se pueden usar en la tarea 1, y en este sentido nos permitirá saber si el estudiante es capaz de establecer **equivalencias lógicas** entre los elementos matemáticos que utiliza.

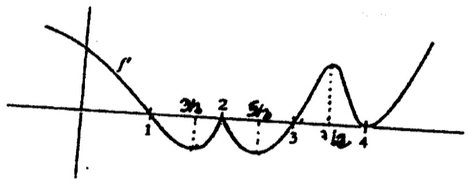
La tarea 4, a partir de condiciones analíticas sobre f ' y f '' pide el esbozo del gráfico de f, para resolverla es necesario establecer relaciones lógicas (**"y lógica"**) entre f ' y f, y entre f '' y f utilizando los elementos matemáticos analíticos puntuales y globales necesarios para ello, en el esbozo del gráfico de f aparece un punto anguloso o punto cúspide siendo el tratamiento de este punto lo que proporciona mayor dificultad a la tarea (Baker et al. 2000).

El cuestionario de 1º de Licenciatura de Matemáticas consta de las siguientes tareas:

CUESTIONARIO 1º Licenciatura de Matemáticas

TAREA 1

La figura muestra la gráfica de la derivada de f ', esboza las posibles gráficas de f.



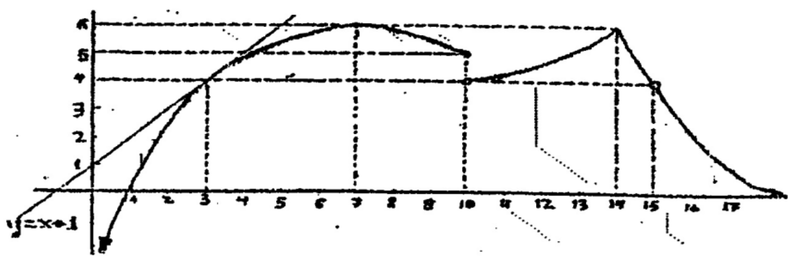
TAREA 2

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x<1 \\ bx^2 + 1 & x\geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b para que f sea derivable en x =1

TAREA 3

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) *Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.*

b) *Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.*

TAREA 4

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

- f es continua *- f(-1) =0* *- f ’(1)=f ’(3)=f ’(5)=0* *-* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$

-f ’(x) <0 cuando 1 <x <5 y cuando x>7 - f ’(x) >0 cuando -2<x<1 y cuando 5<x<7

- f ’’(x) <0 cuando -2<x<3 *- f ’’(x) >0 cuando 3<x<7 y cuando x> 7*

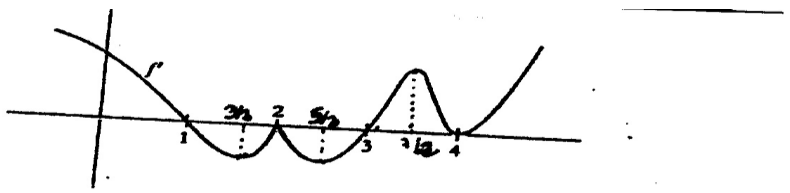
Una vez descrito el cuestionario pasamos a analizar las tareas una a una atendiendo a :

(A) los objetivos que se quieren alcanzar con ella y

(B) una aproximación a un posible proceso de resolución de la misma

TAREA 1

La figura muestra la gráfica de la derivada de f ’, esboza las posibles gráficas de f.



(A) El objetivo de esta tarea es similar al de la tarea 2 del cuestionario de 2º de Bachillerato, la diferencia entre estas dos tareas es la complejidad de la gráfica de f ’ , ya que mientras que en el cuestionario de 2º de Bachillerato hacíamos referencia a una función derivada cuya gráfica es una recta, en la tarea del cuestionario de Facultad la gráfica de f ’ muestra en su gráfico cambios de signo, cambios de crecimiento, puntos de corte con el eje X, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso (puntos tratados por Baker et al. 2000), todo ello conlleva que para esbozar el gráfico de f es necesario establecer relaciones lógicas (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos globales que vinculen el crecimiento de f ’ a la convexidad de f, el signo de f ' al crecimiento de f y elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntuales y globales vinculando f ' a extremos y puntos de inflexión de f.

Una aproximación al proceso de resolución se puede hacer desde el modo gráfico, a través de los elementos matemáticos gráficos de noción de derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica, o desde el modo analítico a través de los elementos matemáticos analíticos puntuales y globales vinculados al crecimiento y a la concavidad. En ambos casos y para llegar al gráfico de f es necesario considerar f ' como función y (f ')' como su derivada, al menos puntualmente, obteniendo así información sobre f '' desde el gráfico de f '. Esta relación aunque se podía utilizar en la tarea propuesta en el cuestionario de 2º de Bachillerato, no era necesaria para la resolución correcta de la tarea, sin embargo en esta tarea propuesta para los estudiantes de 1º de la licenciatura de Matemáticas sin el uso de estas relaciones el esbozo del gráfico de f no es posible.

(B) Un proceso de resolución permite usar los elementos matemáticos analíticos puntuales:

- f '(a) =0 → x =a máximo, mínimo o punto de inflexión de f
- si f '' tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha de x =a → x=a es punto de inflexión de f

y los elementos matemáticos analíticos globales:

- si f '>0 →f crece y si f '<0 →f decrece
- si f ' crece (f ''>0) → f convexa ∪ , y si f ' decrece (f '' <0) →f cóncava ∩

De todos estos elementos matemáticos, la relación lógica **"y lógica"** entre los dos elementos analíticos globales uno vinculado al signo de la función derivada y otro vinculado al crecimiento / decrecimiento de la función derivada, pueden llevarnos a la resolución de la tarea.

A. f ' > 0 → f creciente (f ' < 0 → f decreciente)

B. si f ' es creciente entonces f es convexa ∪ (si f ' es decreciente entonces f es cóncava ∩)

La relación lógica (**"y lógica"**) entre estos dos elementos matemáticos permite "leer" la gráfica propuesta f ' para obtener información sobre la gráfica de f.

Desde la grafica dada en la tarea 1, y utilizando el elemento matemático A sabemos que:

- en (-infinito, 1); (3, + infinito) la f ' es positiva luego f debe ser creciente,

- en (1, 3) la f ' es negativa luego f es decreciente.

De ahí sabemos que en x = 1 (donde f '(1) =0) hay un máximo local (la función f pasa de crecer a decrecer), y en x =3 ,(donde f '(3) =0) hay un mínimo local (porque f pasa de decrecer a crecer).

Utilizando el elemento matemático B en cada uno de estos intervalos nos indica que el cambio de crecimiento de f ' nos va a dar un cambio de concavidad de la f.

Así, en (-infinito, 1) no hay cambio de crecimiento, luego no hay cambio de concavidad de f. Como f ' es decreciente, f es cóncava ∩. En (1,3) hay cambios de crecimiento de f ' por lo que hay cambios de concavidad.

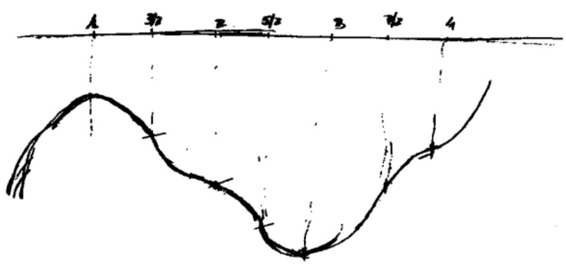
Pero, como sabemos que en este intervalo f siempre es decreciente, el cambio de concavidad implica un punto de inflexión. Luego en (1, 3) cada cambio de crecimiento de f ' nos da un cambio de concavidad.

- (1, 3/2) f ' es decreciente luego f es cóncava luego en x=1 hay un máximo local.

- (3/2, 2) f ’ es creciente luego f es convexa.
- (2, 5/2) f ’ es decreciente, luego f es cóncava.
- (5/2, 3) f ’ es creciente, luego f es convexa.

En (3 , + infinito) hay cambios de crecimiento de f ’ por lo que hay cambios de concavidad de f.

- (3, 7/2) f ’ es creciente, luego f es convexa.
- (7/2,4) f ’ es decreciente, luego f es cóncava.
- (4, + infinito) f ’ es creciente, luego f es convexa.



Esta tarea puede ser resuelta a través del establecimiento de relaciones lógicas (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos, puntuales y/o globales. Permite poner de manifiesto esbozos de síntesis entre los modos analítico y gráfico a través de la relación (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos y gráficos. Para llegar al gráfico de f es necesario considerar f ’ como función y (f ’)’ como su derivada, al menos puntualmente, obteniendo así información sobre f ’’ desde el gráfico de f ’, esto puede ser una manifestación de que el alumno tenga tematizado el esquema de derivada.

TAREA 2

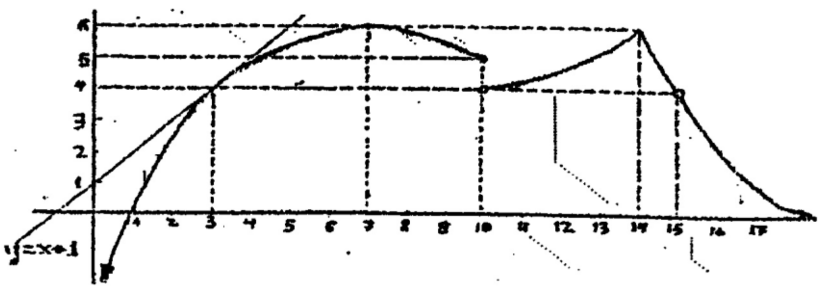
Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x<1 \\ bx^2 + 1 & x\geq 1 \end{cases}$

Calcular a y b para que f sea derivable en x =1

es la misma tarea analizada como tarea 3 del cuestionario de 2º Bachillerato, mirar página 116.

TAREA 3

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a)Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.

b)Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.

es la misma tarea analizada como tarea 4 del cuestionario de 2º Bachillerato, mirar página 118.

TAREA 4

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

- *f es continua* - $f(-1) = 0$ - $f'(1)=f'(3)=f'(5)=0$ - $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

- lim f(x) = - ∞

x→-2

- f '(x) <0 cuando 1 <x <5 y cuando x>7 - f '(x) >0 cuando -2<x<1 y cuando 5<x<7

- f ''(x) <0 cuando -2<x<3 - f ''(x) >0 cuando 3<x<7 y cuando x> 7

(A) En esta tarea a partir de condiciones analíticas sobre f ' y f '' se pide el esbozo del gráfico de f. Su objetivo es similar al de la tarea 7 del cuestionario de 2º de Bachillerato, establecer relaciones lógicas (**"y lógica"**) entre elementos matemáticos analíticos puntuales y globales relacionados con el crecimiento de f, y con la concavidad de f. La diferencia entre ellas es que en la tarea del cuestionario de 2º de Bachillerato las relaciones lógicas (**"y lógica"**) entre elementos matemáticos analíticos puntuales y globales sólo aparecían en un extremo y un punto de inflexión, en la tarea 4 aparece además un punto anguloso o punto cúspide, siendo el tratamiento de este punto lo que proporciona mayor dificultad (Baker et al. 2000).

Por otro lado, en la tarea 1 del cuestionario de 1º Licenciatura de Matemáticas que estamos analizando, también se pedía el esbozo de la gráfica de f, pero mientras que en dicha tarea venía dada en modo gráfico (pues en el enunciado figuraba la gráfica de f '), la tarea 4 viene dada en modo analítico pues se pide el esbozo del gráfico de f a partir de condiciones analíticas de f ' y f ''.

(B) Un proceso de resolución permite usar los elementos matemáticos analíticos puntuales:

- f '(a) =0 → x =a máximo, mínimo o punto de inflexión de f
- si f '' tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha de x =a (cambio de concavidad en x =a) → x =a es punto de inflexión de f

y los elementos matemáticos analíticos globales:

- si f '>0 en (a, b) →f crece en (a, b), y si f '<0 en (a, b) →f decrece en

(a, b)

- si f ''>0 en (a, b) → f convexa ∪ en (a, b), y si f '' <0 en (a, b) →f cóncava ∩ en (a, b)

La información que proporciona este problema permite usar elementos matemáticos analíticos puntuales y globales, pero también la necesidad de establecer relaciones lógicas (**"y lógica"**) entre ellos para tomar decisiones. Así a través de la información proporcionada por las condiciones analíticas del enunciado de la tarea, sabemos:

- que la función en x =-1 valga cero nos indica que la gráfica de f corta al eje OX
- que la primera derivada sea cero en 1,3, y 5 puede indicamos que la función tiene un extremo relativo o un punto de inflexión
- que la función tienda a - ∞ cuando la x tiende a + ∞ indica que la gráfica decrecerá a medida que la x crezca
- que la función tienda a - ∞ cuando x tiende a -2 indica que hay una asíntota en x= -2, Y que la gráfica decrece al acercamos a x = -2.

  Una consecuencia de esto es que la gráfica parece que debe estar definida en (-2,+∞) ya que al ser continua en su dominio de definición (por los datos dados), no puede existir a la izquierda de x = -2 ya que si existiera, al haber una asíntota, habría una discontinuidad

- que el signo de la primera derivada indica el tipo de crecimiento de la gráfica de f, así
  - como f ' es negativa en (1,5) y (7, +∞) entonces la gráfica de f será decreciente en esos intervalos
  - como f ' es positiva en (-2,1) y (5,7) entonces la gráfica de f será creciente en esos intervalos

- la información proporcionada por el signo de la segunda derivada nos indicará el tipo de concavidad de la función. Así,
    - si la segunda derivada es negativa en un intervalo, implica que la primera derivada es decreciente, entonces la gráfica de f es cóncava
    - si la segunda derivada es positiva en un intervalo, implica que la primera derivada es creciente, entonces la gráfica de f es convexa.

  Con los datos anteriores sabemos que:

  f es cóncava en los intervalos (-2,3) , y f es convexa en los intervalos (3,7) y (7, +∞).

Considerando esta información de manera conjunta (estableciendo relación "**y lógica**" entre elementos) sabemos que:

a) en x =3 hay un punto de inflexión al cambiar la concavidad, por lo que la f 'derivada cambia de signo en ese punto por lo que debe ser cero ya que sabemos que existe por los datos del problema.
b) en x = 1 hay un máximo local al ser un extremo relativo y ser la gráfica de f cóncava hacia abajo en (-2,3)
c) en x =5 hay un mínimo local al ser un extremo relativo y ser la gráfica de f cóncava hacia arriba en el intervalo (3,7)
d) en el punto x =7 tenemos que:
    a. a la izquierda de 7 la función es creciente
    b. a la derecha de 7 la función es decreciente

   por lo tanto en x =7 debe existir un máximo local, ya que la función es continua en su dominio de definición. En el punto x = 7 tenemos que

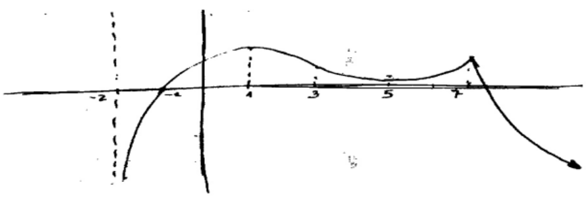
    a. a la izquierda de 7 la función es convexa

b. a la derecha de 7 la función es convexa

por lo que no hay cambio de concavidad. coordinando estas dos informaciones del punto d. implica que en x = 7 hay un pico y por tanto no es derivable.

[en x =7 hay un pico porque si no lo hubiera debería haber un máximo (normal) en el intervalo (5,+∞) lo que implicaría un cambio de concavidad y no lo hay ya que en este intervalo se mantiene la concavidad].

Con toda esta información se puede esbozar la siguiente gráfica que exceptuando en el punto x = -1 que sabemos que corta al eje OX su dibujo puede estar trasladado sobre el eje OY ya que la información que se utiliza (a excepción del corte al eje OX en x =-1) procede del comportamiento de las derivadas, y por tanto siempre puede existir una constante en el desplazamiento de la gráfica sobre el eje OY.



En esta tarea es necesario establecer relaciones lógicas (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos puntuales y globales en su proceso de resolución. El establecimiento de estas relaciones es lo que permite determinar el nivel del desarrollo del esquema de derivada en el que se encuentra el estudiante, poniéndose de manifiesto más claramente con el establecimiento de relaciones lógicas (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos puntual y globales en la determinación del punto cúspide. Además del uso por parte del estudiante de elementos matemáticos relacionados con f ’’.

En el cuadro 3.8. mostramos el objetivo de cada una de las tareas, así como los modos de representación utilizados tanto en la presentación como en sus posibles procesos de resolución:

TAREA	**MODOS DE REPRESENTACIÓN**	**OBJETIVOS**
T1	GRÁFICO Y/O ANALÍTICO	- Identificar como los estudiantes establecen relaciones lógicas (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos, puntuales y /o globales - Determinar el nivel de síntesis entre los modos de representación (analítico y gráfico) - Identificar el uso de elementos matemáticos gráficos y/o analíticos relacionados con f ’’ (considerar f ’ como función y f ’’ como su derivada, al menos con carácter putual)
T2	ANALÍTICO	- Poner de manifiesto que el estudiante tiene construido el significado de derivada en un punto como límite del cociente incremental, que no lo tiene sólo como algo “memorizado” de la instrucción pevia, a través del uso del elemento matemático analítico de la noción de derivada. Nota.- es la tarea 3 del cuestionario de 2º Bachillerato
T3	ANALÍTICO Y GRÁFICO	- Identificar como el estudiante establece relaciones lógicas (**“y lógica”**, **contrarrecíproco**, **equivalencias lógicas**) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos, puntuales y /o globales - Determinar el nivel de síntesis entre los modos de representación (analítico y gráfico) Nota.- es la tarea 4 del cuestionario de 2º Bachillerato
T4	ANALÍTICO	- Identificar como el estudiante establece relaciones lógicas (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analíticos puntuales y /o globales. - Identificar características del uso de elementos matemáticos vinculados a f ’’ - Determinar el nivel de síntesis entre los modos de representación (analítico y gráfico)

Cuadro 3.8. Objetivos de las tareas del cuestionario de 1º Licenciatura

3.2.3. Aplicación de los instrumentos

3.2.3.1. Cuestionarios

Los cuestionarios diseñados se pasaron en el segundo y tercer trimestre del curso 2001/02:

Cuestionarios realizados		
1º Bachillerato: 50	2º Bachillerato: 50	1º Licenciatura de Matemáticas: 50

Para la resolución de las diferentes tareas del cuestionario los estudiantes dispusieron de 60 minutos los alumnos de 1º de Bachillerato y de 90 minutos los alumnos de 2º de Bachillerato y de 1º de la Licenciatura de Matemáticas. En el caso de los estudiantes de Bachillerato, el investigador previamente había acordado el día y la hora con los Directores, los Jefes de Estudios y los profesores de los grupos de estudiantes de los Centros de Educación Secundaria que iban a participar en la investigación, para los estudiantes de 1º de Licenciatura de Matemáticas se contactó directamente con dos profesores que impartían clases en el segundo cuatrimestre del curso 2001/2002 y que entre ellos tenían a todo el alumnado que constituía 1º de Licenciatura de Matemáticas. En el primer cuatrimestre se imparte la asignatura "Elementos de Análisis Matemático" con contenidos de la noción de Derivada, y para la investigación era necesario que los alumnos ya hubieran estudiado dicho tema. Los 50 alumnos de 1º de Licenciatura de Matemáticas que realizaron el cuestionario constituían todo el alumnado que asistía a clase regularmente. Para la realización de los cuestionarios por parte de las distintas poblaciones de alumnos (1º y 2º de Bachillerato, y 1º de Licenciatura de Matemáticas) fue necesario hacerlo en dos días y en varias horas cada día para cada población.

El formato de presentación del cuestionario era el siguiente: en el primer folio sólo figuraban los datos del estudiante, y en los folios siguientes se presentaban las tareas que aparecían en hojas independientes divididos en dos secciones (procedimiento de resolución y justifica tu respuesta)

3.2.3.2. Entrevistas

Las entrevistas realizadas en las diferentes poblaciones fueron entrevistas semiestructuradas que aportaron a la investigación información sobre la construcción del esquema de Derivada.

En días posteriores a la realización de los cuestionarios por parte de los estudiantes, se realizaban las entrevistas en relación a la forma en la que habían resuelto las diferentes tareas del cuestionario. En el caso de los estudiantes de 1º de Bachillerato tuvieron una duración de 20 a 30 minutos, y en el caso de los estudiante de 2º de Bachillerato y 1º de Licenciatura de 30 a 45 minutos. En el diseño de la investigación se contemplaba la posibilidad de que no todos los estudiantes que habían realizado el cuestionario fueran entrevistados debido al carácter voluntario de la misma. Además, previamente a la realización de las entrevistas, el entrevistador examinaba las respuestas dadas a las diferentes tareas por parte de los estudiantes, descartando los cuestionarios entregados en blanco. En definitiva, se realizaron un total de 69 entrevistas semiestructuradas distribuidas de la siguiente manera en las distintas poblaciones:

Entrevistas realizadas		
1º Bachillerato: 20	**2º Bachillerato**: 20	**1º Licenciatura de Matemáticas**: 29

En el caso de 1º y 2º de Bachillerato el entrevistador contó con la autorización de la Jefatura de Estudios de los Centros de Educación Secundaria y de algunos profesores de diferentes asignaturas que daban clases en los grupos de estudiantes que se iban a entrevistar (teniendo que ir durante varios días a los diferentes Centros). En el caso de 1º de la Licenciatura concertándola directamente con el estudiante. Durante la realización de las mismas, el entrevistador iba grabándolas y tomando notas.

La distribución temporal de los cuestionarios y entrevistas posteriores fue la siguiente:

Distribución temporal de cuestionarios/entrevistas		
1º Bachillerato	**2º Bachillerato**	**1º Licenciatura de Matemáticas**
Marzo/Abril 2002	Abril/Mayo 2002	Mayo/Junio 2002

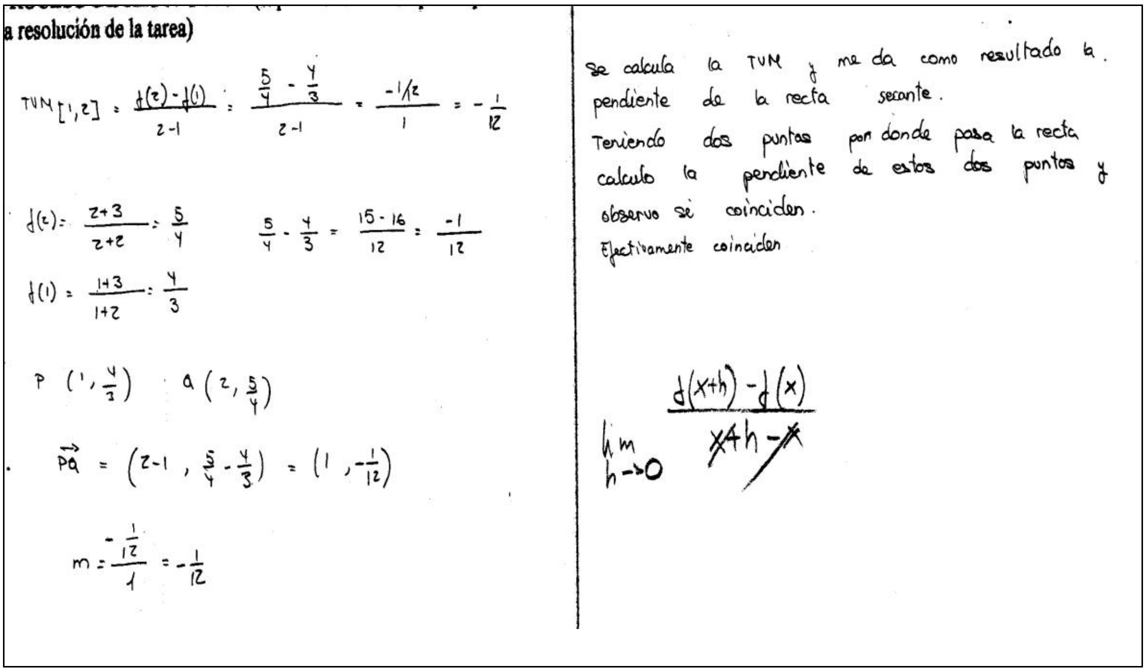
Mostraremos a través de distintos protocolos de diferentes cursos el potencial de la entrevista para

- **ampliar la información sobre cómo los estudiantes establecen relaciones entre los elementos, y**
- **permitir hacer inferencias sobre el nivel de desarrollo del esquema,**

estos aspectos se ponen de manifiesto en las tres muestras estudiadas (1º Bachillerato, 2º Bachillerato y 1º Licenciatura)

Por ejemplo, C18-1B responde a la tarea 1:

Comprueba que la tasa de variación media de f (x) = (x+3)/(x+2) en el intervalo [1, 2] es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(1, f(1)) y Q(2, f(2)). ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de f(x) en el punto (1, f(1))? [TAREA 1- 1º Bachillerato]



a resolución de la tarea)

$TVM[1,2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\frac{5}{4}-\frac{4}{3}}{2-1} = \frac{-1/12}{1} = -\frac{1}{12}$

$f(2) = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$ $\qquad \frac{5}{4}-\frac{4}{3} = \frac{15-16}{12} = \frac{-1}{12}$

$f(1) = \frac{1+3}{1+2} = \frac{4}{3}$

$P\left(1, \frac{4}{3}\right) \quad Q\left(2, \frac{5}{4}\right)$

$\vec{PQ} = \left(2-1, \frac{5}{4}-\frac{4}{3}\right) = \left(1, -\frac{1}{12}\right)$

$m = \frac{-\frac{1}{12}}{1} = -\frac{1}{12}$

Se calcula la TVM y me da como resultado la pendiente de la recta secante.
Teniendo dos puntos por donde pasa la recta calculo la pendiente de estos dos puntos y observo si coinciden.
Efectivamente coinciden

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{\cancel{x}+h-\cancel{x}}$

(C18-1B, Tarea 1)

En su resolución hay que utilizar dos elementos matemáticos analíticos puntuales sobre el concepto de derivada. Tal como se presenta el enunciado de esta tarea se puede resolver sin establecer relaciones entre los elementos matemáticos. La entrevista permitió obtener información sobre el nivel del desarrollo del esquema de Derivada, cuando se le preguntaba al estudiante por la relación entre los elementos matemáticos analíticos sobre la noción de derivada como límite del cociente incremental, que había utilizado en la resolución de la tarea, y el elemento matemático gráfico puntual sobre la noción de derivada en un punto como pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. Así en el protocolo de entrevista del cuestionario 18 de 1º Bachillerato:

E: calculas la tasa de variación media por la definición y compruebas que coincide con la pendiente de la recta secante. ¿qué sucede con la tasa de variación instantánea?

[C18-1B escribe el límite cuando h tiende a 0 del cociente incremental]

E: ¿qué obtendrías?

C18-1B: f ’

E: ¿en x?

C18-1B: bueno si, sustituyendo x por 1

E: gráficamente, ¿cómo interpretarías f ’(1)?

C18-1B: con la tangente,..... La derivada de una función en un punto coincide con la recta tangente a la curva en ese punto.

(C18-1B, Tarea 1)

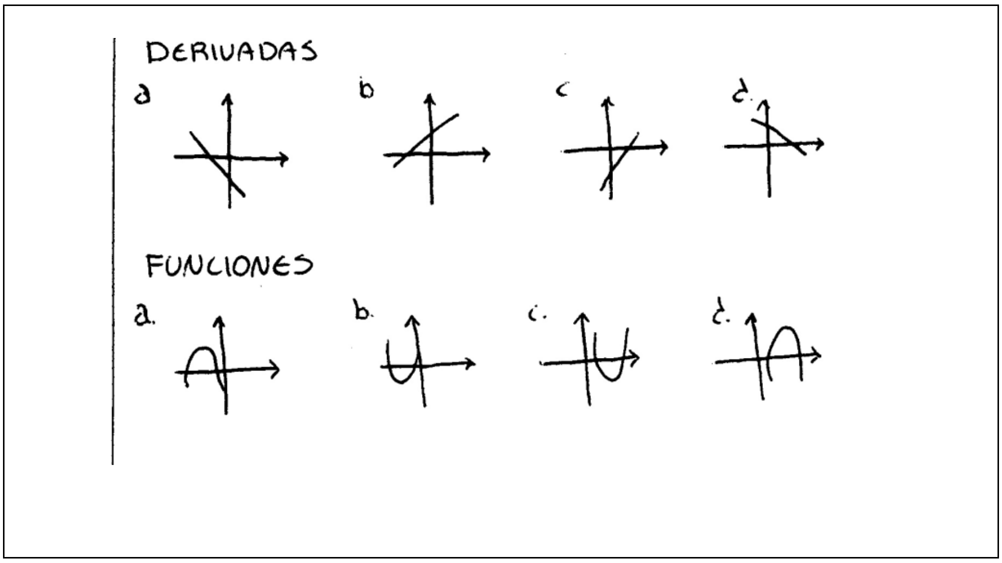
De esta manera, la entrevista nos ha permitido obtener información sobre el nivel de comprensión del estudiante.

Lo mismo sucede en la muestra de 2º Bachillerato. Así, por ejemplo en la tarea 2:

La gráfica correspondiente a la función f ’(x) primera derivada de una cierta función f(x) es una recta que pasa por los puntos (a,0) y (0,b). Esboza las posibles gráficas de f(x). [TAREA 2-2º Bachillerato]

En la entrevista se puede preguntar ¿qué sucede si se fija a y se varía b, o si se fija b y se varía a?, ya que es la pendiente de la recta la que determina la amplitud de la parábola, y la variación del parámetro b, va a determinar la traslación de la parábola en el eje OY. Además podemos fijarnos en qué elementos matemáticos del concepto de Derivada utiliza y qué relaciones establece entre ellos el estudiante en la resolución de la tarea.

Así, si nos fijamos en el protocolo del cuestionario 5 de 2º Bachillerato, y observamos la respuesta dada por estudiante en el cuestionario escrito a la tarea 2:



(C5-2B, Tarea 2)

no tendríamos información sobre que elementos de conocimiento ha utilizado ni que relaciones entre ellos ha establecido el estudiante, es la entrevista en este caso la que nos proporciona información sobre el nivel del desarrollo del esquema de Derivada en el que se encuentra el estudiante, y además nos proporcionará alguna información sobre la influencia de la variación de los parámetros a y b en la resolución de la tarea:

E: ¿puedes explicarme cómo has resuelto la tarea?

C5-2B: primero he sacado los posibles gráficos de f que había según a y b fuesen positivos o negativos. Y luego igual que antes, como están son las derivadas, se supone que cuando las derivadas pasan por cero, hay un mínimo o un máximo, entonces dependiendo, si la derivada está en positivo está creciendo, y cuando pasa de positivo a negativo, está decreciendo, hay un máximo.

E: ¿usas el mismo tipo de razonamiento en todas?

C5-2B: sí

(C5-2B, Tarea 2)

Cuando se le pregunta en la entrevista ¿qué sucede si fijamos un parámetro y variamos el otro?, comenta que uno influirá en que la función tendrá las ramas más o menos abiertas, y el otro en la traslación de la función:

E: imagínate, en cualquiera de ellas, en la d) por ejemplo, que fijas el *punto (0, b), y mueves (a, 0) a lo largo del eje ¿qué sucedería?*

C5-2B: no sé, si mueves este punto a lo mejor la función está más abierta

E: ¿y si hacemos lo contrario, fijamos (a, 0) y movemos (0, b)?

C5-2B: es que te va a variar porque si mueves este punto, ya con cero no va a coincidir en el mismo punto, entonces se mueve toda la gráfica de la función.

(C5-2B, Tarea 2)

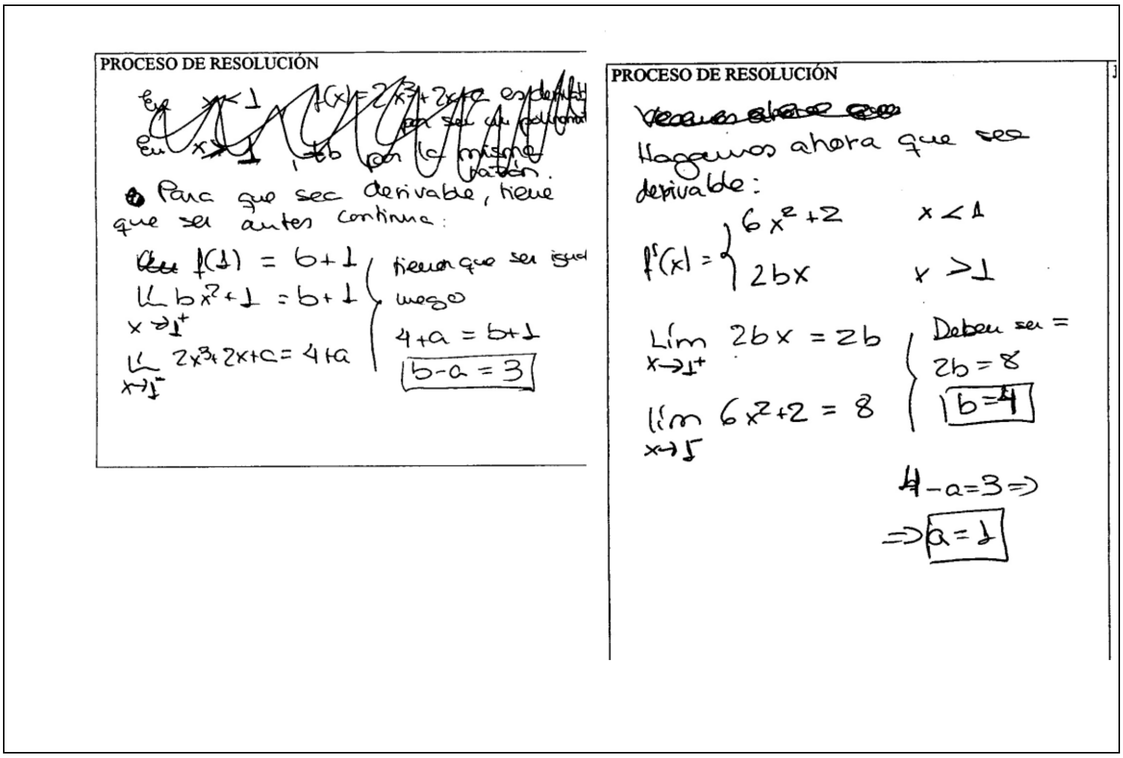
De esta forma los datos obtenidos desde las entrevistas permiten identificar mejor lo que justifica la resolución del alumno y por tanto poder realizar mejores interpretaciones sobre el nivel de desarrollo del esquema de derivada.

Este hecho lo podemos observar también en la muestra de 1º Licenciatura. Nos fijamos, por ejemplo, en la tarea 2:

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x<1 \\ bx^2 + 1 & x\geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b para que f sea derivable en x =1 [TAREA 2- Licenciatura]

En la resolución de esta tarea podemos entender que el resolutor se apoya en haber encapsulado la definición de derivada en un punto como el limite del cociente incremental (en forma de proceso-paso al limite) en la expresión que obtiene al aplicar las reglas de derivación a la función f, y será mediante la entrevista como podemos corroborarlo. Así si nos fijamos en los protocolos de los cuestionario C9-L, y C49-L de Licenciatura, vemos que sus procesos de resolución son similares. Pero al realizar la entrevista se pone de manifiesto realmente que es lo que el estudiante considera en cada una de las respuestas producidas.



PROCESO DE RESOLUCIÓN

Para que sea derivable, tiene que ser antes continua:

$f(1) = b+1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} bx^2+1 = b+1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} 2x^3+2x+a = 4+a$

tienen que ser igual luego

$4+a = b+1$

$\boxed{b-a=3}$

PROCESO DE RESOLUCIÓN

~~Veamos ahora que~~

Hagamos ahora que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2+2 & x<1 \\ 2bx & x>1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 1^+} 2bx = 2b$

$\lim\limits_{x \to 1^-} 6x^2+2 = 8$

Deben ser = $2b = 8$ $\boxed{b=4}$

$4-a=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$

(C9-L, Tarea 2)

En la entrevista con el estudiante C9-L se pone de manifiesto que relaciona los límites laterales de f ’ en x =a con las pendientes de las rectas tangentes a f en x =a, y conoce la definición de f ’ como límite del cociente incremental:

> *E: una vez que has estudiado la continuidad, ¿cómo estudias la derivabilidad?*
>
> *C9-L: calculo la derivada y veo que coincidan los límites laterales para que coincidan las pendientes de las rectas tangentes.*
>
> *E: ¿sabrías hacerlo aplicando la definición de derivada en un punto?*
>
> *C9-L: si, como límite del cociente incremental, lim (f(x)-f(a))/(x-a) cuando x tiende a a*
>
> (C9-L, Tarea 2)

Sin embargo el cuestionario C49-L que había resuelto la tarea de la misma forma que el cuestionario C9-L que acabamos de comentar, al preguntarle en la entrevista “si sabría explicar la tarea o hacerla aplicando la definición de derivada en un punto” contesta:

C49-L: no sé, yo siempre lo he hecho así

(C49-L, Tarea 2)

Es por tanto en la entrevista donde se ha puesto de manifiesto que el estudiante correspondiente al cuestionario 9 de Licenciatura tiene la idea de derivada como límite del cociente incremental, y además lo relaciona con la idea de derivada como pendiente de la recta tangente a la función, y sin embargo el estudiante correspondiente al cuestionario C49-L no usa la idea de derivada como límite del cociente incremental, aunque los dos habían contestado de forma correcta la tarea en el cuestionario escrito. Este comportamiento diferente se puede interpretar en el sentido de que mientras el estudiante C49-L ha memorizado un procedimiento para resolver determinado tipo de tareas y lo recupera de la memoria para aplicarlo, sin embargo el estudiante C9-L es capaz de utilizar los significados implícitos cuando lo necesita.

Es por tanto la entrevista la que en algunos casos nos proporciona información sobre la comprensión que tienen los estudiantes de la noción de Derivada, y la que nos ayuda a determinar en que nivel del desarrollo del esquema de Derivada que moviliza el cuestionario se encuentran. Esto nos llevó, como veremos en la siguiente sección, a analizar conjuntamente las respuestas dadas por los estudiantes en el cuestionario escrito y en la entrevista.

Debido a ello, en el diseño de la investigación pensamos en los dos instrumentos considerados conjuntamente, pues estimamos que si sólo teníamos cuestionario escrito nos faltaba información para poder determinar el nivel del desarrollo del esquema en el que se encontraba el estudiante. Esto implica que a partir de ahora sólo consideramos los casos en los que tenemos cuestionario y entrevista, con un total de:

Cuestionarios y entrevistas		
1º Bachillerato: 20	**2º Bachillerato**: 20	**1º Licenciatura de Matemáticas**: 29

3.3. Procedimiento de análisis

En este apartado describimos

- la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de derivada realizada desde el análisis teórico descrito en las secciones anteriores, y
- el procedimiento de análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a los cuestionarios y a las entrevistas de forma conjunta.

3.3.1. Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de derivada

Del marco teórico asumido (p. 70) derivamos que el esquema de derivada viene caracterizado por los elementos matemáticos y sus relaciones. Por lo tanto el procedimiento de análisis debe identificar los elementos matemáticos y las relaciones que los resolutores establecen ya que a partir de aquí podremos hacer inferencias sobre los niveles de desarrollo del estudiante.

En un primer momento desde el análisis teórico y desde la revisión de las investigaciones previas, identificamos algunas características de los diferentes niveles de desarrollo. Lo que hemos hecho posteriormente ha sido particularizar las características generales de los distintos niveles de desarrollo identificados por nosotros a la idea de derivada, y asumir que existe una construcción progresiva de este esquema, llegando a la tematización del esquema de Derivada cuando el estudiante tiene la idea de Derivada como función. Una manifestación de este hecho lo tenemos cuando el estudiante considera f' como función y $(f')' = f''$ como su función derivada.

NIVEL INTRA	- **recordar de manera aislada elementos matemáticos, sin manifestación de relaciones lógicas** - **recordar y utilizar con dificultades en algunos ámbitos, elementos matemáticos (o hacerlo con errores).** - **manifestar esbozo de relación entre algunos elementos con generación de conflictos (a veces) o relacionarlos de manera errónea.**
NIVEL INTER	- **usar con limitaciones algunas relaciones lógicas entre elementos matemáticos, no siendo el uso de algunas de dichas relaciones correctas:** • **la conjunción lógica [$A \wedge B$] ("y lógica")** • **el contrarrecíproco [$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$]** • **la equivalencia lógica entre elementos matemáticos ($(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow [A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A]$)** - **usar elementos matemáticos en ámbitos de aplicación diversos.** - **no tener síntesis de los modos de representación: tener dificultades en manejar las mismas relaciones lógicas y los mismos elementos en los modos gráfico y analítico.**
NIVEL TRANS	- **posibilidad de establecer relaciones lógicas ("y lógica", contrarrecíproco, equivalencia lógica) para realizar las inferencias.** - **poder hacer uso de los significados implícitos a los elementos matemáticos.** - **demostrar síntesis en los modos de representación pudiendo hacer realizar inferencias con independencia del modo de representación utilizado.**

Cuadro 3.9. Caracterización de los diferentes niveles del desarrollo del esquema de Derivada

A continuación pasamos a describir los distintos niveles:

- EL NIVEL INTRA está caracterizado por:

1.- Recordar de manera aislada elementos matemáticos, s**in manifestación de relaciones lógicas**

Esto puede suceder algunas veces, porque la tarea que esté resolviendo el estudiante sólo exija el uso de un elemento matemático, y otras porque el estudiante, aunque sea necesaria establecer relación lógica entre varios elementos en la resolución de la tarea, no sea capaz de hacerlo.

2.- Recordar y utilizar con dificultades en algunos ámbitos, elementos matemáticos (o hacerlo con errores).

Caracterizaremos como nivel INTRA cuando los estudiantes manifiesten dificultades en aplicar los significados usados en f a f ' o a f ''.

Así, una manifestación de esta característica la tenemos cuando el estudiante recuerda algunos elementos matemáticos de forma incorrecta, pudiendo confundir la información que proporciona f ' y f '', o identificando los puntos en los que f '(a) =0 sólo con extremos, sin considerar que pueden ser también puntos de inflexión.

3.- Manifestar esbozo de establecer relaciones lógicas entre algunos elementos con generación de conflictos (a veces) o relacionarlos de manera errónea

El primer esbozo de relación lógica entre elementos matemáticos, en la construcción del esquema de Derivada, se pone de manifiesto con el uso de la **"y lógica"** entre dos elementos matemáticos. Un estudiante en el nivel INTRA no es capaz de establecer relaciones de forma correcta, le plantean conflictos. Puede identificar correctamente los elementos matemáticos de manera aislada, pero es cuando tiene que relacionar dicha información cuando tiene dificultades.

Por ejemplo, recordar un hecho matemático, si f ’>0 en (a, b) entonces f es creciente en (a, b), puede implicar simplemente una recuperación de la memoria de un objeto matemático desde la instrucción previa. Entendido así, puede considerarse que se conoce como “objeto” (pseudo-objeto).

- EL NIVEL INTER está caracterizado por:

1.- Usar con limitaciones algunas relaciones lógicas entre elementos matemáticos, no siendo correctas el uso de algunas de dichas relaciones:

Consideremos las distintas relaciones que se pueden establecer entre los elementos matemáticos:

- la conjunción lógica [A∧B] (“y lógica”)

esta relación puede empezar a ser usada con más frecuencia en este nivel. Una manifestación del uso de esta relación se puede tener cuando el estudiante considera conjuntamente la información proporcionada por dos elementos matemáticos, el cambio en el crecimiento de f , y el hecho de que se mantenga la convexidad, para inferir que en x =a hay un punto anguloso.

- el contrarrecíproco [(A→B) ↔(⌉B → ⌉A)]

este tipo de relación puede darse cuando el estudiante usa el elemento matemático: **si f derivable en (a,b) → f continua en (a, b)**, en forma de **contrarrecíproco** : **si f no es continua en (a, b)→ f no es derivable en (a, b)**

- la equivalencia lógica entre elementos matemáticos((A↔B) ↔[A→B ∧ B →A])

una manifestación de **equivalencia lógica** la podemos tener en el uso de: sea f derivable en (a, b), **f crece en (a, b) ↔ f ’>0 en (a, b)**. Sin embargo, hay individuos que son capaces de utilizar la implicación en un sentido: **si f ’>0 en (a, b) → f crece en (a, b)** pero no en sentido contrario: sea f derivable en (a, b) **si f crece en (a, b) → f ’>0 en (a, b)**.

2.- Usar elementos matemáticos en ámbitos de aplicación diversos.

Por ejemplo, cuando se utiliza el significado de la primera derivada dado por f ’(a) = pendiente de la recta tangente a f en x =a, en el contexto de determinar el signo de f ’ para el crecimiento y decrecimiento de f.

3.- No tener síntesis de los modos de representación: tener dificultades en manejar los mismos elementos matemáticos en los modos gráfico y analítico.

Una característica del nivel INTER es mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos utilizados dependiendo de si la información se muestra en modo gráfico o en modo analítico. Por ejemplo, la relación lógica entre los elementos matemáticos analíticos globales:

Sea f derivable en (a, b)

- **si f ´´ > 0 en (a, b) → f es convexa en (a, b), y si f ’’<0 en (a, b) → f es cóncava en (a, b)**
- **si f ´ >0 en (a, b) → f es creciente en (a, b), y si f ´<0 en (a, b) → f es decreciente**

El estudiante puede establecer relaciones entre estos elementos matemáticos (**“y lógica”**) en una tarea dada en modo gráfico, y deducir a partir del gráfico de f ’ donde se encuentran los máximos y los mínimos de f (a través de los cambios en el crecimiento de f) o los puntos de inflexión de f (a través de los cambios de concavidad de f) y sin embargo no ser capaz de establecer el mismo tipo de relación y entre los mismos elementos matemáticos cuando la tarea se le ha presentado a través de condiciones analíticas de f ’, o viceversa, establecer relaciones entre los elementos matemáticos cuando la tarea le presenta condiciones analíticas de f ’, y no ser capaz de establecerlas cuando la tarea le presenta el gráfico de f ’.

- EL NIVEL TRANS está caracterizado por:

En este nivel el individuo ha construido una estructura subyacente a través de la cual las relaciones descubiertas (construidas) en el nivel INTER se comprenden dando coherencia al esquema. Una función importante de la coherencia es su uso, es decir, decidir cuál es el ámbito de aplicación del esquema y cual no.

Este nivel está caracterizado por:

- **posibilidad de establecer cualquier relación lógica ("y lógica", contrarrecíproco, equivalencia lógica) para realizar las inferencias**
- **poder hacer uso de los significados implícitos a los elementos matemáticos**
- **demostrar síntesis en los modos de representación pudiendo hacer inferencias con independencia del modo de representación utilizado.**

Únicamente viendo el comportamiento global de los individuos en las diferentes tareas del cuestionario podremos decir si un estudiante se encuentra en el nivel TRANS. Así, podremos decir que tenemos una manifestación de este nivel, cuando un estudiante a lo largo de todas las tareas del cuestionario ha establecido relaciones lógicas ("**y lógica**", **contrarrecíproco**, **equivalencia lógica**) entre los elementos matemáticos y ha utilizado de forma correcta los elementos necesarios en la resolución de las distintas tareas del mismo, independientemente del modo de representación (analítico o gráfico). Además, tenemos evidencia empírica de que el estudiante puede reconstruir relaciones entre elementos matemáticos (por ejemplo, puede reconstruir el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente a la función a partir del gráfico de f', indicando que el signo de f' proporciona información sobre el crecimiento de f a través de considerar f' como la pendiente de la tangente a f, y por tanto si la pendiente es positiva, f es creciente).

En algunas ocasiones podemos considerar que se ha **tematizado el esquema**, esto sucede cuando tengamos manifestaciones de que el estudiante considera f ’como función, por ejemplo cuando es capaz de aplicar las mismas ideas / relaciones que aplica a la función derivada de f (f ’), a la función derivada de f ’ (f ’’). Así, puede reconstruir la relación entre el crecimiento de f ’ y la concavidad de f, desde el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica.

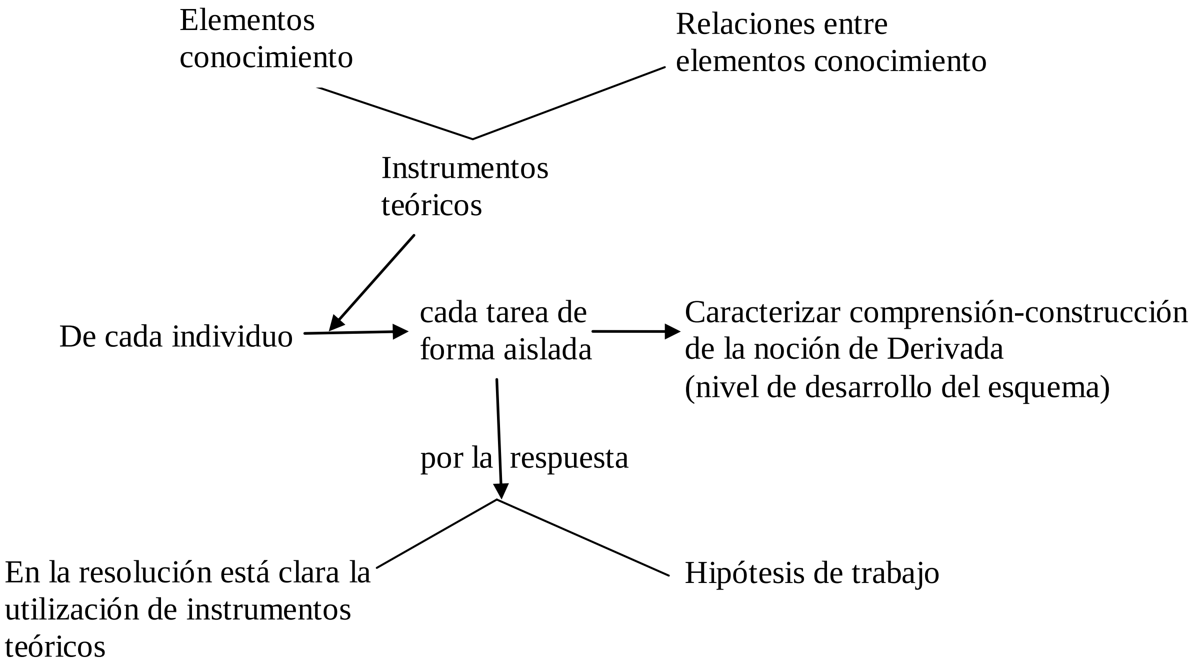
Para poder hacer operativo el análisis de las respuestas de los estudiantes a los problemas, y luego ver globalmente el comportamiento del estudiante en todo el cuestionario, para poder refinar la caracterización del esquema inicialmente considerado ha sido necesario desarrollar un proceso de análisis con dos fases que describimos a continuación.

3.3.2. Fases del análisis

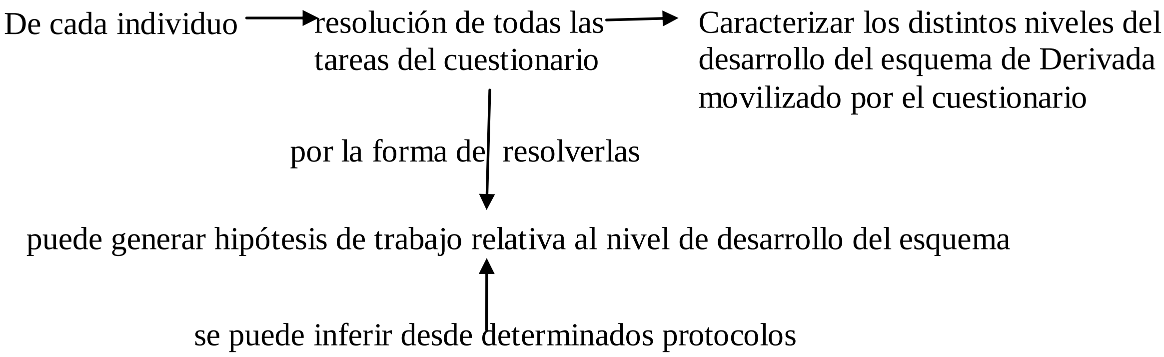
El procedimiento de análisis surge desde la lectura de diversos trabajos que hicieron que nos planteáramos el análisis del cuestionario/entrevista de cada individuo a través de cada una de las tareas mirada de forma aislada. Este primer análisis lo hicimos con un grupo reducido de respuestas procedentes de los alumnos de la Licenciatura de Matemáticas. Ello nos permitió observar que un análisis global de todas las tareas de un mismo individuo nos daba una información más completa de la comprensión del estudiante, pues nos permitía clarificar el nivel de desarrollo del esquema de derivada movilizado por el cuestionario, perfilar o ampliar la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema, e identificar inconsistencias en el desarrollo del esquema inferido por la forma en que las tareas eran resueltas por un mismo alumno. Por ejemplo, las respuestas de un alumno nos podían indicar que estaba en diferentes niveles en distintas tareas, y este hecho podía deberse a las particularidades de las tareas, y/o aportarnos información para caracterizar el cuestionario. Esto nos llevó a una segunda fase en el esquema de análisis que ya la aplicamos a todos las respuestas.

El procedimiento de análisis se describe en el siguiente gráfico:

FASE 1



FASE 2



Cuadro 3.10. Fases del esquema de análisis

En lo que sigue, comentaremos las dos fases que hemos desarrollado para el análisis de las respuestas a los problemas:

FASE 1.- se analiza de cada individuo, cada tarea de forma aislada, a través de los instrumentos teóricos (elementos matemáticos y sus relaciones) que nos ayudarán a caracterizar la comprensión /construcción del objeto por parte de cada sujeto (nivel de desarrollo del esquema del sujeto).

A veces la respuesta a la tarea nos da información clara de los elementos matemáticos que utiliza el individuo y cómo los utiliza (o relaciona). Este hecho lo podemos observar en el siguiente protocolo, correspondiente a la tarea 2 del cuestionario de Licenciatura de Matemáticas:

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x<1 \\ bx^2 + 1 & x\geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b para que f sea derivable en x =1.

[TAREA 2- Licenciatura]

En la resolución de esta tarea, el estudiante correspondiente al cuestionario 13 responde:

sean iguales.

PROCESO DE RESOLUCIÓN

Lo primero que debemos hacer es estudiar la continuidad, ya que así si la función no es continua entonces no es derivable.

Para que una función sea derivable en un punto tiene que ocurrir lo siguiente:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

y ambos límites existan y sean finitos

JUSTIFICA TU RESPUESTA

En $(-\infty, 1)$, $f(x) = 2x^3+2x+a$ que es $\begin{cases}\text{continua}\\ \text{derivable}\end{cases}$

En $(1, +\infty)$, $f(x) = bx^2+1$ que es $\begin{cases}\text{continua}\\ \text{derivable}\end{cases}$

Únicamente debemos estudiar la derivabilidad en $x=1$ $\quad f(1) = b+1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{bx^2+1-b-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{bx^2-b}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{b(x^2-1)}{x-1} = b \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2b$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3+2x+a-b-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3+2x+a-a-3-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3+2x-4}{x-1} = \frac{0}{0} \text{ indet.}$$

$$L'H \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{6x^2+2}{1} = 8 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

PROCESO DE RESOLUCIÓN

Continuidad en $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} bx^2+1 = b+1 \qquad f(1) = b+1$$

$$\lim_{x\to 1^-} 2x^2+2x+a = 4+a$$

$$\Rightarrow b+1 = 4+a$$

$$\boxed{b=a+3}$$

hemos obtenido que $b=4$

$$\Rightarrow \boxed{a=1}$$

Para que la función sea

JUSTIFICA TU RESPUESTA

Aunque está un poco desordenado, la idea ha sido la siguiente: He estudiado la continuidad y he obtenido un valor $\boxed{b=a+3}$ que es indispensable para que la función sea continua en $x=1$, ya que si $b\neq a+3$ $f(x)$ no sería continua en $x=1$ y por tanto tampoco sería derivable. Entonces al estudiar la derivabilidad hemos impuesto que $b=a+3$ y así obtenemos el valor de a y b para el cual $f(x)$ es derivable en $x=1$.

(C13-L, Tarea 2)

Establece relación de “**y lógica**” entre los dos elementos matemáticos analíticos global y puntual que utiliza:

1) si f es derivable en (a, b) → f es continua en (a, b)

2) que existan y sean iguales los límites cuando x tiende a 1 por la izquierda y por la derecha del cociente incremental

el elemento matemático analítico global 1) lo utiliza en forma de **contrarrecíproco**: si f no es continua en (a, b) →f no es derivable en (a, b):

"si b≠ a + 3, f no sería continua y por tanto tampoco sería derivable".

> *C13-L: primero estudiamos la continuidad, pues si no es continua la función no es derivable*
>
> *E: para estudiar la derivabilidad*
>
> *C13-L: aplicamos la definición y estudiamos el límite por la izquierda y por la derecha, y le imponemos que sean iguales.*
>
> (C13-L, Tarea 2)

(usa la idea de derivada como límite del cociente incremental).

La relación lógica (**"y lógica"**) entre estos dos elementos matemáticos, uno de los cuales utiliza en forma de **contrarrecíproco**, lleva a C13-L a la correcta resolución de la tarea

Otras veces, en el análisis realizado la información no es nítida y hay que hacer una inferencia, en estas circunstancias realizamos una **hipótesis de trabajo** sobre el desarrollo del esquema que deberá ser confirmada mediante el análisis de la Fase 2. La hipótesis de trabajo es una segunda inferencia del nivel de desarrollo del esquema de derivada en este estudiante realizada desde las respuestas a una tarea. Además, nos permitía identificar de manera operativa nuevas características de un nivel determinado del desarrollo de un esquema.

Todas las resoluciones de las tareas de cada individuo fueron analizadas de manera independiente. Desde el análisis de cada tarea y de cada individuo, se hacía una primera inferencia sobre lo que parecía indicar dicha respuesta de la "comprensión" del individuo.

FASE 2.- se analiza cómo un individuo ha resuelto todas las tareas del cuestionario. Esta fase nos ayudó a caracterizar los distintos niveles del desarrollo del esquema de derivada movilizado por el cuestionario.

En esta fase se tuvo en cuenta que las tareas, por la forma en que las habían resuelto los individuos en algunos casos, podían generar una **hipótesis de trabajo** relativa al nivel de desarrollo del esquema, que se podía inferir desde determinados protocolos. Esta hipótesis de trabajo de un individuo ante una tarea, era comprobada a lo largo de las diferentes respuestas dadas por ese individuo a las distintas tareas.

Esta segunda fase de análisis permitió:

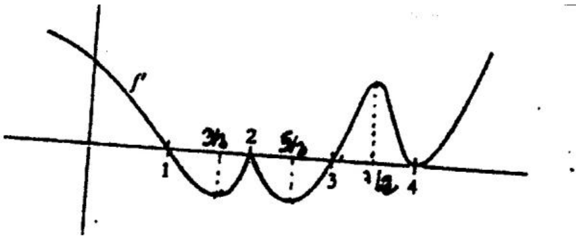
- clarificar el nivel de desarrollo del esquema de derivada movilizado por el cuestionario, puesto de manifiesto por cada individuo en la resolución de cada tarea,

- identificar inconsistencias en el desarrollo del esquema inferido por la forma en que la tarea era resuelta.

- perfilar o ampliar la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema.

Veamos este proceso analítico a través del análisis de un cuestionario de Licenciatura. En el cuestionario 10, desde la Fase 1 del procedimiento de análisis de dicho cuestionario, teníamos analizado las diferentes tareas del cuestionario de forma aislada, pero al mirar cómo el individuo había resuelto todas las tareas del cuestionario para realizar un análisis global, se observó que en la tarea 1:

La figura muestra la gráfica de la derivada de f ', esboza las posibles gráficas de f.



[TAREA 1- Licenciatura]

El estudiante usa la **"y lógica"** entre elementos matemáticos analíticos puntual y global:

> **- sea f derivable en (a, b), si f '>0 en (a, b) →f crece en (a, b) y si f '<0 en (a, b)→ f decrece en (a, b)**
>
> **- f ' (a)=0 →f tiene un máximo, un mínimo o un P.I. en x =a**

permitiéndole decidir que en x = 1 había un máximo de f:

> *Cl0-L: donde la derivada es cero hay máximos o mínimos o puntos de inflexión*
>
> *E: escribes en x = 1 máximo, x =* 2 *P.I, x =* 3 *mínimo y x =* 4 *P.I, ¿ por qué x = y x =* 4 *son P.I?*
>
> *C10-L: por ser f '=* 0 *en esos puntos, la recta tangente en ese punto es paralela al eje de las x*
>
> (usa el elemento matemático gráfico puntual correspondiente a la interpretación geométrica de la derivada)
>
> *E: ¿ cómo has diferenciado los máximos, los mínimos y los P.I ?, porque en todos es f '=0*
>
> *C10-L: si, eso es que no me acuerdo, viendo el signo de la derivada*
>
> *E: Por ejemplo en x =* 1
>
> *C10-L: desde menos infinito hasta* 1*, la función es creciente y a partir de* 1 *es decreciente, hay un máximo*
>
> (C10-L, Tarea 1)

Pero mostró dificultades en los puntos de inflexión. Así, no supo explicar por qué x =2 era punto de inflexión, y sin embargo consideró que x =1.5, x =2.5 y x =3.5 eran puntos en los que cambiaba la concavidad de f, a través del significado de la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la gráfica en dicho punto, relación que conocía entre (f y f '), y que aplicó en otro contexto (f ', f ''), pues usó esta idea para el estudio de f '', dado el gráfico de f ' , en los puntos x =1.5, x =2.5 y x =3.5, aunque no los relacionó con los puntos de inflexión:

E: ¿en x = 2 *P.I?*

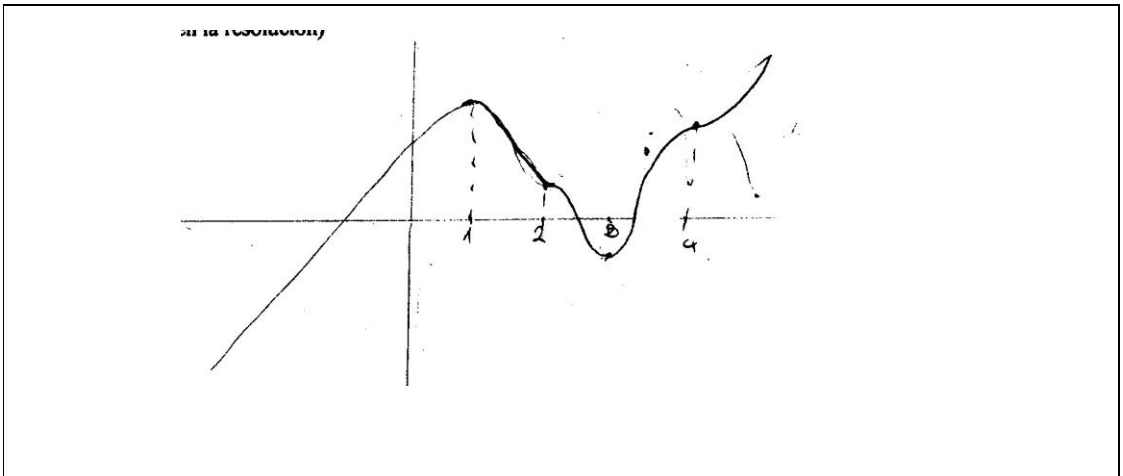
Cl0-L: porque f ' = 0

E: en los puntos x = 1.5, *x* = 2.5, *x* = 3.5, *¿qué sucede en f?*

C10-L: en la función habría un cambio de concavidad, se ve por f '', estudiando el signo

(C10-L, Tarea 1)

Esbozó un gráfico correcto de f



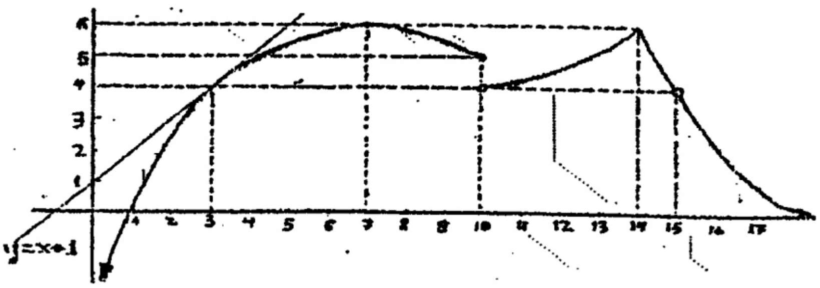
(C10-L, Tarea 1)

Del análisis de la tarea 1 del cuestionario 10 se generó una hipótesis de trabajo:

Hipótesis de trabajo: Utiliza el significado de la primera derivada dado por f '(a) = pendiente de la recta tangente de f en x =a, en el contexto de determinar el signo del crecimiento y decrecimiento de f, y en f ’’ para determinar los cambios de concavidad.

La evidencia de esta hipótesis (C10-L hace uso de f ’(a) como pendiente de la recta tangente a la curva en x =a para obtener el signo de f ’’), se obtuvo del análisis de la tarea 3:

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) Obtener los valores de f ’(3), f ’(7), f ’(10), f ’(14) y f ’(15). Explicando cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f ’. Explica cómo lo has obtenido.

[TAREA 3- Licenciatura]

Al explicar el estudiante en esta tarea que sucede con f ’(14) comentó:

E: ¿ qué sucede en f ’ (l4)?

C *10-L: como la función tiene un pico, entonces no tiene derivada porque los límites laterales por la izquierda y por la derecha no coinciden, entonces no sería derivable*

E: ¿ podrías explicarme un poco lo de los límites laterales?

C *10-L: por la izquierda, la pendiente de la recta es positiva, y por la derecha, la pendiente de la recta es negativa*

(C10-L, Tarea 3)

Utilizó el elemento matemático gráfico puntual f ’(a)=pendiente de la recta tangente a la curva en x =a para explicar por qué no existía f ’(14) con lo cual quedó confirmada la hipótesis de trabajo generada en la tarea 1.

La Fase 2 tiene como objetivo confirmar o reformular las hipótesis de trabajo, para ello miramos las respuestas de un mismo individuo a todas las tareas. Así, siguiendo con el análisis del cuestionario 10 de Licenciatura (C10-L) en el apartado B) de esta tarea surgió la segunda hipótesis de trabajo, pues mientras en la tarea 1 había usado de forma correcta el elemento matemático analítico global:

> **- si $f' > 0$ en (a, b) $\rightarrow$ f crece en (a, b), y si $f' < 0$ en (a, b) $\rightarrow$ f decrece en (a, b)**

en la resolución de este apartado podía haber hecho uso del elemento de conocimiento global:

> **- sea f derivable en (a, b), si f crece en (a, b) $\rightarrow$ $f' > 0$ en (a, b), y si f decrece en (a, b) $\rightarrow$ $f' < 0$ en (a, b)**

y sin embargo no hizo uso de él, no tenemos evidencia de por qué no lo hizo ya que en la entrevista tan sólo comentó:

> *E: ¿ y el apartado B), la gráfica de la derivada?*
>
> *C10-L: me puse con otra cosa y no...*
>
> *E: el hecho de que en el enunciado se comente que la función está formada por ramas de parábolas, ¿ te dice algo de f ’* ?
>
> *C10-L: serían rectas la derivada, o algo así*
>
> *E: ¿ serías capaz de esbozarla?*
>
> *C10-L: no sé, no me lo he planteado.*
>
> (C10-L, Tarea 3)

Esto nos sirvió para tener en cuenta que el uso de algunas relaciones lógicas entre los elementos matemáticos presentan más dificultades que otra, pues mientras que C10-L a lo largo de las diferentes tareas del cuestionario había utilizado la relación de **“y lógica”** entre elementos matemáticos en varias ocasiones, sin embargo no había sucedido lo mismo con la relación de la **equivalencia lógica** entre otros elementos matemáticos. Todo ello nos permitió pensar que la relación de **equivalencia lógica** entre elementos matemáticos presenta dificultades en algunos niveles del desarrollo del esquema.

Esta Fase 2 del procedimiento de análisis también permitió identificar algunas características, como por ejemplo la manifestación de diferentes niveles de desarrollo del esquema de derivada en las distintas tareas, según los modos de representación utilizados (analítico o gráfico), como veremos a continuación:

Así, continuando con el cuestionario C10, en la tarea 4, se presenta la información de manera analítica sobre la función f ’ y se pide esbozar la gráfica de f:

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

- *f es continua* - $f(-1) = 0$ - $f'(1)=f'(3)=f'(5)=0$ - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$

- *$f'(x) < 0$ cuando $1 < x < 5$ y cuando $x > 7$*

- *$f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < 1$ y cuando $5 < x < 7$*

- *$f''(x) < 0$ cuando $-2 < x < 3$* - *$f''(x) > 0$ cuando $3 < x < 7$ y cuando $x > 7$*

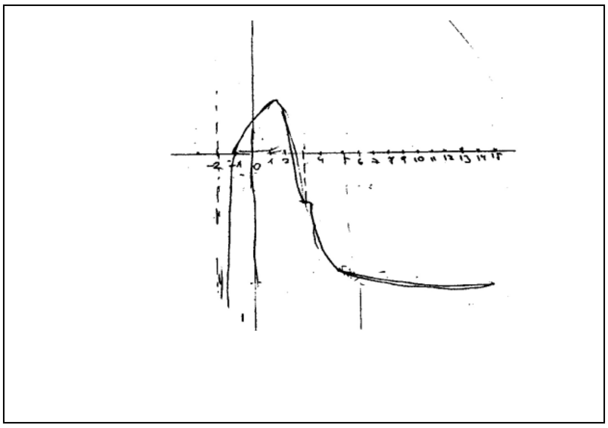
[TAREA 4- Licenciatura]

En esta tarea C10-L hizo uso de varios elementos matemáticos analíticos globales:

Sea f derivable en (a, b)

> **- si f ´´ > 0 en (a, b) → f es convexa en (a, b), y si f ’’<0 en (a, b) → f es cóncava en (a, b)**
>
> **- si f ´ >0 en (a, b) → f es creciente en (a, b), y si f ´<0 en (a, b) → f es decreciente**

pero no estableció relaciones lógicas (**“y lógica”**) entre estos elementos matemáticos de forma correcta, como había hecho en la tarea 1 para encontrar los máximos, mínimos (a través de los cambios en el crecimiento de f) y los puntos de inflexión (a través de los cambios de concavidad de f), y esbozó un gráfico incorrecto de f



(C10-L, Tarea 4)

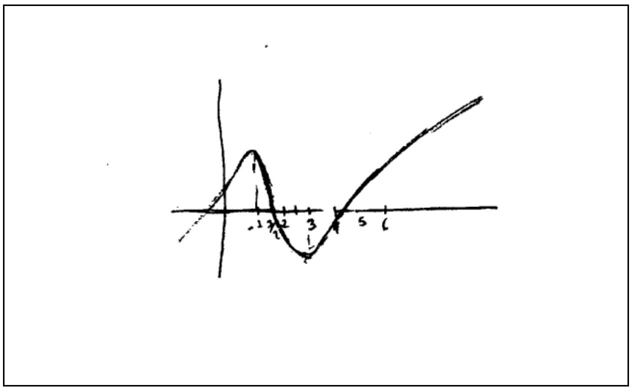
Luego hemos observado que C10-L estableció relaciones entre elementos de conocimiento (**"y lógica"**) de forma correcta en la tarea 1, tarea dada en modo gráfico, y sin embargo no ha sido capaz de establecer el mismo tipo de relaciones y entre los mismos elementos matemáticos cuando la tarea se le ha dado en modo analítico (tarea 4). Esto permitió generar una Hipótesis de trabajo relativo a los resultados de la investigación que debería ser comprobada luego con el análisis de los otros cuestionarios. Así, este proceso nos permitía identificar "características" (Hipótesis de trabajo) del desarrollo del esquema de derivada, independiente de alumnos particulares.

A través de esta FASE del procedimiento de análisis, también se observó que había estudiantes que mostraban dificultades para establecer relaciones (**"y lógica"**) entre elementos matemáticos cuando la tarea le presentaba la información en modo gráfico, mientras eran capaces de establecer relaciones entre los elementos matemáticos de forma correcta cuando la tarea venía dada en modo analítico. Veámoslo a través de la Fase 2 del procedimiento de análisis del cuestionario 11 de la Licenciatura de Matemáticas:

En la tarea 1 observamos que utilizó el elemento matemático analítico global:

- si f ’>0 en (a, b) → f crece en (a, b), y si f ’<0 en (a, b) → f decrece en (a, b)

e identifica los cambios de f de creciente a decreciente en x =1 como máximo y de decreciente a creciente en x =3 como mínimo. Pero esbozó un gráfico incorrecto de f



(C11-L, Tarea 1)

en el que observamos que no identifica los cambios de concavidad de f en (1,3) y (3, +∞). Por tanto, no ha sabido reconstruir la relación entre el crecimiento de f ’ y la concavidad de f. Esto generó una hipótesis de trabajo:

Hipótesis de trabajo: ¿existe algún contexto en los diferentes problemas que muestra el que C11-L haga uso de esta relación?

En la tarea 3, C11-L usó el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente a la función para determinar que en x =14 no existía derivada ya que hay un pico de f.

El hecho de que sin embargo no supiera esbozar la forma de la gráfica de f ’ en el apartado B) de la tarea en los intervalos (10,14) (14,18) podía seguir aportando evidencia de que no usó los elementos matemáticos de la hipótesis de trabajo (si f es cóncava hacia arriba entonces la derivada es creciente). Tampoco parecía ser capaz de reconstruir esta idea usando el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva (ya que en esta tarea tenemos evidencia de que tiene este significado de derivada).

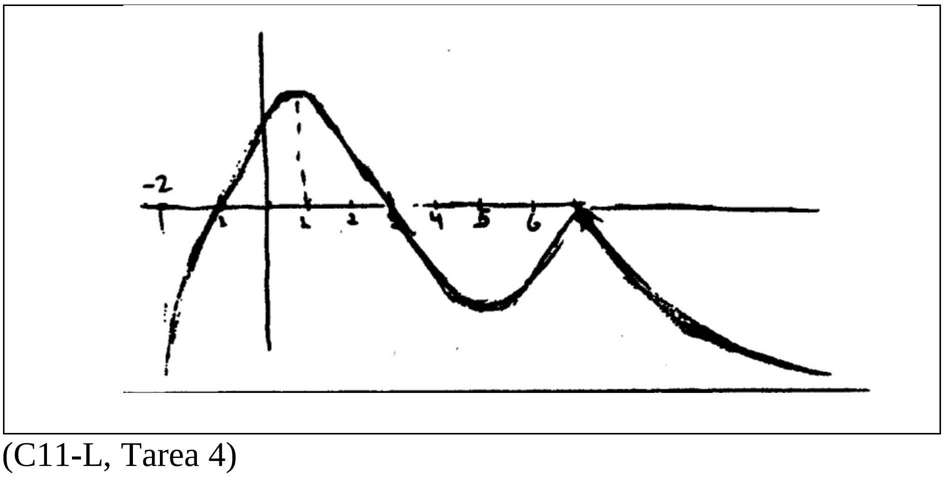
Esto posibilitó decir que esta forma de resolver la tarea podía ser una manifestación empírica de que el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de f es de carácter puntual. Solo en el caso de que C11-L pudiera ver la derivada como función, es decir que en cada punto de la gráfica de f puedo obtener una recta tangente sería capaz de reconstruir el significado del elemento matemático analítico global: **Sea f derivable en (a,b), si f cóncava en (a, b) $\rightarrow$ f ´ decreciente en (a, b), [y si f convexa en (a, b) $\rightarrow$ f ´ creciente en (a, b)]**

Sin embargo en la tarea 4 donde se le presentaba la información en modo analítico, C11-L estableció relación lógica (“**y lógica**”) entre los elementos matemáticos analíticos globales que usó:

- si f ´´ > 0 en (a, b) $\rightarrow$ f es convexa, y si f ´´ < 0 en (a, b) $\rightarrow$ f es cóncava en (a, b)

- si f ´ >0 en (a, b) $\rightarrow$ f es creciente en (a, b), y si f ´<0 en (a, b) $\rightarrow$ f es decreciente en (a, b)

y esto le permitió esbozar un gráfico correcto de f, reconociendo x =7 como un pico donde no existía f ’



(C11-L, Tarea 4)

E: ¿cómo has usado las condiciones que te da el enunciado de la tarea?
C11-L: Pasa por el punto (-1,0).
En 1,3,5 tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión
f decrece entre 1 y 5 y a partir de 7
f crece entre -2 y 1 y entre 5 y 7
con f ’’ se estudia la concavidad y la convexidad
en el 3 hay un punto de inflexión, ya que entre -2 y 3 es cóncava y luego pasa a convexa
E: ¿y en el 7?
C11-L: Entre 3 y 7 es cóncava y creciente. Luego sigue siendo cóncava pero pasa a ser decreciente. Luego no existe f ' (7). Habría un pico.
(C11-L, Tarea 4)

C11- L ha mostrado que tiene dificultades en manejar la misma información si procede del modo gráfico o del modo analítico, ya que mientras que no ha tenido dificultades cuando la información se le ha presentado en modo analítico (tarea 4), no sucedió lo mismo cuando la información la tenía en modo gráfico. Evidencia contraria de lo que hemos visto que sucedía en C10-L.

Este hecho nos permitió identificar una de las características del desarrollo del esquema de Derivada, la manifestación de diferentes niveles de desarrollo del esquema en distintas tareas, según los modos de representación (analítico o gráfico).

Comprobamos que las características de cada nivel no se conquistan de inmediato sino que existe una construcción progresiva, atendiendo a dos aspectos en relación al tipo de relaciones lógicas y a los elementos matemáticos utilizados en cada momento.

En esta segunda fase analítica, el hecho de aceptar o rechazar las hipótesis de trabajo, nos ha permitido tener más características de cada nivel de desarrollo del esquema y como se va produciendo la transición de un nivel a otro. Únicamente al final de la Fase 2 de análisis y viendo el comportamiento global de los individuos en las diferentes tareas del cuestionario podremos decir si un estudiante se encuentra en el nivel TRANS. Desde este punto de vista por el análisis de la respuesta a un problema por parte de un alumno a lo máximo que podemos llegar es a manifestaciones de nivel INTER.

Estas dos fases del análisis nos han permitido por un lado asignar a cada individuo en cada muestra (1º Bachillerato, 2º Bachillerato, 1º Licenciatura) a un nivel de desarrollo del esquema de Derivada. Y por otro lado, nos ha permitido refinar la caracterización del desarrollo del esquema de Derivada a través de subniveles, y caracterizar la tematización del esquema.

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 4: Resultados

En este capitulo comenzaremos caracterizando los niveles de desarrollo del esquema de Derivada en las distintas poblaciones consideradas según las relaciones lógicas (que se establecen entre los elementos matemáticos) y los elementos matemáticos utilizados por los estudiantes en las diferentes tareas del cuestionario.

En el análisis de los cuestionarios en su segunda fase (análisis global) observamos que en el nivel INTRA del desarrollo del esquema, había individuos que además de no establecer ninguna relación lógica entre los elementos matemáticos, no utilizaban ningún elemento matemático de forma correcta a lo largo de todo el cuestionario, otros usaban algunos elementos matemáticos (pocos) de forma correcta y aislada (sin establecer relaciones lógicas entre ellos) a lo largo de todo el cuestionario, y generalmente vinculados a un modo de representación. En este momento comenzamos a plantearnos que debido a que la construcción del esquema tiene carácter progresivo, dentro del nivel INTRA del desarrollo del esquema, debemos considerar subniveles.

Lo mismo que hemos observado en el nivel INTRA vimos que sucedía en el nivel INTER. El individuo empieza a establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, manifestándose los primeros esbozos de relación lógica a través de la conjunción lógica, dándose de forma aislada a lo largo de todo el cuestionario, y hace uso de los elementos matemáticos de forma correcta. Otros individuos, sin embargo, muestran más riquezas en las relaciones lógicas (conjunción lógica, contrarrecíproco, e incluso alguna equivalencia lógica), aunque no podemos considerarlos en el nivel TRANS, pues muestran dificultades en tener operativo algún elemento de conocimiento necesario en la resolución de alguna tarea en un momento determinado, o en el uso de alguna relación lógica (equivalencia lógica) e influencia en los modos de representación (gráfico o analítico). Todo esto nos ha llevado a finalizar este capítulo con una sección en el que caracterizaremos diferentes subniveles del desarrollo del esquema de Derivada.

4.1. Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de derivada en 1º Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

Los alumnos que cursan 1º de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, son estudiantes que han trabajado por primera vez la noción de Derivada, lo que conlleva ciertas limitaciones propias del currículum a la hora del desarrollo del esquema de Derivada. A estos alumnos se les ha introducido la noción de derivada en un punto (f ’(a)) y comienzan a trabajar con el operador derivada, aplicándolo a reglas de derivación, por lo que tienen limitaciones en el uso de elementos matemáticos, y por tanto de relaciones lógicas entre ellos (sólo usan la conjunción lógica o “y lógica” debido a que el tipo de elementos matemáticos que pueden utilizar no conlleva una implicación lógica en el sentido de una "condición necesaria").

El cuestionario que ellos trabajaron (ver página 95, capítulo 3) constaba de dos tareas relativas a la noción de derivada en un punto como límite del cociente incremental (Tarea 1), y como pendiente de la recta tangente a la curva (Tarea 2), pero no exigían establecer relaciones lógicas entre estos elementos. En las otras dos tareas del cuestionario, en modo gráfico (Tarea 3) y en modo analítico (Tarea 4), era necesario usar varios elementos matemáticos y establecer relaciones a través de la conjunción lógica para su resolución.

Como veremos a continuación en cuanto a relaciones lógicas sólo se observó el uso de la conjunción lógica entre elementos matemáticos analíticos puntuales o globales de forma aislada en algunos estudiantes que se encuentran en la fase inicial del nivel INTER del desarrollo del esquema. se observó el uso de pocos elementos matemáticos analíticos y gráficos (puntuales y globales), entre ellos sólo dos globales: el operador derivada, y el signo de la primera derivada en relación con el crecimiento de la función. El cuadro siguiente recoge los elementos matemáticos y las relaciones lógicas usadas por los estudiantes tanto en el nivel INTRA como en el INTER, y muestra el carácter progresivo del desarrollo de un concepto a través de la identificación de las relaciones establecidas entre los elementos que se usan:

NIVEL	RELACIONES LÓGICAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS[1]
INTRA	**- No utiliza ninguna relación lógica.**	- RECTA TANGENTE A LA CURVA EN x=a – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA EN UN PUNTO (x =a) (USO INCORRECTO) (G.P.) - DERIVADA EN UN PUNTO COMO LÍMITE DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA (A.P.) - TASA DE VARIACIÓN MEDIA(A.G.) - OPERADOR DERIVADA: REGLAS DE DERIVACIÓN(A.G.) - INVERSO DEL OPERADOR DERIVADA: INTEGRACIÓN(A. G.)
INTER	**- "y lógica" (o conjunción lógica) entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntales y/o globales (generalmente en el mismo modo: analítico).**	- RECTA TANGENTE A LA CURVA EN x=a – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA EN UN PUNTO (x =a) (G.P.) - DERIVADA EN UN PUNTO COMO LÍMITE DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA: se usa como proceso, aproximación a través de las tablas de valores mediante la aplicación de la igualdad de los límites laterales del cociente incremental para que exista f '(a) (A.P.) - INVERSO OPERADOR DERIVADA: f ' RECTA → f PARÁBOLA (G.G.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (A.G.)
	- Esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.	- INVERSO OPERADOR DERIVADA: f ' RECTA → f PARÁBOLA (G.G.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (A.G.)

[1] Al final de cada elemento aparece dos letras mayúsculas que indican: la primera letra si se trata de un elemento Gráfico (G) o Analítico (A), y la segunda letra si se trata de un elemento Puntual (P) o Global (G).
Los elementos matemáticos que se utilizan en el nivel INTER son además de los que figuran en dicho nivel, los que figuran en el nivel INTRA.

Cuadro 4.1. Relaciones lógicas y elementos matemáticos que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de derivada en 1º Bachillerato

Veámoslo con detalle desarrollado por niveles:

4.1.1. Nivel INTRA

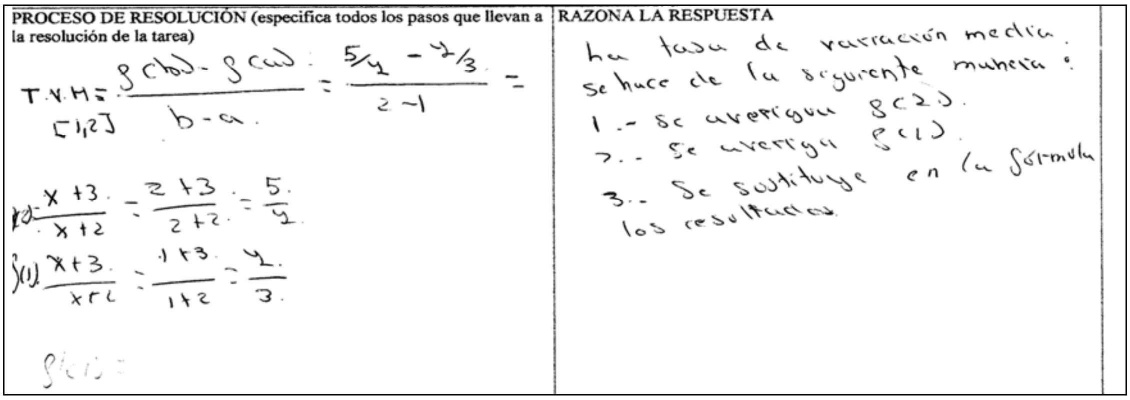
Este nivel se caracteriza porque no tenemos manifestación de que los estudiantes establezcan relaciones entre los elementos matemáticos analíticos y gráficos (puntuales y globales) que utilizan. Tan sólo "recuerdan" (en el sentido de tener memorizados) elementos matemáticos o procedimientos aprendidos en la instrucción previa que utilizan en la resolución de las tareas. Los estudiantes usan de forma aislada algunos elementos matemáticos que no siempre son recordados de forma correcta. Así, el estudiante C38-1B usa el elemento matemático gráfico puntual: **f '(a) = pendiente de la recta tangente a la curva en x=a,** en la tarea 2 para decidir el valor de f '(2), observándose que dicho elemento lo recuerda como f '(a) = la recta tangente a la curva en x=a:

E: ¿y f '(2)?
C38-1B: sería igual a la tangente
E: ¿qué quieres decir?
C38-1B: a 2x-1[se observó el uso incorrecto del elemento matemático comentado al contestar que f '(2) sería igual a esta expresión]
E: ¿por qué?
C38-1B: la derivada es la tangente en el punto

(C38-1B, Tarea 2)

Este es el único elemento matemático gráfico usado por los estudiantes de 1º Bachillerato en el nivel INTRA, el resto de los elementos matemáticos utilizado por dichos estudiantes son analíticos con carácter puntual o global.

En este nivel se "recuerdan" procedimientos aprendidos en la instrucción previa, así en el siguiente protocolo, correspondiente a la tarea 1, tenemos una manifestación de recordar el elemento de conocimiento relativo a la T.V.M. y recordar un procedimiento en el que especifica los pasos seguidos:



PROCESO DE RESOLUCIÓN (especifica todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea)	RAZONA LA RESPUESTA
$T.V.M_{[1,2]} = \frac{g(b) - g(a)}{b-a} = \frac{5/4 - 4/3}{2-1} =$ $g(2) = \frac{x+3}{x+2} = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$ $g(1) = \frac{x+3}{x+2} = \frac{1+3}{1+2} = \frac{4}{3}$ $g(1) =$	La tasa de variación media se hace de la siguiente manera: 1.- Se averigua g(2). 2.- Se averigua g(1). 3.- Se sustituye en la fórmula los resultados.

(C12-1B, Tarea 1)

4.1.2. Nivel INTER

Los estudiantes en este nivel empiezan a esbozar relaciones lógicas (“**y lógica”**) entre los elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntuales o globales, siendo la “**y lógica**” o conjunción lógica la única que se manifiesta en los alumnos de 1º Bachillerato. Veámoslo en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 3, en el que a través de la relación lógica (“**y lógica**”) entre los elementos matemáticos analíticos globales que utiliza:

- **operador derivada**: si f(x) constante → f ’(x) =0

y

- **condición suficiente para que f sea una función creciente o decreciente:** Sea f derivable en (a, b), si f ’>0 en (a, b) → f crece en (a, b), y si f ’<0 en (a,b) → f decrece en (a, b)

Permite a C35-1B responder la tarea de forma correcta, ya que el uso de los dos elementos de forma conjunta (“y lógica”) le ha permitido inferir cuál es el gráfico solución de la tarea:

> *E: me dices directamente que es la gráfica B ¿me podrías explicar cómo lo deduces?*
> *C35-1B: es que no sé, yo empecé a pensar y me parecía que era esa*
> *E: ¿en qué pensaste? ¿me lo puedes razonar?*
> *C35-1B: la gráfica C no puede ser porque la derivada sería 0, y la gráfica A tampoco puede ser porque la derivada vendría para abajo (la dibuja) porque de 0 para la izquierda aumenta y después disminuye.*

E: ¿entonces te has fijado en ...?
C35-1B: en si es positiva o negativa la derivada
E: ¿cómo?
C35-1B: si la derivada es positiva la función crece, y si la derivada es negativa la función decrece

(C35-1B, Tarea 3)

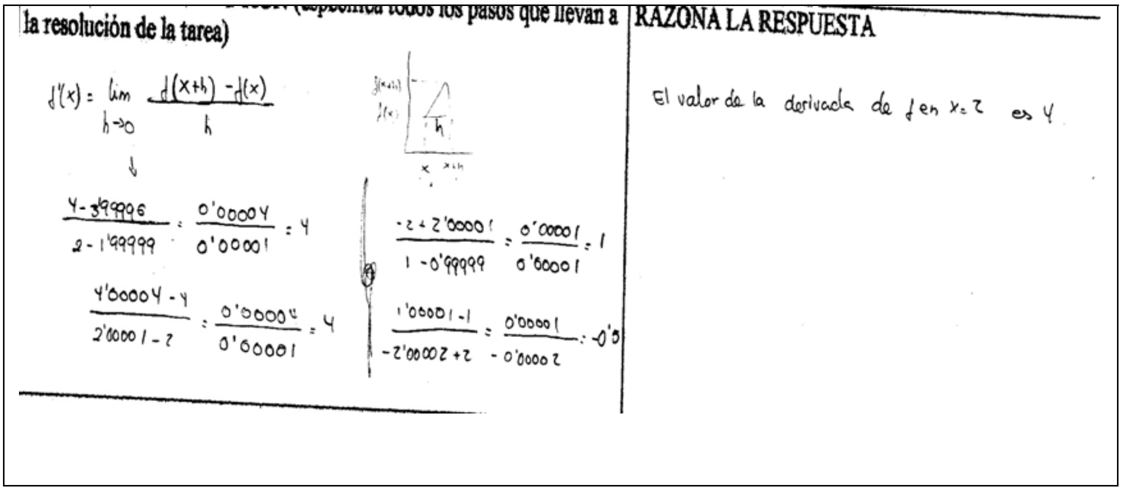
En este nivel los estudiantes empiezan a usar más elementos matemáticos analíticos y gráficos (puntuales y globales) de forma correcta que en el nivel anterior. Así, el elemento matemático gráfico puntual: **f ’(a) = pendiente de la recta tangente a la curva en x=a,** recordado en el nivel anterior de forma incorrecta, se usa en este nivel de forma correcta en la resolución de la tarea 2 para decidir el valor de f ’(2), como se observa en el siguiente protocolo:

E: escribes f ’(2) =2 ¿por qué?
C18-1ºB: porque coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva

(C18-1B, tarea 2)

Además algún elemento matemático analítico se usa apoyándose en una concepción como proceso. por ejemplo en la resolución de la tarea 4 el estudiante hace uso del elemento matemático analítico puntual: derivada en un punto como límite de la tasa de variación media **f ’(a)= Lim (f(x)-f(a))/(x-a) cuando (x→ a),** como proceso de aproximación a través de las tablas de valores, para ello aplica la igualdad de los límites laterales del cociente incremental para ver que existe f ’(a), este hecho se puede observar en el siguiente protocolo. Debemos aclarar que aunque comete un error al considerar el numerador y el denominador al contrario en la expresión del cociente incremetal en el cálculo del valor de f ’(1^+) donde obtiene –0.5 en lugar de –2 que es su valor, esto parece un despiste, pues es una expresión que usa en repetidas ocasiones en esta tarea y siempre lo hace de forma correcta, menos en esta ocasión, y el procedimiento seguido en la resolución de la tarea es correcto.

> *C18-1ºB: aplicando la definición de derivada, encontré que en x =2 la aproximación es 4*
> *E: ¿y en x =1?*
> *C18-1ºB: me dio 1 por un lado y por el otro –0,5*
> *E: y entonces, ¿es derivable?*
> *C18-1ºB: en x =2 coinciden. En x =1 no coinciden, entonces no será derivable*


todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea)

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\frac{4 - 3'99996}{2 - 1'99999} = \frac{0'00004}{0'00001} = 4$

$\frac{4'00004 - 4}{2'00001 - 2} = \frac{0'00004}{0'00001} = 4$

$\frac{-2 + 2'00001}{1 - 0'99999} = \frac{0'00001}{0'00001} = 1$

$\frac{1'00001 - 1}{-2'00002 + 2} = \frac{0'00001}{-0'00002} = -0'5$

RAZONA LA RESPUESTA

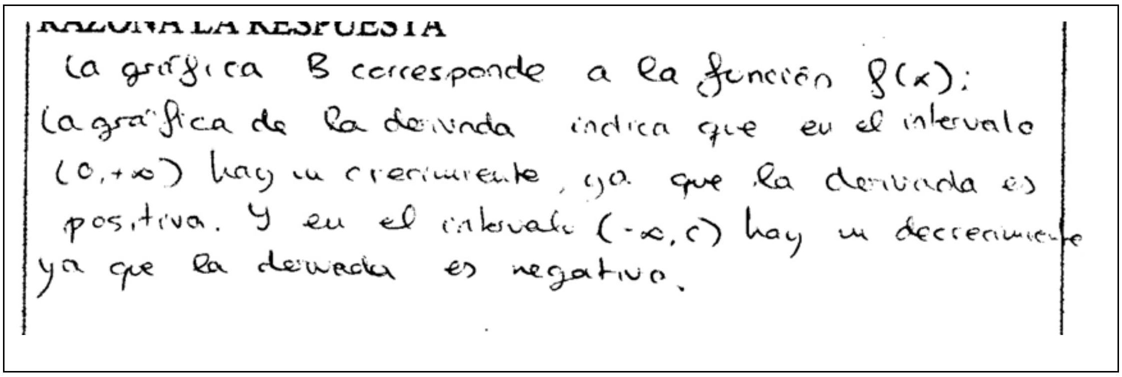
El valor de la derivada de f en x=2 es 4

(C18-1B, Tarea 4)

También en este nivel se pone de manifiesto los primeros esbozos de síntesis entre los modos de representación analítico y gráfico, a través de relación lógica ("**y lógica**") entre elementos matemáticos analítico y gráfico globales. Se observa este hecho en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 3, en el que para decidir cuál de los tres gráficos dados (A, B, C) se corresponde con el gráfico de f, a partir de la expresión analítica y gráfica de f ':

> *E: ¿ por qué la gráfica B?*
> *C42-1B: aquí tenemos la gráfica de una derivada, y en este caso de 0 a + infinito tenemos que la derivada es positiva, entonces hay un crecimiento en la función del cual es la derivada y desde – infinito hasta 0 la derivada está por debajo de 0 es negativa, hay un decrecimiento, y en el único que sucede esto es en el gráfico B.*
> *E: si no figuraran los tres gráficos en el enunciado, ¿cómo habrías esbozado el gráfico de f(x)? ¿con qué forma?*

C42-1B: igual, de parábola
E: ¿por qué?
C42-1B: porque la derivada es una recta


RAZONA LA RESPUESTA
La gráfica B corresponde a la función $f(x)$:
La gráfica de la derivada indica que en el intervalo $(0,+\infty)$ hay un crecimiento, ya que la derivada es positiva. Y en el intervalo $(-\infty,0)$ hay un decrecimiento ya que la derivada es negativo.

(C42-1B, Tarea 3)

Estos primeros esbozos de síntesis entre los modos de representación analítico y gráfico se producen de forma aislada en la resolución del cuestionario.

Globalmente, la distribución de los estudiantes de 1º Bachillerato se recoge en el cuadro siguiente:

NIVEL	ESTUDIANTES	TOTAL
INTRA	C11-1B, C12-1B, C31-1B, C38-1B, C47-1B, C5-1B, C13-1B, C36-1B,C27-1B	9
INTER	C18-1B, C24-1B, C8-1B, C21-1B, C6-1B, C35-1B, C2-1B, C42-1B, C14-1B, C17-1B, C23-1B	11

Cuadro 4.2. Estudiantes de 1º Bachillerato asignados a los diferentes niveles de desarrollo del esquema de Derivada

La asignación de los estudiantes a un determinado nivel muestra que existen diferencias en cada nivel debido al número de elementos matemáticos que los estudiantes son capaces de usar y de las relaciones establecidas.

Aunque globalmente las respuestas de los estudiantes indiquen que están en el nivel INTRA o INTER, dentro de cada nivel se identifican aspectos que podrían apuntar hacia una mejor diferenciación dentro de cada nivel.

En particular, en el grupo de estudiantes considerados en el nivel INTRA se aprecian diferencias en el número de elementos que usan de manera correcta. Además, las relaciones que se establecen en el nivel INTER están condicionadas por los elementos matemáticos que estos alumnos disponen.

4.2. Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de derivada en 2º Bachillerato Tecnológico

Los alumnos que cursan 2º de Bachillerato Tecnológico, son estudiantes para los que la noción de Derivada no era nueva. Estos alumnos deben empezar a trabajar con elementos matemáticos del concepto de Derivada relacionados con f ’’ (relaciones de f ’ y f ’’ con los extremos y los puntos de inflexión de f, relaciones del signo de f ’’ con la concavidad y convexidad de f, ...). Debido a ello, hay más riqueza en las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos utilizados. Ahora se establecen relaciones de “**y lógica**” como ocurría en 1º Bachillerato, y relaciones de **contrarrecíproco** y de **equivalencia lógica**. Además, otra característica es que la interpretación geométrica de la derivada se verá también con carácter global.

En el cuestionario que trabajaron (ver página 105, del capítulo 3) era necesario establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos puntuales y globales (analíticos o gráficos) para la resolución de las diferentes tareas, pero mientras que en algunas sólo había que realizar una o dos relaciones lógicas del tipo “**y lógica**”, en otras había que realizar varias relaciones lógicas y de diversos tipos (“**y lógica**”, **contrarrecíproco**, **equivalencia lógica**). El cuestionario constaba de dos tareas en las que era necesario hacer uso de los elementos matemáticos relativos a la derivada como límite del cociente incremental (Tarea 3) y como pendiente de la recta tangente a la función (Tarea 5). Además se incluyeron dos tareas más dadas en modo gráfico (Tarea 1 y Tarea 4), otras dos en modo analítico (Tarea 6 y Tarea 7) y una tarea dada en forma de texto pero haciendo referencia al modo gráfico. También se tuvo en cuenta que dentro de estas tareas hubiera apartados que sólo movilizaran elementos matemáticos puntuales desde el modo gráfico (apartado A) Tarea 4) o desde el modo analítico (Tarea 6).

En comparación con los alumnos de 1º Bachillerato que también consideramos que estaban en el nivel INTER de desarrollo se pone de manifiesto ciertas diferencias:

- se identificaron mayor número de relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, pues no sólo usan la "**y lógica**", sino también el **contrarrecíproco** y la **equivalencia lógica**, aunque muestran dificultades en el uso de algunas equivalencias lógicas relacionadas con la segunda derivada,
- hacían uso de más elementos matemáticos gráficos y analíticos (puntuales y globales),
- se sigue mostrando la influencia de los modos de representación (analíticos y gráficos) en la resolución de las tareas en ambos niveles INTRA e INTER.

El cuadro siguiente muestra los elementos matemáticos y las relaciones identificadas en los diferentes niveles de desarrollo del esquema de derivada en los estudiantes de 2º Bachillerato. En el nivel INTER se consideran integrados los elementos matemáticos y relaciones que caracterizan el nivel INTRA:

NIVEL	RELACIONES LÓGICAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS[1]
INTRA	**- Intento de relación "y lógica".**	- RECTA TANGENTE A LA CURVA EN x =a – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA EN UN PUNTO (x =a) (G.P.) - DERIVADA EN UN PUNTO COMO LÍMITE DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA (A.P.) - CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x=a (A.P.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x=a (A.P.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (A.G.) - OPERADOR DERIVADA (A.G.) - CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA DERIVABLE EN (a,b) (A.G.)
INTER	**- Se establecen relaciones del tipo "y lógica" entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntales y/o globales (generalmente en el mismo modo).**	- CÚSPIDE (G. P.) - CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA DERIVABLE EN x=a (A.P.) - RELACIONES DE f ' CON EXTREMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN (A.P.) - CONDICIÓN SUFICIENTE DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN (RELACIONES CON f '') (A.P.) - INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA (CON CARÁCTER GLOBAL) (G.G.) - INVERSO DEL OPERADOR DERIVADA: Si el gráfico de f ' es una recta, el gráfico de f es una parábola. (G.G.) - CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a,b) (A.G.) - - OPERADOR DERIVADA: REGLAS DE DERIVACIÓN (A.G.) - CONDICIÓN SUFICIENTE DE CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE f EN RELACIÓN CON EL SIGNO DE f '' (A.G.)
	- Contrarecíproco de elemento matemático analítico puntual	- CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA DERIVABALE EN x =a (A.P.)
	- Equivalencias lógicas (o doble implicación) de elementos matemáticos analíticos globales.	- CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (A.G.)
	- Esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.	- CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x=a (A.P.) - INVERSO DEL OPERADOR DERIVADA: Si el gráfico de f ' es una recta, el gráfico de f es una parábola. (G.G.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (A.G.)

[1] Al final de cada elemento aparece dos letras mayúsculas que indican: la primera letra si se trata de un elemento Gráfico (G) o Analítico (A), y la segunda letra si se trata de un elemento Puntual (P)o Global (G).
Los elementos matemáticos que se utilizan en el nivel INTER son además de los que figuran en dicho nivel, los que figuran en el nivel INTRA.

Cuadro 4.3. Relaciones lógicas y elementos matemáticos que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de derivada en 2º Bachillerato

Veamos a continuación manifestaciones del uso que hacen los estudiantes de relaciones lógicas y elementos matemáticos en cada nivel de desarrollo del esquema de derivada.

4.2.1. Nivel INTRA

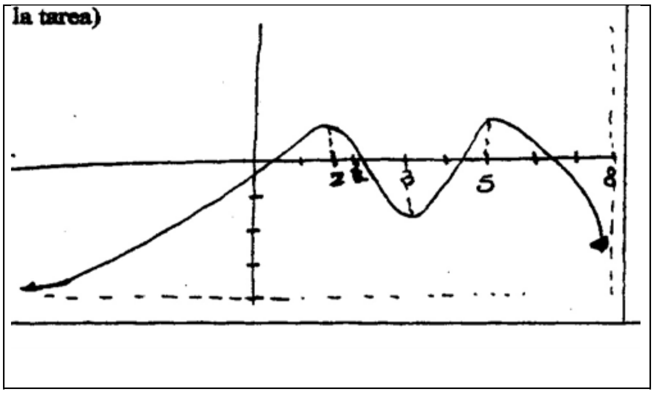
Al igual que en este mismo nivel en 1º Bachillerato, el nivel INTRA se caracteriza porque los intentos de establecer relaciones entre los elementos matemáticos mediante la conjunción lógica, que se producen en este nivel no son correctos. Una manifestación de este hecho la tenemos en el siguiente protocolo, correspondiente a la tarea 7, donde vemos que el estudiante recuerda los elementos matemáticos analíticos puntual y global:

- **condición necesaria para que f tenga un extremo o punto de inflexión en x=a:** Si f ’(a) =0 $\rightarrow$ x =a máximo, mínimo o punto de inflexión en f

y

- **condición suficiente para que f sea una función creciente o decreciente:** Sea f derivable en (a, b), si f ’>0 en (a, b) $\rightarrow$ f crece en (a,b), y si f ’<0 en (a,b) $\rightarrow$ f decrece en (a,b)

pero tiene dificultad en establecer relaciones entre estos elementos matemáticos a través de **“y lógica”** para responder al problema, lo que hace que esboce un gráfico incorrecto de f:



(C36-2B, Tarea 7)

C36-2B comentó:

E: ¿ y con f '<0 qué información has obtenido?
C36-2B: he averiguado donde era decreciente

E: ¿y f ' >0?
C36-2B: donde es creciente, crece basta 5
[Pero dibuja el gráfico de f, creciente en (-infinito, 2) y en (3, 5), y decreciente en (2,3)]
E: ¿ qué información obtienes de f '(3) =f '(5) =0?
C36-2B: para saber si era máximo o mínimo, o si crecía o decrecía
E: cuando f '=0 en un punto, ¿sólo puede ser máximo o mínimo?
C36-2B: no, o posible punto de inflexión
[Sin embargo en x =3 considera un mínimo, y no un punto de inflexión]
(C36-2B, Tarea 7)

Los estudiantes en este nivel usan de forma aislada (sin relacionarlos con otros elementos) algunos elementos matemáticos que no siempre son recordados de forma correcta. Así, en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 7 en la que el estudiante usa el elemento matemático:

f ’(a) =0 → x=a máximo, mínimo o punto de inflexión,

para decidir que en x =a existen puntos notables de la función f a partir de condiciones analíticas, se observa que dicho elemento es recordado de forma incorrecta al no contemplar la posibilidad de que x =a pueda ser un punto de inflexión

E: ¿podrías comentarme cómo esbozas el gráfico de f?
C39-2B: f ’(3) =f ’(5) =0 máximos o mínimos....
(C39-2B, Tarea 7)

También se observa en algunos estudiantes que se encuentran en este nivel que los elementos matemáticos puntuales y globales que conllevan una implicación, son recordados de forma incorrecta en el sentido de que la implicación es usada en sentido contrario al que debería. Una manifestación de este hecho lo tenemos en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 3 en la que se usa el elemento matemático analítico global que nos da una condición necesaria para que f sea derivable en (a, b):

si f derivable en (a, b) → f continua en (a, b),

recordando de forma contraria la implicación:

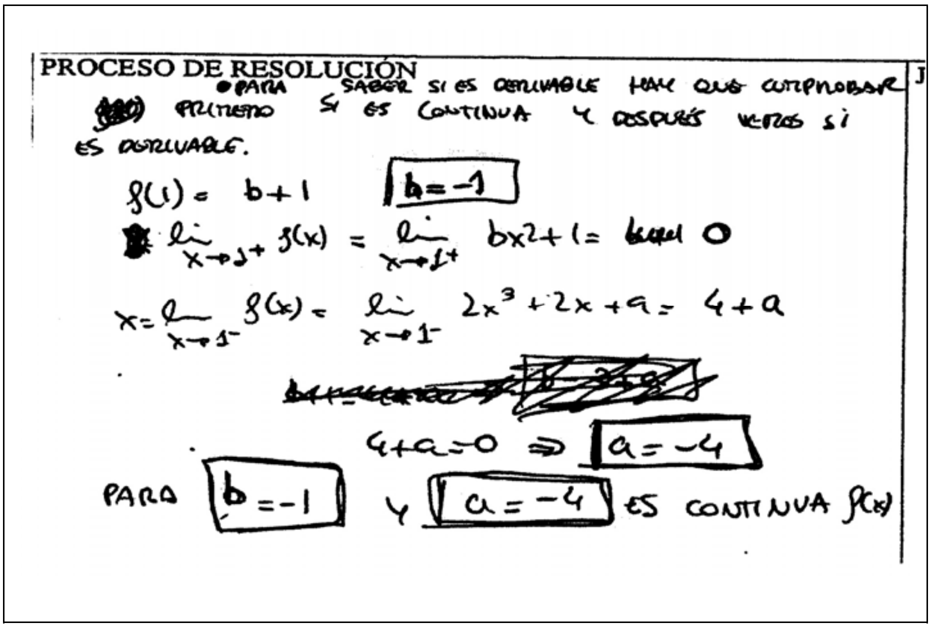
E: explicas en la resolución de la tarea que primero estudias la continuidad de f y después la derivabilidad, ¿ por qué?
C14-2B: porque si f es continua entonces f es derivable

(C14-2B, Tarea 3)

Los estudiantes en este nivel a veces "recuerdan" (en el sentido de tener memorizados) elementos matemáticos dados en la instrucción previa. Así, en el siguiente protocolo, correspondiente a la tarea 3, se pone de manifiesto que recuerda el elemento matemático analítico puntual: que nos da una condición necesaria para que f sea derivable en x =a,

si f derivable en x=a → f continua en x=a

de forma correcta, aunque resuelve la tarea como un procedimiento aprendido en la instrucción previa, ya que para estudiar la continuidad de f impone que los límites laterales de f sean igual a 0, sin saber explicar el por qué hace esto:



PROCESO DE RESOLUCIÓN

• PARA SABER SI ES DERIVABLE HAY QUE COMPROBAR PRIMERO SI ES CONTINUA Y DESPUÉS VEMOS SI ES DERIVABLE.

$f(1) = b+1$ $\boxed{b=-1}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} bx^2+1 = 0$

$x = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^3+2x+a = 4+a$

$4+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-4}$

PARA $\boxed{b=-1}$ Y $\boxed{a=-4}$ ES CONTINUA $f(x)$

(C48-2B, Tarea 3)

C48-2B comentó

C48-2B: primero para ver si es derivable, hay que ver si es continua
E: ¿por qué?

C48-2B: porque si no es continua, al no ser la función continua en ese punto no puede ser derivable, entonces estudiaré la continuidad en x =1, haciendo los límites laterales
E: ¿por qué impones que esto [refiriéndose al límite lateral de f, cuando x tiende a 1 por la derecha] *sea igual a 0, y que 4 + a*[refiriéndose al límite lateral de f, cuando x tiende a 1 por la izquierda] *sea igual a 0 también?*
C48-2B: para que sean iguales

(C48-2B, Tarea 3)

4.2.2. Nivel INTER

En este nivel se empiezan a esbozar relaciones lógicas entre elementos matemáticos. Las relaciones lógicas que se utilizan son "**y lógica**", **contrarrecíproco** y **equivalencia lógica**, aunque no todas se usan de la misma manera, siendo la "y lógica" la que suelen realizar de forma correcta con más frecuencia, y la "equivalencia lógica" la que más dificultades presenta.

La "**y lógica**" es la relación que entre elementos matemáticos puntuales y globales en el mismo modo (analítico o gráfico) es utilizada por los estudiantes con más frecuencia en este nivel de forma correcta. Así, podemos observar como se establece esta relación de forma correcta entre elementos matemáticos analíticos puntual y global en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 1, en el que el estudiante utiliza los elementos matemáticos analíticos puntual y global:

- **condición suficiente para que f tenga un extremo o punto de inflexión en x=a:** Sea f derivable en x =a, si x =a extremo o punto de inflexión de f $\rightarrow$ f '(a) =0

y

- **condición necesaria para que f sea una función creciente o decreciente:** Sea f derivable en (a,b), si f crece en (a,b) $\rightarrow$ f '>0 en (a,b) , y si f decrece en (a,b) $\rightarrow$ f '<0 en (a,b)

El hecho de usar la conjunción lógica entre ellos le permite resolver de forma correcta la tarea, encontrando dos parejas de funciones con sus derivadas respectivas, a) con f) y c) con e):

E: ¿por qué relacionas a) con f)?
C5-2B: en los puntos que hay un mínimo o un máximo, en la derivada tenía que ser cero. Y después en los trozos que crecía o decrecía, tenía que estar positivo o negativo
E: ¿cuándo crece?
C5-2B: es positivo y donde decrece es negativo
E: ¿y la pareja de c) con e), cómo la has encontrado?
C5-2B: no estaba muy segura, pero como aquí está decreciendo, la derivada tiene que ser negativa.

(C5-2B, Tarea 1)

Del mismo modo en este nivel se pone de manifiesto el uso de la relación lógica del **contrarrecíproco**, en elementos matemáticos analíticos que conllevan una implicación, como es el caso del elemento matemático analítico puntual que nos da la condición necesaria para que f sea derivable en x =a: **si f derivable en x =a → f continua en x =a**. Una manifestación del uso de este elemento matemático en forma de **contrarrecíproco** (si f no es continua en x =a → f no es derivable en x =a) lo observamos en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 4, donde se usa para decidir que no existe f ’(10):

E: ¿ f'(10)?
C2-2B: no existe porque no es derivable, porque no es continua

(C2-2B, Tarea 4)

Otra relación lógica que se pone de manifiesto en este nivel es la **equivalencia lógica** (o doble implicación) entre elementos matemáticos analíticos puntuales o globales relativos a f ’. Así, se observa en el siguiente protocolo correspondiente a C46-2B, en la tarea 1 el uso de las **equivalencias lógicas**:

- **sea f derivable en (a, b)**
  - **f ’>0 en (a, b) ↔ f crece en (a, b),**
  - **f ’<0 en (a, b) ↔ f decrece en (a, b)**

C46-2B: En esta (en c)) que no tiene máximos ni mínimos como la función es decreciente siempre, su derivada tiene que ser negativa (en e)).

...tiva, por eso que lo siempre es creciente.
(e) y (c) si pensamos q (e) es la derivada y es toda negativa, por lo que
(c) debe ser toda decreciente.

(C46-2B, Tarea 1)

La **equivalencia lógica** es la que más dificultades presenta a los estudiantes en el nivel INTER, y sólo alguno de los estudiantes que se encuentran en este nivel son capaces de establecer este tipo de relación de forma aislada entre elementos matemáticos analíticos puntuales o globales relativos a f ’. No tenemos ninguna manifestación de que sean capaces de establecer relaciones de este tipo entre elementos matemáticos relacionados con f ’’.

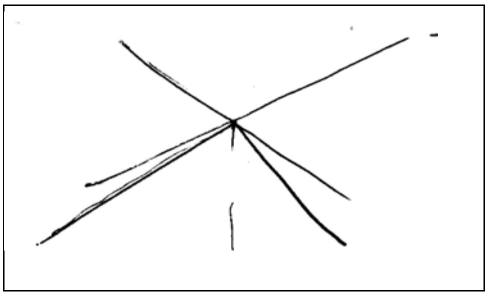
En este nivel los estudiantes utilizan de forma aislada los elementos matemáticos puntuales y globales, analíticos y gráficos de forma correcta en la resolución de las tareas, igual que sucedía con los estudiantes de 1º Bachillerato que se encontraban en este mismo nivel. Sin embargo existen más manifestaciones del uso de elementos matemáticos analíticos que gráficos.

Además se usan algunos elementos matemáticos más que en el nivel INTRA. Así, por ejemplo, es en este nivel donde los estudiantes usan el elemento matemático gráfico puntual relativo a un punto cúspide (o anguloso):

se dice que la gráfica puede estar “quebrada” en un punto en el que no se puede trazar una “tangente”.

Esto se puede apreciar en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 4, donde C46-2B usa esta idea para deducir que no existe f '(14) porque x =14 es un punto anguloso:

E: ¿y f '(14)?
C46-2B: ... bueno es anguloso, tenía problemas, la pendiente sería doble
E: ¿podrías explicarlo?
C46-2B: habría dos, sería una cosa así [esboza las pendientes en el gráfico]



(C46-2B, Tarea 4)

Es también en este nivel donde se usan elementos matemáticos gráficos globales (elementos que no usan los estudiantes de 1º Bachillerato por limitaciones del currículo). Por ejemplo el elemento matemático relativo a la interpretación geométrica de la derivada:

Una función es derivable en (a,b) si existe la tangente en todos sus puntos y el valor de la derivada en cada punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en (x,f(x)) ∀x ι (a,b),

C45-2B lo usa en la tarea 1 para encontrar la pareja formada por una función (a)) y su derivada (f)):

E: ¿relacionas a) con f) ¿en qué te has fijado?
C45-2B: en donde cambian las pendientes, los máximos y los mínimos, coinciden con los 0 de la f) que sería la derivada de a)
E: ¿podrías explicarme a qué te refieres con los cambios de pendientes, por ejemplo aquí, en el máximo?
C45-2B: por aquí es positiva la pendiente de la tangente(indicando puntos de f situados a la izquierda del máximo), disminuye hasta 0, y

luego empieza a ser negativa [la identificación de la derivada con la pendiente de la tangente a la función le ha permitido resolver el problema]

(C45-2B, Tarea 1)

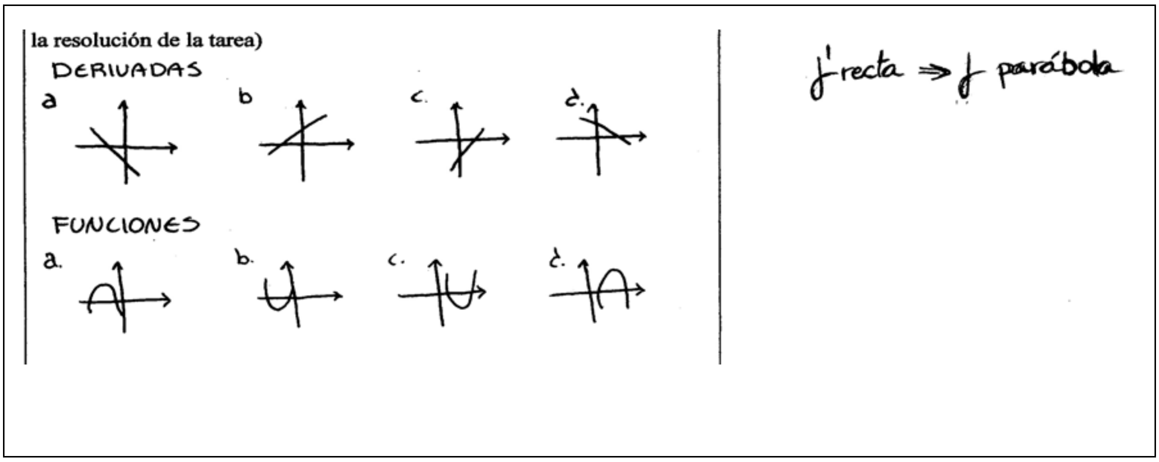
En este nivel comienzan a hacer uso los estudiantes de los elementos matemáticos relacionados con f ’’. Por ejemplo, C5-2B al resolver la tarea 7 hace uso del elemento matemático analítico global relativo a la condición suficiente de convexidad y concavidad de f en relación con el signo de f ’’: **sea f derivable en (a, b), si f ’’>0 en (a, b) → f convexa en (a, b), y si f ’’<0 en (a, b) → f cóncava en (a, b),**

para estudiar la concavidad y convexidad de f a partir de condiciones analíticas:

C5-2B: ...f '' me da información sobre la concavidad
si f ''<0 f es ∩ y si f ''>0 f es ∪, luego entre 3 y 8 f es así: ∩ y para x<3 al revés...

(C5-2B, Tarea 7)

Una característica de este nivel es que se pone de manifiesto los primeros esbozos de síntesis entre los modos de representación analítico y gráfico, a través de relación lógica (**“y lógica”**) entre elementos matemáticos analítico y gráfico puntuales y/o globales. Se observa este hecho en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 2, en la que para esbozar los posibles gráficos de f se parte de f ’ sabiendo que es una recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (a, 0) y (0, b). En este caso el estudiante a través de relación lógica (**“y lógica**”) entre un elemento matemático gráfico global y dos elementos matemáticos analíticos uno puntual y otro global, resuelve la tarea:



(C5-2B, Tarea 2)

> *E: ¿puedes explicarme cómo has resuelto la tarea?*
>
> *C5-2B: primero he sacado los posibles gráficos de f que había según a y b fuesen positivos o negativos. Y luego igual que antes, como están son las derivadas, se supone que cuando las derivadas pasan por cero, hay un mínimo o un máximo, entonces dependiendo, si la derivada está en positivo está creciendo, y cuando pasa de positivo a negativo, está decreciendo, hay un máximo.*
>
> (C5-2B, Tarea 2)

Sin embargo no podemos considerar que C5-2B tenga sintetizados los modos analítico y gráfico, pues en la tarea 5 no hace uso del elemento matemático gráfico puntual f '(a) = pendiente de la tangente a f en x =a, necesario en la resolución de la tarea. Estos primeros esbozos de síntesis entre los modos de representación analítico y gráfico se producen de forma aislada en la resolución del cuestionario. Este hecho constituye una característica de este nivel de desarrollo.

Por otra parte, hemos observado que entre los estudiantes que se encuentran en el nivel INTER algunos manifiestan distintos niveles de desarrollo del esquema en la resolución de las diferentes tareas, según el modo de representación (analítico o gráfico), aunque no todos lo manifiesten de la misma manera, como mostramos en el siguiente cuadro:

NIVEL	ESTUDIANTES
INTRA en modo gráfico INTER en modo analítico	C5-2B, C39-2B
INTRA en modo analítico INTER en modo gráfico	C45-2B

Cuadro 4.4. Cuestionarios de 2º Bachillerato que se encuentra en diferente nivel de desarrollo del esquema según modo de representación

Este hecho es una evidencia de que estos estudiantes no tienen sintetizados los modos de representación analítico y gráfico.

Globalmente, la distribución de los estudiantes de 2º Bachillerato según nivel de desarrollo del esquema de Derivada, se recoge en el cuadro siguiente:

NIVEL	ESTUDIANTES	TOTAL
INTRA	C48-2B, C4-2B, C28-2B, C19-2B, C13-2B, C3-2B, C14-2B, C36-2B, C6-2B, C23-2B	10
INTER	C33-2B, C39-2B, C17-2B, C25-2B, C20-2B, C5-2B, C2-2B, C45-2B, C46-2B, C50-2B	10

Cuadro 4.5. Estudiantes de 2º Bachillerato asignados a los diferentes niveles de desarrollo del esquema de Derivada

Cuando se han asignado los estudiantes a un determinado nivel hemos observado que existen diferencias dentro de cada nivel, debido al número de elementos matemáticos que los estudiantes son capaces de usar y al número y tipo de las relaciones establecidas. Aunque globalmente las respuestas de los estudiantes indiquen que están en el nivel INTRA o INTER, dentro de cada nivel se identifican aspectos que podrían apuntar hacia una mejor diferenciación dentro de cada nivel.

En particular, en el grupo de estudiantes considerados en el nivel INTRA se aprecian diferencias en el número de elementos que usan de manera correcta, hecho que también sucedía en los estudiantes de 1º Bachillerato asignados en este nivel. Pero, además hay diferencias en el número y tipos de relaciones que establecen los distintos estudiantes en el nivel INTER.

4.3. Características de los niveles de desarrollo del esquema de derivada en primero de la Licenciatura de Matemáticas

Los estudiantes de primer curso de la Universidad (Licenciatura de Matemáticas) habían cursado la asignatura "Elementos de Análisis Matemático" con contenidos del concepto de Derivada. Por tanto, en las respuestas producidas existen un mayor número de relaciones (**"y lógica", contrarrecíproco, equivalencia lógica**) entre los elementos matemáticos, y usan un mayor número de elementos matemáticos analíticos o gráficos (puntuales o/y globales) relativos a f ' y a f ''.

El cuestionario que ellos trabajaron constaba de cuatro tareas, dos dadas en modo gráfico (Tarea 1 y Tarea 3) y dos en modo analítico (Tarea 2 y Tarea 4), (ver página 132 del capítulo 3). En la Tarea 1 figuraba el gráfico de f ' y se les pedía el esbozo del gráfico de f. La gráfica de f ' mostraba cambios de signo, cambios de crecimiento, puntos de corte con el eje X, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso, por lo que para esbozar el gráfico de f era necesario relacionar (**y lógica**) elementos matemáticos (analíticos o gráficos) globales que vincularan el crecimiento de f ' a la convexidad de f, el signo de f ' al crecimiento de f, y elementos matemáticos (analíticos o gráficos) globales y puntuales que vincularan f ' a extremos y puntos de inflexión de f.

En el proceso de resolución de la Tarea 2 (Tarea 3 del cuestionario de 2º de Bachillerato), podía hacerse uso de la derivada como límite del cociente incremental, siendo esta la única tarea del cuestionario que se podía resolver teniendo sólo la idea de derivada en su expresión analítica. La Tarea 3 (Tarea 4 del cuestionario de 2º de Bachillerato) constaba de dos partes, la primera centrada en el comportamiento local de la función y la segunda parte centrada en el comportamiento global de la función. El tipo de información que había que obtener de la gráfica de f estaba vinculada a la "razón de cambio" (perspectiva analítica de la gráfica) o a la pendiente de la recta tangente a un punto de la gráfica de f (perspectiva geométrica). La segunda parte de la tarea, que implicaba el esbozo de la gráfica de f ' a partir del gráfico de f, permitía movilizar significados globales procedentes de las relaciones inversas que se movilizaron en la Tarea 1 (en la que se nos daba la función derivada y se nos pedía el esbozo de la gráfica de f). Los elementos matemáticos utilizados en la resolución de la Tarea 3, y que conllevan alguna implicación, se habían usado en la Tarea 1 en su forma de condición suficiente, y en esta tarea se utilizaban en su forma de condición necesaria. Por lo tanto, podía mostrar si el estudiante establece relaciones de **equivalencia lógica** entre los elementos matemáticos utilizados en la resolución de estas dos tareas.

En la Tarea 4, a partir de condiciones analíticas sobre f ' y f '' se pedía el esbozo del gráfico de f. Para resolver esta tarea era necesario utilizar los significados vinculados a las relaciones que se establecen entre f ' y f, y entre f '' y f. En el esbozo del gráfico de f aparecía un punto anguloso o punto cúspide siendo el tratamiento de este punto lo que proporciona una mayor dificultad. En la Tarea 1, también se pedía el esbozo de la gráfica de f, desde la gráfica de f ', en la Tarea 4 se proporcionaba condiciones analíticas de f ' y f '' y pide el esbozo del gráfico de f .

Los alumnos de la Licenciatura de Matemáticas usan un mayor tipo de relaciones lógicas. Estos alumnos son capaces de usar la **"y lógica"**, el **contrarrecíproco** y la **equivalencia lógica**, de elementos matemáticos. También usan distintos tipos de elementos matemáticos analíticos y gráficos, puntuales y globales. Este incremento en el uso de elementos y relaciones está motivado por la incorporación de la segunda derivada, hecho que no sucedía en los alumnos de Bachillerato. Se sigue teniendo manifestación de la influencia de los modos de representación (analíticos y gráficos), salvo en los estudiantes que muestran un desarrollo del esquema del nivel TRANS.

El cuadro siguiente muestra las relaciones lógicas y los elementos matemáticos que utilizan los estudiantes de 1º Licenciatura de Matemáticas en los diferentes niveles de desarrollo del esquema de derivada. Debido al carácter progresivo del desarrollo del esquema, las relaciones lógicas y los elementos matemáticos que caracterizan el nivel INTRA las encontramos en el nivel INTER, y lo mismo sucede con los niveles TRANS e INTER, esta progresión es representada en el cuadro por una fecha entre dos niveles consecutivos, y cuyo sentido es el nivel superior (por razones de simplicidad en la elaboración del cuadro no se repiten):

NIVEL	RELACIONES LÓGICAS[1]	ELEMENTOS MATEMÁTICOS[2]
INTRA	- Intento de relación "y lógica".	- RECTA TANGENTE A LA CURVA EN x =a – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA EN UN PUNTO (x =a) (G.P.) - DERIVADA EN UN PUNTO COMO LÍMITE DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA (A.P.) - CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x=a (A.P.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x=a (A.P.) - CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA DERIVABALE EN x= a (A.P.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (A.G.) - CONDICIÓN SUFICIENTE DE CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE f EN RELACIÓN CON EL SIGNO DE f'' (A.G.) - CONDICIÓN SUFICIENTE DE CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE f EN RELACIÓN CON EL CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE f' (A.G.)
↓ INTER	- Se establecen relaciones del tipo "y lógica" entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntales y/o globales (generalmente en el mismo modo)	- CÚSPIDE: GRÁFICA "QUEBRADA" (G.P.) - DERIVADA EN UN PUNTO COMO LÍMITE DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA: Se usa "desencapsulando" la idea de la existencia de f' en un punto x=a, mediante la aplicación de la igualdad de los límites laterales del cociente incremental. (A.P.) - RELACIONES DE f' CON EXTREMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN (A.P.) - RELACIONES DE f'' CON LOS EXTREMOS Y LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN (A.P.) - CONDICIÓN SUFICIENTE DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN (RELACIONES CON f'') (A.P.) - INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA (CON CARÁCTER GLOBAL) (G.G.) - OPERADOR DERIVADA: Si el gráfico de f es una parábola, el gráfico de f' es una recta (G.G.) - OPERADOR DERIVADA: Utilizando el significado geométrico de la segunda derivada como la tangente a la gráfica f'. (G.G.) - CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE (A.G.) - OPERADOR DERIVADA: REGLAS DE DERIVACIÓN (A.G.)

[1]Las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos en el nivel TRANS son además de las que figuran en dicho nivel, las que figuran en el nivel INTER.

[2]Al final de cada elemento aparece dos letras mayúsculas que indican: la primera letra si se trata de un elemento Gráfico (G) o Analítico (A), y la segunda letra si se trata de un elemento Puntual (P) o Global (G).
Los elementos matemáticos que se utilizan en el nivel INTER son además de los que figuran en dicho nivel, los que figuran en el nivel INTRA. Lo mismo sucede con los elementos matemáticos que se utilizan en el nivel TRANS.

Cuadro 4.6. Relaciones lógicas y elementos matemáticos que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de derivada en 1º Licenciatura de Matemáticas

NIVEL	RELACIONES LÓGICAS[1]	ELEMENTOS MATEMÁTICOS[2]
INTER	**- Contrarecíproco de elemento matemático analítico puntual**	- CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA DERIVABALE EN x =a (A.P.)
	- Equivalencias lógicas (o doble implicación) de elementos matemáticos analíticos puntuales o globales.	- CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a,b) (A.G.)
↓	**- Esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.**	- OPERADOR DERIVADA: Si el gráfico de f es una parábola, el gráfico de f ' es una recta (G.G.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (A.G.)
TRANS	**- Síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.**	- CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CONSTANTE, CRECIENTE O DECRECIENTE A TRAVÉS DE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA (G.G.)

[1]Las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos en el nivel TRANS son además de las que figuran en dicho nivel, las que figuran en el nivel INTER.

[2]Al final de cada elemento aparece dos letras mayúsculas que indican: la primera letra si se trata de un elemento Gráfico (G) o Analítico (A), y la segunda letra si se trata de un elemento Puntual (P) o Global (G).
Los elementos matemáticos que se utilizan en el nivel INTER son además de los que figuran en dicho nivel, los que figuran en el nivel INTRA.
Lo mismo sucede con los elementos matemáticos que se utilizan en el nivel TRANS.

Cuadro 4.6. Relaciones lógicas y elementos matemáticos que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de derivada en 1º Licenciatura de Matemáticas

A continuación describimos las características de cada nivel considerando como los estudiantes relacionan y usan los diferentes elementos en la resolución de los problemas:

4.3.1. Nivel INTRA

Los estudiantes en este nivel, no utilizan ninguna relación lógica, tan sólo recuerdan elementos matemáticos dados en la instrucción previa. Por ejemplo, el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 3, el estudiante recuerda que no existe la derivada en los puntos cúspide pero no sabe explicar por qué:

E: ¿y f ’(14)?

C36-L: no hay derivada porque hay un pico en la función, no puede tener derivada

E: ¿por qué?

C36-L: no sé ...

(C36-L, Tarea 3)

Por otra parte, los intentos de establecer algún tipo de relación lógica entre elementos matemáticos analíticos o gráficos puntuales y/o globales que se producen no son correctos, igual que sucedía con los estudiantes de 1º y 2º de Bachillerato asignados a este nivel. Por ejemplo, en la tarea 4, C22-L tiene dificultad en establecer relaciones entre los elementos matemáticos (analíticos puntuales y globales):

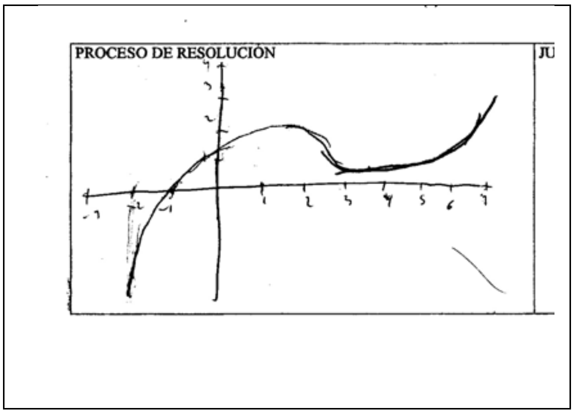
- **si f ’(a) =0 → x =a máximo, mínimo o punto de inflexión**
- **sea f derivable en (a, b), si f ’>0 en (a, b) → f crece en (a,b), y si f ’<0 en (a, b) → f decrece en (a,b)**

y

- **sea f derivable en (a, b), si f ’’>0 en (a, b) → f convexa en (a, b), y si f ’’<0 en (a, b) → f cóncava en (a, b)**

Una dificultad en establecer relaciones entre estos elementos parece ser la causa de que esboze un gráfico incorrecto de f. Durante la entrevista al indagar sobre los significados de f ’(a) se manifestaron dichos errores

E: ¿qué significa que f ’(1)=f ’(3)= f ’(5)=0?
C22-L: que hay un máximo o mínimo o punto de inflexión
Donde f ’>0, f crece y f ’<0, f decrece
Si f ’’<0 cóncava y si f ’’>0 convexa
C22-L: Y aquí (señala x =7) crecía por eso hay un error , si crece aquí, tendría que crecer, y aquí tiende a menos infinito.



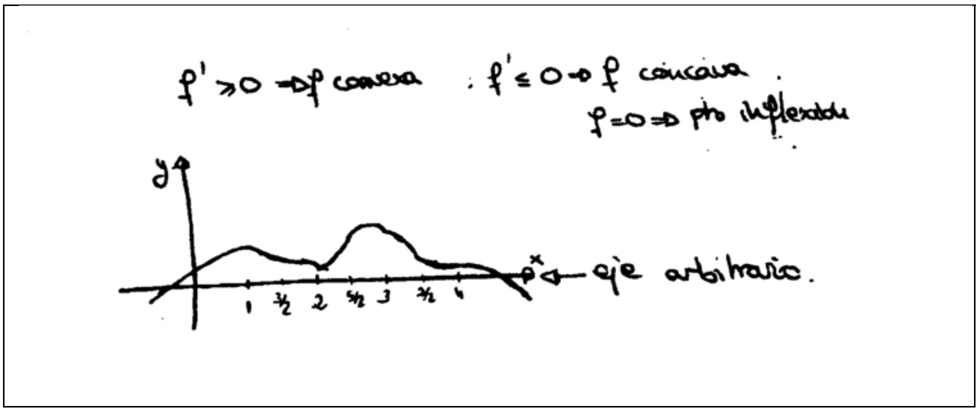
(C22-L, Tarea 4)

Los estudiantes en este nivel usan de forma aislada (sin relacionarlos con otros elementos matemáticos) algunos elementos matemáticos analíticos y gráficos, puntuales y globales, pero no siempre son recordados de forma correcta.

Así, en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 1, el elemento matemático analítico global relativo a la condición suficiente para que f sea una función creciente o decreciente en (a, b):

sea f derivable en (a, b), si f ’>0 en (a, b) → f crece en (a, b), y si f ’<0 en (a, b) → f decrece en (a, b),

se usa para estudiar el crecimiento y decrecimiento de f, a partir del gráfico de f ’ , sin embargo C5-L, intenta relacionar el signo de la primera derivada con la concavidad de la función:



(C5-L, Tarea 1)

> *C5-L: "...aunque si podemos saber la concavidad y la convexidad:*
> *f '>0 → f convexa, y f '<0 → f cóncava"* ,
> (C5-L, Tarea 1)

Al igual que en los estudiantes de Bachillerato que se encuentran en este nivel, se observa que los elementos matemáticos analíticos puntuales o globales que conllevan una implicación son recordados de forma incorrecta en el sentido de que la implicación es usada en sentido contrario al que debería.

Una manifestación de este hecho lo tenemos en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 1, donde el elemento matemático analítico puntual relativo a la condición necesaria para que f sea derivable en x =a:

Si f derivable en x=a → f continua en x=a,

parece que se usa interpretando al contrario la implicación: f derivable → f continua, y esto le lleva a considerar x =2 como asíntota:

> *E: en x* = 2 *dices que hay una asíntota. Esta* es *la gráfica que haces de f ¿podrías explicarla?*
> C8-L: *lo supuse* a *última hora. En x* = 2 *pensé que era una asíntota porque no era derivable (parece ser que se refiere* a *la gráfica de f* ')
> *Presentaba una discontinuidad de salto infinito (parece ser que* se *refiere* a *la gráfica de f)*
> *E:¿en qué te has fijado de la gráfica de f ' para deducir que la función f representa la discontinuidad?*
> C8-L: Me *he fijado en el pico, pero no me acordaba si no era continua* o *no era derivable. No me acuerdo.*
>
> (C8-L, Tarea 1)

Además, los estudiantes de 1º de Licenciatura de matemáticas que podemos situar en el nivel INTRA usan algunos elementos matemáticos analíticos globales relativos a f ’y a f ’’ que no usan los estudiantes en Bachillerato en este nivel ni en el nivel INTER. Este hecho puede ser explicado por la ampliación de los elementos matemáticos sobre derivada que estos alumnos de la Licenciatura de Matemáticas conocen. Sin embargo, el hecho de conocer más elementos matemáticos no implica necesariamente un aumento en el desarrollo del esquema. esto es debido a que el desarrollo de un esquema viene caracterizado por lo que los estudiantes hacen con lo que conocen desde la perspectiva del establecimiento de relaciones entre lo que se conoce.

Un ejemplo de ello lo tenemos en el uso del elemento matemático analítico global relativo a la condición suficiente de convexidad y concavidad de f en relación con el signo de f ’’:

Sea f derivable en (a, b), si f ’’ >0 → f convexa, y si f ’’<0 en (a, b) → f cóncava,

(en Bachillerato se empieza a tener manifestaciones del uso de este elemento en el nivel INTER de 2º Bachillerato).

En el siguiente protocolo correspondiente a C8-L en la tarea 4, podemos observar su uso para estudiar la concavidad de f , a partir de condiciones analíticas:

> *C8-L: ....f ’’ <0 entonces f es cóncava*
> *f ’’>0 entonces f es convexa...*
> (C8-L, Tarea 4)

El elemento matemático analítico global relativo a la condición suficiente de convexidad y concavidad de f en relación con el crecimiento y decrecimiento de f ’:

Sea f derivable en (a, b), si f ’crece en (a, b) → f convexa en (a, b), y si f ’ decrece en (a,b) → f cóncava en (a, b),

(en Bachillerato no tenemos manifestaciones de su uso).

En el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 1, se observa el uso de este elemento matemático relacionando el crecimiento de f ’ con la concavidad de f , aunque parece que lo hace utilizando dos condiciones redundantes, ya que afirma:

“*cuando f ’ decrece,* ***y f ’’ negativa****, entonces f es convexa, y cuando f ’ crece* ***y f ’’ es positiva*** *entonces f cóncava*”.

> *C8-L: la concavidad* o *convexidad depende de cuando sea creciente* o *no la derivada. Cuando f’ decrece, y f ’’* es *negativa entonces* f es *convexa; y cuando f’ crece y f ’’* es *positiva entonces* f es *cóncava*
>
> (C8-L, Tarea 1)

4.3.2. Nivel INTER

Los estudiantes en este nivel empiezan a esbozar relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, siendo la “**y lógica**” la que suelen realizar de forma correcta con más frecuencia, y la “**equivalencia lógica**” la que más dificultades les presenta.

La “**y lógica”** entre elementos matemáticos puntuales y globales en el mismo modo (analítico o gráfico) es la relación que los estudiantes utilizan con más frecuencia de forma correcta. La forma en la que se establece la relación de **conjunción lógica** entre los elementos matemáticos analíticos global y puntual:

- **Sea f derivable en (a,b), si f ’>0 en (a,b) → f crece en (a,b) y si f ’<0 en (a,b) → f decrece en (a, b) y**
- **si f ’(a) =0 → x =a máximo, mínimo o punto de inflexión**

en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 4, es lo que permitió al estudiante C11-L resolver esta tarea, e inferir del uso conjunto de estas dos implicaciones que x =1 máximo pues f cambia de creciente a decreciente, x=5 mínimo pues f cambia de decreciente a creciente, y x = 3 punto de inflexión pues f no cambia el crecimiento, y cambia la concavidad.

Además, el establecer la relación de "**y lógica**" entre los elementos matemáticos analíticos globales:

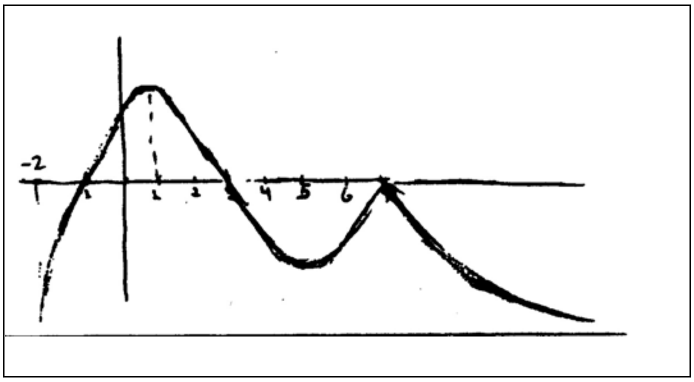
- **f convexa y f creciente con anterioridad a x =a**

y

- **f convexa y f decreciente a partir de x =a**

siendo f continua, le permite decidir que en x =a hay un punto anguloso.

E: ¿cómo has usado las condiciones que te da el enunciado de la tarea?
C11-L: Pasa por el punto (-1,0).
En 1,3,5 tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión
f decrece entre 1 y 5 y a partir de 7
f crece entre -2 y 1 y entre 5 y 7
con f '' se estudia la concavidad y la convexidad
en el 3 hay un punto de inflexión, ya que entre -2 y 3 es cóncava y luego pasa a convexa
E: ¿y en el 7?
C11-L: Entre 3 y 7 es cóncava y creciente. Luego sigue siendo cóncava pero pasa a ser decreciente. Luego no existe f ' (7). Habría un pico.



(C11-L, Tarea 4)

La forma en la que los estudiantes consideraban el "punto anguloso" en la gráfica ha sido un contexto que ha proporcionado información sobre la forma en la que los estudiantes hacen uso de la relación de "**y lógica**" para considerar de manera conjunta información puntual y global.

Del mismo modo en este nivel se pone de manifiesto el uso de la relación lógica del **contrarrecíproco**, en elementos matemáticos analíticos que conllevan una implicación, como es el caso del elemento matemático analítico puntual que nos da la **condición necesaria para que f sea derivable en x =a**:

si f derivable en x =a → f continua en x =a.

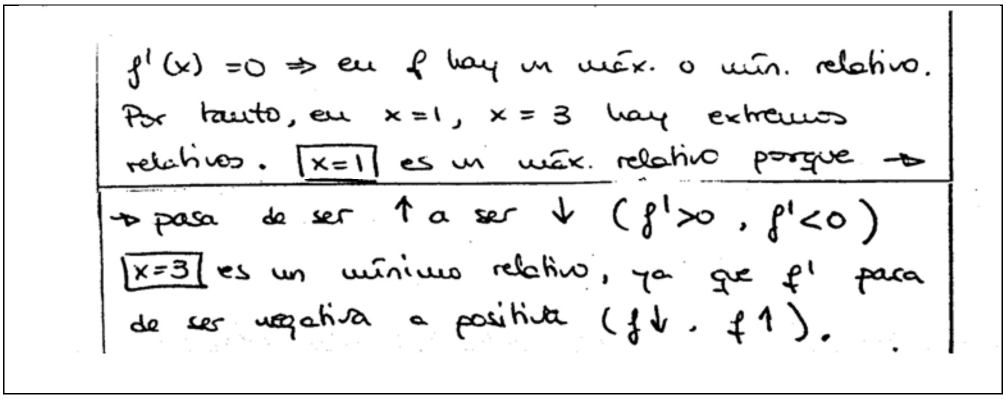
Una manifestación del uso de este elemento matemático en forma de **contrarrecíproco** (si f no es continua en x =a → f no es derivable en x =a) lo observamos en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 2, donde se usa para decidir cuando f es derivable en x =1:

> *C4-L: primero veo para que valores de a y de b f es continua. Sólo habría que verlo para x =1, ya que en los dos tramos es continua.*
> *E: si te están preguntando por la derivabilidad, ¿ por qué estudias la continuidad?*
> *C4-L: pues para descartarlo, porque si no es continua , no es derivable...*
>
> (C4-L, Tarea 2)

Otra relación lógica que se pone de manifiesto en este nivel es la **equivalencia lógica** (o doble implicación) entre elementos matemáticos analíticos puntuales o globales relativos a f '. Así, se observa el uso de la equivalencia lógica:

- **sea f derivable en (a, b)**
  f '>0 en (a, b) ↔ f crece en (a, b), y f '<0 en (a, b) ↔ f decrece en (a, b)

en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 1:


$f'(x) = 0 \Rightarrow$ en f hay un máx. o mín. relativo.
Por tanto, en $x=1$, $x=3$ hay extremos
relativos. $\boxed{x=1}$ es un máx. relativo porque →
→ pasa de ser ↑ a ser ↓ ($f'>0$, $f'<0$)
$\boxed{x=3}$ es un mínimo relativo, ya que f' pasa
de ser negativa a positiva ($f\downarrow$. $f\uparrow$).

(C29-L, Tarea 1)

La **equivalencia lógica** es la que más dificultades presenta a los estudiantes en el nivel INTER, y sólo alguno de los estudiantes que se encuentran en este nivel son capaces de establecer este tipo de relaciones de forma aislada entre elementos matemáticos relativos a f ’, no tenemos ninguna manifestación de que sean capaces de establecer relaciones de este tipo entre elementos matemáticos relacionados con f ’’.

En este nivel los estudiantes utilizan los elementos matemáticos puntuales y globales, analíticos y gráficos de forma correcta en la resolución de las tareas, pero hay más manifestaciones del uso de elementos matemáticos analíticos que gráficos.

Los elementos matemáticos se empiezan a usar “con sentido” en este nivel, con esto nos queremos referir a que no es algo que se tiene memorizado y se recupera de la memoria para utilizarlo si no que se sabe cuando utilizarlo y por qué. Por ejemplo, el elemento gráfico puntual relativo al punto cúspide: **Se dice que la gráfica puede estar “quebrada” en un punto en el que no se puede trazar una “tangente”**,

que en el nivel anterior se recordaba para utilizarlo, en este nivel se utiliza “con sentido” para deducir que en x =a no existe la derivada por tratarse de un punto anguloso o cúspide, como puede observase en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 3, en el punto x=14:

E: ¿f ’(14)?
C11-L: f ’(14) no existe porque tiene un pico la gráfica en el 14
E. ¿Porqué no es derivable cuando tiene un pico?
C11-L: Porque la tangente en el pico no seria única, habría muchas

(C11-L, Tarea 3)

Además se usan algunos elementos matemáticos gráficos y analíticos (puntuales y globales) más que en el nivel INTRA. Así, por ejemplo, es en este nivel donde se tiene manifestación del uso del elemento matemático analítico puntual relativo a las relaciones de f ’’ con los extremos y los puntos de inflexión:

- **Si f ’(x)=0 y f ’’(x)<0 entonces x máximo relativo**
- **Si f ’(x)=0 y f ’’(x)>0 entonces x mínimo relativo**
- **Si f ’(x)=0 y f ’’ cambia de signo a la izquierda y a la derecha de x entonces x punto de inflexión**

se observa su uso para deducir qué sucede en los puntos tales que f ’(x)=0, a partir de condiciones analíticas, en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 4:

C33-L: .... x = 1, x = 3, x = 5 hay máximo, mínimo o punto de inflexión
en x = 1 máximo porque f ’(1)=0 y f ’’(1)<0
en x = 3 mínimo porque f ’(3)=0 y f ’’(3)>0
.....

(C33-L, Tarea 4)

Es también en este nivel donde tenemos manifestación del uso de elementos matemáticos gráficos globales. Por ejemplo el elemento matemático relativo al operador derivada:

Utilizando el significado geométrico de la segunda derivada como la pendiente de la tangente a la gráfica de f ’,

que se utiliza en el siguiente protocolo correspondiente a la tarea 1 para deducir la concavidad de f a partir del gráfico de f ’:

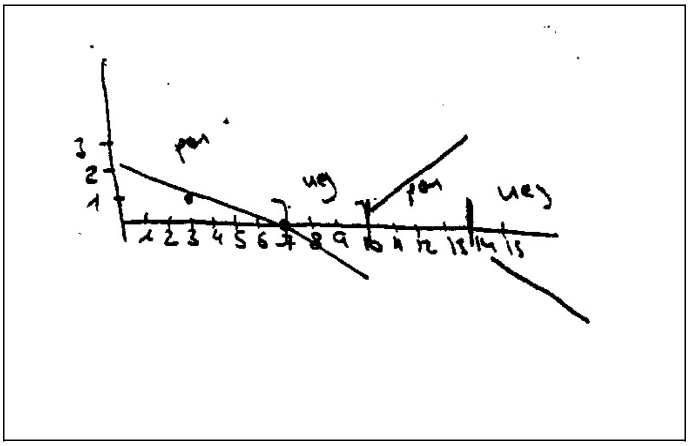
C15-L: ...Si hombre, la tangente de la gráfica es *negativa significa que f(x) en ese tramo* es *cóncava...* [se refiere a la tangente de f ’, que es el gráfico que aparece en el enunciado de la tarea, que es f ’’].

(C15-L, Tarea 1)

En este nivel se pone de manifiesto los primeros esbozos de síntesis entre los modos de representación analítico y gráfico, a través de relación lógica (“**y lógica**”) entre elementos matemáticos puntuales y/o globales. Se observa este hecho en el siguiente protocolo de C19-L correspondiente a la segunda parte de la tarea 3, en la que pide el gráfico de f ’ a partir del gráfico de f . En este caso el estudiante establece una relación “**y lógica**” entre un elemento matemático gráfico global y un elemento matemático analítico global, permitiéndole resolver la tarea:

E: ¿qué has tenido en cuenta para hacer el gráfico de f ’?

C19-L: como f está formada por ramas de parábolas, f ’ está formada por segmentos de rectas, además donde f crece f ’>0, y donde f decrece f ’<0, pasa por (3,1) y por (7,0)



(C19-L, Tarea 3)

Sin embargo no podemos considerar que C19-L tenga sintetizados los modos analítico y gráfico pues en la tarea 1 no es capaz de utilizar la información sobre los puntos de inflexión de la función lo que le lleva a realizar un gráfico incorrecto de f, mientras que en la tarea 4 si usa de forma correcta este elemento matemático, esbozando un gráfico correcto de f.

Así, una característica del nivel INTER es el inicio de síntesis entre los modos de representación analítico y gráfico aunque de forma aislada en la resolución del cuestionario.

Una característica de los estudiantes que podían considerarse incluidos en el nivel INTER y que es una manifestación de no tener sintetizados los modos de representación analítico y gráfico, es que pueden manifestar niveles distintos de desarrollo del esquema en la resolución de las diferentes tareas, según el modo de representación (analítico o gráfico), aunque no todos lo manifiesten de la misma manera. Este hecho también lo hemos observado en los estudiantes de 2º Bachillerato. En el siguiente cuadro hemos recogido los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas que presentan esta característica:

NIVEL	CUESTIONARIOS
INTRA en modo gráfico INTER en modo analítico	C21-L, C13-L
INTRA en modo analítico INTER en modo gráfico	C36-L, C17-L

Cuadro 4.7. Cuestionarios de 1º Licenciatura de Matemáticas que se encuentra en diferente nivel de desarrollo del esquema según modo de representación

4.3.3. Nivel TRANS

El nivel TRANS se caracteriza por que el estudiante establece diversas relaciones lógicas entre los elementos matemáticos (“**y lógica**”, **contrarrecíproco**, **equivalencia lógica**) en la resolución de los problemas, utilizando los elementos matemáticos de forma correcta, y reconstruyendo los significados implícitos cuando es necesario. Además, se tiene la síntesis de los modos de representación.

Este nivel de desarrollo del esquema de Derivada lo podemos observar en el cuestionario C38-L de 1º Licenciatura de Matemáticas. Así, en la tarea

1, utiliza la idea de la **derivada como pendiente de la recta tangente a f con carácter local y global**, y la utiliza reconstruyendo su significado, pues indica que **el signo de f ’ proporciona información sobre el crecimiento de f:**

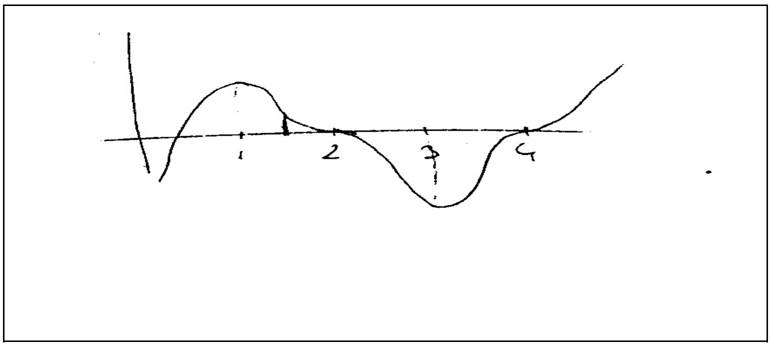
“*si f ’>0, f crece porque f ’es la pendiente de la recta tangente a f, entonces si la pendiente es positiva, f es creciente*”.

Además, el cambio de creciente a decreciente le permite identificar los puntos x=1 (x =3) como máximo (mínimo) relativos. Sin embargo tiene dificultades en explicitar los puntos de inflexión de f. Por ejemplo, cuando se le pregunta por el comportamiento, en x =1.5, x =2.5 y x =3.5 contesta: *“dependería de la inclinación de la tangente, de la pendiente de la recta tangente, que es la derivada,... cambia la inclinación con más o menos velocidad”.*

Y en x =2 y x=4, comenta:

“en x=2, f ’=0, ..., entonces he cambiado la variación de la tangente. En x =4 lo mismo”.

Por la forma de resolver la tarea podemos inferir que C38-L tiene construido la idea de derivada como pendiente de la recta tangente a f con carácter global, lo que le permite esbozar un gráfico correcto de f:



(C38-L, Tarea 1)

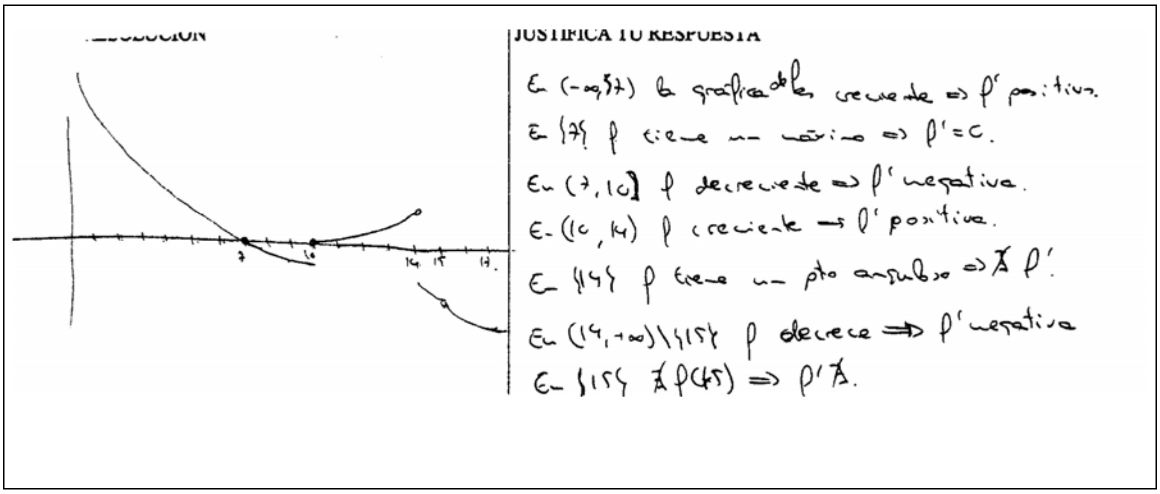
El cálculo de límites, en la tarea 2, le presenta problemas, pero conoce que para la resolución de la tarea necesita de dos elementos matemáticos analíticos: **si f es derivable en x =a → f continua en x =a** , y el elemento matemático que relaciona la **existencia de la derivada de f en un punto con la continuidad de f ’** en dicho punto. Además, se pone de manifiesto que tiene la idea de **derivada como límite del cociente incremental,** pues lo utiliza para el cálculo de f ’, y en la entrevista comenta que la igualdad de los límites laterales del cociente incremental significaría que la tangente por un lado y por el otro son iguales en ese punto. Luego los elementos matemáticos, los usa con sentido, y mostrando que tiene una relación de **equivalencia lógica** entre la expresión analítica de la derivada como límite del cociente incremental, y la **interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente,** (es decir, síntesis en los modos de representación).

En la tarea 3, vuelve a utilizar el elemento matemático que relaciona la **derivada en un punto con la pendiente de la tangente a la gráfica en ese punto**. Y lo usa con sentido cuando comenta f ’(3) =(5-1)/(4-0) =1. Además usa el elemento de conocimiento: si **f derivable en x =a → f continua en x=a**, en la forma de la relación lógica de **contrarrecíproco** (si f no es continua en x=a → f no es derivable en x =a) para expresar que como f no es continua en x =10, entonces no existe la derivada en x =10. También comenta que en un punto anguloso no existe la derivada (vinculada a la idea de la derivada como pendiente de la tangente), para decir que en x =14 no existe la derivada porque al ser un punto anguloso, las tangentes no coinciden (a la izquierda y a la derecha).

En la segunda parte de la tarea, esboza un gráfico de f ’ correcto, excepto en su forma, pero al preguntarle en la entrevista comenta que f ’ estaría formado por trozos de rectas. Para el esbozo de la gráfica relaciona a través de la **conjunción lógica** varios elementos matemáticos:

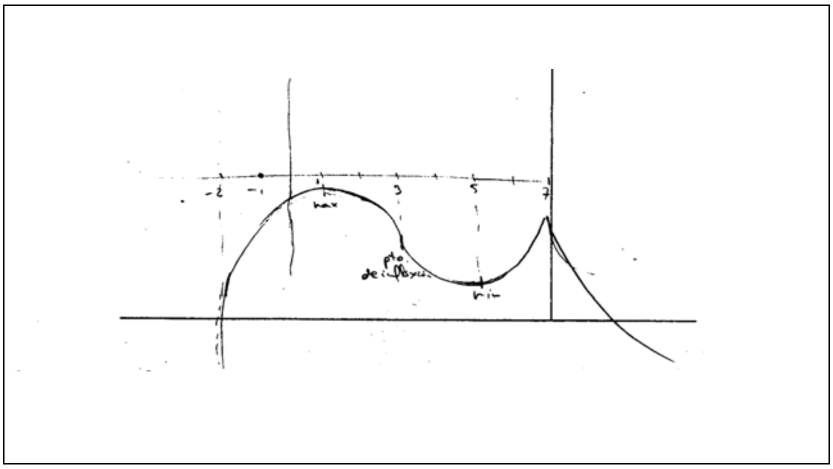
sea f derivable en (a, b), si f crece en (a, b) → f ’>0 en (a,b), y si f decrece en (a, b) → f ’<0 en (a, b)

(**implicación contraria** a la utilizada en la tarea 1 del mismo elemento), y la información obtenida por la utilización de varios elementos matemáticos, en diversos puntos, en la primera parte de la tarea:



(C38-L, segunda parte de la Tarea 3)

En la tarea 4, usa los elementos matemáticos globales que relacionan el **signo de f ' con el crecimiento de f, y el signo de f '' con la concavidad de f,** aunque no recuerda el elemento matemático puntual que relaciona los puntos en los que f '=0, con la existencia de un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. Sin embargo al establecer de forma correcta relaciones ("**y lógica**") entre los elementos matemáticos, que conoce y utiliza, hace que C38-L resuelva correctamente la tarea, indicando que en x =3 hay un punto de inflexión y en x =7 un punto anguloso.



(C38-L, Tarea 4)

Por todo ello podemos inferir que C38-L establece diversas relaciones lógicas (**"y lógica", contrarrecíproco, equivalencia lógica**) de forma correcta entre los elementos matemáticos que utiliza. Además, los elementos matemáticos analíticos y gráficos (puntuales y globales) que necesita para resolver las diferentes tareas del cuestionario los usa correctamente y con sentido, es decir, haciendo uso de los significados implícitos cuando es necesario. Por la forma en que resuelve las distintas tareas del cuestionario se pone de manifiesto que C38-L tiene sintetizados los modos de representación, pues no tiene dificultades en manejar la misma información, si procede del modo analítico o del modo gráfico.

Hay que señalar que aunque C38-L tiene construido el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente a la función y como límite del cociente incremental, no lo aplica en un segundo nivel entre el (f ' ,f ''), en el sentido de que las relaciones que establece entre el par (f, f ') no tenemos manifestación de que las establezca entre el par (f ' y f '') (hecho que se podría haber manifestado en la resolución de varias tareas del cuestionario, por ejemplo la tarea 1).

Podemos considerar que C38-L se encuentra en el nivel TRANS del desarrollo del esquema, tal y como lo hemos caracterizado. A lo largo del cuestionario en ningún momento hace uso de la equivalencia lógica que se establece en el par (f ', f '') entre el crecimiento de f ' y la convexidad de f, que es una de las manifestaciones de considerar f ' como función y f '' su derivada (podía haberse hecho en la tarea 1 o en la segunda parte de la tarea 3), y tampoco se pone de manifiesto su capacidad de aplicar las relaciones que tiene establecidas entre f y f ', a f ' y f '' ni puntual ni globalmente. Estos hechos nos indican que C38-L no ha tematizado el esquema de derivada.

La distribución de los estudiantes de 1º Licenciatura de Matemáticas se recoge en el cuadro siguiente:

NIVEL	ESTUDIANTES	TOTAL
INTRA	C3-L, C41-L, C50-L, C22-L, C1-L, C49-L, C8-L, C5-L, C36-L	9
INTER	C21-L, C27-L, C13-L, C17-L, C26-L, C28-L, C11-L, C15-L, C16-L, C33-L, C29-L, C19-L, C10-L, C30-L, C4-L	15
TRANS	C38-L, C18-L, C25-L, C48-L, C9-L	5

Cuadro 4.8. Estudiantes de 1º Licenciatura de Matemáticas asignados a los diferentes niveles de desarrollo del esquema de Derivada

Cuando se han asignación los estudiantes a un determinado nivel hemos observado que existen diferencias dentro de cada nivel, debido al número de elementos matemáticos que los estudiantes son capaces de usar y al número y tipo de las relaciones establecidas.

Globalmente las respuestas de los estudiantes nos indican que están en un nivel determinado, sin embargo se identifican aspectos que podrían apuntar hacia una mejor diferenciación dentro de cada nivel.

En particular, en el grupo de estudiantes considerados en el nivel INTRA se aprecian diferencias en el número de elementos que usan de manera correcta, hecho que también sucedía en los estudiantes de 1º Bachillerato asignados en este nivel. Pero, además hay diferencias en el número y tipos de relaciones que establecen los distintos estudiantes en el nivel INTER.

4.4. Características del desarrollo del esquema de derivada

El análisis realizado permitió asignar cada individuo a un determinado nivel. Este proceso de análisis puso de manifiesto que:

- Había una construcción progresiva del esquema definida por la cantidad de elementos y relaciones consideradas por los estudiantes asignados a un mismo nivel.
- Existía cierta influencia de los modos de representación a la hora de establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, o de hacer uso de los elementos matemáticos necesarios en determinadas situaciones.

Estos dos aspectos nos llevaron a la necesidad de hablar de subniveles para mostrar como hay una progresiva incorporación de un mayor número de elementos matemáticos y relaciones, y como se ha desarrollado una paulatina síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.

4.4.1. Caracterización de subniveles

La caracterización de los diferentes subniveles de desarrollo del esquema de derivada y los individuos de las diferentes poblaciones asignados a cada uno de ellos se recoge en el siguiente cuadro:

Nivel	Características	Cuestionarios
INTRA 1	- No establece relaciones lógicas entre los elementos matemáticos. - Recuerda sólo algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario, vinculado sólo a un modo de representación analítico o gráfico. - Recuerda elementos matemáticos con errores.	C11-1B, C12-1B, C31-1B, C38-1B, C47-1B, C48-2B, C4-2B, C28-2B, C19-2B, C13-2B, C3-2B C3-L, C41-L, C50-L, C22-L, C1-L, C49-L,
INTRA	- Dificultades en establecer relaciones lógicas (y lógica) entre los elementos matemáticos. (Intento de relación "**y lógica**"). - Recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada. - No tiene sintetizados los modos de representación.	C5-1B, C13-1B, C36-1B,C27-1B, C14-2B, C36-2B, C6-2B, C23-2B C8-L, C5-L, C36-L
INTER1	- Usa la conjunción lógica ("**y lógica**") de manera correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo modo de representación. - Recuerda algunos elementos matemáticos analíticos y/o gráfico (puntuales y/o globales). - Esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.	C18-1B, C24-1B, C8-1B, C21-1B, C6-1B, C35-1B, C2-1B, C42-1B, C14-1B, C17-1B, C23-1B, C33-2B, C39-2B, C17-2B, C25-2B, C20-2B C21-L, C27-L, C13-L, C17-L, C26-L, C28-L

INTER	- Usa diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo modo). - Recuerda los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea en ambos modos de representación (analítico o gráfico). - Esbozos de síntesis de los modos de representación (analítico y gráfico). - Dificultades en trasladar las relaciones entre f y f ' a las relaciones entre f ' y f ''(indicativo de la consideración de f ' como función)	C5-2B, C2-2B, C45-2B, C46-2B C50-2B, C11-L, C15-L, C16-L, C33-L, C29-L, C19-L, C10-L, C30-L, C4-L
TRANS	- Usa diferentes relaciones lógicas (**"y lógica", contrarrecíproco, equivalencia lógica**) entre los elementos matemáticos de forma correcta. - Recuerda los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar decisiones. - Síntesis de los modos de representación (analítico y gráfico). - Traslación de las relaciones entre f ' y f '' de manera puntual	C38-L, C18-L, C25-L, C48-L, C9-L

Cuadro 4.9. Caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada

En el siguiente cuadro hemos recogido el número de estudiantes de cada muestra asignados a cada subnivel:

NIVEL	1º BACHILLERATO	2º BACHILLERATO	1º LICENCIATURA
INTRA 1	5	6	6
INTRA	4	4	3
INTER 1	11	5	6
INTER	-	5	9
TRANS	-	-	5
TOTAL	20	20	29

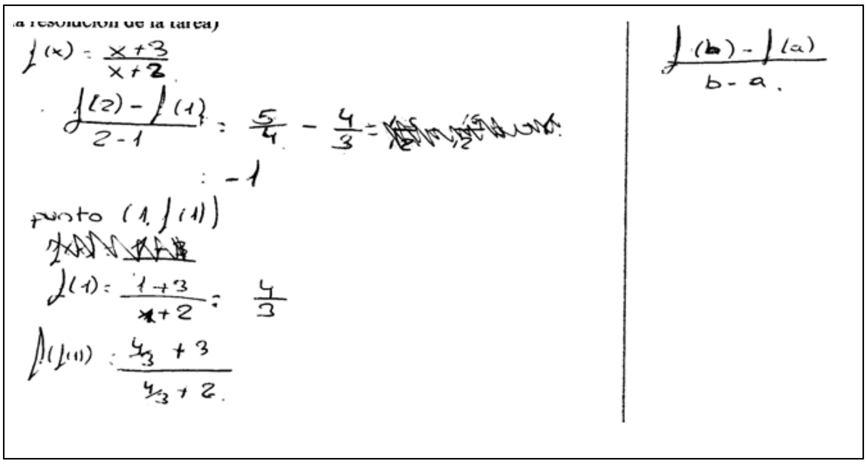
Cuadro 4.10. Estudiantes de cada muestra asignados a cada subnivel del desarrollo del esquema de Derivada

Pasamos a continuación a comentar y caracterizar cada uno de los subniveles, a través del análisis de algunos cuestionarios.

NIVEL INTRA 1:

Un sujeto en este subnivel se caracteriza por no establecer ningún tipo de relación lógica entre elementos matemáticos, y recordar de forma correcta sólo un par de elementos en todas las tareas del cuestionario y de forma aislada.

Por ejemplo, el comportamiento de C47-1B a lo largo de todo el cuestionario mostraba evidencia de esta característica. Así, en la Tarea 1, dada en modo analítico, hace uso del elemento matemático analítico global relativo a la **tasa de variación media** para resolver la primera parte de la tarea, poniendo de manifiesto en la entrevista que no conoce / no recuerda el elemento matemático analítico puntual relativo a la tasa de variación instantánea:



(C47-1B, Tarea 1)

> *E: calculas la tasa de variación media. ¿ y el cálculo de la pendiente de la recta secante?*
> *C47-1B: no me acordaba*
> *E: ¿ y la tasa de variación instantánea en el punto (1, f(1))?*
> *C47-1B: no me acuerdo*
>
> (C47-1B, Tarea 1)

En la Tarea 2, dada en modo gráfico, para encontrar el valor de f(2) intenta recordar algún procedimiento aprendido en la instrucción previa pero sin éxito, C47-1B indica que necesita la expresión analítica de f(x). Para encontrar f '(2) recuerda con errores la interpretación geométrica de la derivada necesario para poder encontrarlo. Este hecho puede indicar que C47-1B no tiene la idea de derivada en un punto como pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, pues en la entrevista comenta: *"porque como la tangente coincide con la derivada"*.

En la Tarea 3, C47-1B usa el elemento matemático analítico global relativo al **inverso del operador derivada:**

si f '(x) recta (función grado 1) → f(x) parábola (función grado 2) permitiéndole decidir que la gráfica de f(x) será una parábola (A o B), pero no es capaz de hacer uso de ningún otro elemento matemático que le permita decir cuál de las dos gráficas se corresponde con la función f(x) solución de la tarea. La Tarea 4 no la contesta, sin dar razones en la entrevista.

Globalmente, en las respuestas al cuestionario C47-1B hace uso de dos elementos matemáticos analíticos globales de forma correcta y aislada, no estableciendo ninguna relación lógica. Además, no fue posible identificar cuál era el significado de derivada en un punto ni como límite del cociente incremental (TVI) ni como pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. Este tipo de comportamiento fue característico de los 17 cuestionarios que se encuentran en el nivel INTRA 1 del desarrollo del esquema.

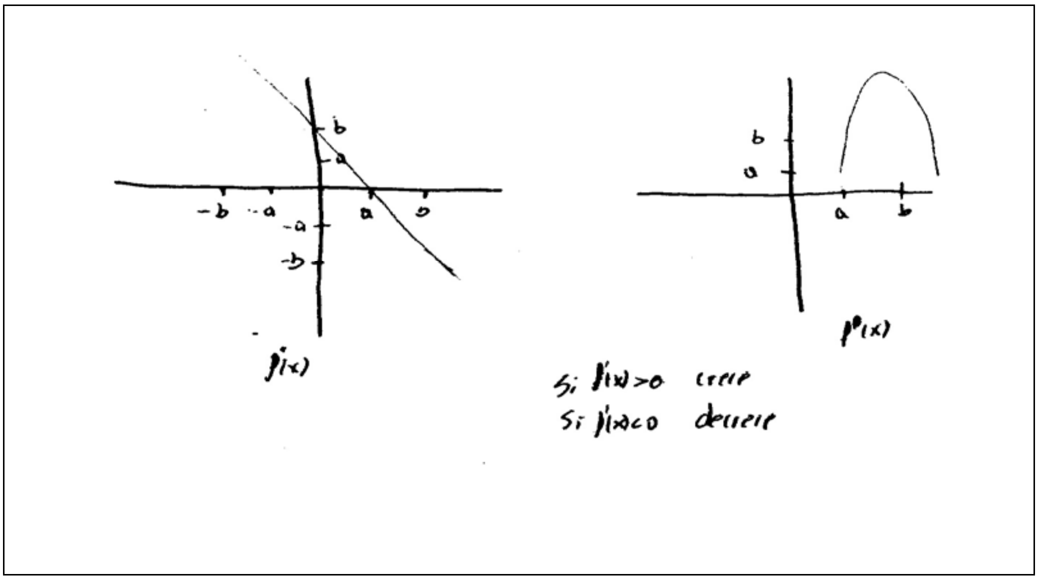
NIVEL INTRA:

Se diferencia del nivel INTRA1 en que el individuo es capaz de recordar más elementos matemáticos tanto analíticos como gráficos (puntuales y/o globales). Los estudiantes en este nivel recuerdan con más frecuencia los elementos relacionados con f ', que con f ''. Pero no hay evidencia de que recuerden o usen más los elementos matemáticos puntuales que los globales o viceversa. También, en el nivel INTRA algunos elementos matemáticos son recordados por los estudiantes con errores.

Este subnivel de desarrollo del esquema de Derivada lo podemos observar en el cuestionario C14-2B. Así, en la Tarea 1, en la que se pide emparejar gráficos de funciones con las gráficas de sus derivadas, sólo usa el elemento matemático que **relaciona el signo de f ' con el crecimiento de f**, sin embargo, la pareja de funciones que identifica utilizando este elemento no es correcta.

E: ¿sabrías comentar cómo resuelves la tarea?
C14-2B: sólo he encontrado la pareja c) con b) pero no estoy segura. Me he fijado que si f '<0 entonces f decrece y si f '>0, f crece
E:¿ podrías fijarte en algo más?
C14-2B: no
E: ¿puedes encontrar otra pareja?
C14-2B: no sé.
(C14-2B, Tarea 1)

En la Tarea 2, C14-2B recuerda el **inverso del operador derivada** pues comenta: *"si* f ' es *una recta entonces* f es *una parábola",* y elementos que vinculan el **signo de f ' y al crecimiento de f.** Sin embargo, el uso conjunto de estos dos elementos no le permite resolver satisfactoriamente la tarea, según se muestra en el dibujo realizado (ya que según el gráfico de f ' esbozado por el estudiante el máximo de f debería estar en x =a, y no en x =b como aparece en su dibujo). Aunque en la entrevista verbaliza estos dos elementos matemáticos, no es capaz de vincular sus significados para inferir una respuesta adecuada:



(C14-2B, Tarea 2)

E: ¿puedes explicarme cómo resuelves la tarea?

C 14-2B: si f ' es una recta entonces f es una parábola y donde f ' >0 entonces f crece, y donde f ' <0 entonces f decrece

E: a y b no son valores fijos, son parámetros, ¿podrías hacer otras posibles gráficas variando a y b a lo largo de los ejes?
Cl4-2B:no

(C14-2B, Tarea 2)

Este tipo de respuesta, característica del nivel INTRA indica que una cosa es recordar los elementos pertinentes para resolver una tarea y otra relacionarlos adecuadamente para producir una respuesta correcta. De ahí que la forma en la que los estudiantes llegan a producir las respuestas a partir de la consideración conjunta de información procedente de dos elementos matemáticos (el uso de la “**y lógica**”) se constituya en un indicador del desarrollo del esquema.

Esto puede ser debido a que C14-2B no tiene los significados asociados a los elementos matemáticos que recuerda. Esto puede indicar que se trata de un procedimiento aprendido en la instrucción previa.

Estas características vuelven a aparecer en la Tarea 3, en la que C14-2B hace uso de dos elementos matemáticos analíticos puntuales:

- **Si f derivable en x =a $\rightarrow$ f continua en x =a**
- **Existencia e igualdad de los límites laterales de f ' en x =a $\rightarrow$ f ' continua en x=a.**

El uso conjunto ("**y lógica**") de estos dos elementos matemáticos hace que resuelva de forma correcta la tarea, pero en la entrevista se pone de manifiesto que no tiene la idea de derivada como limite del cociente incremental. Por tanto, por la forma en que resuelve la tarea C14-2B ha memorizado un procedimiento para resolver un determinado tipo de tareas, lo recupera de la memoria, y lo aplica.

En la primera parte de la Tarea 4, sólo usa de forma correcta el elemento matemático analítico puntual utilizado en la tarea anterior que relaciona la derivabilidad y la continuidad de una función. Además, para obtener el valor de f ’(3) intenta recordar que existe alguna relación entre f ’(a) y la pendiente de la recta tangente a f en x =a, pero sin éxito. C14-2B parece haber memorizado de la instrucción previa que cuando f tiene un pico, no existe la derivada, f '(14), pero no sabe explicar por qué.

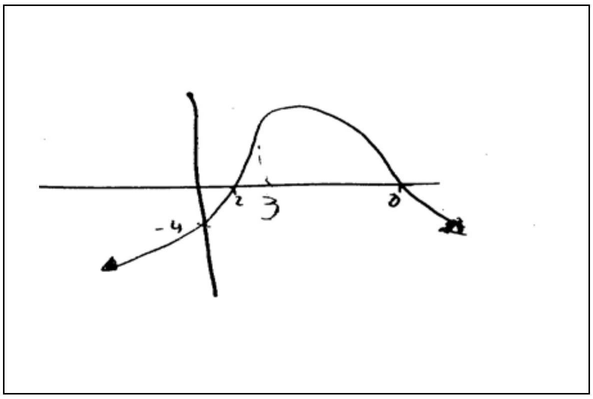
En la Tarea 5, sin embargo, usa el elemento matemático gráfico puntual que **relaciona la derivada en un punto con la pendiente de la recta tangente en dicho punto**, elemento que no pudo utilizar en la Tarea 4, y que aquí usa para resolver la tarea de forma correcta:

> *C14-2B: primero calculo f, que me da esto (señala f(x) como polinomio de grado 3), después calculo la derivada y la igualo a cero porque la derivada es la pendiente de la recta tangente y obtengo dos valores*
>
> (C14-2B, Tarea 5)

Si nos fijamos en ambas tareas, parece que C14-2B tiene memorizados los elementos matemáticos asociados a un determinado tipo de tareas. De ahí que use el elemento relativo a la interpretación geométrica de la derivada en la Tarea 5, y no lo haga en la Tarea 4

La Tarea 6 no la contesta. Aunque comenta: "f *continua* → f *derivable*", poniendo de manifiesto que usa el elemento: f derivable en x =a →f continua en x =a, de forma errónea, como si fuera una equivalencia o doble implicación (ya que en la Tarea 3 y en la Tarea 4 lo usó bien en la implicación contraria). Esto es una de las características propias de los estudiantes que se encuentran en este nivel de desarrollo, recordar con errores algunos elementos matemáticos.

En la Tarea 7, usa de forma correcta el elemento que relaciona el signo de f ’ con el crecimiento de f, aunque comenta que x =3 es punto de inflexión no sabe explicar por qué. Las relaciones lógicas ("**y lógica**") que establece en la resolución de esta tarea son erróneas, y el gráfico esbozado no es correcto:



(C14-2B, Tarea 7)

C14-2B: ...si f ' <0 f decrece, de 5 a 8 decrece si f '>0 f crece, para *menores que 5*

E: ¿qué sucede en x =3?

C14-2B: habría un punto de inflexión, creo

E: ¿por qué?

C14-2B: ...

(C14-2B, Tarea 7)

Esto vuelve a ser una evidencia de las dificultades en el uso de la **"y lógica**" que muestran los estudiantes en este nivel, pues el uso conjunto de los dos elementos que recuerda para resolver el problema no le ha permitido resolverlo satisfactoriamente, según se muestra en el dibujo que esboza.

Por tanto, podemos decir considerando globalmente el cuestionario C14-2B, que recuerda elementos matemáticos pero tiene dificultades en establecer relaciones lógicas ("**y lógica"**) entre ellos para obtener información que le permite resolver la tarea. Las respuestas de C14-2B al cuestionario indica que el modo de representación en el que se proporciona la información influye en como usa los elementos matemáticos que recuerda. Así, mientras es capaz de usar la interpretación geométrica de la derivada, como pendiente de la recta tangente, cuando se da la tarea en modo analítico (Tarea 5), no usa este elemento en la Tarea 1 y la Tarea 4, dadas en modo gráfico. C14-2B usa de forma correcta en algunas tareas, algunos elementos matemáticos analíticos y gráficos puntuales y globales de forma aislada. En general, hace uso en más ocasiones de los elementos matemáticos vinculados al modo analítico que al modo gráfico, esto nos pone de manifiesto que no tiene sintetizado los modos de representación analíticos y gráficos. Por tanto, C14-2B lo asignamos al nivel INTRA.

NIVEL INTER 1:

Este es un subnivel de transición entre el nivel INTRA y el nivel INTER, se caracteriza porque se empiezan a realizar algún tipo de relación lógica (“**y lógica”**) entre elementos matemáticos, de manera correcta aunque de forma aislada en algún momento determinado del cuestionario, hecho que no sucedía en el subnivel INTRA. Los estudiantes en el nivel INTER 1 usan algunos elementos matemáticos más que en el nivel INTRA. Se sigue manifestando influencia del modo de representación (analítico o gráfico) a la hora de establecer relaciones lógicas entre lo elementos para obtener información relativa al problema. Sin embargo no podemos considerar que se encuentran en el nivel INTER, ya que un individuo en el nivel INTER es capaz de establecer diversos tipos de relaciones lógicas (“**y lógica”, contrarrecíproco, equivalencia lógica**) entre elementos matemáticos de forma correcta, hecho que no sucede en los individuos que se encuentran en el subnivel que estamos considerando.

Este subnivel de desarrollo del esquema de Derivada lo podemos observar en el cuestionario C39-2B. Así, en la Tarea 1, dada en modo gráfico en la que se pide encontrar parejas de funciones con sus derivadas respectivas, usa dos elementos matemáticos analíticos uno puntual (**si f ’(a) =0 → x =a máximo, mínimo o punto de inflexión**) y otro global (sea f derivable en (a, b) **si f ’>0 en (a, b)→ f crece en (a, b), y si f ’<0 en (a, b) → f decrece en (a, b)**), la relación lógica (“**y lógica**”) que establece entre estos elementos matemáticos le permite encontrar la pareja formada por a) función y f) derivada. Sin embargo haciendo uso del elemento relativo al signo de f ’ y al crecimiento de la función, forman una pareja incorrecta c) y b), es decir hace uso incorrecto de un elemento matemático que recuerda de forma correcta:

E: ¿en qué te has fijado para relacionar a) y f)?

C39-2B: por ejemplo, en la a) los máximos y los mínimos, donde está el máximo y el mínimo, en f) corta al eje OX, es 0 en esos puntos. En a) hasta el mínimo decrece y en f) está por debajo del eje OX, es menor que 0. Y desde el mínimo al máximo en a) crece, en f) está por encima del eje OX, es mayor que 0

E: ¿para relacionar b) y c) en qué te has fijado?

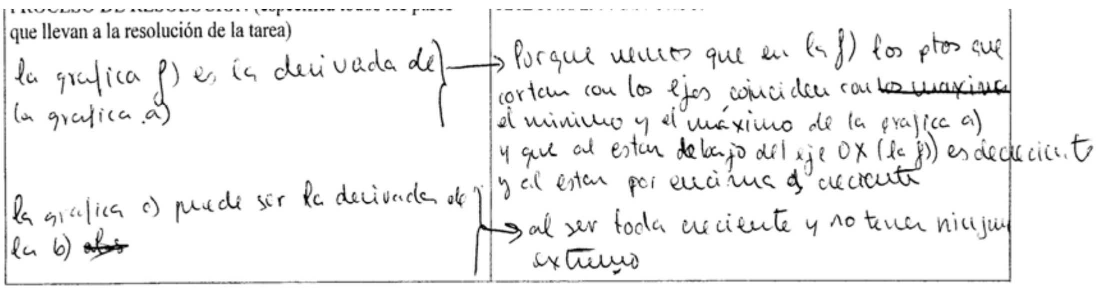
C39-2B: esta función es entera creciente sin máximos ni mínimos, y aquí encontré que toda la función está por encima del eje OX, y entonces al no cortar al eje la función no va tener ni máximos ni mínimos

E: ¿podrías fijarte en algo más para establecer relaciones?

C39-2B: no, esto es así, porque es así...

E: ¿encontraste alguna otra pareja?

C39-2B: yo buscando no encontré ninguna otra



que llevan a la resolución de la tarea)

la grafica f) es la derivada de la grafica a) → Porque vemos que en la f) los ptos que cortan con los ejes coinciden con ~~los maximos~~ el minimo y el máximo de la grafica a) y que al estar debajo del eje OX (la f)) es decreciente y al estar por encima de creciente

la grafica c) puede ser la derivada de la b) ~~abs~~ → al ser toda creciente y no tener ningun extremo

(C39-2B; Tarea 1)

En la Tarea 2, vuelve a hacer uso de los dos elementos matemáticos analíticos puntual y global que utilizó en la Tarea 1, y además el elemento matemático gráfico global relativo al **inverso del operador derivada: f ’ recta → f parábola**. A través del establecimiento de relación lógica (“**y lógica**”) entre estos elementos matemáticos ha hecho posible que distinga cuatro posibles gráficas de f dependiendo de que los parámetros a y b fueran positivos o negativos, aunque no es capaz de explicar cómo influiría en la gráfica de f el hecho de fijar un parámetro mientras variamos el otro. Esto es una manifestación de que el individuo no es capaz de establecer relaciones lógicas (“y lógica”) entre los elementos matemáticos utilizados al modificar las condiciones de la tarea.

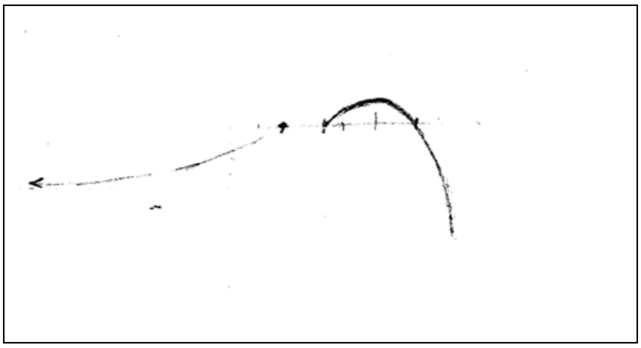
En la Tarea 3, utiliza dos elementos matemáticos analíticos puntuales, uno de ellos en forma de **contrarrecíproco** (si f no es continua en x =a→ f no derivable en x=a), y el otro elemento matemático es el relativo a la **existencia e igualdad de los límites laterales de f ’ en x=1 → f ’ continua en x =1**. La relación lógica (“**y lógica**”) que establece entre estos elementos matemáticos le permite resolver de forma correcta la tarea, poniendo de manifiesto que tiene la idea de derivada como límite del cociente incremental.

En la Tarea 4, en su primera parte, vuelve a hacer uso de algunos de los elementos matemáticos analíticos utilizados en las tareas anteriores. Se pone de manifiesto que no tiene la idea de derivada en un punto como pendiente de la recta tangente en dicho punto, pues no es capaz de decir cuál es el valor de f '(3). También muestra dificultades en la derivabilidad de los puntos angulosos (x =14), pues comenta con respecto a la existencia de f '(14): "*yo diría que sí, que sería derivable porque es un máximo*". En la segunda parte de la tarea, sólo hace uso del elemento matemático global que **relaciona el crecimiento de f con el signo de f '**, pero no utiliza el elemento matemático gráfico global relativo al operador derivada (si f parábola → f ' recta). El gráfico esbozado no es correcto a partir de x =10 mostrando dificultades en los puntos en los que en el apartado anterior había tenido problemas.

La Tarea 5 no la contesta, y no da razones sobre las causas. En cuanto a la Tarea 6, la primera parte no la contesta, y en la segunda parte hace uso de un par de elementos matemáticos analíticos puntuales usados en tareas anteriores **(f '(a) = límite del cociente incremental, y si f derivable en x =a → f continua en x =a)** de forma aislada, sin establecer relaciones lógicas entre elementos. Por tanto, en esta tarea dada en modo analítico no es capaz de establecer ningún tipo de relación entre los elementos para obtener información relativa a la resolución del problema.

En la Tarea 7, sólo hace uso de forma correcta del elemento matemático analítico global que **relaciona el signo de f ' con el crecimiento de f**, y usa de forma errónea el elemento matemático analítico puntual: si f '(a) =0 → x =a máximo, mínimo o punto de inflexión. Se pone de manifiesto que no conoce / no recuerda el elemento matemático analítico global relativo a f '' (sea f derivable en (a, b), si f ''>0 en (a, b)→ f convexa en (a, b) y si f ''<0 en (a,b)→ f cóncava en (a, b). No es capaz de esbozar el gráfico de f de forma correcta:

C39-2B: f ’(3) =f ’(5) =0 máximos o mínimos
y =-4, x =8 son asíntotas
f ’<0, f decrece entre 5 y 8
f ’>0, crece para x menor que 5
E: ¿y f ’’>0?
C39-2B: no lo he tenido en cuenta
E: ¿qué información te daría el signo de f ’’?
C39-2B: ...
E: ¿qué sucede en el gráfico en el intervalo comprendido entre 2 y 3?
C39-2B: ... ahora mismo no...



(C39-2B, Tarea 7)

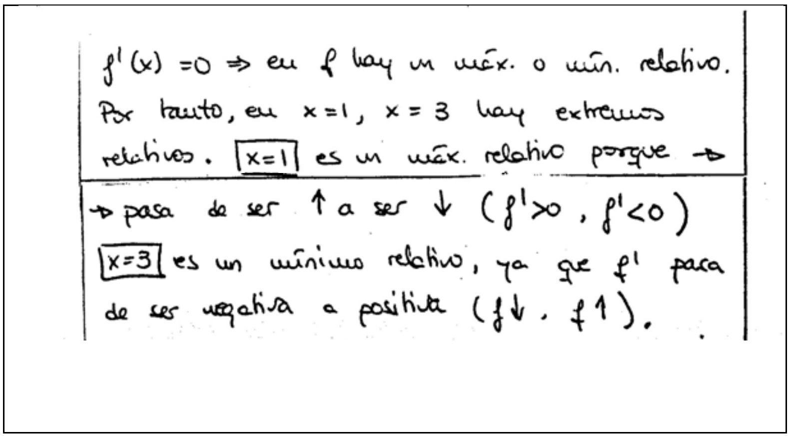
Globalmente, a lo largo de todas las tareas el cuestionario C39-2B establece relaciones lógicas (“**y lógica”**) entre elementos matemáticos de forma aislada. Así, en la Tarea 1 establece una relación lógica (“**y lógica**”) entre dos elementos matemáticos analíticos, en la Tarea 2 también, aunque se pone de manifiesto que al variar las condiciones del enunciado de la tarea ya no es capaz de establecer relación lógica (y lógica) entre los elementos matemáticos utilizados. Este hecho se convierte en una característica que va a diferenciar no sólo el desarrollo en el nivel INTER, sino que determina una característica de un mayor desarrollo del esquema. En la Tarea 3, establece una relación lógica (“**y lógica**”) entre dos elementos matemáticos analíticos puntuales, y sin embargo en otras hace un uso incorrecto de algún elemento matemático analítico puntual y establece alguna relación lógica (“y lógica”) incorrecta entre ellos (en la Tarea 7).

También, se pone de manifiesto que tiene dificultades en el uso de elementos matemáticos gráficos (sólo usa un elemento gráfico global, el inverso del operador derivada en la Tarea 2, a lo largo de todo el cuestionario) se observa que aunque tiene la idea de derivada como límite del cociente incremental (en las Tareas 3 y 6), no sucede lo mismo con la idea de derivada en un punto como pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto (en las Tareas 4 y 5). C39-2B tiene dificultades en manejar la misma información si procede del modo gráfico o del modo analítico, por lo que muestra no tener sintetizados los modos de representación analítico y gráfico. Por todas estas características podemos considerar que se encuentra en el nivel INTER1 del desarrollo del esquema.

NIVEL INTER:

En este nivel de desarrollo del esquema de derivada hay más riqueza en las relaciones lógicas usadas y además estas relaciones se dan con más frecuencia. Los elementos matemáticos no sólo se relacionan a través de la conjunción lógica (**"y lógica"**), sino también mediante **contrarrecíproco** y **equivalencia lógica**. Este último tipo de relación lógica es la que más dificultades presenta en este nivel de desarrollo del esquema. También este nivel se caracteriza porque se usan algunos elementos matemáticos más que en el nivel anterior de forma correcta. Se sigue manifestando influencia del modo de representación (analítico o gráfico).

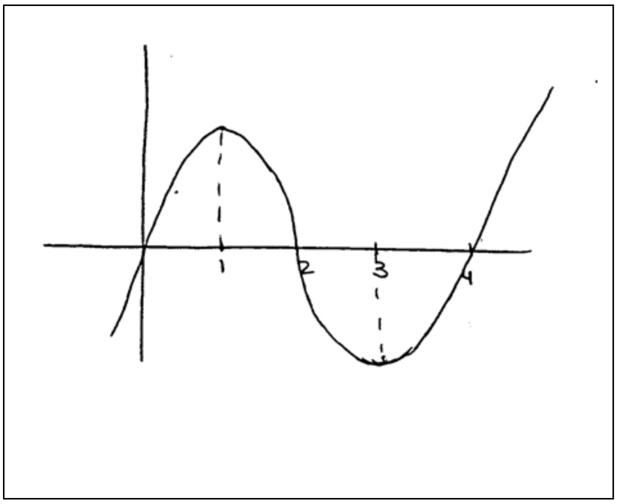
Este nivel de desarrollo del esquema de Derivada lo podemos observar en el cuestionario C29-L de 1º Licenciatura de Matemáticas. Así, en la Tarea 1 relaciona de forma correcta el elemento (si $f'(a)=0 \rightarrow x=a$ máximo, mínimo o punto de inflexión de f) y el elemento que **relaciona el signo de f ' con el crecimiento de f** para obtener información sobre los extremos relativos:



$f'(x) = 0 \Rightarrow$ en f hay un máx. o mín. relativo.
Por tanto, en $x=1$, $x=3$ hay extremos relativos. $\boxed{x=1}$ es un máx. relativo porque →
→ pasa de ser ↑ a ser ↓ ($f'>0$, $f'<0$)
$\boxed{x=3}$ es un mínimo relativo, ya que f' pasa de ser negativa a positiva (f↓ . f↑).

(C29-L, Tarea 1)

El uso del comportamiento de la segunda derivada para obtener información sobre f es característica de este nivel. En este sentido, C29-L tiene dificultades en identificar los puntos de inflexión, pues aunque identifica x =2 como punto de inflexión, fijándose en el hecho de que es un punto anguloso y no existe f '', sin embargo no sucede lo mismo en los puntos x =4, x =1.5, x =2.5 y x =3.5. Así, de x =4 no es capaz de decir nada, y de x=1.5, x =2.5 y x =3.5, en la entrevista comenta que en estos puntos f ''=0 por ser puntos de tangente horizontal de f ', e indica que en ellos cambiaría la concavidad, pero el gráfico no lo esboza de forma correcta.



(C29-L, Tarea 1)

De este hecho podemos deducir que C29-L identifica el elemento que relaciona el comportamiento de f ' con el comportamiento de f, y esta relación la puede aplicar en otro ámbito, entre f ' y f '', de manera puntual, pero mostrando dificultades en el uso de estos elementos matemáticos que recuerda de forma correcta. Sin embargo, C29-L en esta tarea, no es capaz de reconstruir la relación entre el crecimiento de f ' y la concavidad de f, aunque si conoce / recuerda la relación entre el signo de f ' y el crecimiento de f. Este alumno tiene información desde la gráfica de f ' que podía usar para determinar la concavidad de f (a través del signo de f ' viendo la derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica) pero tiene dificultades para hacerlo. Este hecho nos lleva a pensar que C29-L no tiene construido el significado de la derivada como función, ya que ello implicaría poder aplicar las mismas relaciones e implicaciones que tiene para f y f ' , para f ' y f '' cosa que no hace en esta tarea. De esta manera, la capacidad de aplicar relaciones entre f y f ' a f ' y f '' puede ser un indicativo de la construcción del significado de la primera derivada como función.

En la Tarea 2, relaciona a través de **"y lógica"** los elementos matemáticos analíticos puntuales que utiliza en la resolución de la tarea. Hace uso del elemento matemático analítico puntual:

si **f es derivable en x =a → f continua en x =a** ,

y del elemento matemático analítico puntual que relaciona la **existencia de la derivada de f en un punto con la continuidad de f ' en dicho punto**. Poniéndose de manifiesto en la entrevista que identifica **la derivada en un punto con el límite del cociente incremental.**

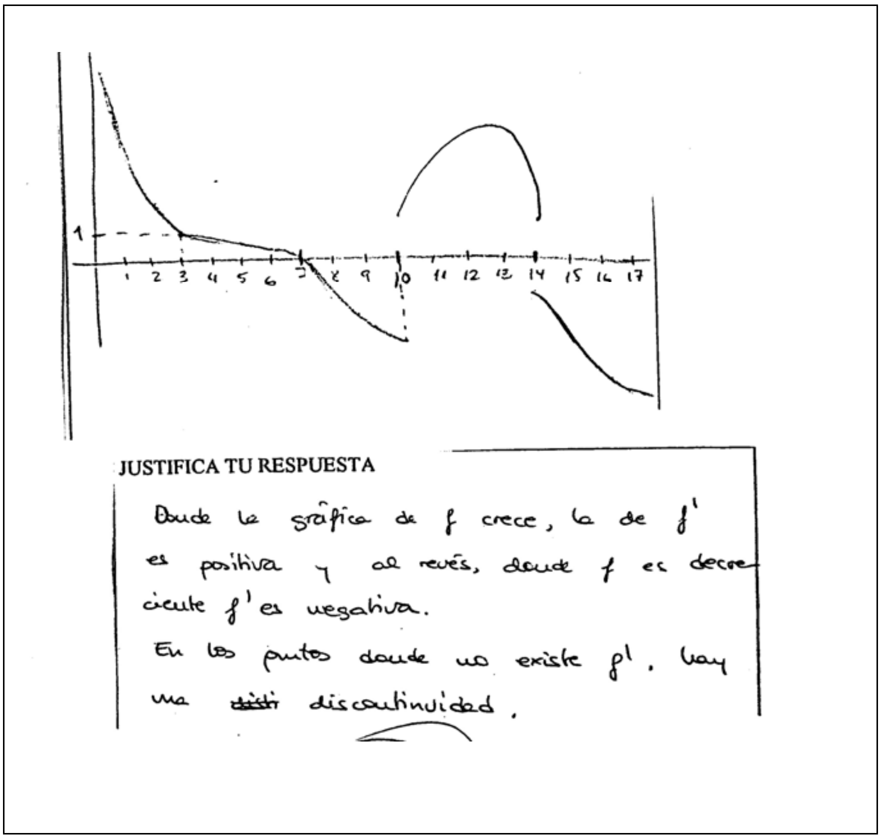
En la Tarea 3 usa el elemento matemático gráfico puntual que **relaciona la derivada en un punto con la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto**, y lo usa con sentido (por ejemplo, cuando dice que f '(7)=0 porque la tangente es horizontal). También, se pone de manifiesto el establecimiento de relaciones lógicas entre algunos elementos matemáticos a través del **contrarrecíproco**, como es el caso del elemento matemático analítico puntual: si **f derivable en x =a → f continua en x =a**, cuando comenta que no existe f ’(10) porque f es discontinua en x =10.

C29-L manifiesta la característica de “recordar” algún elemento matemático y no ser capaz de hacer uso de los significados implícitos. Este es el caso del elemento matemático analítico puntual relativo al punto cúspide, pues comenta que

“*no existe f ’(14) porque x =14 es un punto anguloso, la función es continua en ese punto pero no es derivable”*, y señala *“la verdad es que no lo sé*”.

(C29-L, Tarea 3)

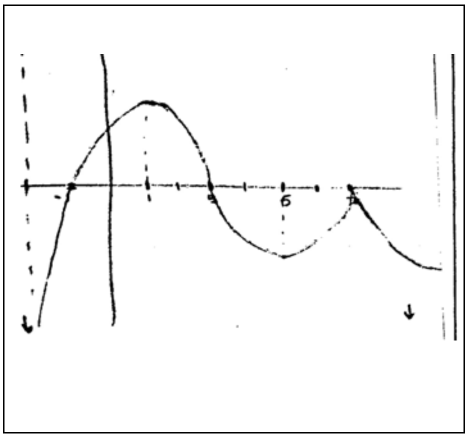
En la segunda parte de la Tarea 3, C29-L no es capaz de expresar que si una función es una parábola entonces la derivada es una recta. Esto nos permite pensar que C29 en esta tarea no se ha planteado la necesidad de relacionar una función con su función derivada, sólo lo hace puntualmente (localmente), al igual que le sucedía en la Tarea 1 con la idea de la derivada como pendiente de la recta tangente a f. Sólo usa el elemento matemático analítico global que **relaciona el crecimiento de f con el signo de f ’**(elemento matemático que en la Tarea 1 había mostrado que lo utiliza como una **equivalencia lógica**), pero no recuerda / no conoce / no es capaz de reconstruir el elemento matemático que relaciona la concavidad de f con el crecimiento de f ’, y no esboza un gráfico correcto de f ’:



(C29-L, Tarea 3)

En la Tarea 4, relaciona a través de "**y lógica**" los elementos matemáticos que **relacionan el signo de f ' con el crecimiento de f, y el signo de f '' con la concavidad de f**, y el elemento que **relaciona los puntos en los que f ' se anula con la existencia de un máximo, un mínimo o un punto de inflexión**. El uso conjunto de estos elementos le permite decir que x=1 es un máximo, x =3 un punto de inflexión y x =5 mínimo. Respecto a x =7 comenta que es un punto anguloso, porque f pasa de crecer a decrecer, y es convexa, y esboza un gráfico correcto de f:

> *C29-L: ... x =3 es punto de inflexión porque entre –1 y 5 es decreciente y pasa de ser cóncava a convexa...*
>
> *E: ¿ en x = 7?*
> *C29-L: hasta x = 7 f crece, y a partir de ahí decrece, y es convexa, luego hay un punto anguloso.*



(C29-L, Tarea 4)

Globalmente se puede considerar que C29-L se encuentra en un nivel INTER del desarrollo del esquema, según lo hemos caracterizado, pues establece relaciones lógicas (“**y lógica**”, **doble implicación o equivalencia lógica, contrarrecíproco**) correctas entre los elementos matemáticos, y utiliza de forma correcta los elementos matemáticos analíticos y gráficos (puntuales y globales). Sin embargo no tiene la síntesis entre los dos modos de representación analítico y gráfico, característica del nivel TRANS, ya que sólo utiliza la idea de derivada como pendiente de la recta tangente a f o como límite del cociente incremental puntualmente (localmente) pero no globalmente , lo que implicaría que en la Tarea 1 la información dada por la gráfica de f ’ le habría servido para determinar la concavidad de f. Además muestra tener dificultades en manejar la misma información si procede del modo gráfico o del modo analítico, ya que en la segunda parte de la Tarea 3, dada en modo gráfico, para esbozar el gráfico de f ’ a partir del gráfico de f sólo hace uso de un elemento matemático. Sin embargo, en la Tarea 4, tarea dada en modo analítico, establece las relaciones lógicas (“**y lógica”**) entre los elementos matemáticos de forma correcta, y hace uso de los elementos matemáticos analíticos puntuales y globales necesarios en la resolución de la tarea, esbozando el gráfico de f de forma correcta.

NIVEL TRANS

Como se comentó anteriormente, el nivel TRANS se caracteriza por que el estudiante establece las relaciones lógicas (“**y lógica**”, **contrarrecíproco, equivalencia lógica**) necesarias entre los elementos matemáticos en la resolución de las tareas, y hace uso de los elementos matemáticos analítico y/o gráfico puntual y/o global que necesita para la resolución de la tarea planteada, reconstruyendo los significados implícitos cuando le es necesario en la resolución de la misma, mostrando tener la síntesis de los modos de representación.

En el apartado 4.3.3 de este capítulo comentamos la resolución del cuestionario 38 de 1º de Licenciatura de Matemáticas, como una manifestación de un individuo que se encuentra en el nivel TRANS del desarrollo del esquema de Derivada tal y como lo hemos caracterizado.

El estudio nos ha permitido observar que entre algunos de los estudiantes que se encuentran en el nivel INTER se manifiestan distintos subniveles de desarrollo del esquema según el modo de representación (analítico o gráfico), aunque no todos lo manifiesten de la misma manera. Esto es una manifestación de no tener sintetizados los modos de representación analítico y gráfico. Este hecho lo hemos recogido en el cuadro 4.11.

NIVEL	CUESTIONARIOS
INTRA en modo analítico INTER1 en modo gráfico	C36-L, C17-L
INTRA en modo gráfico INTER1 en modo analítico	C21-L, C13-L, C39-2B
INTRA en modo analítico INTER en modo gráfico	C45-2B
INTRA en modo gráfico INTER en modo analítico	C5-2B
INTER1 en modo analítico INTER en modo gráfico	C11-L, C19-L, C30-L
INTER1 en modo gráfico INTER en modo analítico	C15-L, C10-L, C4-L

Cuadro 4.11. Cuestionarios que se encuentran en diferentes subniveles de desarrollo del esquema según modo de representación

En el siguiente cuadro podemos observar las relaciones lógicas y los elementos matemáticos que se utilizan en los diferentes subniveles de desarrollo del esquema de derivada:

NIVEL	RELACIONES LÓGICAS[1]	ELEMENTOS MATEMÁTICOS[2]
INTRA1	**- No se establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos.**	- RECTA TANGENTE A LA CURVA EN x =a – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA EN UN PUNTO (x =a) (G.P.) - DERIVADA EN UN PUNTO COMO LÍMITE DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA (A.P.) - TASA DE VARIACIÓN MEDIA (A.G.)
INTRA	**- Intento de relación "y lógica".**	- CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x=a (A.P.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x=a (A.P.) - CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA DERIVABALE EN x= a (A.P.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (A.G.) - CONDICIÓN SUFICIENTE DE CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE f EN RELACIÓN CON EL SIGNO DE f'' (A.G.) - CONDICIÓN SUFICIENTE DE CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE f EN RELACIÓN CON EL CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE f' (A.G.) - OPERADOR DERIVADA: REGLAS DE DERIVACIÓN - INVERSO DEL OPERADOR DERIVADA: INTEGRACIÓN
INTER1	**- Se establecen relaciones del tipo "y lógica" entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntales y/o globales (generalmente en el mismo modo).**	- DERIVADA EN UN PUNTO COMO LÍMITE DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA: Se usa "desencapsulando" la idea de la existencia de f' en un punto x=a, mediante la aplicación de la igualdad de los límites laterales del cociente incremental. (A.P.)

[1]Las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos en el nivel TRANS son además de las que figuran en dicho nivel, las que figuran en el nivel INTER.

[2]Al final de cada elemento aparece dos letras mayúsculas que indican: la primera letra si se trata de un elemento Gráfico (G) o Analítico (A),
y la segunda letra si se trata de un elemento Puntual (P) o Global (G).
Los elementos matemáticos que se utilizan en el nivel INTER son además de los que figuran en dicho nivel, los que figuran en el nivel INTRA. Lo mismo sucede con los elementos matemáticos que se utilizan en el nivel TRANS.

Cuadro 4.12. Caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada a través de relaciones lógicas y elementos matemáticos

NIVEL	RELACIONES LÓGICAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS
INTER	**- Se establecen relaciones del tipo "y lógica" entre elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntales y/o globales (generalmente en el mismo modo).**	- CÚSPIDE: GRÁFICA "QUEBRADA" (G.P.) - RELACIONES DE f ' CON EXTREMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN (A.P.) - RELACIONES DE f " CON LOS EXTREMOS Y LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN (A.P.) - CONDICIÓN SUFICIENTE DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN (RELACIONES CON f ") (A.P.) - INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA (CON CARÁCTER GLOBAL) (G.G.) - OPERADOR DERIVADA: Si el gráfico de f es una parábola, el gráfico de f ' es una recta (G.G.) - OPERADOR DERIVADA: Utilizando el significado geométrico de la segunda derivada como la tangente a la gráfica f '. (G.G.) - CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE (A.G.) - OPERADOR DERIVADA: REGLAS DE DERIVACIÓN (A.G.)
	- Contrarecíproco de elemento matemático analítico puntual	- CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA DERIVABALE EN x =a (A.P.)
	- Equivalencias lógicas (o doble implicación) de elementos matemáticos analíticos puntuales o globales.	- CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a,b) (A.G.)
	- Esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.	- CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x=a (A.P.) - OPERADOR DERIVADA: Si el gráfico de f es una parábola, el gráfico de f ' es una recta (G.G.) - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (A.G.)
TRANS	**- Síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.**	- CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CONSTANTE, CRECIENTE O DECRECIENTE A TRAVÉS DE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA (G.G.)

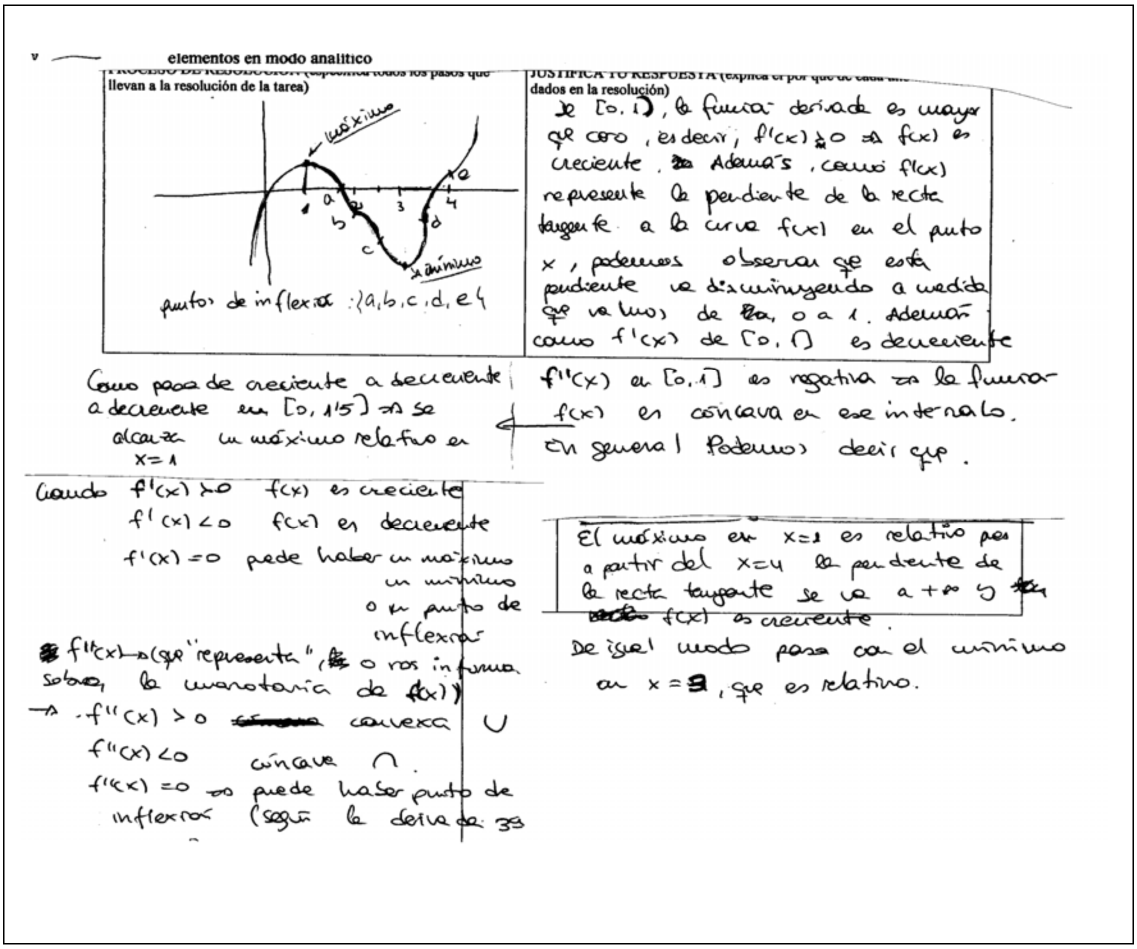
Cuadro 4.12. Caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada a través de relaciones lógicas y elementos matemáticos

4.4.2. Tematización del esquema

Algunos individuos que se encuentran en el nivel TRANS manifiestan haber **tematizado el esquema**, hecho que se pone de manifiesto cuando el estudiante es capaz de trasladar las relaciones entre f y f ' al par f 'y f ''. Es decir, se aplica a f ' y a su derivada (f ')' las mismas relaciones e implicaciones que se tiene para f y su derivada f ', considerando f ' como función y f '' como su derivada, (esta relación en el nivel INTER sólo se observa con carácter puntual).

Los individuos que tienen tematizado el esquema son capaces de establecer la relación lógica de **equivalencia lógica**: Sea f derivable en (a, b), f convexa en (a, b) $\leftrightarrow$ f ' creciente en (a, b) (y f cóncava en (a, b) $\leftrightarrow$ f ' decreciente en (a, b)), usando los significados implícitos.

Sólo a través de la resolución de todo el cuestionario podemos saber si un estudiante ha tematizado el esquema de derivada. En el siguiente protocolo que corresponde al cuestionario 25-L, se puede observar que tiene tematizado el esquema de derivada pues estableció relaciones lógicas (“**y lógica**”, **contrarrecíproco, equivalencia lógica**) entre elementos matemáticos, y utilizó de forma correcta los elementos matemáticos analíticos y gráficos puntuales y globales necesarios en la resolución de las distintas tareas del mismo. Además en la resolución de la Tarea 1, tenemos evidencia empírica de que C25-L reconstruye la relación entre el crecimiento de f ' y la concavidad de f, desde el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica. Las mismas ideas / relaciones que aplica a la función derivada de f (f '), las aplica a la función derivada de f ' (f '').


elementos en modo analítico

PROCESO DE RESOLUCIÓN (especifica todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea)

máximo
mínimo
puntos de inflexión : {a, b, c, d, e}

JUSTIFICA TU RESPUESTA (explica el por qué de cada uno ... dados en la resolución)

De [0, 1), la función derivada es mayor que cero, es decir, f'(x) ≥ 0 ⇒ f(x) es creciente. Además, como f'(x) representa la pendiente de la recta tangente a la curva f(x) en el punto x, podemos observar que esta pendiente va disminuyendo a medida que vamos de 0 a 1. Además como f'(x) de [0, 1) es decreciente f''(x) en [0, 1] es negativa ⇒ la función f(x) es cóncava en ese intervalo.

Como pasa de creciente a decreciente a decreciente en [0, 1'5] ⇒ se alcanza un máximo relativo en x=1

En general podemos decir que.

Cuando f'(x) > 0 f(x) es creciente
f'(x) < 0 f(x) es decreciente
f'(x) = 0 puede haber un máximo
un mínimo
o un punto de inflexión

f''(x) ... (que "representa", o nos informa sobre la monotonía de f(x))
→ f''(x) > 0 ~~...~~ convexa ∪
f''(x) < 0 cóncava ∩.
f''(x) = 0 ⇒ puede haber punto de inflexión (según la derivada 3ª)

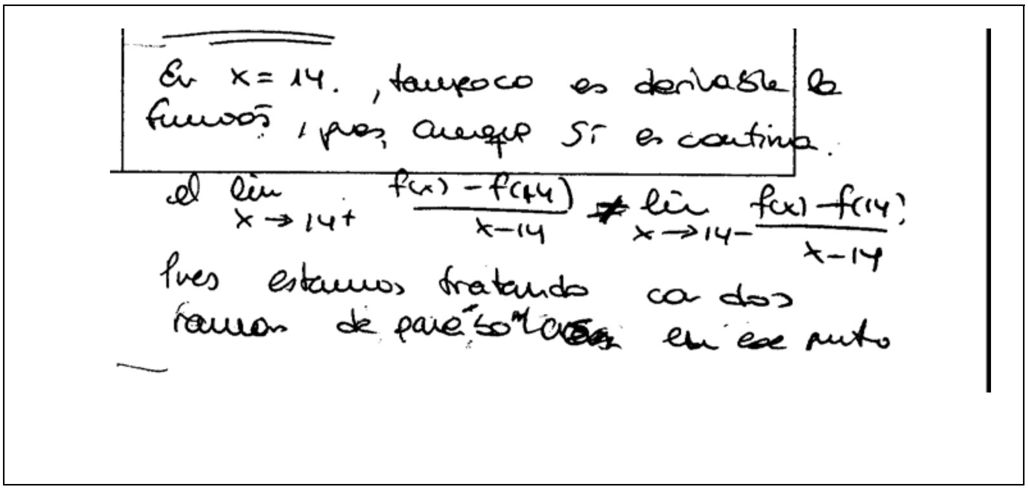
El máximo en x=1 es relativo pues a partir del x=4 la pendiente de la recta tangente se va a +∞ y ... f(x) es creciente.
De igual modo pasa con el mínimo en x = 3, que es relativo.

(C25-L, Tarea 1)

Observamos además que C25-L es capaz de hacer inferencias independiente del modo de representación utilizado, pues resuelve de forma correcta la Tarea 1, desarrollada en modo gráfico, y lo mismo sucede con la Tarea 2, desarrollada en modo analítico, ya que utilizó en su resolución el **contrarrecíproco** del elemento matemático: **si f derivable en (a, b) → f continua en (a, b)** (si f no es continua en (a, b) → f no es derivable en (a, b)) y también usó la relación lógica (“**y lógica**”) entre dos elementos matemáticos analíticos puntuales necesaria en la resolución correcta de dicha tarea.

En la Tarea 3, se pone de manifiesto que C25-L tiene construido el significado de **la derivada como pendiente de la recta tangente y como límite del cociente incremental**, cuando respecto a x=14, punto anguloso (**cúspide**) comenta que no es derivable pues, aunque es continua, el límite del cociente incremental cuando x tiende a 14 por la izquierda no coincide con el limite del cociente incremental cuando x tiende a 14 por la derecha relacionandolo con la pendiente de la tangente a f(x) en x =14, para que una función sea derivable en un punto. Además lo usa con sentido (es decir, desencapsulando los significados implicados) al decir :

> *E: ¿qué sucede con f'(14)?*
>
> *C25-L: no sería derivable porque no coinciden los límites laterales. Y la derivada es el límite de las pendientes de las rectas tangentes a f acercándose a x =14, por un lado son positivas y por el otro lado son negativas.*


En x = 14. , tampoco es derivable la función, pues aunque sí es continua.
el $\lim\limits_{x \to 14^+} \dfrac{f(x) - f(14)}{x-14} \neq \lim\limits_{x \to 14^-} \dfrac{f(x)-f(14)}{x-14}$
pues estamos tratando con dos ramas de parábolas en ese punto

(C25-L, Tarea 3)

se relaciona la existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental con la pendiente de la recta tangente a f en x =a, poniéndose de manifiesto como **equivalencia lógica** (hecho que nos muestra la **síntesis de los modos de representación analítico y gráfico**)

La segunda parte de la Tarea 3 es complementaria a la Tarea 1, en el sentido que mientras que en la Tarea 1 se pedía el gráfico de f a partir del gráfico de f ', en esta tarea se pide el gráfico de f ' a partir del gráfico de f. Por tanto, se hará uso de los elementos matemáticos que conllevan una implicación contraria a los utilizados en la Tarea 1, pudiendo establecer el estudiante relaciones de **equivalencia lógica** entre ellos. En la resolución el estudiante utilizó el elemento matemático analítico global :

sea f derivable en (a, b) si f crece en (a, b) $\rightarrow$f ’>0 en (a, b), y si f decrece en (a, b)$\rightarrow$ f ’<0 en (a, b)

(implicación contraria del mismo elemento utilizado en la Tarea 1), poniendo de manifiesto el uso de **equivalencias lógicas**. Además relaciona la inclinación de los segmentos que forman f ’, al hecho de que las pendientes de las rectas tangentes sean más o menos acusadas. Esto pone de manifiesto de nuevo el hecho de que C25-L tiene construido el significado de la derivada como pendiente de la tangente a f, y es capaz de desencapsular y utilizar los significados implícitos. Estableciendo relación lógica (“**y lógica**”) entre elementos matemáticos analítico y gráfico globales (lo que nos vuelve a mostrar la síntesis en los modos de representación analítico y gráfico).

Por último, en la Tarea 4, tarea que usa los dos modos de representación, pues se presenta la información en modo analítico y pide esbozar la gráfica de f, C25-L usó los elementos matemáticos analíticos puntuales y globales necesarios en la resolución de forma correcta, y las relaciones lógicas (“**y lógica**”) entre ellos, lo que le permitió esbozar un gráfico correcto de f , comentando respecto al punto anguloso (cúspide) de función:

E: ¿qué sucede en x =7?

C25-L: la función es cóncava para valores mayores y menores que x =7, sin embargo es creciente para valores menores que x =7 y decreciente para valores mayores que x=7, y f es continua por eso he puesto un punto anguloso.

(C25-L, Tarea 4)

Por lo que C25-L ha manifestado a lo largo de la resolución de todo el cuestionario que es capaz de establecer las relaciones lógicas (“**y lógica**”, **contrarrecíproco, equivalencias lógicas**) necesarias de forma correcta entre los elementos matemáticos, y que conoce los elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntuales y/o globales necesarios en la resolución de las diversas tareas, y usa los significados implícitos para tomar decisiones, mostrando tener la síntesis de los modos de representación analítico y gráfico. Además, considera las relaciones lógicas en un segundo nivel, es decir, considera f ’ como función, y f ’’ como su derivada, de tal manera que las ideas y relaciones que se tienen para el par (f, f ’), también se tienen para el par (f ’, f ’’) lo que nos lleva a concluir que C25-L ha (tiene) tematizado el esquema de derivada.

Este hecho ha sido identificado en cuatro estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas.

CAPÍTULO 5

CAPÍTULO 5: Discusión y conclusiones

En esta sección presentamos algunas reflexiones generales, desde los resultados obtenidos, sobre el desarrollo del esquema de derivada, la tematización de dicho esquema, y la construcción de la comprensión de los conceptos matemáticos.

5.1. Sobre el desarrollo del esquema de derivada

En el capítulo anterior hemos caracterizado el desarrollo del esquema de la noción de derivada a través de diferentes subniveles. Hemos podido comprobar que la construcción del conocimiento es progresiva, y que el paso de un subnivel al siguiente se pone de manifiesto a través del tipo de relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos, y de los elementos matemáticos que se utilizan. El primer tipo de relación lógica que se utiliza es "**y lógica**", y la que más dificultades presenta a los estudiantes es la **equivalencia lógica**. Los elementos matemáticos que usan los individuos varían de unos a otros, aunque podemos afirmar que los que recuerdan con más frecuencia son los relacionados con f ', y no con f '', y algunos elementos matemáticos son recordados con errores.

En un primer momento el estudiante no es capaz de establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que utiliza, y si hay algún esbozo de relación es incorrecto. En el subnivel siguiente, se manifiesta algún esbozo de relación lógica correcta de forma aislada, del tipo conjunción lógica ("**y lógica**"). De forma progresiva en subniveles posteriores se pone de manifiesto mayor riqueza en las relaciones lógicas, ya no sólo se usará la conjunción lógica ("**y lógica**"), también se hará uso del **contrarecíproco**, y de la **equivalencia lógica**. Esta última relación, es el que más dificultades le presenta al estudiante iniciándose su uso en el nivel INTER y plenamente desarrollado en el nivel TRANS.

También, se ha observado que la construcción progresiva del esquema no va ligada a los modos de representación, pues generalmente los diferentes subniveles, a excepción del TRANS donde se observa la síntesis en los modos de representación, se vinculan a un modo de representación (analítico o gráfico), pero no hay prioridad de uno sobre el otro.

Además hemos caracterizado la tematización del esquema a través de la consideración de f ' como función y (f ')' = f '' como su derivada, una de las manifestaciones de este hecho es aplicar a f ' y a su derivada (f '') las mismas relaciones e implicaciones que se aplican a f y a su derivada f '.

Muchos de los problemas de comprensión que mostraron los estudiantes en nuestra investigación, también fueron identificados por otros investigadores anteriormente. En lo que sigue haremos algunos comentarios sobre ellos en relación a nuestros resultados.

1.- Así, Ferrini-Mundi y Graham(1994) y Asiala (1997) señalan que diferentes contextos (como el gráfico y el analítico) pueden considerarse como modos separados en los estudiantes, y como comenta Baker et al. (2000) hay un uso de la noción de derivada como pendiente de la recta tangente (gráfico) o como razón de cambio (analítico) sin ningún tipo de relación. Así, en la caracterización del nivel INTRA de desarrollo del esquema, hecha por Baker et al. (2000) señalan que:

> *"... el estudiante se centra en una acción repetible.... e interpreta la derivada como pendiente de la recta tangente en puntos específicos demostrando esta interpretación con los intervalos de crecimiento / decrecimiento o alternativamente resolviendo un problema de razón de cambio..." , (pág. 559).*

Sin embargo, en nuestra investigación tenemos manifestaciones de individuos que se encuentran en el nivel INTRA 1 del desarrollo del esquema de derivada que no tienen la idea de derivada como pendiente de la recta tangente, ni como tasa de variación, simplemente recuerdan "cosas". Desde nuestro punto de vista hay un uso de los elementos matemáticos como "objetos" que no provienen de la encapsulación de un proceso, y/o recuperan procedimientos aprendidos en la instrucción previa para la resolución de un determinado tipo de problemas, sin que ello signifique que usen los elementos matemáticos como "objetos" provenientes de la encapsulación de un proceso.

2.- Baker et al. (2000) señalan en su investigación que coordinar información al intentar resolver un problema de cálculo gráfico no rutinario presenta bastantes dificultades. En nuestra investigación, hemos utilizado tareas similares a la usada por Baker y sus colegas, y también hemos observado las dificultades que muestran los estudiantes ante la coordinación de ciertos elementos matemáticos, y en concreto, la dificultad de establecer relaciones lógicas entre aproximaciones globales y puntuales, es decir, pensar conjuntamente en el comportamiento de la función en intervalos y el comportamiento puntual de la función. Los puntos angulosos son una manifestación de este comportamiento prototípico, comentado en el trabajo de Baker. En nuestra investigación hemos observado también esa dificultad, tanto cuando el punto anguloso se presenta en modo gráfico, como cuando se presenta en modo analítico. Hemos encontrado manifestaciones empíricas de estudiantes que se encuentran en los subniveles INTER1 e INTER del desarrollo del esquema, que consideran que f ’ existe en dicho punto y que se trata de un extremo relativo, y otros que aunque consideran que no existe f ’ porque es un pico, no saben explicar por qué esto es así.

Estos hechos podemos considerarlos como diferentes manifestaciones del uso de los elementos de conocimiento como “objetos” que no provienen de la encapsulación de un proceso. Respecto a este tema, Zandieth (2000) define un “pseudo-objeto” como una comprensión intuitiva que no involucra la comprensión del proceso subyacente en el objeto. Según este autor la dificultad está en que muchos problemas relacionados con el concepto de Derivada se pueden resolver usando sólo una comprensión de pseudo-objeto.

3.- Al igual que señalan Asiala et al. (1997) y Baker et al (2000), en nuestra investigación hemos apreciado que los estudiantes muestran una fuerte tendencia a utilizar la primera derivada para obtener información en la resolución de las tareas planteadas en el cuestionario.

Baker y sus colegas señalan la dificultad que tienen los estudiantes en trabajar con condiciones relativas a la segunda derivada, hecho que en nuestro estudio también se pone de manifiesto tanto en tareas dadas en condiciones gráficas como en tareas dadas en condiciones analíticas. Son estudiantes que se encuentran en los niveles INTRA o INTER o en sus distintos subniveles, y que muestran dificultades en ver f ’ como función. Así hay estudiantes que confunden la interpretación del signo de f ’’, con la interpretación del signo de f ’, y otros que no recuerdan lo que significa ni son capaces de reconstruir su significado desde la interpretación geométrica de la derivada, mostrando dificultades en los intervalos de crecimiento y concavidad de f. Sólo cuando se ha tematizado el esquema de derivada se es capaz de trasladar las relaciones del par (f, f ’) al par (f ’, f ’’).

4.- Baker et al. (2000) en su estudio se apoya en la idea de la derivada como recta tangente y como razón de cambio y la paulatina integración de estas dos ideas para la caracterización del desarrollo del esquema de derivada. En nuestro trabajo hemos encontrado que es en el nivel TRANS del desarrollo del esquema cuando se tienen integradas estas dos ideas, manifestándose la síntesis de los dos modos de representación (analítico y gráfico). Es en este nivel de desarrollo del esquema de derivada (TRANS) cuando el estudiante muestra tener los elementos matemáticos como “objetos” que proceden de la encapsulación de un proceso, manifestándolo a través de la realización de “desencapsulaciones” cuando le son necesarias en la resolución de las diferentes tareas del cuestionario, usando los significados implícitos.

Estos mismos investigadores refiriéndose al esquema del cálculo gráfico, comenta que como cualquier esquema, variará de una persona a otra y podrá evolucionar por caminos diferentes, pero cada esquema personal pasará de algún modo a través del proceso de los niveles de desarrollo. En nuestro trabajo hemos podido comprobar que el estudiante en los diferentes niveles de desarrollo del esquema, a excepción del nivel TRANS, no siempre tiene operativo los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea o no siempre es capaz de establecer las relaciones necesarias entre ellos, ni se manifiesta en todos los estudiantes de la misma manera la transición de un nivel de desarrollo del esquema a otro, esta es una de las características de la progresión en la construcción. Nosotros dentro de los niveles del desarrollo del esquema hemos considerado subniveles, y al igual que Baker y sus colegas afirman que cada esquema personal pasará a través del proceso de los niveles de desarrollo, nosotros afirmamos que cada esquema personal pasará a través del proceso de los subniveles de desarrollo.

Desde nuestra perspectiva la caracterización que se hace en el trabajo de Baker et al. (2000) sobre el desarrollo del esquema de derivada supone una traslación de los mecanismos de construcción entre las formas de conocer en el marco APOS (es decir, pasar de acción a proceso, y de proceso a objeto) a los niveles INTRA, INTER y TRANS del desarrollo de un esquema. Nosotros consideramos que el desarrollo o construcción de un esquema a través de estos niveles es algo distinto a la construcción de un objeto a través de las formas de conocer, acción y proceso. El paso entre niveles pensamos que no puede asimilarse a pasar de acción a proceso, y de proceso a objeto. En nuestra investigación hemos caracterizado el desarrollo del esquema de derivada a través de las relaciones lógicas y de los elementos matemáticos que se usan en la resolución de problemas.

5.- En distintas investigaciones se habla de la construcción de esquemas como la conexión/coordinación de distintos esquemas. Así, Badillo (2003) describe el esquema de derivada como la conexión interna de dos objetos complejos, (f ’(a) y f ’(x)), considerando necesario la coordinación de dos esquemas previos, (analítico y gráfico). En nuestra investigación hemos observado que no hay evidencia de que los estudiantes usen los elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntuales de forma prioritaria sobre los globales o viceversa. Sin embargo, si hemos observado que los estudiantes tienen dificultades en la síntesis de los modos de representación (analítico y gráfico), y que lo que va a determinar el nivel de desarrollo del esquema en que se encuentran más que los elementos matemáticos que utilizan (que en el caso de Bachillerato van ligados al currículo) son las relaciones lógicas que establecen entre ellos.

Del mismo modo que McDonald et al. (2000) considera para la construcción del concepto de sucesión la coordinación de dos esquemas

(SEQLIST y SEQFUNC), en nuestra investigación podíamos haber considerado la construcción del concepto de derivada como la coordinación de dos esquemas, un esquema analítico y otro gráfico, en el mismo sentido que McDonald y colaboradores, ya que el estudiante empieza a establecer relaciones entre elementos matemáticos puntuales y/o globales que se encuentran en el mismo modo (analítico y gráfico) empezando a manifestarse esbozos de síntesis de forma aislada. De hecho, tal y como hemos visto en la sección de resultados tenemos evidencia empírica de estudiantes que se encuentran según el modo de representación (analítico o gráfico) en distinto nivel de desarrollo del esquema de derivada sin prioridad de un modo sobre otro, adquiriendo la síntesis de los modos de representación en el nivel TRANS tal y como lo hemos caracterizado.

Baker et al. (2000) consideran en su investigación sobre un problema de cálculo gráfico la coordinación de dos esquemas: propiedad e intervalo. Así, ellos comentan que un estudiante se encuentra en el nivel Intra-propiedad - Inter-intervalo (Intra-Inter) cuando usa una condición a través de varios intervalos. Nosotros hemos considerado que cuando un estudiante hace uso de un solo elemento matemático, aunque sea a través de varios intervalos se encuentra en el nivel INTRA del desarrollo del esquema, ya que como hemos mencionado anteriormente lo que nos determina el nivel de desarrollo del esquema más que el uso de un determinado elemento matemático es el tipo de relaciones lógicas que establecen los estudiantes.

En definitiva, desde nuestra investigación, hemos caracterizado el desarrollo de la comprensión del esquema de derivada a través de las relaciones que se establecen y de los elementos matemáticos. Los tipos de relaciones consideradas entre los elementos matemáticos atienden al tipo de **relaciones lógicas**: conjunción lógica, condicionales directas y contrarecíprocas, bicondicional y la conjunción de las condicionales.

Dentro de los elementos matemáticos que forman la noción del

Derivada hemos distinguido dos bloques, un bloque vinculado a las ideas o significados que configuran la definición del concepto, y otro bloque vinculado a las propiedades del concepto que tienen la forma de implicaciones. Cuando hemos hablado de los elementos matemáticos los hemos denominado atendiendo a dos aspectos:

- modo de representación: gráfico y analítico, (considerando incluido en el modo de representación analítico la aproximación al cálculo numérico dada por tabla de valores, por ejemplo cuando el cociente incremental o tasa de variación media viene dado por una tabla de valores, y la aproximación algebraica) y
- si el elemento matemático conlleva una propiedad local, x=a (puntual) o a una propiedad de un intervalo (a, b) (global). Si el elemento matemático considerado lleva una relación implícita, entonces hemos considerado que se trata de una propiedad puntual cuando la tesis indica una cualidad en un punto, y de una propiedad global cuando la tesis indica una cualidad en un intervalo.

Estos instrumentos elegidos para la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de derivada, nos han sido de gran utilidad, y nos han permitido distinguir subniveles dentro de estos niveles de desarrollo, comprobando que la construcción de esquema es progresiva.

Desde nuestro punto de vista, la noción de derivada es un concepto vinculado a dos modos de representación: analítico y gráfico. El tener en cuenta ambos modos a la hora de considerar los elementos matemáticos del concepto ha sido útil ya que hemos podido comprobar la influencia de esos modos de representación en la caracterización de los diferentes niveles y subniveles. Hay estudiantes que en la resolución de las diferentes tareas, manifiestan distintos niveles de desarrollo del esquema según el modo de representación (analítico o gráfico), aunque no todos lo manifiesten de la misma manera. Así, no podemos decir que haya prioridad de un modo de representación sobre otro, de hecho tenemos evidencia de estudiantes que se encuentran en un nivel INTER del desarrollo del esquema en modo gráfico y en un nivel INTRA en el modo analítico, y viceversa. Ello nos ha llevado a hacernos la siguiente pregunta: ¿influye el tipo de enseñanza recibida para que se desarrolle un modo de representación más que otro?

Por otra parte, no hay manifestación de que los estudiantes usen los elementos matemáticos puntuales de forma prioritaria sobre los globales o viceversa. Pero si hay manifestaciones, como hemos comentado en esta sección, de las dificultades que muestran los estudiantes en establecer relaciones entre aproximaciones globales y puntuales.

Como hemos comentado, dentro de los elementos matemáticos hemos distinguidos dos bloques, un bloque vinculado a las ideas que configuran la definición del concepto, y otro bloque vinculado a las propiedades del concepto que tienen la forma de implicaciones. Estos últimos son los que en la resolución de las diferentes tareas permitirán al estudiante establecer relaciones del tipo de contrarecíproco y de equivalencias lógicas. El uso de estas relaciones nos ha sido útil a la hora de la caracterización de los distintos subniveles.

El estudio presentado al tener en cuenta tres años consecutivos de enseñanza, nos aporta información sobre el desarrollo de la construcción del concepto de derivada independientemente del currículo específico de cada uno de los cursos considerados. Mediante este trabajo podemos aislar las características fundamentales de los diferentes niveles/subniveles del desarrollo del esquema de derivada.

Pero además también podemos ver la influencia de las características de los distintos currículos, en las relaciones y tipos de elementos que los alumnos pueden usar. Este hecho nos llevo a tener que diseñar y elaborar unos instrumentos metodológicos que recogiesen estos aspectos diferenciales. Así los cuestionarios configurados a través de problemas que fueron diseñados atendiendo a las características de los diferentes currículos y que permitieron a los estudiantes poner en funcionamiento en los procesos de resolución de los mismos, las distintas comprensiones del esquema derivada que ellos tenían, desde la perspectiva de los instrumentos teóricos que habíamos elegido (relaciones lógicas/elementos matemáticos) fue un instrumento metodológico potente para el objetivo de nuestro estudio. Este instrumento fue completado con entrevistas en las que el estudiante podía expresar/comunicar/aclarar los procesos de resolución que había realizado así como las ideas que los fundamentaban. En definitiva a través de los cuestionarios/entrevistas se pudo recoger información sobre el desarrollo del esquema de derivada en las condiciones específicas (curso específico/currículum).

Otro aspecto metodológico a considerar es el proceso de análisis seguido. La realización de este proceso en dos fases con las características comentadas (análisis de los cuestionarios/entrevistas por tareas y global, ver capítulo 3) permite desvincular el análisis de la especificidad de una tarea concreta, posibilitándonos obtener una caracterización global y por lo tanto elaborada con más profundidad, de los distintos esquemas del concepto derivada que tenían los estudiantes.

Debemos aclarar que evidentemente las respuestas a los cuestionarios/entrevistas de la licenciatura de Matemáticas utilizaban diversos tipos de relaciones lógicas y más elementos matemáticos que los cuestionarios de Bachillerato, por lo que aportaron a la investigación más información sobre la construcción del esquema de derivada, pero el hecho de estar en primer año de la Licenciatura de Matemáticas no implicaba que estuviera en el nivel TRANS o que hubiera tematizado el esquema, por la propia caracterización de los niveles de desarrollo del esquema derivada que habíamos realizado.

5.2. Sobre la tematización del esquema de derivada

En nuestro trabajo hemos estudiado el desarrollo de la noción de derivada, que hemos asimilado al desarrollo de un esquema propuesto por Piaget. Según este autor un esquema es la estructura o la organización de acciones, tales como se transfieren o generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas. Piaget y García (1983/89) plantean que un esquema se desarrolla pasando por tres niveles o fases: INTRA, INTER y TRANS, consideran que estos niveles se pueden encontrar cuando se analiza el desarrollo de esquema de cualquier noción. Para estos autores una vez construido el esquema este puede ser **tematizado**, Piaget y García definen la **tematización** como el pasaje del uso o aplicación implícita a la utilización consciente, a la conceptualización.

De acuerdo con estos autores, y dentro de la teoría APOS, Asiala et al. (1996) consideran que los esquemas se pueden tratar como objetos e incluirse en la organización de esquemas a "niveles superiores", considerando que cuando esto ocurre el esquema ha sido **tematizado** en un objeto. En esta misma línea Clark et al. (1997) considera que un esquema ha sido **tematizado** si el individuo puede pensarlo como una entidad total y realizar acciones sobre él.

En trabajos posteriores el grupo RUMEC respecto a la **tematización** de un esquema considera que es una de las dos maneras por las cuales el individuo construye un objeto. Considerando que si un individuo tiene un objeto que proviene de la **tematización** de un esquema, es capaz de desempaquetarlo en sus diversas componentes.

Dentro de este mismo grupo, Baker et al. (2003) consideran que en el nivel TRANS, una persona puede **tematizar** el esquema. Considerando un esquema **tematizado** cuando se puede tratar como un objeto nuevo, ha alcanzado un nivel consciente. Cuando un esquema ha sido **tematizado** se puede desempaquetar en varias de sus componentes (o partes) y puede usarse desempaquetado cuando es necesario. El sujeto que ha tematizado un esquema, cuando se le presenta una situación nueva sabe que partes del esquema pueden aplicarse y cuales no.

Estos autores para examinar la posible **tematización** del esquema gráfico del Cálculo, variaron en la tarea planteada las condiciones iniciales (sobre continuidad, primera y segunda derivada) preguntándole al estudiante qué características del gráfico de la función permanecen. La habilidad para describir las relaciones entre las características que permanecen, sintetizar las propiedades y separarlas, empaquetarlas y desempaquetarlas cuando era necesario, lo consideraron evidencia de la **tematización** del esquema.

En nuestra investigación hemos considerado que la **tematización** del esquema de derivada se pone de manifiesto cuando el estudiante es capaz de determinar los dominios de validez de las propiedades. En concreto, cuando es capaz de trasladar las relaciones entre f y f ’ al par f ’ y f ’’. Es decir, cuando es capaz de trasladar todas las relaciones e implicaciones que tiene construidas y organizadas para el par (f, f ’) al par (f ’, f ’’). Considera f ’ como una totalidad, sucediéndole lo mismo con (f ’)’ = f ’’... Es decir, el esquema derivada es una totalidad que puede ser manejada/usada sin “ataduras” con el contexto (derivada primera) a partir del que empezó a construirse. De esta forma, se considera f ’ como una totalidad que es generalizable y por lo tanto asimilable a (f ’)’ = f ’’, f ’’’, …

Desde nuestro punto de vista, a través de este supuesto hemos hecho operativa la idea de **tematización** de Piaget, ya que cuando se considera la noción de derivada como un esquema construido a partir de una serie de elementos matemáticos y relaciones lógicas entre ellos, y considerado como una entidad generalizable, estaríamos describiendo lo que Piaget llama conceptualización, y por lo tanto el esquema derivada se ha conceptualizado, se ha construido el concepto derivada.

Desde nuestra perspectiva, fijándonos en la definición de Piaget, un esquema es una estructura cognitiva, en nuestro caso una forma de conocer una estructura matemática. Esto complementa con la definición del grupo RUMEC de esquema como colección de concepciones acciones, concepciones procesos, concepciones objetos (que son formas de conocer) y otros esquemas y las relaciones entre ellos.

5.3. Sobre la construcción de la comprensión de los conceptos matemáticos

La construcción de la comprensión de conceptos matemáticos ha sido el centro de preocupación e indagación de este trabajo. La pregunta que nos podemos formular y que desde estas páginas hemos querido contestar sería: ¿cómo los individuos construyen la comprensión de los conceptos matemáticos?, pregunta que lleva implícita una forma de entender el proceso de construcción.

Como ya hemos visto hay distintas teorías que intentan responder a estas cuestiones, proponiendo marcos teóricos desde los que se habla de distintas formas de conocer un concepto matemático y de la forma que se construye la comprensión de dicho concepto. Lo que parece común a estas teorías es la fundamentación en las teorías de Piaget, la consideración de los conceptos matemáticos como objetos y considerar la construcción de un objeto que se puede manipular en sí mismo a partir de un proceso que generalmente es realizado paso a paso. Esta construcción si nos centramos en el marco teórico propuesto por el grupo RUMEC (Teoría APOS), se realiza a través de distintos mecanismos de construcción: interiorización, encapsulación ... (manifestaciones de lo que Piaget denomina "abstracción reflexiva") que permiten ir construyendo distintas formas de conocer un concepto matemático avanzado. Así, se construye un objeto matemático mediante la encapsulación de un proceso, que a su vez ha sido construido mediante la interiorización de una acción.

Pero además estos investigadores, en sus últimos trabajos, proponen y analizan una segunda forma de construir un concepto/objeto matemático. Esta construcción se realiza cuando el individuo reflexiona sobre un esquema, llega a ser consciente del esquema como una totalidad, y es capaz de realizar acciones sobre él, entonces consideran que el individuo ha tematizado el esquema en un objeto. Para estos autores la noción de esquema recoge la totalidad del conocimiento que para un individuo está conectado (consciente o inconscientemente) con un tópico matemático particular.

Otra de las teorías que nos habla de la construcción de objetos/conceptos matemáticos es la propuesta por Sfard (1992). Según esta teoría, como mostrábamos en la página 55, existen tres etapas en la construcción de los objetos, que corresponden a tres grados de estructuración progresiva: interiorización, condensación y reificación. Etapas entendidas como una jerarquía, lo que implica que no se puede pasar de una etapa a otra mientras no se hayan dado todos los pasos anteriores. Las etapas de interiorización y de condensación son procesos graduales y cuantitativos más que cualitativos mientras que la reificación es instantánea, se puede entender como un salto cualitativo.

Desde nuestros datos podemos entender/asimilar un concepto matemático con lo que Piaget denomina esquemas y por tanto hemos intentado trasladar la propuesta de desarrollo de un esquema de este investigador, al desarrollo de la comprensión de un concepto matemático. Esta traslación nos obliga a concretar y caracterizar la noción de esquema con la que trabajamos.

En esta investigación, un esquema/concepto matemático es la estructura matemática formada por las relaciones lógicas que se establecen entre el conjunto de elementos matemáticos que constituyen una noción matemática, y que puede ser evocado para la resolución de una situación problema. Así mismo, la construcción de un concepto matemático es una construcción progresiva que se desarrolla a través de subniveles (INTRA1, INTRA, INTER1, INTER, TRANS). Estos subniveles están caracterizados por los tipos de relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos, y de los elementos matemáticos que se utilizan. Esta construcción progresiva finalizará cuando el individuo haya tematizado el esquema, proceso que viene caracterizado por que se es capaz de determinar los dominios de validez de las propiedades del esquema, y a través del que se llega a la conceptualización del esquema o construcción del concepto matemático.

5.4. Limitaciones. Perspectivas de futuro

A partir de la investigación que hemos realizado nos surgen una serie de cuestiones que pueden ser motivo de estudio en trabajos futuros:

1. Nuestro estudio se ha centrado en el desarrollo de la comprensión del concepto derivada, pero nos preguntamos ¿la caracterización de los niveles de desarrollo a través de las relaciones lógicas sería la misma si el concepto matemático estudiado fuera otro? ¿qué potencialidad tienen las relaciones lógicas en el desarrollo de la comprensión de un concepto matemático distinto a la derivada?.
2. Piaget y García (1983/1989) respecto a los niveles de desarrollo de un esquema comentan:

   > *“cada etapa Intra, Inter o Trans implica a su vez algunas subetapas, y lo que es más fundamental, que ellas siguen el mismo orden y por las mismas razones”* (p. 162)

   En nuestra investigación hemos identificado algunas de estas subetapas o subniveles, pero no todos. La identificación de todos estos subniveles puede ser una posible línea de investigación futura.

3. La información obtenida en la investigación, ¿cómo se puede utilizar en el proceso de enseñanza–aprendizaje? ¿cómo podemos hacer operativa esta forma de caracterizar el desarrollo y construcción del concepto de derivada en el proceso de enseñanza–aprendizaje?.

4. Nos podríamos centrar en el diseño metodológico, y en concreto en la potencialidad de la entrevista. Nos preguntamos si sería conveniente que la entrevista tuviera un valor informativo en sí mismo. Así, si hubiéramos estructurado las entrevistas no como algo aclaratorio sino complementario a la resolución del cuestionario, por ejemplo, si en la entrevista se hubieran modificado las condiciones iniciales del problema, ¿cómo hubiera respondido el estudiante ante la nueva situación?.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Alesandrov A. D., Kolmogorov A. N. y Laurentiev M. A. (1988). *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Madrid: Alianza Editorial, pp. 91-222.

Amit M., y Vinner S. (1990). Some Misconceptions in Calculus - Annecdotes or the tip of an iceberg?. En Booker, G. (Ed.): *Proceedings of 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1. Oaxtepec, México: CINVESTAV. pp.3- 10.

Anzola M. y Vizmanos J.R. (1996). *Matemáticas I, Matemáticas II*. Madrid: Editorial S.M.

Apostol T. M. (1982). *Análisis Matemático*. Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México-Rio de Janeiro: Editorial Reverté, s.a.

Artigue M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.):

Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México D.C.: Grupo editorial Iberoamérica, pp. 97-140.

Asiala M., Brown A., Devries D.J., Dubinsky E., Mathews D. y Thomas K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education,* Vol. 6 pp. 1- 32.

Asiala M., Cottrill J., Dubinsky E. y Schwingendorf K. (1997). The Development of Students` Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4) pp. 399-431.

Aspinwall L., Shaw K.L. y Presmeg N.C. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivate. *Educational Studies in Mathematics*, 33, pp. 301-317.

Azcárate C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Azcárate C. (1995). Sistemas de representación. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 4, pp. 53-61

Azcárate C. Y Deulofeu J. (1990). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Ed. Síntesis.

Azcárate C., Casadevall M., Caselles E. y Bosch D. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral*. Madrid: Ed. Síntesis.

Badillo E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas de Colombia*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), pp. 557-578.

Barnard T. y Tall D. (1997). Cognitive units, connections and mathematical proof. *Proceedings of 21st International Conference for Psychology of Mathematics Education,* 2, pp. 41-48.

Barnard T. (1999). Compressed Units of mathematical thought. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), pp. 401-404.

Becos E. y Pena Z. (1998). *Matemáticas I*. Navarra: Oxford University Press España. S.A.

Beth A. y Piaget J. (1996). *Mathematical Epistemology and Psycology*. Dordrecht, The Nertherlans: Reidel.

Bochner S. (1991). *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*. Madrid. Alianza Universidad. [Edición original de 1.966, Princenton University Press].

Boletin Oficial Junta de Andalucía: Decreto 208/2002 de 23 de julio. BOJA nº 97. pp. 16330-16415.

Breidenbach D., Dubinsky E., Hawks J. y Nichols D. (1992). Development of the Process Conception of Funtion. *Educational Studies in Mathematics*, 23 pp. 247-285

Brown A., Thomas K. y Tolías G. (2002). Conceptions of Divisibility: Success and Understanding. En S. R. Campbell y R. Zazkis Eds. *Learning and Teaching Number Theory*. Westport-Connecticut-London: Ablex Publishing. pp. 41-82.

Clark J.M., Cordero F., Cottrill J., Czarnocha B., DeVries D.J., St. John D., Tolias G. y Vidakovic D. (1997). Constructing a Schema : The Case of the Chain Rule. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(4), pp. 345-364.

Cobb P., Wood T., Yackel E., Nicholls J., Wheatley G., Trigatti B. y Perlwitz M. (1991). Assessment of a problem – centered second – grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), pp. 3-29.

Colera J., Oliveira M.J. y García R. (2000). *Matemáticas I*. Madrid: Editorial Anaya.

Comella J. y Serra J. (2000). El curriculum en el Bachillerato. En Biblioteca de Uno. *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI.* Barcelona: Editorial GRAÓ, pp.83-100

Confrey J. y Costa Sh. (1996). A critique of the selection of "mathematical objects" as a central metaphor for advanced mathematical thinking. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 1, pp. 139-168.

Cooley L., Trigueros M. y Baker B. (2003). Thematization of the calculus graphing schema. *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* , Honolulu, Hawaii, Volume 2, pp. 57 –64.

Cottrill J., Dubinsky E., Nichols D., Schwingendorf K., Thomas K. y Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *The Journal for Mathematical Behavior*, Vol. 15, pp. 167-192.

Demidovich B.P. (1976). *5000 problemas de análisis matemático*. Madrid: Editoral Paraninfo, s.a.

Devries D.J. (2001). http://www.Cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html.

Donalson M. (1963). *A Study of Children's Thinking.* London: Tavistock Publications, pp. 183-185.

Dörfler W. (2002). Formation of Mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(4), pp. 337-350

Dreyfus T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del currículum. En la colección Materiales para la innovación educativa. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional.* Barcelona: I.C.E. de la Unversitat de Barcelona y editorial GRAÒ, pp. 125-134.

Dubinsky E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, pp. 95-126.

Dubinsky E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. (L. P. Steffe, ed.) *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, New York: Springer-Verlag, pp. 160-202.

Dubinsky E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática* 8(3) pp. 24-41.

Dubinsky E. y Lewin P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Descomposition of Induction and Compactness. *The Journal of Mathematical Behavior,* 5, pp. 55-92.

Dubinsky E. y Harel G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. En Harel G. y Dubinsky E. (Eds.), Washinton D.C.: Mathematical Associationof America, *Notes Series* Vol. 25, pp. 85-106.

Dubinsky E., Dautermann J., Leron U. y Zazkis R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27, pp. 267-305.

Durán A. J (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza Universidad.

Eisenberg T. y Dreyfus T. (1994). On Understanding How Students Learn to Visualize Funtion Transformations. En Dubinsky E., Schoenfeld y Kaput J. (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education ICMBS Issues in Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 45-68.

Espinoza L. y Azcárate C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18 (3), pp. 355-368.

Ferrini-Mundy J. y Graham K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates, and integrals. En Dubinsky y Kaput (Eds.) *Research issues in undergraduate Mathematics Learning* , pp. 31-45.

Fonseca C. (2003). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Font J. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a las derivadas*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Font J. (2000 a). Representaciones Ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza secundaria. Departamento de Didáctica de la Ciencias experimentales y la Matemática de la Universidad de Barcelona. Documento no publicado (agosto 2000).

Font J. (2000 b). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f ’(x). El caso de la función seno. *UNO revista de didáctica de las matemáticas*, 25, pp. 21-40.

García M. y Llinares S. (1996). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurrículum*, nº10-11, pp. 103-115.

González C., Llorente J. y Ruiz M.J. (1996/2003). *Matemáticas I, Matemáticas II*. Madrid: Editorial Editex.

González P. M. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Madrid: Alianza Universidad.

Gray E. M., Pinto M. Pitta D. y Tall D. (1999). Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 38, pp. 111-133.

Gray E. y Tall D. (1994). Duality, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(2), pp. 115-141.

Hernández J., Pacheco J.M. y Pérez A. (2000). *Pruebas de Acceso a la Universidad – LOGSE – Matemáticas II*. Sevilla: S.A.E.M. “THALES”

Kitchen J. W. (1986). *Cálculo.* McGraw-Hill: Madrid.

Kline Morris (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I*. Madrid: Alianza Editorial, pp. 452-515.

Krutetskii V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children.* (En Kilpatrick J. Y Wirzup I. Eds). Chicago IL: University of Chicago.

Mason J. y Jonston-Wilder S. (2004). *Fundamental Constructs in Mathematics Education.* RouthledgeFalmer-The Open University: London.

McDonald M.A., Mathews D.M., y Strobel K.H. (2000). Understanding Sequences: A tale of two Objets. *Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education* Vol 8, pp. 77-100.

Meel D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la compresnsión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6 (3), pp. 221-271.

Orton A. (1983). Students´ understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics* Vol 14, pp. 235-250.

Park K. y Travers K.J. (1996). A Comparative Study of a Computer-Based and Standard College First-Year Calculus Course. En Dubinsky E., Schoenfeld A.H. y Kaput J. (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education,* Vol. 6 pp.155-176.

Piaget J. (1963). Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En La colección Psicología y Educación. *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Editorial Aguilar, pp. 3-28.

Piaget J., e Inhelder B. (1978). *Psicología del niño*. Madrid, 8ª edición: Ediciones Morata.

Piaget J. y García R. (1983/1989). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo veintiuno editores, s.a.

Porzio D. T. (1997). Effects of different instructional aproaches on calculus students´ understanding of the relationship between slope, rate of change, and the first derivate. *PME-NA*, pp. 37-44.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1-36.

Sfard A. (1992). Operational origins of mathematical objets and the quandary of reification- the case of function. En Harel G. y Dubinsky E. (eds.) *The Concept Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washinton D.C.: Mathematical Association of America, *Notes Series* Vol.25, pp. 59-84.

Sfard A. (2000). Syolizing Mathematical Reality Into Being-Or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Creat Each Other. En Coob P., Yackel E. y McClain K. (Eds), *Symbolizing and Communicating in Mayhematics Classrooms (Perspectives On Discourse, Tools, And Instructional Design)*. Mahwah (New Jersey): Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Sfard A. y Linchevski L. (1994). The gains and pitfalls of reification. The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp.191-228.

Sierra Vázquez M., González Astudillo M.T. y López Esteban C. (1.999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y C.O.U.: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias* 17(3), pp. 463-476.

Skemp R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. London: Penguin Books.

Spivak M. (1970/1974). *Calculus. Cálculo Infinitesimal*. Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México-Rio de Janeiro: Editoral Reverté, s.a.

Tall D. (1989). Concept image, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the Learning of Mathematics,* Vol. 9, nº 3, pp. 37-42.

Tall D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En (D. Tall, ed.) *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-21.

Tall D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. En Grows J. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. MacMillan Publishing, Reston. pp. 495-511.

Tall D. (1994). Understanding the process of advanced mathematical thinking. *ICMI International Congress of Mathematican,* Zurich.

Tall D. (1996). Functions and Calculus. En Bishop A., Clements K., Keitel C., Kilpatrick J., Laborde C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/ Boston/ London, pp. 289-325.

Tall D. (1999). Reflections on APOS Theory in elementary and Advanced Mathematical Thinking. En Zaslavsky Ed. *Proceedings of the 23 Conference of PME,Haifa, Israel,* 1, pp. 111-118.

Tall D. y Vinner S. (1981). Concept Image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* nº 12, pp. 151-169.

Tall D., Thomas M., Davis G., Gray E. y Simpson A. (2000). What is the object of the encapsulation a process. *Journal of Mathematical Behavior,* 18(2), pp. 223-241.

Vinner S., Dreyfus T. (1989). Images and Definitions for the concept of Funtion. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20(4), pp. 356-366.

Zandieth M. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivate.* Tesis doctoral. Oregon State University.

Zandieth M., (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. En Dubinsky E., Shoenfeld A. H., Kaput J. (eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS Issues in Mathematics Education* , vol. 8 . pp. 103-127.