

ANÁLISIS DEL PROBLEMA DE CONTACTO CON FRICCIÓN DE COULOMB CON EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Paris, F*, y Garrido, J.A**

* E.T.S.I.I. de Sevilla / ** E.T.S.I.I. de Las Palmas

Resumen. Se formula la aplicación del método de los Elementos de Contorno al problema de contacto con fricción de dominios bidimensionales en el campo elástico, asumiéndose la ley de rozamiento de Coulomb. Se establece el procedimiento incremental e iterativo para resolver el problema, comparando los resultados con los de otras formulaciones de contorno y dominio.

1. INTRODUCCION

En la mayor parte de los casos en -- que se produce interacción entre dos contornos, aparece una fuerza tangencial, -- que se opone al desplazamiento entre ambos contornos. Ello es debido a la propia naturaleza de las superficies en contacto, por lo que en mayor o menor medida, la fricción está presente en todos los problemas de Ingeniería en que dos sólidos interactúan entre sí en un proceso de deformación.

La importancia del análisis del problema elástico, incluyendo efectos de rozamiento, se incrementa si tenemos en cuenta que las principales causas de fallos mecánicos son la fractura y/o la fatiga y que tanto la propagación como la iniciación de grietas se produce en zonas de altas tensiones donde la fricción es la causa de la fatiga por frotamiento [1].

El problema con respecto al caso sin fricción presenta una mayor complejidad ya que no sólo puede ser desconocida la zona de contacto sino que en cualquier caso lo es el tipo de condiciones que se va a producir en el interior de dicha zona.

De nuevo han sido los métodos numéricos los que han constituido en el transcurso de los últimos años una importante herramienta para el análisis de este tipo de problemas. [2] y [3] representan --

dos trabajos importantes en el tratamiento con Elementos Finitos. Con el Método de los Elementos de Contorno se ha formulado el problema bidimensional a través de las publicaciones de Andersson [4], [5] y [6].

En este trabajo se aborda una formulación de este mismo problema con la clásica ley de fricción de Coulomb. Se utilizan elementos discontinuos lineales y un proceso incremental que permite aplicar diferentes capítulos de cargas en cada uno de los cuales, todas las sollicitaciones dependen de un parámetro.

A continuación, en el apartado 2 se establece la definición del problema -- con fricción, a través de las relaciones entre las variables de ambos dominios en la zona de contacto. Con posterioridad, en el apartado 3 se aplica el Método de los Elementos de Contorno. En el apartado 4 se define el proceso incremental, necesario debido al carácter irreversible de la fricción. No siempre las condiciones de contorno quedan claramente definidas para cada incremento por lo que en algunos casos es preciso realizar un proceso iterativo en éste, que se define en el apartado 5, presentándose los resultados en el apartado 6.

2. DEFINICION DEL PROBLEMA. MODELO DE FRICCIÓN

El caso genérico que se va a estu--

diar se encuentra representado en la -- Fig. 1 con la misma notación empleada -- en [7].

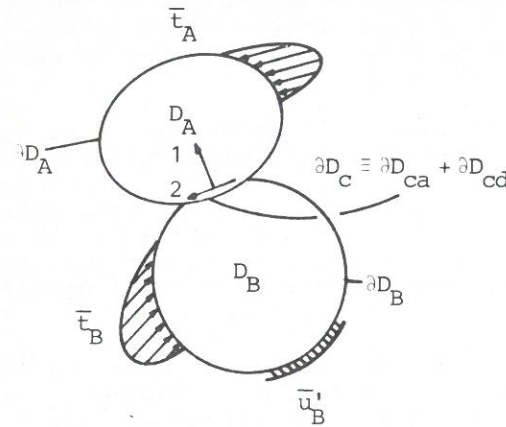


Fig. 1: Definición del problema.

En cada punto del contorno establecemos un sistema local de coordenadas, habiéndose representado en la Fig. 1 el sistema del punto M de la zona de contacto en cuanto perteneciente al dominio D_B.

El modelo de fricción que se va a utilizar, modelo de Coulomb, se reduce a las siguientes relaciones para cada punto M de la zona de contacto, siendo μ el coeficiente de rozamiento entre ambas superficies:

Si $|t_2| < \mu |t_1|$ hay adhesión entre los dos cuerpos en el punto M.

Si $|t_2| = \mu |t_1|$ puede producirse un deslizamiento relativo entre los dos cuerpos en el punto M.

La situación $|t_2| > \mu |t_1|$ no es alcanzable.

Esta ley de fricción local puede representarse fácilmente en el sistema -- cartesiano indicado en la Fig. 2.

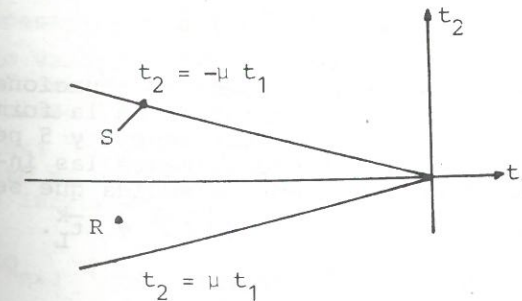


Fig. 2: Representación de la ley de Fricción.

Puntos como el R en el interior del cono de fricción pertenecen a la zona de adhesión y puntos como el S se encuentran en situación de que se presenten deslizamientos entre ambos cuerpos en una u otra dirección según S se encuentre en una u otra recta. La coexistencia de puntos con uno u otro comportamiento provoca que la superficie de -- contacto ∂D_c esté dividida según se indica en la Fig. 1 en:

$\partial D_{ca} \equiv$ zona de adhesión

$\partial D_{cd} \equiv$ zona de deslizamiento.

La relación entre las variables de un punto M de la zona de contacto, en cuanto perteneciente a A y B están relacionados de acuerdo con la ley de fricción enunciada, de la siguiente forma:

- $M \in \partial D_{ca}$

$$u_1^A(M) + u_1^B(M) = 0$$

$$u_2^A(M) + u_2^B(M) = 0 \quad (1)$$

$$t_1^A(M) = t_1^B(M) \quad \text{con} \quad t_1^A(M) \leq 0$$

$$t_2^A(M) = t_2^B(M) \quad \text{con} \quad |t_2^A| < \mu |t_1^A(M)|$$

- $M \in \partial D_{cd}$

$$u_1^A(M) + u_1^B(M) = 0$$

$$u_2^A(M) \neq u_2^B(M)$$

$$t_1^A(M) = t_1^B(M) \quad \text{con} \quad t_1^A(M) \leq 0 \quad (2)$$

$$t_2^A(M) = \pm \mu t_1^A(M)$$

$$t_2^B(M) = \pm \mu t_1^A(M)$$

en ambos casos, de las 8 variables asociadas a cada nodo $u_i^A, u_i^B, t_i^A, t_i^B$ sólo cuatro quedan como incógnitas, pudiendo se expresar el resto a partir de ellas.

3. FORMULACION INTEGRAL Y APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Para cada uno de los dominios, la formulación integral, al igual que sucedía en el problema sin fricción, puede hacerse a través de la ecuación de Somigliana, obteniéndose en ausencia de -- fuerzas de dominio:

$$\int_{\partial D_L^k} T_{ij}^{*k}(x,y) u_j^k(y) ds(y) + \int_{\partial D_C^k} T_{ij}^{*k}(x,y) u_j^k(y) ds(y) = \int_{\partial D_L^k} U_{ij}^k(x,y) t_j^k(y) ds(y) + \int_{\partial D_C^k} U_{ij}^k(x,y) t_j^k(y) ds(y) \quad (3)$$

con $x, y \in \partial D^k$
 $k = A, B.$

Puesto que el problema hay que tratarlo incrementalmente, las variables del contorno u_i^k, t_i^k que aparecen en (3) tendrán a partir de ahora dicho carácter. Si incluimos las condiciones de contorno (1) y (2) en (3) teniendo en cuenta que:

$$\partial D^k = \partial D_L^k + \partial D_{ca}^k + \partial D_{cd}^k$$

obtenemos las dos siguientes ecuaciones integrales:

$$\int_{\partial D_L^A} T_{ij}^{*A} \Delta u_j^A ds + \int_{\partial D_{ca}^A} T_{ij}^{*A} \Delta u_j^A ds + \int_{\partial D_{cd}^A} T_{ij}^{*A} \Delta u_j^A ds + \int_{\partial D_{cd}^A} T_{ij}^{*A} \Delta u_j^A ds = \int_{\partial D_L^A} U_{ij}^A \Delta t_j^A ds + \int_{\partial D_{ca}^A} U_{ij}^A \Delta t_j^A ds + \int_{\partial D_{cd}^A} U_{ij}^A \Delta t_j^A ds + \int_{\partial D_{cd}^A} U_{ij}^A \Delta t_j^A ds \quad (4)$$

$$\int_{\partial D_L^B} T_{ij}^{*B} \Delta u_j^A ds - \int_{\partial D_{ca}^B} T_{ij}^{*B} \Delta u_j^A ds - \int_{\partial D_{cd}^B} T_{ij}^{*B} \Delta u_j^B ds + \int_{\partial D_{cd}^B} T_{ij}^{*B} \Delta u_j^B ds = \int_{\partial D_L^B} U_{ij}^B \Delta t_j^B ds + \int_{\partial D_{ca}^B} U_{ij}^B \Delta t_j^A ds + \int_{\partial D_{cd}^B} U_{ij}^B \Delta t_j^A ds + \int_{\partial D_{cd}^B} U_{ij}^B \Delta t_j^A ds \quad (5)$$

(4) (5) representa 2 ecuaciones integrales (i=1,2) que pueden aplicarse en cada punto de A (B). Por tanto, -- existe el mismo número de ecuaciones integrales que de incógnitas en cada punto, ya que en los puntos de la zona de contacto puede aplicarse cuatro ecuaciones integrales.

Si hacemos la aproximación de las variables en el contorno utilizando elementos lineales no conformes analizados con detalle en [8] y utilizados también en [7], (4) y (5) se convierten en un sistema de ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas son variaciones de desplazamiento o de tensión en los contornos de A y B incluyendo la zona de contacto. Dicho sistema adopta la forma genérica indicada en (6), donde la nomenclatura es análoga a la utilizada en [7]:

$$\begin{bmatrix} H_t^A & 0 & -G_u^A & 0 & H_a^A & H_{d1}^A & H_{d2}^A & 0 & -G_a^A \\ 0 & H_t^B & 0 & -G_u^B & -H_a^B & -H_{d1}^B & 0 & H_{d2}^B & -G_a^B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta u_L^A \\ \Delta u_L^B \\ \Delta t_L^A \\ \Delta t_L^B \\ \Delta u_a^A \\ \Delta u_{1d}^A \\ \Delta u_{2d}^A \\ \Delta u_{2d}^B \\ \Delta t_{ja}^A \\ \Delta t_{1d}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(G_{d1}^A \pm \mu G_{d2}^A) \\ -(G_{d1}^A \pm \mu G_{d2}^A) \\ -H_u^A \Delta \bar{u}_L^A + G_t^A \Delta \bar{t}_L^A \\ -H_u^B \Delta \bar{u}_L^B + G_t^B \Delta \bar{t}_L^B \end{bmatrix} \quad (6)$$

(6) representa un sistema de ecuaciones determinado cuya resolución en la forma que se indica en los apartados 4 y 5 permite calcular incrementalmente las incógnitas del problema, a medida que se van aplicando las cargas Δu_L^k y Δt_L^k .

4. EL PROCESO INCREMENTAL

A efectos de aplicar el proceso incremental suponemos que toda la solici-

tación, \bar{Q} , está en función de un parámetro de carga p. Si existe más de un capítulo de carga (o descarga) con diferentes funciones de p, basta concatenar todos los capítulos aplicando el procedimiento que sigue. Por tanto suponemos que:

$$\bar{Q} \equiv \{ \bar{t}_j^k(p), \bar{u}_j^k(p) \} \quad (7)$$

Durante cada incremento de carga $\Delta Q_n(p)$ suponemos unas condiciones de contorno incluyendo la zona de contacto que representamos por CC_n . El proceso incremental puede por tanto representarse esquemáticamente según la Fig. 3.

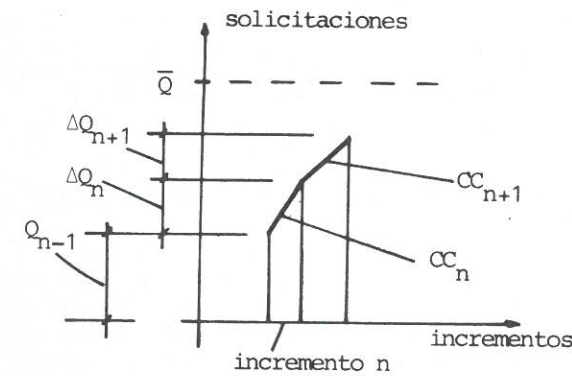


Fig. 3: Representación esquemática del proceso incremental.

Al finalizar el incremento n las variables en todo el contorno toman valores:

$$(t_j^k)_n \leq \bar{t}_j^k$$

$$(u_j^k)_n \leq \bar{u}_j^k$$

Supondremos condiciones de contorno CC_{n+1} y aplicamos $(\bar{Q}-Q_n)$ obteniendo una solución del sistema de ecuaciones (6) que denominamos

$$(\hat{u}_j^k)_{n+1}, (\hat{t}_j^k)_{n+1} \quad k=A,B$$

Al finalizar el incremento n quedaba por aplicar la carga $(\bar{Q}-Q_n)$ pero no necesariamente ΔQ_{n+1} coincidirá con dicho valor. Sólo lo hará si durante la aplicación de toda la carga no se han violado las condiciones de contorno CC_{n+1} que hemos supuesto. En general, esto no será así y sólo podrá aplicarse un incremento ΔQ_{n+1} de valor:

$$\Delta Q_{n+1} = f_{n+1}(\bar{Q}-Q_n) \quad \text{con } 0 \leq f_{n+1} \leq 1 \quad (8)$$

Para calcular el valor correcto de f_{n+1} , bastará comprobar que \hat{u} y \hat{t} calcu-

ladas aplicando $\bar{Q}-Q_n$ violarán a condiciones para cada una de las cuales sólo podría darse un incremento $(\Delta Q_{n+1})^\alpha$. Sólo el menor de estos incrementos podrá pues aplicarse sin violar ninguna condición de contornos. El valor correcto de f_{n+1} buscado, será pues:

$$f_{n+1} = \frac{(\Delta Q_{n+1})_{\min}^\alpha}{\bar{Q}-Q_n} \quad (9)$$

Por tanto el valor de los desplazamientos y las tensiones en el contorno después del incremento n+1 será:

$$(u_j^k)_{n+1} = (u_j^k)_n + f_{n+1} (\hat{u}_j^k)_{n+1}$$

$$(t_j^k)_{n+1} = (t_j^k)_n + f_{n+1} (\hat{t}_j^k)_{n+1} \quad (10)$$

y naturalmente la carga total aplicada tras el incremento n+1 será:

$$Q_{n+1} = Q_n + f_{n+1}(\bar{Q}-Q_n) = Q_n + \Delta Q_{n+1}$$

$$(Q_{n+1} \leq \bar{Q}) \quad (11)$$

Los valores de f_{n+1} tal como se indicó anteriormente están acotados entre 0 y 1. El valor unidad indica que puede aplicarse toda la carga restante sin que se violen las CC por lo que el capítulo de carga ha finalizado. El valor 0 indica estrictamente que cualquier valor de la carga viola CC y hay que interpretar que las CC_{n+1} supuestas eran erróneas por lo que hay que repetir el test de carga con otras condiciones. Estos casos se analizan en el apartado 5.

El valor de f en cada incremento, para cada par de nodos ha de calcularse atendiendo a cuatro conceptos que se explicitan a continuación determinando el valor de f en cada caso.

- Nodos que pueden entrar en contacto.

Para cada par de nodos α que en el incremento n pueden contactar y que antes de aplicar el incremento se encuentran separados una distancia Δ_{n-1}^α [7] el valor de f_n^α se obtiene:

$$f_n^\alpha = \left| \frac{\Delta_{n-1}^\alpha}{(\hat{u}_1^A)_n^\alpha + (\hat{u}_1^B)_n^\alpha} \right| \quad (12)$$

- Nodos que pueden salir de la zona de contacto.

Si al efectuar el incremento de carga n , aparecen tracciones en nodos de la zona de contacto, hay que calcular el valor de f que provoca la separación de ambos dominios en dichos nodos. Por tanto para cada par de nodos α en los que se produzca la circunstancia anterior, hay que calcular un factor f_n^α definido por:

$$f_n^\alpha = \left| \frac{(t_1)_{n-1}^\alpha}{(\hat{t}_1)_n^\alpha} \right| \quad (13)$$

Como ya se indicó en [7] los valores de f_n^α en los dos casos anteriores para nodos de un mismo elemento no pueden ser independientes, pues se podrían producir incompatibilidades geométricas al resolver algún incremento.

- Nodos que están en adhesión.

Utilizando la representación de la Fig. 2, un punto en adhesión, como el R puede evolucionar en el espacio acotado por las rectas $t_2 = \pm \mu t_1$ y cambiará de estado si alcanza dichas rectas. Cualitativamente, la evolución del punto puede ubicarse en las tres zonas definidas en la Fig. 4. Si la aplicación de $\bar{Q}-Q_{n-1}$ hace evolucionar R_{n-1} hacia la zona I, las condiciones de contorno definidas para el incremento n nunca se violarán, por lo que no puede calcularse ningún factor f .

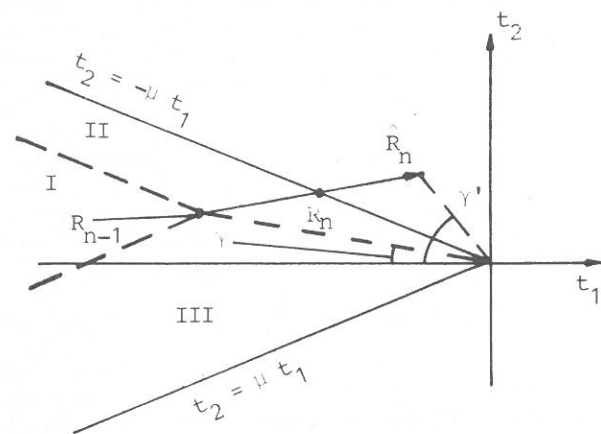


Fig. 4: Evolución de un punto en la zona de adhesión.

Si la evolución es en una dirección incluida en la zona 2 (como indica la Figura), se puede alcanzar un punto R_n . Las condiciones de contorno se violan y es preciso definir un factor f para que el punto R_{n-1} evolucione sólo hasta la

posición R_n . Por tanto, para cada par de puntos n_α en los que al aplicar $\bar{Q}-Q_{n-1}$, se produzcan las circunstancias anteriores, hay que calcular un factor f_n^α de valor:

$$f_n^\alpha = \left| \frac{(t_2)_{n-1}^\alpha - \mu (t_1)_{n-1}^\alpha}{(\hat{t}_2)_n^\alpha - \mu (\hat{t}_1)_n^\alpha} \right| \quad (14)$$

Si la evolución es hacia la zona III, el razonamiento es análogo y el factor que se obtiene es:

$$f_n^\alpha = \left| \frac{(t_2)_{n-1}^\alpha + \mu (t_1)_{n-1}^\alpha}{(\hat{t}_2)_n^\alpha + \mu (\hat{t}_1)_n^\alpha} \right| \quad (15)$$

El caso $\gamma = \gamma'$ no tiene significado especial determinando f para que R_n se encuentre en el vértice del cono de fricción.

- Nodos que están en la zona de deslizamiento.

Si un nodo se encuentra en la zona de deslizamiento, su representación en el cono de fricción viene definida por el punto S_{n-1} (Fig. 5). La condición de contorno natural para abordar el incremento n es suponer que continua en deslizamiento. Con esta hipótesis la única evolución posible es sobre la propia recta de deslizamiento, puntos S'_n y S''_n . Para que la evolución se produjera en el sentido de abandonar la zona de deslizamiento, punto S''_n , es preciso que cualquier incremento de carga viole la condición de deslizamiento supuesta. Este caso se estudia en el apartado 5.

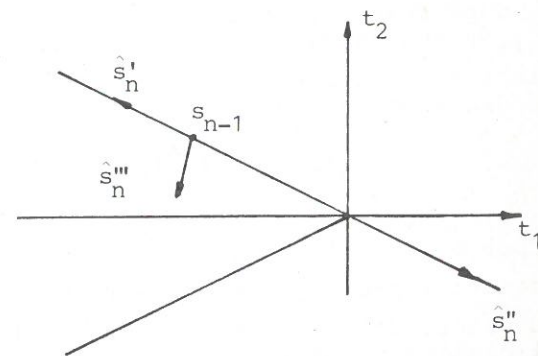


Fig. 5: Evolución de un punto en la zona de deslizamiento.

La evolución en el sentido S'_n no está acotada. La evolución en el sentido S''_n si lo está, pudiendo como máximo alcanzarse el origen. Para un par de no-

dos α en la zona de deslizamiento que evolucionen en esta dirección se puede calcular un valor f_n^α definido por:

$$f_n^\alpha = \left| \frac{(t_1)_{n-1}^\alpha}{(\hat{t}_1)_n^\alpha} \right| \quad (16)$$

5. DEFINICION DE CONDICIONES DE CONTORNO EN CADA INCREMENTO

No siempre, en función del estado anterior, puede conocerse la evolución de un punto y por tanto establecer las condiciones de contorno para el siguiente incremento. Por ello, es preciso analizar los resultados del test de carga, para saber si las condiciones de contorno no supuestas eran correctas o no, debiendo procederse en este último caso y en función de los resultados erróneos obtenidos a aplicar un nuevo incremento con condiciones de contorno nuevas. Se enumeran a continuación, una serie de casos en que pueden reproducirse la situación expuesta.

- Aplicación de las condiciones iniciales.

Al aplicar el primer incremento de carga, si existe una zona de contacto desde el instante inicial, no se tiene criterio para establecer las zonas de adhesión y deslizamiento. Una solución puede ser considerar todo en adhesión y si en todos los puntos se obtiene

$$|t_2| \leq |\mu t_1| \text{ con } t_1 \leq 0$$

Las condiciones de contorno estaban correctamente fijadas y se puede proceder al escalado. Si en algún punto $t_1 > 0$, habrá que dar un nuevo incremento, permitiendo el despegue en dicho punto. Análogamente si en un punto no se cumple la primera restricción se repite el incremento situándose este punto en la zona de deslizamiento.

- Nodos que se encuentran en la zona de deslizamiento.

Aunque los diagramas basados en la representación del cono de fricción no lo representan, los deslizamientos relativos que se pueden producir en una u otra recta límite del cono tiene un signo claramente definido ya que la tensión tangencial actúa disipando energía. Por tanto, en un punto α que se encuentre en la zona de deslizamiento se ha de cumplir que:

$$(\hat{t}_2)_{n+1}^\alpha \cdot (\hat{u}_2)_{n+1}^\alpha < 0 \quad (17)$$

con

$$(\hat{u}_2)_{n+1}^\alpha = (\hat{u}_2^A)_{n+1}^\alpha + (\hat{u}_2^B)_{n+1}^\alpha$$

En el caso en que (17) no se cumpla esto indica que la evolución del punto α es hacia la zona de adhesión (\hat{S}_n''' en la Fig. 5) y es preciso repetir el incremento con nuevas condiciones de contorno en dicho punto.

- Nodos que se encuentran en el vértice del cono de fricción.

Un nodo en esta situación puede despegar o mantenerse en la zona de contacto, apareciendo transmisión de carga a través de él. Si las condiciones de contacto se establecen para esta segunda opción (ya sea para adhesión o deslizamiento) y el resultado del incremento provoca tracciones en el punto es preciso repetir, suponiendo condiciones para despegue. En el caso de que aparezcan compresiones, hay que comprobar que la condición supuesta, adhesión o deslizamiento, no se ha violado. Esta situación es normal para todos los puntos que, en un proceso de carga, acaban de entrar en la zona de contacto.

6. RESULTADOS

Se presentan los resultados obtenidos en la compresión de un dominio rectangular sobre una cimentación elástica también rectangular, suponiéndose un coeficiente de fricción entre ambas superficies de 0.2. Se trata del mismo ejemplo abordado en [7], sin fricción. Aplicando simetría el dominio que se va a resolver es (Fig. 6).

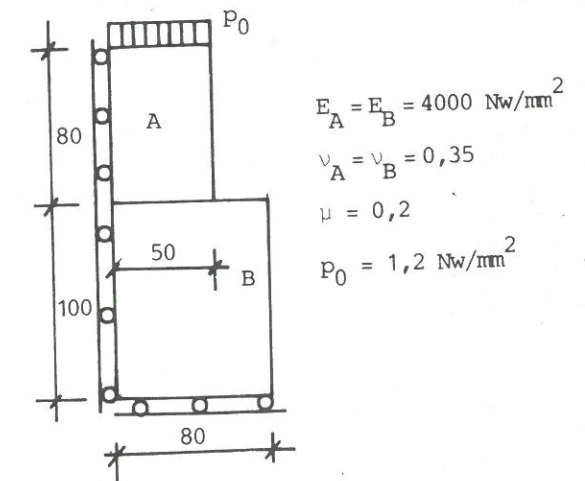


Fig. 6 : Configuración del problema.

Los resultados obtenidos se representan en las Figs. 7 y 8. En la primera de ellas se representan los valores de las tensiones normales y tangenciales en la zona de contacto, referidas ambas a la carga aplicada p_0 . En la segunda se representan las zonas de adhesión y des-

lizamiento indicando en esta última la evolución de los desplazamientos tangenciales relativos entre puntos de ambos dominios. Los resultados se comparan -- con los obtenidos por Andersson [5], -- utilizando 56 elementos parabólicos (26 en el A y 30 en el B), es decir, 228 -- grados de libertad para ambos dominios. También aparecen los resultados obtenidos por Fredriksson para el mismo problema con Elementos Finitos [2], empleando elementos triangulares con variación lineal de desplazamientos. Se utilizan 496 elementos con 712 grados de libertad. Los resultados mostrados con elementos discontinuos se han obtenido con dos discretizaciones. Una con 50 elementos (20 el A y 30 el B) lo que equivale a 200 grados de libertad para ambos dominios y otra con 28 elementos (12 el A y 16 el B) lo que equivale a 112 grados de libertad.

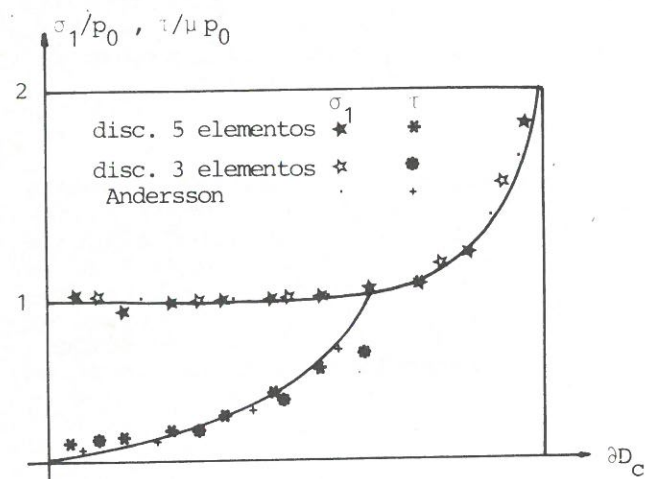


Fig. 7: Evolución de la tensión normal y la tensión tangencial en la zona de contacto.

Como puede apreciarse, los tres elementos adyacentes al eje de simetría, se encuentran en adhesión ($|t_2| < |\mu t_1|$) y el elemento más alejado del eje de simetría se encuentra en deslizamiento. Entre ambos existe un elemento, uno de cuyos nodos está en adhesión y el otro en deslizamiento.

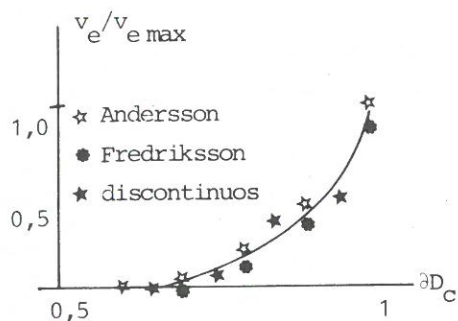


Fig. 8: Deslizamientos relativos en la zona de contacto.

En la zona próxima al final del contacto, las tensiones crecen rápidamente, no presentando esto ningún problema para elementos discontinuos. En el caso de querer obtener el factor de concentración de tensiones, es preciso utilizar un elemento que recoja la presencia de la singularidad, en forma similar a lo realizado con elementos lineales continuos [9].

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación en ecuaciones integrales que permite la aplicación del Método de los Elementos de Contorno para el problema de contacto de dominios bidimensionales con fricción de Coulomb.

En el problema con fricción se aprecian las mismas ventajas que ya aparecían patentes en el problema sin fricción con respecto al método de los Elementos Finitos.

Los elementos discontinuos se muestran apropiados para abordar este tipo de problemas por cuanto se soslayan las dificultades asociadas a la aplicación de las condiciones de contorno que son inherentes a la ubicación de un nodo en el extremo de un elemento. La precisión obtenida es similar a la obtenida por Andersson con elementos continuos (lineales y parabólicos) con equivalente número de grados de libertad.

El problema, ya apuntado en el caso sin fricción, de mejorar el tiempo de resolución del sistema de ecuaciones en cada incremento, toma aquí una mayor importancia por cuanto además es preciso realizar algunas resoluciones más con condiciones de contorno de prueba. Ello sugiere utilizar alguna de las técnicas de reanálisis utilizada en el Método de los Elementos Finitos, lo que debe ser objeto de futuros trabajos.

La anterior afirmación cobra más relevancia si se considera la conveniencia de ampliar el método a leyes de fricción de carácter no local, ó no lineal como las sugeridas por Oden y Pires [10] o por el mismo Fredriksson [7] lo que exige un proceso iterativo para determinar el coeficiente de fricción apropiado para cada incremento.

8. BIBLIOGRAFIA

1. Waterhouse, R.B. "Fretting Fatigue" Applied Science Publishers. (1981).
2. Fredriksson, B. "Finite Element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems". Computers and Structures, Vol. 6, pp. 281-290, 1976.

3. Okamoto, N., y Nabazawa, M. "Finite Element incremental contact analysis with various frictional conditions". Int. J. Num. M. Eng., Vol. 14, pp. 337-357, 1979.

4. Andersson, T. "The Boundary Element Method applied to two-dimensional contact Problem with Friction". Boundary Element Method. Ed. by C.A. Brebbia. Springer-Verlag, 1981.

5. Andersson, T. "The Second generation Boundary Element Contact Program". Boundary Element Methods in Engineering Springer-Verlag, 1982.

6. Andersson, T. y Allan Persson, B.G. "The Boundary Element Method applied to two dimensional Contact problems". Progress in Boundary Element Method. Ed. by C.A. Brebbia. Vol. 2. Pentech Press. 1983.

7. Paris, F. y Garrido, J.A. "Análisis del problema de contacto sin fricción con el Método de los Elementos de Contorno". III Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Gijón 1984.

8. Paris, F. y Garrido, J.A. "Elementos discontinuos lineales en el análisis elástico bidimensional con el Método de los Elementos de Contorno". Anales de Ingeniería Mecánica. Año 1, Nº 1, pp. 20-25. 1983.

9. Gomez, S., Paris, F., Alarcón, E. "Treatment of singularities in 2D domains using B.I.E.M.". Appl. Math. Modelling, Vol. 6, April 111-118, 1982.

10. Oden, J.T., y Pires, E.B. "Nonlocal and nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity". Journal of Applied Mechanics, Vol. 50 67-76, Marzo, 1983.