

APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PLACAS CON CONDICIONES DE CONTORNO ARBITRARIAS

F. Paris / S. de León

E.T.S.Ingenieros Industriales de Sevilla

Resumen. Se analiza el problema de flexión de placas delgadas mediante un planteamiento en ecuaciones integrales basado en la descomposición de la ecuación biarmónica del modelo de Kirchoff, en dos ecuaciones armónicas. El acoplamiento de estas dos ecuaciones, junto a la transformación de las integrales de dominio en integrales de contorno equivalentes, permite la resolución de placas con condiciones de contorno y carga arbitrarias.

Se presentan resultados que ponen de manifiesto la validez de la formulación propuesta y que la introducción de ciertas hipótesis adicionales necesarias para aplicar las condiciones de contorno en un borde libre no produce pérdida de precisión.

1. INTRODUCCION

La imposibilidad de encontrar soluciones analíticas a placas con condiciones de contorno y carga arbitrarias, salvo en un número muy reducido de casos, ha forzado la utilización de los métodos numéricos para encontrar soluciones aproximadas.

En concreto, el método de los Elementos de Contorno ha sido utilizado para resolver placas delgadas, regidas por el modelo de Kirchoff, con gran profusión en los últimos años. Los primeros trabajos son debidos a Bezzine [1] y [2] y Stern [3] y [4]. Más recientemente, Costa [5] ha publicado un trabajo en la misma línea que los anteriores. Básicamente, el planteamiento de estos autores consiste en establecer una formulación integral de la ecuación biarmónica a través de reciprocidad, usando como función auxiliar la solución fundamental de dicha ecuación biarmónica. El problema de este planteamiento aparece por la necesidad de obtener una segunda ecuación integral, derivando la primera, con lo que aparecen singularidades muy fuertes en los núcleos de integración. Las publicaciones anteriores se diferencian fundamentalmente en la forma de abordar la singularidad. El propio Bezzine [6] propuso una forma diferente de obtener una segunda ecuación a través de un principio de similitud.

La alternativa que se sigue en este

trabajo para aplicar el Método de los Elementos de Contorno a las placas delgadas, consiste en descomponer la ecuación de campo en dos ecuaciones armónicas acopladas mediante la introducción de una variable intermedia. Este planteamiento tiene la ventaja de eliminar todo tipo de singularidades en la resolución del problema de contorno, siendo además los núcleos de las integraciones más sencillas e iguales en una y otra ecuación. Estas ventajas numéricas, para el caso de placas apoyadas [7] y [8] se ven incrementadas con el desacoplamiento entre ambas ecuaciones lo que permite una reducción muy significativa en el tiempo de resolución del sistema de ecuaciones.

Sin embargo, para condiciones de contorno diferentes, se hacía preciso eliminar las integraciones de dominio, hecho siempre deseable en una alternativa de contorno pero en este caso necesario. En [9], se planteó una alternativa numérica para evaluar las integraciones de dominio a través de integraciones de contorno similares a las inherentes al método. Este esquema, con alguna hipótesis adicional coherente con la aproximación usada de las variables del contorno, permite abordar cualesquiera tipos de condiciones de contorno que se presentan en placas delgadas.

En el siguiente apartado se define el problema que se va a abordar y las condiciones de sustentación. En el apar-

tado 3 se resume el planteamiento integral del problema definido. En el 4, se establece la aproximación con especial énfasis en la aproximación de las integrales de dominio y la trascendencia que ello conlleva. En el 5, se aborda el problema de aplicar las condiciones de contorno sobre el modelo establecido. En el apartado 6, se analiza un problema que incluye las condiciones de apoyo más usuales, así como un sencillo ejemplo que permite intuir la influencia de la aproximación realizada en el dominio, exponiéndose las conclusiones en el apartado 7.

2. DEFINICION DEL PROBLEMA

Con las hipótesis clásicas de Kirchoff, la ecuación que gobierna el comportamiento estático de las placas delgadas es:

$$D \nabla^4 w(x,y) = p(x,y) \quad (1)$$

con:

$$D = \text{rigidez a flexión} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

w ≡ desplazamiento transversal de la placa

p ≡ carga transversal aplicada

La ecuación (1) puede descomponerse en dos ecuaciones armónicas en la forma

$$\nabla^2 M = -p \quad (2)$$

$$\nabla^2 w = -\frac{M}{D} \quad (3)$$

con:

$$M = \frac{1}{1+\nu} (M_n + M_t) \quad (4)$$

siendo M_n y M_t los momentos flectores en dos direcciones perpendiculares cualesquiera en un punto de la placa.

M_n y M_t así como el torsor M_{nt} y el cortante Q_n pueden expresarse en función de los desplazamientos w:

$$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (5)$$

$$M_t = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right) \quad (6)$$

$$M_{nt} = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (7)$$

$$Q_n = -D \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 w) \quad (8)$$

Como se verá en el apartado siguiente, la formulación integral de (2) y (3) implica la aparición de las varia-

bles M, ∂M/∂n, w y ∂w/∂n en el contorno. Por ello, es preciso establecer las condiciones de apoyo haciendo intervenir las variables anteriormente reseñadas.

Borde apoyado: M = \bar{M} ; w = \bar{w}

Borde empotrado: w = \bar{w} ; $\frac{\partial w}{\partial n} = q^w = \bar{q}^w$

Borde libre: M_n = \bar{M}_n ; K_n = \bar{K}_n

n representa la normal al contorno, M_n el flector asociado a dicha normal y K_n el cortante equivalente que se utiliza en el modelo de Kirchoff

$$K_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \quad (9)$$

Para relacionar K_n y M_n con las cuatro variables anteriormente definidas, realizamos el siguiente desarrollo. De (5):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = -\frac{M_n}{D} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (10)$$

Por otra parte, de (9), (8) y (7)

$$K_n = -D \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 w) - D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2}$$

de donde:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} = -\frac{K_n}{D} - (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} \quad (11)$$

De (3) y (10)

$$-\frac{M}{D} = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{M_n}{D} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Luego:

$$M = \bar{M}_n - D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (12)$$

Por otra parte, de (3) y (11)

$$-\frac{\partial M}{\partial n} = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} \right) = -K_n - D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)$$

luego,

$$q^M = \frac{\partial M}{\partial n} = \bar{K}_n + D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \quad (13)$$

Las expresiones (12) y (13) permiten, en cada punto de un borde libre, relacionar las variables que aparecerán en la formulación, M y ∂M/∂n, con los datos en dicho borde \bar{M}_n y \bar{K}_n y con otras variables w y ∂w/∂n, sobre el borde, en

el entorno de dicho punto, que también aparecerán en la formulación.

3. PLANTEAMIENTO INTEGRAL

Las ecuaciones (2) y (3) aplicando la 2ª fórmula de Green, así como algunas transformaciones que a continuación indicaremos, dan lugar respectivamente a las siguientes expresiones integrales:

$$c(P) M(P) + \int_{\partial D} M(Q) \frac{\partial \psi}{\partial n}(P, Q) ds(Q) = \int_{\partial D} \psi(P, Q) \frac{\partial M(Q)}{\partial n} ds(Q) + \int_D \psi(P, R) p(R) dA(R) \quad (14)$$

$$c(P) w(P) + \int_{\partial D} w(Q) \frac{\partial \psi}{\partial n}(P, Q) ds(Q) = \int_{\partial D} \psi(P, Q) \frac{\partial w(Q)}{\partial n} ds(Q) + \int_D \psi(P, R) M(R) dA(R) \quad (15)$$

$P \in \partial D, Q \in \partial D, R \in D$

donde:

- ψ es la solución fundamental de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi + \delta(P, Q) = 0$$

- El punto P se ha trasladado al contorno, apareciendo el término libre c(P).

$$c(P) = 1 - \lim_{P \rightarrow Q} \int_{\partial D} \frac{\partial \psi(P, Q)}{\partial n} ds(Q)$$

Las ecuaciones (14) y (15) pueden aplicarse también a puntos del dominio sin más que hacer c(P) = 1. Un proceso de obtención de estas ecuaciones más detallado puede seguirse en [10].

Si las condiciones de contorno lo permitieran, la estrategia a seguir consistiría en utilizar (14) para calcular M y $\partial M/\partial n$ en ∂D , volver a aplicar (14) en puntos $R \in D$, lo que permite evaluar la integral de dominio que aparece en (15) y por tanto se puede utilizar dicha ecuación para obtener w y $\partial w/\partial n$ en el contorno. Esta forma de atacar el problema es la que se utiliza para placas apoyadas (únicas condiciones de contorno que lo permiten) y que se describía en [7] y [8].

La estrategia a seguir para cualquier otro tipo de condiciones de apoyo ha de tener un doble objetivo. Por una parte acoplar ambas ecuaciones integrales, ya que en algunos puntos las condiciones de apoyo pueden estar referidas a sólo una ecuación (bordes empotrado y libre). Por otro lado es deseable evitar las integraciones de dominio por cuanto restan efectividad al planteamiento y resolución del problema. Ambos objetivos se consiguen evaluando las integrales de dominio a través de integrales de contorno siguiendo las directrices que se introdujeron en [9] y que se desarrollan en el apartado siguiente.

4. DISCRETIZACION. APROXIMACION DE LAS INTEGRALES DE DOMINIO

El proceso de discretización que conlleva el Método de los Elementos de Contorno para transformar las integrales (14) y (15) en un sistema de ecuaciones lineales, no presenta ninguna particularidad especial en lo que respecta a las integrales de contorno. Un desarrollo detallado de dicho proceso puede consultarse en [10] y [11].

Básicamente, las variables en el contorno se aproximan en la forma, (por ejemplo para (14))

$$M \Big|_{\partial D} = N^i M_i \quad \frac{\partial M}{\partial n} \Big|_{\partial D} = N^i q_i^M \quad i = 1, N \quad (16)$$

Siendo N^i funciones lineales de pequeño soporte asociadas al punto i, y M_i y q_i^M los valores de las variables que se aproximan en dicho punto i. Con esta aproximación la ecuación (14) se reduce

$$|H| \cdot \{M\} - |G| \{q^M\} = \{D\} \quad (17)$$

$(N \times N) \quad (N \times 1) \quad (N \times N) \quad (N \times 1) \quad (N \times 1)$

donde $\{M\}$ y $\{q^M\}$ representan las incógnitas en los N puntos del contorno y $|H|$ y $|G|$ los valores de las integrales de (14) al aplicarla en los N puntos del contorno, introduciendo la aproximación (16).

$\{D\}$ representa los valores de la integral de dominio calculada al aplicar (14) en los N puntos del contorno.

Para evaluar $\{D\}$ suponemos que el integrando de la integral de dominio de (14) es expresable en la forma:

$$p(R) = \alpha_j f_j(J, Z) = \alpha_j f_j(r(J, Z)) \quad j=1, L \quad (18)$$

donde $f_j(J, Z)$ representa el valor de la función, asociada a un punto J del dominio o del contorno, en un punto Z. Pues

to que f_j representa un sistema de coordenadas generalizadas, α_j representa los valores de las componentes en dicho sistema.

Definiendo una función ϕ_j asociada a cada f_j según:

$$\nabla^2 \phi_j = f_j \quad (19)$$

la integral de dominio de (14) puede expresarse, [9], en la forma:

$$\int_D p(R) \psi(P, R) dA(R) = - \alpha_j \left[c(P) \phi_j(J, P) + \int_{\partial D} \phi_j(J, Q) \frac{\partial \psi}{\partial n}(P, Q) ds(Q) - \int_{\partial D} \frac{\partial \phi_j(J, Q)}{\partial n} \psi(P, Q) ds(Q) \right] \quad (20)$$

siendo los núcleos de las integraciones del contorno similares a los de (14) ya que ϕ_j y $\partial \phi_j/\partial n$ toma valores definidos para cada punto J que se utilice en la aproximación (18). El vector $\{D\}$ adopta pues la forma:

$$\{D\}_{N \times 1} = - \begin{pmatrix} |H| & |\phi| & -|G| & |q^\phi| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{c\} \\ \{M\} \\ \{q^M\} \\ \{q^\phi\} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$(N \times N) \quad (N \times L) \quad (N \times N) \quad (N \times L) \quad (L \times 1)$

$|H|$ y $|G|$ tienen el mismo significado que en (17). $|\phi|$, $|q^\phi|$ y $\{c\}$ quedan definidos al elegir unas funciones f_j . En este caso se ha tomado:

$$f_j(J, Z) = 1 - r(J, Z) \quad (22)$$

$\{c\}$ se obtiene directamente de (18), que, particularizando para los L puntos J, puede ponerse en la forma:

$$\{P\}_{L \times 1} = |F| \{c\}_{L \times 1} \quad (23)$$

Los L puntos que se utilizan en la discretización son del dominio y/o del contorno y como regla general debe distribuirse de tal manera que (18) permita una buena aproximación de P cuya expresión es conocida.

Por tanto, utilizando (21), (17) puede ponerse en la forma:

$$|H| \{M\} - |G| \{q^M\} = - (|H| |\phi| - |G| |q^\phi|) \{c\} \quad (24)$$

que representa el sistema de ecuaciones lineales asociado a (14). Por tanto, asociado a (15) podemos definir:

$$|H| \{w\} - |G| \{q^w\} =$$

$$= - (|H| |\phi| - |G| |q^\phi|) \{c\} \quad (25)$$

donde $\{c\}$ se obtiene de una expresión similar a (20).

$$\{M^*\}_{L' \times 1} = |F'| \{c\}_{L' \times 1} \quad (26)$$

$\{M^*\}$ en (26) representan los valores de M en los L' puntos del dominio y/o del contorno utilizados para poder evaluar la integral de dominio de (15) a través de integrales de contorno. Estos L' puntos no necesariamente habrían de coincidir con los L puntos utilizados para aproximar p, pero por evidentes razones de índole operativa, ya que así $|\phi|$ y $|q^\phi|$ se identificarán con $|\phi|$ y $|q^\phi|$ se toma $L \equiv L'$.

Para la evaluación de P, los L puntos se distribuyen de forma genérica sobre el contorno y/o dominio para obtener una buena aproximación. En este caso M es desconocida y hay que precisar sobre la ubicación de los L puntos. Los LC que se sitúan sobre el contorno deben coincidir con nodos utilizados en la aproximación de las variables del contorno para que M* no aporte nuevas incógnitas al sistema de ecuaciones (24), (25). Resulta imprescindible que L incluya LI puntos en el dominio, pues sólo los del contorno no pueden representar en general, la evolución de M. Esto implica no obstante, que M* aporta LI incógnitas nuevas al sistema de ecuaciones (24), (25) por lo que será preciso suplementar LI ecuaciones.

Los LC puntos que se utilizan sobre el contorno no tienen por qué ser todos los utilizados en la aproximación de las variables del contorno ($LC \leq N$). Conviene desde un punto de vista operativo, tomar un número reducido que simplifique la obtención de $\{c\}$ y $\{c\}$ de (23) y (26) respectivamente. Por otro lado, esta flexibilidad en la elección de LC, permite no condicionar localmente la aproximación de las variables de dominio, cuando la discretización del contorno tenga que ser muy fina. En el apartado de resultados se presentan algunos datos sobre la influencia de la elección de L.

Las LI ecuaciones que hay que aportar no pueden incluir ninguna incógnita nueva. Esto se consigue utilizando las ecuaciones integrales que expresan el valor de M en los LI puntos del dominio (expresión (14) con c(P) = 1). Se obtienen pues LI ecuaciones, que con las aproximaciones anteriormente definidas toman la forma:

$$|H^I| \{M\} - |G^I| \{q^M\} + \{M^I\} = (|H^I| |\phi| - |G^I| |q^\phi|) \{c\} \quad (27)$$

donde:

$\{M^I\}$ (LIxN) \equiv valores de M en los LI puntos del dominio utilizados para la aproximación de la integral de dominio de (15). Estas variables se corresponden con las de $\{M^*\}$ que no pertenecen al contorno.

$|H^I|$ (LIxN) \equiv constantes de integración que genera la ecuación (14) al aplicarla en LI puntos del dominio con $c(P) = 1$.

El acoplamiento de (24), (25) y (27) conduce a un sistema de $2N + LI$ ecuaciones que sólo puede tener $2N + LI$ incógnitas. Las LI están asociadas al dominio ya han quedado claramente establecidas. Las $2N$ restantes están asociadas al contorno y se van a analizar en el apartado siguiente, de acuerdo a la definición del problema establecido en el apartado 2.

5. APLICACION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Para un punto que pertenezca a un borde apoyado o empotrado, teniendo dicho punto una única normal exterior, la aplicación de las condiciones de apoyo definidas en el apartado 2 lleva a la generación de dos únicas incógnitas asociadas a ese punto.

Borde apoyado: $\frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial M}{\partial n}$

Borde empotrado: $M, \frac{\partial M}{\partial n}$

En el caso del borde libre, ninguna de las cuatro variables es dato pero se dispone de las relaciones (12) y (13) en las que aparecen variaciones de las variables w y $\frac{\partial w}{\partial n}$ a lo largo del contorno. Si hacemos una hipótesis de esta variación coherente con la evolución lineal supuesta sobre el contorno, podemos expresar los valores de M y $\frac{\partial M}{\partial n}$ en un punto P del contorno en función de variables asociadas a P-1, P, P+1, obteniendo

$$M(P) = \bar{M}_n(P) - D(1-\nu) \frac{w(P+1) - 2w(P) + w(P-1)}{\Delta^2} \quad (28)$$

$$\frac{\partial M}{\partial n}(P) = \bar{K}_n(P) + D(1-\nu) \frac{\frac{\partial w}{\partial n}(P+1) - 2\frac{\partial w}{\partial n}(P) + \frac{\partial w}{\partial n}(P-1)}{\Delta^2} \quad (29)$$

siendo Δ la distancia entre los puntos P-1, P y P, P+1.

Las expresiones (28) y (29) permiten que, en un borde libre sin discontinuidad en la normal, las únicas incógnitas

sean w y $\frac{\partial w}{\partial n}$.

Como es común a toda aproximación que incluya nodos en los extremos de los elementos, las mayores dificultades aparecen en las esquinas, produciéndose una superabundancia de incógnitas. Este problema se resuelve extendiendo la hipótesis de variación lineal en el contorno a un entorno del dominio en la esquina. Esta hipótesis fue propuesta también para problemas de Potencial, [10] y [11], para condiciones de contorno de Dirichlet. Su aplicación permite dejar sólo dos incógnitas por nodo en las esquinas.

6. RESULTADOS

En primer lugar se ha analizado una placa cuadrada con dos lados opuestos apoyados, uno libre y el otro empotrado, tal como se indica en la Fig. 1, sometida a carga uniforme. Este ejemplo, del que existe solución analítica [12], engloba los tres bordes analizados, por lo que permite establecer conclusiones sobre el total de las hipótesis establecidas.

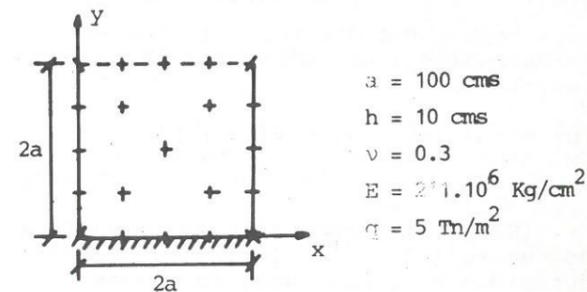


Fig. 1: Placa cuadrada con bordes apoyados, libres y empotrados.

Se han empleado diferentes discretizaciones del contorno, así como puntos del dominio y del contorno en la aproximación. Se van a representar en los gráficos resultados correspondientes a tres combinaciones de estas variables que se indican a continuación.

- Caso 1. N = 16 LC = 16 LI = 5
- Caso 2. N = 32 LC = 20 LI = 9
- Caso 3. N = 64 LC = 28 LI = 25

La primera combinación, Fig. 1, corresponde a una discretización muy burda y las dos siguientes corresponden a discretizaciones más finas, con un número de puntos del dominio aumentando a medida que aumenta la discretización del contorno.

- Resultados en el contorno

- Borde libre. Las Figs. 2 y 3 representan la evolución de w y M_t a lo largo

de dicho borde, observándose que la aproximación introducida mediante las expresiones (28) y (29) no afecta a la precisión de los resultados.

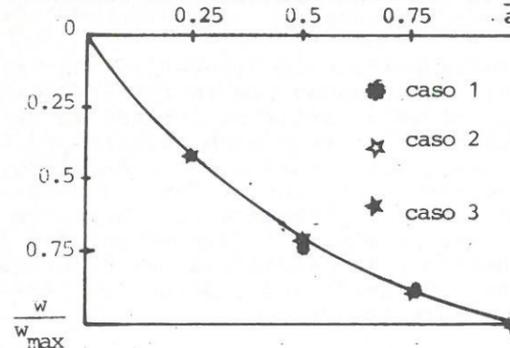


Fig. 2: w en el borde libre.

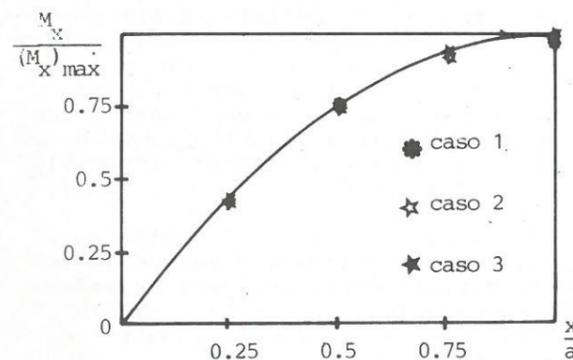


Fig. 3: M_t en el borde libre.

- Borde apoyado. La Fig. 4 representa el giro a lo largo del borde apoyado. Los errores son mayores en las proximidades de las esquinas, debido a la aproximación utilizada para reducir el número de incógnitas.

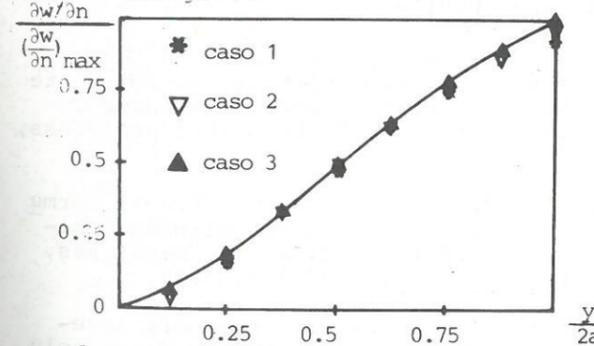


Fig. 4: $\frac{\partial w}{\partial n}$ en el borde apoyado.

- Borde empotrado. La Fig. 5 representa el momento de empotramiento a lo largo del borde. Los resultados sobre este borde son algo menos precisos, lo que puede interpretarse debido a que la aproximación realizada para el dominio que, en otros casos tiene sólo una influencia parcial en cada ecuación integral, aquí tiene una gran importancia dado que la ecuación integral que se obtiene a partir de $\nabla^2 w = -\frac{M}{D}$ para puntos

de este borde se reduce a $\int_D M \psi ds = 0$, con lo que la aproximación tiene unos efectos más apreciables.

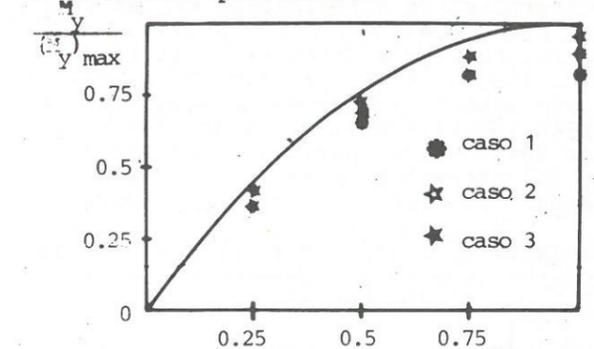


Fig. 5: M_n en el borde empotrado.

- Resultados en el dominio

La Tabla 1 representa la evolución de la flecha en la línea media normal al empotramiento, Fig. 1. Como es usual al método se producen excelentes resultados incluso con malas discretizaciones.

Tabla 1. $w \cdot 10^3$ m en el dominio.

	Punto 1	2	3	4
ANALITICA	0.094	0.236	0.353	0.467
CASO 1	0.085	0.226	0.336	0.479
CASO 2	0.093	0.234	0.347	0.466
CASO 3	0.095	0.237	0.352	0.468

Para sacar conclusiones respecto a la influencia de la discretización del contorno y puntos utilizados en la aproximación de la integral de dominio, se incluyen resultados de la misma placa, apoyada en todo el contorno, con diferentes discretizaciones. La elección de este ejemplo es debida a que la aplicación de las condiciones de contorno es directa y no introduce errores adicionales a la discretización. Las discretizaciones utilizadas se reflejan en la Tabla 2.

Tabla 2. Discretizaciones utilizadas.

	N	LI	LC
CASO 1	16	9	16
CASO 2	32	49	32
CASO 3	32	9	32
CASO 4	64	49	32

Los casos 1 y 2 corresponden a discretizaciones de contorno y puntos del dominio para la aproximación coherentes, habiendo utilizado todos los puntos del contorno en la aproximación de las integrales de dominio. En el caso 3 no existe la coherencia anterior, utilizando pocos puntos en el dominio. En el caso 4, en cambio, lo que se ha modificado es la no utilización de todos los puntos del contorno para la aproximación de la integral de dominio. La Tabla 3 recoge los giros en uno de los bordes.

Tabla 3. $\frac{\partial w}{\partial n} \cdot 10^{+3}$ en el contorno de la placa apoyada



	Punto 1	2
ANALITICA	-0.205	-0.280
CASO 1	-0.198	-0.272
CASO 2	-0.204	-0.280
CASO 3	-0.183	-0.254
CASO 4	-0.201	-0.276

Los resultados de los casos 1 y 2 permiten apreciar una convergencia monótona de resultados al mejorar tanto la discretización del contorno como el número de puntos del dominio en forma coherente y utilizando todos los puntos del contorno en la aproximación del dominio. Esta conclusión se puede extender a todos los casos ejecutados con estas premisas.

El caso 3, por la pérdida de coherencia aludida, produce peores resultados, no ya que el 2, lo cual era esperable, sino que el 1, pese a tener mejor discretización del contorno que él. Esto puede interpretarse debido a la mala aproximación de las integrales de dominio ya que se han utilizado 32 puntos del contorno y sólo 9 del dominio, lo que provoca una rigidización de la aproximación, localizada en el contorno.

Que el caso 4 produzca peores resultados que el 2, habiendo utilizado iguales o mejores discretizaciones, sólo puede interpretarse por el hecho de no utilizar todos los puntos del contorno en la aproximación de las integrales de dominio.

7. CONCLUSIONES

Se ha extendido la aplicación del Método de los Elementos de Contorno a placas delgadas sustentadas de forma cualquiera, mediante la descomposición de la ecuación biarmónica en dos ecuaciones armónicas acopladas.

A través de los resultados, puede concluirse que las hipótesis adicionales necesarias para realizar la extensión no han condicionado la precisión de los resultados.

Se ha evitado la discretización del dominio, expresando las integrales sobre el mismo a partir de integrales de contorno que no requieren cálculos adicionales de integración sobre el mismo. Es preciso, no obstante, dar los valores de la sollicitación en una serie de puntos del dominio, lo que es insoslayable debido a la naturaleza del problema que se está analizando, donde las cargas siempre son de dominio.

Los datos de entrada se reducen en gran medida frente a los necesarios en una alternativa de dominio (M.E.F.) teniendo como contrapartida un cierto incremento del tratamiento numérico (ecuaciones (23) y (26)) que por otro lado no suele ser significativo frente a los tiempos empleados en la evaluación de los coeficientes del sistema de ecuaciones y su resolución.

De cualquier forma, el tiempo de cálculo resulta elevado y parece conveniente dirigir esfuerzos para su reducción aprovechando la configuración del sistema de ecuaciones, con submatrices de gran tamaño nulas.

Por otro lado, es preciso desarrollar criterios más precisos que permitan acotar la convergencia del proceso de aproximación utilizado que engloba la filosofía de funciones de pequeño y gran soporte.

8. REFERENCIAS

1. Bezine G.P. y Gamby D.A. "A new integral equation formulation for plate bending problems". Recent Advances in Boundary Element Methods, Pentech Press, 1978.
2. Bezine G.P. "Boundary integral formulation for plate flexure with an arbitrary boundary conditions". Mech. Res. Comm. Vol. 5(4), 197-206, 1978.
3. Stern M. "A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems". Int. J. Solids Structures, 15, pp. 769-782, 1979.
4. Stern M. "Boundary integral equations for bending of thin plates". Progress in boundary element Methods. Ed. by C.A. Brebbia. Pentech Press, 1983.
5. Costa J.A. y Brebbia C.A. "Plate Bending Problems using B.E.M.". Proceedings 6th International Conference on Boundary Element Methods in Engineering 1984.

6. Bezine G. "Application of similarity to research of new boundary integral equations for plate flexure problems". Applied Mathematical Modelling. 5(2) 065-128. 1981.
7. Paris F. y León S. "El método de los elementos de contorno aplicado al cálculo de placas apoyadas". Anales de Ingeniería Mecánica, nº 2, 1982.
8. Paris F. y León S. "Cálculo de placas mediante el método de los Elementos de Contorno". Primer Simposium Nacional sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería, 1982.
9. Paris F. y León S. "Tratamiento de las integrales de dominio en el análisis de la ecuación de Poisson por el Método de los Elementos de Contorno". Anales de Ingeniería Mecánica. Año I, nº 1, pp. 26-32, 1983.
10. Paris F., Martín A. y Alarcón E. "Progress in Boundary Element Methods" Volumen 1, Ed. by C.A. Brebbia. Pentech Press, 1982.
11. Alarcón E., Martín A. y Paris F. "Boundary Elements in Potential and Elasticity Theory". Computers and Structures, Vol. 10, pp. 351-362, 1979.
12. Timoshenko S. y Woinowsky-Krieger. "Teoría de Placas y Láminas". Urmo, 1975.