

EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO AL CALCULO DE PLACAS APOYADAS

F. Paris y S. de León.

E.T.S. Ingenieros Industriales. Sevilla.

**Resumen.** - Se analiza el problema de placas elásticas apoyadas, sometidas a carga estática mediante una formulación integral obtenida a partir de la descomposición de la ecuación biarmónica que rige el comportamiento de dichas placas, según la hipótesis de Kirchoff, en dos ecuaciones armónicas que quedan desacopladas bajo ciertas condiciones de contorno. Este planteamiento se revela muy ventajoso, operativamente, frente a otras alternativas previas que se describen en la introducción del trabajo.

INTRODUCCION

El análisis de placas ha sido a lo largo de la historia de la Mecánica de los Medios Continuos, un campo de especial interés por su propia naturaleza y por su vasto campo de aplicación. El desarrollo de este análisis ha experimentado muchas peculiaridades que se remontan a sus orígenes, pues no debe olvidarse que los primeros trabajos se referían al estudio de vibración de placas y que la formulación de este problema por Germain-Lagrange fue anterior a la formalización introducida por Cauchy Poisson, Navier, Kirchoff, Kelvin, Levy y otros, formularon el problema y encontraron soluciones a ciertos casos particulares de geometría y carga. Por ello, los métodos numéricos han encontrado en el análisis de placas un amplio campo de aplicación, para intentar resolver cualquier configuración geométrica solicitada por un campo arbitrario de fuerzas. Al igual que en la mayoría de los casos que conforman la Mecánica de Medios Continuos, caben dos enfoques generales desde el punto de vista numérico: de dominio y de contorno. En el primer grupo se incluyen los métodos en que las incógnitas del problema están asociadas a puntos del interior de la placa. Cabe citar el Método de las Diferencias Finitas, Método de Galerkin y naturalmente, el Método de los Elementos Finitos. Un interesante estudio comparati-

vo de estos métodos puede encontrarse en Speare [1]. En el segundo grupo, en que se incluye el trabajo que se presenta, las incógnitas iniciales del problema están asociadas a puntos del contorno de la placa, si bien, con posterioridad a su determinación pueden calcularse variables asociadas a puntos del dominio. En algunos casos, como veremos más adelante, es preciso en el proceso de cálculo de las variables del contorno, calcular valores intermedios asociados a puntos que están fuera del dominio (métodos indirectos) ó dentro de él (formulación que se presenta).

Jaswon [2] propone un planteamiento en ecuaciones integrales para la ecuación biarmónica aplicándolo posteriormente, Jaswon [3], al caso de placas. En este esquema los momentos flectores se expresan a través de las derivadas de dos funciones armónicas que a su vez están expresadas como integrales de unas ciertas distribuciones fuentes en el contorno de la placa. La resolución numérica de estas ecuaciones integrales permite obtener estas distribuciones fuentes, y se evalúan los momentos a partir de las expresiones integrales diferenciadas.

Posteriormente, Hansen [4] formula un planteamiento directo del problema aplicándolo a la determinación de despla-

zamientos transversales y Momentos flectores en placas elásticas con agujeros no cargadas en su contorno. Este planteamiento incluye una ecuación integral obtenida mediante la aplicación de un teorema de reciprocidad sobre la ecuación biarmónica y otra obtenida mediante la derivada direccional de la ecuación anterior.

Bezine [5] y [6] establece el planteamiento de Hansen para el caso general de placas finitas estáticas con condiciones de contorno arbitrarias. Este es el método directo, por cuanto sólo se manejan variables de contorno con sentido físico, desplazamientos, giros, cortantes y flectores.

Wu y Altiero [7] proponen un método indirecto de solución que incluye como contorno auxiliar el de una placa con solución conocida, la placa circular empotrada. No presenta ventajas frente a ningún planteamiento indirecto anterior.

En el planteamiento directo de Hansen, la segunda ecuación integral presenta serias dificultades por la presencia de singularidades y por la complicación de los núcleos de integración. Bezine ha planteado [8] una ecuación alternativa mediante la aplicación de similaridad.

En los dos últimos años se han publicado trabajos encaminados a incluir en la formulación efectos especiales. Así, el propio Bezine [9] plantea una formulación mixta de dominio y contorno para el caso de vibraciones. Wong [10] realiza una formulación directa para el mismo problema aunque sin presentar resultados. Kamiya [11] incluye los efectos térmicos con deformaciones finitas. Vander Ween [12] realiza una formulación del contorno sobre un modelo de Reissner a partir de la formulación general de la elasticidad 3 D.

El estudio que a continuación se expone, aunque basado en un planteamiento de contorno, presenta sustanciales diferencias respecto a trabajos previos. La idea fundamental radica en descomponer la ecuación que rige el comportamiento de las placas según las hipótesis de Kirchoff en dos ecuaciones armónicas que bajo ciertas condiciones de contorno pueden desacoplarse por lo que el problema puede reducirse a un planteamiento integral de la ecuación de Poisson. En el apartado 2 se desarrollará la formulación. En el 3 se hará una breve descripción del programa de ordenador, imprescindible para analizar comparativamente el método frente a los planteamientos alternativos previos. En el 4 se analizarán dos ejemplos significativos y en el 5 se establecerán las conclusiones del trabajo.

2. FORMULACION INTEGRAL DEL PROBLEMA

Las placas en régimen elastostático con las hipótesis introducidas por Kirchoff se rigen por la ecuación

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (1)$$

donde p y w representan carga y desplazamientos transversales y D la rigidez a flexión de la placa.

Esta ecuación puede ser descompuesta en dos ecuaciones de la forma siguiente

$$\nabla^2 M = -p \quad (2a)$$

$$\nabla^2 w = -\frac{M}{D} \quad (2b)$$

donde

$$M = \frac{1}{1+\nu} (M_n + M_t) \quad (3)$$

Siendo  $M_n$  y  $M_t$  los momentos flectores referidos a dos ejes perpendiculares cualesquiera.

El conjunto de ecuaciones (2) representa un planteamiento alternativo del problema.

En general, cualquier ecuación de la forma:

$$A \phi = f \text{ en } D \quad (4)$$

donde A es un operador genérico definido sobre  $\phi$  en un dominio D, con condiciones naturales, N, y esenciales E, sobre el contorno  $\partial D$  definidas según:

$$\begin{aligned} E\phi &= \bar{\phi} \text{ en } \partial D_\phi \\ N\phi &= \bar{q} \text{ en } \partial D_q \end{aligned} \quad (5)$$

admite una formulación integral, incluyendo una función auxiliar  $\psi$  de la misma clase que  $\phi$ , en la forma:

$$\langle \phi, A\psi \rangle_D + \langle E\phi, N\psi \rangle_{\partial D} = \langle A\phi, \psi \rangle_D + \langle E\psi, N\phi \rangle_{\partial D} \quad (6)$$

Un planteamiento de contorno para la variable incógnita  $\phi$  se consigue eliminando ó reduciendo la primera integral de (6), para lo cual basta elegir  $\psi$  según

$$A\psi + \delta(x_i) = 0 \quad (7)$$

La aplicación de (6) al problema definido por (1), hace que la función  $\psi$  definida por (7) sea la solución fundamental de la ecuación biarmónica (pues  $A \equiv \nabla^4$ ).

$$\psi = \frac{1}{8\pi} r^2 \log r \quad (8)$$

Para este operador A, la ecuación (6) incluye hasta derivadas terceras de  $\psi$  y teniendo en cuenta que es preciso introducir una ecuación adicional a (6),

obtenida a través de su derivada direccional, lo que implica un grado más de derivación en  $\psi$ , los núcleos de integración que aparecen en (6) y su derivada direccional son de una especial complicación, incluyendo fuertes singularidades.

En cambio, la aplicación de (6) al problema definido por (2), exigiría la inclusión de una función  $\psi$  definida por (7), (para  $A \equiv \nabla^2$ ) de la forma:

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (9)$$

considerablemente más simple que (8), -- por cuanto ahora la aplicación de (6) sólo requiere derivadas de primer grado de  $\psi$ . Por tanto el camino a seguir es la aplicación de (6) con:

$$A \equiv \nabla^2, \quad E \equiv 1, \quad N = \frac{\partial}{\partial n} \quad (10)$$

por lo que (6) adopta la forma

$$C(P) \phi(P) + \int_{\partial D} \frac{\partial \psi}{\partial n}(P, Q) \phi(Q) ds(Q) = \int_{\partial D} \psi(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial n}(Q) ds(Q) + \int_D f(R) \psi(P, R) da(R) \quad (11)$$

$$Q \in \partial D \\ R \in D$$

$$\text{Si } P \in D, \quad C(P) = 1$$

$$\text{Si } P \in \partial D, \quad C(P) = \text{constante que depende de la forma local del contorno.}$$

(11) puede ser aplicada para la resolución de (2a) y (2b). En primer lugar se aplica para (2a) con  $P \in \partial D$ , encontrando se los valores de  $M$  y  $\partial M / \partial n$  en  $\partial D$ . Después se aplica con  $P \in D$  para calcular  $M$  en los puntos del dominio en que (2b) requiera su conocimiento. De nuevo se aplica con  $P \in \partial D$  para calcular  $w$  y  $\partial w / \partial n$  en el contorno a partir de (2b) y finalmente si se desea conocer valores de  $w$  en el interior de la placa se aplica (11) para (2b) con  $P \in D$ . La expresión (11) podría adoptar una forma más compacta, si la integral de dominio se transforma en otra integral de contorno. Ello depende de la naturaleza de  $f$ , resultando posible en la aplicación de (11) a (2a) pues en muchos casos la naturaleza de  $P$  admitiría la transformación, pero ello no es posible en la aplicación de (11) a (2b), por cuanto la evolución de  $M$  en  $D$  no es conocida, razón por la que se ha mantenido la integral de dominio.

Las aplicaciones de (11) en la forma anteriormente indicada, exige la aproximación en las variables en la forma clásica:

sica:

$$\phi = a_i N_i \quad (12)$$

siendo  $N$  funciones de pequeño soporte, lineales en el contorno para  $\phi$  y  $\partial \phi / \partial n$  y constantes en el dominio.

El desacoplamiento en la resolución de las ecuaciones (2a) y (2b) se produce solamente bajo ciertas condiciones de contorno, las asociadas a placas poligonales simplemente apoyadas, que constituyen un amplio campo dentro del conjunto general, por su utilización. Dichas condiciones se expresan así:

$$M = M_0 \quad y \quad w = 0 \quad \text{en } \partial D$$

Una descripción más profunda del proceso de discretización y método de integración de una ecuación de naturaleza similar a (11) puede encontrarse en Parrís [13] y Alarcón [14] y las particularidades concernientes a la aplicación de (11) a placas, pueden encontrarse en París [15].

Finalmente, en algunos casos se desea también conocer algunos valores de interés en el diseño de placas, fundamentalmente, los momentos flectores. Estos pueden ser obtenidos a partir de una ecuación integral, recordando su relación con  $w$

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

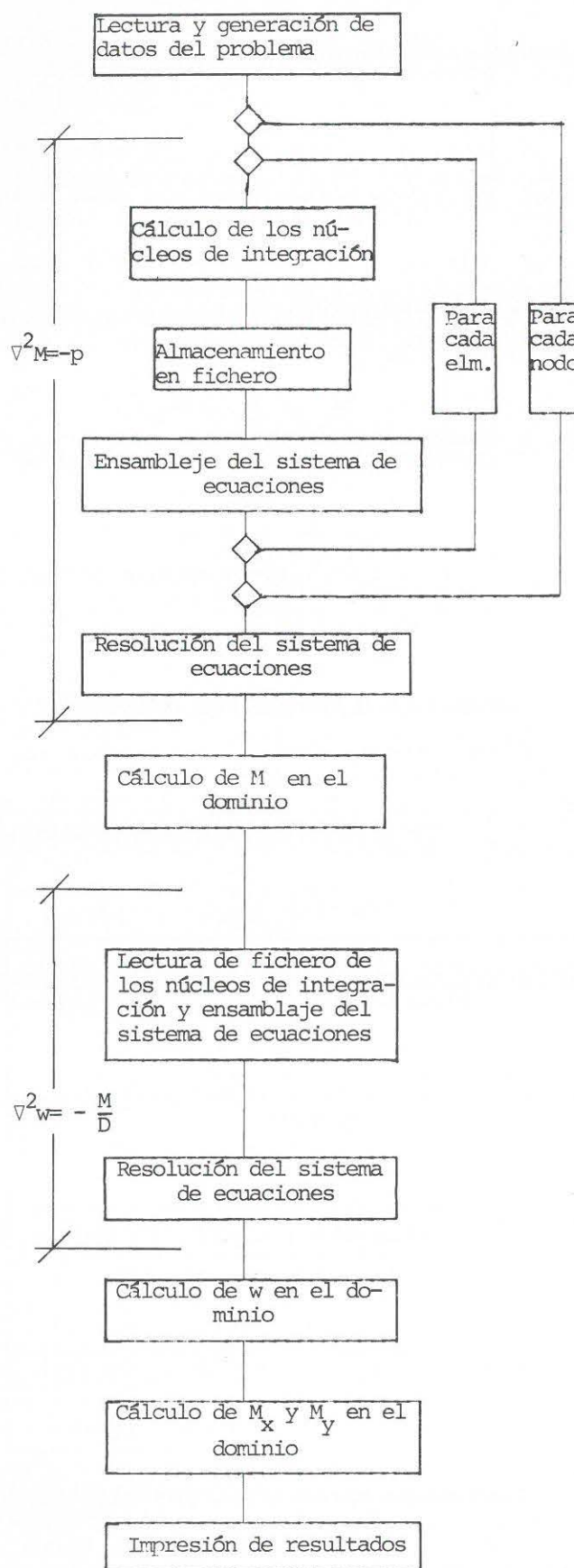
$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

e introduciendo aquí el valor de  $w$  a través de (11) para  $\phi = w$  y  $f = M$ .

### 3.- EL PROGRAMA DE ORDENADOR.

Una breve descripción del programa de cálculo resulta imprescindible para analizar las ventajas del procedimiento que se presenta. Esta descripción, de una forma simplificada, se realiza a través del diagrama de flujo que se presenta a continuación:

### PROGRAMA GARFI



A la vista del esquema anterior pueden obtenerse las siguientes conclusiones que avalan el planteamiento del problema según el sistema (2), frente al de (1).

- Se resuelven dos sistemas de ecuaciones de tamaño  $(n \times n)$ , mientras que en el planteamiento directo según (1) se hace preciso la resolución de un sistema  $(2n \times 2n)$ , siendo en ambos casos  $n$ , el número de puntos del contorno en los que se van a calcular las variables del problema. Esta diferencia afecta a dos aspectos computacionales de su importancia. Uno, la capacidad de memoria necesaria que en el planteamiento actual se reduce a la cuarta parte, ya que con el desacoplamiento de las ecuaciones, estas no se resuelven simultáneamente. El otro, el tiempo de resolución de dichos sistemas. Puesto que se utiliza un método de eliminación de Gauss en el que el tiempo de resolución es función cúbica del tamaño del sistema de ecuaciones, con la formulación presentada se reduce el tiempo de cálculo a un 25%.
- No hay que calcular los coeficientes de los dos sistemas de ecuaciones que el proceso de discretización origina a partir de (2a) y (2b). La similitud de ambas ecuaciones, hace preciso, tal y como se aprecia en el organigrama anterior, el cálculo de las constantes de integración una sola vez. Por lo que comparativamente con este planteamiento se calcula una cuarta parte de núcleos de integración.
- En ciertos casos, además se puede eliminar la mitad de estas constantes de integración, las correspondientes al primer miembro de (11) ya que  $w=0$  siempre y  $M=0$  generalmente.
- Al igual que sucedía para los núcleos de integración correspondientes a los sistemas de ecuaciones, los correspondientes a (11) cuando se calcula  $w$  y  $M$  en el mismo punto se evalúan una sola vez.
- La discretización de contorno es independiente de la de dominio, -- por lo que en cada problema y atendiendo a su naturaleza, puede afinarse para una u otra. Es preciso prestar atención al hecho de que la discretización de dominio no afecta al tamaño del sistema de ecuaciones, sino sólo a la complejidad de cálculo del término de dominio que aparece en (11). En los

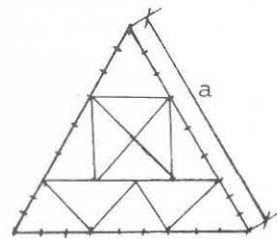
ejemplos que a continuación se resuelven se hace un análisis de la influencia de las discretizaciones de contorno y dominio.

#### 4.- RESULTADOS.

Dos ejemplos van a ser analizados, disponiéndose de solución analítica en ambos casos, para poder establecer la bondad de los resultados.

##### Ejemplo 1.

Se trata de analizar una placa triangular equilátera apoyada y sometida a un momento uniforme en el contorno. La solución analítica de este problema puede ser encontrada en [16]. Se han realizado dos discretizaciones de contorno y una de dominio debido a la nula influencia de ésta última dada la naturaleza del problema ( $M=cte$  en D). La Fig. 1 representa la placa con una de las discretizaciones utilizadas ( $D_1$   $\partial D_2$ ) y las características que la definen.



- $E = 2 \cdot 1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$
- $\nu = 0.3$
- $h = 10 \text{ cm.}$
- $M = 500 \text{ cm-Kg/cm}$
- $a = 300 \text{ cm}$
- $\partial D_1 : 10 \text{ Elementos}$
- $\partial D_2 : 28 \text{ Elementos}$
- $D : 12 \text{ Elementos}$

Fig. 1.- Discretización de la placa.

Las Figuras 2, 3 y 4 resumen gráficamente los resultados obtenidos en el contorno,  $\partial w/\partial n$ , y dominio,  $w$  y  $M_x$  para las dos discretizaciones del contorno

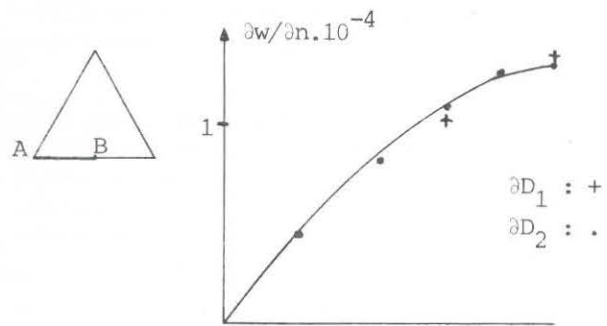


Fig. 2.-  $\frac{\partial w}{\partial n}$  en el contorno.

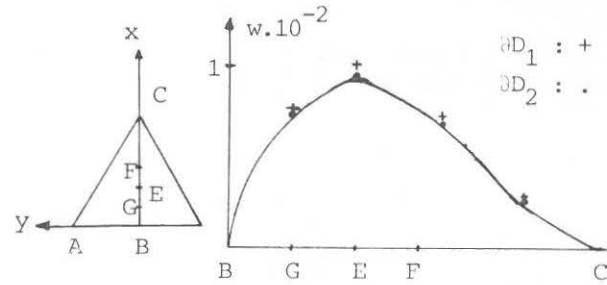


Fig. 3.-  $w$  en puntos internos.

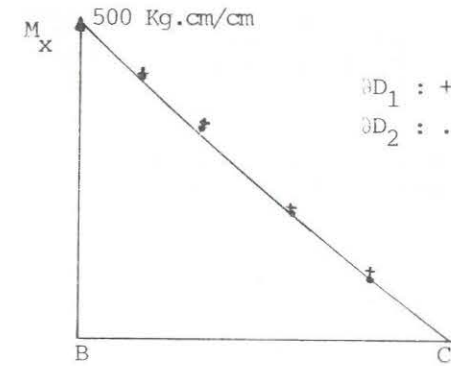


Fig. 4.-  $M_x$  en puntos internos.

Finalmente la Tabla 1 resume los resultados más interesantes:

Tabla 1.- Resultados en diferentes puntos.

		Teoría	Disc.1	Disc.2
CONTORNO				
$\frac{\partial w}{\partial n}$ $10^{-4} \text{ rad}$	D	1,70	1,60	1,71
	B	1,95	2,09	2,05
DOMINIO				
$w$ $10^{-2} \text{ cm}$	E	0,86	0,96	0,92
	F	0,64	0,71	0,66
$M$ $\text{Kg} \cdot \text{cm}$	E	500,00	500,00	500,00
	F	500,00	500,00	500,00
$M_x$ $\text{Kg} \cdot \text{cm}$	E	325,00	338,31	336,74
	F	208,27	204,10	205,84

Como puede apreciarse, los valores de  $M$  se calculan sin error, puesto que la aproximación se corresponde en forma exacta con su evolución, razón por la que la discretización del dominio carece de influencia, no sucediendo lo mismo con el contorno tal como se aprecia en

la tabla y gráficos anteriores.

##### Ejemplo 2.

Se ha analizado una placa cuadrada apoyada en el contorno y sometida a carga transversal uniforme. Los resultados obtenidos se van a comparar con la solución teórica que puede encontrarse en [16], con la solución de Elementos Finitos dada por Zienkiewicz [17] y con la solución de diferencias finitas centradas mediante un programa de ordenador elaborado a tal efecto. Puesto que en esta ocasión sí influye la discretización del dominio ( $M \neq cte$ ) se han realizado diferentes discretizaciones de dominio y contorno para entrever su influencia en los resultados.

La Fig. 5 describe el problema y una de las discretizaciones ( $D_1$ ,  $\partial D_2$ ):

- $p = 0.5 \text{ kg/cm}^2$
- $E = 2 \cdot 1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$
- $\nu = 0.3$
- $a = 200 \text{ cm}$
- $h = 10 \text{ cm}$
- $\partial D_1 : 8 \text{ Elementos}$
- $\partial D_2 : 16 \text{ Elementos}$
- $\partial D_3 : 24 \text{ Elementos}$
- $D_1 : 12 \text{ Elementos}$
- $D_2 : 28 \text{ Elementos}$

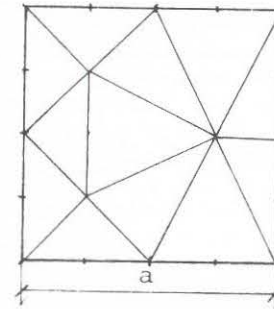


Fig. 5.- Discretizaciones de la placa

Las Figuras 6 y 7 describen la variación de  $\partial w/\partial n$  sobre el contorno manteniendo una discretización de dominio y variando el contorno y viceversa.

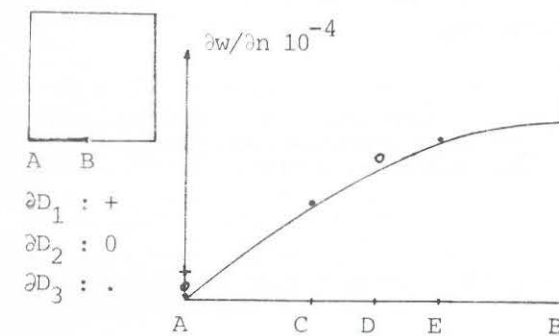


Fig. 6.- Ángulo girado en el contorno ( $D_1$ ).

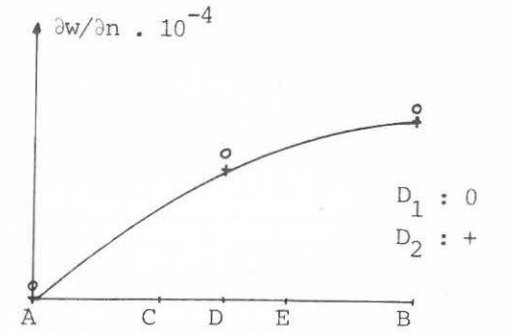


Fig. 7.- Ángulo girado en el contorno ( $\partial D_2$ ).

Las Figuras 8 y 9 describen la evolución de  $w$  y  $M$  en el interior.

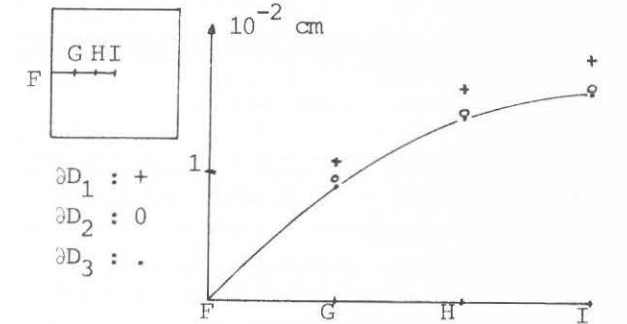


Fig. 8.- Flecha en puntos internos ( $D_1$ ).

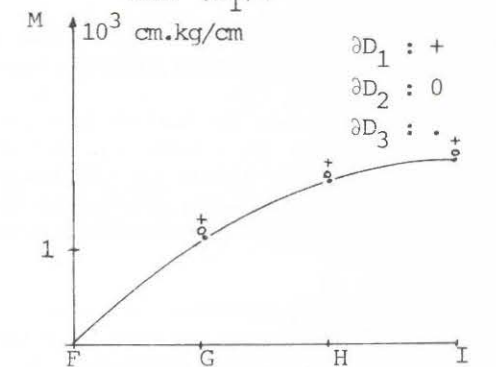


Fig. 9.- Valores de  $M$  en puntos internos ( $D_1$ ).

La Tabla 2 recoge los valores más significativos en el centro de la placa.

$$w = \alpha \frac{q a^4}{D} \quad M_x = \beta q a^2$$

Tabla 2.- Variables en el centro de la placa para diferentes discretizaciones.

	D	$\partial D$	$\alpha \cdot 10^{-2}$	$\beta \cdot 10^{-1}$
M.E.C.	12 elem.	8 elem.	0,4549	0,498
		16 elem.	0,4020	0,473
		24 elem.	0,4022	0,474
	28 elem.	16 elem.	0,4031	0,479
M.E.F.	16 elem.	-	0,3939	-
	256 elem.	-	0,4056	-
M.D.F.	Malla 5x5		0,4021	0,456
	Malla 9x9		0,4023	0,469
Teoría	-		0,4062	0,479

Los resultados obtenidos para este ejemplo admiten los siguientes comentarios:

- Los valores de M en el dominio dependen sólo de la discretización empleada en el contorno ( $p=cte$ ), mientras los de w dependen también de la de dominio ( $M \neq cte$  en D).
- Los valores de  $\partial w / \partial n$  son de menor precisión en  $\partial D$  que las de w en D pese a que éstos se obtienen a partir de aquellos. Esta característica es común a los métodos de contorno.
- No se representa la variación de las variables de dominio con diferentes discretizaciones del mismo, porque éstas no influyen. Basta comprobar que una mala discretización de D con una razonable de  $\partial D$  produce una excelente aproximación.
- La aproximación obtenida en las variables de mayor grado de derivación ( $M_x$ ) es del mismo orden que la de la variable original (w), lo que no sucede en los métodos de dominio. En la Tabla 2 se aprecia este hecho para el M.D.F. si bien no en el M.E.F. puesto que la referencia no los especifica.

#### 5.- CONCLUSIONES.

Se ha desarrollado una formulación en ecuaciones integrales para la resolución de placas elásticas apoyadas. Esta

formulación, a través de los ejemplos resueltos en el apartado 4, se revela similar, en cuanto a precisión, con otras alternativas numéricas de tratamiento. En comparación a otros tratamientos de contorno presenta las siguientes ventajas:

- Importante reducción en el aparato de cálculo numérico que afecta al tamaño del sistema de ecuaciones, número de constantes de integración a calcular y sencillez de evaluación de los mismos.
- Se requiere sencillas discretizaciones de contorno y sobre todo de dominio para la obtención de buenos resultados, no influyendo de cualquier forma ésta última en el tamaño del sistema de ecuaciones.

También presenta las siguientes limitaciones ó inconvenientes:

- El método descrito sólo es aplicable con las ventajas enunciadas a las placas poligonales apoyadas. Otros casos son tratables pero incluirían el manejo de incógnitas en el dominio, lo que representaría una drástica restricción de las ventajas enunciadas.
- Se hace necesario la discretización del dominio, si bien hay que decir que para una distribución no particular de p esto es preciso sea cual sea el planteamiento, y por otro lado hay que calcular variables intermedias de escasa significación (M). De cualquier forma hay que indicar que ambos factores afectan más a la limpieza y elegancia del planteamiento que a la eficacia y calidad de resultados del mismo.

#### REFERENCIAS.

- 1.- Speare P.R.S.. "Numerical Methods and refined plate Theories". Computers and Structures. Vol. 15, nº 4 pp. 351-358, 1982.
- 2.- Jaswon, Maiti y Symm. "Numerical Biharmonic analysis and some applications". Int. J. of Solids Structures. Vol. 3, pp. 309-332, 1967.
- 3.- Jaswon y Maiti. "An integral equation formulation of plate bending problems". J. Engineering. Mathematics. 2, 83-93, 1968.
- 4.- Hansen E.B.. "Numerical solution of integro-differential and singular equations for plate bending problems". Journal of Elasticity, Vol. 6, No 1. 1976.

5.- Bezine G.P. y Gamby D.A.. "A new integral equation formulation for plate bending problems". Recent Advances in Boundary Element Methods, Pentech Press, 1978.

6.- Bezine G.P.. "Boundary integral formulation for plate flexure with an arbitrary boundary conditions". Mech. Res. comm. Vol 5(4), 197-206, 1978.

7.- Wu B.C. y Altiero N.J.. "A Boundary Integral Method applied to Plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions". Computers and Structures, Vol. 10, pp. 703-707, 1979.

8.- Bezine G. "Application of similarity to research of new boundary integral equations for plate flexure problems". Applied Mathematical Modelling. 5(2) 065-128. (1981).

9.- Bezine G.. "A mixed Boundary Integral-Finite Element approach to Plate Vibration Problems". Mech. Res. Comm. Vol 7(3), 141-150, 1980.

10.- Wong G.K.K. y Hutchinson J.R.. "An Improved Boundary Element Method for Plate Vibrations". Boundary Element Methods. Springer-Verlag. 1981.

11.- Kamiya N., Sawaki Y., Nakamura Y., Fukui A.. "An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method". Appl. Math. Modelling. Vol. 6. 23-27. 1982.

12.- Vander Ween F.. "Application of the Boundary Integral equation method to Reissner's plate model". Int. J. Num. Methods. Eng. Vol. 18, 1-10. 1982.

13.- Paris F.. "El método de los Elementos de contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad". T.D. E.T.S.I.I. de Madrid, 1979.

14.- Alarcón E., Martín A. y París F.. "Boundary Elements in Potential and Elasticity Theory". Computers and Structures. Vol. 10 pp. 351-362. 1979.

15.- París F. y de León S.. "Cálculo de placas mediante el método de los Elementos de Contorno". I Simposium Nacional sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería. Barcelona 1982.

16.- Timoshenko S. y Woirowsky-Krieger. "Teoría de Placas y Láminas". Urmo 1975.

17.- Zienkiewicz. "El Método de los Elementos Finitos". Ed. Reverté, 1980.