



**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

---

---

**Formas Normales  
Cuasihomogéneas y  
Bifurcaciones  
de Sistemas Dinámicos  
Autónomos**

---

---

**Cristóbal García García**

TESIS DOCTORAL



FORMAS NORMALES CUASIHOMOGÉNEAS  
Y BIFURCACIONES DE SISTEMAS  
DINÁMICOS AUTÓNOMOS

---

Memoria presentada por CRISTÓBAL GARCÍA GARCÍA para optar al grado  
de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Fdo. CRISTÓBAL GARCÍA GARCÍA

---

•



FORMAS NORMALES CUASIHOMOGÉNEAS  
Y BIFURCACIONES DE SISTEMAS  
DINÁMICOS AUTÓNOMOS

---

Certifico que la presente memoria ha sido realizada por Cristóbal García García bajo nuestra supervisión y constituye su Tesis para aspirar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

Vº Bº de los Directores:

Fdo. ANTONIO ALGABA DURÁN

Fdo. ESTANISLAO GAMERO GUTIÉRREZ

Sevilla, Octubre de 2008



# AGRADECIMIENTOS

Durante el desarrollo de esta memoria he recibido el apoyo y la ayuda de numerosas personas a las que, con estas líneas, quiero expresar mi más sincero agradecimiento:

La primera persona que tiene que aparecer en estos agradecimientos es el Dr. Antonio Algaba, codirector de la presente tesis. Le quiero dar las gracias por el apoyo incondicional que me ha prestado, aclarando y criticando ideas que proponía, por la cantidad de conocimiento que ha puesto a mi disposición y en definitiva por su amistad.

Al Dr. Estanislao Gamero, también codirector de la presente tesis, por las numerosas correcciones que ha tenido que realizar y por el constante apoyo recibido. De ambos recibo su pasión por la Matemáticas y sobre todo por el compromiso ético con el trabajo bien hecho.

Debo mencionar también a D. Manuel Merino Morlesín y a D. Manuel Reyes Columé, profesores del Grupo de Investigación en Sistemas Dinámicos del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Huelva. Con ellos he compartido jornadas, cursos, debates. Y muchos años de ilusiones y trabajos comunes.

A los profesores del Grupo de Investigación en Sistemas Dinámicos del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, por su participación, directa o indirecta, en mi formación y por su colaboración desinteresada en todo momento. Al resto de miembros del Departamento de Matemáticas, por su disponibilidad y ánimo incondicional.

Y sobre todo a mi familia, sin cuyo apoyo este trabajo no habría sido posible.





*A Pilar, Lucia y Pilar.*  
*A mis padres y a mi hermana.*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Teoría de Formas Normales</b>	<b>11</b>
1.1. Preliminares . . . . .	12
1.2. Formas normales clásicas . . . . .	13
1.3. Formas normales cuasihomogéneas . . . . .	16
1.3.1. Notaciones y preliminares . . . . .	17
1.3.2. El poliedro de Newton . . . . .	18
1.3.3. Propiedades . . . . .	21
1.3.4. Formas normales bajo $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación . . . . .	23
1.3.5. Formas normales bajo $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia . . . . .	27
1.4. Triángulo de Lie . . . . .	31
1.4.1. Triángulo de Lie bajo $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación . . . . .	32
1.4.2. Triángulo de Lie bajo $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia . . . . .	34
1.5. Elección del tipo . . . . .	38
1.5.1. Forma normal de paso cero . . . . .	39
1.5.2. Ejemplo . . . . .	41
1.6. Estudio de un caso de la singularidad de Takens-Bogdanov . . . . .	44
1.6.1. Forma normal bajo $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación . . . . .	46
1.6.2. Forma normal bajo $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia . . . . .	54
<b>2. Determinación topológica de campos planos</b>	<b>61</b>
2.1. Preliminares . . . . .	62
2.2. Descomposición conservativa-disipativa . . . . .	64
2.3. El espacio vectorial $\mathcal{P}_k^t$ y sus propiedades . . . . .	67

2.4.	Diferentes tipos de blow-up . . . . .	72
2.5.	El Problema de la monodromía . . . . .	79
2.6.	Condiciones suficientes de determinación topológica . . . . .	83
2.7.	Condiciones necesarias de no monodromía . . . . .	94
2.8.	Un algoritmo para el problema de monodromía . . . . .	100
2.9.	Ejemplos . . . . .	103
2.9.1.	Monodromía de algunas familias simples . . . . .	104
2.10.	Problema de monodromía para el sistema nilpotente . . . . .	107
2.11.	Problema de monodromía para un sistema nilpotente generalizado	111
2.11.1.	Órbitas características de un sistema con un eje invariante	112
2.11.2.	Caracterización de la monodromía para un sistema nil- potente generalizado . . . . .	118
<b>3.</b>	<b>Sistemas cuasihomogéneos</b>	<b>131</b>
3.1.	Introducción . . . . .	131
3.1.1.	Preliminares . . . . .	132
3.2.	Formas canónicas . . . . .	135
3.3.	Reversibilidad . . . . .	139
3.3.1.	Reversibilidad de campos planos . . . . .	144
3.3.2.	Reversibilidad de campos cuasihomogéneos planos . . . . .	148
3.3.3.	Aplicaciones . . . . .	156
3.4.	La condición para un centro o un foco . . . . .	159
3.4.1.	Determinación topológica . . . . .	159
3.4.2.	Cálculo de $f_0$ . . . . .	161
3.4.3.	Ejemplos . . . . .	165
3.5.	Integrabilidad polinomial . . . . .	168
3.5.1.	Integrabilidad y exponentes de Kowalevskaya . . . . .	178
3.6.	Ejemplos . . . . .	186
3.6.1.	Sistemas cuasihomogéneos de grado cero . . . . .	189
3.6.2.	Sistemas cuasihomogéneos de grado uno . . . . .	191
3.6.3.	Sistemas cuasihomogéneos de grado dos . . . . .	193

<b>4. Integrabilidad de sistemas planos</b>	<b>199</b>
4.1. Introducción . . . . .	199
4.2. Integrabilidad y formas normales . . . . .	200
4.2.1. Forma de las integrales primeras . . . . .	201
4.2.2. Formas normales . . . . .	205
4.2.3. El operador $\ell_{r+k}$ . . . . .	210
4.2.4. Resultado Principal . . . . .	214
4.3. Aplicaciones . . . . .	217
4.3.1. Singularidad Takens-Bogdanov de tipo $\mathbf{t} = (1, n)$ . . . . .	219
4.3.2. Singularidad Takens-Bogdanov de tipo $(2, 2n + 1)$ . . . . .	221
4.3.3. Un caso de singularidad nilpotente generalizada . . . . .	224
4.4. Estudio de integrabilidad para algunas familias . . . . .	227
4.4.1. Caso nilpotente . . . . .	227
4.4.2. Un caso nilpotente generalizado . . . . .	229
<b>5. Formas normales conservativas-disipativas</b>	<b>233</b>
5.1. Introducción . . . . .	233
5.2. Preliminares . . . . .	234
5.2.1. $C^\infty$ -Conjugación . . . . .	236
5.2.2. $C^\infty$ -Equivalencia . . . . .	239
5.3. Forma normal de algunas familias . . . . .	246
5.3.1. Singularidad de Takens-Bogdanov de tipo $\mathbf{t} = (1, n)$ . . . . .	246
5.3.2. Singularidad de Takens-Bogdanov de tipo $\mathbf{t} = (2, 2n + 1)$ . . . . .	247
5.3.3. Singularidad con parte lineal nula . . . . .	248
5.3.4. Otra singularidad con parte lineal nula . . . . .	250
<b>Bibliografía</b>	<b>259</b>

# Introducción

El objetivo de la teoría de Sistemas Dinámicos es el estudio de los modelos de evolución de los fenómenos naturales. Dicho estudio trata de representar la evolución de los sistemas en un cierto espacio (denominado espacio de estados o de fases), donde el conocimiento de ciertos objetos geométricos resulta clave para la comprensión de las posibles evoluciones del sistema (véanse por ejemplo Guckenheimer y Holmes [38], Kuznetsov [43], Wiggins [65]).

En una gran diversidad de disciplinas (entre los que podemos citar la electrónica, mecánica, química, biología, medicina...), existen magnitudes que sirven para describir los correspondientes fenómenos cuyas derivadas respecto al tiempo se expresan en función del estado y, eventualmente, del tiempo. Esto da lugar a modelos matemáticos de esos fenómenos que se traducen en ecuaciones diferenciales. En un sentido amplio, el objetivo de la teoría de Sistemas Dinámicos es determinar la estructura del conjunto de soluciones de la ecuación diferencial.

En concreto, si denotamos el correspondiente estado del sistema en un cierto instante de tiempo  $t$  mediante una variable  $\mathbf{x}(t)$  (que podría tomar valores vectoriales), la evolución con el tiempo de  $\mathbf{x}(t)$  viene descrita por una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)).$$

Nos centraremos en esta memoria en el caso de sistemas autónomos, que son aquellos de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)),$$

es decir, en los que el segundo miembro no depende explícitamente de  $t$ .

La variable  $\mathbf{x}(t)$  se mueve en un cierto espacio, denominado espacio de fases o espacio de estados. Las gráficas de las soluciones de este tipo de sistemas pueden interpretarse como curvas en el espacio de estados. Según el contexto, a veces se tratará de obtener la solución concreta que en un instante inicial tome un valor dado; otras veces se especifican condiciones de contorno que relacionan el estado inicial y el final; también se pueden buscar soluciones periódicas o cuasi-periódicas, o que tengan un comportamiento dado cuando  $t$  tiende a  $+\infty$  o  $-\infty$ .

El principal objetivo de la Teoría de Sistemas Dinámicos es determinar cómo queda estructurado el espacio de estados por las curvas solución. Una herramienta clásica para clasificar todas las trayectorias de un sistema dinámico y con ello obtener una foliación del espacio de estados mediante las soluciones, es la búsqueda de integrales primeras, es decir, funciones que son constantes sobre todos los puntos de una solución (problema de la integrabilidad de un sistema dinámico). Cuando el sistema depende de parámetros, debemos analizar cómo cambia esa estructura al variar los parámetros.

Las soluciones más simples son las constantes (puntos fijos, o estacionarios, o de equilibrio), dados por  $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = 0$ . Con frecuencia, éstas son las únicas soluciones que pueden ser conocidas con precisión en las aplicaciones.

Otro tipo de soluciones sencillas son las periódicas, que vuelven al punto inicial después de un cierto tiempo  $T$ , denominado periodo. Las gráficas de las soluciones periódicas describen trayectorias que son curvas cerradas.

La suma de dos soluciones periódicas de periodos inconmensurables constituye el caso más simple de solución cuasi-periódica. Este tipo de soluciones se mueven sobre un toro.

Un punto fundamental para entender la dinámica de un sistema es la localización en el espacio de estados de distintos objetos invariantes. Entre ellos, tienen una especial relevancia los que tienen direcciones de entrada y de salida. La intersección de las correspondientes variedades invariantes dan lugar a soluciones homoclinas (cuando las dos variedades corresponden a un mismo objeto) o soluciones heteroclinas (cuando las dos variedades corresponden a objetos distintos).

La determinación de la estructura topológica global de las curvas solución

en el espacio de estados puede resultar inabordable en la práctica. Lo mismo ocurre cuando el sistema depende de parámetros y pretendemos analizar cómo cambia esa estructura al variar los parámetros, es decir, caracterizar los fenómenos de bifurcación.

Un planteamiento menos ambicioso es limitar el estudio de la dinámica de un sistema a un entorno de un cierto elemento crítico; o bien analizar las bifurcaciones locales de la familia de sistemas, es decir, los posibles cambios que se produzcan en la estructura del espacio de órbitas, en un entorno de un cierto elemento crítico y, además, considerando que los parámetros varían localmente en un entorno de un cierto valor.

En este caso, se han desarrollado distintas técnicas que simplifican el problema en cuestión. Algunas de ellas, que no se tratarán en esta memoria, proporcionan un medio sistemático para la reducción de la dimensión del espacio de estados del problema en estudio: la técnica de las variedades de centros, o el método de Lyapunov–Schmidt.

Otras técnicas están encaminadas a la simplificación de la expresión analítica del campo vectorial  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  del sistema. La más importante de ellas es la reducción a forma normal. La idea básica de la teoría de formas normales es usar cambios de variables para simplificar tanto como sea posible las expresiones analíticas de las ecuaciones diferenciales. Más concretamente, en el sistema reducido obtenido vía variedad de centros, se pretende eliminar aquellos términos no lineales que no son esenciales para la determinación del comportamiento dinámico o la conducta de bifurcación local.

Tradicionalmente, las mencionadas simplificaciones se obtienen a través de transformaciones en las variables de estado, es decir, mediante el uso de  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación (equivalencia orbital). Para ciertos tipos de problemas, es posible considerar las mejoras proporcionadas por el uso de transformaciones no sólo en las variables de estado sino también en el tiempo, a través del proceso denominado  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia.

Nos centraremos en esta memoria en el estudio de formas normales para equilibrios en sistemas autónomos. Estos constituyen los atractores más sencillos de tales sistemas. Mediante el estudio local de los equilibrios se consigue, en muchas situaciones, detectar la presencia de comportamientos dinámicos de



mayor complejidad: atractores periódicos, cuasiperiódicos y aperiódicos.

Consideremos un equilibrio del sistema  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ . La primera etapa en el proceso de simplificación de la expresión analítica del sistema consiste en la simplificación de la parte lineal del sistema, lo que se consigue mediante un cambio lineal adecuado.

La simplificación en los términos no lineales se alcanza grado a grado: si hacemos un cambio no lineal de coordenadas de la forma identidad más términos de grado  $k$ , es fácil comprobar que los términos hasta grado  $k - 1$  de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  no se ven alterados, mientras que los de grado  $k$  cambian de forma lineal a través del denominado operador homológico de grado  $k$ , que se define a través del producto de Lie en el que interviene la parte lineal del sistema.

El primer problema que surge aquí es estudiar si es posible transformar el sistema en uno lineal mediante cambios del tipo mencionado. Ello es posible si las correspondientes ecuaciones homológicas resultan ser compatibles. Si éste no es el caso, existirán ciertos términos no lineales que no podremos eliminar. No obstante, mediante una elección adecuada del cambio siempre podremos eliminar en los términos de orden  $k$  de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  la parte que está en la imagen del operador homológico. En este sentido, la simplificación en los términos no lineales consiste en reducir los términos de orden  $k$  de nuestro sistema a un subespacio complementario a la imagen (co-rango) del operador homológico.

Es importante señalar que las simplificaciones anteriormente indicadas dependen de la parte lineal del sistema, la cual determina el operador homológico. Por otra parte, la consideración de la solución general de la ecuación homológica permite introducir ciertos grados de libertad en el procedimiento de reducción a forma normal. Así, en la forma normal a orden superior aparecerán ciertas constantes arbitrarias que, seleccionadas adecuadamente pueden proporcionar simplificaciones adicionales.

A la hora de estudiar dichas simplificaciones adicionales, es preciso tener en cuenta la información que proporcionan los términos no lineales. Se llega así al concepto de forma hipernormal (también denominada forma normal única). Aunque ya Takens era consciente de esta posibilidad de simplificación, no es hasta los trabajos de Ushiki donde aparece explícitamente desarrollado este concepto en algunos casos concretos.

Un aspecto importante a considerar en la Teoría de Formas Normales es el desarrollo de procedimientos de computación eficientes para su uso en sistemas concretos. Los cambios de variables de la forma identidad más términos no lineales fueron introducidos inicialmente por Poincaré en el estudio de ecuaciones diferenciales, utilizados más tarde por Dulac y Liapunov, y desarrollados posteriormente por Birkhoff. En los años sesenta, y en el marco de la teoría de perturbaciones hamiltonianas, Hori y Garrido introducen las transformaciones de Lie como una herramienta potente para la realización de cambios de variables. Las mejoras introducidas posteriormente por Deprit [24] conducen a un procedimiento general recursivo y adecuado para la computación algebraica (véase Meyer & Schmidt, [52]). Al principio de los años setenta Kamel y Henrard, lo extienden al caso no hamiltoniano (véase Chow & Hale [20]).

La interpretación de los cambios de variables conducentes a formas normales en términos de las transformaciones de Lie ha estado reservada fundamentalmente al dominio de la mecánica celeste y los sistemas hamiltonianos. En los trabajos de Takens [59], Ushiki [62] y Algaba et. al. [1, 2], dicho enfoque es utilizado en el estudio de bifurcaciones de sistemas generales, concretamente para el cálculo de formas normales de bifurcaciones de equilibrios de codimensión menor o igual que tres. Los dos primeros autores no explotan todas las posibilidades que ofrece el método de Lie, puesto que no llegan a hacer uso de la formulación recursiva desarrollada por Deprit [24]. Así, sus procedimientos son difícilmente trasladables a un algoritmo efectivo de computación simbólica, por lo que no parecen ser aplicables al cálculo de formas normales de sistemas específicos. Los métodos de Deprit [24] sí son aprovechados por los últimos autores que presentan algoritmos que, por sus características (recursividad, optimización del costo computacional y reducción de la complejidad operativa) están específicamente adaptados a la computación simbólica, lo que hace que sea posible su utilización en problemas de cierta relevancia (dimensión alta, complejidad de los datos...).

El método de las transformaciones de Lie no es solamente un procedimiento computacionalmente efectivo para llevar a cabo los cambios de variables; constituye además una herramienta valiosa para obtener resultados nuevos en la teoría de formas normales. A este respecto, en los trabajos de Ushiki [62] y

Algaba et. al. [1, 2, 3, 4] se analizan las posibilidades de una mayor simplificación en los términos no lineales de las ecuaciones normalizadas de distintos problemas de bifurcación; esto lleva al concepto de forma hipernormal (véase Baider [13]).

En este método no es necesario conocer explícitamente el cambio: bastará conocer el denominado generador de la transformación, con el que se construye una sucesión de funciones, que pueden disponerse en un esquema triangular (en el denominado triángulo de Lie). La fila  $k$ -ésima del triángulo de Lie plasma los efectos sobre el sistema de los cambios que se hicieron previamente para reducir el sistema a forma normal hasta grado  $k$ . Además, en cada etapa se aprovechan los cálculos realizados previamente, debido a que el esquema que usamos es recursivo.

La utilización de dicha formulación recursiva (véase Algaba et. al. [1, 8]) capacita para abordar las cuestiones de formas hipernormales con mayor generalidad. Una generalización de este enfoque, considerando desarrollos cuasihomogéneos, puede encontrarse en los siguientes trabajos de Algaba et. al. [5, 6, 7].

Después de esta breve introducción histórica, pasamos ya a describir la organización y contenidos de la presente memoria. Los resultados de la teoría local de bifurcaciones que hacen referencia a formas normales son revisados en el Capítulo 1 que está organizado como sigue: tras un breve resumen de la teoría de formas normales clásicas, introducimos los conceptos de la teoría de formas normales cuasihomogéneas bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación y  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia. Describimos el método de las transformaciones de Lie cuasihomogéneas para ambas relaciones de equivalencia, que dará lugar a la llamada forma hipernormal (que proporciona la máxima simplificación). Asimismo se describe el triángulo de Lie cuasihomogéneo, que conduce a un método computacional eficiente para el cálculo de dicha forma hipernormal. Hacemos uso del poliedro de Newton para seleccionar un tipo convenientemente y aplicar formas normales de paso cero (concepto análogo al de forma canónica de Jordan en el caso lineal). Por último, aplicamos estas técnicas para el cálculo de la forma normal bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia de una singularidad de Takens-Bogdanov.

En lo que respecta a los aspectos computacionales, es conocida la expresión

de la forma normal bajo conjugación mediante técnicas de Lie. En este capítulo se adaptan estas técnicas al caso de equivalencia orbital y se construyen algoritmos recursivos, que nos permiten cálculos eficientes de formas normales incluyendo generadores temporales.

En el resto de la memoria hemos abordado el estudio de algunos problemas relativos a campos planos. El Capítulo 2 está dedicado al estudio del tipo topológico de singularidades en el plano.

En la actualidad hay varios problemas abiertos en la teoría de formas normales. Entre ellos, podemos citar los que se refieren a aspectos puramente algebraicos: encontrar la forma normal más simple (forma hipernormal) utilizando grado cuasihomogéneo, forma normal bajo conjugación, bajo equivalencia, forma normal a orden cero (simplificaciones a primer orden con el objeto de encontrar la parte principal más simple), forma normal con parámetros. Por otra parte, se encuentran los problemas computacionales, al tratar de implementar estos métodos en algoritmos eficientes.

Otro problema abierto es el de determinar la forma de seleccionar los corrangos que definen la forma normal de manera apropiada, para caracterizar de forma clara algunos aspectos relativos a la singularidad, como por ejemplo la integrabilidad, la reversibilidad, la monodromía, el problema centro-foco, etc. En este sentido, hemos obtenido algunos resultados utilizando el hecho de que todo campo cuasihomogéneo se puede descomponer en una parte con divergencia nula (que llamamos parte conservativa) y otra cuya divergencia coincide con la del campo (denominada parte disipativa).

En el caso de los campos planos, la parte conservativa es un campo hamiltoniano y la parte disipativa está determinada por la divergencia del campo. Esta descomposición se describe en la Sección 2.2, y será fundamental en éste y en el resto de los capítulos. La Sección 2.3 está dedicada a estudiar propiedades de los polinomios cuasihomogéneos. En la Sección 2.4 se consideran los diferentes tipos de *blow-up*, mientras que el problema de la monodromía se trata en la Sección 2.5. Las Secciones 2.6 y 2.7 contienen condiciones necesarias y suficientes de determinación topológica. El resultado más notable de este capítulo es la descripción, en la Sección 2.8, de un algoritmo para el problema de monodromía. Aunque el problema de monodromía fue resuelto por

Medvedeva [51], consideramos que nuestro algoritmo aporta ciertas mejoras: utiliza la información no sólo de la parte conservativa, como en el algoritmo de Medvedeva [51], sino también de la parte disipativa; también en nuestro caso no es preciso el estudio de posibles direcciones de entrada asociadas a factores triviales de  $h$  (factores  $x$  o  $y$ ). En las Secciones 2.9 y 2.10 se aplica el algoritmo a algunas familias de campos, incluyendo el caso nilpotente, que ya fue resuelto por Andreev [10]. El capítulo finaliza con la Sección 2.11, donde la obtención de una forma normal adecuada permite llevar a cabo el estudio de la monodromía de un sistema nilpotente generalizado.

En el Capítulo 3 estudiamos características dinámicas de sistemas cuasihomogéneos. Concretamente, estudiamos la reversibilidad, la integrabilidad y el problema de centro para sistemas planos cuasihomogéneos. Una condición necesaria para que un campo plano general presente alguna de las características mencionadas es que su primer término cuasihomogéneo también la posea. En este sentido, los resultados de este capítulo sientan las bases para resolver los mencionados problemas para campos planos en general.

Después de una introducción, en la Sección 3.2 se calculan formas canónicas de campos cuasihomogéneos, basándonos en sus partes conservativa y disipativa. En la Sección 3.3, caracterizamos la reversibilidad de campos cuasihomogéneos, e incluimos un ejemplo de un campo hamiltoniano no reversible. La Sección 3.4 está dedicada al problema de centro de campos planos cuasihomogéneos, que generaliza el estudio realizado por Collins [23] para campos homogéneos. En la Sección 3.5 hemos caracterizado la integrabilidad en términos de las partes conservativa y disipativa. Concretamente, hemos obtenido que el campo cuasihomogéneo es integrable si la función de Hamilton de la parte conservativa es no degenerada (en el sentido de que todos sus factores irreducibles son simples en el campo complejo), y los residuos del cociente de la función de Hamilton con la divergencia en cada uno de dichos factores es un cierto número racional. Además, hemos descrito la integrabilidad en términos de los exponentes de Kowalevskaya, en la línea de los trabajos de Yoshida [66], Tsygvintsev [61] y Llibre & Zang [46].

En el Capítulo 4 se caracteriza la integrabilidad analítica de campos planos generales, en condiciones genéricas sobre la parte conservativa de su primer

término cuasihomogéneo. De hecho, hemos estudiado el caso de campos cuya primer término cuasihomogéneo es conservativo y su función de Hamilton es no degenerada. El resultado principal se presenta en la Sección 4.2, y establece que un campo cuasihomogéneo es integrable analíticamente si es conjugado a un campo con divergencia nula. Además, en este caso, su forma normal se puede obtener mediante cambios de variables cuyos generadores son disipativos. Además, se obtiene como corolario el conocido resultado de Strozyna y Zoladek [57] que asegura que los centros nilpotentes son analíticamente integrables si, y sólo si, son formalmente equivalentes a su primer término cuasihomogéneo. Finalizamos el capítulo aplicando los resultados obtenidos en la caracterización de la integrabilidad de una familia de campos nilpotentes generalizados.

La idea de separar cada componente cuasihomogénea en una parte conservativa y otra disipativa, y el hecho de que el corchete de Lie en cierta medida respete esta separación, nos permite trabajar con un operador homológico triangular por bloques. Esto hace posible el análisis de formas normales bajo equivalencia orbital para campos planos cuyo primer término cuasihomogéneo sea hamiltoniano con función de Hamilton no degenerada, siendo éste el problema principal que se aborda en el Capítulo 5 de la memoria.

La expresión de la forma normal bajo equivalencia orbital está determinada por los co-rangos de ciertos operadores lineales escalares, cuyo comportamiento cíclico ha permitido determinar una forma normal bajo equivalencia orbital a orden infinito. Esta forma normal está especialmente adaptada para caracterizar la integrabilidad (como se ve ya en el Capítulo 4), así como para estudiar el problema de centro (algunos resultados obtenidos en esta dirección no han sido incluido en esta memoria por cuestiones de extensión) y el problema de la reversibilidad, que actualmente estamos abordando.

El resultado principal de este último capítulo es la caracterización de una forma normal bajo equivalencia. El capítulo se completa con algunas aplicaciones a ciertas singularidades nilpotentes, y nilpotentes generalizadas.



# Capítulo 1

## Teoría de Formas Normales

En cualquier problema científico es muy importante la elección de las variables que utilizaremos para modelizar matemáticamente dicho problema. Un paso crucial en el estudio de los mencionados problemas es utilizar, entre todas las expresiones equivalentes, la más simple posible en algún sentido.

Por ejemplo, en el caso de las ecuaciones lineales, es bien conocido que las variables más adecuadas son aquellas que representan las coordenadas de cualquier vector respecto a una base formada por autovectores y autovectores generalizados.

En el marco de los sistemas dinámicos modelados por sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, la teoría de las formas normales se ocupa de determinar las expresiones más simples.

La teoría de las formas normales es una herramienta básica para el estudio de diversos problemas en ecuaciones diferenciales: bifurcaciones, análisis de estabilidad,... La idea principal de esta teoría es el uso de transformaciones próximas a la identidad para eliminar, en la expresión analítica del campo vectorial, los términos que no son esenciales en el comportamiento dinámico o de bifurcaciones. De esta manera, se obtienen sistemas canónicos que representan una clase amplia de sistemas, desechando estos términos no esenciales.

A lo largo de esta memoria, consideraremos un sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.0.1)$$

donde  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial suficientemente diferenciable (usualmente  $\mathcal{C}^\infty$ )



tal que  $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , de forma que tenemos un punto de equilibrio en el origen.

Antes de presentar la teoría clásica de formas normales daremos algunas definiciones y conceptos que serán de utilidad posteriormente.

## 1.1. Preliminares

Las notaciones y propiedades que vienen a continuación son bien conocidas y se pueden ver, por ejemplo, en Chua & Kokubu [22], Golubitsky & Shaeffer [36], etc.

Denotaremos por  $\mathcal{H}_j^n$  el espacio vectorial de los campos vectoriales con  $n$  componentes polinomiales homogéneas en  $n$  variables de grado  $j$ .

Definimos el *corchete de Lie* de dos campos vectoriales diferenciables  $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mediante:

$$[\mathbf{F}, \mathbf{G}](\mathbf{x}) = D\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}) - D\mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Esta operación interna en el espacio de los campos vectoriales diferenciables, tiene las siguientes propiedades:

- Bilinealidad: Sean  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$  campos vectoriales diferenciables. Entonces se cumple:

$$\begin{aligned} [a_1\mathbf{F}_1 + a_2\mathbf{F}_2, b_1\mathbf{G}_1 + b_2\mathbf{G}_2] &= a_1b_1[\mathbf{F}_1, \mathbf{G}_1] + a_1b_2[\mathbf{F}_1, \mathbf{G}_2] + a_2b_1[\mathbf{F}_2, \mathbf{G}_1] \\ &\quad + a_2b_2[\mathbf{F}_2, \mathbf{G}_2]. \end{aligned}$$

- Antisimetría: Dados dos campos vectoriales  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$ , se tiene:

$$[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = -[\mathbf{G}, \mathbf{F}]$$

- Identidad de Jacobi: Dados tres campos vectoriales diferenciables  $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$  se tiene:

$$[[\mathbf{F}, \mathbf{G}], \mathbf{H}] + [[\mathbf{G}, \mathbf{H}], \mathbf{F}] + [[\mathbf{H}, \mathbf{F}], \mathbf{G}] = 0$$

- Si  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}_k^n$  y  $\mathbf{G} \in \mathcal{H}_l^n$ , entonces  $[\mathbf{F}, \mathbf{G}] \in \mathcal{H}_{k+l-1}^n$ .

Denominamos *germen* a cualquier función  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}_0; \mathbb{R}^n)$  definida en algún entorno  $\mathcal{V}_0$  del origen de  $\mathbb{R}^n$ . Denotaremos  $V_0$  al espacio de los gérmenes que se anulan en  $\mathbf{0}$ , es decir,  $\mathbf{F} \in V_0$  si existe un entorno  $\mathcal{V}_0$  del origen de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}_0; \mathbb{R}^n)$  y  $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Dado un germen  $\mathbf{F}$ , llamaremos *k-jet* de  $\mathbf{F}$  en  $\mathbf{0}$ , y lo denotaremos por  $\mathcal{J}^k \mathbf{F}$ , al polinomio de Taylor de  $\mathbf{F}$  alrededor de  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  de grado  $k$ . Análogamente denotaremos por  $\mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = \mathcal{J}^k \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathcal{J}^{k-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_k^n$  a la parte homogénea de grado  $k$  del mencionado desarrollo de Taylor. A continuación definiremos los conceptos de  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación y  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia, que serán básicos en el desarrollo de esta memoria.

Diremos que  $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in V_0$  son  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugados si existe un difeomorfismo  $\Phi \in V_0$  que transforma el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  en el sistema  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y})$ , es decir, si  $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = [D\Phi(\mathbf{y})]^{-1} \cdot \mathbf{F}(\Phi(\mathbf{y}))$ . En este caso, escribiremos  $\mathbf{G} = \Phi * \mathbf{F}$ .

Análogamente, diremos que  $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in V_0$  son  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalentes (orbitalmente equivalentes) si existe un difeomorfismo  $\Phi \in V_0$  y existe un germen escalar  $\mu$  que no se anula en todo un entorno del origen tal que  $\mathbf{G} = \mu \cdot (\Phi * \mathbf{F})$ . Es decir, el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  se transforma en el sistema  $\mathbf{y}' = \mathbf{G}(\mathbf{y})$ , mediante el cambio de las variables de estado  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$  y el cambio de variable temporal dependiente de las variables de estado dado por  $dT/dt = 1/\mu(\mathbf{y})$ , donde hemos denotado  $d/dt = \cdot$  y  $d/dT = \prime$ . Es obvio que la dinámica local de dos sistemas  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalentes es la misma.

## 1.2. Formas normales clásicas

La teoría clásica de formas normales de Poincaré se aplica a sistemas con parte lineal no nula y utiliza transformaciones cercanas a la identidad para eliminar términos no esenciales en la dinámica local.

Supongamos que el campo vectorial está escrito en sus términos homogéneos, mediante su serie de Taylor. Si denotamos  $A = D\mathbf{F}(\mathbf{0})$  a la matriz jacobiana en el origen, el sistema (1.0.1) se escribe en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \sum_{j \geq 2} \mathbf{F}_j(\mathbf{x}), \quad (1.2.2)$$

donde  $\mathbf{F}_j \in \mathcal{H}_j^n$  denota el término de grado  $j$  del desarrollo de Taylor del campo vectorial  $\mathbf{F}$ , (en particular los términos lineales serán denotados como  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ).

Consideremos el cambio de variables

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}).$$

Supondremos que  $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , con el objeto de conservar el equilibrio en el origen, y denotaremos a la parte lineal por  $D\Phi(\mathbf{0}) = B$ . Así, el campo vectorial transformado es

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y}) = (D\Phi(\mathbf{y}))^{-1}\mathbf{F}(\Phi(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.3)$$

Es trivial comprobar que  $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y además  $D\mathbf{G}(\mathbf{0}) = B^{-1}AB$ .

El procedimiento de simplificación (también denominado normalización) se realizará grado a grado. El primer paso de normalización actúa sobre el grado menor y puede lograrse por medio de transformaciones lineales  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}$  de forma que la matriz de linealización  $A$  se reduce a la forma normal de Jordan, (a veces, también es útil considerar la forma normal de Frobenius). Para simplificar los términos de grado  $k \geq 2$  en (1.2.2), consideraremos la transformación próxima a la identidad

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \mathbf{P}_k(\mathbf{y}),$$

con  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{H}_k^n$ . El sistema transformado es

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= (I + D_{\mathbf{y}}\mathbf{P}_k(\mathbf{y}))^{-1} A(\mathbf{y} + \mathbf{P}_k(\mathbf{y})) + \sum_{j \geq 2} (I + D_{\mathbf{y}}\mathbf{P}_k(\mathbf{y}))^{-1} \mathbf{F}_j(\mathbf{y} + \mathbf{P}_k(\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} + \sum_{j \geq 2} \mathbf{G}_j(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Es fácil probar (véase Guckenheimer & Holmes [38]) que el campo vectorial no cambia hasta orden  $k - 1$  (i.e.,  $\mathcal{J}^{k-1}\mathbf{G} = \mathcal{J}^{k-1}\mathbf{F}$ ), y a orden  $k$  es

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{y}) = \mathbf{F}_k(\mathbf{y}) - (D_{\mathbf{y}}\mathbf{P}_k(\mathbf{y})A\mathbf{y} - A\mathbf{P}_k(\mathbf{y})).$$

Esta expresión sugiere definir el llamado *operador homológico*:

$$\begin{aligned} L_k^A : \mathcal{H}_k^n &\longrightarrow \mathcal{H}_k^n \\ \mathbf{P}_k &\longmapsto L_k^A(\mathbf{P}_k), \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

donde  $L_k^A(\mathbf{P}_k(\mathbf{x})) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{P}_k(\mathbf{x})A\mathbf{x} - A\mathbf{P}_k(\mathbf{x})$ .

Es fácil probar que la aplicación  $L_k^A$  es lineal y su expresión en función del corchete de Lie viene dada por

$$L_k^A(\mathbf{P}_k) = [\mathbf{P}_k, A].$$

Puesto que  $\mathbf{G}_k = \mathbf{F}_k - L_k^A(\mathbf{P}_k)$ , podríamos tratar de seleccionar  $\mathbf{P}_k$  de forma que  $L_k^A(\mathbf{P}_k) = \mathbf{F}_k$ , con lo cual tendríamos  $\mathbf{G}_k = \mathbf{0}$ , es decir, eliminaríamos los términos de grado  $k$ . No obstante, en general no es posible elegir  $\mathbf{P}_k$  como hemos mencionado puesto que la ecuación lineal anterior puede ser incompatible. Sin embargo, siempre podemos proceder como exponemos a continuación:

Fijemos un subespacio complementario  $\text{Cor}L_k^A$  al espacio imagen  $\text{Im}(L_k^A)$  del operador lineal  $L_k^A$ ; esto es,  $\mathcal{H}_k^n = \text{Im}(L_k^A) \oplus \text{Cor}(L_k^A)$ . Así, podemos descomponer  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^r + \mathbf{F}_k^c$ , donde  $\mathbf{F}_k^r \in \text{Im}(L_k^A)$  y  $\mathbf{F}_k^c \in \text{Cor}(L_k^A)$ . Entonces, siempre existe  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{H}_k^n$  que cumple la ecuación homológica

$$L_k^A(\mathbf{P}_k) = \mathbf{F}_k^r. \quad (1.2.6)$$

De esta forma, obtenemos

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{F}_k - L_k^A(\mathbf{P}_k) = \mathbf{F}_k^c \in \text{Cor}(L_k^A).$$

Es decir, hemos simplificado  $\mathbf{F}_k$  eliminando la parte de la imagen del operador homológico. Si repetimos el razonamiento para cada  $k = 2, 3, \dots$ , podemos conseguir  $\mathbf{G}_k \in \text{Cor}(L_k^A)$ , para todo  $k \geq 2$ . Usando ahora una versión del teorema de Borel, obtenemos el teorema de la forma normal (véase, e.g., Vanderbauwhede [63]):

**Teorema 1.2.1** *Existe un  $C^\infty$ -difeomorfismo  $\Phi$ , cumpliendo  $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y  $D\Phi(\mathbf{0}) = I$ , tal que el cambio de variables  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$  transforma (1.2.2) en (1.2.4) donde  $\mathbf{G}_k \in \text{Cor}(L_k^A)$ , para todo  $k \geq 2$ .*

En este caso, decimos que el sistema (1.2.4) es una forma normal para el sistema (1.2.2).

La ecuación homológica (1.2.6) (y por tanto, las correspondientes formas normales) se basan en la parte lineal del campo vectorial (véanse Takens [59],

Chow & Hale [20], Guckenheimer & Holmes [38], Elphick et al. [28], Iooss & Adelmeyer [41], Chow et al. [21]). Esta ecuación lineal no tiene, en general, solución única, ya que podría depender de términos arbitrarios que pertenecen al núcleo del operador homológico. Por lo tanto, en la expresión de  $\mathbf{P}_k$  podrían aparecer constantes arbitrarias que se trasladarán a la forma normal de orden mayor que  $k$ . Estas constantes se pueden utilizar, dependiendo de la forma de los términos no lineales, para obtener otras simplificaciones en la forma normal (véanse Ushiki [62], Chua & Kokubu [22], Baider [12], Algaba et al. [2], y otros trabajos dedicados a casos especiales: véase referencias en Algaba et al. [3]).

Resumamos este procedimiento de dos etapas para obtener simplificaciones en el campo vectorial: En primer lugar, usamos la *parte lineal* de  $\mathbf{F}$  para determinar las simplificaciones que se consiguen a través del teorema de la forma normal, y posteriormente, tenemos en cuenta los *términos no lineales*, para obtener simplificaciones adicionales en la forma normal clásica.

Con la perspectiva que adoptaremos en la siguiente sección, el procedimiento anterior de dos etapas puede, en algunos casos, convertirse en uno con una única etapa, porque el uso de desarrollos casi homogéneos permite considerar de una sola vez tanto términos lineales como no lineales (monomios con diferentes grados pueden tener el mismo grado cuasihomogéneo).

Otra cuestión a tratar es la elección del subespacio complementario  $\text{Cor}(L_k^A)$ , ya que éste no es único. Elphick et al. [28], presentan un método general para conseguir un posible subespacio complementario, definiendo un producto escalar adecuado en  $\mathcal{H}_k^n$ . Sin embargo, diversos problemas (integrabilidad, problema centro-foco, reversibilidad...) podrían requerir el uso de otros subespacios complementarios más adecuados en cada caso.

### 1.3. Formas normales cuasihomogéneas

En las técnicas utilizadas para la determinación del tipo topológico de una singularidad se utilizan escalados en las variables (blow-up), de la forma  $x_i \rightarrow \varepsilon^{t_i} x_i$  con  $t_i \in \mathbb{N}$ , (véase Brunella-Miari [17]). Aplicando dicho escalado

en las variables, el sistema original se transforma en:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})\varepsilon^r + \mathbf{F}_{r+1}(\mathbf{x})\varepsilon^{r+1} + \dots$$

donde los términos  $\mathbf{F}_k(\mathbf{x})$  son cuasihomogéneos.

Nuestro primer objetivo es extender las ideas de la teoría de formas normales para campos vectoriales desarrollados en términos casi homogéneos. Como veremos, ya no será necesario suponer que la parte lineal de  $\mathbf{F}$  sea no nula (véase Algaba et. al. [6]). Algunos trabajos ya han utilizado ideas similares, en el caso de la singularidad Takens-Bogdanov bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación (véanse Baidier & Sanders [14], Kokubu et al. [42], Wang et al. [64]). En estos trabajos, las formas normales se obtienen por medio de transformaciones próximas a la identidad en las variables de estado ( $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación).

Los resultados de esta sección, que están publicados (véase Algaba et. al. [5]), desarrollan las formas normales bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación y  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia.

Comenzamos con algunas definiciones y notaciones necesarias.

### 1.3.1. Notaciones y preliminares

Llamaremos *tipo* a un vector  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ , con  $t_i \in \mathbb{N}$  (aquí,  $\mathbb{N}$  es el conjunto de los números naturales sin incluir el cero, mientras  $\mathbb{N}_0$  denotará el conjunto de los números naturales incluyendo el cero). También denotaremos  $|\mathbf{t}| = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ .

Usaremos notaciones de multi-índices: un *índice múltiple* es un elemento  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ . Escribiremos los monomios como  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ . Finalmente, la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  será denotada como  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ .

Los campos vectoriales suficientemente diferenciables serán nuestro objeto de estudio. Estos campos pueden ser desarrollados formalmente en términos de la siguiente base canónica:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{e}_j : \mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n, 1 \leq j \leq n\}.$$

El calificativo formal hace referencia a que no abordamos cuestiones acerca de la convergencia de las correspondientes series.

Una función escalar  $f$  se dice *cuasihomogénea* del tipo  $\mathbf{t}$  y grado  $k$  si sus monomios  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$  satisfacen

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_n t_n = k.$$

El espacio vectorial de las funciones casi homogéneas en  $n$  variables de tipo  $\mathbf{t}$  y grado  $k$  se denotará  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$ .

Un campo vectorial  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  se dice *cuasihomogéneo* del tipo  $\mathbf{t}$  y grado  $k$  si sus componentes  $F_j \in \mathcal{P}_{k+t_j}^{\mathbf{t}}$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ . Denotaremos por  $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$  el espacio vectorial de los campos vectoriales casi homogéneos de tipo  $\mathbf{t}$  y grado  $k$ .

Hay una caracterización alternativa para las funciones y los campos vectoriales cuasihomogéneos, utilizando la siguiente matriz:

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon^{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon^{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon^{t_n} \end{pmatrix}.$$

**Proposición 1.3.2 (a)** *La función  $f$  es cuasihomogénea del tipo  $\mathbf{t}$  y grado  $k$  si, y sólo si:*

$$f(E\mathbf{x}) = \varepsilon^k f(\mathbf{x}). \quad (1.3.7)$$

**(b)** *El campo vectorial  $\mathbf{F}$  es cuasihomogéneo del tipo  $\mathbf{t}$  y grado  $k$  si, y sólo si:*

$$\mathbf{F}(E\mathbf{x}) = \varepsilon^k E\mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (1.3.8)$$

Veamos a continuación algunas definiciones relativas al poliedro de Newton.

### 1.3.2. El poliedro de Newton

Como vimos anteriormente, el campo  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mathbf{e}_j \in \mathcal{B}$  con  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $1 \leq j \leq n$  pertenece a  $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$  si, y sólo si,  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in \mathcal{P}_{k+t_j}^{\mathbf{t}}$ , lo cual es cierto si

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_n t_n = k + t_j. \quad (1.3.9)$$

Si denotamos  $\mathbf{u} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}_0^n$ , la relación (1.3.9) se puede escribir más brevemente como  $(\mathbf{a} + \mathbf{u} - \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{t} = k + |\mathbf{t}|$ , donde  $\cdot$  denota el producto escalar euclídeo en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces:

$$\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} = \text{span} \{ \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mathbf{e}_j \in \mathcal{B} : (\mathbf{a} + \mathbf{u} - \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{t} = k + |\mathbf{t}|, j = 1 \dots, n \}.$$

Para representar cada monomio de  $\mathcal{B}$  sobre  $\mathbb{N}_0^n$ , consideraremos la aplicación

$$\begin{aligned} R &: \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{N}_0^n \\ \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mathbf{e}_j &\rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{u} - \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Al punto de  $\mathbb{N}_0^n$  imagen mediante  $R$  de  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mathbf{e}_j$  se le llama *punto soporte* de dicho monomio. El *poliedro de Newton* de un campo  $\mathbf{F}$  es el subconjunto de  $\mathbb{N}_0^n$  formado por todos los puntos soportes de los monomios de  $\mathbf{F}$ .

El siguiente resultado proporciona una representación geométrica del espacio vectorial  $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$  sobre su conjunto soporte (véanse Bruno [18], Dumortier [16]).

**Proposición 1.3.3** *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1.  *$R$  no es inyectiva. De hecho, dado  $\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n$ , todos los monomios  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}-\mathbf{u}+\mathbf{e}_j} \mathbf{e}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) son aplicados en el mismo punto  $\mathbf{a}$  del poliedro de Newton.*

*Más aún:*

- a) *Si  $\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n$  tiene justamente una coordenada igual a cero:  $a_i = 0$  (i.e., si pertenece a un plano coordenado), entonces  $R^{-1}(\mathbf{a}) = \{ \mathbf{x}^{\mathbf{a}-\mathbf{u}+\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_i \}$ .*
- b) *Si  $\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n$  tiene al menos dos coordenadas iguales a cero, entonces  $R^{-1}(\mathbf{a}) = \emptyset$ .*
- c) *Si todas las coordenadas de  $\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n$  son no nulas, entonces*

$$R^{-1}(\mathbf{a}) = \{ \mathbf{x}^{\mathbf{a}-\mathbf{u}+\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1, \mathbf{x}^{\mathbf{a}-\mathbf{u}+\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}-\mathbf{u}+\mathbf{e}_n} \mathbf{e}_n \}.$$

2.  *$R$  aplica el espacio  $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$  sobre los puntos de  $\mathbb{N}_0^n$  que pertenecen al hiperplano  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = k + |\mathbf{t}|$ .*



Quizás la mejor forma de definir el poliedro de Newton es la propuesta por Dumortier en [26], trabajando con la 1-forma dual de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  dado.

Para un campo vectorial  $\mathbf{F} = \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ , su 1-forma dual es la 1-forma  $\omega = i_{\mathbf{F}}\Omega$ , con  $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ ; esto es

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Tomamos ahora

$$\mathcal{J}^\infty \omega = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geq 1} (-1)^{i+1} F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^i x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

El soporte de  $\omega$  (o  $\mathbf{F}$ ) se define como:

$$S : \left\{ \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geq 1} (\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_{i-1} + 1, \alpha_i, \alpha_{i+1} + 1, \dots, \alpha_n + 1) \mid F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^i \neq 0 \right\}.$$

El *poliedro de Newton* de  $\omega$  o de  $\mathbf{F}$  es la envolvente convexa  $\Gamma$  del conjunto

$$\mathcal{P} = \bigcup_{(q_1, \dots, q_n) \in S} \{(q_1, \dots, q_n) + \mathbb{R}_+^n\}.$$

El *diagrama de Newton* de  $\omega$  o de  $\mathbf{F}$  es la unión  $\gamma$  de las caras compactas  $\gamma_k$  de  $\Gamma$ .

La *parte principal* de  $\omega$  o de  $\mathbf{F}$  es:

$$\omega_\Delta = \sum_{i=1}^n \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \gamma} (-1)^{i+1} F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^i x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

La Figura 1.1 muestra los términos del desarrollo de un campo plano respecto al tipo  $\mathbf{t} = (1, 2)$ . Los soportes de cada uno de los términos se encuentran en rectas paralelas, cuyo vector normal es  $(1, 2)$ .

A continuación, resumimos algunas propiedades que usaremos más adelante.

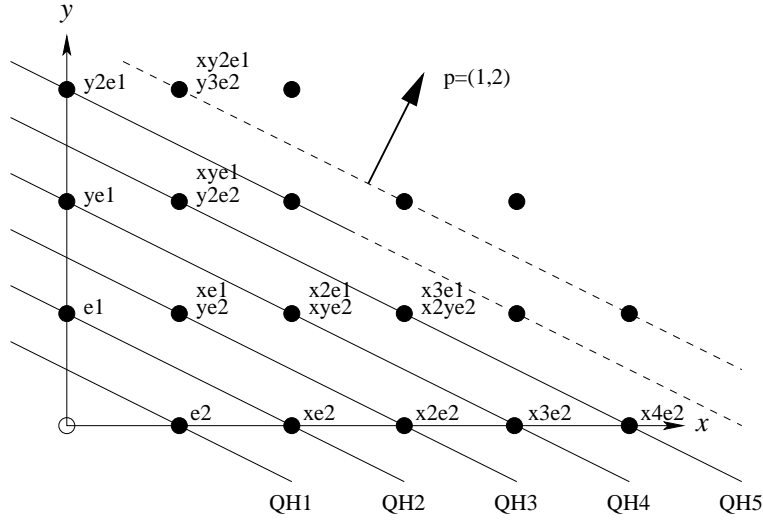


Figura 1.1: Representación de los campos vectoriales cuasihomogéneos del tipo  $(1, 2)$  y grados  $-2, -1, 0, 1, \dots$

### 1.3.3. Propiedades

**Lema 1.3.4** Sea  $f \in \mathcal{P}_k^t$ . Entonces, su gradiente  $\nabla f$  verifica:

$$\nabla f(E\mathbf{x}) = \varepsilon^k E^{-1} \nabla f(\mathbf{x}).$$

*Demostración:* Es suficiente diferenciar (1.3.7). ■

**Lema 1.3.5** Sea  $\mathbf{F} \in \mathcal{Q}_k^t$ . Entonces:  $D\mathbf{F}(E\mathbf{x}) = \varepsilon^k E D\mathbf{F}(\mathbf{x}) E^{-1}$ .

Más aún, la columna  $j$  de la matriz  $D\mathbf{F}$  es un campo vectorial cuasihomogéneo del tipo  $\mathbf{t}$  y grado  $k - t_j$ .

*Demostración:* Para conseguir la primera igualdad, es suficiente diferenciar (1.3.8). Además, la columna  $j$  de  $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$  es

$$D\mathbf{F}(E\mathbf{x})\mathbf{e}_j = \varepsilon^k E D\mathbf{F}(\mathbf{x}) E^{-1} \mathbf{e}_j = \varepsilon^k E D\mathbf{F}(\mathbf{x}) \varepsilon^{-t_j} \mathbf{e}_j = \varepsilon^{k-t_j} E D\mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j.$$

El resultado se sigue del apartado (b) de la Proposición 1.3.2. ■

**Lema 1.3.6** Sean  $\mathbf{F} \in \mathcal{Q}_k^t$ ,  $\mathbf{G} \in \mathcal{Q}_l^t$ . Entonces:  $[\mathbf{F}, \mathbf{G}] \in \mathcal{Q}_{k+l}^t$ .

*Demostración:* Se tiene que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}, \mathbf{G}](E\mathbf{x}) &= D\mathbf{F}(E\mathbf{x})\mathbf{G}(E\mathbf{x}) - D\mathbf{G}(E\mathbf{x})\mathbf{F}(E\mathbf{x}) \\ &= \varepsilon^k E D\mathbf{F}(\mathbf{x}) E^{-1} \varepsilon^l E \mathbf{G}(\mathbf{x}) - \varepsilon^l E D\mathbf{G}(\mathbf{x}) E^{-1} \varepsilon^k E \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ &= \varepsilon^{k+l} E (D\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) - D\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \varepsilon^{k+l} E[\mathbf{F}, \mathbf{G}](\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Basta utilizar el apartado (b) de la Proposición 1.3.2 para completar la demostración. ■

**Lema 1.3.7** Sean  $\mu \in \mathcal{P}_k^t$ ,  $\mathbf{F} \in \mathcal{Q}_l^t$ . Entonces,  $\mu\mathbf{F} \in \mathcal{Q}_{k+l}^t$ .

*Demostración:* Tenemos

$$\mu(E\mathbf{x})\mathbf{F}(E\mathbf{x}) = \varepsilon^k \mu(\mathbf{x}) \varepsilon^l E \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \varepsilon^{k+l} E \mu(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

De nuevo, usando el apartado (b) de la Proposición 1.3.2, conseguimos el resultado. ■

**Lema 1.3.8** Sean  $f \in \mathcal{P}_k^t$ ,  $\mathbf{F} \in \mathcal{Q}_l^t$ . Entonces,  $\nabla f \cdot \mathbf{F} \in \mathcal{P}_{k+l}^p$ .

*Demostración:* Aplicando el Lema 1.3.4, obtenemos  $\nabla f(E\mathbf{x}) = \varepsilon^k E^{-1} \nabla f(\mathbf{x})$ . Por tanto,

$$\nabla f(E\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(E\mathbf{x}) = \varepsilon^k (\nabla f(\mathbf{x}))^T E^{-1} \varepsilon^l E \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \varepsilon^{r+k} \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Aplicando el apartado (a) de la Proposición 1.3.2, obtenemos el resultado. ■

El siguiente es una versión del teorema de Euler para el caso cuasihomogéneo.

**Lema 1.3.9** Sea  $f \in \mathcal{P}_k^t$  y  $\mathbf{D}_0 = (t_1 x_1, t_2 x_2, \dots, t_n x_n)^T \in \mathcal{Q}_0^t$ . Entonces

$$\nabla f \cdot \mathbf{D}_0 = k f.$$

*Demostración:* Por ser  $f \in \mathcal{P}_k^t$  es  $f(E\mathbf{x}) = \varepsilon^k f(\mathbf{x})$ , derivando respecto a  $\varepsilon$  se tiene que

$$\nabla f(E\mathbf{x}) \cdot (D_\varepsilon E)\mathbf{x} = k \varepsilon^{k-1} f(\mathbf{x}).$$

tomando  $\varepsilon = 1$  se tiene el resultado. ■

**Lema 1.3.10** Sea  $\mathbf{F}_k \in \mathcal{Q}_k^t$ . Entonces  $\operatorname{div}(\mathbf{F}_k) \in \mathcal{P}_k^t$ .

*Demostración:* Utilizando el Lema 1.3.5 se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{F}_k)(E\mathbf{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}(D\mathbf{F}_k(E\mathbf{x})) = \operatorname{tr}(\varepsilon^k E D\mathbf{F}_k(\mathbf{x}) E^{-1}) \\ &= \varepsilon^k \operatorname{tr}(D\mathbf{F}_k(\mathbf{x})) = \varepsilon^k \operatorname{div}(\mathbf{F}_k)(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

■

**Lema 1.3.11** Dados dos campos vectoriales  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ , y una función escalar  $\mu$  suficientemente diferenciables, se tiene  $[\mu\mathbf{F}, \mathbf{G}] = (\nabla\mu \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + \mu[\mathbf{F}, \mathbf{G}]$ .

*Demostración:* Se demuestra fácilmente utilizando la definición del corchete de Lie. ■

**Lema 1.3.12** Sea  $\mathbf{F}_k \in \mathcal{Q}_k^t$  y  $\mathbf{D}_0 = (t_1x_1, t_2x_2, \dots, t_nx_n)^T \in \mathcal{Q}_0^t$ . Entonces,  $[\mathbf{F}_k, \mathbf{D}_0] = k\mathbf{F}_k$ . En particular, si  $\mathbf{F}_0 \in \mathcal{Q}_0^t$  entonces  $[\mathbf{F}_0, \mathbf{D}_0] = 0$ .

*Demostración:* Sea  $[\mathbf{F}_k, \mathbf{D}_0]\mathbf{e}_j$ , la componente  $j$ -ésima del corchete de Lie,  $j = 1, \dots, n$ . Utilizando el Lema de Euler 1.3.9 se tiene:

$$[\mathbf{F}_k, \mathbf{D}_0]\mathbf{e}_j = \nabla F_k \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{D}_0 - \nabla \mathbf{D}_0 \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{F}_k = (k + t_j)\mathbf{F}_k \mathbf{e}_j - t_j \mathbf{F}_k \mathbf{e}_j = k\mathbf{F}_k \mathbf{e}_j$$

■

### 1.3.4. Formas normales bajo $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación

La teoría de formas normales puede aplicarse a campos vectoriales desarrollados en términos cuasihomogéneos del tipo  $\mathbf{t}$  y grados sucesivos. La idea clave se resume en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{k \geq r} \mathbf{P}_k(\mathbf{y})} & \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y}) \\
 \downarrow \mathbf{x} = E\mathbf{X} & & \uparrow \mathbf{y} = E\mathbf{Y}, (\varepsilon = 1)
 \end{array}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = E^{-1}\mathbf{F}(E\mathbf{X}) = \sum_{j \geq r} \mathbf{F}_j(\mathbf{X})\varepsilon^j \xrightarrow{\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \sum_{k \geq r} \mathbf{P}_k(\mathbf{Y})\varepsilon^k} \dot{\mathbf{Y}} = \sum_{j \geq r} \mathbf{G}_j(\mathbf{Y})\varepsilon^j = E^{-1}\mathbf{G}(E\mathbf{Y})$$

Para adaptar el procedimiento que determina las formas normales usando los términos cuasihomogéneas de grados sucesivos, en primer lugar incluimos un parámetro  $\varepsilon$  por medio del escalado  $\mathbf{x} = E\mathbf{X}$ , con  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ . Así, conseguimos el sistema  $\dot{\mathbf{X}} = E^{-1}\mathbf{F}(E\mathbf{X})$ . Desarrollando en potencias de  $\varepsilon$ , podemos escribir este sistema en la forma

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{X})\varepsilon^r + \mathbf{F}_{r+1}(\mathbf{X})\varepsilon^{r+1} + \dots, \quad (1.3.10)$$

donde es fácil probar que  $\mathbf{F}_j \in \mathcal{Q}_j^{\mathbf{t}}$ . Notemos que tomando  $\varepsilon = 1$  en (1.3.10), conseguimos desarrollar el sistema (1.0.1) en términos respecto al tipo  $\mathbf{t}$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{r+1}(\mathbf{x}) + \dots. \quad (1.3.11)$$

**Nota 1:** Las funciones homogéneas son cuasihomogéneas de tipo  $\mathbf{t} = (1, 1, \dots, 1)$ .

No obstante, el grado es una unidad menor que el grado homogéneo. En otras palabras, para el tipo  $\mathbf{u} = (1, 1, \dots, 1)$  se tiene  $\mathcal{Q}_{k-1}^{\mathbf{u}} = \mathcal{H}_k^n, \forall k$ .

**Nota 2:** El grado  $r$  del primer término respecto a un tipo  $\mathbf{t}$ , es un número entero. No tiene porqué ser un número natural. Por ejemplo, si en un campo plano con una singularidad nilpotente

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \dots, \\
 \dot{y} &= b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2 + \dots
 \end{aligned}$$

consideramos el tipo  $\mathbf{t} = (1, 50)$ , entonces el campo  $\mathbf{F}$  del sistema se escribe desarrollado respecto a dicho tipo como:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{-48} + \mathbf{F}_{-47} + \dots$  donde  $\mathbf{F}_{-48}(x, y) = (0, b_{20}x^2)^T$ ,  $\mathbf{F}_{-47}(x, y) = (0, b_{30}x^3)^T$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{F}_0(x, y) = (0, b_{50,0}x^{50})^T$ ,  $\mathbf{F}_1(x, y) = (a_{2,0}x^2, b_{51,0}x^{51} + b_{1,1}xy)^T, \dots$

Una vez que el sistema (1.3.10) ha sido reducido a forma normal, es suficiente deshacer el escalado con  $\mathbf{y} = E\mathbf{Y}$ , y tomar  $\varepsilon = 1$  para obtener la forma normal.

A continuación, describimos como proceder para obtener una forma normal para el sistema (1.3.11). Si aplicamos la transformación  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{P}_k(\mathbf{y})$ , donde  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$  siendo  $k \geq 1$ , el sistema transformado es

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y}) = (I + D\mathbf{P}_k(\mathbf{y}))^{-1} \sum_{i \geq r} \mathbf{F}_i(\mathbf{y} + \mathbf{P}_k(\mathbf{y})),$$

y puede ser expresado en sus términos cuasihomogéneos:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}_r(\mathbf{y}) + \mathbf{G}_{r+1}(\mathbf{y}) + \dots, \quad (1.3.12)$$

siendo  $\mathbf{G}_j(\mathbf{y}) \in \mathcal{Q}_j^{\mathbf{t}}$ , para todo  $j \geq r$ . Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 1.3.13** *Con la anterior notación:*

- $\mathbf{G}_j(\mathbf{y}) = \mathbf{F}_j(\mathbf{y})$ , para  $j = r, r + 1, \dots, r + k - 1$ ,
- $\mathbf{G}_{r+k}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}_{r+k}(\mathbf{y}) - (D\mathbf{P}_k(\mathbf{y})\mathbf{F}_r(\mathbf{y}) - D\mathbf{F}_r(\mathbf{y})\mathbf{P}_k(\mathbf{y}))$ .

*Demostración:* Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(E\mathbf{y}) &= (I + D\mathbf{P}_k(E\mathbf{y}))^{-1} \sum_{j \geq r} \mathbf{F}_j(E\mathbf{y} + \mathbf{P}_k(E\mathbf{y})) \\ &= (E(I + \varepsilon^k D\mathbf{P}_k(\mathbf{y}))E^{-1})^{-1} \sum_{j \geq r} E\varepsilon^j \mathbf{F}_j(\mathbf{y} + \varepsilon^k \mathbf{P}_k(\mathbf{y})) \\ &= E(I - \varepsilon^k D\mathbf{P}_k(\mathbf{y}) + \varepsilon^{2k} (D\mathbf{P}_k(\mathbf{y}))^2 - \dots) \sum_{j \geq r} \varepsilon^j \mathbf{F}_j(\mathbf{y} + \varepsilon^k \mathbf{P}_k(\mathbf{y})). \end{aligned}$$

Además:

$$\mathbf{F}_j(\mathbf{y} + \varepsilon^k \mathbf{P}_k(\mathbf{y})) = \mathbf{F}_j(\mathbf{y}) + D\mathbf{F}_j(\mathbf{y})\mathbf{P}_k(\mathbf{y})\varepsilon^k + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
E^{-1}\mathbf{G}(E\mathbf{y}) &= (I - \varepsilon^k D\mathbf{P}_k(\mathbf{y}) + \varepsilon^{2k} (D\mathbf{P}_k(\mathbf{y}))^2 - \dots) \sum_{j \geq r} \varepsilon^j \mathbf{F}_j(\mathbf{y} + \varepsilon^k \mathbf{P}_k(\mathbf{y})) \\
&= (I - \varepsilon^k D\mathbf{P}_k(\mathbf{y})) \sum_{j \geq r} \varepsilon^j (\mathbf{F}_j(\mathbf{y}) + D\mathbf{F}_j(\mathbf{y})\mathbf{P}_k(\mathbf{y})\varepsilon^k) \\
&\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^{r+k+1}) \\
&= \sum_{j \geq r} \varepsilon^j (\mathbf{F}_j(\mathbf{y}) + D\mathbf{F}_j(\mathbf{y})\mathbf{P}_k(\mathbf{y})\varepsilon^k) - \varepsilon^{r+k} D\mathbf{P}_k(\mathbf{y})\mathbf{F}_r(\mathbf{y}) \\
&\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^{r+k+1}) \\
&= \mathbf{F}_r(\mathbf{y})\varepsilon^r + \mathbf{F}_{r+1}(\mathbf{y})\varepsilon^{r+1} + \dots + \mathbf{F}_{r+k-1}(\mathbf{y})\varepsilon^{r+k-1} \\
&\quad + (\mathbf{F}_{r+k}(\mathbf{y}) + D\mathbf{F}_r(\mathbf{y})\mathbf{P}_k(\mathbf{y}) - D\mathbf{P}_k(\mathbf{y})\mathbf{F}_r(\mathbf{y}))\varepsilon^{r+k} \\
&\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^{r+k+1}).
\end{aligned}$$

■

El anterior resultado sugiere definir el siguiente operador homológico:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{r+k} &: \mathcal{Q}_k^{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathcal{Q}_{r+k}^{\mathbf{p}} \\
&\mathbf{P}_k \longrightarrow \mathbf{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k),
\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k)(\mathbf{y}) = D\mathbf{P}_k(\mathbf{y})\mathbf{F}_r(\mathbf{y}) - D\mathbf{F}_r(\mathbf{y})\mathbf{P}_k(\mathbf{y})$ .

Notemos que el anterior operador sólo depende del primer término  $\mathbf{F}_r$ , y puede ser expresado en términos del corchete de Lie:  $\mathbf{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k) = [\mathbf{P}_k, \mathbf{F}_r]$ . Esta expresión muestra que es lineal.

La Proposición 1.3.13 afirma que los términos cuasihomogéneos hasta orden  $r + k - 1$  no cambian, y el término de orden  $r + k$  en el campo vectorial transformado es:

$$\mathbf{G}_{r+k} = \mathbf{F}_{r+k} - [\mathbf{P}_k, \mathbf{F}_r] = \mathbf{F}_{r+k} - \mathbf{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k).$$

Siguiendo las mismas ideas que en la teoría clásica de formas normales, es posible anular en ese término la parte que pertenece a la imagen del operador lineal  $\mathbf{L}_{r+k}$ , seleccionando adecuadamente  $\mathbf{P}_k$ .

Realizando sucesivamente los cambios descritos anteriormente para  $k = 1, 2, \dots$ , y usando el teorema de Borel, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.3.14** *El sistema (1.3.11) es formalmente conjugado a (1.3.12), donde  $\mathbf{G}_{r+k}$  pertenece a un subespacio complementario al espacio imagen del operador lineal  $\mathbf{L}_{r+k}$ , para todo  $k \geq 1$ .*

### 1.3.5. Formas normales bajo $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia

Además de usar  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación (transformaciones en las variables de estado) mostraremos en esta memoria las ventajas que se tienen cuando utilizamos también transformaciones en el tiempo ( $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia). Como en el caso de la conjugación, la forma normal obtenida se basa en la información contenida en el primer término cuasihomogéneo  $\mathbf{F}_r$ . La idea clave se resume en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \dot{\mathbf{x}} = \sum_{j \geq r} \mathbf{F}_j(\mathbf{x}) & & \\
 \downarrow \frac{dt}{dT} = 1 - \sum_{i \geq 1} \mu_i(\mathbf{x}) & \searrow & \\
 \mathbf{x}' = \sum_{j \geq r} \tilde{\mathbf{F}}_j(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{i \geq 1} \mathbf{P}_i(\mathbf{y})} & \mathbf{y}' = \sum_{j \geq r} \mathbf{G}_j(\mathbf{y}) \\
 \downarrow \mathbf{x} = E\mathbf{X} & & \uparrow \mathbf{y} = E\mathbf{Y} \\
 \mathbf{X}' = \sum_{j \geq r} \tilde{\mathbf{F}}_j(\mathbf{X})\varepsilon^j & \xrightarrow{\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \sum_{i \geq 1} \mathbf{P}_i(\mathbf{Y})\varepsilon^i} & \mathbf{Y}' = \sum_{j \geq r} \mathbf{G}_j(\mathbf{Y})\varepsilon^j
 \end{array}$$



Si partimos del sistema (1.3.11), y aplicamos el cambio en el tiempo  $\frac{dt}{dT} = 1 - \mu_k(\mathbf{x})$ , con  $\mu_k \in \mathcal{P}_k^t$ , obtenemos el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dT} = \mathbf{x}' = \mathbf{F}_r(\mathbf{x}) + \cdots + \mathbf{F}_{r+k-1}(\mathbf{x}) + (\mathbf{F}_{r+k}(\mathbf{x}) - \mu_k(\mathbf{x})\mathbf{F}_r(\mathbf{x})) + \cdots,$$

El Lema 1.3.7, garantiza que este sistema está desarrollado en términos cuasi-homogéneos de tipo  $\mathbf{t}$  y grados sucesivos (de forma análoga al sistema (1.3.11)). A continuación, para obtener la forma normal aplicamos la transformación  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{P}_k(\mathbf{y})$ , que proporciona

$$\mathbf{y}' = \mathbf{G}_r(\mathbf{y}) + \cdots + \mathbf{G}_{r+k-1}(\mathbf{y}) + \mathbf{G}_{r+k}(\mathbf{y}) + \cdots. \quad (1.3.13)$$

Usando ahora la Proposición 1.3.13, se tiene que  $\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r$ ,  $\mathbf{G}_{r+1} = \mathbf{F}_{r+1}$ ,  $\cdots$ ,  $\mathbf{G}_{r+k-1} = \mathbf{F}_{r+k-1}$  y

$$\mathbf{G}_{r+k} = \mathbf{F}_{r+k} - \mu_k \mathbf{F}_r - [\mathbf{P}_k, \mathbf{F}_r] = \mathbf{F}_{r+k} - (\mu_k \mathbf{F}_r + \mathbf{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k)).$$

Esto sugiere definir el operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{r+k} &: \mathcal{Q}_k^{\mathbf{p}} \times \mathcal{P}_k^{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathcal{Q}_{r+k}^{\mathbf{p}} \\ (\mathbf{P}_k, \mu_k) &\rightarrow \mathcal{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k, \mu_k) = \mu_k \mathbf{F}_r + [\mathbf{P}_k, \mathbf{F}_r]. \end{aligned}$$

Si ahora definimos el operador lineal

$$\begin{aligned} M_{r+k} &: \mathcal{P}_k^{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathcal{Q}_{r+k}^{\mathbf{p}} \\ \mu_k &\rightarrow \mu_k \mathbf{F}_r, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

podemos escribir:

$$\mathcal{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k, \mu_k) = \mathbf{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k) + M_{r+k}(\mu_k).$$

Por otra parte, el Lema 1.3.8 hace posible definir el siguiente operador lineal que será útil en lo que sigue:

$$\begin{aligned} \ell_k &: \mathcal{P}_{k-r}^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \\ \mu_{k-r} &\rightarrow \nabla \mu_{k-r} \cdot \mathbf{F}_r. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 1.3.15**

- (a)  $\text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}) = \text{Im}(M_{r+k} \circ \ell_k) + \mathbf{L}_{r+k}(\text{Cor}(M_k)),$   
 (b)  $\text{Im}(M_{r+k}) = \text{Im}(M_{r+k} \circ \ell_k) + M_{r+k}(\text{Cor}(\ell_k)),$

donde  $\text{Cor}(\cdot)$  denota cualquier subespacio complementario al espacio imagen  $\text{Im}(\cdot)$ , del correspondiente operador lineal.

*Demostración:*

- (a) Sea  $\mathbf{P}_{r+k} \in \text{Im}(\mathbf{L}_{r+k})$ . Entonces, existe  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{Q}_k^{\mathbf{p}}$  tal que  $\mathbf{P}_{r+k} = [\mathbf{P}_k, \mathbf{F}_r]$ . Como  $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} = \text{Im}(M_k) \oplus \text{Cor}(M_k)$ , podemos escribir  $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^{\mathbf{r}} + \mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}$ , donde  $\mathbf{P}_k^{\mathbf{r}} \in \text{Im}(M_k)$  y  $\mathbf{P}_k^{\mathbf{c}} \in \text{Cor}(M_k)$ . Sea  $\mu_{k-r} \in \mathcal{P}_{k-r}^{\mathbf{t}}$  tal que  $\mathbf{P}_k^{\mathbf{r}} = \mu_{k-r} \mathbf{F}_r$ . Entonces:

$$\mathbf{P}_{r+k} = [\mathbf{P}_k^{\mathbf{r}}, \mathbf{F}_r] + [\mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}, \mathbf{F}_r] = [\mu_{k-r} \mathbf{F}_r, \mathbf{F}_r] + [\mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}, \mathbf{F}_r].$$

Aplicando ahora el Lema 1.3.16, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{r+k} &= (\nabla \mu_{k-r} \cdot \mathbf{F}_r) \mathbf{F}_r + \mu_{k-r} [\mathbf{F}_r, \mathbf{F}_r] + [\mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}, \mathbf{F}_r] \\ &= (\nabla \mu_{k-r} \cdot \mathbf{F}_r) \mathbf{F}_r + [\mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}, \mathbf{F}_r] = M_{r+k}(\ell_k(\mu_{k-r})) + \mathbf{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}). \end{aligned}$$

Esto prueba la igualdad.

- (b) Probaremos que  $\text{Im}(M_{r+k}) \subseteq \text{Im}(M_{r+k} \circ \ell_k) + M_{r+k}(\text{Cor}(\ell_k))$ . La otra inclusión es trivial.

Sea  $\mathbf{P}_{r+k} \in \text{Im}(M_{r+k})$ . Entonces, existe  $\mu_k \in \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$  tal que  $\mathbf{P}_{r+k} = \mu_k \mathbf{F}_r$ .

Como  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} = \text{Im}(\ell_k) \oplus \text{Cor}(\ell_k)$ , podemos decomponer  $\mu_k = \mu_k^{\mathbf{r}} + \mu_k^{\mathbf{c}}$ , donde  $\mu_k^{\mathbf{r}} \in \text{Im}(\ell_k)$  y  $\mu_k^{\mathbf{c}} \in \text{Cor}(\ell_k)$ . Sea  $\mu_{k-r} \in \mathcal{P}_{k-r}^{\mathbf{t}}$  tal que  $\mu_k^{\mathbf{r}} = \nabla \mu_{k-r} \cdot \mathbf{F}_r$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{r+k} &= \mu_k \mathbf{F}_r = \mu_k^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_r + \mu_k^{\mathbf{c}} \mathbf{F}_r = (\nabla \mu_{k-r} \cdot \mathbf{F}_r) \mathbf{F}_r + \mu_k^{\mathbf{c}} \mathbf{F}_r \\ &= M_{r+k}(\ell_k(\mu_{k-r})) + M_{r+k}(\mu_k^{\mathbf{c}}). \end{aligned}$$

■

Podemos determinar la imagen del operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia a partir de la proposición anterior, ya que

$$\text{Im}(\mathcal{L}_{r+k}) = \text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}) + \text{Im}(M_{r+k}).$$

Sin embargo, esta suma no es directa. Esto se debe a que hay elementos en  $\mathcal{Q}_{r+k}^t$  que pueden ser eliminados con transformaciones en las variables de estado así como en el tiempo. Es importante separar las simplificaciones que se consiguen por medio de cambios de variables en las variables de estado con aquellas conseguidas mediante cambios en el tiempo.

**Proposición 1.3.16**  $\text{Im}(\mathcal{L}_{r+k}) = M_{r+k}(\text{Cor}(\ell_k)) + \text{Im}(\mathbf{L}_{r+k})$ .

*Demostración:* Sea  $\mathbf{P}_{r+k} \in \text{Im}(\mathcal{L}_{r+k})$ . Entonces, existen  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{Q}_k^t$ ,  $\mu_k \in \mathcal{P}_k^t$  tales que  $\mathbf{P}_{r+k} = \mu_k \mathbf{F}_r + [\mathbf{P}_k, \mathbf{F}_r]$ .

Como  $\mathcal{P}_k^t = \text{Im}(\ell_k) \oplus \text{Cor}(\ell_k)$ , podemos escribir  $\mu_k = \mu_k^r + \mu_k^c$  donde  $\mu_k^r \in \text{Im}(\ell_k)$  y  $\mu_k^c \in \text{Cor}(\ell_k)$ . Sea  $\mu_{k-r} \in \mathcal{P}_{k-r}^t$  tal que  $\ell_k(\mu_{k-r}) = \nabla \mu_{k-r} \cdot \mathbf{F}_r = \mu_k^r$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{r+k} &= \mu_k^c \mathbf{F}_r + (\nabla \mu_{k-r} \cdot \mathbf{F}_r) \mathbf{F}_r + [\mathbf{P}_k, \mathbf{F}_r] \\ &= \mu_k^c \mathbf{F}_r + \mu_{k-r} [\mathbf{F}_r, \mathbf{F}_r] + [\mu_{k-r} \mathbf{F}_r, \mathbf{F}_r] + [\mathbf{P}_k, \mathbf{F}_r] \\ &= \mu_k^c \mathbf{F}_r + [\mathbf{P}_k + \mu_{k-r} \mathbf{F}_r, \mathbf{F}_r] = M_{r+k}(\mu_k^c) + \mathbf{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k + \mu_{k-r} \mathbf{F}_r). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\text{Im}(\mathcal{L}_{r+k}) \subseteq M_{r+k}(\text{Cor}(\ell_k)) + \text{Im}(\mathbf{L}_{r+k})$ .

La otra inclusión es similar. ■

**Nota:** La suma anterior, en general, no es directa. En concreto, consideremos el tipo  $\mathbf{t} = (1, 2)$  y el sistema plano  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} = \sum_{j=r}^\infty \mathbf{F}_j$ , donde  $\mathbf{F}_j \in \mathcal{Q}_j^t$ ,  $\mathbf{F}_r = (y, -x^3)^T$ ,  $r = 1$ . Sea  $h = x^4 + 2y^2 \in \mathcal{P}_4^t$  una integral primera de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_1$ , entonces  $h\mathbf{F}_1 \in \text{Im}(\mathbf{L}_5) \cap M_5(\text{Cor}(\ell_4))$ , ya que  $h\mathbf{F}_1 = \mathbf{L}_5(-h(x, y)(x, 2y)^T) = M_5(h)$ , siendo  $h \in \text{Cor}(\ell_4)$

Del anterior resultado, deducimos que, en el análisis de las simplificaciones proporcionadas por el cambio de variables en el tiempo, es suficiente tomar  $\mu_k \in \text{Cor}(\ell_k)$ . Es decir, la inclusión de otros términos en  $\mu_k$  (pertenecientes a  $\text{Im}(\ell_k)$ ), sólo afectarán a  $\text{Im}(\mathbf{L}_{r+k})$ , y estos términos pueden ser simplificados

usando  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación (i.e., podemos conseguir estas simplificaciones sin usar  $\mu_k$ ). Esta restricción sobre la forma de seleccionar  $\mu_k$  facilita en gran manera el análisis de la forma normal (véase la última sección dedicada a analizar el caso Takens-Bogdanov).

Debido a estas consideraciones modificamos la anterior definición del operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{r+k} &: \mathcal{Q}_k^t \times \text{Cor}(\ell_k) \longrightarrow \mathcal{Q}_{r+k}^t \\ (\mathbf{P}_k, \mu_k) &\rightarrow \mathcal{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k, \mu_k) = \mu_k \mathbf{F}_r + [\mathbf{P}_k, \mathbf{F}_r]. \end{aligned}$$

De nuevo usando ideas de la teoría clásica de formas normales, es posible eliminar la parte que pertenece al espacio imagen del operador lineal  $\mathcal{L}_{r+k}$ , seleccionando  $(\mathbf{P}_k, \mu_k)$  adecuadamente. Así, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.17** *El sistema (1.3.11) es formalmente equivalente a (1.3.13), donde  $\mathbf{G}_{r+k}$  pertenece a un subespacio complementario del espacio imagen del operador lineal  $\mathcal{L}_{r+k}$ , para todo  $k \geq 1$ .*

## 1.4. Triángulo de Lie

En esta sección mostramos el papel de las transformaciones de Lie en la teoría de las formas normales, prestando atención en los aspectos computacionales. A finales de los años 60, varios autores (Hori, Garrido, Gröbner, Knapp, ...) presentaron un enfoque a la obtención de formas normales basada en transformaciones de Lie, dedicada principalmente a la mecánica celeste y a los sistemas hamiltonianos (véanse Chow & Hale [20], Lichtenberg & Lieberman [45]). Las mejoras aportadas por Deprit [24] perfeccionaron el método creando un procedimiento recursivo, apto para la computación algebraica.

Varios autores han utilizado el método de las transformaciones de Lie para obtener formas normales (véanse Takens [59], Ushiki [62]). Posteriormente, este método ha sido considerado junto con la formulación recursiva de Deprit para conseguir algoritmos específicamente adaptados a la computación simbólica (véanse Freire et al. [29], Gamero et al. [31, 32, 33]). Esta forma de proceder también ha sido efectiva en la caracterización de la forma hipernormal (véanse

Algaba et al. [1, 2]). En esta sección, presentaremos los principales resultados de este método (en sus dos vertientes, computacional y teórica).

La ventaja del procedimiento recursivo basado en las transformaciones de Lie es que tenemos el control del efecto de las transformaciones de normalización en los términos de mayor orden.

Hacemos notar que, por los Lemas 1.3.6 y 1.3.7, es posible conseguir un procedimiento computacionalmente efectivo para el cálculo de la forma normal usando desarrollos cuasihomogéneos tanto bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación como equivalencia, basado en el triángulo de Lie (véase Chow & Hale [20]).

### 1.4.1. Triángulo de Lie bajo $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación

Consideremos un campo vectorial  $\mathbf{U} \in \mathcal{C}^\infty$  en un entorno del origen tal que  $\mathbf{U}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Aplicaremos en el sistema (1.3.11) el cambio de variables  $\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{y}, \varepsilon)$ , donde  $\mathbf{u}$  es la única solución del problema

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{u}(\mathbf{y}, \varepsilon) = \mathbf{U}(\mathbf{u}(\mathbf{y}, \varepsilon)), \quad \mathbf{u}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{y}, \quad (1.4.16)$$

esto es,  $\mathbf{u}$  es el flujo del sistema autónomo generado por  $\mathbf{U}$ . Por esta razón,  $\mathbf{U}$  se denomina generador del cambio.

La idea clave de toda esta formulación es que resulta posible la determinación del campo transformado a partir de  $\mathbf{F}$  y de  $\mathbf{U}$ , sin necesidad de calcular explícitamente  $\mathbf{u}$ ; es decir, podremos determinar el campo transformado sin conocer directamente el cambio de variables efectuado.

El campo transformado  $\mathbf{G}$  depende del generador  $\mathbf{U}$  en la siguiente forma, (véase Algaba et al. [2]):

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}, \varepsilon) = \mathbf{F}(\mathbf{y}) + \sum_{n \geq 1} T_{\mathbf{U}}^n(\mathbf{F}) \frac{\varepsilon^n}{n!}, \quad (1.4.17)$$

donde  $T_{\mathbf{U}}(\mathbf{F}) = [\mathbf{F}, \mathbf{U}]$ , y  $T_{\mathbf{U}}^n(\mathbf{F}) = T_{\mathbf{U}} \circ \cdots \circ T_{\mathbf{U}}(\mathbf{F})$ . En nuestro análisis utilizamos (1.4.17) tomando  $\varepsilon = 1$ . Observamos que el término cuasihomogéneo de orden  $r + k$  en el campo transformado es:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{r+k} &= \mathbf{F}_{r+k} + [\mathbf{F}, \mathbf{U}]_{r+k} + \frac{1}{2!} [[\mathbf{F}, \mathbf{U}], \mathbf{U}]_{r+k} \\ &\quad + \frac{1}{3!} [[[\mathbf{F}, \mathbf{U}], \mathbf{U}], \mathbf{U}]_{r+k} + \cdots, \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

donde el subíndice indica el correspondiente término cuasihomogéneo.

Escribiendo  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \dots$  como suma de sus términos cuasihomogéneos se tendría:

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}, \mathbf{U}]_{r+k} &= \sum_{j=1}^k [\mathbf{F}_{r+k-j}, \mathbf{U}_j] \\ [[\mathbf{F}, \mathbf{U}], \mathbf{U}]_{r+k} &= \sum_{j=1}^{k-1} [[\mathbf{F}, \mathbf{U}]_{r+k-j}, \mathbf{U}_j] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observemos que en el generador  $\mathbf{U}$  no hemos incluido el término cuasihomogéneo de grado cero:  $\mathbf{U}_0$ . Esto es debido a que supondremos que partimos de un campo  $\mathbf{F}$  cuyo primer término cuasihomogéneo está ya "simplificado". A este proceso de simplificación del primer término cuasihomogéneo lo llamaremos forma normal de paso cero y será tratado más adelante en la Sección 1.5.1.

Para obtener  $\mathbf{G}_{r+k}$  construimos la sucesión de funciones  $\{\mathbf{V}_{r+k,l}\}$  definidas de forma recursiva como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{r+k,0} &= \mathbf{F}_{r+k}, \quad k \geq 0, \\ \mathbf{V}_{r+k,l} &= \sum_{j=1}^{k+1-l} [\mathbf{V}_{r+k-j,l-1}, \mathbf{U}_j], \quad \text{para } l = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

Esta sucesión puede organizarse en el siguiente esquema triangular, (llamado triángulo de Lie):

$\mathbf{V}_{r,0}$					
$\mathbf{V}_{r+1,0}$	$\mathbf{V}_{r+1,1}$				
$\mathbf{V}_{r+2,0}$	$\mathbf{V}_{r+2,1}$	$\mathbf{V}_{r+2,2}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$\mathbf{V}_{r+k,0}$	$\mathbf{V}_{r+k,1}$	$\mathbf{V}_{r+k,2}$	$\cdots$	$\mathbf{V}_{r+k,k}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(1.4.20)

Es necesario hacer notar que el elemento de la columna  $i$  y fila  $(k+1)$  depende exclusivamente de los primeros  $k-i+2$  elementos de la columna

$i - 1$ . Usando las ecuaciones (1.4.18) obtenemos:

$$\mathbf{G}_{r+k} = \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l} = \mathbf{F}_{r+k} + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l}. \quad (1.4.21)$$

El siguiente resultado, fácil de probar, establece que los elementos de cada fila del triángulo de Lie son cuasihomogéneos del mismo grado.

**Proposición 1.4.18**  $\mathbf{V}_{r+k,l} \in \mathcal{Q}_{r+k}^t$  para todo  $l = 0, 1, \dots, k$ . En particular  $\mathbf{G}_{r+k} \in \mathcal{Q}_{r+k}^t$ .

En este esquema triangular triangular, las filas están organizadas de acuerdo al grado cuasihomogéneo y las columnas de acuerdo al número de veces que ha sido aplicado el corchete de Lie. En la primera columna está el campo original, en la segunda los corchetes de Lie simples, en la tercera los dobles corchetes de Lie, etc. En este sentido, si consideramos que los generadores  $\mathbf{U}_j$  son libres, (esto es, podemos expresarlos con coeficientes indeterminados), podemos decir que en la primera columna del triángulo de Lie están los términos que no tienen parámetros, en la segunda los que dependen linealmente de los parámetros, en la tercera, términos que dependen de forma cuadrática de los parámetros, etc. Así, si queremos definir operadores homológicos lineales debemos restringirnos a la primera y segunda columnas.

Este triángulo de Lie difiere del original propuesto por Chow & Hale, [20]; ambos triángulos contienen el sistema original en la primera columna pero son diferentes en la forma de construir la sucesión y en la forma de expresar el sistema transformado.

La principal ventaja de esta nueva formulación del triángulo de Lie radica en que puede ser adaptado al caso de equivalencia orbital, como veremos en la próxima subsección.

### 1.4.2. Triángulo de Lie bajo $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia

Para calcular la forma normal bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia, en primer lugar aplicamos al sistema (1.3.11) un cambio de variables en el tiempo  $\frac{dt}{dT} = 1 - \mu(\mathbf{x})$ , donde  $\mu \in \mathcal{C}^\infty$  en un entorno del origen y  $\mu(\mathbf{0}) = 0$ . Obtenemos así el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dT} = \mathbf{x}' = \mathbf{F}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_r^*(\mathbf{x}) + \dots + \mathbf{F}_{r+k}^*(\mathbf{x}) + \dots. \quad (1.4.22)$$

Si escribimos  $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots$ , con  $\mu_j \in \text{Cor}(\ell_j)$  para todo  $j \geq 1$ , véase el Teorema 1.3.17, entonces los términos del sistema transformado (1.4.22) son:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_r^*(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}_r(\mathbf{x}) \\ \mathbf{F}_{r+k}^*(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}_{r+k}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \mu_j(\mathbf{x}) \mathbf{F}_{r+k-j}(\mathbf{x}), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

A continuación, aplicamos un cambio de variables con generador  $\mathbf{U}$ , resultando

$$\frac{dy}{dT} = \mathbf{y}' = \mathbf{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}_r(\mathbf{y}) + \cdots + \mathbf{G}_{r+k}(\mathbf{y}) + \cdots \quad (1.4.23)$$

Para calcular  $\mathbf{G}_{r+k}$ , construimos la sucesión de funciones  $\{\mathbf{V}_{r+k,l}^*\}$  definidas de forma recursiva mediante:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{r,0}^* &= \mathbf{F}_r^* = \mathbf{F}_r, \\ \mathbf{V}_{r+k,0}^* &= \mathbf{F}_{r+k}^* = \mathbf{F}_{r+k} - \sum_{j=1}^k \mu_j \mathbf{F}_{r+k-j}, \quad \text{para } k \geq 1, \\ \mathbf{V}_{r+k,l}^* &= \sum_{j=1}^{k+1-l} [\mathbf{V}_{r+k-j,l-1}^*, \mathbf{U}_j], \quad \text{para } l = 1, \dots, k.\end{aligned}$$

Esta sucesión puede organizarse análogamente al esquema triangular anterior. Es fácil deducir que:

$$\mathbf{G}_{r+k} = \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l}^*$$

Para encontrar el campo transformado, comenzamos separando los efectos del cambio de variables en las variables de estado y los del tiempo.

Todo el triángulo de Lie está determinado por la primera columna y por los términos del generador espacial  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{k-1}, \dots$ . De esta forma, el elemento  $\mathbf{G}_{r+k}$  del campo transformado está determinado por la fila  $k$  del triángulo de Lie similar a (1.4.20), pero construido con los elementos de la primera columna  $\mathbf{V}_{r+j,0}^*$ .

Para ello, definimos:

$$\mathbf{V}_{r+j,0}^* = \mathbf{V}_{r+j,0} + \mathbf{W}_{r+j,0}, \quad j \geq 0,$$



donde

$$\mathbf{V}_{r+j,0} = \mathbf{F}_{r+j}, \quad \mathbf{W}_{r,0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}_{r+j,0} = - \sum_{i=1}^j \mu_i \mathbf{F}_{r+j-i}.$$

Debido a la linealidad del corchete de Lie, podemos encontrar el campo transformado a orden  $k$  como la suma de las filas  $k$  de dos triángulos de Lie:

- Por una parte por el triángulo definido por el esquema recursivo:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{r+k,0} &= \mathbf{F}_{r+k} \quad k \geq 0, \\ \mathbf{V}_{r+k,l} &= \sum_{j=1}^{k+1-l} [\mathbf{V}_{r+k-j,l-1}, \mathbf{U}_j], \quad 1 \leq l \leq k. \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

- Por otra parte, por el triángulo definido por la siguiente sucesión de campos:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{r,0} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}_{r+k,0} &= - \sum_{j=1}^k \mu_j \mathbf{F}_{r+k-j}, \quad k \geq 1, \\ \mathbf{W}_{r+k,l} &= \sum_{j=1}^{k+1-l} [\mathbf{W}_{r+k-j,l-1}, \mathbf{U}_j], \quad 1 \leq l \leq k. \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

El triángulo de Lie (1.4.24) está determinado por los términos cuasihomogéneos del campo original,  $\mathbf{F}_{r+j}$ , y por los generadores espaciales  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{k-1}, \dots$ . Este triángulo recoge los efectos de la  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación. Sus elementos serán siempre denotados como  $\mathbf{V}_{r+j,l}$  y nos referiremos a él como triángulo de Lie. Por otra parte el segundo triángulo (1.4.25) depende de los generadores espaciales  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{k-1}, \dots$ ; de los términos cuasihomogéneos del campo inicial,  $\mathbf{F}_r, \dots, \mathbf{F}_{r+k}, \dots$  y de los generadores temporales  $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \dots$ . Este triángulo es el que introduce los efectos de la  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia. Sus elementos serán denotados como  $\mathbf{W}_{r+j,l}$ .

En particular se tiene:

$$\mathbf{G}_{r+k} = \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l}^* = \mathbf{V}_{r+k,0}^* + \mathbf{V}_{r+k,1}^* + \sum_{l=2}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l}^*$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{V}_{r+k,0} + \mathbf{W}_{r+k,0} + \mathbf{V}_{r+k,1} + \mathbf{W}_{r+k,1} + \sum_{l=2}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l}^* \\
&= \mathbf{F}_{r+k} - \sum_{j=1}^k \mu_j \mathbf{F}_{r+k-j} + \sum_{j=1}^k [\mathbf{V}_{r+k-j,0}, \mathbf{U}_j] + \mathbf{W}_{r+k,1} + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l}^* \\
&= \left[ \mathbf{F}_{r+k} - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \mathbf{F}_{r+k-j} + \sum_{j=1}^{k-1} [\mathbf{V}_{r+k-j,0}, \mathbf{U}_j] + \mathbf{W}_{r+k,1} + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l}^* \right] \\
&\quad + [\mathbf{F}_r, \mathbf{U}_k] - \mu_k \mathbf{F}_r.
\end{aligned}$$

Así, si denotamos

$$\mathbf{Q}_{r+k} = \mathbf{F}_{r+k} - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \mathbf{F}_{r+k-j} + \sum_{j=1}^{k-1} [\mathbf{V}_{r+k-j,0}, \mathbf{U}_j] + \mathbf{W}_{r+k,1} + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l}^*,$$

se tiene

$$\mathbf{G}_{r+k} = \mathbf{Q}_{r+k} - \mathcal{L}_{r+k}(\mathbf{U}_k, \mu_k),$$

donde  $\mathbf{Q}_{r+k}$  depende de  $\mathbf{F}_r, \dots, \mathbf{F}_{r+k}$ , de los generadores espaciales  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{k-1}$  y de los temporales  $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$ . Por tanto, usando ideas propias de la teoría de las formas normales, podemos seleccionar  $\mathbf{U}_k, \mu_k$  con el objeto de simplificar el término de grado  $r+k$ .

Estas ideas proporcionan un algoritmo apropiado para la computación simbólica, consistente en construir la sucesión  $\mathbf{V}_{r+k,l}^*$  en cada fila, separar en dicha fila el operador homológico bajo equivalencia y el elemento  $\mathbf{Q}_{r+k}$ . Una vez que resolvamos la ecuación homológica, añadimos los términos no considerados en  $\mathbf{V}_{r+k,0}^*$  y  $\mathbf{V}_{r+k,1}^*$ . Los principales pasos de este algoritmo se resumen en el siguiente esquema:

**Definir**  $\mathbf{V}_{r,0}^* = \mathbf{F}_r$ .

**Para**  $k \geq 1$

**Definir**

$$\mathbf{V}_{r+k,0}^* = \mathbf{F}_{r+k} - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \mathbf{F}_{r+k-j},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{r+k,1}^* &= \sum_{j=1}^{k-1} [\mathbf{V}_{r+k-j,0}^*, \mathbf{U}_j], \\ \mathbf{V}_{r+k,l}^* &= \sum_{j=1}^{k+1-l} [\mathbf{V}_{r+k-j,l-1}^*, \mathbf{U}_j], \quad 2 \leq l \leq k.\end{aligned}$$

**Computar** El término cuasihomogéneo de la forma normal de grado  $r+k$ :

$$\mathbf{G}_{r+k} = \text{Proy}_{\text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k})} \left( \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l}^* \right),$$

donde  $\text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k})$  denota un subespacio complementario al espacio imagen de  $\mathcal{L}_{r+k}$ , seleccionado previamente.

**Obtener**  $\mathbf{U}_k, \mu_k$ , a partir de la ecuación homológica:

$$\mathcal{L}_{r+k}(\mathbf{U}_k, \mu_k) = \text{Proy}_{\text{Im}(\mathcal{L}_{r+k})} \left( \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \mathbf{V}_{r+k,l}^* \right). \quad (1.4.26)$$

**Actualizar**

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{r+k,0}^* &= \mathbf{V}_{r+k,0}^* - \mu_k \mathbf{F}_r, \\ \mathbf{V}_{r+k,1}^* &= \mathbf{V}_{r+k,1}^* + [\mathbf{F}_r, \mathbf{U}_k].\end{aligned}$$

Al igual que en la teoría de las formas normales, a veces el procedimiento permite simplificaciones adicionales, haciendo hipótesis adecuadas sobre términos cuasihomogéneos de orden superior. De hecho, si  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}) \neq \{0\}$  la ecuación homológica (1.4.26) no tiene una solución única, (la solución está determinada salvo términos arbitrarios del núcleo de  $\mathcal{L}_{r+k}$ ). Así, en la correspondiente fila del triángulo de Lie pueden aparecer constantes arbitrarias, que pueden ser seleccionadas para conseguir mayores simplificaciones en los términos cuasihomogéneos de orden superior. Este problema será objeto de estudio en la última sección.

## 1.5. Elección del tipo

En las secciones anteriores hemos desarrollado las técnicas de formas normales aplicadas al caso cuasihomogéneo y también hemos desarrollado la técnica

ca del triángulo de Lie para desarrollos casi homogéneos. En principio, el tipo  $\mathbf{t}$  puede seleccionarse arbitrariamente. El caso más frecuente es tomar  $\mathbf{t} = (1, \dots, 1)$ , en cuyo caso  $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$  coincide con el espacio de los campos vectoriales homogéneos de grado  $k + 1$ . Como ya sabemos el tipo caracteriza el primer término cuasihomogéneo del campo,  $\mathbf{F}_r$ , cuya información será determinante para obtener la forma normal.

De esta forma tenemos todo un abanico de posibilidades a la hora de elegir un primer término. La pregunta obvia es: ¿qué tipo es el más adecuado?. El sentido de la adecuación no está claro. Puede haber varios criterios.

Uno de ellos podría ser un tipo que haga mínimo el número de cambios de variables que dejan invariante el primer término cuasihomogéneo, más adelante lo llamaremos núcleo a paso cero. Es interesante conseguir este mínimo ya que estos cambios de variables contienen parámetros libres que intervienen en forma no lineal en términos de orden superior.

Otro criterio puede ser tomar un tipo que minimize las dimensiones de los co-rangos.

Otro más geométrico, podría ser elegir un tipo asociado a una de las caras compactas del poliedro de Newton del campo vectorial  $\mathbf{F}$ . Esta quizás sea la elección más natural, ya que bajo ciertas hipótesis, el primer término cuasihomogéneo puede determinar el tipo topológico de la singularidad (véanse Brunella & Miari [17], Dumortier [16]).

### 1.5.1. Forma normal de paso cero

Si consideramos un sistema con parte lineal no nula, el primer paso de la teoría de formas normales clásicas, (que como hemos comentado corresponde a elegir el tipo  $(1, 1, \dots, 1)$ ), consiste en transformar el sistema mediante un cambio lineal para llevar la matriz de la linealización a forma canónica (de Jordan, de Frobenius, ...). Nuestro objetivo ahora es generalizar este paso al caso cuasihomogéneo que incluirá al caso de parte lineal nula.

Para ello fijemos un tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  y consideremos el sistema

(1.3.11):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x}) + \sum_{j \geq 1} \mathbf{F}_{r+j}(\mathbf{x}).$$

Aplicando sobre dicho sistema un cambio de variables en un entorno del origen  $\mathbf{x} = \mathbf{P}_0(\mathbf{y})$ , con  $\mathbf{P}_0 \in \tilde{\mathcal{Q}}_0^t = \{\mathbf{P}_0 \in \mathcal{Q}_0^t \mid \det(D\mathbf{P}_0(0)) \neq 0\}$ , obtenemos un nuevo sistema:

$$\dot{\mathbf{y}} = (D\mathbf{P}_0)^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{F}_r(\mathbf{P}_0(\mathbf{y})) + (D\mathbf{P}_0)^{-1}(\mathbf{y}) \sum_{j \geq 1} \mathbf{F}_{r+j}(\mathbf{P}_0(\mathbf{y})).$$

Si expresamos este sistema en términos cuasihomogéneos:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}_r(\mathbf{y}) + \mathbf{G}_{r+1}(\mathbf{y}) + \dots, \quad (1.5.27)$$

obtenemos

$$\mathbf{G}_{r+j}(\mathbf{y}) = (D\mathbf{P}_0)^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{F}_{r+j}(\mathbf{P}_0(\mathbf{y})) \in \mathcal{Q}_{r+j}^t, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Definimos the operador homológico a paso cero como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{r+k}^{(0)} &: \tilde{\mathcal{Q}}_0^t \longrightarrow \mathcal{Q}_{r+k}^t \\ \mathbf{P}_0 &\rightarrow \mathbf{L}_{r+k}^{(0)}(\mathbf{P}_0) = (D\mathbf{P}_0)^{-1} \cdot \mathbf{F}_{r+k} \circ \mathbf{P}_0, \end{aligned}$$

siendo  $k \geq 0$ . Notemos que el anterior operador no es lineal. Es posible eliminar en  $\mathbf{G}_r$  la parte que pertenece al rango del operador  $\mathbf{L}_r^{(0)}$ , seleccionando  $\mathbf{P}_0$  adecuadamente. Los cambios de variable temporal que afectan al primer término casi homogéneo se reducen a un simple escalado, por lo que no son útiles para eliminar ningún elemento del primer término,  $\mathbf{F}_r$ . Igualmente ocurre con los cambios de variables de estado del tipo  $\mathbf{x} = D\mathbf{y}$  donde  $D$  es una matriz diagonal, (escalados en las variables de estado). A los cambios de variables de grado cero que no sean cambio de escala los llamaremos *no triviales*.

Hay también que destacar que algunos cambios de variables de grado cero no triviales dejan invariante el primer término, esto es:  $\mathbf{G}_r = \mathbf{L}_r^{(0)}(\mathbf{P}_0(y)) = \mathbf{F}_r$ , y se pueden utilizar para anular términos de orden superior.

Sería deseable elegir un tipo de forma que no existan, o minimicen, los cambios de variables de grado cero no triviales que dejen invariante  $\mathbf{F}_r$ . Otra característica a tener en cuenta es minimizar los núcleos del operador homológico

que obtiene la forma normal. Al tratar numerosos ejemplos hemos encontrado que en la medida de que  $\mathbf{F}_r$  tenga más monomios, los núcleos del operador homológico son de menor dimensión. Algo análogo ocurre con los cambios de variables de grado cero que dejan invariante  $\mathbf{F}_r$ , cuantos más monomios tenga  $\mathbf{F}_r$ , menos cambios de variables de grado cero no triviales que dejen invariante  $\mathbf{F}_r$  habrá.

La forma hipernormal, esto es, la máxima simplificación a orden infinito, se consigue con cualquier elección del tipo. Sin embargo esto no se tiene cuando se pretende obtener la máxima simplificación a orden  $(N)$ . Sería deseable tomar el tipo

$$\mathbf{t}_0 = \min_{\mathbf{t} \in \mathbb{N}^n} \left\{ \dim \left( \bigoplus_{k=1}^{N-r_{\mathbf{t}}} \text{Ker}(\mathcal{L}_{r_{\mathbf{t}}+k}) \right) \right\},$$

donde  $r_{\mathbf{t}}$  es el grado cuasihomogéneo del primer término del campo  $\mathbf{F}$  respecto al tipo  $\mathbf{t}$ .

La situación ideal sería aquella en que  $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}^{(1)})) = 0$ , para todo  $k$ ; en cuyo caso la forma hipernormal coincidiría con la forma normal.

### 1.5.2. Ejemplo

A modo de ejemplo veamos la elección del tipo para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots, \\ \dot{y} &= b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots \quad \text{donde } b_{20} \neq 0. \end{aligned} \tag{1.5.28}$$

Consideraremos diversos tipos:

#### (a) tipo homogéneo

Tomando el tipo homogéneo, el sistema se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{pmatrix} + \dots$$

En la figura 1.2 están representados los diferentes campos homogéneos.

Los cambios de variables de grado cero  $u = \alpha_1x + \alpha_2y$ ,  $v = \beta_1x + \beta_2y$ , con  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ , que dejan invariante el primer término  $\mathbf{F}_0 = (y, 0)^T$  son

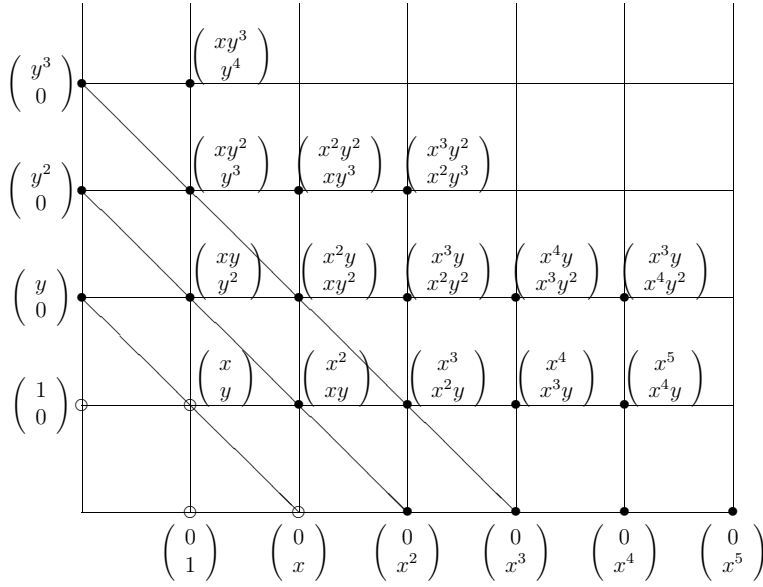


Figura 1.2: Representación de los campos vectoriales cuasihomogéneos de tipo  $(1, 1)$  y grados  $0, 1, \dots$

aquellos tales que  $\beta_1 = 0$  y  $\beta_2 = \alpha_1$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ . Por tanto, dichos cambios de variables son  $u = x + \alpha_2 y$ ,  $v = y$ .

**(b) tipo  $\mathbf{t} = (1, 3)$**

Tomando el tipo  $\mathbf{t} = (1, 3)$ , el sistema se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{20}x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_{30}x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{20}x^2 \\ b_{40}x^4 + b_{11}xy \end{pmatrix} + \dots$$

(Véase Figura 1.3).

Los cambios de variables de grado cero:  $u = \alpha_1 x$ ,  $v = \beta_1 x^3 + \beta_2 y$ , con  $\alpha_1 \beta_2 \neq 0$ , que dejan invariante el primer término cuasihomogéneo  $\mathbf{F}_{-1} = (0, b_{20}x^2)^T$  son aquellos tales que  $\beta_2 = \alpha_1^2$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ . Por tanto dichos cambios son  $u = x$ ,  $v = \beta_1 x^3 + y$ .

**(c) tipo  $\mathbf{t} = (2, 3)$**

Tomando el tipo  $\mathbf{t} = (2, 3)$ , el sistema se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ b_{20}x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{20}x^2 \\ b_{11}xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}xy \\ b_{30}x^3 + b_{02}y^2 \end{pmatrix} + \dots$$

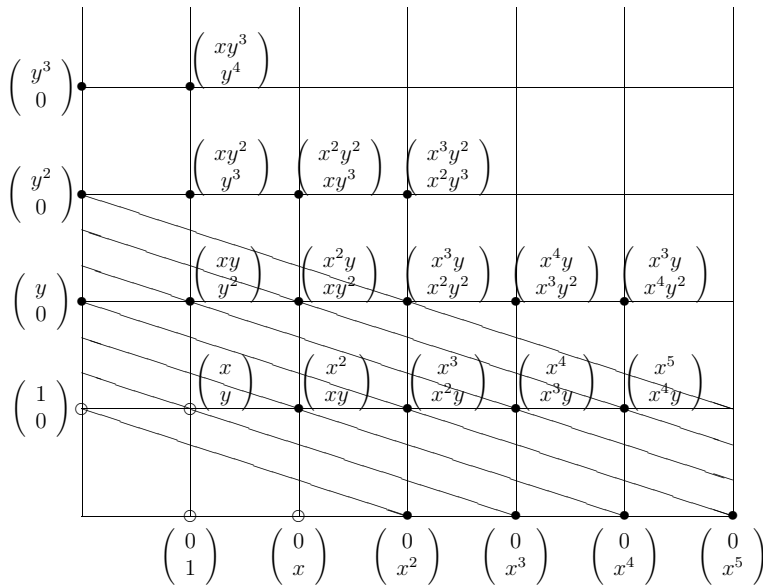


Figura 1.3: Representación de los campos vectoriales cuasihomogéneos de tipo  $(1, 3)$  y grados  $-1, 0, 1, 2, \dots$

(véase Figura 1.4).

Los cambios de variables de grado cero  $u = \alpha_1 x$ ,  $v = \beta_2 y$ , (con  $\alpha_1 \beta_2 \neq 0$ ) que dejan invariante el primer término cuasihomogéneo  $\mathbf{F}_1 = (y, b_{20} x^2)^T$  son aquellos tales que  $\beta_2 = \alpha_1 = 1$ . Por tanto, dichos cambios son todos triviales.

**Nota:** Como se puede apreciar, el tipo más adecuado es  $\mathbf{t} = (2, 3)$  no sólo porque coincide con el tipo de la parte principal del sistema (1.6), sino también porque con esta elección no existen cambios de variables de grado cero que dejen invariante el primer término cuasihomogéneo.

En la siguiente sección veremos que la elección de este tipo también reduce el tamaño de los co-rangos que caracterizan la correspondiente forma normal.



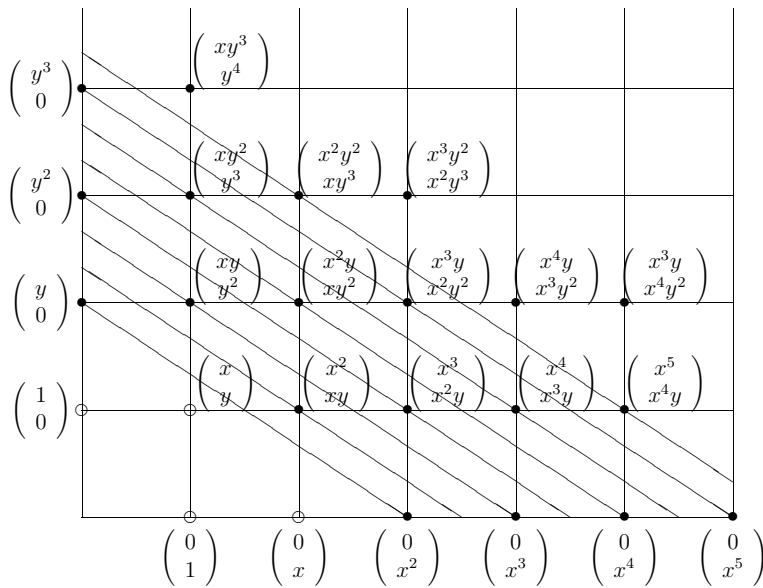


Figura 1.4: Representación de los campos vectoriales cuasihomogéneos de tipo  $(2, 3)$  y grados  $1, 2, \dots$

## 1.6. Estudio de un caso de la singularidad de Takens-Bogdanov

Vamos a aplicar las ideas de la teoría de formas normales cuasihomogéneas al sistema (1.5.28), bajo la hipótesis  $b_{20} \neq 0$ . Mediante un escalado, podemos conseguir  $b_{20} = 1$ .

Es bien conocido que una forma normal de la singularidad Takens-Bogdanov es de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \sum_{l=2}^{\infty} (a_l x^l + b_l x^{l-1} y). \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

Veremos que la forma normal, usando desarrollos cuasihomogéneos, resulta ser más simple que la anterior.

Si fijamos el tipo  $\mathbf{t} = (2, 3)$ , la parte principal cuasihomogénea es  $\mathbf{F}_1 = y\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2$ , cuyo grado es  $r = 1$  (véase Figura 1.5).

Notemos que  $\mathbf{F}_1$  es un campo vectorial hamiltoniano, con función de Ha-

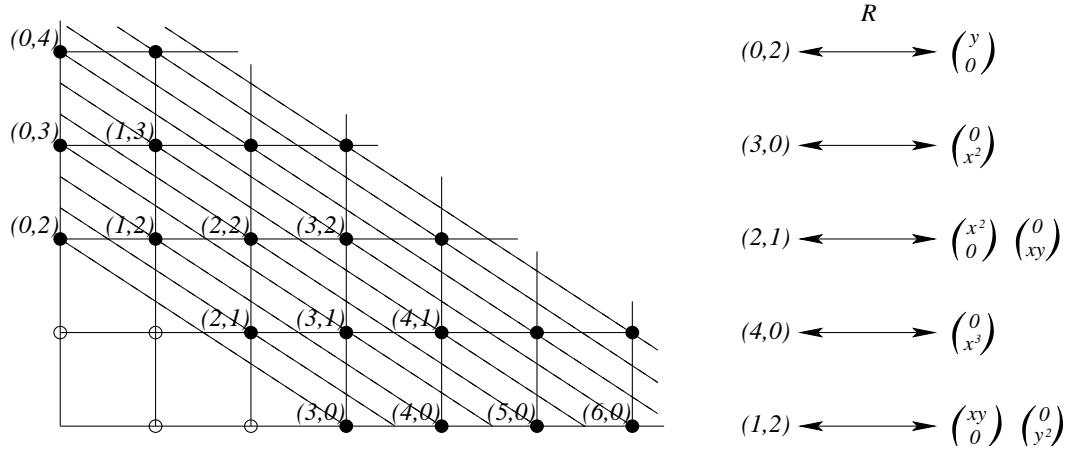


Figura 1.5: polígono de Newton de campos vectoriales cuasihomogéneos de tipo  $(2, 3)$  y grados  $1, 2, \dots$

milton  $h(x, y) = \frac{1}{6}(2x^3 - 3y^2)$ . En lo que sigue, denotaremos

$$u = 2x^3 - 3y^2.$$

También, denotaremos  $\mathbf{D}_0 = 2x\mathbf{e}_1 + 3y\mathbf{e}_2$ . Es fácil probar que  $\mathbf{D}_0$  es un campo vectorial cuasihomogéneo del tipo  $\mathbf{t}$  y grado 0. Más aún, se puede comprobar que  $[\mathbf{D}_0, \mathbf{F}_1] = -\mathbf{F}_1$ .

Es fácil ver que el desarrollo cuasihomogéneo del campo vectorial respecto del tipo  $\mathbf{t} = (2, 3)$  es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{20}x^2 \\ b_{11}xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}xy \\ b_{30}x^3 + b_{02}y^2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} a_{30}x^3 + a_{02}y^2 \\ b_{21}x^2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{21}x^2y \\ b_{40}x^4 + b_{12}xy^2 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

De hecho, se puede comprobar que las bases canónicas de los espacios  $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$  son:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{6l}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{ x^{3j+1}y^{2l-2j}\mathbf{e}_1; x^{3j}y^{2l-2j+1}\mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l \}, \\ \mathcal{Q}_{6l+1}^{\mathbf{p}} &= \text{span} \{ x^{3j}y^{2l-2j+1}\mathbf{e}_1; x^{3j+2}y^{2l-2j}\mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l \}, \\ \mathcal{Q}_{6l+2}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{ x^{3j+2}y^{2l-2j}\mathbf{e}_1; x^{3j+1}y^{2l-2j+1}\mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l \}, \\ \mathcal{Q}_{6l+3}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{ x^{3j+1}y^{2l-2j+1}\mathbf{e}_1; x^{3j}y^{2l-2j+2}\mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l; x^{3l+3}\mathbf{e}_2 \}, \\ \mathcal{Q}_{6l+4}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{ x^{3j}y^{2l-2j+2}\mathbf{e}_1; x^{3j+2}y^{2l-2j+1}\mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l; x^{3l+3}\mathbf{e}_1 \}, \\ \mathcal{Q}_{6l+5}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{ x^{3j+2}y^{2l-2j+1}\mathbf{e}_1; x^{3j+1}y^{2l-2j+2}\mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l; x^{3l+4}\mathbf{e}_2 \}. \end{aligned} \quad (1.6.30)$$

Más aún, para las funciones escalares cuasihomogéneas del tipo  $\mathbf{t}$  tenemos las siguientes bases:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{6l}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{x^{3j}y^{2l-2j} : j = 0, \dots, l\} \\
&= \text{span} \{x^{3j}u^{l-j} : j = 0, \dots, l\}, \\
\mathcal{P}_{6l+1}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{x^{3j+2}y^{2l-2j-1} : j = 0, \dots, l-1\} \\
&= \text{span} \{x^{3j+2}yu^{l-j-1} : j = 0, \dots, l-1\}, \\
\mathcal{P}_{6l+2}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{x^{3j+1}y^{2l-2j} : j = 0, \dots, l\} \\
&= \text{span} \{x^{3j+1}u^{l-j} : j = 0, \dots, l\}, \\
\mathcal{P}_{6l+3}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{x^{3j}y^{2l-2j+1} : j = 0, \dots, l\} \\
&= \text{span} \{x^{3j}yu^{l-j} : j = 0, \dots, l\}, \\
\mathcal{P}_{6l+4}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{x^{3j+2}y^{2l-2j} : j = 0, \dots, l\} \\
&= \text{span} \{x^{3j+2}u^{l-j} : j = 0, \dots, l\}, \\
\mathcal{P}_{6l+5}^{\mathbf{t}} &= \text{span} \{x^{3j+1}y^{2l-2j+1} : j = 0, \dots, l\} \\
&= \text{span} \{x^{3j+1}yu^{l-j} : j = 0, \dots, l\}.
\end{aligned} \tag{1.6.31}$$

### 1.6.1. Forma normal bajo $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación

Para analizar el operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_k &: \mathcal{Q}_{k-1}^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} \\
&\quad \mathbf{P}_{k-1} \rightarrow [\mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{F}_1],
\end{aligned}$$

el procedimiento es como sigue: En primer lugar, seleccionaremos bases adecuadas en  $\mathcal{Q}_{k-1}^{\mathbf{t}}$ ,  $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$ . A continuación, computaremos la imagen de un elemento arbitrario de  $\mathcal{Q}_{k-1}^{\mathbf{t}}$  (expresado en la base seleccionada). Entonces, obtenemos  $\text{Ker}(\mathbf{L}_k)$ . Usando que

$$\dim(\text{Cor}(\mathbf{L}_k)) = \dim(\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}) - \dim(\mathcal{Q}_{k-1}^{\mathbf{t}}) + \dim(\text{Ker}(\mathbf{L}_k)), \tag{1.6.32}$$

computaremos la dimensión de  $\text{Cor}(\mathbf{L}_k)$ . En todos los casos, esta dimensión resultará ser cero o uno. En el primer caso, deducimos que  $\text{Cor}(\mathbf{L}_k) = \{0\}$ . Si la dimensión es uno, basta determinar un elemento que no pertenezca a la imagen del operador homológico para obtener  $\text{Cor}(\mathbf{L}_k)$ .

Analizaremos en primer lugar los casos  $k = 2, 3$ :

- Caso  $k = 2$ : En lugar de la base dada en (1.6.30), tomamos:

$$\mathcal{Q}_1^t = \text{span} \{ \mathbf{F}_1; x^2 \mathbf{e}_2 \}, \quad \mathcal{Q}_2^t = \text{span} \{ x \mathbf{D}_0; xy \mathbf{e}_2 \}.$$

Los elementos en  $\mathcal{Q}_1^t$  son de la forma

$$\mathbf{P}_1 = \alpha \mathbf{F}_1 + \beta x^2 \mathbf{e}_2. \quad (1.6.33)$$

Es fácil probar que

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{P}_1) = \frac{\beta}{2} x \mathbf{D}_0 - \frac{7\beta}{2} xy \mathbf{e}_2.$$

Entonces,  $\text{Ker}(\mathbf{L}_2) = \text{span} \{ \mathbf{F}_1 \}$ . De (1.6.32) concluimos que  $\dim(\text{Cor}(\mathbf{L}_2)) = 1$ . Presentamos dos posibles subespacios complementarios al espacio imagen de  $\mathbf{L}_2$ :

$$\text{Cor}_1(\mathbf{L}_2) = \text{span} \{ x \mathbf{D}_0 \}, \quad \text{y} \quad \text{Cor}_2(\mathbf{L}_2) = \text{span} \{ xy \mathbf{e}_2 \}.$$

- Caso  $k = 3$ : Tomando las bases:

$$\mathcal{Q}_2^t = \text{span} \{ x \mathbf{D}_0; x^2 \mathbf{e}_1 \}, \quad \mathcal{Q}_3^t = \text{span} \{ x \mathbf{F}_1; x^3 \mathbf{e}_2; u \mathbf{e}_2 \},$$

podemos escribir los elementos en  $\mathcal{Q}_2^t$  como

$$\mathbf{P}_2 = \alpha x \mathbf{D}_0 + \beta x^2 \mathbf{e}_1. \quad (1.6.34)$$

Después de algunos cálculos, obtenemos

$$\mathbf{L}_3(\mathbf{P}_2) = (3\alpha + 2\beta)x \mathbf{F}_1 - \alpha u \mathbf{e}_2 - 4\beta x^3 \mathbf{e}_2.$$

De esta expresión, deducimos que  $\text{Ker}(\mathbf{L}_3) = \text{span} \{ 0 \}$  y usando (1.6.32) se tiene que  $\dim(\text{Cor}(\mathbf{L}_3)) = 1$ . Es fácil probar que dos espacios complementarios a  $\text{Im}(\mathbf{L}_3)$  son

$$\text{Cor}_1(\mathbf{L}_3) = \text{span} \{ u \mathbf{e}_2 \}, \quad \text{y} \quad \text{Cor}_2(\mathbf{L}_3) = \text{span} \{ x^3 \mathbf{e}_2 \}.$$

- Caso  $k = 6l + 1$ , con  $l \geq 1$ : En lugar de las bases canónicas, tomamos las siguientes bases:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{6l}^t &= \text{span} \left\{ \begin{array}{l} x^{3j+1} y u^{l-j-1} \mathbf{F}_1 : j = 0, \dots, l-1; u^l \mathbf{D}_0; \\ x^{3j} y u^{l-j} \mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l \end{array} \right\}, \\ \mathcal{Q}_{6l+1}^t &= \text{span} \{ x^{3j} u^{l-j} \mathbf{F}_1 : j = 0, \dots, l; x^{3j+2} u^{l-j} \mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l \}. \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir los elementos de  $\mathcal{Q}_{6l}^t$  como

$$\mathbf{P}_{6l} = p_{6l}(x, y)\mathbf{F}_1 + \alpha u^l \mathbf{D}_0 + q_{6l}(x, y)\mathbf{e}_2, \quad (1.6.35)$$

donde  $p_{6l}(x, y) = \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j x^{3j+1} y u^{l-j-1}$ ,  $q_{6l}(x, y) = \sum_{j=0}^l \beta_j x^{3j} y u^{l-j}$ .

Después de algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{6l+1}(p_{6l}(x, y)\mathbf{F}_1) &= \frac{\alpha_0}{3} u^l \mathbf{F}_1 + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\alpha_j - 5\alpha_{j-1}}{3} x^{3j} u^{l-j} \mathbf{F}_1 - \frac{5\alpha_{l-1}}{3} x^{3l} \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{L}_{6l+1}(u^l \mathbf{D}_0) &= u^l \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{L}_{6l+1}(q_{6l}(x, y)\mathbf{e}_2) &= \sum_{j=0}^{l-1} (j+1)(\beta_{j+1} - 2\beta_j) x^{3j+2} u^{l-j} \mathbf{e}_2 \\ &\quad - 2(l+1)\beta_l x^{3l+2} \mathbf{e}_2 + \sum_{j=0}^l \beta_j x^{3j} u^{l-j} \mathbf{F}_1. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{6l+1}(\mathbf{P}_{6l}) &= \left(\frac{\alpha_0}{3} + \alpha + \beta_0\right) u^l \mathbf{F}_1 + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\alpha_j - 5\alpha_{j-1} + 3\beta_j}{3} x^{3j} u^{l-j} \mathbf{F}_1 \\ &\quad + \frac{3\beta_l - 5\alpha_{l-1}}{3} x^{3l} \mathbf{F}_1 + \sum_{j=0}^{l-1} (j+1)(\beta_{j+1} - 2\beta_j) x^{3j+2} u^{l-j} \mathbf{e}_2 - 2(l+1)\beta_l x^{3l+2} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

A partir de esta expresión obtenemos fácilmente que  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{6l+1}) = \text{span}\{0\}$ , y usando (1.6.32) obtenemos  $\dim(\text{Cor}(\mathbf{L}_{6l+1})) = 0$ . Es decir:

$$\text{Cor}(\mathbf{L}_{6l+1}) = \text{span}\{0\}.$$

- Caso  $k = 6l + 2$ , con  $l \geq 1$ : Tomando las bases:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{6l+1}^t &= \text{span} \left\{ \begin{array}{l} x^{3j} u^{l-j} \mathbf{F}_1 : j = 0, \dots, l; y u^l \mathbf{e}_1; \\ x^{3j+3} y u^{l-j-1} \mathbf{e}_1 : j = 0, \dots, l-1 \end{array} \right\}, \\ \mathcal{Q}_{6l+2}^t &= \text{span} \left\{ \begin{array}{l} x^{3j+2} y u^{l-j-1} \mathbf{F}_1 : j = 0, \dots, l-1; x u^l \mathbf{D}_0; \\ x^{3j+2} u^{l-j} \mathbf{e}_1 : j = 0, \dots, l \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir los elementos de  $\mathcal{Q}_{6l+1}^t$  como

$$\mathbf{P}_{6l+1} = p_{6l+1}(x, y)\mathbf{F}_1 + \alpha y u^l \mathbf{e}_1 + q_{6l+1}(x, y)\mathbf{e}_1, \quad (1.6.36)$$

donde  $p_{6l+1}(x, y) = \sum_{j=0}^l \alpha_j x^{3j} u^{l-j}$ ,  $q_{6l+1}(x, y) = \sum_{j=0}^{l-1} \beta_j x^{3j+3} y u^{l-j-1}$ .

Después de algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{6l+2}(p_{6l+1}(x, y)\mathbf{F}_1) &= -\sum_{j=0}^{l-1} 3(j+1)\alpha_{j+1}x^{3j+2}yu^{l-j-1}\mathbf{F}_1, \\ \mathbf{L}_{6l+2}(yu^l\mathbf{e}_1) &= \frac{2}{3}xu^l\mathbf{D}_0 - \frac{7}{3}x^2u^l\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{L}_{6l+2}(q_{6l+1}(x, y)\mathbf{e}_1) &= \frac{5\beta_0}{3}x^2u^l\mathbf{e}_1 + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(3j+5)\beta_j - (6j+7)\beta_{j-1}}{3}x^{3j+2}u^{l-j}\mathbf{e}_1 \\ &\quad - \frac{(6l+13)\beta_{l-1}}{3}x^{3l+2}\mathbf{e}_1 + \sum_{j=0}^{l-1} 2\beta_j x^{3j+2}yu^{l-j-1}\mathbf{F}_1. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{6l+2}(\mathbf{P}_{6l+1}) &= -\frac{7\alpha-5\beta_0}{3}x^2u^l\mathbf{e}_1 + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(3j+5)\beta_j - (6j+7)\beta_{j-1}}{3}x^{3j+2}u^{l-j}\mathbf{e}_1 \\ &\quad - \frac{(6l+13)\beta_{l-1}}{3}x^{3l+2}\mathbf{e}_1 + \frac{2\alpha}{3}xu^l\mathbf{D}_0 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{l-1} (2\beta_j - 3(j+1)\alpha_{j+1})x^{3j+2}yu^{l-j}\mathbf{F}_1. \end{aligned}$$

Utilizando esta expresión obtenemos que  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{6l+2}) = \text{span}\{u^l\mathbf{F}_1\}$ . Y de (1.6.32) deducimos que  $\dim(\text{Cor}(\mathbf{L}_{6l+2})) = 1$ . De la misma expresión es fácil deducir que dos espacios complementarios al espacio imagen del operador homológico son

$$\text{Cor}_1(\mathbf{L}_{6l+2}) = \text{span}\{xu^l\mathbf{D}_0\}, \quad \text{y} \quad \text{Cor}_2(\mathbf{L}_{6l+2}) = \text{span}\{x^{3l+1}y\mathbf{e}_2\}.$$

- Caso  $k = 6l + 3$ , con  $l \geq 1$ : Tomando las bases:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{6l+2}^t &= \text{span} \left\{ \begin{array}{l} x^{3j+2}yu^{l-j-1}\mathbf{F}_1 : j = 0, \dots, l-1; xu^l\mathbf{D}_0; \\ x^{3j+2}u^{l-j}\mathbf{e}_1 : j = 0, \dots, l \end{array} \right\}, \\ \mathcal{Q}_{6l+3}^t &= \text{span} \left\{ \begin{array}{l} x^{3j+1}u^{l-j}\mathbf{F}_1 : j = 0, \dots, l; \\ x^{3j}u^{l-j+1}\mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l+1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir los elementos de  $\mathcal{Q}_{6l+2}^t$  como

$$\mathbf{P}_{6l+2} = p_{6l+2}(x, y)\mathbf{F}_1 + \alpha xu^l\mathbf{D}_0 + q_{6l+2}(x, y)\mathbf{e}_1, \quad (1.6.37)$$

donde  $p_{6l+2}(x, y) = \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j x^{3j+2} y u^{l-j-1}$ ,  $q_{6l+2}(x, y) = \sum_{j=0}^l \beta_j x^{3j+2} u^{l-j}$ . Después de algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{6l+3}(p_{6l+2}(x, y)\mathbf{F}_1) &= -\frac{2\alpha_0}{3} x u^l \mathbf{F}_1 + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(6j+1)\alpha_{j-1} - (3j+2)\alpha_j}{3} x^{3j+1} u^{l-j} \mathbf{F}_1 \\ &\quad + (6l+1)\alpha_{l-1} x^{3l+1} \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{L}_{6l+3}(x u^l \mathbf{D}_0) &= 3x u^l \mathbf{F}_1 - u^{l+1} \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{L}_{6l+3}(q_{6l+2}(x, y)\mathbf{e}_1) &= \sum_{j=0}^l (3j+2)\beta_j x^{3j+1} u^{l-j} \mathbf{F}_1 \\ &\quad - \sum_{j=1}^{l+1} (3j+1)\beta_{j-1} x^{3j} u^{l-j+1} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{6l+3}(\mathbf{P}_{6l+2}) &= \frac{9\alpha - 2\alpha_0 + 6\beta_0}{3} x u^l \mathbf{F}_1 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(6j+1)\alpha_{j-1} - (3j+2)\alpha_j + 3(3j+2)\beta_j}{3} x^{3j+1} u^{l-j} \mathbf{F}_1 \\ &\quad + ((6l+1)\alpha_{l-1} + (3l+2)\beta_l) x^{3l+1} \mathbf{F}_1 \\ &\quad - \alpha u^{l+1} \mathbf{e}_2 - \sum_{j=1}^{l+1} (3j+1)\beta_{j-1} x^{3j} u^{l-j+1} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

De esta expresión obtenemos que  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{6l+3}) = \text{span}\{0\}$ . Usando (1.6.32), obtenemos  $\dim(\text{Cor}(\mathbf{L}_{6l+3})) = 1$ , y dos espacios complementarios a  $\text{Im}(\mathbf{L}_{6l+3})$  son:

$$\text{Cor}_1(\mathbf{L}_{6l+3}) = \text{span}\{u^{l+1} \mathbf{e}_2\}, \quad \text{y} \quad \text{Cor}_2(\mathbf{L}_{6l+3}) = \text{span}\{x^{3l+3} \mathbf{e}_2\}.$$

- Caso  $k = 6l + 4$ , con  $l \geq 0$ : Tomando las bases:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{6l+3}^t &= \text{span}\{x^{3j+1} u^{l-j} \mathbf{F}_1; x^{3j} u^{l-j+1} \mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l; x^{3l+3} \mathbf{e}_2\}, \\ \mathcal{Q}_{6l+4}^t &= \text{span}\{x^{3j} y u^{l-j} \mathbf{F}_1; x^{3j} u^{l-j+1} \mathbf{e}_1 : j = 0, \dots, l; x^{3l+3} \mathbf{e}_1\}, \end{aligned}$$

podemos escribir los elementos de  $\mathcal{Q}_{6l+3}^t$  como

$$\mathbf{P}_{6l+3} = p_{6l+3}(x, y)\mathbf{F}_1 + q_{6l+3}(x, y)\mathbf{e}_2, \quad (1.6.38)$$

donde  $p_{6l+3}(x, y) = \sum_{j=0}^l \alpha_j x^{3j+1} u^{l-j}$ ,  $q_{6l+3}(x, y) = \sum_{j=0}^{l+1} \beta_j x^{3j} u^{l-j+1}$ .  
Después de algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{6l+4}(p_{6l+3}(x, y)\mathbf{F}_1) &= \sum_{j=0}^l (3j-1)\alpha_j x^{3j} y u^{l-j} \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{L}_{6l+4}(q_{6l+3}(x, y)\mathbf{e}_2) &= -\sum_{j=0}^l 3(j+1)\beta_{j+1} x^{3j} y u^{l-j} \mathbf{F}_1 \\ &\quad + \sum_{j=0}^l ((2j+1)\beta_j - (j+1)\beta_{j+1}) x^{3j} u^{l-j+1} \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (2l+3)\beta_{l+1} x^{3(l+1)} \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{6l+4}(\mathbf{P}_{6l+3}) &= -\sum_{j=0}^l ((3j+1)\beta_{j+1} - (3j-1)\alpha_j) x^{3j} y u^{l-j} \mathbf{F}_1 \\ &\quad + \sum_{j=0}^l ((2j+1)\beta_j - (j+1)\beta_{j+1}) x^{3j} u^{l-j+1} \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (2l+3)\beta_{l+1} x^{3(l+1)} \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

De esta expresión es fácil probar que  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{6l+4}) = \text{span}\{0\}$ , y utilizando (1.6.32) deducimos que  $\dim(\text{Cor}(\mathbf{L}_{6l+4})) = 0$ , por tanto

$$\text{Cor}(\mathbf{L}_{6l+4}) = \text{span}\{0\}.$$

- Caso  $k = 6l + 5$ , con  $l \geq 0$ : Tomando las bases:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{6l+4}^t &= \text{span}\{x^{3j} y u^{l-j} \mathbf{F}_1; x^{3j} u^{l-j+1} \mathbf{e}_1 : j = 0, \dots, l; x^{3l+3} \mathbf{e}_1\}, \\ \mathcal{Q}_{6l+5}^t &= \text{span}\{x^{3j+2} u^{l-j} \mathbf{F}_1; x^{3j+1} u^{l-j+1} \mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l; x^{3l+4} \mathbf{e}_2\}, \end{aligned}$$

podemos escribir los elementos de  $\mathcal{Q}_{6l+4}^t$  en la forma

$$\mathbf{P}_{6l+4} = p_{6l+4}(x, y)\mathbf{F}_1 + q_{6l+4}(x, y)\mathbf{e}_1, \quad (1.6.39)$$

donde  $p_{6l+4}(x, y) = \sum_{j=0}^l \alpha_j x^{3j} y u^{l-j}$ ,  $q_{6l+4}(x, y) = \sum_{j=0}^{l+1} \beta_j x^{3j} u^{l-j+1}$ .



Después de algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{6l+5}(p_{6l+4}(x, y)\mathbf{F}_1) &= -\sum_{j=0}^{l-1} ((2j+1)\alpha_j - (j+1)\alpha_{j+1}) x^{3j+2} u^{l-j} \mathbf{F}_1 \\ &\quad - (2l+1)\alpha_l x^{3l+2} \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{L}_{6l+5}(q_{6l+4}(x, y)\mathbf{e}_1) &= -\sum_{j=0}^l 3(j+1)\beta_{j+1} x^{3j+2} u^{l-j} \mathbf{F}_1 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{l+1} (3j+2)\beta_j x^{3j+1} u^{l-j+1} \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{6l+5}(\mathbf{P}_{6l+4}) &= -\sum_{j=0}^{l-1} ((2j+1)\alpha_j - (j+1)\alpha_{j+1} + 3(j+1)\beta_{j+1}) x^{3j+2} u^{l-j} \mathbf{F}_1 \\ &\quad - ((2l+1)\alpha_l + 3(l+1)\beta_{l+1}) x^{3l+2} \mathbf{F}_1 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{l+1} (3j+2)\beta_j x^{3j+1} u^{l-j+1} \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

De esta expresión resulta  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{6l+5}) = \text{span}\{0\}$ . Además de (1.6.32) probamos que  $\text{dim}(\text{Cor}(\mathbf{L}_{6l+5})) = 0$ , y entonces

$$\text{Cor}(\mathbf{L}_{6l+5}) = \text{span}\{0\}.$$

- Caso  $k = 6l + 6$ , con  $l \geq 0$ : En este último caso, tomando las bases:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{6l+5}^t &= \text{span} \left\{ \begin{array}{l} x^{3j+2} y u^{l-j-1} \mathbf{F}_1 : j = 0, \dots, l-1; \\ x^{3j+1} y^2 u^{l-j} \mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l; x u^{l+1} \mathbf{e}_2 \end{array} \right\}, \\ \mathcal{Q}_{6l+6}^t &= \text{span} \left\{ \begin{array}{l} x^{3j+1} y u^{l-j} \mathbf{F}_1 : j = 0, \dots, l; u^{l+1} \mathbf{D}_0; \\ x^{3j} y u^{l-j+1} \mathbf{e}_2 : j = 0, \dots, l+1 \end{array} \right\},\end{aligned}$$

podemos escribir los elementos de  $\mathcal{Q}_{6l+5}^t$  en la forma

$$\mathbf{P}_{6l+5} = p_{6l+5}(x, y)\mathbf{F}_1 + q_{6l+5}(x, y)\mathbf{e}_2 + \alpha x u^{l+1} \mathbf{e}_2, \quad (1.6.40)$$

donde  $p_{6l+5}(x, y) = \sum_{j=0}^l \alpha_j x^{3j+2} u^{l-j}$ ,  $q_{6l+5}(x, y) = \sum_{j=0}^l \beta_j x^{3j+1} y^2 u^{l-j}$ .

Después de algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{6l+6}(p_{6l+5}(x, y)\mathbf{F}_1) &= -\sum_{j=0}^l (3j+2)\alpha_j x^{3j+1} y u^{l-j} \mathbf{F}_1, \\
\mathbf{L}_{6l+6}(q_{6l+5}(x, y)\mathbf{e}_2) &= \sum_{j=0}^l \beta_j x^{3j+1} y u^{l-j} \mathbf{F}_1 + \frac{\beta_0}{3} y u^{l+1} \mathbf{e}_2 \\
&\quad + \sum_{j=1}^l \frac{(3j+1)\beta_j - (6j+5)\beta_{j-1}}{3} x^{3j} y u^{l-j+1} \mathbf{e}_2 \\
&\quad - \frac{(6l+11)\beta_l}{3} x^{3(l+1)} y \mathbf{e}_2, \\
\mathbf{L}_{6l+6}(x u^{l+1} \mathbf{e}_2) &= \frac{1}{2} u^{l+1} \mathbf{D}_0 - \frac{5}{2} y u^{l+1} \mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{6l+6}(\mathbf{P}_{6l+5}) &= -\sum_{j=0}^l ((3j+2)\alpha_j - \beta_j) x^{3j+1} y u^{l-j} \mathbf{F}_1 + \frac{\alpha}{2} u^{l+1} \mathbf{D}_0 \\
&\quad - \frac{15\alpha - 2\beta_0}{6} y u^{l+1} \mathbf{e}_2 + \sum_{j=1}^l \frac{(3j+1)\beta_j - (6j+5)\beta_{j-1}}{3} x^{3j} y u^{l-j+1} \mathbf{e}_2 \\
&\quad - \frac{(6l+11)\beta_l}{3} x^{3(l+1)} y \mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

A partir de esta expresión, obtenemos  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{6l+6}) = \text{span}\{0\}$ . Además  $\dim(\text{Cor}(\mathbf{L}_{6l+6})) = 1$  (véase (1.6.32)), y dos espacios complementarios al espacio imagen del operador homológico son

$$\text{Cor}_1(\mathbf{L}_{6l+6}) = \text{span}\{u^{l+1} \mathbf{D}_0\}, \quad \text{y} \quad \text{Cor}_2(\mathbf{L}_{6l+6}) = \text{span}\{x^{3l+3} y \mathbf{e}_2\}.$$

Utilizando cada uno de los espacios complementarios al espacio imagen del operador homológico ( $\text{Cor}_1$  y  $\text{Cor}_2$ ), determinados en cada uno de los casos considerados anteriormente, conseguimos diferentes formas normales. En el primer caso, tenemos:

**Teorema 1.6.19** *Una forma normal para el sistema (1.5.28) bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación es:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty} (c_l x u^l \mathbf{D}_0 + c'_l u^{l+1} \mathbf{e}_2 + c''_l u^{l+1} \mathbf{D}_0). \quad (1.6.41)$$

En el segundo caso, tenemos:

**Teorema 1.6.20** *Una forma normal para el sistema (1.5.28) bajo  $C^\infty$ -conjugación es:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x^2 + \sum_{l=0}^{\infty} (b_{3l+2}x^{3l+1}y + a_{3l+3}x^{3l+3} + b_{3l+4}x^{3l+3}y).\end{aligned}\tag{1.6.42}$$

Comparando la anterior forma normal con (1.6.29), observamos que el número de monomios ha sido reducido en gran medida.

### 1.6.2. Forma normal bajo $C^\infty$ -equivalencia

Aplicaremos las anteriores ideas para el caso de la singularidad Takens-Bogdanov considerada en la Subsección 1.6.1. Como comentamos en la Sección 1.3.5, en primer lugar calculamos un espacio complementario al espacio imagen del operador lineal

$$\begin{aligned}\ell_{k-1} &: \mathcal{P}_{k-2}^t \longrightarrow \mathcal{P}_{k-1}^t \\ &f_{k-2} \rightarrow \nabla f_{k-2} \cdot \mathbf{F}_1.\end{aligned}$$

Como antes, escribiremos los elementos de  $\mathcal{P}_{k-2}^t$  usando las bases dadas en (1.6.31). A continuación, calculamos la imagen de un elemento arbitrario, y entonces obtenemos el núcleo de  $\ell_{k-1}$ . Como

$$\dim(\text{Cor}(\ell_{k-1})) = \dim(\mathcal{P}_{k-1}^t) - \dim(\mathcal{P}_{k-2}^t) + \dim(\text{Ker}(\ell_{k-1})),\tag{1.6.43}$$

conocemos  $\dim(\text{Cor}(\ell_{k-1}))$ , el cual resulta ser siempre cero o uno. En este último caso, obtenemos  $\text{Cor}(\ell_{k-1})$  encontrando un elemento que no pertenezca a  $\text{Im}(\ell_{k-1})$ .

- Caso  $k = 2$ : Este caso es trivial porque  $\mathcal{P}_0^t = \text{span}\{1\}$ ,  $\mathcal{P}_1^t = \{0\}$ . Entonces:  $\text{Ker}(\ell_1) = \text{span}\{0\}$ , y

$$\text{Cor}(\ell_1) = \text{span}\{0\}.$$

- Caso  $k = 3$ : Ahora,  $\mathcal{P}_1^t = \{0\}$  y  $\mathcal{P}_2^t = \text{span}\{x\}$ . Es fácil mostrar que

$$\text{Cor}(\ell_2) = \text{span}\{x\}.$$

- Caso  $k = 6l + 1$ , con  $l \geq 1$ : Los elementos arbitrarios en  $\mathcal{P}_{6l-1}^t$  son de la forma  $\mu_{6l-1}(x, y) = \sum_{j=0}^{l-1} \gamma_j x^{3j+1} y u^{l-j-1}$ . Después de algunos cálculos, obtenemos:

$$\ell_{6l}(\mu_{6l-1}(x, y)) = -\frac{\gamma_0}{3} u^l + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(6j-1)\gamma_{j-1} - 4\gamma_j}{3} x^{3j} u^{l-j} + \frac{(6l-1)\gamma_{l-1}}{3} x^{3l}.$$

De aquí, deducimos que  $\text{Ker}(\ell_{6l}) = \{0\}$ . Utilizando (1.6.43), se tiene  $\dim(\text{Cor}(\ell_{6l})) = 1$ . Puesto que  $u^l$  no pertenece a  $\text{Im}(\ell_{6l})$ , un espacio complementario al espacio imagen de  $\ell_{6l}$  es

$$\text{Cor}(\ell_{6l}) = \text{span}\{u^l\}.$$

- Caso  $k = 6l + 2$ , con  $l \geq 1$ : Podemos escribir los elementos de  $\mathcal{P}_{6l}^t$  en la forma  $\mu_{6l}(x, y) = \sum_{j=0}^l \gamma_j x^{3j} u^{l-j}$ . En este caso, se obtiene

$$\ell_{6l+1}(\mu_{6l}) = \sum_{j=0}^{l-1} 3(j+1)\gamma_{j+1} x^{3j+2} y u^{l-j-1}.$$

Entonces,  $\text{Ker}(\ell_{6l+1}) = \text{span}\{u^l\}$ . Además, utilizando (1.6.43), deducimos que  $\dim(\text{Cor}(\ell_{6l+1})) = 0$ , por lo que

$$\text{Cor}(\ell_{6l+1}) = \text{span}\{0\}.$$

- Caso  $k = 6l + 3$ , con  $l \geq 1$ : podemos escribir los elementos de  $\mathcal{P}_{6l+1}^t$  como  $\mu_{6l+1}(x, y) = \sum_{j=0}^{l-1} \gamma_j x^{3j+2} y u^{l-j-1}$ . Después de algunos cálculos, se obtiene

$$\ell_{6l+2}(\mu_{6l+1}) = -\frac{2\gamma_0}{3} x u^l + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(6j+1)\gamma_{j-1} - (3j+2)\gamma_j}{3} x^{3j+1} u^{l-j} + \frac{(6l-1)\gamma_{l-1}}{3} x^{3l+1}.$$

En consecuencia  $\text{Ker}(\ell_{6l+2}) = \{0\}$ . Por lo tanto,  $\dim(\text{Cor}(\ell_{6l+2})) = 1$ . Como  $xu^l$  no pertenece al espacio  $\text{Im}(\ell_{6l+2})$ , concluimos que un subespacio complementario a  $\text{Im}(\ell_{6l+2})$  es

$$\text{Cor}(\ell_{6l+2}) = \text{span}\{x u^l\}.$$

- Caso  $k = 6l + 4$ , con  $l \geq 0$ : Los elementos de  $\mathcal{P}_{6l+2}^t$  se pueden escribir como  $\mu_{6l+2}(x, y) = \sum_{j=0}^l \gamma_j x^{3j+1} u^{l-j}$ . En este caso obtenemos

$$\ell_{6l+3}(\mu_{6l+2}) = \sum_{j=0}^l (3j+1) \gamma_j x^{3j} y u^{l-j}.$$

A partir de aquí, resulta  $\text{Ker}(\ell_{6l+3}) = \text{span}\{0\}$ . Por tanto  $\dim(\text{Cor}(\ell_{6l+3})) = 0$ , y entonces

$$\text{Cor}(\ell_{6l+3}) = \text{span}\{0\}.$$

- Caso  $k = 6l + 5$ , con  $l \geq 0$ : Los elementos en  $\mathcal{P}_{6l-1}^t$  son de la forma  $\mu_{6l+3}(x, y) = \sum_{j=0}^l \gamma_j x^{3j} y u^{l-j}$ . En este caso, obtenemos

$$\ell_{6l+4}(\mu_{6l+3}) = \sum_{j=0}^{l-1} ((2j+1)\gamma_j - (j+1)\gamma_{j+1}) x^{3j+2} u^{l-j} + (l+1)\gamma_l x^{3l+2}.$$

Utilizando esta expresión, podemos comprobar que  $\text{Ker}(\ell_{6l+4}) = \{0\}$ . Además,  $\dim(\text{Cor}(\ell_{6l+4})) = 0$ , y por tanto

$$\text{Cor}(\ell_{6l+4}) = \text{span}\{0\}.$$

- Caso  $k = 6l + 6$ , con  $l \geq 0$ : podemos escribir los elementos en  $\mathcal{P}_{6l-1}^t$  como  $\mu_{6l+4}(x, y) = \sum_{j=0}^l \gamma_j x^{3j+2} u^{l-j}$ . En este caso:

$$\ell_{6l+5}(\mu_{6l+4}) = \sum_{j=0}^l (3j+2) \gamma_j x^{3j+1} y u^{l-j}.$$

A partir de aquí deducimos que  $\text{Ker}(\ell_{6l+5}) = \text{span}\{0\}$ , y por tanto  $\dim(\text{Cor}(\ell_{6l+5})) = 0$ . Es decir;

$$\text{Cor}(\ell_{6l+5}) = \text{span}\{0\}.$$

Una vez hemos determinado  $\text{Cor}(\ell_{k-1})$ , estudiamos el operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k &: \mathcal{Q}_{k-1}^t \times \text{Cor}(\ell_{k-1}) \longrightarrow \mathcal{Q}_k^t \\ &(\mathbf{P}_{k-1}, \mu_{k-1}) \rightarrow \mathbf{L}_{k-1}(\mathbf{P}_{k-1}) + \mu_{k-1} \mathbf{F}_1. \end{aligned}$$

Con este fin, escribimos  $\mathbf{P}_{k-1}$  como en la subsección previa y expresamos  $\mu_{k-1}$  en las bases anteriores de  $\text{Cor}(\ell_{k-1})$ . Una vez hemos expresado  $(\mathbf{P}_{k-1}, \mu_{k-1})$  convenientemente, calculamos su imagen. Esto permite determinar  $\text{Ker}(\mathcal{L}_k)$ . Usando que

$$\dim(\text{Cor}(\mathcal{L}_k)) = \dim(\mathcal{Q}_k^t) - \dim(\mathcal{Q}_{k-1}^t) - \dim(\text{Cor}(\ell_{k-1})) + \dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_k)), \quad (1.6.44)$$

podemos hallar un subespacio complementario a  $\text{Im}(\mathcal{L}_k)$ . Analizamos los diferentes casos:

- Caso  $k = 2$ : escribimos  $\mathbf{P}_1$  como en (1.6.33) y  $\mu_1 = 0 \in \text{Cor}(\ell_1)$ . Entonces, los operadores homológicos bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia  $\mathcal{L}_{6l+2}$  y  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación  $\mathbf{L}_{6l+2}$  coinciden en este caso. En particular, deducimos que  $\text{Ker}(\mathcal{L}_2) = \text{span}\{(\mathbf{F}_1, 0)\}$ , y también que dos subespacios complementarios son

$$\text{Cor}_1(\mathcal{L}_2) = \text{span}\{x\mathbf{D}_0\}, \quad \text{y} \quad \text{Cor}_2(\mathcal{L}_2) = \text{span}\{xy\mathbf{e}_2\}.$$

- Caso  $k = 3$ : escribimos  $\mathbf{P}_2$  como en (1.6.34) y  $\mu_2 = \gamma x \in \text{Cor}(\ell_2)$ . Después de algunos cálculos, obtenemos

$$\mathcal{L}_3(\mathbf{P}_2, \mu_2) = (3\alpha + 2\beta + \gamma)x\mathbf{F}_1 - \alpha u\mathbf{e}_2 - 4\beta x^3\mathbf{e}_2.$$

De esta expresión, obtenemos  $\text{Ker}(\mathcal{L}_3) = \{(0, 0)\}$ . Usando (1.6.44), deducimos que  $\dim(\text{Cor}(\mathcal{L}_3)) = 0$ , así que

$$\text{Cor}(\mathcal{L}_3) = \{0\}.$$

- Caso  $k = 6l + 1$ , con  $l \geq 1$ : Ahora, escribimos  $\mathbf{P}_{6l}$  como en (1.6.35) y  $\mu_{6l} = \gamma u^l \in \text{Cor}(\ell_{6l})$ . Es fácil ver que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{6l+1}(\mathbf{P}_{6l}, \mu_{6l}) &= \left(\frac{\alpha_0}{3} + \alpha + \beta_0 + \gamma\right) u^l \mathbf{F}_1 + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{3\beta_j + \alpha_j - 5\alpha_{j-1}}{3} x^{3j} u^{l-j} \mathbf{F}_1, \\ &+ \frac{3\beta_l - 5\alpha_{l-1}}{3} x^{3l} \mathbf{F}_1 + \sum_{j=0}^{l-1} (j+1)(\beta_{j+1} - 2\beta_j) x^{3j+2} u^{l-j} \mathbf{e}_2 \\ &- 2(l+1)\beta_l x^{3l+2} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

De esta expresión, obtenemos  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{6l+1}) = \text{span}\{(u^l \mathbf{D}_0, -u^l)\}$ . También, de (1.6.44), resulta  $\dim(\text{Cor}(\mathcal{L}_{6l+1})) = 0$ , y entonces

$$\text{Cor}(\mathcal{L}_{6l+1}) = \{0\}.$$

- Caso  $k = 6l + 2$ , con  $l \geq 1$ : Escribimos  $\mathbf{P}_{6l+2}$  como en (1.6.36) y  $\mu_{6l+2} = 0 \in \text{Cor}(\ell_{6l+2})$ . Por tanto, el operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia  $\mathcal{L}_{6l+2}$  coincide con el de  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación. En particular, deducimos  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{6l+2}) = \text{span}\{(u^l \mathbf{F}_1, 0)\}$ , y dos subespacios complementarios son

$$\text{Cor}_1(\mathcal{L}_{6l+2}) = \text{span}\{xu^l \mathbf{D}_0\}, \quad \text{y} \quad \text{Cor}_2(\mathcal{L}_{6l+2}) = \text{span}\{x^{3l+1}y \mathbf{e}_2\}.$$

- Caso  $k = 6l + 3$ , con  $l > 0$ : Escribimos  $\mathbf{P}_{6l+3}$  como en (1.6.37) y  $\mu_{6l+3} = \gamma xu^l \in \text{Cor}(\ell_{6l+3})$ . Tras algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{6l+3}(\mathbf{P}_{6l+3}, \mu_{6l+3}) &= \frac{9\alpha - 2\alpha_0 + 6\beta_0 + 3\gamma}{3} xu^l \mathbf{F}_1 \\ &+ \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(6j+1)\alpha_{j-1} - (3j+2)\alpha_j + 3(3j+2)\beta_j}{3} x^{3j+1} u^{l-j} \mathbf{F}_1 \\ &+ ((6l+1)\alpha_{l-1} + (3l+2)\beta_l) x^{3l+1} \mathbf{F}_1 - \alpha u^{l+1} \mathbf{e}_2 \\ &- \sum_{j=1}^{l+1} (3j+1)\beta_{j-1} x^{3j} u^{l-j+1} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

De esta expresión, deducimos que  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{6l+3}) = \{(0, 0)\}$ . Además, de (1.6.44) se obtiene  $\dim(\text{Cor}(\mathcal{L}_{6l+3})) = 0$ , y entonces

$$\text{Cor}(\mathcal{L}_{6l+3}) = \{0\}.$$

- Casos  $k = 6l + 4, 6l + 5, 6l + 6$ , con  $l \geq 0$ : En estos últimos tres casos, tenemos  $\text{Cor}(\ell_k) = \{0\}$ . Entonces,  $\mathcal{L}_k$  coincide con  $\mathbf{L}_k$ , y podemos utilizar los cálculos anteriores. En particular, deducimos  $\text{Ker}(\mathcal{L}_k) = \{(0, 0)\}$ , en las tres situaciones. Más aún,

$$\text{Cor}(\mathcal{L}_{6l+4}) = \text{Cor}(\mathcal{L}_{6l+5}) = \{0\},$$

mientras que dos espacios complementarios a  $\text{Im}(\mathcal{L}_{6l+6})$  son

$$\text{Cor}_1(\mathcal{L}_{6l+6}) = \text{span}\{u^{l+1} \mathbf{D}_0\}, \quad \text{y} \quad \text{Cor}_2(\mathcal{L}_{6l+6}) = \text{span}\{yx^{3l+3} \mathbf{e}_2\}.$$

Utilizando cada uno de estos espacios complementarios, conseguimos diferentes formas normales bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia.

**Teorema 1.6.21** *Una forma normal para el sistema (1.5.28) utilizando  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia es:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty} (c_{6l+1}xu^l\mathbf{D}_0 + c_{6l+6}u^{l+1}\mathbf{D}_0). \quad (1.6.45)$$

**Teorema 1.6.22** *Una forma normal para el sistema (1.5.28) utilizando  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia es:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y & (1.6.46) \\ \dot{y} &= x^2 + \sum_{l=0}^{\infty} (b_{3l+2}x^{3l+1}y + b_{3l+4}x^{3l+3}y). \end{aligned}$$

Comparando (1.6.46) y (1.6.45) con (1.6.42) y (1.6.41), podemos ver las ventajas de utilizar  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia. De hecho, podemos observar que usando  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia conseguimos eliminar una tercera parte más de los términos.





## Capítulo 2

# Determinación topológica de campos planos

Todo este capítulo está dedicado a la determinación topológica de campos planos. Consideraremos un tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  y un sistema analítico plano desarrollado en grados sucesivos respecto al tipo  $\mathbf{t}$  de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{F}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_{r+j}(x, y), \quad (2.0.1)$$

donde  $\mathbf{F} = (P, Q)^T$  y  $\mathbf{F}_{r+j}(x, y) = (P_{r+j+t_1}(x, y), Q_{r+j+t_2}(x, y))^T \in \mathcal{Q}_{r+j}^{\mathbf{t}}$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{0}$  es un equilibrio aislado del sistema (2.0.1).

El problema de la determinación topológica fue resuelto por Brunella & Miari [17], excepto el caso monodrómico. Otro problema clásico en el estudio de las singularidades de sistemas de ecuaciones diferenciales analíticas en el plano es caracterizar cuando un punto singular es de tipo centro-foco (un punto singular es de tipo *centro-foco* si es un foco o un centro), en lo que sigue nos referiremos a este problema como el *problema centro-foco* o el *problema de monodromía*. Desde luego, si la parte lineal del punto singular es no degenerada, la caracterización es bien conocida. Cuando la parte lineal es degenerada pero no idénticamente cero, el problema ha sido resuelto (véase Andreev [10]). La principal dificultad para resolver el problema de monodromía aparece cuando el punto singular tiene parte lineal idénticamente cero. Aunque este caso fue resuelto por Medvedeva [51], nuestro enfoque aporta mejoras tanto en el

aspecto teórico como en el computacional, ya que presentamos un algoritmo más simple, que utiliza información tanto de la parte conservativa como de la disipativa del sistema.

## 2.1. Preliminares

### Notaciones y definiciones

- Escribiremos las componentes del campo  $\mathbf{F}$  en la forma  $P(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^{j-1}$ ,  $Q(x, y) = \sum b_{ij}x^{i-1}y^j$ . Por completitud volvemos a definir los mismos conceptos dados en la Subsección 1.3.2, ahora en el caso plano. El *soporte* de  $\mathbf{F}$ ,  $\text{supp}(\mathbf{F})$ , es el conjunto de pares  $(i, j)^T$  tales que  $(a_{ij}, b_{ij})^T \neq (0, 0)$ . Los puntos  $(i, j)^T$  pertenecientes a  $\text{supp}(\mathbf{F})$  lo denominaremos *puntos soporte*. Al vector  $(a_{ij}, b_{ij})^T$  lo denominaremos *vector de coeficientes* del punto soporte  $(i, j)^T$ . El *exponente* de un punto soporte  $(i, j)^T$  es la cantidad

$$\begin{cases} \frac{b_{ij}}{a_{ij}}, & \text{si } a_{ij} \neq 0; \\ \infty, & \text{si } a_{ij} = 0. \end{cases}$$

- Consideramos el conjunto

$$\bigcup_{(i,j)^T \in \text{supp}(\mathbf{F})} ((i, j)^T + \mathbb{R}_+^2),$$

donde  $\mathbb{R}_+^2$  es el cuadrante positivo. La envolvente convexa de este conjunto se denomina *polígono de Newton* del campo vectorial  $\mathbf{F}$  y su frontera consiste de dos rayos no acotados y una línea poligonal, (pudiendo ésta reducirse a un solo punto). La línea poligonal  $\Gamma$  se llama *diagrama de Newton* del campo vectorial  $\mathbf{F}$ . Los segmentos (acotados o no) de  $\Gamma$  se llaman *caras*. Los puntos que unen las *caras* de  $\Gamma$  y sus puntos finales son llamados *vértices* del diagrama de Newton.

- Si la frontera del polígono de Newton de  $\mathbf{F}$  contiene un rayo no acotado que no pertenece a ningún eje coordenado, decimos que es una *cara no acotada* del polígono de Newton.

- Los vértices del diagrama de Newton que no pertenecen a ningún eje coordinado se llaman *interiores*.
- Sea  $\ell$  una cara del diagrama de Newton  $\Gamma$  y sea  $m \in \mathbb{Q}$  su pendiente. Si  $\frac{1}{m} = \frac{t_1}{t_2}$  con  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}_0$ , el tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  se denomina *tipo* asociado a la cara  $\ell$  y  $\frac{t_1}{t_2}$  *exponente* de  $\ell$ . El exponente de una cara no acotada horizontal (vertical) se define como  $\infty$  (0 respectivamente) y su tipo como  $(0, 1)$  ( $(1, 0)$  respectivamente). El exponente de un vértice  $V$  es el exponente de su punto soporte y lo denotaremos  $\alpha_V$ .
- Dado un vértice interior  $V$ , denotaremos  $\ell, \tilde{\ell}$  las caras adyacentes a  $V$  superior e inferior (pueden ser no acotadas) respectivamente de exponentes  $\alpha_\ell$  y  $\alpha_{\tilde{\ell}}$  respectivamente.
- Si  $h(x, y)$  es una función escalar entonces denotaremos por  $\mathbf{X}_h$  al campo hamiltoniano que tiene por función de Hamilton  $h$ . Más concretamente,  $\mathbf{X}_h = (-\frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial x})^T$ . Si  $h(x, y) \in \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$  entonces  $\mathbf{X}_h \in \mathcal{Q}_{k-|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$ .
- Denotaremos por  $\wedge$  el producto cuña definido sobre dos campos planos  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  como  $\mathbf{F} \wedge \mathbf{G} = (\mathbf{F}\mathbf{e}_1)(\mathbf{G}\mathbf{e}_2) - (\mathbf{F}\mathbf{e}_2)(\mathbf{G}\mathbf{e}_1)$ .
- Se deduce directamente de la definición que si  $\mathbf{F} \in \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$  y  $\mathbf{G} \in \mathcal{Q}_l^{\mathbf{t}}$  entonces  $\mathbf{F} \wedge \mathbf{G} \in \mathcal{P}_{k+l+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$ .
- Si  $p, q$  son polinomios en las variables  $x$  e  $y$ , entonces se define el paréntesis de Poisson como  $\{p, q\} = -\frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y}$ , por tanto  $\{p, q\} = \mathbf{X}_q \wedge \mathbf{X}_p = \nabla p \cdot \mathbf{X}_q$ .
- Denotaremos por  $\mathbf{D}_0$  el campo cuasihomogéneo del tipo  $\mathbf{t}$  y grado cero definido como  $\mathbf{D}_0 = (t_1x, t_2y)^T$ .
- Si  $P$  es una proposición denotamos por  $\chi_P \in \{0, 1\}$  y toma el valor 1 si  $P$  es cierto y el valor 0 en caso contrario.

**Lema 2.1.23** Sean  $p \in \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$  y  $q \in \mathcal{P}_l^{\mathbf{t}}$ . Entonces  $\{p, q\} \in \mathcal{P}_{k+l-|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$

Demostración:  $\{p, q\} = \nabla p \cdot \mathbf{X}_q$ , el resultado se obtiene utilizando el Lema 1.3.8. ■

## 2.2. Descomposición conservativa-disipativa

A continuación demostramos que, fijado un tipo  $\mathbf{t}$ , cualquier campo cuasihomogéneo de un determinado grado se puede descomponer de manera única como suma de dos campos cuasihomogéneos del mismo tipo y grado que el campo original: uno con divergencia nula y el otro con divergencia igual a la del campo original. Esta descomposición, que generaliza a las dadas para el caso homogéneo por Baidier [14] y Collins [23], será concretada a continuación.

Utilizando el Lema 1.3.10, definimos los operadores lineales

$$\begin{aligned} d_k &: \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} & D_k &: \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} \\ & \mathbf{P}_k \longrightarrow \frac{1}{k+|\mathbf{t}|} \operatorname{div}(\mathbf{P}_k), & & \mu_k \longrightarrow \mu_k \mathbf{D}_0, \end{aligned}$$

y los subespacios:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}} &= \operatorname{Ker}(d_k) = \{\mathbf{P}_k \in \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} : \operatorname{div}(\mathbf{P}_k) = 0\}, \\ \mathcal{D}_k^{\mathbf{t}} &= \operatorname{Im}(D_k) = \{\mathbf{P}_k \in \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} : \mathbf{P}_k = \mu_k \mathbf{D}_0\}. \end{aligned}$$

Es trivial probar que  $D_k$  es inyectivo y por tanto  $\mathcal{D}_k^{\mathbf{t}}$  es isomorfo a  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$ . También es fácil ver que  $\mathcal{C}_k^{\mathbf{t}}$  es isomorfo a los campos hamiltonianos cuasihomogéneos de grado  $k$ ,  $Ham_k$ .

Los elementos que pertenecen a  $\mathcal{C}_k^{\mathbf{t}}$  serán llamados *conservativos*, mientras los elementos en  $\mathcal{D}_k^{\mathbf{t}}$  diremos que son *disipativos*.

Denotemos a la matriz canónica simpléctica como  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Recordemos que esta matriz satisface  $J^{-1} = J^T = -J$  (en particular,  $J^2 = -I$ ). Denotemos también  $J\nabla h = \mathbf{X}_h$  al campo hamiltoniano con función de Hamilton  $h$ .

Definimos los operadores lineales:

$$\begin{aligned} c_{k+|\mathbf{t}|} &: \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}} & C_k &: \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}} \subset \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} \\ & \mathbf{P}_k \rightarrow \frac{1}{k+|\mathbf{t}|} \mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{P}_k, & & \mu_{k+|\mathbf{t}|} \rightarrow \mathbf{X}_{\mu_{k+|\mathbf{t}|}}, \end{aligned}$$

Observemos que  $c_{k+|\mathbf{t}|}(\mathbf{P}_k)$  es el producto escalar de  $\mathbf{D}_0$  con un vector ortogonal a  $\mathbf{P}_k$ . También,  $C_k(\mu_{k+|\mathbf{t}|})$  es un vector ortogonal a  $\nabla \mu_{k+|\mathbf{t}|}$  (en particular, su divergencia es cero, por lo que  $C_k(\mu_{k+|\mathbf{t}|}) \in \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}}$ ).

**Proposición 2.2.24**  $C_k$  es un isomorfismo.

*Demostración:*  $C_k$  es inyectivo ya que si  $\mu \in \text{Ker}(C_k)$  debe cumplir  $\nabla\mu = 0$ , por lo que  $\mu$  es constante, y la única constante que pertenece a  $\mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$  es justamente  $\mu = 0$ .

$C_k$  es sobreyectivo, porque para cada  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}}$  (i.e.,  $\text{div}(\mathbf{P}_k) = 0$ ), existe  $\mu \in \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$  tal que  $\mathbf{P}_k = \mathbf{X}_\mu$ . Por tanto  $\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{P}_k = \nabla\mu \cdot \mathbf{D}_0 = (k + |\mathbf{t}|)\mu$ , y entonces  $\mathbf{P}_k = \mathbf{X}_\mu = \mathbf{X}_{\frac{\mathbf{P}_k \wedge \mathbf{D}_0}{k+|\mathbf{t}|}} = C_k(c_{k+|\mathbf{t}|}(\mathbf{P}_k))$ . ■

Consideramos ahora los operadores lineales:

$$\begin{aligned} \Pi_k^{\mathbf{d}} &: \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{D}_k^{\mathbf{t}} \subset \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} & \Pi_k^{\mathbf{c}} &: \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}} \subset \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} \\ \mathbf{P}_k &\rightarrow D_k \circ d_k(\mathbf{P}_k), & \mathbf{P}_k &\rightarrow C_k \circ c_{k+|\mathbf{t}|}(\mathbf{P}_k). \end{aligned}$$

Hemos usado el super-índice d porque la parte disipativa preserva la divergencia de  $\mathbf{P}_k$ . También, el super-índice c denota que esta parte es conservativa, (tiene divergencia cero).

La siguiente proposición prueba que estos operadores son proyecciones. En particular, estos operadores se utilizarán para descomponer cualquier campo  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$  como suma de un campo vectorial conservativo más otro disipativo.

**Proposición 2.2.25** Se tienen los siguientes resultados:

- (a)  $\Pi_k^{\mathbf{d}}$  y  $\Pi_k^{\mathbf{c}}$  son involuciones, i.e.:  $(\Pi_k^{\mathbf{d}})^2 = \Pi_k^{\mathbf{d}}$ , y  $(\Pi_k^{\mathbf{c}})^2 = \Pi_k^{\mathbf{c}}$ .
- (b)  $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} = \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}} \oplus \mathcal{D}_k^{\mathbf{t}}$ . Más aún,  $\Pi_k^{\mathbf{c}} + \Pi_k^{\mathbf{d}} = \text{id}_{\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}}$ .

*Demostración:* En primer lugar afirmamos que  $d_k \circ D_k$  and  $c_{k+|\mathbf{t}|} \circ C_k$  son operadores identidad. Concretamente:

$$\begin{aligned} d_k \circ D_k(\mu) &= d_k(\mu \mathbf{D}_0) = \frac{1}{k+|\mathbf{t}|} \text{div}(\mu \mathbf{D}_0) = \frac{1}{k+|\mathbf{t}|} (\nabla\mu \cdot \mathbf{D}_0 + \mu \text{div}(\mathbf{D}_0)) \\ &= \frac{1}{k+|\mathbf{t}|} (k\mu + \mu|\mathbf{t}|) = \mu, \\ c_{k+|\mathbf{t}|} \circ C_k(\mu) &= \frac{1}{k+|\mathbf{t}|} \mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{X}_\mu = \frac{1}{k+|\mathbf{t}|} \nabla\mu \cdot \mathbf{D}_0 = \mu. \end{aligned}$$

A continuación probamos las afirmaciones de la Proposición.

(a) Utilizando las anteriores propiedades obtenemos:

$$\begin{aligned} (\Pi_k^d)^2 &= D_k \circ \underbrace{d_k \circ D_k}_{\text{id}} \circ d_k = D_k \circ d_k = \Pi_k^d, \\ (\Pi_k^c)^2 &= C_k \circ \underbrace{c_{k+|t|} \circ C_k}_{\text{id}} \circ c_{k+|t|} = C_k \circ c_{k+|t|} = \Pi_k^c. \end{aligned}$$

(b) Sea  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{Q}_k^t$ , y escribimos  $\mathbf{P}_k^d = \Pi_k^d(\mathbf{P}_k) = D_k(\text{div}(\mathbf{P}_k)) = \frac{1}{k+|t|}\text{div}(\mathbf{P}_k)\mathbf{D}_0$ .

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{P}_k^d) &= \text{div}\left(\frac{1}{k+|t|}\text{div}(\mathbf{P}_k)\mathbf{D}_0\right) \\ &= \nabla\left(\frac{1}{k+|t|}\text{div}(\mathbf{P}_k)\right) \cdot \mathbf{D}_0 + \frac{1}{k+|t|}\text{div}(\mathbf{P}_k)\text{div}(\mathbf{D}_0) \\ &= k\frac{1}{k+|t|}\text{div}(\mathbf{P}_k) + \frac{1}{k+|t|}\text{div}(\mathbf{P}_k)|t| = \text{div}(\mathbf{P}_k). \end{aligned}$$

Denotamos  $\mathbf{P}_k^c = \mathbf{P}_k - \mathbf{P}_k^d$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{P}_k^c) &= \text{div}(\mathbf{P}_k - \Pi_k^d(\mathbf{P}_k)) = \text{div}(\Pi_k^d(\mathbf{P}_k - \Pi_k^d(\mathbf{P}_k))) \\ &= \text{div}(\Pi_k^d(\mathbf{P}_k) - (\Pi_k^d)^2(\mathbf{P}_k)) = 0. \end{aligned}$$

Más aún,  $\mathbf{P}_k^c \in \Pi_k^c(\mathbf{P}_k)$  porque  $\Pi_k^c(\Pi_k^d(\mathbf{P}_k)) = 0$ .

Esto prueba que  $\mathcal{Q}_k^t = \mathcal{C}_k^t + \mathcal{D}_k^t$ . Además,  $\mathcal{C}_k^t \cap \mathcal{D}_k^t = \{\mathbf{0}\}$ , porque si  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{D}_k^t$  con  $\mathbf{P}_k = \frac{1}{k+|t|}\mu_k\mathbf{D}_0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{P}_k) &= \text{div}\left(\frac{1}{k+|t|}\mu_k\mathbf{D}_0\right) = \frac{1}{k+|t|}(\nabla\mu_k \cdot \mathbf{D}_0 + \mu_k\text{div}(\mathbf{D}_0)) \\ &= \frac{k\mu_k + |t|\mu_k}{k+|t|} = \mu_k. \end{aligned}$$

Si además,  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{C}_k^t$ , entonces  $\text{div}(\mathbf{P}_k) = 0$ , esto es  $\mu_k = 0$ . Luego  $\mathbf{P}_k = \mathbf{0}$ . ■

**Nota:** Dado  $\mathbf{F}_k \in \mathcal{Q}_k^t$ , la Proposición 2.2.25 nos permite escribir

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{X}_{h_{k+|t|}} + \mu_k\mathbf{D}_0, \quad (2.2.2)$$

con  $\mu_k = \frac{\text{div}(\mathbf{F}_k)}{k+|t|} \in \mathcal{P}_k^t$  y  $h_{k+|t|} = \frac{\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{F}_k}{k+|t|} \in \mathcal{P}_{k+|t|}^t$ .

En este capítulo, y por brevedad, denotaremos  $\mu = \mu_r$  y  $h = h_{r+|t|}$ .

En lo que sigue, denotamos  $\mathbf{F}^c = \Pi_k^c(\mathbf{F})$ ,  $\mathbf{F}^d = \Pi_k^d(\mathbf{F}^d)$ , para cualquier  $\mathbf{F} \in \mathcal{Q}_k^t$ .

## 2.3. El espacio vectorial $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$ y sus propiedades

El espacio vectorial de los polinomios homogéneos es bien conocido. Por ejemplo, cualquier polinomio homogéneo de grado 4 se expresa como  $p_4 = \alpha_0 x^4 + \alpha_1 x^3 y + \alpha_2 x^2 y^2 + \alpha_3 x y^3 + \alpha_4 y^4$  y así podemos asegurar que su dimensión es 5. Para los polinomios cuasihomogéneos estas cuestiones son más complicadas. Consideremos, por ejemplo, el tipo  $\mathbf{t} = (3, 7)$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^{\mathbf{t}} &= 0, & \mathcal{P}_2^{\mathbf{t}} &= 0, & \mathcal{P}_3^{\mathbf{t}} &= \langle x \rangle, & \mathcal{P}_4^{\mathbf{t}} &= 0, & \mathcal{P}_5^{\mathbf{t}} &= 0, \\ \mathcal{P}_6^{\mathbf{t}} &= \langle x^2 \rangle, & \mathcal{P}_7^{\mathbf{t}} &= \langle y \rangle, & \mathcal{P}_8^{\mathbf{t}} &= 0, & \mathcal{P}_9^{\mathbf{t}} &= \langle x^3 \rangle, & \mathcal{P}_{10}^{\mathbf{t}} &= \langle xy \rangle, \\ \mathcal{P}_{11}^{\mathbf{t}} &= 0, & \mathcal{P}_{12}^{\mathbf{t}} &= \langle x^4 \rangle, & \mathcal{P}_{13}^{\mathbf{t}} &= \langle x^2 y \rangle, & \mathcal{P}_{14}^{\mathbf{t}} &= \langle y^2 \rangle, & \mathcal{P}_{15}^{\mathbf{t}} &= \langle x^5 \rangle, \\ \mathcal{P}_{16}^{\mathbf{t}} &= \langle x^3 y \rangle, & \mathcal{P}_{17}^{\mathbf{t}} &= \langle xy^2 \rangle, & \mathcal{P}_{18}^{\mathbf{t}} &= \langle x^6 \rangle, & \mathcal{P}_{19}^{\mathbf{t}} &= \langle x^4 y \rangle, & \mathcal{P}_{20}^{\mathbf{t}} &= \langle x^2 y^2 \rangle, \\ \mathcal{P}_{21}^{\mathbf{t}} &= \langle x^7, y^3 \rangle, & \dots & & & & & & & \end{aligned}$$

Se puede apreciar que, para algunos grados, el espacio vectorial se reduce al vector cero. Para otros, la dimensión sigue pautas más complejas. El propósito de este apartado es proporcionar bases adecuadas del espacio vectorial  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$  (véase el Lema 2.3.26), que utilizaremos en el resto de esta memoria. También describiremos algunas propiedades de  $\dim(\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}})$ .

Dado el tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  con  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ , primos entre sí, definimos el conjunto

$$\mathcal{I}^{\mathbf{t}} = \{k = k_1 t_1 + k_2 t_2 + k_3 t_1 t_2 \in \mathbb{N}_0 : k_1 < t_2, k_2 < t_1, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0\}.$$

Notemos que, si  $k \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}}$ , entonces los enteros no negativos  $k_1, k_2, k_3$  son únicos ya que si existieran dos ternas de números  $k_3^{(1)}, k_2^{(1)}, k_1^{(1)}$  y  $k_3^{(2)}, k_2^{(2)}, k_1^{(2)}$  que verificaran las condiciones entonces, se tendría  $(k_1^{(1)} - k_1^{(2)})t_1 = [(k_3^{(2)} - k_3^{(1)})t_1 + (k_2^{(2)} - k_2^{(1)})t_2]$ . Por ser  $t_1, t_2$  primos entre sí y  $0 \leq k_1^{(i)} < t_2$ ,  $i = 1, 2$  sería  $k_1^{(1)} = k_1^{(2)}$  y por tanto  $|k_3^{(2)} - k_3^{(1)}|t_1 = |k_2^{(1)} - k_2^{(2)}|$ . Como  $0 \leq k_2^{(i)} < t_1$ ,  $i = 1, 2$  se llega a que  $0 \leq |k_2^{(1)} - k_2^{(2)}| < t_1$ , de donde  $k_3^{(2)} = k_3^{(1)}$  y  $k_2^{(2)} = k_2^{(1)}$ .

Por otra parte, puede comprobarse que la suma de dos elementos de  $\mathcal{I}^{\mathbf{t}}$  también pertenece a  $\mathcal{I}^{\mathbf{t}}$ .

Los elementos de  $\mathcal{I}^{\mathbf{t}}$  corresponden a conjuntos no triviales  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$ . Concretamente, si  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \neq \{0\}$ , entonces para cualquier monomio  $x^m y^n \in \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$  tenemos  $mt_1 + nt_2 = k$ . Si escribimos  $m = \tilde{m}t_2 + k_1$  con  $0 \leq k_1 < t_1$ ,  $n = \tilde{n}t_1 + k_2$  con  $0 \leq k_2 < t_2$ , tenemos  $k = (\tilde{m} + \tilde{n})t_1 t_2 + k_2 t_2 + k_1 t_1$  y  $k$  pertenece a  $\mathcal{I}^{\mathbf{t}}$ .



Recíprocamente, si  $k \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}}$  entonces  $k = k_1 t_1 + k_2 t_2 + k_3 t_1 t_2$  y  $x^{k_3 t_2 + k_1} y^{k_2}$  es el monomio con mayor exponente en  $x$ . El resto de monomios en  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$  se obtienen de forma fácil a partir de él.

El siguiente Lema resume estos resultados, proporcionando una base del espacio vectorial  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$ .

**Lema 2.3.26** *Sea  $k \in \mathbb{N}_0$  y  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ . Entonces:*

- (a)  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} = \{0\}$ , si  $k \notin \mathcal{I}^{\mathbf{t}}$ ,  $\mathcal{P}_0^{\mathbf{t}} = \text{span}\{1\}$ .  
 (b)  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} = \text{span}\{x^{k_1 + t_2(k_3 - j)} y^{k_2 + t_1 j} : j = 0, \dots, k_3\}$ , si  $k \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}} \setminus \{0\}$ .

Este Lema nos permite escribir cualquier polinomio cuasihomogéneo de tipo  $\mathbf{t}$  y grado  $k \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}}$  como

$$p_k(x, y) = x^{k_1} y^{k_2} \sum_{j=0}^{k_3} \alpha_j x^{t_2(k_3 - j)} y^{j t_1}, \quad (2.3.3)$$

y por tanto

$$\dim(\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}) = k_3 + 1. \quad (2.3.4)$$

Además,  $p_k(x, y)$  tiene asociado otro polinomio homogéneo  $p_k^{\text{hom}}$  de grado  $k_3$  en las variables  $X = x^{t_2}$ ,  $Y = y^{t_1}$ :

$$p_k(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^{k_1} y^{k_2} p_k^{\text{hom}}(X, Y) \quad (2.3.5)$$

Esta expresión nos permite factorizar  $p_k(x, y)$  de la siguiente manera: Supongamos que  $\alpha_{k_3} = \dots = \alpha_{k_3 - l + 1} = 0$  y  $\alpha_{k_3 - l} \neq 0$ . Entonces  $p_k(x, y) = x^{k_1} y^{k_2} X^l \sum_{j=0}^{k_3 - l} \alpha_j (Y/X)^j$ . Si  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  son las raíces del polinomio  $\sum_{j=0}^{k_3 - l} \alpha_j (Y/X)^j$ , llegamos a la mencionada factorización:

$$p_k(x, y) = \alpha_{k_3 - l} x^{k_1 + l t_2} y^{k_2} \prod_{j=1}^{k_3 - l} (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2}), \quad \lambda_j \in \mathbb{C} \quad (2.3.6)$$

Utilizando (2.3.6) se tiene una expresión de  $h$  en producto de factores irreducibles sobre  $\mathbb{C}[x, y]$ . Además, utilizando un escalado, podemos suponer que el coeficiente líder de  $h$  en la variable  $y$  sea uno, esto es:

$$h(x, y) = x^{m_x} y^{m_y} \prod_{j=1}^m (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})^{m_j}, \quad (2.3.7)$$

donde  $m, m_x, m_y \in \mathbb{N}_0$ ;  $m_j \in \mathbb{N}$  para  $j = 1, \dots, m$ ;  $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  para  $1 \leq j \leq m$ , y  $\lambda_i \neq \lambda_j$  para  $i \neq j$ . En lo que sigue denotaremos  $h = \prod_{j=1}^k f_j^{m_j}$  donde  $f_j(x, y)$  serán factores irreducibles de la forma  $x, y$  o bien  $y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2}$ .

Análogamente se obtiene una expresión de  $h$  en producto de factores irreducibles sobre  $\mathbb{R}[x, y]$ :

$$h(x, y) = x^{m_x} y^{m_y} \prod_{j=1}^M (y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2})^{m_j} \prod_{j=1}^N [(y^{t_1} - a_j x^{t_2})^2 + b_j^2 x^{2t_2}]^{n_j}, \quad (2.3.8)$$

donde ahora  $n_j \in \mathbb{N}$  para  $j = 1, \dots, N$ ;  $\tilde{a}_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  para  $1 \leq j \leq M$  y  $\tilde{a}_i \neq \tilde{a}_j$  para  $i \neq j$ ,  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $b_j \neq 0$  para  $j = 1, \dots, N$ ,  $(a_j, b_j) \neq (a_i, b_i)$  para  $i \neq j$ .

Dado un determinado tipo,  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ , con  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ ,  $t_1 \leq t_2$  y primos entre sí, la primera cuestión que nos planteamos es mostrar que  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \neq \{0\}$  para todo  $k$  suficientemente grande. Para el tipo  $\mathbf{t} = (3, 7)$ , ya hemos visto al principio de esta sección que  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \neq \{0\}$  para  $k \geq 11$ . El siguiente lema recoge este resultado.

**Lema 2.3.27** *Dados  $k, t_1, t_2 \in \mathbb{N}$  con  $t_1, t_2$  primos entre si y  $k > t_1 t_2 - t_1 - t_2$  entonces  $k \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}}$ .*

*Demostración:* Al ser  $t_1, t_2$  primos entre si, por la identidad de Bezout, existen  $m, n \in \mathbb{N}$  tales que  $1 = mt_2 - nt_1$ . Además, podemos elegirlos tales que  $m < t_1$ ,  $n < t_2$ . Observemos que  $m < t_1$  ya que, en caso contrario existen  $\tilde{m}, h \in \mathbb{N}$  con  $\tilde{m} < t_1$  y tales que  $m = \tilde{m} + ht_1$ . Como todos los pares  $(m + ht_1, n + ht_2)$ , con  $h \in \mathbb{Z}$ , cumplen también la identidad de Bezout, basta tomar el natural  $m$  más pequeño que es menor que  $t_1$ . Por ser  $m < t_1$  entonces  $mt_2 = 1 + nt_1 < t_1 t_2$ , por lo que también se tiene  $n < t_2$ .

Consideremos ahora  $k = \tilde{k}_3 t_1 t_2 + r$  con  $r < t_1 t_2$ . Entonces, utilizando otra vez la identidad de Bezout, obtenemos  $k = \tilde{k}_3 t_1 t_2 + r m t_2 - r n t_1$ . Si tomamos  $r m = h t_1 + \tilde{r}$ , con  $0 \leq \tilde{r} < t_1$ , se obtiene  $k = \tilde{r} t_2 - a t_1$  con  $a = r n - h t_2 - \tilde{k}_3 t_2$ . Si probamos que  $a \leq 0$  se pueden encontrar los valores de  $k_3, k_2, k_1$  que permiten asegurar que  $k \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}}$ . Ahora bien, por hipótesis se sabe que  $k = \tilde{r} t_2 - a t_1 > (t_1 - 1)t_2 - t_1$ , por lo que  $(t_1 - 1 - \tilde{r})t_2 + (a - 1)t_1 < 0$ . Como  $t_1 - 1 - \tilde{r} \geq 0$ , deducimos que  $a \leq 0$ , como queríamos demostrar. ■

**Lema 2.3.28** *Si  $s \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , entonces*

$$\dim(\mathcal{P}_{k+st_1t_2}^t) = \dim(\mathcal{P}_k^t) + s$$

*Demostración:*

(a) Si  $k \notin \mathcal{I}^t$ , se tiene que  $\dim(\mathcal{P}_k^t) = 0$ . Además, por el Lema 2.3.27, ha de ser  $k \leq t_1t_2 - t_1 - t_2$ . Por lo tanto:  $st_1t_2 < k + st_1t_2 \leq (s+1)t_2t_1 - t_2 - t_1 = (s-1)t_2t_1 + (t_1-1)t_2 + (t_2-1)t_1$ , de donde  $k + st_1t_2 \in \mathcal{I}^t$  y  $\dim(\mathcal{P}_{k+st_1t_2}^t) = s$ .

(b) Si  $k = 0$  el resultado es trivial

(c) Si  $k \in \mathcal{I}^t \setminus \{0\}$ , entonces se verifica  $k + st_2t_1 = (k_3 + s)t_1t_2 + k_2t_2 + k_1t_1$  y por lo tanto será  $\dim(\mathcal{P}_{k+st_1t_2}^t) = k_3 + 1 + s = \dim(\mathcal{P}_k^t) + s$ . ■

El siguiente lema nos muestra como afectan los cambios de variables de grado cero a un sistema cuasihomogéneo.

**Lema 2.3.29** *Sea  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$ ,  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu\mathbf{D}_0$ . El cambio de variables de grado cero:*

$$\begin{aligned} u &= \alpha_3x + \alpha_1\chi_{\{t_2=1\}}y^{t_1}, \\ v &= \alpha_2\chi_{\{t_1=1\}}x^{t_2} + \alpha_4y, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

con  $\Delta = [\alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2\chi_{\{\mathbf{t}=(1,1)\}}] \neq 0$ , transforma el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$  en  $(\dot{u}, \dot{v})^T = \tilde{\mathbf{F}}_r = \mathbf{X}_{\tilde{h}} + \tilde{\mu}\mathbf{D}_0$  donde:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(u, v) &= \Delta h(x, y), \\ \tilde{\mu}(u, v) &= \mu(x, y) \end{aligned}$$

*Demostración:* Calculemos en primer lugar la función de Hamilton de la parte conservativa del nuevo sistema:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(u, v) &= \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}\mathbf{D}_0 \wedge \tilde{\mathbf{F}}_r = t_1uv' - t_2vu' \\ &= \frac{1}{r+|\mathbf{t}|} \left[ t_1(\alpha_3x + \alpha_1\chi_{\{t_2=1\}}y^{t_1})(t_2\alpha_2\chi_{\{t_1=1\}}x^{t_2-1}\dot{x} + \alpha_4\dot{y}) \right. \\ &\quad \left. - t_2(\alpha_2\chi_{\{t_1=1\}}x^{t_2} + \alpha_4y)(\alpha_3\dot{x} + t_1\alpha_1\chi_{\{t_2=1\}}y^{t_1-1}\dot{y}) \right] \\ &= \frac{1}{r+|\mathbf{t}|} [\alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2\chi_{\{\mathbf{t}=(1,1)\}}] (t_1x\dot{y} - t_2y\dot{x}) \\ &= \Delta h(x, y) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el cambio inverso es

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha_4}{\Delta} u - \frac{\alpha_1 \alpha_4^{1-t_1} \chi_{\{t_2=1\}}}{\Delta} v^{t_1}, \\ y &= -\frac{\alpha_2 \alpha_3^{1-t_2} \chi_{\{t_1=1\}}}{\Delta} u^{t_2} + \frac{\alpha_3}{\Delta} v, \end{aligned}$$

la divergencia del nuevo campo es:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{F}}_r) &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} = \alpha_3 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u} + t_1 \alpha_1 \chi_{\{t_2=1\}} y^{t_1-1} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial u} + t_2 \alpha_2 \chi_{\{t_1=1\}} x^{t_2-1} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial v} + \alpha_4 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial v} \\ &= \alpha_3 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \alpha_3 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + t_1 \alpha_1 \chi_{\{t_2=1\}} y^{t_1-1} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + t_1 \alpha_1 \chi_{\{t_2=1\}} y^{t_1-1} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &\quad + t_2 \alpha_2 \chi_{\{t_1=1\}} x^{t_2-1} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + t_2 \alpha_2 \chi_{\{t_1=1\}} x^{t_2-1} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \alpha_4 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \alpha_4 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{\alpha_3 \alpha_4}{\Delta} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} - \frac{t_2 \alpha_3^{2-t_2} \alpha_2 \chi_{\{t_1=1\}}}{\Delta} u^{t_2-1} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} + \frac{t_1 \alpha_4 \alpha_1 \chi_{\{t_2=1\}} y^{t_1-1}}{\Delta} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} - \frac{\alpha_2 \alpha_1 \chi_{\{t=(1,1)\}}}{\Delta} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \\ &\quad - \frac{\alpha_2 \alpha_1 \chi_{\{t=(1,1)\}}}{\Delta} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{t_2 \alpha_3 \alpha_2 \chi_{\{t_1=1\}}}{\Delta} x^{t_2-1} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} - \frac{t_1 \alpha_4^{2-t_1} \alpha_1 \chi_{\{t_2=1\}}}{\Delta} v^{t_1-1} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{\Delta} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \\ &= \frac{\alpha_3 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_1 \chi_{\{t=(1,1)\}}}{\Delta} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\alpha_3 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_1 \chi_{\{t=(1,1)\}}}{\Delta} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} + \frac{t_2 \alpha_2 \alpha_3^{2-t_2} \chi_{\{t_1=1\}} [(\alpha_3 x)^{t_2-1} - u^{t_2-1}]}{\Delta} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \\ &\quad + \frac{t_1 \alpha_4^{2-t_1} \alpha_1 \chi_{\{t_2=1\}} [(\alpha_4 y)^{t_1-1} - v^{t_1-1}]}{\Delta} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \\ &= \operatorname{div}(\mathbf{F}_r) \end{aligned}$$

■

El siguiente lema trata sobre las simetrías de los polinomios y campos cuasi-homogéneos.

**Corolario 2.3.30** *Sea  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$ ,  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0$ . Al aplicar el cambio  $u = (-1)^{\sigma_1} x$ ,  $v = (-1)^{\sigma_2} y$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1\}$ , el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$  se transforma en  $(\dot{u}, \dot{v})^T = \mathbf{G}_r(u, v)$ , con  $\mathbf{G}_r = \mathbf{X}_g + \lambda \mathbf{D}_0$ . Siendo*

**a)**  $\lambda(u, v) = \mu((-1)^{\sigma_1} u, (-1)^{\sigma_2} v)$  y  $g(u, v) = (-1)^{\sigma_1 + \sigma_2} h((-1)^{\sigma_1} u, (-1)^{\sigma_2} v)$ .  
Además el factor real irreducible  $y^{t_1} - \tilde{a}x^{t_2}$  de  $h(x, y)$  se transforma en  $v^{t_1} - (-1)^{\sigma_1 t_1 + \sigma_2 t_2} \tilde{a}u^{t_2}$ .

**b)** Si  $\mathbf{F}_r(\mathbf{x}) = (ax^m y^{n-1}, bx^{m-1} y^n)^T$ , entonces  $\mathbf{G}_r(u, v) = (-1)^{(m+1)\sigma_1 + (n+1)\sigma_2} \mathbf{F}_r(u, v)$ .

*Demostración:*

**a)** Basta aplicar el Lema 2.3.29

b) Se deduce del apartado anterior y de que  $h(x, y) = \frac{b-a}{m+n+2}x^m y^n$  y  $\mu(x, y) = \frac{ma+nb}{m+n+2}x^{m-1}y^{n-1}$ .

■

## 2.4. Diferentes tipos de blow-up

Las técnicas de *blowing-up* utilizan cambios de variables que expanden el equilibrio no hiperbólico en una curva sobre la cual se tienen un número finito de singularidades, cuyo tipo topológico se determina a través del Teorema de Hartman-Grobman. Estos cambios de variables serán en general singulares, ya que transforman una curva en un punto. Sin embargo, fuera del equilibrio los cambios son difeomorfismos. El ejemplo más simple es el cambio a coordenadas polares. Aquí daremos presentaremos de ellos.

Comenzamos en primer lugar con los blow-up trigonométricos, que son una generalización de los cambios en coordenadas polares. Con este fin, definimos en primer lugar las funciones trigonométricas generalizadas  $\text{Cs}(\theta)$  y  $\text{Sn}(\theta)$ . Éstas son las soluciones del problema de valor inicial:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\text{Cs}(\theta)}{d\theta} \\ \frac{d\text{Sn}(\theta)}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t_1 \text{Sn}^{2t_1-1}(\theta) \\ 2t_2 \text{Cs}^{2t_2-1}(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{con } \text{Cs}(0) = 1, \text{Sn}(0) = 0. \quad (2.4.10)$$

Si denotamos  $H(x, y) = x^{2t_2} + y^{2t_1}$ , se cumple que  $\text{Cs}(\theta)$ ,  $\text{Sn}(\theta)$  son las soluciones de un sistema hamiltoniano con función de Hamilton  $H$  y como  $\mathbf{X}_H$  es un centro, estas funciones son periódicas con periodo mínimo  $T$ , cumpliendo la ecuación  $\text{Cs}^{2t_2}(\theta) + \text{Sn}^{2t_1}(\theta) = 1$ .

**Proposición 2.4.31** *El sistema (2.0.1), mediante el cambio*

$$\begin{aligned} x &= u^{t_1} \text{Cs}(\theta), \\ y &= u^{t_2} \text{Sn}(\theta), \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

$u > 0$ ,  $\theta \in [0, T)$ , (*blow-up trigonométrico generalizado respecto al tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$* ), se transforma en

$$\begin{aligned} u' &= u \sum_{j \geq 0} \left[ -h'_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta) + 2t_1 t_2 \mu_{r+j}(\theta) \right] u^j, \\ \theta' &= \sum_{j \geq 0} (r + j + |\mathbf{t}|) h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta) u^j. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

donde ( $' = \frac{d}{d\tau}$ ),  $dt = \frac{2t_1 t_2}{u^r} d\tau$ ,  $\text{Cs}(\theta)$ ,  $\text{Sn}(\theta)$  son las soluciones de (2.4.10) y  $f(\theta) = f(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))$  para  $f$  igual a  $h_{r+j+|\mathbf{t}|}$  o  $\mu_{r+j}$ .

Además este cambio transforma la región  $\{0 \leq u \leq \varepsilon, 0 \leq \theta < T\}$  en el entorno del origen  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2t_2} + y^{2t_1} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2t_1 t_2}} \right\}$

*Demostración:* Derivando (2.4.11) respecto al tiempo resulta:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= t_1 u^{t_1-1} \text{Cs}(\theta) \dot{u} + u^{t_1} \frac{d\text{Cs}(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}, \\ \dot{y} &= t_2 u^{t_2-1} \text{Sn}(\theta) \dot{u} + u^{t_2} \frac{d\text{Sn}(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}.\end{aligned}$$

Lo que equivale a la ecuación vectorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{u} \mathbf{D}_0 \dot{u} + \frac{1}{u^{2t_1 t_2 - |\mathbf{t}|}} \mathbf{X}_H \dot{\theta}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{u} \mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{X}_H \dot{u} &= \dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{X}_H, \\ \frac{1}{u^{2t_1 t_2 - |\mathbf{t}|}} \mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{X}_H \dot{\theta} &= \mathbf{D}_0 \wedge \dot{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{X}_H = t_1 x (2t_2 x^{2t_2-1}) - t_2 y (-2t_1 y^{2t_1-1}) = 2t_1 t_2 u^{2t_1 t_2}$ .

Además, utilizando (2.2.2), se tiene  $\dot{\mathbf{x}} = \sum_{j \geq r} [\mathbf{X}_{h_{j+|\mathbf{t}|}} + \mu_j \mathbf{D}_0]$ , y en consecuencia:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{X}_H &= \sum_{j \geq r} \left[ \mathbf{X}_{h_{j+|\mathbf{t}|}} \wedge \mathbf{X}_H(x, y) + 2t_1 t_2 u^{2t_1 t_2} \mu_j(x, y) \right], \\ \mathbf{D}_0 \wedge \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{j \geq r} \mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{X}_{h_{j+|\mathbf{t}|}}(x, y).\end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos, para cada  $j \geq r$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{X}_{h_{j+|\mathbf{t}|}}(x, y) &= \nabla h_{j+|\mathbf{t}|}(x, y) \cdot \mathbf{D}_0 = (j + |\mathbf{t}|) h_{j+|\mathbf{t}|}(x, y) \\ &= (j + |\mathbf{t}|) u^{j+|\mathbf{t}|} h_{j+|\mathbf{t}|}(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (j + |\mathbf{t}|) u^{j+|\mathbf{t}|} h_{j+|\mathbf{t}|}(\theta), \\ \mu_j(x, y) &= u^j \mu_j(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta)) \stackrel{\text{def}}{=} u^j \mu_j(\theta) \\ \mathbf{X}_{h_{j+|\mathbf{t}|}} \wedge \mathbf{X}_H(x, y) &= -\frac{\partial h_{j+|\mathbf{t}|}}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial h_{j+|\mathbf{t}|}}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \{H, h_{j+|\mathbf{t}|}\}(x, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{Lema 2.1.23}}{=} u^{j+2t_1t_2} \{H, h_{j+|\mathbf{t}|}\} (\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta)) \\
& = u^{j+2t_1t_2} \left[ -\frac{\partial h_{j+|\mathbf{t}|}(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{\partial \text{Sn}(\theta)} \frac{\partial H(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{\partial \text{Cs}(\theta)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial h_{j+|\mathbf{t}|}(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{\partial \text{Cs}(\theta)} \frac{\partial H(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{\partial \text{Sn}(\theta)} \right] \\
& = -u^{j+2t_1t_2} h'_{j+|\mathbf{t}|}(\theta).
\end{aligned}$$

De aquí, deducimos que el campo transformado es:

$$\begin{aligned}
2t_1t_2u^{2t_1t_2-1}\dot{u} & = u^{r+2t_1t_2} \sum_{j \geq 0} [-h'_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta) + 2t_1t_2\mu_{r+j}(\theta)] u^j, \\
2t_1t_2u^{|\mathbf{t}|}\dot{\theta} & = u^{r+|\mathbf{t}|} \sum_{j \geq 0} (r+j+|\mathbf{t}|)h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta)u^j,
\end{aligned}$$

para  $u > 0$ . Realizando el escalado en el tiempo  $dt = \frac{2t_1t_2}{u^r}d\tau$ , obtenemos el resultado.  $\blacksquare$

**Nota:** Hemos de hacer notar también que dichos cambios no alteran el sentido de las órbitas, ya que  $\frac{dt}{d\tau} > 0$ .

**Proposición 2.4.32** *El sistema (2.0.1), mediante el cambio  $x = u^{t_1}$ ,  $y = u^{t_2}\bar{y}$ , (blow-up direccional respecto al tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  en la dirección  $y$ ), se transforma en*

$$\begin{aligned}
u' & = u \sum_{j=0}^{\infty} P_{r+j+t_1}(1, \bar{y})u^j, \\
\bar{y}' & = \sum_{j=0}^{\infty} (r+|\mathbf{t}|+j)h_{r+j+|\mathbf{t}|}(1, \bar{y})u^j.
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

donde ( $' = \frac{d}{d\tau}$ ),  $dt = \frac{t_1}{u^r}d\tau$ .

Además este cambio transforma la región  $\left\{0 \leq u \leq \delta, -\frac{1}{\varepsilon_1} \leq \bar{y} \leq \frac{1}{\varepsilon_2}\right\}$  en  $\left\{0 \leq x \leq \delta^{t_1}, -\frac{1}{\varepsilon_1}x^{\frac{t_2}{t_1}} \leq y \leq \frac{1}{\varepsilon_2}x^{\frac{t_2}{t_1}}\right\}$ .

*Demostración:* Al aplicar el blow-up direccional resulta:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{u} \mathbf{D}_0 \dot{u} + \begin{pmatrix} 0 \\ u^{t_2} \end{pmatrix} \dot{\bar{y}},$$

por tanto  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ u^{t_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{u} \mathbf{D}_0 \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ u^{t_2} \end{pmatrix} \dot{u}$ ,  $\mathbf{D}_0 \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_0 \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ u^{t_2} \end{pmatrix} \dot{y}$ .

En consecuencia

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{t_1 u^{t_1-1}} \dot{x} = \frac{1}{t_1 u^{t_1-1}} \sum_{j=0}^{\infty} P_{r+t_1+j}(u^{t_1}, u^{t_2} \bar{y}) = \frac{u^{r+1}}{t_1} \sum_{j=0}^{\infty} P_{r+t_1+j}(1, \bar{y}) u^j, \\ \dot{y} &= \frac{1}{t_1 u^{|\mathbf{t}|}} \sum_{j=0}^{\infty} (r + |\mathbf{t}| + j) h_{r+|\mathbf{t}|+j}(u^{t_1}, u^{t_2} \bar{y}) = \frac{u^r}{t_1} \sum_{j=0}^{\infty} (r + |\mathbf{t}| + j) h_{r+|\mathbf{t}|+j}(1, \bar{y}) u^j. \end{aligned}$$

Aplicando el reescalado en el tiempo  $dt = \frac{t_1}{u^r} d\tau$ , se obtiene el resultado.  $\blacksquare$

**Proposición 2.4.33** *El sistema (2.0.1), mediante el cambio  $x = u^{t_1} \bar{x}$ ,  $y = u^{t_2}$  (blow-up direccional respecto al tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  en la dirección  $x$ ), se transforma en*

$$\begin{aligned} u' &= -u \sum_{j=0}^{\infty} Q_{r+j+t_2}(\bar{x}, 1) u^j, \\ \bar{x}' &= \sum_{j=0}^{\infty} (r + |\mathbf{t}| + j) h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\bar{x}, 1) u^j, \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

donde ( $' = \frac{d}{d\tau}$ ),  $dt = \frac{t_2}{u^r} d\tau$ .

Además este cambio transforma la región  $\left\{ 0 \leq u \leq \delta, -\frac{1}{\varepsilon_1} \leq \bar{x} \leq \frac{1}{\varepsilon_2} \right\}$  en  $\left\{ -\frac{1}{\varepsilon_1} y^{\frac{t_1}{t_2}} \leq x \leq \frac{1}{\varepsilon_2} y^{\frac{t_1}{t_2}}, 0 \leq y \leq \delta^{t_2} \right\}$ .

*Demostración:* Al aplicar el blow-up direccional resulta:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{u} \mathbf{D}_0 \dot{u} + \begin{pmatrix} u^{t_1} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\bar{x}}.$$

Por tanto  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u^{t_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{u} \mathbf{D}_0 \wedge \begin{pmatrix} u^{t_1} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{u}$ ,  $\mathbf{D}_0 \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_0 \wedge \begin{pmatrix} u^{t_1} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\bar{x}}$ .

De esta forma, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{t_2 u^{t_2-1}} \dot{y} = -\frac{1}{t_2 u^{t_2-1}} \sum_{j=0}^{\infty} Q_{r+t_2+j}(u^{t_1} \bar{x}, u^{t_2}) = -\frac{u^{r+1}}{t_2} \sum_{j=0}^{\infty} Q_{r+t_2+j}(\bar{x}, 1) u^j, \\ \dot{\bar{x}} &= \frac{1}{t_2 u^{|\mathbf{t}|}} \sum_{j=0}^{\infty} (r + |\mathbf{t}| + j) h_{r+|\mathbf{t}|+j}(u^{t_1} \bar{x}, u^{t_2}) = \frac{u^r}{t_2} \sum_{j=0}^{\infty} (r + |\mathbf{t}| + j) h_{r+|\mathbf{t}|+j}(\bar{x}, 1) u^j. \end{aligned}$$



Aplicando el reescalado en el tiempo  $dt = \frac{t_2}{u^r} d\tau$ , se obtiene el resultado.  $\blacksquare$

Veamos a continuación el último blow-up que utilizaremos. Este blow-up se utiliza para caracterizar la existencia de órbitas,  $y = f(x)$ , del sistema (2.0.1) que entran o salen del origen cumpliendo  $\left\{ \varepsilon_1 x^{\alpha_{\bar{i}}} \leq y \leq \frac{1}{\varepsilon_2} x^{\alpha_{\ell}} \right\}$ , donde  $\alpha_{\bar{i}}$  y  $\alpha_{\ell}$  son los exponentes de las caras adyacentes, inferior y superior respectivamente, de un vértice interior del diagrama de Newton de (2.0.1). Por esta razón a este blow-up lo llamaremos *Blow-up de vértices*.

**Proposición 2.4.34** *Sea  $V$  un vértice interior del diagrama de Newton del sistema (2.0.1). Sean  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  y  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ , con  $\alpha_{\ell} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_2}{s_1} \leq \alpha_{\bar{i}}$  y  $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}(x, y)$ ,  $h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|}(x, y)$  las funciones de Hamilton de las partes conservativas de los primeros términos del campo respecto a los tipo  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{s}$  respectivamente. Si  $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|} h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|} \neq 0$ , el blow-up  $x = u^{t_1 s_2} v^{t_1 s_1}$ ,  $y = u^{t_2 s_2} v^{t_1 s_2}$  y una reparametrización en el tiempo, convierten el sistema (2.0.1) en:*

$$\begin{aligned} u' &= -u \left[ \frac{t_1(r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|)}{s_2(r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|)} \frac{\tilde{c}_{j_0}}{c_{i_0}} u^{j_0 d s_2} + u^{(j_0+1)d s_2} \Phi_1(u^{d s_2}) + v^{t_1} \Phi_2(u^{s_2}, v^{t_1}) \right], \\ v' &= v \left[ v^{i_0 d t_1} + v^{(i_0+1)d t_1} \Psi_1(v^{d t_1}) + u^{s_2} \Psi_2(u^{s_2}, v^{t_1}) \right] \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

donde  $d = t_1 s_2 - t_2 s_1 \in \mathbb{N}$ ,  $i_0 = \min \{0 \leq i | c_i \neq 0\}$ ,  $j_0 = \min \{0 \leq j | \tilde{c}_j \neq 0\}$ , siendo  $c_i$ ,  $\tilde{c}_j$  los coeficientes de las funciones  $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}(x, y)$ ,  $h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|}(x, y)$  respectivamente, ordenadas de mayor a menor exponente en  $x, y$  respectivamente.

Además, este cambio transforma la región  $\{0 \leq u \leq \delta_1, 0 \leq v \leq \delta_2\}$  en  $\left\{ \varepsilon_1 x^{\frac{s_2}{s_1}} \leq y \leq \frac{1}{\varepsilon_2} x^{\frac{t_2}{t_1}} \right\}$  donde  $\delta_1^{t_1 s_2 (\frac{s_2}{s_1} - \frac{t_2}{t_1})} = \frac{1}{\varepsilon_1}$ ,  $\delta_2^{t_1 s_1 (\frac{s_2}{s_1} - \frac{t_2}{t_1})} = \frac{1}{\varepsilon_2}$ .

*Demostración:* Aplicando el blow-up  $x = u^{t_1 s_2} v^{t_1 s_1}$ ,  $y = u^{t_2 s_2} v^{t_1 s_2}$  se tiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{s_2}{u} \mathbf{D}_{\mathbf{t}} \dot{u} + \frac{t_1}{v} \mathbf{D}_{\mathbf{s}} \dot{v},$$

donde  $\mathbf{D}_{\mathbf{t}} = (t_1 x, t_2 y)^T$  y  $\mathbf{D}_{\mathbf{s}} = (s_1 x, s_2 y)^T$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{t}} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \frac{t_1}{v} \mathbf{D}_{\mathbf{t}} \wedge \mathbf{D}_{\mathbf{s}} \dot{v} = \frac{t_1(t_1 s_2 - t_2 s_1) u^{|\mathbf{t}| s_2 v^{|\mathbf{s}| t_1}}}{v} \dot{v}, \\ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \wedge \mathbf{D}_{\mathbf{s}} &= \frac{s_2}{u} \mathbf{D}_{\mathbf{t}} \wedge \mathbf{D}_{\mathbf{s}} \dot{u} = \frac{s_2(t_1 s_2 - t_2 s_1) u^{|\mathbf{t}| s_2 v^{|\mathbf{s}| t_1}}}{u} \dot{u}. \end{aligned}$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j}{s_2} h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j}(u^{t_1 s_2} v^{t_1 s_1}, u^{t_2 s_2} v^{t_1 s_2}), \\ \dot{v} &= v \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j}{t_1} h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j}(u^{t_1 s_2} v^{t_1 s_1}, u^{t_2 s_2} v^{t_1 s_2}). \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Por otra parte como  $\frac{t_2}{t_1} < \frac{s_2}{s_1}$ , se tiene que  $d = t_1 s_2 - t_2 s_1 \in \mathbb{N}$  y por tanto

$$\begin{aligned} h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j}(u^{t_1 s_2} v^{t_1 s_1}, u^{t_2 s_2} v^{t_1 s_2}) &= (u^{t_2} v^{t_1})^{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j} h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j}(u^d, 1), \\ h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j}(u^{t_1 s_2} v^{t_1 s_1}, u^{t_2 s_2} v^{t_1 s_2}) &= (u^{s_2} v^{s_1})^{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j} h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j}(1, v^d). \end{aligned}$$

Sea  $(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)})$  el punto soporte del campo  $\mathbf{F}_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j}(x, y)$  con menor abscisa. El resto de puntos soportes serán de la forma  $(\alpha_1^{(j)} + i s_2, \alpha_2^{(j)} - i s_1)$ ,  $i = 1, \dots, \tilde{k}_j$  para algún  $\tilde{k}_j \in \mathbb{N}$ . Sean  $(\tilde{a}_i^{(j)}, \tilde{b}_i^{(j)})^T$ ,  $i = 0, 1, \dots, \tilde{k}_j$  los vectores de coeficientes asociados a cada uno de los anteriores puntos soportes. Aplicando (2.3.3) se tiene  $h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j}(u^d, 1) = u^{d\alpha_1^{(j)}} \sum_{i=0}^{\tilde{k}_j} \tilde{c}_i^{(j)} u^{i d s_2}$ , siendo  $\tilde{c}_i^{(j)} = s_1 \tilde{b}_i^{(j)} - s_2 \tilde{a}_i^{(j)}$  para cada  $i$ . Además  $r_{\mathbf{s}} + |\mathbf{s}| + j = s_1 \alpha_1^{(j)} + s_2 \alpha_2^{(j)}$ . De forma análoga sea  $(\beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)})$  el punto soporte del campo  $\mathbf{F}_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j}(x, y)$  con menor ordenada. El resto de puntos soporte serán de la forma  $(\beta_1^{(j)} - i t_2, \beta_2^{(j)} + i t_1)$ ,  $i = 1, \dots, k_j$  para algún  $k_j \in \mathbb{N}$ . Sean  $(a_i^{(j)}, b_i^{(j)})^T$ ,  $i = 0, 1, \dots, k_j$  los vectores de coeficientes asociados a cada uno de los anteriores puntos soportes. Aplicando (2.3.3) se tiene  $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j}(1, v^d) = v^{d\beta_2^{(j)}} \sum_{i=0}^{k_j} c_i^{(j)} v^{i d t_1}$ , siendo  $c_i^{(j)} = t_1 b_i^{(j)} - t_2 a_i^{(j)}$  para cada  $i$ . Además  $r_{\mathbf{t}} + |\mathbf{t}| + j = t_1 \beta_1^{(j)} + t_2 \beta_2^{(j)}$ .

Por tanto se tiene:

$$\begin{aligned} h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j}(u^{t_1 s_2} v^{t_1 s_1}, u^{t_2 s_2} v^{t_1 s_2}) &= u^{(r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j)t_2+(t_1 s_2-t_2 s_1)\alpha_1^{(j)}} v^{(r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j)t_1} \sum_{i=0}^{\tilde{k}_j} \tilde{c}_i^{(j)} u^{i d s_2} \\ &= u^{(t_1 \alpha_1^{(j)}+t_2 \alpha_2^{(j)})s_2} v^{(r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j)t_1} \sum_{i=0}^{\tilde{k}_j} \tilde{c}_i^{(j)} u^{i d s_2}, \\ h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j}(u^{t_1 s_2} v^{t_1 s_1}, u^{t_2 s_2} v^{t_1 s_2}) &= u^{(r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j)s_2} v^{(r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j)s_1+(t_1 s_2-t_2 s_1)\beta_2^{(j)}} \sum_{i=0}^{k_j} c_i^{(j)} v^{i d t_1} \\ &= u^{(r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j)s_2} v^{(s_1 \beta_1^{(j)}+s_2 \beta_2^{(j)})t_1} \sum_{i=0}^{k_j} c_i^{(j)} v^{i d t_1}. \end{aligned}$$

Además, como el punto soporte  $(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)})^T$  para  $j \geq 0$  pertenece al polígono de Newton, podemos definir  $\tilde{\gamma}_j = t_1 \alpha_1^{(j)} + t_2 \alpha_2^{(j)} - (r_{\mathbf{t}} + |\mathbf{t}|) \in \mathbb{N}_0$ . Razonando

análogamente podemos también definir  $\gamma_j = s_1\beta_1^{(j)} + s_2\beta_2^{(j)} - (r_{\mathbf{s}} + |\mathbf{s}|) \in \mathbb{N}_0$  para  $j \geq 0$ . Así se tiene:

$$\begin{aligned} h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j}(u^{t_1s_2}v^{t_1s_1}, u^{t_2s_2}v^{t_1s_2}) &= u^{(r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|)s_2}v^{(r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|)t_1}u^{\tilde{\gamma}_js_2}v^{j t_1} \sum_{i=0}^{\tilde{k}_j} \tilde{c}_i^{(j)} u^{ids_2}, \\ h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j}(u^{t_1s_2}v^{t_1s_1}, u^{t_2s_2}v^{t_1s_2}) &= u^{(r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|)s_2}v^{(r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|)t_1}u^{js_2}v^{\gamma_j t_1} \sum_{i=0}^{k_j} c_i^{(j)} v^{idt_1} \end{aligned}$$

Es fácil ver que si  $(a, b)^T$  es el vector de coeficientes del vértice  $V$  y  $(m, n)$  es su punto soporte entonces para  $j = 0$  es  $\alpha_1^{(0)} = m$ ,  $\beta_2^{(0)} = n$  y por tanto  $\gamma_0 = \tilde{\gamma}_0 = 0$ ,  $\tilde{a}_0^{(0)} = a_0^{(0)} = a$ ,  $\tilde{b}_0^{(0)} = b_0^{(0)} = b$ .  $r_{\mathbf{t}} + |\mathbf{t}| = t_1m + t_2n$  y  $r_{\mathbf{s}} + |\mathbf{s}| = s_1m + s_2n$ . Así el sistema (2.4.16) después de aplicar la reparametrización en el tiempo  $dt/d\tau = \frac{1}{u^{(r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|)s_2}v^{(r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|)t_1}}$ , resulta:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u \left[ \frac{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|}{s_2} \sum_{i=0}^{\tilde{k}_0} \tilde{c}_i^{(0)} u^{ids_2} + v^{t_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|+j}{s_2} u^{\tilde{\gamma}_js_2} v^{(j-1)t_1} \sum_{i=0}^{\tilde{k}_j} \tilde{c}_i^{(j)} u^{ids_2} \right], \\ \dot{v} &= v \left[ \frac{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}{t_1} \sum_{i=0}^{k_0} c_i^{(0)} v^{idt_1} + u^{s_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|+j}{t_1} u^{(j-1)s_2} v^{\gamma_j t_1} \sum_{i=0}^{k_j} c_i^{(j)} v^{idt_1} \right] \end{aligned}$$

como  $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|} \neq 0$  entonces existen  $i_0 = \min \left\{ 0 \leq i \leq k_0 \mid c_i^{(0)} \neq 0 \right\}$  y  $j_0 = \min \left\{ 0 \leq j \leq \tilde{k}_0 \mid \tilde{c}_j^{(0)} \neq 0 \right\}$ . Denotando  $c_{i_0} = c_{i_0}^{(0)}$ ,  $\tilde{c}_{j_0} = \tilde{c}_{j_0}^{(0)}$  y aplicando de nuevo la reparametrización en el tiempo  $dt/d\tau = \frac{t_1}{(r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|)c_{i_0}}$  se tiene el resultado. ■

**Nota:** La proposición anterior también es válida cuando alguna cara adyacente al vértice interior es no acotada. En ese caso será  $\alpha_\ell = \frac{t_2}{t_1} = 0$  con  $(t_1, t_2) = (1, 0)$  o bien,  $\alpha_{\tilde{\ell}} = \frac{s_2}{s_1} = +\infty$  con  $(s_1, s_2) = (0, 1)$ . Sin embargo, no es aplicable a vértices en los ejes del polígono de Newton ya que por ejemplo, si consideramos un vértice  $V = (0, n+1)^T$  en el eje de ordenadas del polígono de Newton. Su cara adyacente superior es el eje de ordenadas con tipo  $(t_1, t_2) = (1, 0)$ . Así,  $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|} \equiv 0$ . Análogamente ocurre para vértices en el eje de abscisas del polígono de Newton.

**Nota:** Dado un vértice interior  $V$  del diagrama de Newton del sistema (2.0.1), si consideramos los tipos  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$  asociados a las caras adyacentes a  $V$ , esto es,  $\alpha_\ell = t_2/t_1$ ,  $\alpha_{\tilde{\ell}} = s_2/s_1$  la constante  $\tilde{c}_{j_0}/c_{i_0}$  que aparece

en la Proposición (2.4.34) está unívocamente determinada por  $V$  y el sistema. Esta constante será de utilidad en lo sucesivo, la denotaremos  $\beta_V$ . Su cálculo explícito es:

$$\begin{aligned}\beta_V &= \frac{\tilde{c}_{j_0}}{c_{i_0}}, \\ i_0 &= \text{mín} \{0 \leq i \leq k \mid c_i \neq 0\}, \\ j_0 &= \text{mín} \{0 \leq j \leq \tilde{k} \mid \tilde{c}_j \neq 0\}\end{aligned}\tag{2.4.17}$$

Siendo  $c_i, (\tilde{c}_j)$  los coeficientes de la función de Hamilton  $h_{r_{\mathbf{t}+|\mathbf{t}|}}(x, y), (h_{r_{\mathbf{s}+|\mathbf{s}|}}(x, y))$  de la parte conservativa de la cara superior (inferior) adyacente a  $V$ , ordenados de mayor a menor exponente en  $x, (y)$ . Además se tiene que cumplir  $h_{r_{\mathbf{t}+|\mathbf{t}|}}h_{r_{\mathbf{s}+|\mathbf{s}|}} \neq 0$ .

Concretamente si  $(m, n)$  es el soporte de  $V$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  y  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$  son los tipos de las caras adyacentes a  $V$ , superior e inferior respectivamente, esto es,  $\alpha_\ell = \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_2}{s_1} = \alpha_{\tilde{\ell}}$ .  $(a, b)^T \neq (0, 0)^T$  el vector de coeficientes de  $V$ . Sean  $(m - it_2, n + it_1), ((m + js_2, n - js_1))$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$  ( $j = 0, 1, \dots, \tilde{k}$ ) los puntos soportes de la cara superior (inferior) adyacente a  $V$  ordenados de mayor a menor abscisa (ordenada). Sean  $(a_i, b_i)^T$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ ,  $((\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)^T$ ,  $j = 0, 1, \dots, \tilde{k}$ ) los vectores de coeficientes asociados a cada uno de los puntos soportes de la cara superior (inferior) adyacente al vértice  $V$ . En particular es  $a = a_0 = \tilde{a}_0$ ,  $b = b_0 = \tilde{b}_0$ . Entonces se tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}h_{r_{\mathbf{t}+|\mathbf{t}|}}(x, y) &= \sum_{i=0}^k c_i x^{m-it_2} y^{n+it_1}, \\ h_{r_{\mathbf{s}+|\mathbf{s}|}}(x, y) &= \sum_{j=0}^{\tilde{k}} \tilde{c}_j x^{m+js_2} y^{n-js_1},\end{aligned}\tag{2.4.18}$$

donde  $c_i = t_1 b_i - t_2 a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$  y  $\tilde{c}_j = s_1 \tilde{b}_j - s_2 \tilde{a}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, \tilde{k}$ .

**Nota:** Hacemos notar que no puede ser  $i_0 j_0 > 0$  ya que para dos tipos distintos  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{s}$  y un vector de coeficientes  $(a, b) \neq (0, 0)$  no se pueden anular a la vez las cantidades  $c_0 = t_1 b - t_2 a$ ,  $\tilde{c}_0 = s_1 b - s_2 a$ .

## 2.5. El Problema de la monodromía

Uno de los problemas clásicos en la teoría cualitativa de sistemas diferenciales analíticos en el plano es el estudio del retrato de fases local en torno

a una singularidad, para caracterizar cuando un punto es un foco o un centro. Este problema es llamado *problema de monodromía* o también *problema centro-foco*.

Para el estudio de este problema, es conveniente aplicar al sistema (2.0.1) el cambio a coordenadas polares generalizadas (2.4.11). Así cualquier órbita  $(x(t), y(t))$  del sistema (2.0.1) definida en un entorno del origen se transforma en un órbita  $(u(t), \theta(t))$  del sistema (2.4.12) definida en la región  $W = \{(u, \theta) \mid 0 < u < \varepsilon, 0 \leq \theta < T\}$ , con  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, siendo  $T$  el periodo de las funciones  $Cs(\theta)$ ,  $Sn(\theta)$  (véase (2.4.10)).

**Definición 2.5.35** Sea  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  un entorno de  $(0, 0)$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  un tipo y sea  $\gamma : (0, +\infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$  un curva analítica. Decimos que  $\gamma(t)$  es una órbita característica de (2.0.1) respecto al tipo  $\mathbf{t}$ . Si cumple:

- $\gamma(t)$  es una órbita del sistema (2.0.1).
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ ,
- Existe  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) \in [0, T)$ .

Hacemos notar que  $\gamma$  debe ser analítica ya que es una órbita del sistema diferencial analítico (2.0.1). Para considerar órbitas que tiendan al origen cuando  $t \rightarrow -\infty$  bastaría realizar un cambio de signo en el tiempo.

**Definición 2.5.36** Una dirección característica de (2.0.1) respecto al tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  es un vector  $(x, y) \in E_{\mathbf{t}}^1$ , con  $E_{\mathbf{t}}^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x^{2t_2} + y^{2t_1} = 1 \\ h_{r+|\mathbf{t}|}(x, y) = 0 \end{array} \right\}$ .

**Nota:** Si  $(x, y) \in E_{\mathbf{t}}^1$ , entonces existe un único  $\theta^* \in [0, T)$  tal que  $x = Cs(\theta^*)$ ,  $y = Sn(\theta^*)$ . Abusando del lenguaje, a veces llamaremos a  $\theta^*$  dirección característica.

**Proposición 2.5.37** Supongamos que  $h_{r+|\mathbf{t}|} \not\equiv 0$ , y sea  $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$  una órbita característica de (2.0.1) respecto al tipo  $\mathbf{t}$ ,  $\theta^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$ . Entonces  $\theta^*$  es una dirección característica de (2.0.1) respecto al tipo  $\mathbf{t}$ . Además, se tiene una, y sólo una, de las siguientes posibilidades:

- Si  $\theta^* = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}$ , entonces  $y$  es un factor de  $h_{r+|t|}(x, y)$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^{t_1}}{x(t)^{t_2}} = 0$ .
- Si  $\theta^* = 0, \frac{T}{2}$ , entonces  $x$  es un factor de  $h_{r+|t|}(x, y)$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^{t_1}}{x(t)^{t_2}} = \pm\infty$ .
- Si  $\theta^* \neq 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}$ , entonces existe  $\tilde{a} \in \mathbb{R} \setminus 0$  tal que  $y^{t_1} - \tilde{a}x^{t_2}$  es un factor de  $h_{r+|t|}(x, y)$ , siendo  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^{t_1}}{x(t)^{t_2}} = \tilde{a}$ .

*Demostración:* Al aplicar el blow-up trigonométrico generalizado descrito en la Proposición 2.4.31, toda órbita característica de (2.0.1) se convierte en una solución de (2.4.12) tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t), \theta(t)) = (0, \theta^*)$  donde  $\theta^* \in [0, T)$ . Por tanto, esta solución tiende a algún equilibrio en el eje invariante, y puesto que  $h_{r+|t|} \not\equiv 0$  debe ser  $h_{r+|t|}(\theta^*) = 0$ .

Si  $\theta^* = 0$  ó  $\frac{T}{2}$ , entonces  $Cs(\theta^*) = 0$  y por tanto  $x$  es un factor de  $h_{r+|t|}(x, y)$ , siendo en este caso  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^{t_1}}{x(t)^{t_2}} = \pm\infty$ .

Si  $\theta^* = \frac{T}{4}$  ó  $\frac{3T}{4}$ , entonces  $Sn(\theta^*) = 0$ , por tanto  $y$  es un factor de  $h_{r+|t|}(x, y)$ , siendo en este caso  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^{t_1}}{x(t)^{t_2}} = 0$ .

Si  $\theta^* \neq 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}$ , entonces  $\tilde{a} = \frac{Sn^{t_1}(\theta^*)}{Cs^{t_2}(\theta^*)} \neq 0, \pm\infty$ , y por tanto  $y^{t_1} - \tilde{a}x^{t_2}$  es un factor de  $h_{r+|t|}(x, y)$ , siendo en este caso  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^{t_1}}{x(t)^{t_2}} = \tilde{a}$ . ■

**Nota:** El recíproco de esta proposición no es cierta. Por ejemplo, el sistema  $\dot{x} = y(x^2 + xy - y^2)$ ,  $\dot{y} = y^2(2x + y) + x^5$  no posee órbitas características respecto a ningún tipo  $\mathbf{t}$  y sin embargo sí posee direcciones características respecto a cualquier tipo  $\mathbf{t}$ . Este hecho se probará más adelante.

**Nota:** Como sabemos, toda órbita característica tiene asociada una dirección característica respecto a un tipo  $\mathbf{t}$ . La Proposición 2.5.37 garantiza que toda órbita característica tiene asociado un factor de la función de Hamilton del primer término cuasihomogéneo  $\mathbf{F}_r$ . Por esta razón, diremos que la órbita característica está asociada al factor  $f(x, y)$  de  $h_{r+|t|}$ , donde  $f(x, y) = y$  si cumple  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^{t_1}}{x(t)^{t_2}} = 0$ ,  $f(x, y) = x$  si cumple  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^{t_1}}{x(t)^{t_2}} = \pm\infty$ , o  $f(x, y) = y^{t_1} - \tilde{a}x^{t_2}$  si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)^{t_1}}{x(t)^{t_2}} = \tilde{a}$ .

Si localmente no existen órbitas del sistema (2.0.1) que tiendan al origen cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , entonces el sistema (2.0.1) poseerá un centro en el origen. La otra

posibilidad, (esto es, un punto singular con infinitas órbitas periódicas en un entorno que se acumulan en él pero que no llenan completamente dicho entorno), corresponderá a un equilibrio tipo centro-foco y no puede darse para sistemas analíticos, (véanse Il'yashenko [40] y Écalle [27]).

A continuación consideramos el caso de que existan soluciones que tiendan al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Teorema 2.5.38** *Localmente, cualquier órbita del sistema analítico (2.0.1) que tienda al origen cuando  $t \rightarrow \infty$  verifica una y sólo una de las siguientes posibilidades:*

- a) *La órbita tiende al origen en forma espiral y, en este caso, todas las órbitas tienden al origen en forma espiral (foco).*
- b) *La órbita es una órbita característica de (2.0.1) respecto a cualquier tipo.*

*Demostración:* Como dijimos al principio de esta sección, localmente, las órbitas  $(x(t), y(t))$  del sistema (2.0.1), se transforman mediante el cambio (2.4.11) en órbitas  $(u(t), \theta(t))$  del sistema (2.4.12) definidas en la región  $W = \{(u, \theta) \mid 0 < u < \varepsilon, 0 \leq \theta < T\}$ .

Veamos en primer lugar que las únicas posibilidades son:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta^* \in [0, T)$ , o bien  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \pm\infty$ . En caso contrario la solución  $(x(t), y(t))$  tiende al origen en forma oscilatoria. Esto ocurre cuando el conjunto  $\Theta = \{\theta(t) \mid t \in [0, +\infty)\}$  es acotado y existen  $\theta_1, \theta_2 \in [0, T)$ ,  $\theta_1 < \theta_2$ , tales que  $\theta_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf(\theta(t))$ ,  $\theta_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup(\theta(t))$ . Esto implica que existen infinitos equilibrios en el segmento  $u = 0$ ,  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ . Como el sistema es analítico debe ser  $h_{r+|\mathbf{t}|}(\theta) \equiv 0$ . Si en el sistema (2.4.12) reparametrizamos el tiempo obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\begin{aligned} u' &= 2t_1 t_2 \mu_r(\theta) + u \sum_{j \geq 1} \left[ -h'_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta) + 2t_1 t_2 \mu_{r+j}(\theta) \right] u^{j-1}, \\ \theta' &= \sum_{j \geq 1} (r + j + |\mathbf{t}|) h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta) u^{j-1}. \end{aligned}$$

Como  $\mu_r \neq 0$  ya que en caso contrario sería  $\mathbf{F}_r \equiv \mathbf{0}$ , existe un número finito de valores de  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  para los cuales  $\mu_r(\theta_i) = 0$ . Sea  $\theta^* \in [0, T)$  tal que  $\theta_1 < \theta^* < \theta_2$  y  $\theta^* \neq \theta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , entonces  $(u, \theta) = (0, \theta^*)$  no es un equilibrio. En un entorno de  $(u, \theta) = (0, \theta^*)$ , las órbitas atraviesan el eje  $u = 0$

transversalmente. Por el teorema de existencia y unicidad la órbita  $(u(t), \theta(t))$  no puede oscilar entorno a  $\theta = \theta^*$  de donde obtenemos la contradicción.

Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta^* \in [0, T)$ , se tiene el caso **b**).

Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \pm\infty$ , entonces no existen órbitas  $u(\theta)$  del sistema (2.4.12) que tiendan a un punto del segmento  $u = 0, 0 \leq \theta < T$ , y sólo existe un número finito de órbitas que cumplen  $u(0) = u(T)$  en la región  $W$ , ya que en caso contrario sería un centro. Tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, cualquier órbita cumplirá  $u(0) \neq u(T)$  en la región  $W$ . Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, debe cumplirse  $u(0) < u(T)$  (foco repulsivo) o bien  $u(0) > u(T)$  (foco atractivo). En ambos casos se tiene **a**). ■

**Nota:** El anterior teorema nos permite asegurar que el tipo no influye en que una órbita sea característica o no. Esto hace posible la siguiente definición:

**Definición 2.5.39** *El origen es un punto singular monodrómico para el sistema (2.0.1) si no posee órbitas características.*

## 2.6. Condiciones suficientes de determinación topológica

**Proposición 2.6.40** *El sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x [\lambda y^m + y^{m+1} \Phi_1(y) + x \Phi_2(x, y)], \\ \dot{y} &= y^{2n+1} + y^{2n+2} \Psi_1(y) + x \Psi_2(x, y),\end{aligned}$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $n, m \in \mathbb{N}_0$  posee órbitas que tienden al origen cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  distintas del eje invariante  $x = 0$ .

*Demostración:* La dinámica local del eje invariante  $x = 0$  es repulsiva. Debido a que la potencia menor en  $y$  de  $\dot{y}$  tiene exponente impar y utilizando el teorema de Malgrange, existirá al menos una curva de isoclinas horizontales con multiplicidad impar  $y = f_h(x)$ . Consideremos las dos curvas de isoclinas verticales más próximas a  $y = f_h(x)$  y situadas a ambos lados (éstas existen



ya que al menos hay dos isoclinas verticales, el eje  $x = 0$  para  $x > 0$  y para  $x < 0$ ). Por ser la multiplicidad de  $y = f_h(x)$  impar, las componentes verticales del campo a ambos lados de la isoclina horizontal son de direcciones opuestas. Mediante un cambio podemos suponer que la isoclina horizontal es  $y = x$  y las isoclinas verticales son  $y = \frac{1}{2}x$  y  $y = 2x$ . También podemos suponer (cambiando el signo del tiempo, si fuese preciso) que sobre la isoclina vertical  $y = \frac{1}{2}x$  la dirección del campo es  $(0, 1)$  y sobre  $y = 2x$  es  $(0, -1)$ .

Si suponemos que la dirección del campo sobre  $y = x$  es  $(1, 0)$  entonces todas las órbitas comprendidas entre los rayos  $y = x$ ,  $y = 2x$  tienden al origen cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Si por el contrario la dirección del campo sobre  $y = x$  es  $(-1, 0)$  entonces todas las órbitas comprendidas entre los rayos  $y = x$ ,  $y = 2x$  tienden al origen cuando  $t \rightarrow +\infty$ . ■

**Proposición 2.6.41** *El sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1 y^{2m-1} + y^{2m} \Phi_1(y) + x \Phi_2(x, y), \\ \dot{y} &= \lambda_2 x^{2n-1} + x^{2n} \Psi_1(x) + y \Psi_2(x, y),\end{aligned}$$

con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  y  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$ , posee órbitas que tienden al origen cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

*Demostración:* Reparametrizando el tiempo, el sistema se transforma en:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^{2m-1} + y^{2m} \Phi_1(y) + x \Phi_2(x, y), \\ \dot{y} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x^{2n-1} + x^{2n} \Psi_1(x) + y \Psi_2(x, y).\end{aligned}$$

Probaremos que el sistema no es monodrómico, para lo cual comprobaremos que existen dos tipos respecto de los cuales la velocidad angular del sistema transformado mediante el cambio a coordenadas polares generalizadas (2.4.11) tiene distinto signo.

Respecto al tipo  $\mathbf{t} = (2m - 2, 1)$ , el primer término del campo es  $\mathbf{F}_1(x, y) = (y^{2m-1}, 0)^T$  y la función de Hamilton de su parte conservativa es  $h_{2m}(x, y) = -y^{2m}$ , de manera que  $\dot{\theta} = -\text{Sn}^{2m}(\theta) \leq 0$ .

Tomando ahora el tipo  $\mathbf{t} = (1, 2n - 2)$ , el primer término del campo es  $\mathbf{F}_1(x, y) = \left(0, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x^{2n-1}\right)^T$  y la función de Hamilton de su parte conservativa es  $h_{2n}(x, y) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x^{2n}$ . En consecuencia  $\dot{\theta} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \text{Cs}^{2n}(\theta) \geq 0$ .

Por tanto el sistema no es monodrómico, como se quería demostrar. ■

**Proposición 2.6.42** *Sea el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= y \left[ \lambda y^n + y^{n+1} \Psi_1(y) + x \Psi_2(x, y) \right],\end{aligned}$$

con  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $\lambda < 0$ , entonces existen órbitas características en el primer cuadrante distintas a los ejes y si  $\lambda > 0$  las únicas órbitas características son los ejes invariantes. Además, si existen órbitas características distintas a los ejes, éstas son de la forma  $y = \tau(x)$ , con  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau(x)}{x^{1/n}} = +\infty$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración:* Existe una única isoclina vertical  $x = 0$  con dinámica atractiva. La isoclina horizontal  $y = 0$  tiene dinámica atractiva si  $\lambda < 0$ , o repulsiva si  $\lambda > 0$ . Si no existe ninguna otra isoclina horizontal, el primer cuadrante es un único sector y se cumple el enunciado. Si existen más isoclinas horizontales en el primer cuadrante, todas deben tener la misma dinámica que la isoclina  $y = 0$ , ya que en caso contrario, debería existir entre cada una de las isoclinas horizontales con distinta dinámica una isoclina vertical, lo cual no es posible. De esta forma la dinámica horizontal del campo siempre es la misma, hacia la derecha si  $\lambda > 0$  o hacia la izquierda si  $\lambda < 0$ , de donde obtenemos el resultado.

En cuanto a la forma de la solución, ésta debe ser tangente a la variedad de centros  $x = 0$ . Si suponemos que es de tipo potencial:  $x = \lambda_1 y^\gamma + o(y^\gamma)$ , con  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > 0$ , entonces  $\lambda_1 \gamma \lambda y^{\gamma+n} = -\lambda_1 y^\gamma$ , lo cual es imposible, de donde obtenemos el resultado. ■

**Proposición 2.6.43** *Sea  $h_{r+|t|} \in \mathcal{P}_{r+|t|}^t$  la función de Hamilton asociada al primer término  $\mathbf{F}_r$  del sistema (2.0.1). Si  $h_{r+|t|} \not\equiv 0$  y no posee factores reales de la forma  $x$ ,  $y$  o  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2}$ , (véase (2.3.6)), entonces el origen del sistema (2.0.1) es monodrómico.*

*Demostración:* En el caso en que  $h_{r+|\mathbf{t}|}(\theta)$  no se anule, aplicando al sistema (2.4.12) la reparametrización en el tiempo  $dt = (r + |\mathbf{t}|)h_{r+|\mathbf{t}|}(\theta)d\tau$ , obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u \sum_{j=0}^{\infty} u^j \left[ -\frac{h'_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta)}{(r+|\mathbf{t}|)h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta)} + 2t_1 t_2 \frac{\mu_{r+j}(\theta)}{(r+|\mathbf{t}|)h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta)} \right], \\ \dot{\theta} &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(r+j+|\mathbf{t}|)h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta)}{(r+|\mathbf{t}|)h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta)} u^j,\end{aligned}$$

(aquí hemos vuelto a denotar  $\dot{u} = \frac{du}{d\tau}$  y  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau}$ ). Es fácil comprobar que no existen equilibrios en el eje  $u = 0$ , y por lo tanto el equilibrio del sistema (2.0.1) es monodrómico. ■

**Proposición 2.6.44** Sean  $\mu_r \in \mathcal{P}_r^{\mathbf{t}}$  y  $h_{r+|\mathbf{t}|} \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$  los polinomios asociados al primer término  $\mathbf{F}_r$  del sistema (2.0.1). Entonces, se tiene:

- a) Si  $h_{r+|\mathbf{t}|} \equiv 0$  y  $\mu_r \not\equiv 0$ , el origen es un nodo: todas las órbitas de (2.0.1) se acercan o alejan del origen.
- b) Si  $h_{r+|\mathbf{t}|} \not\equiv 0$  y posee algún factor  $f(x, y)$  de la forma  $x, y$  o  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2}$  (véase (2.3.8)) con orden de multiplicidad impar, entonces existen órbitas características de (2.0.1) asociadas al factor  $f(x, y)$ .
- c) Si  $h_{r+|\mathbf{t}|} \not\equiv 0$  y posee algún factor  $f(x, y)$  de la forma  $x, y$  o  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2}$  con orden de multiplicidad par, y tal que  $f(x, y)$  no sea factor de  $\mu_r$ , entonces existen órbitas características de (2.0.1) asociadas al factor  $f(x, y)$ .
- d) Si  $h_{r+|\mathbf{t}|} \not\equiv 0$  y posee algún factor  $f(x, y)$  de la forma  $x, y$  o  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2}$  con orden de multiplicidad  $2m$ , tal que sea factor de  $\mu_r(x, y)$  con orden de multiplicidad  $2n$  siendo  $1 \leq n < m$ , entonces existen órbitas características de (2.0.1) asociadas al factor  $f(x, y)$ .
- e) Si  $h_{r+|\mathbf{t}|} \not\equiv 0$  y posee algún factor  $f(x, y)$  de la forma  $x, y$  o  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2}$  con orden de multiplicidad  $2m$  tal que sea factor de  $\mu_r(x, y)$  con orden de multiplicidad  $n \geq 2m$  o bien con orden de multiplicidad  $2n - 1$  con  $1 \leq n < m$ , y tal que  $f(x, y)$  no sea factor de  $h_{r+|\mathbf{t}|+1}$ , entonces existen órbitas características de (2.0.1) asociadas al factor  $f(x, y)$ .

*Demostración:*

- a) En el caso  $h_{r+|\mathbf{t}|} \equiv 0$ , el sistema (2.4.12), después de reparametrizar el tiempo, queda:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 2t_1 t_2 \mu_r(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ -h'_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta) + 2t_1 t_2 \mu_{r+j}(\theta) \right] u^j, \\ \dot{\theta} &= u \sum_{j=1}^{\infty} (r+j+|\mathbf{t}|) h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta) u^{j-1}.\end{aligned}$$

En un entorno de  $(u, \theta) = (0, \theta)$ , para cualquier valor de  $\theta$  que no anule  $\mu_r(\theta)$ , es una caja de flujo.

- b) Para éste y los restantes apartados consideraremos  $\theta_0$  una raíz de  $h_{r+|\mathbf{t}|}(\theta)$ . El cambio  $\alpha = \theta - \theta_0$  lleva el equilibrio  $(u, \theta) = (0, \theta_0)$  del sistema (2.4.12) al origen de coordenadas. Podemos escribir, para todo  $j \geq 0$ :

$$\begin{aligned}(r+|\mathbf{t}|+j)h_{r+|\mathbf{t}|+j}(\alpha) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(j)} \alpha^i, \quad c_0^{(0)} = 0, \\ 2t_1 t_2 \mu_{r+j}(\alpha) &= \sum_{j=0}^{\infty} d_i^{(j)} \alpha^i.\end{aligned}$$

El sistema (2.4.12), en las nuevas coordenadas  $(u, \alpha)$ , resulta:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u \sum_{j \geq 0} \left[ \sum_{i \geq 0} (d_i^{(j)} - \frac{i+1}{r+|\mathbf{t}|+j} c_{i+1}^{(j)}) \alpha^i \right] u^j, \\ \dot{\alpha} &= \sum_{i \geq 1} c_i^{(0)} \alpha^i + \sum_{j \geq 1} \left[ \sum_{i \geq 0} c_i^{(j)} \alpha^i \right] u^j.\end{aligned}\tag{2.6.19}$$

En este caso, si suponemos que es una raíz de orden impar de  $h_{r+|\mathbf{t}|}$ , se tiene:  $c_0^{(0)} = \dots = c_{2j}^{(0)} = 0$  y  $c_{2j+1}^{(0)} \neq 0$  para  $j \geq 0$ . El resultado se obtiene aplicando la Proposición 2.6.40.

- c) Sea  $\theta = \theta_0$  una raíz de  $h_{r+|\mathbf{t}|}(\theta)$  de multiplicidad  $2m > 1$ , esto es,  $c_0^{(0)} = \dots = c_{2m-1}^{(0)} = 0$  y  $c_{2m}^{(0)} \neq 0$ . Si  $c_0^{(j)} = 0$  para todo  $j \geq 0$ , entonces el eje  $\alpha = 0$  es invariante para el sistema (2.6.19). Por tanto,  $f(x, y) = 0$  es una curva invariante del sistema (2.0.1) y se verifica el enunciado ya que el origen es un equilibrio aislado. En caso contrario, sea  $p$  el menor entero positivo tal que  $c_0^{(p)}(0) \neq 0$ . Si supongamos que  $\theta = \theta_0$  no es raíz

de  $\mu_r$ , se tiene  $d_0^{(0)} \neq 0$ . En resumen, se tiene:  $c_0^{(1)} = \dots = c_0^{(p-1)} = 0$ ,  $c_1^{(0)} = \dots = c_{2m-1}^{(0)} = 0$  y  $d_0^{(0)} c_0^{(p)} c_{2m}^{(0)} \neq 0$ . Así, el sistema (2.6.19) resulta:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= d_0^{(0)} u + \alpha u \Psi_1(\alpha) + u^2 \Psi_2(u, \alpha), \\ \dot{\alpha} &= c_{2m}^{(0)} \alpha^{2m} + \alpha^{2m+1} \Phi_1(\alpha) + c_0^{(p)} u^p + u \alpha \Phi_2(u, \alpha) + u^{p+1} \Phi_3(u, \alpha).\end{aligned}$$

Considerando ahora el tipo  $\mathbf{t} = (1, p)$ , el primer término del sistema (2.6.19) es  $\mathbf{F}_0 = (d_0^{(0)} u, c_0^{(p)} u^p)^T$  siendo  $h_{p+1}(u, \alpha) = \frac{1}{p+1} u (c_0^{(p)} u^p - p d_0^{(0)} \alpha)$ . El resultado se tiene aplicando el apartado **b)** anterior al factor simple  $c_0^{(p)} u^p - p d_0^{(0)} \alpha$ .

- d)** Supongamos que  $\theta = \theta_0$  es una raíz de  $h_{r+|t|}(\theta)$  con orden de multiplicidad  $2m$  y raíz de  $\mu_r(\theta)$  con orden de multiplicidad  $2n$ , con  $1 \leq n < m$ . En esta situación, se tiene:  $c_0^{(0)} = \dots = c_{2n+1}^{(0)} = 0$ ,  $d_0^{(0)} = \dots = d_{2n-1}^{(0)} = 0$  y  $d_{2n}^{(0)} \neq 0$ . Así, el sistema (2.6.19) resulta:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= d_{2n}^{(0)} \alpha^{2n} u + \alpha^{2n+1} u \Psi_1(\alpha) + u^2 \Psi_2(u, \alpha), \\ \dot{\alpha} &= \alpha^{2n+2} \Phi_1(\alpha) + u \Phi_2(u, \alpha).\end{aligned}$$

Tomando el tipo  $\mathbf{t} = (2n + 1, 1)$ , su primer término es

$$\mathbf{F}_{2n}(u, \alpha) = (d_{2n}^{(0)} \alpha^{2n} u, 0)^T,$$

siendo

$$h_{4n+2}(u, \alpha) = -\frac{1}{4n+2} d_{2n}^{(0)} \alpha^{2n+1} u.$$

Como aparece el factor real  $\alpha^{2n+1}$ , y tiene multiplicidad impar, aplicando el apartado **b)** se obtiene el resultado.

- e)** Supongamos que  $\theta = \theta_0$  es una raíz de  $h_{r+|t|}(\theta)$  con orden de multiplicidad  $2m$  y raíz de  $\mu_r(\theta)$  con orden de multiplicidad  $1 \leq n_0$ ,  $n_0 \neq 2m - 1$ . Consideramos las siguientes situaciones, según el orden de multiplicidad  $n_0$ :

- e1)** Si  $n_0 = n \geq 2m$ , entonces:  $c_0^{(0)} = \dots = c_{2m-1}^{(0)} = 0$ ,  $d_0^{(0)} = \dots = d_{2m-1}^{(0)} = 0$  y  $c_{2m}^{(0)} \neq 0$ . Además,  $c_0^{(1)} \neq 0$ . Así, el sistema (2.6.19)

resulta:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{2m}{r+|\mathbf{t}|}c_{2m}^{(0)}\alpha^{2m-1}u + \alpha^{2m}u\Psi_1(\alpha) + u^2\Psi_2(u, \alpha), \\ \dot{\alpha} &= c_{2m}^{(0)}\alpha^{2m} + \alpha^{2m+1}\Phi_1(\alpha) + c_0^{(1)}u + u\alpha\Phi_2(u, \alpha) + u^2\Phi_3(u, \alpha).\end{aligned}$$

Tomando el tipo  $\mathbf{t} = (2m, 1)$ , su primer término es

$$\mathbf{F}_{2m-1}(u, \alpha) = \left(-\frac{2m}{r+|\mathbf{t}|}c_{2m}^{(0)}\alpha^{2m-1}u, c_{2m}^{(0)}\alpha^{2m} + c_0^{(1)}u\right)^T,$$

siendo

$$h_{4m}(u, \alpha) = \frac{1}{2}u \left[ \left(1 + \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}\right) c_{2m}^{(0)}\alpha^{2m} + c_0^{(1)}u \right].$$

Como posee un factor real simple, aplicando el apartado **b)**, se obtiene el resultado.

**e2)** Si  $n_0 = 2n - 1 < 2m - 1$ , entonces:  $c_0^{(0)} = \dots = c_{2n}^{(0)} = 0$ ,  $d_0^{(0)} = \dots = d_{2n-2}^{(0)} = 0$  y  $d_{2n-1}^{(0)} \neq 0$ . Además,  $c_0^{(1)} \neq 0$ . Así, el sistema (2.6.19) resulta:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= d_{2n-1}^{(0)}\alpha^{2n-1}u + \alpha^{2n}u\Psi_1(\alpha) + u^2\Psi_2(u, \alpha), \\ \dot{\alpha} &= \alpha^{2n+2}\Phi_1(\alpha) + c_0^{(1)}u + u\alpha\Phi_2(u, \alpha) + u^2\Phi_3(u, \alpha).\end{aligned}$$

Tomando el tipo  $\mathbf{t} = (2n, 1)$ , su primer término es

$$\mathbf{F}_{2n-1}(u, \alpha) = \left(d_{2n-1}^{(0)}\alpha^{2n-1}u, c_0^{(1)}u\right)^T,$$

siendo

$$h_{4n}(u, \alpha) = \frac{1}{4n}u \left[ -d_{2n-1}^{(0)}\alpha^{2n} + 2nc_0^{(1)}u \right].$$

Como posee un factor real simple, aplicando el apartado **b)**, se obtiene el resultado. ■

**Proposición 2.6.45** *Sea  $V$  un vértice del diagrama de Newton del sistema (2.0.1), cuyo soporte es  $(m, n)$ . Entonces, existen órbitas características distintas de los ejes cuando se cumple alguna de las siguientes condiciones :*

a) El eje  $x = 0$  no es invariante y  $m$  es impar.

b) El eje  $y = 0$  no es invariante y  $n$  es impar.

*Demostración:* Sea  $(a, b)$  el vector de coeficientes del vértice  $V$ . Siempre es posible elegir un tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  tal que  $\alpha_\ell < \frac{t_2}{t_1} < \alpha_{\bar{\ell}}$  y  $t_1b - t_2a \neq 0$ . Por tanto  $\mathbf{F}_r(x, y) = (ax^m y^{n-1}, bx^{m-1} y^n)^T$ , siendo  $h_{r+|\mathbf{t}|}(x, y) = (t_1b - t_2a)x^m y^n \neq 0$ .

Si el eje  $x = 0$  no es invariante y  $m$  es impar,  $h_{r+|\mathbf{t}|}(x, y)$  posee el factor  $x$  con orden de multiplicidad impar. Por la Proposición 2.6.44 **b)** deducimos que existen órbitas características asociadas al factor  $x$  no invariante. Por lo tanto, la órbita es distinta de los ejes. La demostración del apartado **b)** es análoga.

■

**Proposición 2.6.46** *Sea  $V$  un vértice interior del diagrama de Newton. Sean  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  y  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$  con  $\alpha_\ell \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_2}{s_1} \leq \alpha_{\bar{\ell}}$ . Si  $\alpha_V \in \left(\frac{t_2}{t_1}, \frac{s_2}{s_1}\right)$ , entonces existen órbitas características del sistema (2.0.1) en el primer cuadrante, definidas como  $y = f(x)$  con  $\varepsilon_1 x^{s_2/s_1} \leq y \leq \frac{1}{\varepsilon_2} x^{t_2/t_1}$ ,  $0 < \varepsilon_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2$ . Por el contrario, si  $\alpha_V \notin \left[\frac{t_2}{t_1}, \frac{s_2}{s_1}\right]$ , no existen soluciones de este tipo.*

*Demostración:* Sea  $(a, b)^T$  el vector de coeficientes de  $V$ . Entonces, se cumple que  $\alpha_V \in \left(\frac{t_2}{t_1}, \frac{s_2}{s_1}\right)$  si y sólo si  $ab \neq 0$  y  $\frac{s_1b - s_2a}{t_1b - t_2a} < 0$ . Por tanto, al aplicar la Proposición 2.4.34 con los tipos  $\mathbf{t}, \mathbf{s}$ , el sistema (2.0.1) se transforma en (2.4.15) siendo  $i_0 = 0$ ,  $j_0 = 0$ ,  $\tilde{c}_0 = s_1b - s_2a$ ,  $c_0 = t_1b - t_2a$  y  $\frac{t_1(r_s + |\mathbf{s}|)}{s_2(r_t + |\mathbf{t}|)} \frac{\tilde{c}_{j_0}}{c_{i_0}} < 0$ . Por tanto, el origen de este sistema es un nodo, existiendo infinitas órbitas características definidas en el primer cuadrante. Éstas órbitas se transforman, mediante el correspondiente blow-down, en órbitas características del sistema (2.0.1) definidas en el primer cuadrante y comprendidas en el sector  $\varepsilon_1 x^{s_2/s_1} \leq y \leq \frac{1}{\varepsilon_2} x^{t_2/t_1}$ .

Si  $\alpha_V \notin \left[\frac{t_2}{t_1}, \frac{s_2}{s_1}\right]$  el origen del sistema (2.4.15) es un punto de silla, y las únicas órbitas características son los ejes invariantes. Por tanto, no existen órbitas características del sistema (2.0.1) como las anteriormente especificadas.

■

**Proposición 2.6.47** *Sea  $V$  un vértice interior del diagrama de Newton. Sean  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  y  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ , los tipos de las caras adyacentes a  $V$ , esto es,  $\alpha_\ell = \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_2}{s_1} = \alpha_{\bar{\ell}}$ . Sean  $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}$ ,  $h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|}$  las funciones de Hamilton de las partes conservativas asociadas a dichas caras. Si  $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|} \neq 0$  y  $\beta_V > 0$  (véase (2.4.17)), entonces no existen órbitas características del sistema (2.0.1) en el primer cuadrante definidas como  $y = f(x)$  con  $\varepsilon_1 x^{\alpha_{\bar{i}}} \leq y \leq \frac{1}{\varepsilon_2} x^{\alpha_\ell}$ ,  $0 < \varepsilon_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2$ . Por el contrario, si  $\beta_V < 0$ , las mencionadas órbitas sí existen.*

*Además, si  $\beta_V < 0$ , las órbitas características  $y = f(x)$  con  $\varepsilon_1 x^{\alpha_{\bar{i}}} \leq y \leq \frac{1}{\varepsilon_2} x^{\alpha_\ell}$ ,  $0 < \varepsilon_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2$  son de la forma:*

- a)  $y = \lambda x^\gamma + o(x^\gamma)$ , donde  $0 < \lambda \in \mathbb{Q}^+$  y  $\gamma \in \mathbb{Q}$  con  $\alpha_{\bar{i}} \leq \gamma \leq \alpha_\ell$ , si  $i_0 = j_0 = 0$ .
- b)  $y = x^{\alpha_\ell} \tau(x) + o(x^{\alpha_\ell} \tau(x))$ , con  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau(x)}{x^{1/n}} = +\infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , si  $i_0 > 0$ .
- c)  $x = y^{\alpha_{\bar{i}}} \tau(y) + o(y^{\alpha_{\bar{i}}} \tau(y))$ , con  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tau(y)}{y^{1/n}} = +\infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , si  $j_0 > 0$ .

*Demostración:* Aplicando el blow-up de la Proposición 2.4.34 con los tipos  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{s}$  asociados a las caras adyacentes del vértice  $V$ , obtenemos el sistema (2.4.15). Por otra parte, por la Nota de la Definición 2.4.17 se cumple que  $i_0 j_0 = 0$ . Aplicando la Proposición 2.6.42, se obtiene que si  $\beta_V < 0$  el sistema (2.4.15) posee órbitas características en el primer cuadrante distinta de los ejes, mientras que si  $\beta_V > 0$  las únicas órbitas características son los ejes invariantes. Mediante el correspondiente blow-down, las órbitas características del sistema (2.4.15) distintas de los ejes se transforman en órbitas características en el primer cuadrante del sistema (2.0.1), comprendidas en el sector  $\left\{ \varepsilon_1 x^{\frac{s_2}{s_1}} \leq y \leq \frac{1}{\varepsilon_2} x^{\frac{t_2}{t_1}} \right\}$ , de donde obtenemos el resultado.

A continuación, veremos la forma de las órbitas características si  $\beta_V < 0$ .

- a) Si  $i_0 = j_0 = 0$ , entonces el sistema (2.4.15) es un nodo orbitalmente equivalente a

$$\begin{aligned} u' &= -u \left[ \frac{t_1(s_1 m + s_2 n)}{s_2(t_1 m + t_2 n)} \beta_V + u \Phi_1(u) + v \Phi_2(u, v) \right], \\ v' &= v. \end{aligned}$$



Aplicando la Proposición 2.6.42, se llega al resultado cambiando  $x$  por  $y$ .

b) Si  $i_0 > 0$ , entonces debe ser  $j_0 = 0$  y el sistema (2.4.15) es orbitalmente equivalente a

$$\begin{aligned} u' &= -u, \\ v' &= v \left[ \frac{s_2(t_1m+t_2n)}{t_1(s_1m+s_2n)} \frac{1}{\beta_V} v^{i_0 dt_1} + v^{(i_0+1)dt_1} \Psi_1(v) + u \Psi_2(u^{s_2}, v^{t_1}) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 2.6.42, se llega al resultado.

c) Si  $j_0 > 0$  debe ser  $i_0 = 0$ , y el sistema (2.4.15) es orbitalmente equivalente a

$$\begin{aligned} u' &= -u \left[ \frac{t_1(s_1m+s_2n)}{s_2(t_1m+t_2n)} \beta_V u^{j_0 ds_2} + u^{(j_0+1)ds_2} \Phi_1(u) + v^{t_1} \Phi_2(u^{s_2}, v^{t_1}) \right], \\ v' &= v. \end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 2.6.42, se llega al resultado cambiando  $x$  por  $y$ .

■

**Nota:** De ahora en adelante, llamaremos órbitas características definidas en el primer cuadrante asociadas al vértice  $V$  aquellas de la forma  $y = f(x)$  tal que  $\varepsilon_1 x^{\alpha_i} \leq y \leq \frac{1}{\varepsilon_2} x^{\alpha_\ell}$ ,  $0 < \varepsilon_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2$ .

La anterior proposición determina la existencia de órbitas características del sistema (2.0.1) en el primer cuadrante asociadas al vértice  $V$ . Para aplicarla a órbitas característica asociadas a vértices pero situadas en otros cuadrantes, tenemos que aplicar los siguientes cambios de variables:  $u = (-1)^{\sigma_1} x$ ,  $v = (-1)^{\sigma_2} y$ , donde  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$  (cambiamos el cuarto por el primer cuadrante),  $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$  (cambiamos el segundo por el primer cuadrante) o  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  (cambiamos el tercer por el primer cuadrante). Tras estos cambios, cambiará el valor de  $\beta_V$ . Denotaremos  $\beta_V^{(\sigma_1, \sigma_2)}$  el valor de esta constante después de aplicar dicho cambio.

El siguiente lema encuentra la relación que existe entre  $\beta_V$  y  $\beta_V^{(\sigma_1, \sigma_2)}$ .

**Lema 2.6.48** *Sea  $V$  un vértice interior del diagrama de Newton del sistema (2.0.1) para el que las funciones de Hamilton de las partes conservativas asociadas a las caras adyacentes a  $V$  no son idénticamente nulas. Entonces*

$$\beta_V^{(\sigma_1, \sigma_2)} = (-1)^{i_0(t_1\sigma_2 + t_2\sigma_1) + j_0(s_1\sigma_2 + s_2\sigma_1)} \beta_V.$$

*Demostración:* Sea  $(m, n)$  el soporte del vértice  $V$  y  $\mathbf{t}, \mathbf{s}$  los tipos de las caras adyacentes a  $V$  superior e inferior, respectivamente. Si las funciones de Hamilton asociadas a las caras adyacentes al vértice  $V$ , expresadas en (2.4.18), cumplen  $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|} h_{r_{\mathbf{s}}+|\mathbf{s}|} \neq 0$ , entonces existen los valores  $i_0, j_0$  definidos en (2.4.17). Aplicando el apartado **b)**, del Lema 2.3.30 se tiene que

$$\begin{aligned} \beta_V^{(\sigma_1, \sigma_2)} &= \frac{(-1)^{(m+j_0s_2+1)\sigma_1 + (n-j_0s_1+1)\sigma_2} \tilde{c}_{j_0}}{(-1)^{(m-i_0t_2+1)\sigma_1 + (n+i_0t_1+1)\sigma_2} c_{i_0}} = (-1)^{(j_0s_2+i_0t_2)\sigma_1 + (j_0s_1+i_0t_1)\sigma_2} \frac{\tilde{c}_{j_0}}{c_{i_0}} \\ &= (-1)^{i_0(t_1\sigma_2 + t_2\sigma_1) + j_0(s_1\sigma_2 + s_2\sigma_1)} \beta_V \end{aligned}$$

■

Dado un vértice  $V$ , si  $\beta_V > 0$  sabemos que no existen órbitas características asociadas al vértice  $V$  definidas en el primer cuadrante. La siguiente proposición es una consecuencia del lema anterior, y determina condiciones para que existan órbitas características asociadas al vértice  $V$  definidas en otros cuadrantes diferentes del primero.

**Proposición 2.6.49** *Sea  $V$  un vértice interior del diagrama de Newton del sistema (2.0.1), con  $\beta_V > 0$ . Entonces:*

- a) *Si  $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$  y  $j_0s_1 + i_0t_1$  es impar, existen órbitas características del sistema (2.0.1) en el segundo cuadrante asociadas al vértice  $V$ .*
- b) *Si  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$  y  $j_0s_2 + i_0t_2$  es impar existen órbitas características del sistema (2.0.1) en el cuarto cuadrante asociadas al vértice  $V$ .*
- c) *Si  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  y  $i_0(t_1 + t_2) + j_0(s_1 + s_2)$  es impar existen órbitas características del sistema (2.0.1) en el tercer cuadrante asociadas al vértice  $V$ .*

## 2.7. Condiciones necesarias de no monodromía

**Definición 2.7.50** Una función  $y = \tau(x)$  se dice flat en el origen si  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau(x)}{x^n} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposición 2.7.51** Si el sistema (2.0.1) posee una solución  $y = \tau(x)$  con  $\tau(x)$  una función flat en el origen, entonces el eje  $y = 0$  es invariante.

*Demostración:* Probémoslo por reducción al absurdo. Supongamos que el eje  $y = 0$  no es invariante. Entonces, existe  $k \in \mathbb{Z}^+$  y  $b_k \neq 0$  tal que el sistema (2.0.1) se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ b_k x^k + x^{k+1} g_1(x) + y g_2(x, y) \end{pmatrix},$$

donde  $P(0, 0) = g_2(0, 0) = g_1(0) = 0$  y  $b_k \neq 0$ . Imponiendo que  $y = \tau(x)$  sea una solución resulta:

$$0 = \dot{y} - \tau'(x)\dot{x} = b_k x^k + x^{k+1} g_1(x) + \tau(x) g_2(x, \tau(x)) - \tau'(x) P(x, \tau(x))$$

De aquí, deducimos que el coeficiente de la potencia menor en  $x$  del segundo miembro de la anterior igualdad debe ser cero, concretamente,  $b_k = 0$ . Lo cual es contradictorio. ■

**Definición 2.7.52** Diremos que una órbita característica es flat en el origen con el eje  $y = 0$ , ( $x = 0$ ) si es de la forma  $y = \tau(x)$ , ( $x = \tau(y)$ ), donde  $\tau$  es una función flat en el origen.

**Proposición 2.7.53** Si el sistema (2.0.1) posee una órbita característica en el primer cuadrante que no sea flat con  $x = 0$  o  $y = 0$ , entonces se tiene una, y sólo una, de las siguientes situaciones:

- c1)** Existe una cara del diagrama de Newton de (2.0.1) con tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  tal que  $h_{r_{\mathbf{t}}+|\mathbf{t}|}(x, y) \equiv 0$  y la órbita es de la forma  $y = \tilde{a} x^{\frac{t_2}{t_1}} + o(x^{\frac{t_2}{t_1}})$ , para cierto  $\tilde{a} \in \mathbb{R} \setminus 0$ .

- c2)** Existe una cara del diagrama de Newton de (2.0.1) con tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ , un  $\tilde{a} \in \mathbb{R} \setminus 0$  tal que  $h_{r_{\mathbf{t}+|\mathbf{t}|}}(x, y) \not\equiv 0$ ,  $y^{t_1} - \tilde{a}x^{t_2}$  es factor de  $h_{r_{\mathbf{t}+|\mathbf{t}|}}(x, y)$  y la órbita es de la forma  $y = \tilde{a}x^{\frac{t_2}{t_1}} + o(x^{\frac{t_2}{t_1}})$ .
- v1)** Existe un vértice interior  $V$  del diagrama de Newton del sistema (2.0.1) tal que  $j_0 > 0$ ,  $\beta_V < 0$  y la órbita es de la forma  $y = x^{\alpha_\ell} \tau(x) + o(x^{\alpha_\ell} \tau(x))$ , con  $\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau(x)}{x^{1/n}} = +\infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- v2)** Existe un vértice interior  $V$  del diagrama de Newton del sistema (2.0.1) tal que  $i_0 > 0$ ,  $\beta_V < 0$  y la órbita es de la forma  $x = y^{\frac{1}{\alpha_\ell}} \tau(y) + o(y^{\frac{1}{\alpha_\ell}} \tau(y))$ , con  $\lim_{y \rightarrow 0} \tau(y) = 0$  y  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tau(y)}{y^{1/n}} = +\infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- v3)** Existe un vértice interior  $V$  del diagrama de Newton del sistema (2.0.1) tal que  $i_0 = j_0 = 0$ ,  $\beta_V < 0$  y la órbita es de la forma  $y = \lambda x^{b/a} + o(x^{b/a})$ , siendo  $(a, b)^T$  el vector de coeficientes de  $V$  con  $ba \neq 0$ .

*Demostración:* Sea  $(x(t), y(t))^T$  una órbita característica del sistema (2.0.1) en el primer cuadrante que no sea flat con ninguno de los ejes. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la órbita se acerca al origen cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ 0 \leq \frac{t_2}{t_1} \in \mathbb{Q} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y^{t_1}}{x^{t_2}} = 0 \right\}, \\ \Theta &= \left\{ 0 \leq \frac{t_2}{t_1} \in \mathbb{Q} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y^{t_1}}{x^{t_2}} = +\infty \right\}, \\ \bar{\Theta} &= \left\{ 0 \leq \frac{t_1}{t_2} \in \mathbb{Q} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^{t_2}}{y^{t_1}} = 0 \right\} \end{aligned}$$

Observemos que  $\Omega \neq \emptyset$ , ya que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$  y por tanto  $0 \in \Omega$ .  $\Omega$  está acotado superiormente, ya que en caso contrario para todo  $n \in \mathbb{N}$  existiría  $\frac{t_2}{t_1} \in \Omega$  tal que  $n < \frac{t_2}{t_1}$ . Así,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y^{t_1}}{x^{t_2}} = 0$  y por tanto  $|y(t)| < |x(t)|^{\frac{t_2}{t_1}} < |x(t)|^n$ . Esto implica que la órbita característica,  $y = f(x)$ , es una función flat con el eje  $y = 0$ , caso excluido.

Denotemos por  $\alpha^*$  al supremo del conjunto  $\Omega$ . Aplicando el mismo razonamiento (cambiando  $x$  por  $y$ ,  $t_1$  por  $t_2$ ) se tendría que  $\bar{\Theta} \neq \emptyset$  y está acotado superiormente. Denotemos por  $\frac{1}{\beta_*}$  al supremo de  $\bar{\Theta}$ . Es fácil deducir que  $\Theta \neq \emptyset$  y que posee ínfimo, que resulta ser  $\beta_*$ .

Es evidente que  $\alpha^* \leq \beta_*$ , ya que en caso contrario sería  $\Omega \cap \Theta \neq \emptyset$ , lo cual es imposible.

No puede ser  $\alpha^* < \beta_*$ , ya que en ese caso es posible elegir un tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  tal que  $\alpha^* < \frac{t_2}{t_1} < \beta_*$  y  $h_{r+|\mathbf{t}|} \not\equiv 0$ . Por la Proposición 2.5.37, hay tres posibilidades:  $\frac{t_2}{t_1} \in \Omega$  (que es imposible),  $\frac{t_2}{t_1} \in \Theta$  (también imposible) y por último que exista  $\tilde{a} \in \mathbb{R} \setminus 0$  tal que  $y^{t_1} - \tilde{a}x^{t_2}$  es factor de  $h_{r+|\mathbf{t}|}(x, y)$ , siendo  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y^{t_1}}{x^{t_2}} = \tilde{a}$ , que tampoco es posible ya que tomando un  $\frac{s_2}{s_1} > 0$ , cumpliendo  $\alpha^* < \frac{s_2}{s_1} < \frac{t_2}{t_1}$  se tiene  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y^{s_2}}{x^{s_1}} = 0$  que contradice el hecho de que  $\alpha^* = \sup(\Omega)$ .

Entonces, se cumple  $\alpha^* = \beta_*$ .

No puede ser que  $\alpha^* = 0$  ya que en ese caso  $\sup(\bar{\Theta}) = \frac{1}{\beta^*} = \infty$ , lo cual es contradictorio con que  $\bar{\Theta}$  está acotado superiormente.

Distinguiremos los casos de que  $\alpha^* \in \Omega$ ,  $\alpha^* \in \Theta$  o  $\alpha^* \notin \Omega \cup \Theta$ .

- Si  $\alpha^* = \frac{t_2}{t_1} \in \Omega$  es irreducible, consideramos el vértice  $V$  del diagrama de Newton de (2.0.1) tal que  $\alpha_\ell \leq \alpha^* < \alpha_{\bar{\ell}}$ . Veamos que  $\alpha^* = \alpha_V$ . En caso contrario, existen dos fracciones irreducibles  $\alpha_\ell \leq \frac{t_2^{(0)}}{t_1^{(0)}} < \frac{s_2^{(0)}}{s_1^{(0)}} < \alpha_{\bar{\ell}}$  tales que  $\alpha^* \in \left[ \frac{t_2^{(0)}}{t_1^{(0)}}, \frac{s_2^{(0)}}{s_1^{(0)}} \right]$  y  $\alpha_V \notin \left[ \frac{t_2^{(0)}}{t_1^{(0)}}, \frac{s_2^{(0)}}{s_1^{(0)}} \right]$ . Pero esto es imposible por la Proposición 2.6.46.

$V$  debe ser un vértice interior del polígono de Newton, ya que en caso contrario,  $\alpha_V = 0$  o  $\alpha_V = \infty$ . Pero sin embargo  $\alpha^* = \alpha_V$  y  $0 < \alpha^* < \infty$ .

Aplicando el blow-up direccional  $x = u^{t_1}$ ,  $y = u^{t_2}\bar{y}$ , según la Proposición 2.4.32 obtenemos una órbita característica  $(u(t), \bar{y}(t))$  del sistema (2.4.13) definida en el primer cuadrante. No obstante, como  $\alpha^* = \sup(\Omega)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y^{t_1}}{x^{t_2+1/n}} = +\infty$ . En las nuevas variables, se tiene que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\bar{y}}{u^{1/n}} = +\infty$ . Por tanto, existe una solución del sistema (2.4.13), distinta de la solución trivial,  $u = 0$ , que cumple  $\bar{y} > u^{1/n}$  en un entorno del origen. Así, la solución del sistema original será:  $y > x^{\frac{t_2}{t_1} + \frac{1}{nt_1}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y por tanto, podemos expresarla como  $y = x^{\frac{t_2}{t_1}} \tau(x)$  donde  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(x) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tau(x)}{x^{1/n}} = +\infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Probemos ahora que  $\alpha_V = \alpha_\ell = \frac{t_2}{t_1}$ . En caso contrario  $\alpha_V \neq \frac{t_2}{t_1}$ , y se tendría  $t_1 b - t_2 a \neq 0$ . Aplicando al sistema (2.0.1) el blow up direccional

$x = u^{t_1}$ ,  $y = u^{t_2}\bar{y}$ , después de reparametrizar el tiempo, llegamos al sistema (2.4.13)

$$\begin{aligned} u' &= u[a\bar{y}^{n_0-1} + \dots], \\ \bar{y}' &= (bt_1 - at_2)\bar{y}^{n_0} + \dots \end{aligned}$$

Puesto que  $t_1b - t_2a \neq 0$  se tiene que  $V' = (1, n_0)$ , soporte del campo  $(au\bar{y}^{n_0-1}, (bt_1 - at_2)\bar{y}^{n_0})^T$ , es el vértice superior del diagrama de Newton del sistema (2.4.13), siendo  $\alpha_{V'} = \frac{bt_1 - at_2}{a} \neq 0$ . Por tanto, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha_{V'} \notin [0, \frac{1}{n}]$ . Aplicando la Proposición 2.6.46, no existen soluciones del sistema (2.4.13) con  $\frac{1}{\varepsilon}u^{1/n} < \bar{y}$ , lo cual es contradictorio.

En resumen,  $\alpha_V = \alpha_\ell = \frac{t_2}{t_1}$ , y por tanto  $c_0 = t_1b - t_2a = 0$ . Es decir:  $i_0 = 0$ ,  $j_0 > 0$ .

Observemos que  $\beta_V < 0$ , ya que en otro caso, por la Proposición (2.6.47), no existirían órbitas características definidas en el primer cuadrante comprendidas en el sector  $\varepsilon_1 x^{\alpha_i} \leq y \leq \frac{1}{\varepsilon_2} x^{\alpha_\ell}$ . Esto es contradictorio y por tanto se tiene **v1**).

- Si  $\alpha^* = \frac{s_2}{s_1} \in \Theta$  irreducible, cambiando  $x$  por  $y$  se prueba el resultado **v2**).
- Si  $\alpha^* \notin \Omega \cup \Theta$ , existe un  $\tilde{a} \in \mathbb{R} \setminus 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y^{t_1}}{x^{t_2}} = \tilde{a}$ 
  - Supongamos que existe una cara tal que  $\alpha^* = \alpha_\ell = \frac{t_2}{t_1} \in \mathbb{Q}$  irreducible. Si  $h_{r+|\mathbf{t}|} \equiv 0$ , se tendría el resultado **c1**). Si  $h_{r+|\mathbf{t}|} \not\equiv 0$ , aplicando la Proposición 2.5.37, para el tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ , se tendría que  $y^{t_1} - \tilde{a}x^{t_2}$  es factor de  $h_{r+|\mathbf{t}|}(x, y)$ , y por tanto se tiene el resultado **c2**).
  - Si  $\alpha^*$  no coincide con el exponente de ninguna cara del diagrama de Newton del sistema (2.0.1), entonces existe un vértice  $V$  tal que  $\frac{t_2}{t_1} = \alpha_\ell < \alpha^* < \alpha_{\bar{\ell}} = \frac{s_2}{s_1}$ .  
Ahora se cumple que  $\alpha^* = \alpha_V$  ya que en caso contrario, existirían dos fracciones irreducibles  $\alpha_\ell < \frac{t_2^{(0)}}{t_1^{(0)}} < \alpha^* < \frac{s_2^{(0)}}{s_1^{(0)}} < \alpha_{\bar{\ell}}$  tales que  $\alpha_V \notin \left[ \frac{t_2^{(0)}}{t_1^{(0)}}, \frac{s_2^{(0)}}{s_1^{(0)}} \right]$ , pero esto es imposible por la Proposición (2.6.46).

Así, si  $(a, b)^T$  es el vector de coeficientes de  $V$ , se tiene  $\alpha^* = \alpha_V \in (\alpha_\ell, \alpha_{\bar{\ell}})$ . Esto implica  $\frac{t_2}{t_1} < \frac{b}{a} < \frac{s_2}{s_1}$ , y por tanto  $ab \neq 0$  y  $\frac{s_1 b - s_2 a}{t_1 b - t_2 a} < 0$ . En definitiva  $ab \neq 0$ ,  $i_0 = j_0 = 0$  y  $\beta_V < 0$ , de donde obtenemos el resultado **v3**). ■

Para estudiar la monodromía del sistema (2.0.1), es necesario descartar la existencia de órbitas características en cada uno de los cuadrantes. Para ello, con el cambio  $u = (-1)^{\sigma_1} x$ ,  $v = (-1)^{\sigma_2} y$ , llevamos cada uno de los cuadrantes al primero y aplicamos los criterios para el primer cuadrante. Sin embargo, para el caso de órbitas características asociadas al vértice  $V$ , la existencia de órbitas características en otros cuadrantes distintos del primero obliga la existencia de factores reales de multiplicidad impar de alguna función de Hamilton asociada a las caras adyacentes a dicho vértice, o bien a que alguna de las componentes del soporte de  $V$  no sea par, lo cual simplifica el estudio de la monodromía de un punto singular. Todo lo anterior está recogido en la siguiente proposición.

**Proposición 2.7.54** *Supongamos que el sistema (2.0.1) no posee ningún eje invariante o bien el eje  $x = 0$  es invariante y, en este caso, el sistema está definido en el semiplano  $x > 0$ . Sea  $V$  un vértice del diagrama de Newton del sistema (2.0.1) con soporte  $(m, n)$ . Supongamos que  $h_{r_t+|t|} h_{r_s+|s|} \neq 0$ , donde  $h_{r_t+|t|}(x, y)$ ,  $h_{r_s+|s|}(x, y)$  son respectivamente las funciones de Hamilton asociadas a las caras superior e inferior adyacentes a  $V$ . Si  $\beta_V > 0$  y existen órbitas características del sistema (2.0.1) asociadas al vértice  $V$ , entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- a)  $n$  es impar.
- b) El eje  $x = 0$  no es invariante y  $m$  es impar.
- c) Existe algún factor real, distinto de un eje invariante, de multiplicidad impar de alguna de las funciones  $h_{r_t+|t|}(x, y)$ ,  $h_{r_s+|s|}(x, y)$ .

*Demostración:* Como  $\beta_V > 0$ , por la Proposición 2.6.47, si existen órbitas características asociadas al vértice  $V$ , éstas deben estar en un cuadrante distinto del primero. Por tanto, para algún  $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1\}$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ , debe ser

$\beta_V^{(\sigma_1, \sigma_2)} < 0$ . Por el Lema 2.6.48, obtenemos que  $i_0(t_1\sigma_2 + t_2\sigma_1) + j_0(s_1\sigma_2 + s_2\sigma_1)$  debe ser impar.

Supongamos que  $n$  es par, ya que en caso contrario se cumple **a**).

Debe ser  $i_0 + j_0 > 0$ , ya que si  $i_0 = j_0 = 0$ , entonces  $\beta_V^{(\sigma_1, \sigma_2)} > 0$ . Además, por la nota que sigue a la ecuación (2.4.18), debe ser  $i_0 j_0 = 0$ .

Si  $i_0 = 0$ ,  $j_0 > 0$ , entonces  $j_0(s_1\sigma_2 + s_2\sigma_1)$  debe ser impar. Por tanto,  $j_0$  y  $s_1\sigma_2 + s_2\sigma_1$  son impares.

Como  $h_{r_s+|s|} \neq 0$ , podemos escribir  $h_{r_s+|s|}(x, y) = \sum_{i=j_0}^{\tilde{k}} \tilde{c}_i x^{m+is_2} y^{n-is_1}$ , con  $j_0 \leq \tilde{k}$ ,  $\tilde{c}_{j_0} \neq 0$ . Si denotamos  $l = \max \{j_0 \leq i \leq \tilde{k} : \tilde{c}_i \neq 0\}$ , entonces la factorización de  $h_{r_s+|s|}(x, y)$  dada en (2.3.8) resulta:

$$h_{r_s+|s|}(x, y) = \tilde{c}_l x^{m+j_0 s_2} y^{n-l s_1} \prod_{j=1}^M (y^{s_1} - \tilde{a}_j x^{s_2})^{m_j} \prod_{i=1}^N [(y^{s_1} - a_i x^{s_2})^2 + b_i^2 x^{2s_2}]^{n_i}.$$

Si  $l$  es par. Como  $j_0$  es impar y  $n$  es par, considerando el máximo grado en  $x$  de  $h_{r_s+|s|}(x, y)$ , se tiene la igualdad  $m+l s_2 = m+j_0 s_2 + \sum_{j=0}^M m_j s_2 + \sum_{i=0}^N 2s_2 n_i$ , y como  $s_2 > 0$ , se tiene:

$$(l - j_0) = \sum_{j=0}^M m_j + \sum_{i=0}^N 2n_i,$$

siendo impar el primer miembro de la igualdad por lo que existirá algún  $1 \leq j \leq M$  tal que  $m_j$  sea impar y se tiene el apartado **c**) para el factor  $(y^{s_1} - \tilde{a}_j x^{s_2})^{m_j}$ .

Si  $l$  y  $s_1$  son impares. Como  $j_0$  es impar y  $n$  par, entonces se cumple **c**) ya que  $h_{r_s+|s|}$  tiene el factor  $y^{n-l s_1}$ , no invariante, con multiplicidad impar.

Si  $l$  es impar,  $s_1$  par y el eje  $x = 0$  no es invariante, debe ser  $s_2$  impar. Podemos suponer  $m$  par ya que en caso contrario se tendría **b**). Así tenemos  $s_1, m, n$  pares,  $s_2, j_0$  impares. En este caso se tiene **c**) ya que  $x^{m+j_0 s_2}$  es un factor de  $h_{r_t+|t|}$ , no invariante, de multiplicidad impar.

Si  $l$  es impar,  $s_1$  es par y el eje  $x = 0$  es invariante, entonces el único cuadrante, distinto del primero, donde la órbita característica está definida es el cuarto. Por tanto debe ser  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 1$ . Así,  $s_1$  debe ser impar. Por tanto este caso nunca se tiene.

Si  $j_0 = 0$ ,  $i_0 > 0$  el razonamiento se aplica ahora sobre  $h_{r_t+|t|}$  de forma análoga. ■



## 2.8. Un algoritmo para el problema de monodromía

A continuación presentamos un algoritmo que caracteriza los sistemas monodrómicos. En primer lugar, exigimos que el sistema (2.0.1) verifique las siguientes tres condiciones:

- A) Ningún eje es invariante.
- B) Sean  $(ay^n, 0)^T$  y  $(0, bx^m)^T$  los vectores de coeficientes de los dos vértices situados en los ejes, entonces  $ab < 0$ .
- C) Las coordenadas de los puntos soporte de todos los vértices son pares.

Una vez que el sistema (2.0.1) cumple estas tres condiciones, llevamos a cabo el siguiente proceso:

- 1) Los polinomios  $h_{r+|\mathbf{t}|}$  y  $\mu_r$  asociados a cada cara del diagrama de Newton del sistema (2.0.1) deben cumplir:
  - 1a)  $h_{r+|\mathbf{t}|} \neq 0$ ,
  - 1b) Todo factor real de  $h_{r+|\mathbf{t}|}$ , excepto el factor  $u$  para los sistemas (2.8.20), (2.8.21), deben tener orden de multiplicidad  $2m$  y ser también factor de  $\mu_r$  con orden de multiplicidad un número impar menor que  $2m$  o bien, con orden de multiplicidad mayor o igual que  $2m$ .
- 2) Para cada vértice interior  $V$ , se cumple:  $\beta_V > 0$ .
- 3) Para cada factor real de  $h_{r+|\mathbf{t}|}(x, y)$ , del tipo  $y^{t_1} - \tilde{a}x^{t_2}$ , con  $\tilde{a} \neq 0$  que cumpla **1b**):
  - 3a) Si  $t_1$  es impar, aplicamos el blow-up direccional  $x = u^{t_1}$ ,  $y = u^{t_2}(\bar{y} + \tilde{a}^{\frac{1}{t_1}})$ ,  $dt = \frac{t_1}{u^r} d\tau$ . De esta forma obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
 u' &= u \sum_{j=0}^{\infty} P_{r+j+t_1}(1, \bar{y} + \tilde{a}^{\frac{1}{t_1}}) u^j, \\
 \bar{y}' &= \sum_{j=0}^{\infty} (r + |\mathbf{t}| + j) h_{r+j+|\mathbf{t}|}(1, \bar{y} + \tilde{a}^{\frac{1}{t_1}}) u^j.
 \end{aligned} \tag{2.8.20}$$

- 3b)** Si  $t_1$  es par, aplicamos el blow-up direccional  $x = u^{t_1}(\bar{x} + \tilde{a}^{-\frac{1}{t_2}})$ ,  $y = u^{t_2}$ ,  $dt = \frac{t_2}{u^r} d\tau$ . Así, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} u' &= -u \sum_{j=0}^{\infty} Q_{r+j+t_2}(\bar{x} + \tilde{a}^{-\frac{1}{t_2}}, 1) u^j, \\ \bar{x}' &= \sum_{j=0}^{\infty} (r + |\mathbf{t}| + j) h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\bar{x} + \tilde{a}^{-\frac{1}{t_2}}, 1) u^j. \end{aligned} \quad (2.8.21)$$

- 4) El vértice inferior del polígono de Newton del sistema (2.8.20) o (2.8.21), siempre pertenece al eje de abscisas.
- 5) Las ordenadas de los soportes de todos los vértices del sistema (2.8.20) o (2.8.21) son pares.
- 6) Continuamos aplicando al sistema (2.8.20) o al (2.8.21) el criterio **1)** y siguientes.

**Nota:** Ya que el proceso de blow-up correspondiente al diagrama de Newton es equivalente al múltiple  $\sigma$ -proceso, (Dumortier [25]), deducimos que, en el caso de un punto singular aislado de un campo vectorial analítico, el proceso de blow-up es finito y en consecuencia, el anterior proceso es finito: en un número finito de pasos podemos decidir si el sistema es monodrómico o no.

**Teorema 2.8.55** *El sistema (2.0.1) es monodrómico si y sólo si verifica las condiciones **A)**, **B)**, **C)** y en cada uno de los pasos del proceso finito se verifican las condiciones **1)**, **2)**, **3)**, **4)** y **5)**.*

*Demostración:*

**C.N.** La condición **A)** es trivial. Como **A)** se cumple, existen los vértices situados en ambos ejes del Polígono de Newton del sistema. La condición **B)** está probada en la proposición 2.6.41. La condición **C)** está probada en la Proposición 2.6.45. La Proposición 2.6.44 prueba **1a)** y **1b)** para los factores de  $h_{r+|\mathbf{t}|}$  que no sean invariantes. Si el factor de  $h_{r+|\mathbf{t}|}$ , distinto de  $u$ , es invariante, como el sistema no posee una curva de puntos singulares se tiene que el origen no es monodrómico. La Proposición 2.6.47 prueba

la condición **2)**. La etapa **3)** calcula nuevos sistemas mediante blow-up. La condición **4)** se cumple, ya que en caso contrario, se tendría un eje invariante, distinto de  $u = 0$ . Y por último la condición **5)** está probada en la Proposición 2.6.45

**C.S.** Probar que el anterior proceso caracteriza la monodromía de un campo equivale a probar que si existe una órbita característica no se cumple algunas de las condiciones del algoritmo.

Concretamente si la órbita característica es flat con el eje  $x$  o con el eje  $y$ , entonces por la Proposición 2.7.51 algún eje es invariante y, por lo tanto, se incumple la condición **A)**.

Si existe una órbita característica en el primer cuadrante que no sea flat con ninguno de los ejes, por la Proposición 2.7.53, esta órbita está asociada a un vértice interior  $V$ , o a una cara compacta del diagrama de Newton.

Si la órbita esta asociada a un vértice interior  $V$ , entonces por los apartados **v1)**, **v2)** o **v3)** de la Proposición 2.7.53, se tiene  $\beta_V < 0$  y, por lo tanto, no cumple la condición **2)**. Si está asociada a una cara, hay dos posibilidades:  $h_{r+|t|} \equiv 0$ , (caso **c1)** de la Proposición 2.7.53, en cuyo caso no cumple la condición **1a)**, o bien  $h_{r+|t|} \not\equiv 0$  y existe un  $\tilde{a} \in \mathbb{R} \setminus 0$  tal que la órbita característica esta asociada a  $y^{t_1} - \tilde{a}x^{t_2}$ , factor de  $h_{r+|t|}$ , (caso **c2)** de la Proposición 2.7.53. A su vez, hay dos posibilidades: este factor no cumple la condición **1b)**, o bien, sí la cumple. En este último caso, aplicamos los cambios de variables descritos en la etapa **3)** y continuamos el procedimiento finito.

Si la órbita característica asociada a un vértice interior  $V$ , está definida en otro cuadrante distinto del primero, al pasarlo al primer cuadrante dicha órbita sigue estando asociada al mismo vértice del diagrama de Newton y según la Proposición 2.7.54 esto obliga el incumplimiento de alguna de las condiciones **C)**, **1b)** o **5)**.

Si la órbita característica esta asociada a una cara compacta del diagrama de Newton y está definida en otro cuadrante distinto del primero, al pa-

sarlo al primer cuadrante mediante el cambio  $x = (-1)^{\sigma_1}u$ ,  $y = (-1)^{\sigma_2}v$  con  $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1\}$  se tienen las siguientes situaciones:

- La nueva función de Hamilton es idénticamente nula. Aplicando el apartado **a)** del Corolario 2.3.30, la función de Hamilton original cumple  $h_{r+|t|} \equiv 0$ , por lo que no se verifica la condición **1a)**.
- La nueva función de Hamilton,  $g_{r+|t|}$ , no es idénticamente nula y existe un  $\tilde{a} \in \mathbb{R} \setminus 0$  tal que la órbita característica está asociada a  $v^{t_1} - \tilde{a}u^{t_2}$ , factor de  $g_{r+|t|}(u, v)$ . Aplicando de nuevo el apartado **a)** del Corolario 2.3.30 se tiene que este factor se transforma en el factor  $y^{t_1} - \tilde{a}(-1)^{\sigma_2 t_1 + \sigma_1 t_2} x^{t_2}$  de  $h_{r+|t|}(x, y)$  con el mismo orden de multiplicidad. Además, al aplicar dicho cambio, este factor conserva también el orden de multiplicidad como factor de la divergencia del campo. Así, el factor que resulta del cambio de cuadrante cumple la condición **1b)** si y sólo si, el factor original cumple la misma condición. En el caso de que la cumpla, aplicamos los cambios de variables descritos en la etapa **3)** y continuamos el procedimiento finito. ■

## 2.9. Ejemplos

Los ejemplos que consideraremos a continuación han sido tratados previamente por I. García [34]. Como se puede comprobar, la caracterización de la monodromía que haremos a continuación, aplicando el Teorema 2.8.55, es más simple que la realizada en el trabajo citado. El problema de la monodromía para los sistemas nilpotentes fue resuelto inicialmente por Andreev en [10]. Posteriormente se resolvió de forma más sencilla en Álvarez & Gasull, [9] y nosotros lo resolvemos de forma aún más breve. Por último, estudiamos el problema de monodromía para un sistema nilpotente generalizado. Este sistema incluye a la familia dada por Medvedeva en [51].

### 2.9.1. Monodromía de algunas familias simples

a) *Centro lineal.*

Sea el sistema  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$ . El diagrama de Newton de dicho sistema posee una única cara compacta de tipo  $\mathbf{t} = (1, 1)$ , siendo la función de Hamilton asociada a dicha cara  $h_2(x, y) = x^2 + y^2$ . Esta función no tiene factores reales, por lo que el origen de este sistema es monodrómico.

b) *Foco lineal.*

Sea el sistema  $\dot{x} = -y + \lambda x$ ,  $\dot{y} = x + \lambda y$ ,  $\lambda \neq 0$ . El polígono de Newton de dicho sistema posee una única cara compacta de tipo  $\mathbf{t} = (1, 1)$  siendo la función de Hamilton asociada a dicha cara  $h_2(x, y) = x^2 + y^2$ , que no tiene factores reales, por lo que el origen de dicho sistema es monodrómico.

c) *Silla lineal.*

Sea el sistema  $\dot{x} = x + y$ ,  $\dot{y} = x - y$ . El diagrama de Newton de dicho sistema posee una única cara compacta de tipo  $\mathbf{t} = (1, 1)$  siendo la función de Hamilton asociada a dicha cara  $h_2(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$ . El origen de dicho sistema no es monodrómico, ya que los coeficientes de los soportes de los vértices exteriores no son de signos distintos, (condición **B**) del algoritmo).

d) *Nodo degenerado.*

Sea el sistema  $\dot{x} = x^2$ ,  $\dot{y} = x + y$ . El diagrama de Newton de dicho sistema posee un vértice interior  $V = (1, 1)$ , soporte del campo  $(0, y)$ , y coordenadas impares por tanto no es monodrómico, (condición **C**) del algoritmo).

e) *foco repulsivo no lineal.*

Sea el sistema  $\dot{x} = y(x^2 + xy - y^2)$ ,  $\dot{y} = y^2(2x + y) + x^5$ . Su diagrama de Newton posee dos vértices exteriores  $V_0 = (0, 4)$ ,  $V_2 = (6, 0)$  soporte de los campos  $(-y^3, 0)$ ,  $(0, x^5)$ , respectivamente, y un vértice interior  $V_1 = (2, 2)$ , soporte del campo  $(x^2y, 2xy^2)$ , cuya cara adyacente superior es del tipo  $(1, 1)$  y la inferior del tipo  $(1, 2)$ . Como  $\beta_{V_1} = \frac{1}{1} > 0$  y

los hamiltonianos asociados a las caras con tipos  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  son  $h_4 = y^2(x^2 + y^2)$  y  $h_6 = x^6$  respectivamente, y éstos tienen todos sus factores reales con multiplicidad par, el sistema es monodrómico.

Este resultado prueba que este sistema no posee órbitas características, como afirma la Nota dada inmediatamente después de la Proposición 2.5.37.

Veamos que el origen del sistema es un foco, para ello, denotamos  $\mathbf{F} = (x^2y + xy^2 - y^3, 2xy^2 + y^3 + x^5)^T$ , y  $\mathbf{Z} = (x^2y - y^3, 2xy^2 + x^5)^T$ . Por el mismo razonamiento anterior, el campo  $\mathbf{Z}$  es monodrómico. Como además es reversible al cambio  $x \rightarrow -x$ ,  $t \rightarrow -t$ , el origen es un centro. El producto  $\mathbf{F} \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{Z}^\perp$  nos indica en cada punto el sentido de corte de las líneas de flujo del campo  $\mathbf{F}$  con las órbitas del centro  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Z}$ . (Si en un punto  $(x, y)$  es positivo, las líneas de flujo salen de las órbitas cerradas del centro y si son negativas, entran). En nuestro caso es

$$\mathbf{F} \wedge \mathbf{Z} = y^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \mathbf{Z} = y^2(x^6 + x^2y^2 + y^4) \geq 0$$

Por lo tanto, el origen del sistema es un foco repulsivo.

**f)** *Un caso no lineal.*

Sea el sistema  $\dot{x} = y(ax^2 + bxy + cy^2)$ ,  $\dot{y} = y^2(ax + by) + dx^5$ . Su diagrama de Newton posee dos vértices exteriores  $V_0 = (0, 4)$ ,  $V_2 = (6, 0)$ , soportes de los campos  $(cy^3, 0)$ ,  $(0, dx^5)$ , respectivamente. Para que sea monodrómico debe cumplirse  $dc < 0$ , (condición **B**) del algoritmo). Si  $a = b = 0$ , el sistema sólo posee una única cara compacta del tipo  $(2, 3)$  con función de Hamilton asociada  $h_{12} = dx^6 - cy^4$ . Como esta función no tiene factores reales, el equilibrio es monodrómico. Si  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  el diagrama de Newton del sistema posee el vértice  $V = (1, 3)$ , soporte del campo  $(bxy^2, by^3)$ . Al ser las coordenadas impares, el equilibrio no es monodrómico. Si  $a \neq 0$  el único vértice interior es  $V = (2, 2)$ , soporte del campo  $(ax^2y, axy^2)$ , siendo  $\beta_V = \frac{-a}{-c}$ . Para que sea monodrómico, debe cumplirse  $ac > 0$ . Además hay dos caras compactas con tipos  $(1, 1)$  y  $(1, 2)$ , cuyas funciones de Hamilton asociadas son  $h_4 = -cy^4$  y

$h_6 = x^2(dx^4 - ay^2)$  respectivamente, y sus divergencias asociadas son  $\mu_2 = 4y(by + ax)$ ,  $\mu_3 = 4axy$  respectivamente. Como  $ac > 0$  y  $cd < 0$  se tiene  $ad < 0$  y, por tanto, los únicos factores reales son  $x$  o  $y$  y ambos cumplen la condición **5)** del algoritmo. Por tanto, el sistema es monodrómico.

**En resumen:** El origen del sistema es monodrómico si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

- i)  $cd < 0$  y  $a = b = 0$ ,
- ii)  $cd < 0$  y  $ac > 0$ .

En el caso **ii)**, para  $b = 0$  el origen del campo  $\mathbf{Z} = (ax^2y + cy^3, axy^2 + dx^5)$  es un centro, ya que el origen es monodrómico y el campo  $\mathbf{Z}$  es reversible al cambio  $x \rightarrow -x$ ,  $t \rightarrow -t$ . Además si denotamos  $\mathbf{F} = (ax^2y + bxy^2 + cy^3, axy^2 + by^3 + dx^5)$ , se verifica:

$$\mathbf{F} \wedge \mathbf{Z} = by^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \mathbf{Z} = by^2(dx^6 - ay^4).$$

Por tanto, si  $b > 0$  es un foco repulsivo, mientras que si  $b < 0$  es un foco atractivo.

**g) Otro caso no lineal.**

Sea el sistema  $\dot{x} = bx^2 + axy^2 - by^3 - x^4$ ,  $\dot{y} = 4bxy^2 - ay^3 + 2x^5$ . Su diagrama de Newton posee dos vértices exteriores  $V_0 = (0, 4)$ ,  $V_2 = (6, 0)$ , soportes de los campos,  $(-by^3, 0)$ ,  $(0, 2x^5)$ , respectivamente. Para que sea monodrómico debe cumplirse  $b > 0$ , (condición **B)** del algoritmo). Si  $b > 0$ , existe un único vértice interior  $V_1 = (2, 1)$ , soporte del campo,  $(bx^2, 0)^T$ . Como no tiene ambas coordenadas pares, no tenemos monodromía.

**h) Otro caso más no lineal**

Sea el sistema  $\dot{x} = bx^2y + axy^2 - by^3 - x^4$ ,  $\dot{y} = 4bxy^2 - ay^3 + 2x^5$ , éste ejemplo y el anterior únicamente difieren en que éste sistema tiene el término  $bx^2y$  en la primera componente y el anterior  $bx^2$ . el diagrama de Newton de este sistema posee dos vértices exteriores  $V_0 = (0, 4)$ ,

$V_2 = (6, 0)$ , soporte de los campos,  $(-by^3, 0)$ ,  $(0, 2x^5)$ , respectivamente. Para que el origen sea monodrómico, debe cumplirse  $b > 0$ . En este caso existe un único vértice interior  $V_1 = (2, 2)$ , soporte de  $(bx^2y, 4bxy^2)$  y  $\beta_{V_1} = \frac{2b}{3b} > 0$ . Además hay dos caras compactas, de tipos  $(1, 1)$  y  $(1, 2)$  cuyas funciones de Hamilton asociadas son  $h_4 = 3bx^2y^2 - 2axy^3 + by^4 = by^2[(y - \frac{a}{b}x)^2 + (3 - \frac{a^2}{b^2})x^2]$  y  $h_6 = 2x^2(x^4 + by^2)$ , y sus divergencias asociadas son  $\mu_2 = 10bxy$  y  $\mu_3 = 10bxy$ , respectivamente.

Si  $3 - \frac{a^2}{b^2} > 0$ , todos los factores reales cumplen la condición **5)** del algoritmo y, por tanto, el origen en el sistema es monodrómico. Si  $3 - \frac{a^2}{b^2} < 0$ ,  $h_4$  posee factores reales simples, y por tanto el origen no es monodrómico. Si  $3 - \frac{a^2}{b^2} = 0$ , se verifica que  $y - \frac{a}{b}x$  es un factor doble de  $h_4$ , y no lo es de  $\mu_2$ . Por tanto, tampoco hay monodromía.

**i)** *Un caso no polinomial,*

Consideramos el sistema  $\dot{x} = a \operatorname{sen}^3 y + b \operatorname{sen}^5 y + cx^7 \cos y$ ,  $\dot{y} = dx^4 + ey^5 \cos^3 x + f \frac{x^6}{1-x}$ . Al desarrollarlo en serie de potencias, obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ay^3 + (b - \frac{a}{2})y^5 + cx^7 - \frac{1}{2}cx^7y^2 + \frac{1}{4!}cx^7y^4 + \dots, \\ \dot{y} &= dx^4 + ey^5 - \frac{3}{2}ex^2y^5 + fx^6 + fx^7 + \dots.\end{aligned}$$

Si  $d \neq 0$ , su diagrama de Newton posee el vértices exterior  $V = (5, 0)$ , soporte de  $(0, dx^4)$ . Puesto que la primera coordenada es impar, el origen no es monodrómico. Si  $d = 0$ ,  $f \neq 0$ , el vértice exterior  $V = (7, 0)$ , con soporte  $(0, fx^6)$ , y por tanto el origen tampoco es monodrómico. Si  $d = f = 0$ , el eje  $y = 0$  es invariante y por tanto tampoco se tiene monodromía. En definitiva, el origen de este sistema nunca es monodrómico.

## 2.10. Problema de monodromía para el sistema nilpotente

Decimos que el sistema (2.0.1) es nilpotente si la matriz  $D\mathbf{F}(\mathbf{0})$  posee dos autovalores igual a cero pero no es idénticamente nula. En unas coordenadas



apropiadas, todo sistema nilpotente se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + X_1(x, y), \\ \dot{y} &= Y_1(x, y),\end{aligned}\tag{2.10.22}$$

donde

$$X_1(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} A_{i,j} x^i y^j \quad Y_1(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} B_{i,j} x^i y^j,$$

Antes de estudiar la monodromía de este sistema, aplicando nuestro método, enunciamos el Teorema probado por Andreev [10], el cual resuelve el problema de monodromía

**Teorema 2.10.56** *Consideremos el sistema (2.10.22), y supongamos que el origen es una singularidad aislada. Definimos las funciones*

$$\begin{aligned}f(x) &:= Y_2(x, F(x)) = ax^\alpha + \mathcal{O}(x^{\alpha+1}), \quad a \neq 0, \quad \alpha \geq 2y \\ \phi(x) &:= \operatorname{div}(y + X_2(x, y), Y_2(x, y))|_{y=F(x)}\end{aligned}$$

donde  $\phi(x) = bx^\beta + \mathcal{O}(x^{\beta+1})$ ,  $b \neq 0$  y  $\beta \geq 1$ , o  $\phi(x) \equiv 0$ . La función  $y = F(x)$  es la solución de  $y + X_2(x, y) = 0$  que pasa por el origen.

Entonces, el origen de (2.10.22) es monodrómico si y sólo si  $a$  es negativo,  $\alpha$  es un número impar ( $\alpha = 2n - 1$ ), y se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- i)  $\beta > n - 1$ ,
- ii)  $\beta = n - 1$  y  $b^2 + 4an < 0$ ,
- iii)  $\phi \equiv 0$

En este Teorema, la monodromía queda caracterizada por el primer término del desarrollo en serie de las funciones  $f(x)$ ,  $\phi(x)$ . Estos primeros términos son los mismos que los primeros términos de las funciones  $\tilde{f}(x)$  y  $\tilde{\phi}(x)$  de la forma normal de Takens

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \tilde{f}(x) + \tilde{\phi}(x)y,\end{aligned}$$

con  $\tilde{f}(x) = a_{\alpha,0}x^\alpha(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_{\alpha,j}x^j)$ , con  $a_{\alpha,0} \neq 0$  y  $\tilde{\phi}(x) = b_{\beta,0}x^\beta \left( \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{\beta,j}x^j \right)$  con  $b_{\beta,0} \neq 0$  o bien  $\tilde{\phi} \equiv 0$ .

En resumen, Andreev [10] aplica el estudio a una pre forma normal, sistema simplificado. Nosotros también partiremos de una forma normal obtenida eligiendo los co-rangos en la parte disipativa. Esta forma de proceder tiene ventajas, como veremos en los siguientes capítulos, no sólo en el estudio de la monodromía sino también en el estudio de la integrabilidad y el problema de centro.

En el siguiente Lema calculamos una forma normal del sistema (2.10.22).

**Lema 2.10.57** *El sistema (2.10.22) es formalmente  $C^\infty$ -conjugado al sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x^{\beta+1}\Psi_1(x), \\ \dot{y} &= y(x^{\beta+1}\Psi_1(x))' + x^\alpha\Phi_1(x), \end{aligned} \quad (2.10.23)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  y

$$\Psi_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{\beta,i}x^i \quad \Phi_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{\alpha,i}x^i$$

con  $a_{\alpha,0} \neq 0$  o  $\Phi_1 \equiv 0$ ,  $b_{\beta,0} \neq 0$  o  $\Psi_1 \equiv 0$ .

*Demostración:* Para el cálculo de la forma normal, usaremos el tipo  $\mathbf{t} = (2, 1)$ . Con esta elección el sistema (2.10.22) se escribe como  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{-1} + \mathbf{F}_0 + \dots$  donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{-1} &= (y, 0)^T, \\ \mathbf{F}_0 &= (A_{0,2}y^2, 0)^T, \\ \mathbf{F}_1 &= (A_{0,3}y^3 + A_{1,1}xy, B_{0,2}y^2)^T, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Usando la expresión (2.3.3) cualquier polinomio cuasihomogéneo  $p_{2l} \in \mathcal{P}_{2l}^{\mathbf{t}}$  se expresa como:  $p_{2l}(x, y) = \sum_{j=0}^l a_j x^{l-j} y^{2j}$ . Además,  $p_{2l+1}(x, y) = y p_{2l}(x, y)$ . Es fácil comprobar que:

$$\begin{aligned} \nabla p_{2l} \cdot \mathbf{F}_{-1} &= y \frac{\partial p_{2l}}{\partial x} = y \left[ \sum_{j=0}^{l-1} (l-j) a_j x^{l-1-j} y^{2j} \right], \\ \nabla p_{2l+1} \cdot \mathbf{F}_{-1} &= p_{2l} \nabla y \cdot \mathbf{F}_{-1} + y \nabla p_{2l} \cdot \mathbf{F}_{-1} = \sum_{j=1}^l (l+1-j) a_{j-1} x^{l-j} y^{2j}. \end{aligned}$$

Estas igualdades permiten obtener un subespacio complementario a la imagen del operador homológico  $\mathbf{L}_{2l+k-1}$  para  $l > 0$ ,  $k = 0, 1$ . Recordemos que dicho operador  $\mathbf{L}_{2l+k-1} : \mathcal{Q}_{2l+k} \rightarrow \mathcal{Q}_{2l+k-1}$ , está definido por  $\mathbf{L}_{2l+k-1}(\mathbf{P}_{2l+k}) = [\mathbf{P}_{2l+k}, \mathbf{F}_{-1}]$ .

si expresamos  $\mathbf{P}_{2l+k} = (p_{2(l+1)+k}, q_{2l+k+1})^T$ , obtenemos:

$$[\mathbf{P}_{2l+k}, \mathbf{F}_{-1}] = \begin{pmatrix} \nabla p_{2(l+1)+k} \cdot \mathbf{F}_{-1} - q_{2l+k+1} \\ \nabla q_{2l+k+1} \cdot \mathbf{F}_{-1} \end{pmatrix}.$$

Ahora, podemos obtener la imagen de un elemento arbitrario. Distinguiamos dos casos:

**Caso  $k = 0$ .** Expresamos  $p_{2(l+1)} = \sum_{j=0}^{l+1} a_j x^{l+1-j} y^{2j}$ ,  $q_{2l+1} = y \sum_{j=0}^l b_j x^{l-j} y^{2j}$ , se obtiene

$$\mathbf{L}_{2l-1}(\mathbf{P}_{2l}) = \begin{pmatrix} y \left[ \sum_{j=0}^l [(l+1-j)a_j - b_j] x^{l-j} y^{2j} \right] \\ \sum_{j=1}^l (l+1-j)a_{j-1} x^{l-j} y^{2j} \end{pmatrix},$$

y podemos elegir un subespacio complementario de la forma

$$\text{Cor}(\mathbf{L}_{2l-1}) = \left\langle \left( \begin{pmatrix} 0 \\ x^l \end{pmatrix} \right) \right\rangle, \quad l > 0.$$

**Caso  $k = 1$ .** Expresamos  $p_{2(l+1)+1} = y \sum_{j=0}^{l+1} a_j x^{l+1-j} y^{2j}$ ,  $q_{2l+2} = \sum_{j=0}^{l+1} b_j x^{l+1-j} y^{2j}$ , obtenemos

$$\mathbf{L}_{2l}(\mathbf{P}_{2l+1}) = \begin{pmatrix} -b_0 x^{l+1} + \sum_{j=1}^{l+1} [(l+2-j)a_{j-1} - b_j] x^{l+1-j} y^{2j} \\ y \left[ \sum_{j=0}^l (l+1-j)b_j x^{l-j} y^{2j} \right] \end{pmatrix},$$

y podemos elegir un subespacio complementario de la forma

$$\text{Cor}(\mathbf{L}_{2l+1}) = \left\langle \left( \begin{pmatrix} x^{l+1} \\ (l+1)x^l y \end{pmatrix} \right) \right\rangle.$$

La forma normal que aparece en el enunciado es la que corresponde a esta elección del co-rango. ■

**Proposición 2.10.58** *El sistema (2.10.23) es monodrómico si y sólo si  $b_{\alpha,0} < 0$ , donde  $\alpha = 2\tilde{\alpha} - 1$  es impar y  $\beta + 1 \geq \tilde{\alpha}$ .*

*Demostración:* Si  $\Phi_1 \equiv 0$ , el eje  $y = 0$  es invariante, por lo tanto el sistema no es monodrómico. En el caso  $a_{\alpha,0} \neq 0$  hay tres puntos soportes que caracterizan el diagrama de Newton:

- $V_0 = (0, 2)$ , vértice en el eje de ordenadas, soporte del campo  $(y, 0)^T$ .
- $V_2 = (\alpha + 1, 0)$ , vértice en el eje de abscisas, soporte del campo  $(0, a_{\alpha,0}x^\alpha)$ .
- $V_1 = (\beta + 1, 1)$ , que puede no ser vértice interior, soporte del campo  $(b_{\beta,0}x^{\beta+1}, (\beta + 1)b_{\beta,0}x^\beta y)$ .

Si  $\alpha$  es par, el sistema no es monodrómico ya que la abscisa de  $V_2$  es impar. Por ello tomaremos  $\alpha = 2\tilde{\alpha} - 1$  con  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}$ . Si  $b_{\alpha,0} > 0$ , por el apartado **C)** del Algoritmo de monodromía, el sistema no es monodrómico.

Si el vértice  $V_1$  fuese interior, el sistema tampoco sería monodrómico, al tener una ordenada impar. Esta situación se produce cuando  $\beta + 1 < \tilde{\alpha}$ . Si  $\beta + 1 \geq \tilde{\alpha}$ , el diagrama de Newton posee dos únicos vértices en los ejes:  $V_0 = (0, 2)$ ,  $V_2 = (2\tilde{\alpha}, 0)$  y una única cara compacta del tipo  $(1, \tilde{\alpha})$ , cuyo primer término cuasihomogéneo y su función de Hamilton asociada son:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\tilde{\alpha}-1} &= (y + a_{\beta,0}\chi_{\{\beta+1=\tilde{\alpha}\}}x^{\beta+1}, \tilde{\alpha}a_{\beta,0}\chi_{\{\beta+1=\tilde{\alpha}\}}x^\beta y + b_{\alpha,0}x^\alpha)^T, \\ h_{2\tilde{\alpha}} &= -\tilde{\alpha}y^2 + b_{\alpha,0}x^{2\tilde{\alpha}} \end{aligned}$$

Puesto que  $b_{\alpha,0} < 0$ , el sistema siempre es monodrómico ya que los factores de  $h_{2\tilde{\alpha}}$  son complejos. ■

## 2.11. Problema de monodromía para un sistema nilpotente generalizado

Anteriormente estudiamos la monodromía de un sistema nilpotente. Ahora pretendemos hacer lo mismo para el caso de un sistema nilpotente generalizado.

Diremos que el sistema (2.0.1) es nilpotente generalizado si en unas coordenadas apropiadas se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^n(1 + X_1(y)) + xX_2(x, y), \\ \dot{y} &= Y_1(x, y)\end{aligned}\tag{2.11.24}$$

donde  $n \geq 2$  y  $X_1$ ,  $X_2$  y  $Y_1$  son funciones analíticas con  $X_1(0) = X_2(0, 0) = Y_1(0, 0) = 0$  y el desarrollo en serie de  $Y_1(x, y)$  comienza al menos en términos de segundo orden.

Si  $n = 2$ , el diagrama de Newton del sistema (2.11.24) posee el vértice  $V = (0, 3)$ , cuya ordenada es impar. por ello el origen no es monodrómico. Así,  $n = 3$  es el menor natural impar mayor que uno, para al cual tiene sentido estudiar la monodromía del origen del sistema (2.11.24). Este será el objeto de esta sección. Antes de abordar este problema necesitaremos caracterizar la existencia de órbitas características, distintas de  $x = 0$ , para un sistema que tiene al eje  $x = 0$  como eje invariante. Es el propósito de la siguiente subsección.

### 2.11.1. Órbitas características de un sistema con un eje invariante

Consideramos el siguiente sistema, cuyo eje  $x = 0$  es invariante.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x [yX_1(y) + xX_2(x, y)], \\ \dot{y} &= xY_1(x) + yY_2(x, y),\end{aligned}\tag{2.11.25}$$

donde

$$\begin{aligned}X_1(y) &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i y^i & X_2(x, y) &= \sum_{i,j \geq 0} A_{i,j} x^i y^j \\ Y_1(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} B_i x^i & Y_2(x, y) &= \sum_{i,j \geq 0} B_{i,j} x^i y^j,\end{aligned}$$

con  $B_{0,1} \neq 0$ .

El siguiente lema calcula la forma normal de este sistema.

**Lema 2.11.59** *El sistema (2.11.25) es formalmente  $C^\infty$ -equivalente al sistema:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x [A_0 y + \chi_{\{A_0=0\}} x^\gamma y \Psi_2(x) + x^\beta \Psi_1(x)], \\ \dot{y} &= B_{0,1} y^2 + y x^\beta \Phi_1(x) + x^\alpha \Phi_2(x),\end{aligned}\tag{2.11.26}$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$  y

$$\begin{aligned}\Psi_2(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{\gamma,i} x^i & \Psi_1(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \chi_{\{A_0(\beta+i) - B_{0,1} \neq 0\}} a_{\beta,i} x^i \\ \Phi_1(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (\beta+i) a_{\beta,i} x^i & \Phi_2(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_{\alpha,i} x^i\end{aligned}$$

con  $b_{\alpha,0} \neq 0$  o  $\Phi_2 \equiv 0$ ,  $a_{\beta,0} \neq 0$  o  $\Psi_1 \equiv \Phi_1 \equiv 0$ ,  $a_{\gamma,0} \neq 0$  o  $\Psi_2 \equiv 0$ .

*Demostración:* Para el cálculo de la forma normal usaremos el tipo  $\mathbf{t} = (3, 1)$ . con este tipo el sistema (2.11.25) se escribe como  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$  donde:  $\mathbf{F}_1 = (A_0xy, B_{0,1}y^2)^T$ ,  $\mathbf{F}_2 = (A_1xy^2, B_0x + B_{0,2}y^3)^T$ , ...

Usando la expresión (2.3.3) cualquier polinomio cuasihomogéneo  $p_{3l} \in \mathcal{P}_{3l}^{\mathbf{t}}$  y sus derivadas parciales respecto a  $x$  e  $y$  se expresan como:

$$\begin{aligned}p_{3l}(x, y) &= \sum_{j=0}^l a_j x^{l-j} y^{3j}, \\ \frac{\partial p_{3l}(x, y)}{\partial x} &= \sum_{j=0}^l (l-j) a_j x^{l-j-1} y^{3j} = \sum_{j=0}^{l-1} (l-j) a_j x^{l-j-1} y^{3j}, \\ \frac{\partial p_{3l}(x, y)}{\partial y} &= \sum_{j=0}^l 3j a_j x^{l-j} y^{3j-1} = y^2 \sum_{j=1}^l 3j a_j x^{l-j} y^{3(j-1)} = y^2 \sum_{j=0}^{l-1} 3(j+1) a_{j+1} x^{l-1-j} y^{3j},\end{aligned}$$

En primer lugar hallaremos un subespacio complementario a  $\text{Im}(\ell_{3l+k+1})$  para  $l \geq 0$ ,  $k = 0, 1, 2$ , donde

$$\begin{aligned}\ell_{3l+k+1} : \mathcal{P}_{3l+k} &\rightarrow \mathcal{P}_{3l+k+1} \\ p_{3l+k} &\quad \ell_{3l+k+1}(p_{3l+k}) = \nabla p_{3l+k+1} \cdot \mathbf{F}_1\end{aligned}$$

Utilizaremos que  $p_{3l+k}(x, y) = y^k p_{3l}(x, y)$  y también:

$$\begin{aligned}\nabla p_{3l} \cdot \mathbf{F}_1 &= A_0xy \frac{\partial p_{3l}}{\partial x} + B_{0,1}y^2 \frac{\partial p_{3l}}{\partial y} \\ &= y \left[ A_0 \sum_{j=0}^{l-1} (l-j) a_j x^{l-j-1} y^{3j} + B_{0,1} \sum_{j=0}^{l-1} 3(j+1) a_{j+1} x^{l-1-j} y^{3(j+1)} \right] \\ &= y \left[ A_0 l a_0 x^l + \sum_{j=1}^{l-1} [A_0(l-j) + 3j B_{0,1}] a_j x^{l-j} y^{3j} + 3l B_{0,1} a_l y^{3l} \right] \\ &= y \left[ \sum_{j=0}^{l-1} [A_0(l-j) + 3j B_{0,1}] a_j x^{l-j} y^{3j} + 3l B_{0,1} a_l y^{3l} \right]\end{aligned}$$

- Caso  $k = 0$  se tiene:

$$\ell_{3l+1}(p_{3l}) = \nabla p_{3l} \cdot \mathbf{F}_1$$

Utilizando la función característica se tiene:

$$\text{Cor}(\ell_{3l+1}) = \left\langle \chi_{\{A_0(l-j)+3jB_{0,1}=0\}} x^{l-j} y^{3j+1} \right\rangle_{j=0}^{l-1} \quad \forall l \geq 0$$

- Caso  $k = 1$  se tiene:

$$\begin{aligned} \ell_{3l+2}(p_{3l+1}) &= \nabla p_{3l+1} \cdot \mathbf{F}_1 = p_{3l} \nabla y \cdot \mathbf{F}_1 + y \nabla p_{3l} \cdot \mathbf{F}_1 = B_{0,1} y^2 p_{3l} + y \nabla p_{3l} \cdot \mathbf{F}_1 \\ &= y^2 \left[ (A_0 l + B_{0,1}) a_0 x^l + \sum_{j=1}^{l-1} [A_0(l-j) + (3j+1)B_{0,1}] a_j x^{l-j} y^{3j} \right. \\ &\quad \left. + (3l+1)B_{0,1} a_l y^{3l} \right] \\ &= y^2 \left[ \sum_{j=0}^{l-1} [A_0(l-j) + (3j+1)B_{0,1}] a_j x^{l-j} y^{3j} + (3l+1)B_{0,1} a_l y^{3l} \right] \end{aligned}$$

por tanto podemos tomar

$$\text{Cor}(\ell_{3l+2}) = \left\langle \chi_{\{A_0(l-j)+3(j+1)B_{0,1}=0\}} x^{l-j} y^{3j+2} \right\rangle_{j=0}^{l-1} \quad \forall l \geq 0$$

- Caso  $k = 2$  se tiene:

$$\begin{aligned} \ell_{3(l+1)}(p_{3l+2}) &= \nabla p_{3l+2} \cdot \mathbf{F}_1 = p_{3l} \nabla y^2 \cdot \mathbf{F}_1 + y^2 \nabla p_{3l} \cdot \mathbf{F}_1 = 2B_{0,1} y^3 p_{3l} + y^2 \nabla p_{3l} \cdot \mathbf{F}_1 \\ &= y^3 \left[ (A_0 l + 2B_{0,1}) a_0 x^l + \sum_{j=1}^{l-1} [A_0(l-j) + (3j+2)B_{0,1}] a_j x^{l-j} y^{3j} \right. \\ &\quad \left. + (3l+2)B_{0,1} a_l y^{3l} \right] \\ &= y^3 \left[ \sum_{j=0}^{l-1} [A_0(l-j) + (3j+2)B_{0,1}] a_j x^{l-j} y^{3j} + (3l+2)B_{0,1} a_l y^{3l} \right] \\ &= \sum_{j=1}^l [A_0(l+1-j) + (3j-1)B_{0,1}] a_{j-1} x^{l+1-j} y^{3j} + (3l+2)B_{0,1} a_l y^{3l} \end{aligned}$$

por tanto podemos tomar

$$\text{Cor}(\ell_{3(l+1)}) = \left\langle x^{l+1}, \left( \chi_{\{A_0(l+1-j)+3(j-1)B_{0,1}=0\}} x^{l+1-j} y^{3j} \right)_{j=1}^l \right\rangle \quad \forall l \geq 0$$

Ahora hallaremos una base de un subespacio complementario a  $\text{Im}(\mathcal{L}_{3l+k+1})$  para  $l \geq 0$ ,  $k = 0, 1, 2$ , donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3l+k+1} : \mathcal{Q}_{3l+k} \times \text{Cor}(\ell_{3l+k}) &\rightarrow \mathcal{Q}_{3l+k+1} \\ (\mathbf{P}_{3l+k}, \mu_{3l+k}) &\quad \mathcal{L}_{3l+k+1}(\mathbf{P}_{3l+k}) = [\mathbf{P}_{3l+k}, \mathbf{F}_1] + \mu_{3l+k} \mathbf{F}_1 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{P}_{3l+k}$  debe tener la misma simetría que el campo, por tanto debe tener el eje  $x = 0$  como eje invariante. Así  $\mathbf{P}_{3l+k} = (xp_{3l+k}, q_{3l+k+1})^T$ , obteniéndose:

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_{3l+k}, \mathbf{F}_1] + \mu_{3l+k} \mathbf{F}_1 &= \begin{pmatrix} \nabla xp_{3l+k} \cdot \mathbf{F}_1 - A_0 y x p_{3l+k} - A_0 x q_{3l+k+1} + A_0 x y \mu_{3l+k} \\ \nabla q_{3l+k+1} \cdot \mathbf{F}_1 - 2B_{0,1} y q_{3l+k+1} + B_{0,1} y^2 \mu_{3l+k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x [\nabla p_{3l+k} \cdot \mathbf{F}_1 - A_0 q_{3l+k+1} + A_0 y \mu_{3l+k}] \\ \nabla q_{3l+k+1} \cdot \mathbf{F}_1 - 2B_{0,1} y q_{3l+k+1} + B_{0,1} y^2 \mu_{3l+k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Caso  $k = 0$ .  $p_{3l} = \sum_{j=0}^l a_j x^{l-j} y^{3j}$ ,  $q_{3l+1} = y \sum_{j=0}^l b_j x^{l-j} y^{3j}$ ,  $\mu_{3l} = \sum_{j=0}^l e_j x^{l-j} y^{3j}$  y  $e_j = \chi_{\{A_0(l-j)+3(j-1)B_{0,1}=0\}}$  para  $j = 1, \dots, l-1$ ,  $e_l = 0$ . Así

$$\mathcal{L}_{3l+1}(\mathbf{P}_{3l}, \mu_{3l}) = \begin{pmatrix} x [\nabla p_{3l} \cdot \mathbf{F}_1 - A_0 y q_{3l} + A_0 y \mu_{3l}] \\ \nabla q_{3l+1} \cdot \mathbf{F}_1 - 2B_{0,1} y^2 q_{3l} + B_{0,1} y^2 \mu_{3l} \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3l+1}(\mathbf{P}_{3l}, \mu_{3l}) &= \\ &\left( xy \left[ \sum_{j=0}^l [[A_0(l-j) + 3jB_{0,1}]a_j + A_0(e_j - b_j)] x^{l-j} y^{3j} \right] \right) \mathbf{e}_1 \\ &+ \left( y^2 \left[ \sum_{j=0}^l [[A_0(l-j) + (3j-1)B_{0,1}]b_j + B_{0,1}e_j] x^{l-j} y^{3j} \right] \right) \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Entonces podemos elegir un subespacio complementario de la forma

$$\text{Cor}(\mathcal{L}_{3l+1}) = \left\langle \begin{pmatrix} \chi_{\{A_0=0\}} x^{l+1} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad l \geq 0,$$

- Caso  $k = 1$ .  $p_{3l+1} = y \sum_{j=0}^l a_j x^{l-j} y^{3j}$ ,  $q_{3l+2} = y^2 \sum_{j=0}^l b_j x^{l-j} y^{3j}$ ,  $\mu_{3l+1} = y \sum_{j=0}^{l-1} e_j x^{l-j} y^{3j}$ , con  $e_j = \chi_{\{A_0(l-j)+3jB_{0,1}=0\}}$  para  $j = 0, \dots, l-1$ . Así

$$\mathcal{L}_{3l+2}(\mathbf{P}_{3l+1}, \mu_{3l+1}) = \begin{pmatrix} x [\nabla p_{3l+1} \cdot \mathbf{F}_1 - A_0 y^2 q_{3l} + A_0 y \mu_{3l+1}] \\ \nabla q_{3l+2} \cdot \mathbf{F}_1 - 2B_{0,1} y^3 q_{3l} + B_{0,1} y^2 \mu_{3l+1} \end{pmatrix}$$



por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3l+2}(\mathbf{P}_{3l+1}, \mu_{3l+1}) = & \\ & \left( xy^2 \left[ \sum_{j=0}^{l-1} [[A_0(l-j) + (3j+1)B_{0,1}]a_j + A_0(e_j - b_j)] x^{l-j} y^{3j} \right. \right. \\ & \left. \left. + [(3l+1)B_{0,1}a_l - A_0b_l]y^{3l} \right) \mathbf{e}_1 \right. \\ & \left. + y^3 \left[ \sum_{j=0}^{l-1} [[A_0(l-j) + 3jB_{0,1}]b_j + B_{0,1}e_j] x^{l-j} y^{3j} + 3lB_{0,1}b_l y^{3l} \right) \mathbf{e}_2 \right. \end{aligned}$$

Entonces podemos elegir un subespacio complementario de la forma

$$\text{Cor}(\mathcal{L}_{3l+2}) = \left\langle \left( \begin{array}{c} 0 \\ x^{l+1} \end{array} \right) \right\rangle, \quad \forall l \geq 0,$$

- Caso  $k = 2$ .  $p_{3l+2} = y^2 \sum_{j=0}^l a_j x^{l-j} y^{3j}$ ,  $q_{3(l+1)} = \sum_{j=0}^{l+1} b_j x^{l+1-j} y^{3j}$ ,  $\mu_{3l+2} = y^2 \sum_{j=0}^{l-1} e_j x^{l-j} y^{3j}$  donde  $e_j = \chi_{\{A_0(l-j)+3(j+1)B_{0,1}=0\}}$  para  $j = 0, \dots, l-1$ . Así

$$\mathcal{L}_{3(l+1)}(\mathbf{P}_{3l+2}, \mu_{3l+2}) = \left( \begin{array}{c} x [\nabla p_{3l+2} \cdot \mathbf{F}_1 - A_0 q_{3(l+1)} + A_0 y \mu_{3l+2}] \\ \nabla q_{3(l+1)} \cdot \mathbf{F}_1 - 2B_{0,1} y q_{3(l+1)} + B_{0,1} y^2 \mu_{3l+2} \end{array} \right)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3(l+1)}(\mathbf{P}_{3l+2}, \mu_{3l+2}) = & \\ & \left( x \left[ -A_0 b_0 x^{l+1} + y^3 \sum_{j=0}^{l-1} [[A_0(l-j) + (3j+2)B_{0,1}]a_j + A_0(e_j - b_{j+1})] x^{l-j} y^{3j} \right. \right. \\ & \left. \left. + [(3l+2)B_{0,1}a_l - A_0b_{l+1}]y^{3(l+1)} \right) \mathbf{e}_1 + (y [[A_0(l+1) - 2B_{0,1}]b_0 x^{l+1} \right. \right. \\ & \left. \left. + y^3 \sum_{j=0}^{l-1} [[A_0(l-j) + (3j+1)B_{0,1}]b_{j+1} + B_{0,1}e_j] x^{l-j} y^{3j} + (3l+1)B_{0,1}b_{l+1} y^{3(l+1)} \right) \mathbf{e}_2 \right) \end{aligned}$$

Entonces podemos elegir un subespacio complementario de la forma

$$\text{Cor}(\mathcal{L}_{3(l+1)}) = \left\langle \left( \begin{array}{c} ax^{l+2} \\ bx^{l+1}y \end{array} \right) \right\rangle, \quad \forall l \geq 0, \quad \text{con } a[A_0(l+1) - 2B_{0,1}] + bA_0 \neq 0$$

Una elección del co-rango que nos interesa es:

$$\text{Cor}(\mathcal{L}_{3(l+1)}) = \left\langle \left( \begin{array}{c} \chi_{\{A_0(l+1)-B_{0,1} \neq 0\}} x^{l+2} \\ (l+1)x^{l+1}y \end{array} \right) \right\rangle$$

Con esto se prueba el resultado. ■

**Proposición 2.11.60** Sea  $\Delta = \tilde{\alpha}^2 a_{\beta,0}^2 \chi_{\{B_{0,1} - A_0 \tilde{\alpha} = 0\}} \chi_{\{\beta = \tilde{\alpha}\}} - 4b_{\alpha,0}(B_{0,1} - \tilde{\alpha}A_0)$ . El sistema (2.11.26) no posee órbitas características distintas de  $x = 0$  si y sólo si:

$$\alpha = 2\tilde{\alpha} \text{ con } \tilde{\alpha} \in \mathbb{N}, \beta \geq \tilde{\alpha}, \Delta < 0 \text{ y } \frac{B_{0,1}}{A_0} \notin [0, \tilde{\alpha}].$$

*Demostración:* Si  $\Phi_1 \equiv 0$ , el eje  $y = 0$  es una órbita característica distinta de  $x = 0$ . En el caso  $b_{\alpha,0} \neq 0$  hay tres puntos soportes que caracterizan el diagrama de Newton.  $V_0 = (1, 2)$  asociado al campo  $(A_0xy, B_{0,1}y^2)$  vértice interior,  $V_2 = (\alpha + 1, 0)$ , asociado al campo  $(0, b_{\alpha,0}x^\alpha)$ , vértices en el eje y  $V_1 = (\beta + 1, 1)$  asociado al campo  $(a_{\beta,0}x^{\beta+1}, (\beta + 1)a_{\beta,0}x^\beta y)$  que puede no ser vértice interior. En primer lugar hemos de eliminar el caso en que  $V_1$  sea vértice interior pues el sistema tendría órbitas características distintas de  $x = 0$  al tener ordenada impar. Esta situación se tiene cuando  $2\beta < \alpha$ . Si  $2\beta \geq \alpha$ , el diagrama de Newton posee un vértice en el eje  $V_2 = (\alpha + 1, 0)$ , un vértice interior  $V_0 = (1, 2)$  y una única cara compacta del tipo  $(2, \alpha)$  cuyo primer término y su función de Hamilton son:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha &= (A_0xy + a_{\beta,0}\chi_{\{A_0\beta - B_{0,1} \neq 0\}}\chi_{\{2\beta = \alpha\}}x^{\beta+1}, B_{0,1}y^2 + \beta a_{\beta,0}\chi_{\{2\beta = \alpha\}}x^\beta y + b_{\alpha,0}x^\alpha), \\ h_{2\alpha+2} &= x \left[ (2B_{0,1} - \alpha A_0)y^2 + (2\beta - \alpha\chi_{\{A_0\beta - B_{0,1} \neq 0\}})a_{\beta,0}\chi_{\{2\beta = \alpha\}}x^{\beta+1}y + 2b_{\alpha,0}x^\alpha \right] \end{aligned}$$

Si  $\alpha$  es impar, esto es,  $\alpha = 2\tilde{\alpha} - 1$  entonces  $\chi_{\{2\beta = 2\tilde{\alpha} - 1\}} = 0$  y por tanto

$$h_{4\tilde{\alpha}} = x \left[ (2B_{0,1} - (2\tilde{\alpha} - 1)A_0)y^2 + 2b_{\alpha,0}x^{2\tilde{\alpha}-1} \right]$$

si  $(2B_{0,1} - (2\tilde{\alpha} - 1)A_0) \neq 0$ ,  $h_{4\tilde{\alpha}}$  posee un factor real no trivial simple. De aquí deducimos que existen órbitas características distintas de  $x = 0$ .

Si  $(2B_{0,1} - (2\tilde{\alpha} - 1)A_0) = 0$  entonces

$$\begin{aligned} h_{4\tilde{\alpha}} &= 2b_{\alpha,0}x^{2\tilde{\alpha}} \\ \mu_{2\tilde{\alpha}-1} &= (A_0 + 2B_{0,1})y \end{aligned}$$

y el factor  $x$  de  $h_{4\tilde{\alpha}}$  no lo es de  $\mu_{2\tilde{\alpha}-1}$  por lo tanto también existen órbitas características distintas de  $x = 0$ .

Si  $\alpha = 2\tilde{\alpha}$  entonces el tipo asociada a la cara compacta es  $(1, \tilde{\alpha})$  y la función de Hamilton del primer término es:

$$\begin{aligned} h_{2\tilde{\alpha}+1} &= 2x \left[ (B_{0,1} - \tilde{\alpha}A_0)y^2 + (\beta - \tilde{\alpha}\chi_{\{A_0\beta - B_{0,1} \neq 0\}})a_{\beta,0}\chi_{\{\beta=\tilde{\alpha}\}}x^\beta y + b_{\alpha,0}x^{2\tilde{\alpha}} \right] \\ &= 2x \left[ (B_{0,1} - \tilde{\alpha}A_0)y^2 + \tilde{\alpha}(1 - \chi_{\{A_0\tilde{\alpha} - B_{0,1} \neq 0\}})a_{\beta,0}\chi_{\{\beta=\tilde{\alpha}\}}x^{\tilde{\alpha}}y + b_{\alpha,0}x^{2\tilde{\alpha}} \right] \\ &= 2x \left[ (B_{0,1} - \tilde{\alpha}A_0)y^2 + \tilde{\alpha}\chi_{\{B_{0,1} - A_0\tilde{\alpha}=0\}}\chi_{\{\beta=\tilde{\alpha}\}}a_{\beta,0}x^{\tilde{\alpha}}y + b_{\alpha,0}x^{2\tilde{\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

En resumen, la función de Hamilton, su discriminante y la divergencia del primer término son:

$$\begin{aligned} h_{2\tilde{\alpha}+1} &= 2x \left[ (B_{0,1} - \tilde{\alpha}A_0)y^2 + \tilde{\alpha}\chi_{\{B_{0,1} - A_0\tilde{\alpha}=0\}}\chi_{\{\beta=\tilde{\alpha}\}}a_{\beta,0}x^{\tilde{\alpha}}y + b_{\alpha,0}x^{2\tilde{\alpha}} \right] \\ \Delta &= \tilde{\alpha}^2 a_{\beta,0}^2 \chi_{\{B_{0,1} - A_0\tilde{\alpha}=0\}} \chi_{\{\beta=\tilde{\alpha}\}} - 4b_{\alpha,0}(B_{0,1} - \tilde{\alpha}A_0) \\ \mu_{\tilde{\alpha}} &= (A_0 + 2B_{0,1})y + \left[ (\tilde{\alpha} + 1)\chi_{\{B_{0,1} - \tilde{\alpha}A_0 \neq 0\}} + \tilde{\alpha} \right] a_{\beta,0}\chi_{\{\beta=\tilde{\alpha}\}}x^{\tilde{\alpha}} \end{aligned}$$

Si  $\Delta > 0$  entonces  $h_{2\tilde{\alpha}+1}$  posee dos factores reales simples no triviales por lo que existen órbitas características distintas de  $x = 0$ .

Si  $\Delta = 0$  y  $a_{\beta,0}\chi_{\{B_{0,1} - A_0\tilde{\alpha}=0\}}\chi_{\{\beta=\tilde{\alpha}\}} = 0$  es  $B_{0,1} = \tilde{\alpha}A_0 \neq 0$  y  $\mu_{\tilde{\alpha}} = (2\tilde{\alpha} + 1)A_0y + \tilde{\alpha}a_{\beta,0}\chi_{\{\beta=\tilde{\alpha}\}}x^{\tilde{\alpha}}$ . Así es  $x$  el único factor de  $h_{2\tilde{\alpha}+1}$ , no siendo  $x$  factor de  $\mu_{\tilde{\alpha}}$  por lo tanto existen órbitas características distintas de  $x = 0$ .

Si  $\Delta = 0$  y  $a_{\beta,0}\chi_{\{B_{0,1} - A_0\tilde{\alpha}=0\}}\chi_{\{\beta=\tilde{\alpha}\}} \neq 0$  entonces  $\beta = \tilde{\alpha}$ ,  $B_{0,1} = \tilde{\alpha}A_0 \neq 0$ ,  $a_{\beta,0} \neq 0$  y  $h_{2\tilde{\alpha}+1} = 2x^{\tilde{\alpha}+1} [\tilde{\alpha}a_{\beta,0}y + b_{\alpha,0}x^{\tilde{\alpha}}]$  posee un factor real simple por lo tanto existen órbitas características distintas de  $x = 0$ .

Si  $\Delta < 0$ , entonces  $h_{2\tilde{\alpha}}$  posee raíces complejas y no puede ser  $B_{0,1} - \tilde{\alpha}A_0 = 0$  ya que entonces sería  $\Delta \geq 0$ . Así se tiene  $\frac{B_{0,1}}{A_0} \neq 0$ ,  $\frac{B_{0,1}}{A_0} \neq \tilde{\alpha}$ . Por tanto si  $0 < \frac{B_{0,1}}{A_0} < \tilde{\alpha}$  es  $\beta_{V_0} < 0$  y existen órbitas características distintas de  $x = 0$ . Y si  $\frac{B_{0,1}}{A_0} \notin [0, \tilde{\alpha}]$  no existen órbitas características distintas de  $x = 0$ . ■

### 2.11.2. Caracterización de la monodromía para un sistema nilpotente generalizado

En primer lugar calculamos una forma normal con co-rango disipativo para hacer una simplificación previa del sistema.

**Lema 2.11.61** *El sistema (2.11.24), con  $n = 3$ , es formalmente  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugado al sistema:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3 + x^{\delta+1}y^2\Psi_1(x) + x^{\gamma+1}y\Psi_2(x) + x^{\beta+1}\Psi_3(x), \\ \dot{y} &= y^3(x^{\delta+1}\Psi_1(x))' + x^\gamma y^2\Phi_2(x) + x^\beta y\Phi_3(x) + x^\alpha\Phi_4(x),\end{aligned}\quad (2.11.27)$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$  y

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{\delta,i}x^i & \Psi_2(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{\gamma,i}x^i & \Psi_3(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{\beta,i}x^i \\ \Phi_4(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_{\alpha,i}x^i & \Phi_2(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_{\gamma,i}x^i, & \Phi_3(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_{\beta,i}x^i,\end{aligned}$$

con  $b_{\alpha,0} \neq 0$  o  $\Phi_4 \equiv 0$ ,  $[a_{\beta,0}^2 + b_{\beta,0}^2] \neq 0$  o  $\Psi_3 \equiv \Phi_3 \equiv 0$ ,  $[a_{\gamma,0}^2 + b_{\gamma,0}^2] \neq 0$  o  $\Psi_2 \equiv \Phi_2 \equiv 0$ ,  $a_{\delta,0} \neq 0$  o bien  $\Psi_1 \equiv 0$ ,

*Demostración:* Para el cálculo de la forma normal usaremos el tipo  $\mathbf{t} = (3, 1)$ . con este tipo el sistema (2.11.24) se escribe como  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 + \dots$  donde:  $\mathbf{F}_0 = (y^3, 0)^T$ ,  $\mathbf{F}_1 = (a_{4,0}y^4 + a_{1,1}xy, b_{0,2}y^2)^T$ , ...

Usando la expresión (2.3.3) cualquier polinomio cuasihomogéneo  $p_{3l} \in \mathcal{P}_{3l}^{\mathbf{t}}$  y su derivada parcial respecto a  $x$  se expresa como:

$$\begin{aligned}p_{3l}(x, y) &= \sum_{j=0}^l a_j x^{l-j} y^{3j}, \\ \frac{\partial p_{3l}(x, y)}{\partial x} &= \sum_{j=0}^l (l-j) a_j x^{l-j-1} y^{3j} = \sum_{j=0}^{l-1} (l-j) a_j x^{l-j-1} y^{3j}\end{aligned}$$

Nos proponemos hallar una base de un subespacio complementario a  $\text{Im}(\mathbf{L}_{3l+k})$  para  $l \geq 0$ ,  $k = 0, 1, 2$  no ambos nulos, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{3l+k} : \mathcal{Q}_{3l+k} &\rightarrow \mathcal{Q}_{3l+k} \\ \mathbf{P}_{3l+k} &\quad \mathbf{L}_{3l+k}(\mathbf{P}_{3l+k}) = [\mathbf{P}_{3l+k}, \mathbf{F}_0]\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{P}_{3l+k} = (p_{3(l+1)+k}, q_{3l+k+1})^T$  y que  $p_{3l+k}(x, y) = y^k p_{3l}(x, y)$  es

$$[\mathbf{P}_{3l+k}, \mathbf{F}_0] = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{3(l+1)+k}}{\partial x} y^3 - 3y^2 q_{3l+k+1} \\ \frac{\partial q_{3l+k+1}}{\partial x} y^3 \end{pmatrix}$$

- Caso  $k = 0, 1$ .  $p_{3(l+1)+k} = y^k \sum_{j=0}^{l+1} a_j x^{l+1-j} y^{3j}$ ,  $q_{3l+k+1} = y^{k+1} \sum_{j=0}^l b_j x^{l-j} y^{3j}$ .  
Así

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{3l+k}(\mathbf{P}_{3l+k}) &= \begin{pmatrix} y^{3+k} \sum_{j=0}^l (l+1-j) a_j x^{l-j} y^{3j} - 3y^2 y^{k+1} \sum_{j=0}^l b_j x^{l-j} y^{3j} \\ y^{3+k+1} \sum_{j=0}^{l-1} (l-j) b_j x^{l-j-1} y^{3j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^k \left[ \sum_{j=0}^l (l+1-j) a_j x^{l-j} y^{3(j+1)} - 3 \sum_{j=0}^l b_j x^{l-j} y^{3(j+1)} \right] \\ y^{k+1} \sum_{j=0}^{l-1} (l-j) b_j x^{l-j-1} y^{3(j+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^k \sum_{j=1}^{l+1} [(l-j) a_{j-1} - 3b_{j-1}] x^{l+1-j} y^{3j} \\ y^{k+1} \sum_{j=1}^l (l+1-j) b_{j-1} x^{l-j} y^{3j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces podemos elegir un subespacio complementario de la forma

$$\text{Cor}(\mathbf{L}_{3l+k}) = \left\langle \left( \begin{pmatrix} x^{l+1} y^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^l y^{k+1} \end{pmatrix} \right) \right\rangle, l \geq 0, k = 0, 1, l+k > 0$$

- Caso  $k = 2$ .  $p_{3(l+1)+k}(x, y) = y^2 \sum_{j=0}^l a_j x^{l-j} y^{3j}$  y  $q_{3l+k+1} = \sum_{j=0}^{l+1} b_j x^{l+1-j} y^{3j}$ .  
Así

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{3l+2}(\mathbf{P}_{3l+2}) &= \begin{pmatrix} y^5 \sum_{j=0}^l (l+1-j) a_j x^{l-j} y^{3j} - 3y^2 \sum_{j=0}^{l+1} b_j x^{l+1-j} y^{3j} \\ y^3 \sum_{j=0}^l (l+1-j) b_j x^{l-j} y^{3j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2 \left[ \sum_{j=0}^l (l+1-j) a_j x^{l-j} y^{3(j+1)} - 3 \sum_{j=0}^{l+1} b_j x^{l+1-j} y^{3j} \right] \\ \sum_{j=0}^l (l+1-j) b_j x^{l-j} y^{3(j+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2 \left[ -3b_0 x^{l+1} + \sum_{j=1}^{l+1} [(l+2-j) a_{j-1} - 3b_j] x^{l+1-j} y^{3j} \right] \\ \sum_{j=1}^{l+1} (l+2-j) b_{j-1} x^{l+1-j} y^{3j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces podemos elegir un subespacio complementario de la forma

$$\text{Cor}(\mathbf{L}_{3l+2}) = \left\langle \left( \begin{pmatrix} ax^{l+1}y^2 \\ bx^ly^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^{l+1} \end{pmatrix} \right) \right\rangle, (l+1)a + 3b \neq 0, l \geq 0.$$

Una posible elección del co-rango puede ser  $\text{Cor}(\mathbf{L}_{3l+k}) = \left\langle \left( \begin{pmatrix} 0 \\ x^l y^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^{l+1} \end{pmatrix} \right) \right\rangle$

pero el que nos interesa es:

$$\text{Cor}(\mathbf{L}_{3l+k}) = \left\langle \left( \begin{pmatrix} x^{l+1} y^2 \\ (l+1)x^l y^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^{l+1} \end{pmatrix} \right) \right\rangle$$

Con esto se prueba el resultado. ■

**Notas:** En el sistema (2.11.27) consideraremos las siguientes restricciones:

- a)  $\alpha$  debe ser impar ya que en otro caso se tendría un vértice  $(\alpha + 1, 0)$  con abscisa impar. Por tanto, el origen no sería monodrómico.
- b) Mediante un escalado podemos tomar  $b_{\alpha,0} = -1$  ya que en otro caso, por la condición **B)** del algoritmo, el sistema (2.11.27) no es monodrómico.

La siguiente proposición, dada por Aranda en [11], será útil para caracterizar la monodromía del sistema (2.11.27). Describe las distintas situaciones que se tienen: raíces complejas o reales, simples o múltiples de un polinomio de grado cuatro. Para hallar el número de raíces reales utiliza el método de Sturm y para los casos de raíces múltiples condiciones sobre la resultante.

**Proposición 2.11.62** *Sea el polinomio  $p_4(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s$  con  $ms \neq 0$ . Sean*

$$\begin{aligned}
 Q &= -8mq + 3p^2 \\
 R &= q^2 - 3pr + 12ms \\
 V_2 &= \frac{1}{3}(4mq - Q)R + 6msQ + 2mrpq + 2m^2(8sq - 9r^2) \\
 D_4 &= (r^2 - 4sq)V_2 - 3s^2Q^2 + \left[ \frac{pr}{3}(6sq - r^2) - 8sm(sq + r^2) \right] Q \\
 &\quad + 8sm(8sm - rp)R - \frac{4}{3}r^2m(6sm - rp)q - m^2(9r^4 + 512ms^3 - 96rps^2)
 \end{aligned}$$

entonces  $p_4(z)$  tiene las siguientes raíces:

- 4 raíces reales distintas si  $D_4 > 0$ ,  $V_2 > 0$  y  $Q > 0$ .
- 2 raíces reales distintas y 2 complejas si  $D_4 < 0$ .
- 4 raíces complejas distintas si  $D_4 > 0$  y  $V_2 \leq 0$  o  $Q \leq 0$ .
- 1 raíz doble real y 2 simples reales si  $D_4 = 0$  y  $V_2 > 0$ .
- 1 raíz doble real y 2 simples complejas si  $D_4 = 0$  y  $V_2 < 0$ .

- 1 raíz triple real y 1 simple real si  $D_4 = V_2 = R = 0$  y  $Q \neq 0$ .
- 2 raíces dobles reales si  $D_4 = V_2 = 0$ ,  $Q > 0$  y  $R \neq 0$ .
- 2 raíces dobles complejas si  $D_4 = V_2 = 0$ ,  $Q < 0$  y  $R \neq 0$ .
- 1 raíz real cuádruple si  $D_4 = V_2 = Q = 0$ .

En el siguiente teorema estudiamos los casos de monodromía para el sistema (2.11.27) con  $\alpha$  impar y  $b_{\alpha,0} = -1$ .

**Teorema 2.11.63** Sean

$$\begin{aligned} \Delta_i &= (b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0})^2 \chi_{\{\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} = \beta + 1\}} + 4(b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0}), \\ \Delta_1 &= (2b_{\gamma,0} - (2\hat{\alpha} - 1)a_{\gamma,0})^2 \chi_{\{2(\hat{\alpha} - 1) = \gamma\}} - 8(2\hat{\alpha} - 1) \\ q &= (b_{\gamma,0} - \hat{\alpha}a_{\gamma,0}) \chi_{\{2\hat{\alpha} = \gamma + 1\}} \\ r &= (b_{\beta,0} - \hat{\alpha}a_{\beta,0}) \chi_{\{3\hat{\alpha} = \beta + 1\}} \\ V_2 &= 2\hat{\alpha}(2q^3 - 8\hat{\alpha}q - 9\hat{\alpha}r^2), \\ D_4 &= (4q + r^2)V_2 - \hat{\alpha}^2(64q^2 + 56r^2q + 9r^4 - 256\hat{\alpha}) \end{aligned}$$

El origen del sistema (2.11.27) con  $\tilde{a}_{0,0} = 1$ ,  $b_{\alpha,0} = -1$ ,  $\alpha = 2\tilde{\alpha} - 1$  es monodrómico si se verifican alguna de las siguientes condiciones:

- m1)**  $\gamma = 2\tilde{\gamma} - 1$ ,  $\tilde{\gamma} \leq \delta + 1$ ,  $2\tilde{\gamma} < \tilde{\alpha} \leq \beta + 1 - \tilde{\gamma}$ ,  $\frac{b_{\gamma,0}}{a_{\gamma,0}} \notin [\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}]$ ,  $\Delta_i < 0$  y  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} < 0$ .
- m2)**  $\gamma = 2\tilde{\gamma} - 1$ ,  $\tilde{\gamma} \leq \delta + 1$ ,  $2\tilde{\gamma} < \tilde{\alpha} \leq \beta + 1 - \tilde{\gamma}$ ,  $\frac{b_{\gamma,0}}{a_{\gamma,0}} = \tilde{\gamma}$  y  $\Delta_i < 0$ .
- m3)**  $\gamma = 2\tilde{\gamma} - 1$ ,  $\tilde{\gamma} \leq \delta + 1$ ,  $2\tilde{\gamma} < \tilde{\alpha} \leq \beta + 1 - \tilde{\gamma}$ ,  $\frac{b_{\gamma,0}}{a_{\gamma,0}} = \tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}$ ,  $\Delta_i = 0$  y  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} < 0$ .
- m4)**  $\frac{\tilde{\alpha}}{2} = \min\{\delta + 1, \frac{\gamma+1}{6}, \frac{\beta+1}{3}, \frac{\tilde{\alpha}}{2}\}$ ,  $\tilde{\alpha} = 2\hat{\alpha} - 1$ ,  $\Delta_1 < 0$ .
- m5)**  $\frac{\tilde{\alpha}}{2} = \min\{\delta + 1, \frac{\gamma+1}{6}, \frac{\beta+1}{3}, \frac{\tilde{\alpha}}{2}\}$ ,  $\tilde{\alpha} = 2\hat{\alpha}$ ,  $D_4 > 0$  y  $V_2 \leq 0$  o  $q \leq 0$ .
- m6)**  $\frac{\tilde{\alpha}}{2} = \min\{\delta + 1, \frac{\gamma+1}{6}, \frac{\beta+1}{3}, \frac{\tilde{\alpha}}{2}\}$ ,  $\tilde{\alpha} = 2\hat{\alpha}$ ,  $r = 0$ ,  $\gamma + 1 = 2\hat{\alpha}$  y  $b_{\gamma,0} = -2\sqrt{\hat{\alpha}} + \hat{\alpha}a_{\gamma,0}$ .

En los siguientes casos el tipo topológico no está determinado

- d1)**  $\gamma = 2\tilde{\gamma} - 1$ ,  $\tilde{\gamma} \leq \delta + 1$ ,  $\beta + 1 = \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}$ ,  $2\tilde{\gamma} < \tilde{\alpha}$ ,  $\Delta_i = 0$ ,  $b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0} < 0$ ,  
 $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} \leq 0$ ,  $(b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0}) \neq 0$  y  $[b_{\beta,0} + (\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})a_{\beta,0}][b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0}] - 4(b_{\gamma,0} + \tilde{\gamma}a_{\gamma,0}) = 0$ .
- d2)**  $\frac{\tilde{\alpha}}{2} = \min \left\{ \delta + 1, \frac{\gamma+1}{6}, \frac{\beta+1}{3}, \frac{\tilde{\alpha}}{2} \right\}$ ,  $\tilde{\alpha} = 2\hat{\alpha} - 1$ ,  $\gamma = 2(\hat{\alpha} - 1)$ ,  $\Delta_1 = 0$ ,  $b_{\gamma,0} = -\frac{2\hat{\alpha}-1}{2}a_{\gamma,0} \neq 0$ .
- d3)**  $\frac{\tilde{\alpha}}{2} = \min \left\{ \delta + 1, \frac{\gamma+1}{6}, \frac{\beta+1}{3}, \frac{\tilde{\alpha}}{2} \right\}$ ,  $\tilde{\alpha} = 2\hat{\alpha}$ ,  $D_4 = 0$  y  $V_2 > 0$ ,  $b_{\gamma,0} - \hat{\alpha}a_{\gamma,0} < 0$ ,  
 $\gamma + 1 = 2\hat{\alpha}$ ,  $b_{\beta,0} - \hat{\alpha}a_{\beta,0} \neq 0$ ,  $\beta + 1 = 3\hat{\alpha}$  y  $4\hat{\alpha}a_{\delta,0}\chi_{\{\delta+1=\hat{\alpha}\}}\lambda^2 + 2(b_{\gamma,0} + \hat{\alpha}a_{\gamma,0})\lambda + b_{\beta,0} + 3\hat{\alpha}a_{\beta,0} = 0$  con  $\lambda = -\text{signo}(r)\sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2-20\hat{\alpha}}}{10\hat{\alpha}}}$ .
- d4)**  $\frac{\tilde{\alpha}}{2} = \min \left\{ \delta + 1, \frac{\gamma+1}{6}, \frac{\beta+1}{3}, \frac{\tilde{\alpha}}{2} \right\}$ ,  $\tilde{\alpha} = 2\hat{\alpha}$ ,  $r = 0$ ,  $\gamma + 1 = 2\hat{\alpha}$ ,  $b_{\gamma,0} = 3\sqrt{\hat{\alpha}}$ ,  
 $a_{\gamma,0} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}}}$  y  $4a_{\delta,0}\chi_{\{\delta+1=\hat{\alpha}\}} + (b_{\beta,0} + 3\hat{\alpha}a_{\beta,0})\chi_{\{\beta+1=3\hat{\alpha}\}} = 0$ .

En estos casos, la monodromía del sistema (2.11.27) equivale a la no existencia de órbitas características distintas de  $x = 0$  del sistema (2.11.26), problema resuelto en la Proposición 2.11.60. El sistema (2.11.26) es  $C^\infty$ -equivalente al sistema (2.11.25) que es obtenido a su vez al aplicar al sistema (2.11.27) los siguientes blow-up:

- d1)**  $x = u$  y  $y = u^{\tilde{\alpha}-\tilde{\gamma}} \left( \bar{y} + \frac{2}{b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0}} \right)$ ,  $dt = \frac{d\tau}{u^{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}-1}}$
- d2)**  $x = u^2 \left( \bar{x} - \left( \frac{(2\hat{\alpha}-1)a_{\gamma,0}}{2} \right)^{\frac{1}{2\hat{\alpha}-1}} \right)$ ,  $y = u^{2\hat{\alpha}-1}$ ,  $dt = \frac{d\tau}{u^{6\hat{\alpha}-5}}$ .
- d3)**  $x = u$ ,  $y = u^{\hat{\alpha}} (\bar{y} + \lambda)$ ,  $dt = \frac{d\tau}{u^{3\hat{\alpha}-1}}$ .
- d4)**  $x = u$ ,  $y = u^{\hat{\alpha}} \left( \bar{y} \mp \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}}} \right)$ ,  $dt = \frac{d\tau}{u^{3\hat{\alpha}-1}}$ , uno para cada signo.

En todos los demás casos el sistema (2.11.27) posee alguna órbita característica.

*Demostración:* Hay cuatro puntos soportes que caracterizan el diagrama de Newton.  $V_0 = (0, 4)$  y  $V_4 = (2\tilde{\alpha}, 0)$  vértices en los ejes y  $V_3 = (\beta + 1, 1)$ ,  $V_2 = (\gamma + 1, 2)$ ,  $V_1 = (\delta + 1, 3)$  que pueden no ser vértices interiores. En primer lugar hemos de eliminar los casos en que  $V_1$  o  $V_3$  son vértices interiores pues en esos casos el sistema no es monodrómico al tener ordenadas impares.



- A) Si  $\delta + 1 < \min \left\{ \frac{\gamma+1}{2}, \frac{\beta+1}{3}, \frac{\tilde{\alpha}}{2} \right\}$  entonces  $V_1$  es vértice interior por tanto el sistema no es monodrómico ya que la ordenada de su soporte es impar.
- B) Si  $\frac{\beta+1}{3} = \min \left\{ \frac{\gamma+1}{2}, \frac{\beta+1}{3}, \frac{\tilde{\alpha}}{2} \right\} \leq \delta + 1$  entonces  $V_3$  es vértice interior, el sistema tampoco es monodrómico ya que la ordenada de su soporte es impar.
- C) Si  $\frac{\gamma+1}{2} \leq \delta + 1$  y  $\frac{\gamma+1}{2} < \frac{\beta+1}{3} < \frac{\gamma+1}{6} + \frac{\tilde{\alpha}}{3}$  entonces también se tiene  $\frac{\beta+1}{3} < \frac{\tilde{\alpha}}{2}$ . En este caso  $V_3$  es vértice interior, el sistema tampoco es monodrómico ya que la ordenada de su soporte es impar.
- D) Si  $\frac{\gamma+1}{2} \leq \delta + 1$  y  $\frac{\gamma+1}{2} < \frac{\gamma+1}{6} + \frac{\tilde{\alpha}}{3} \leq \frac{\beta+1}{3}$  entonces también se tiene  $\frac{\gamma+1}{2} < \frac{\tilde{\alpha}}{2}$ . En este caso  $V_2 = (\gamma + 1, 2)$  es el único vértice interior del diagrama de Newton del sistema. Por tanto para que sea monodrómico debe ser  $\gamma$  impar,  $\gamma = 2\tilde{\gamma} - 1$ . Así las desigualdades son:  $\tilde{\gamma} \leq \delta + 1$  y  $\tilde{\gamma} < \frac{\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}}{3} \leq \frac{\beta+1}{3}$  con  $2\tilde{\gamma} < \tilde{\alpha}$ . El diagrama de Newton del sistema consta de un vértice interior  $V_2$  con soporte  $(2\tilde{\gamma}, 2)$  y dos caras compactas de tipos  $(1, \tilde{\gamma})$ , la superior, y  $(1, \tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})$ , la inferior. La cara superior contiene el punto soporte  $V_1$  si  $\tilde{\gamma} = \delta + 1$  y la inferior contiene el punto soporte  $V_3$  si  $\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} = \beta + 1$ . Utilizaremos la función característica para describir de forma cómoda todos los casos. Si denotamos  $\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_i$  los primeros términos del campo respecto a los tipos de las caras superior e inferior al vértice  $V_2$ ,  $\tilde{a}_{\delta,0} = a_{\delta,0}\chi_{\{\tilde{\gamma}=\delta+1\}}$ ,  $\tilde{b}_{\delta,0} = b_{\delta,0}\chi_{\{\tilde{\gamma}=\delta+1\}}$ ,  $\tilde{a}_{\beta,0} = a_{\beta,0}\chi_{\{\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha}=\beta+1\}}$  y  $\tilde{b}_{\beta,0} = b_{\beta,0}\chi_{\{\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha}=\beta+1\}}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= (y^3 + a_{\delta,0}\chi_{\{\tilde{\gamma}=\delta+1\}}x^{\delta+1}y^2 + a_{\gamma,0}x^{2\tilde{\gamma}}y, (\delta + 1)a_{\delta,0}\chi_{\{\tilde{\gamma}=\delta+1\}}x^{\delta}y^3 + b_{\gamma,0}x^{2\tilde{\gamma}-1}y^2), \\ \mathbf{F}_i &= (a_{\gamma,0}x^{2\tilde{\gamma}}y + a_{\beta,0}\chi_{\{\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha}=\beta+1\}}x^{\beta+1}, b_{\gamma,0}x^{2\tilde{\gamma}-1}y^2 + b_{\beta,0}\chi_{\{\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha}=\beta+1\}}x^{\beta}y - x^{2\tilde{\alpha}-1}). \end{aligned}$$

Así mismo, denotando  $h_i(x, y)$ ,  $\Delta_i$ ,  $\mu_i$  las funciones de Hamilton su discriminante, y la divergencia de  $\mathbf{F}_i$  y  $h_s(x, y)$  la función de Hamilton de  $\mathbf{F}_s$ , se tiene:

$$\begin{aligned} 4\tilde{\gamma}h_s(x, y) &= (b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0})x^{2\tilde{\gamma}}y^2 - \tilde{\gamma}y^4 = -\tilde{\gamma}y^2 \left[ y^2 - \frac{b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0}}{\tilde{\gamma}}x^{2\tilde{\gamma}} \right], \\ 2\tilde{\alpha}h_i(x, y) &= (b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0})x^{2\tilde{\gamma}}y^2 + (b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0})\chi_{\{\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha}=\beta+1\}}x^{\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha}}y - x^{2\tilde{\alpha}} \\ &= -x^{2\tilde{\gamma}} \left[ \left( x^{\tilde{\alpha}-\tilde{\gamma}} - \frac{(b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0})\chi_{\{\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha}=\beta+1\}}}{2}y \right)^2 - \frac{\Delta_i}{4}y^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_i &= (b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0})^2 \chi_{\{\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} = \beta + 1\}} + 4(b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0}), \\
 \mu_i &= (2\tilde{\gamma}a_{\gamma,0} + 2b_{\gamma,0})x^{2\tilde{\gamma}-1}y + ((\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})a_{\beta,0} + b_{\beta,0})\chi_{\{\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} = \beta + 1\}}x^{\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} - 1} \\
 &= x^{2\tilde{\gamma}-1} [2(b_{\gamma,0} + \tilde{\gamma}a_{\gamma,0})y + (b_{\beta,0} + (\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})a_{\beta,0})\chi_{\{\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} = \beta + 1\}}x^{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}]
 \end{aligned}$$

**D1** Si  $\Delta_i > 0$  o  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} > 0$  el sistema no es monodrómico ya que las funciones de Hamilton tienen raíces simples.

**D2** Si  $\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma} < \frac{b_{\gamma,0}}{a_{\gamma,0}} < \tilde{\gamma}$  entonces  $\beta_{V_2} < 0$  y por tanto no es monodrómico.

**D3** Si  $\Delta_i < 0$ ,  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} < 0$  y  $\frac{b_{\gamma,0}}{a_{\gamma,0}} \notin [\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}]$  entonces el sistema es monodrómico. Es la situación **m1**).

**D4** Si  $\Delta_i < 0$  entonces debe ser  $b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0} < 0$ , si además suponemos  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} = 0$  resulta  $h_s = -\tilde{\gamma}y^4$  y  $\beta_{V_2} = \frac{b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0}}{-\tilde{\gamma}} > 0$ . Verifican todas las condiciones del algoritmo por lo que el sistema es monodrómico. Es la situación **m2**).

**D5** Si  $\Delta_i = 0$  y  $b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0} = 0$  entonces  $(b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0})\chi_{\{\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} = \beta + 1\}} = 0$ . No puede ser  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} = 0$ . Si  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} > 0$  el sistema no es monodrómico por **D1**. Si  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} < 0$  entonces  $h_s$  posee raíces complejas,  $h_i = -x^{2\tilde{\alpha}}$  y  $\beta_{V_2} = \frac{-1}{b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0}} > 0$ . Verifican todas las condiciones del algoritmo por lo que el sistema es monodrómico. Es la situación **m3**).

**D6** Si  $\Delta_i = 0$  y  $b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0} < 0$ , no puede ser positivo, entonces debe ser  $(b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0})\chi_{\{\beta + 1 = \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}\}} \neq 0$  por tanto  $(b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0}) \neq 0$ ,  $\beta + 1 = \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}$  y  $h_i$  posee el factor real doble no trivial  $y - \frac{2}{b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0}}x^{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}}$ . Para que el sistema sea monodrómico es necesario que este factor lo sea de la divergencia y que  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} \leq 0$ . Las condiciones  $b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0} < 0$ ,  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} \leq 0$  implican  $\frac{b_{\gamma,0}}{a_{\gamma,0}} \notin (\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})$ . En resumen se tiene que cumplir:  $\Delta_i = 0$ ,  $b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0} < 0$ ,  $b_{\gamma,0} - \tilde{\gamma}a_{\gamma,0} \leq 0$ ,  $\beta + 1 = \tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}$ ,  $(b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0}) \neq 0$  y

$$[b_{\beta,0} + (\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})a_{\beta,0}][b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0}] - 4(b_{\gamma,0} + \tilde{\gamma}a_{\gamma,0}) = 0$$

Para determinar si el sistema es monodrómico aplicamos el blow-up  $x = u$ ,  $y = u^{\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}} \left( \bar{y} + \frac{2}{b_{\beta,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\beta,0}} \right)$ ,  $dt = \frac{d\tau}{u^{\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} - 1}}$ . El sistema se transforma en

(2.8.20) que tiene la forma del sistema (2.11.25) con  $A_0 = a_{\gamma,0}$  y  $B_{0,1} = b_{\gamma,0} - (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma})a_{\gamma,0}$ . La condición de monodromía del sistema (2.11.27) equivale a la no existencia de órbitas características del sistema (2.11.25). Es la situación **d1)**

**E)** Caso  $\frac{\tilde{\alpha}}{2} = \min\{\delta + 1, \frac{\gamma+1}{6}, \frac{\beta+1}{3}, \frac{\tilde{\alpha}}{2}\}$ . El diagrama de Newton del sistema consta de una única cara compacta del tipo  $(1, \tilde{\alpha})$ . Esta cara contiene el punto soporte  $V_1$  si  $\delta + 1 = \frac{\tilde{\alpha}}{2}$ , al punto soporte  $V_2$  si  $\gamma + 1 = \tilde{\alpha}$ , y al punto soporte  $V_3$  si  $\frac{\beta+1}{3} = \frac{\tilde{\alpha}}{2}$ .

Distinguiremos los casos  $\tilde{\alpha}$  par o impar, o lo que es lo mismo  $\tilde{\alpha} = 2\hat{\alpha}$ ,  $\tilde{\alpha} = 2\hat{\alpha} - 1$  respectivamente con  $\hat{\alpha} \in \mathbb{N}$ .

**E1** Caso  $\tilde{\alpha} = 2\hat{\alpha} - 1$ , entonces el diagrama de Newton posee una única cara compacta del tipo  $(2, 2\hat{\alpha} - 1)$ . Los puntos soportes  $V_1$  y  $V_3$  no pueden pertenecer a dicha cara y el punto soporte  $V_2$  pertenece a la cara si  $\frac{\gamma+1}{2} = \frac{\alpha+1}{4}$ , esto es,  $\gamma = 2(\hat{\alpha} - 1)$ . Si  $\mathbf{F}_{6\hat{\alpha}-5}$  es el primer término del campo respecto al tipo  $(2, 2\hat{\alpha} - 1)$ , se tiene:

$$\mathbf{F}_{6\hat{\alpha}-5} = (y^3 + a_{\gamma,0}\chi_{\{2(\hat{\alpha}-1)=\gamma\}}x^{2\hat{\alpha}-1}y, b_{\gamma,0}\chi_{\{2(\hat{\alpha}-1)=\gamma\}}x^{2\hat{\alpha}-2}y^2 - x^{4\hat{\alpha}-3})$$

Así mismo, denotando  $h_r(x, y)$ ,  $\Delta_r$ ,  $\mu_r$  las funciones de Hamilton su discriminante, y la divergencia de  $\mathbf{F}_{6\hat{\alpha}-5}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} (8\hat{\alpha} - 4)h_{8\hat{\alpha}-4} &= -(2\hat{\alpha} - 1)y^4 + (2b_{\gamma,0} - (2\hat{\alpha} - 1)a_{\gamma,0})\chi_{\{2(\hat{\alpha}-1)=\gamma\}}x^{2\hat{\alpha}-1}y^2 \\ &\quad - 2x^{4\hat{\alpha}-2}, \\ &= -2 \left[ \left( x^{2\hat{\alpha}-1} - \frac{(2b_{\gamma,0} - (2\hat{\alpha} - 1)a_{\gamma,0})\chi_{\{2(\hat{\alpha}-1)=\gamma\}}}{4}y^2 \right)^2 - \frac{\Delta_1}{16}y^4 \right], \\ \Delta_1 &= (2b_{\gamma,0} - (2\hat{\alpha} - 1)a_{\gamma,0})^2\chi_{\{2(\hat{\alpha}-1)=\gamma\}} - 8(2\hat{\alpha} - 1), \\ \mu_{6\hat{\alpha}-5} &= (2b_{\gamma,0} + (2\hat{\alpha} - 1)a_{\gamma,0})\chi_{\{2(\hat{\alpha}-1)=\gamma\}}x^{2(\hat{\alpha}-1)} \end{aligned}$$

**E1a** Si  $\Delta_1 > 0$ ,  $h_r$  posee factores reales simples por tanto no es monodrómico.

**E1b** Si  $\Delta_1 < 0$ ,  $h_r$  sólo posee factores complejos por tanto es monodrómico, es la situación **m4)**

**E1c** Si  $\Delta_1 = 0$ , entonces debe ser  $(2b_{\gamma,0} - (2\hat{\alpha} - 1)a_{\gamma,0})\chi_{\{2(\hat{\alpha}-1)=\gamma\}} \neq 0$ , esto es,  $\gamma = 2(\hat{\alpha} - 1)$  y  $2b_{\gamma,0} - (2\hat{\alpha} - 1)a_{\gamma,0} \neq 0$ . Además  $h_{8\hat{\alpha}-4}$  posee el factor doble real no trivial  $x^{2\hat{\alpha}-1} - \frac{2b_{\gamma,0} - (2\hat{\alpha}-1)a_{\gamma,0}}{4}y^2$ . Para que el sistema sea monodrómico es necesario que este factor lo sea de la divergencia. En resumen se tiene que cumplir:  $\Delta_1 = 0$ ,  $\gamma = 2(\hat{\alpha} - 1)$ ,  $b_{\gamma,0} = -\frac{2\hat{\alpha}-1}{2}a_{\gamma,0} \neq 0$ , y el factor real doble es  $x^{2\hat{\alpha}-1} + \frac{(2\hat{\alpha}-1)a_{\gamma,0}}{2}y^2$ . Para determinar si el sistema es monodrómico es necesario realizar un blow-up  $x = u^2 \left( \bar{x} - \left( \frac{(2\hat{\alpha}-1)a_{\gamma,0}}{2} \right)^{\frac{1}{2\hat{\alpha}-1}} \right)$ ,  $y = u^{2\hat{\alpha}-1}$ ,  $dt = \frac{d\tau}{u^{6\hat{\alpha}-5}}$ . El sistema se transforma en (2.8.21) que tiene la forma del sistema (2.11.25) con  $A_0 = 1$  y  $B_{0,1} = -2$ . La condición de monodromía del sistema (2.11.27) equivale a la no existencia de órbitas características del sistema (2.11.25). Es el caso descrito en **d2)**

**E2** Caso  $\tilde{\alpha} = 2\hat{\alpha}$ , entonces el diagrama de Newton posee una única cara compacta del tipo  $(1, \hat{\alpha})$ . Los puntos soportes  $V_1$  y  $V_3$  y  $V_2$  pertenecen a dicha cara si  $\delta + 1 = \hat{\alpha}$ ,  $\gamma + 1 = 2\hat{\alpha}$  y  $\beta + 1 = 3\hat{\alpha}$  respectivamente. Si denotamos  $\mathbf{F}_{3\hat{\alpha}-1}$  el primer término del campo respecto al tipo  $(1, \hat{\alpha})$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{3\hat{\alpha}} &= (y^3 + a_{\delta,0}\chi_{\{\hat{\alpha}=\delta+1\}}x^{\hat{\alpha}}y^2 + a_{\gamma,0}\chi_{\{2\hat{\alpha}=\gamma+1\}}x^{2\hat{\alpha}}y + a_{\beta,0}\chi_{\{3\hat{\alpha}=\beta+1\}}x^{3\hat{\alpha}} , \\ &(\delta + 1)a_{\delta,0}\chi_{\{\hat{\alpha}=\delta+1\}}x^{\hat{\alpha}-1}y^3 + b_{\gamma,0}\chi_{\{2\hat{\alpha}=\gamma+1\}}x^{2\hat{\alpha}-1}y^2 \\ &+ b_{\beta,0}\chi_{\{3\hat{\alpha}=\beta+1\}}x^{3\hat{\alpha}-1}y - x^{4\hat{\alpha}-1}) \end{aligned}$$

Si denotamos  $h_{4\hat{\alpha}}(x, y)$ ,  $\mu_{3\hat{\alpha}-1}$  las funciones de Hamilton y la divergencia de  $\mathbf{F}_{3\hat{\alpha}-1}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} 4\hat{\alpha}h_{4\hat{\alpha}} &= -\hat{\alpha}y^4 + (b_{\gamma,0} - \hat{\alpha}a_{\gamma,0})\chi_{\{2\hat{\alpha}=\gamma+1\}}x^{2\hat{\alpha}}y^2 + (b_{\beta,0} - \hat{\alpha}a_{\beta,0})\chi_{\{3\hat{\alpha}=\beta+1\}}x^{3\hat{\alpha}}y - x^{4\hat{\alpha}}, \\ \mu_{3\hat{\alpha}-1} &= 4\hat{\alpha}a_{\delta,0}\chi_{\{\hat{\alpha}=\delta+1\}}x^{\hat{\alpha}-1}y^2 + 2(b_{\gamma,0} + \hat{\alpha}a_{\gamma,0})\chi_{\{2\hat{\alpha}=\gamma+1\}}x^{2\hat{\alpha}-1}y \\ &+ (b_{\beta,0} + 3\hat{\alpha}a_{\beta,0})\chi_{\{3\hat{\alpha}=\beta+1\}}x^{3\hat{\alpha}-1} \\ &= x^{\hat{\alpha}-1} [4\hat{\alpha}a_{\delta,0}\chi_{\{\hat{\alpha}=\delta+1\}}y^2 + 2(b_{\gamma,0} + \hat{\alpha}a_{\gamma,0})\chi_{\{2\hat{\alpha}=\gamma+1\}}x^{\hat{\alpha}}y \\ &+ (b_{\beta,0} + 3\hat{\alpha}a_{\beta,0})\chi_{\{3\hat{\alpha}=\beta+1\}}x^{2\hat{\alpha}}] \end{aligned}$$

Utilizando la proposición 2.11.62 se tiene en nuestro caso

$$m = -\hat{\alpha},$$

$$\begin{aligned}
p &= 0, \\
q &= (b_{\gamma,0} - \hat{\alpha}a_{\gamma,0})\chi_{\{2\hat{\alpha}=\gamma+1\}} \\
r &= (b_{\beta,0} - \hat{\alpha}a_{\beta,0})\chi_{\{3\hat{\alpha}=\beta+1\}} \\
s &= -1, \\
Q &= 8\hat{\alpha}q, \\
R &= q^2 + 12\hat{\alpha} \neq 0, \\
V_2 &= 2\hat{\alpha}(2q^3 - 8\hat{\alpha}q - 9\hat{\alpha}r^2), \\
D_4 &= (4q + r^2)V_2 - \hat{\alpha}^2(64q^2 + 56r^2q + 9r^4 - 256\hat{\alpha})
\end{aligned}$$

**E2a)** Si  $D_4 > 0$ ,  $V_2 > 0$  y  $Q > 0$  entonces  $h_{4\hat{\alpha}}$  posee cuatro factores reales simples por lo tanto el sistema no es monodrómico.

**E2b)** Si  $D_4 < 0$  entonces  $h_{4\hat{\alpha}}$  posee dos factores complejos conjugados y dos factores reales simples. El sistema no es monodrómico.

**E2c)** Si  $D_4 > 0$  y  $V_2 \leq 0$  o  $q \leq 0$  entonces todos los factores de  $h_{4\hat{\alpha}}$  son complejos y por tanto el sistema es monodrómico. Es el caso **m5**).

**E2d)** Si  $D_4 = 0$  y  $V_2 > 0$  entonces  $h_{4\hat{\alpha}}$  posee un factor real doble y dos factores reales simples por tanto el sistema no es monodrómico.

**E2e)** Si  $D_4 = 0$  y  $V_2 < 0$   $h_{4\hat{\alpha}} = -\hat{\alpha}(y^4 - \frac{q}{\hat{\alpha}}y^2 - \frac{r}{\hat{\alpha}}y + \frac{1}{\hat{\alpha}})$  posee un factor real no trivial doble y dos factores complejos conjugados. Así  $h_{4\hat{\alpha}} = -\hat{\alpha}((y-a)^2 + b^2)(y-\lambda)^2$ . Por tanto igualando coeficientes debe ser  $a = -\lambda$ ,  $b^2 = -\frac{q}{\hat{\alpha}} - 6\lambda^2$ ,  $q < 0$  por lo que  $\gamma+1 = 2\hat{\alpha}$ ,  $2\lambda(8\lambda^2 - \frac{q}{\hat{\alpha}}) = -\frac{r}{\hat{\alpha}}$  luego  $r \neq 0$ ,  $\text{signo}(\lambda) = -\text{signo}(r)$  y  $\beta+1 = 3\hat{\alpha}$  y por último  $5\lambda^4 + \frac{q}{\hat{\alpha}}\lambda^2 + \frac{1}{\hat{\alpha}}$ . Así el factor doble no trivial es  $y - \lambda x^{\hat{\alpha}}$  con  $\lambda = -\text{signo}(r)\sqrt{\frac{-q + \sqrt{q^2 - 20\hat{\alpha}}}{10\hat{\alpha}}}$ . Para que sea monodrómico el factor real debe serlo de  $\mu_{3\hat{\alpha}-1}$ . Por tanto debe ser

$$4\hat{\alpha}a_{\delta,0}\chi_{\{\delta+1=\hat{\alpha}\}}\lambda^2 + 2(b_{\gamma,0} + \hat{\alpha}a_{\gamma,0})\lambda + b_{\beta,0} + 3\hat{\alpha}a_{\beta,0} = 0$$

Para determinar si el sistema es monodrómico aplicamos el blow-up  $x = u$ ,  $y = u^{\hat{\alpha}}(\bar{y} + \lambda)$ ,  $dt = \frac{d\tau}{u^{3\hat{\alpha}-1}}$ . El sistema se transforma en (2.8.20)

que tiene la forma del sistema (2.11.25) con  $A_0 = \frac{\partial P_{3\hat{\alpha}}(1,\lambda)}{\partial y} = 3\lambda^2 + 2a_{\delta,0}\chi_{\{\delta+1=\hat{\alpha}\}}\lambda + a_{\gamma,0}$  y  $B_{0,1} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 4\hat{\alpha}h_{4\hat{\alpha}}(1,\lambda)}{\partial y^2} = -6\hat{\alpha}\lambda^2 + (b_{\gamma,0} - \hat{\alpha}a_{\gamma,0}) < 0$ . La condición de monodromía del sistema (2.11.27) equivale a la no existencia de órbitas características del sistema (2.11.25). Es el caso **d3**).

**E2f)** Si  $D_4 = V_2 = R = 0$  y  $Q \neq 0$ ,  $h_{4\hat{\alpha}}$  posee un factor real no trivial triple y otro real simple. En este caso el sistema no es monodrómico. Pero hemos de notar que este caso no se tiene ya que siempre es  $R \neq 0$ .

**E2g)** Si  $D_4 = V_2 = 0$ ,  $q > 0$ ,  $h_{4\hat{\alpha}}$  posee dos factores reales no triviales dobles. Las anteriores condiciones equivalen a  $r = 0$ ,  $q = 2\sqrt{\hat{\alpha}}$ . Los factores reales no triviales dobles son  $(y \pm \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}}}x^{\hat{\alpha}})$ . Para que el sistema sea monodrómico ambos factores deben serlo de  $\mu_{3\hat{\alpha}-1}$  lo cual implica  $a_{\gamma,0} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}}}$  y  $4a_{\delta,0}\chi_{\{\delta+1=\hat{\alpha}\}} + (b_{\beta,0} + 3\hat{\alpha}a_{\beta,0})\chi_{\{\beta+1=3\hat{\alpha}\}} = 0$ . Para determinar si el sistema es monodrómico aplicamos para cada factor  $y \pm \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}}}x^{\hat{\alpha}}$  el blow-up  $x = u$ ,  $y = u^{\hat{\alpha}} \left( \bar{y} \mp \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}}} \right)$ ,  $dt = \frac{d\tau}{u^{3\hat{\alpha}-1}}$ . El sistema se transforma en (2.8.20) que tiene la forma del sistema (2.11.25) con  $A_0 = \mp 8\sqrt{\hat{\alpha}}a_{\delta,0}\chi_{\{\delta+1=\hat{\alpha}\}}$  y  $B_{0,1} = \pm 2\sqrt{\hat{\alpha}}$ . La condición de monodromía del sistema (2.11.27) equivale a la no existencia de órbitas características del sistema (2.11.25). Es el caso **d4**).

**E2h)** Si  $D_4 = V_2 = 0$ ,  $q < 0$ ,  $h_{4\hat{\alpha}}$  posee dos factores complejos dobles. El sistema es monodrómico. Las anteriores condiciones equivalen a  $r = 0$ ,  $q = -2\sqrt{\hat{\alpha}}$ ,  $\gamma + 1 = 2\hat{\alpha}$  y  $b_{\gamma,0} = -2\sqrt{\hat{\alpha}} + \hat{\alpha}a_{\gamma,0}$ . Es el caso **m6**).

**E2i)** Si  $D_4 = V_2 = q = 0$ ,  $h_{4\hat{\alpha}}$  posee un factor real no trivial cuádruple. Esta situación no se tiene ya que las condiciones  $D_4 = V_2 = q = 0$  implican  $q = r = 0$  y  $\hat{\alpha} = 0$  lo cual es imposible.

■



# Capítulo 3

## Sistemas cuasihomogéneos

### 3.1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales aparecen en muchas ramas de las ciencias aplicadas. En el contexto de los sistemas planos, una de las cuestiones básicas es el problema de la monodromía (tratado en el Capítulo 2), el cual está relacionado con determinar si la aplicación de Poincaré está definida en un entorno del equilibrio. Cuando esto ocurre, el punto singular es llamado monodrómico y, en el caso analítico, es un centro o un foco. Una vez establecida la condición de punto singular monodrómico, el problema del centro de Poincaré busca condiciones que decidan si un equilibrio monodrómico es un centro o un foco. En otras palabras, tratamos de determinar cuando todas las órbitas en un entorno del equilibrio son cerradas.

En tal caso, surge el problema de la integrabilidad: intentamos determinar si el campo vectorial plano tiene una integral primera, esto es, una función que permanece constante a lo largo de las trayectorias del sistema. La integrabilidad es una cuestión importante, ya que la existencia de una primera integral determina completamente el retrato de fases del sistema.

Es bien conocido que la presencia de un centro analítico asegura la existencia de integrales primeras locales de clase  $C^\infty$  (véase Mazzi & Sabatini [50]). En general, no es posible asegurar la existencia de integrales primeras analíticas locales, a menos que nos restrinjamos a un entorno reducido del equilibrio



(véase Li et. al. [44])

En el caso no degenerado (esto es, cuando la parte lineal del equilibrio es equivalente a  $(-y, x)^T$ , un resultado de Poincaré establece que un sistema analítico plano es un centro si y sólo si posee integrales primeras analíticas.

En el caso degenerado hay dos situaciones a considerar: el caso nilpotente y el que tiene parte lineal cero.

En el caso nilpotente, existen sistemas analíticos con centro que no admiten primeras integrales (véase Moussu [54]). La caracterización de centros y sistemas con primeras integrales analíticas se puede encontrar en Strozyna y Zoladek [57].

Para el último caso, correspondiente a equilibrios con parte lineal cero, se han realizado muy pocos avances. Las ideas presentadas en este capítulo podrían contribuir a entender este caso. De hecho, algunos de nuestros ejemplos se enmarcan en esta situación.

Otro problema relacionado con los anteriores es el de la reversibilidad, es decir, cuándo un campo vectorial es invariante a una involución en variables de estado y al cambio de signo en el tiempo.

El objetivo de este capítulo es el análisis del problema del centro, de la reversibilidad y de la integrabilidad para una familia de ecuaciones diferenciales planas: aquellas cuyo campo vectorial es cuasihomogéneo. Como un caso particular, nuestro estudio para el problema del centro incluye la situación homogénea analizada por Collins [23].

### 3.1.1. Preliminares

Consideraremos un campo en el plano, de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x}), \text{ donde } \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1.1)$$

siendo  $\mathbf{F}_r$  un campo cuasihomogéneo del tipo  $(t_1, t_2) \in \mathbb{N}^2$ ,  $t_1, t_2$  primos entre sí, y grado  $r$ . Tomaremos  $t_1 \leq t_2$  ya que en otro caso bastaría aplicar el cambio  $x \rightarrow y, y \rightarrow x$  para estar en la situación deseada.

Utilizando la descomposición conservativa disipativa será  $\mathbf{F}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_h(\mathbf{x}) +$

$\mu(\mathbf{x})\mathbf{D}_0$  donde  $\mu \in \mathcal{P}_r^t$  y  $h \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|}^t$  siendo éste último polinomio

$$h(x, y) = x^{m_x} y^{m_y} \prod_{j=1}^m (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})^{m_j}, \quad (3.1.2)$$

donde  $m, m_x, m_y \in \mathbb{N}_0$ ;  $m_j \in \mathbb{N}$  para  $j = 1, \dots, m$ ;  $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  para  $1 \leq j \leq m$ , y  $\lambda_i \neq \lambda_j$  para  $i \neq j$ .

**Lema 3.1.64** *Sea  $h$  dada en (3.1.2), con  $m_x = s_x t_2 + \delta_x$ ,  $m_y = s_y t_1 + \delta_y$ ,  $s_x, s_y \in \mathbb{N}_0$  y  $\delta_x, \delta_y \in \{0, 1\}$ . Entonces:*

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= x^{(t_2-1)(1-\delta_x)} y^{(t_1-1)(1-\delta_y)} \mu^{\text{hom}}(x^{t_2}, y^{t_1}), \text{ donde} \\ \mu^{\text{hom}}(X, Y) &= \sum_{j=0}^{s_x+s_y+(\sum_{j=1}^m m_j)-2+\delta_x+\delta_y} d_j X^{s_x+s_y+\sum_{j=1}^m m_j-2+\delta_x+\delta_y-j} Y^j. \end{aligned}$$

Además se tiene que  $\text{grad}(Y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(1, Y)) - \text{grad}(\mu^{\text{hom}}(1, Y)) = 2 - \delta_x$ .

*Demostración:* Si  $m_x = s_x t_2 + \delta_x$ ,  $m_y = s_y t_1 + \delta_y$  entonces  $r + |\mathbf{t}| = \delta_x t_1 + \delta_y t_2 + t_1 t_2 \left[ s_x + s_y + \sum_{j=1}^m m_j \right]$ . De aquí, se deduce:

$$r = t_1(t_2 - 1)(1 - \delta_x) + t_2(t_1 - 1)(1 - \delta_y) + t_1 t_2 \left[ s_x + s_y - 2 + \delta_x + \delta_y + \sum_{j=1}^m m_j \right].$$

El resultado se obtiene aplicando de nuevo el Lema 2.3.26. Además:

$$\begin{aligned} 2 - \delta_x &= \delta_y + (s_x + s_y + \sum_{j=1}^m m_j) - (s_x + s_y - 2 + \delta_x + \delta_y + \sum_{j=1}^m m_j) \\ &= \text{grad}(Y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(1, Y)) - \text{grad}(\mu^{\text{hom}}(1, Y)). \end{aligned}$$

■

**Lema 3.1.65** *Sea  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$  irreducible (es decir, sus componentes no son idénticamente nulas y no tienen factores comunes) y  $h$  dada en (3.1.2) con  $m_x = s_x t_2 + \delta_x$ ,  $m_y = s_y t_1 + \delta_y$ ,  $s_x, s_y \in \mathbb{N}_0$  y  $0 \leq \delta_x < t_2$  y  $0 \leq \delta_y < t_1$ . Entonces:  $\delta_x, \delta_y \in \{0, 1\}$ .*

*Demostración:* Se tiene  $r + |\mathbf{t}| = \delta_x t_2 + \delta_y t_1 + t_1 t_2 \left[ s_x + s_y + \sum_{j=1}^m m_j \right]$ . Si  $1 < \delta_x$  entonces  $x$  es factor múltiple de  $h$  y  $r = (\delta_x - 1)t_2 + (\delta_y - 1)t_1 + t_1 t_2 \left[ s_x + s_y + \sum_{j=1}^m m_j \right]$ , independientemente del valor de  $\delta_y$ . Por el Lemma 2.3.26 obtendríamos que  $\mu$  es también múltiplo de  $x$ , lo cual es contradictorio ya que  $\mathbf{F}_r$  no sería irreducible. Así  $\delta_x \in \{0, 1\}$ . De forma análoga, se prueba que  $\delta_y \in \{0, 1\}$ . ■

**Lema 3.1.66** *Sea  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$  irreducible y  $h$  dada por (3.1.2). Sea  $\eta^{\text{hom}}(X, Y) = \frac{\mu^{\text{hom}}(X, Y)}{X^{m_x} Y^{m_y} h^{\text{hom}}(X, Y)}$ . Entonces:*

a)  $\text{Res} \left[ \frac{\mu(x, 1)}{h(x, 1)}, 0 \right] = \text{Res} \left[ \eta^{\text{hom}}(X, 1), 0 \right]$ , si  $m_x = 1$ .

b)  $\text{Res} \left[ \frac{\mu(1, y)}{h(1, y)}, 0 \right] = \text{Res} \left[ \eta^{\text{hom}}(1, Y), 0 \right]$ , si  $m_y = 1$ .

c) *Para cualquier  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  los  $t_1$  residuos de  $\frac{\mu(1, y)}{h(1, y)}$  en  $y = \lambda_j^{1/t_1}$  coinciden siendo:*

$$\text{Res} \left[ \frac{\mu(1, y)}{h(1, y)}, \lambda_j^{1/t_1} \right] = \frac{1}{t_1} \text{Res} \left[ \eta^{\text{hom}}(1, Y), \lambda_j \right]$$

*Demostración:*

- Si  $m_x = 1$ , aplicando los Lemas 3.1.65 y 3.1.64, obtenemos

$$\text{Res} \left[ \frac{\mu(x, 1)}{h(x, 1)}, 0 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mu^{\text{hom}}(x^{t_2}, 1)}{h^{\text{hom}}(x^{t_2}, 1)} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\mu^{\text{hom}}(X, 1)}{h^{\text{hom}}(X, 1)} = \text{Res} \left[ \eta^{\text{hom}}(X, 1), 0 \right].$$

- Si  $m_y = 1$ , aplicando de nuevo los Lemas 3.1.65 y 3.1.64, obtenemos

$$\text{Res} \left[ \frac{\mu(1, y)}{h(1, y)}, 0 \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\mu^{\text{hom}}(1, y^{t_1})}{h^{\text{hom}}(1, y^{t_1})} = \lim_{Y \rightarrow 0} \frac{\mu^{\text{hom}}(1, Y)}{h^{\text{hom}}(1, Y)} = \text{Res} \left[ \eta^{\text{hom}}(1, Y), 0 \right].$$

- Antes de demostrar el último apartado, usando el Lema 3.1.65, obtenemos  $h(x, y) = x^{\delta_x} y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(x^{t_2}, y^{t_1})$ , donde  $h^{\text{hom}}(X, Y) = X^{s_x} Y^{s_y} \prod_{j=1}^m (Y - \lambda_j X)^{m_j}$ .

Sea  $j_0$  con  $1 \leq j_0 \leq m$  y  $\lambda_{j_0}^{(s_0)}$ ,  $1 \leq s_0 \leq t_1$  una de las  $t_1$  soluciones de  $y^{t_1} - \lambda_{j_0} = 0$ . Sea también  $\varepsilon$  un número real positivo suficientemente pequeño tal que la curva cerrada  $C_{j_0, s_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda_{j_0}^{(s_0)}| = \varepsilon \right\}$  no

contenga en su interior a ningún  $\lambda_j^{(s)}$  con  $j \neq j_0$  y  $s \neq s_0$  y que la curva cerrada  $C_{j_0}$ , imagen de  $C_{j_0, s_0}$  mediante la función  $f(z) = z^{t_1}$ , no contenga en su interior a ningún  $\lambda_j$  excepto a  $\lambda_{j_0}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ \frac{\mu(1,y)}{h(1,y)}, \lambda_{j_0}^{(s_0)} \right] &= \frac{1}{2\pi I} \oint_{C_{j_0, s_0}} \frac{\mu(1,z)}{h(1,z)} dz = \frac{1}{2\pi I} \oint_{C_{j_0, s_0}} \frac{z^{(t_1-1)(1-\delta_y)} \mu^{\operatorname{hom}}(1, z^{t_1})}{z^{\delta_y} h^{\operatorname{hom}}(1, z^{t_1})} dz \\ &= \frac{1}{2\pi I t_1} \oint_{C_{j_0, s_0}} \frac{t_1 z^{t_1-1} \mu^{\operatorname{hom}}(1, z^{t_1})}{z^{t_1 \delta_y} h^{\operatorname{hom}}(1, z^{t_1})} dz. \end{aligned}$$

Aplicando el cambio  $w = z^{t_1}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ \frac{\mu(1,y)}{h(1,y)}, \lambda_{j_0}^{(s_0)} \right] &= \frac{1}{2\pi I t_1} \oint_{C_{j_0}} \frac{\mu^{\operatorname{hom}}(1,w)}{w^{\delta_y} h^{\operatorname{hom}}(1,w)} dw = \frac{1}{t_1} \operatorname{Res} \left[ \frac{\mu^{\operatorname{hom}}(1,Y)}{Y^{\delta_y} h^{\operatorname{hom}}(1,Y)}, \lambda_{j_0} \right] \\ &= \frac{1}{t_1} \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \lambda_{j_0}]. \end{aligned}$$

■

## 3.2. Formas canónicas

**Lema 3.2.67** *Sea el sistema (3.1.1) con  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0$ . Entonces existe un cambio de variables de grado cero que transforma el sistema (3.1.1) en  $(\dot{u}, \dot{v})^T = \tilde{\mathbf{F}}_r = \mathbf{X}_{\tilde{h}} + \tilde{\mu} \mathbf{D}_0$  donde:*

- a)  $\tilde{h}(u, v) = c(v^{t_1} - u^{t_2})^n f\left(u \lambda^{-\frac{1}{t_1+t_2}}, v \lambda^{\frac{1}{t_1+t_2}}\right)$ , con  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , si  $h(x, y) = (y^{t_1} - \lambda x^{t_2})^n f(x, y)$ , con  $\lambda \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $\tilde{h}(u, v) = c[(v^{t_1} - \tilde{a}u^{t_2})^2 + (-1)^s u^{2t_2}]^m f\left(\frac{u}{|b\alpha_4^{t_1}|^{1/t_2}}, \frac{v}{\alpha_4}\right)$  con  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , si  $h(x, y) = [(y^{t_1} - ax^{t_2})^2 + (-1)^s b^2 x^{2t_2}]^m f(x, y)$ , con  $s \in \{0, 1\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  y  $b \neq 0$ .
- c)  $\tilde{h}(u, v) = v^{n_1} (v - u^{t_2})^{n_2} \tilde{f}(u, v)$ , si  $\mathbf{t} = (1, t_2)$  y  $h(x, y) = (y - \lambda_1 x^{t_2})^{n_1} (y - \lambda_2 x^{t_2})^{n_2} f(x, y)$ , con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ ,  $n_1 \in \mathbb{N}$  y  $n_2 \in \mathbb{N}_0$ .
- d)  $\tilde{h}(u, v) = [v^2 + (-1)^s u^{2t_2}]^m f\left(\frac{1}{|b|^{1/t_2}} u, v + \frac{a}{|b|^{1/t_2}} u^{t_2}\right)$ , si  $\mathbf{t} = (1, t_2)$  y  $h(x, y) = [(y - ax^{t_2})^2 + (-1)^s b^2 x^{2t_2}]^m f(x, y)$  con  $s \in \{0, 1\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$ .

- e)**  $\tilde{h}(u, v) = u^{n_1} v^{n_2} (v - u)^{n_3} \tilde{f}(u, v)$ , si  $\mathbf{t} = (1, 1)$  y  $h(x, y) = (y - \lambda_1 x)^{n_1} (y - \lambda_2 x)^{n_2} (y - \lambda_3 x)^{n_3} f(x, y)$  con  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $n_3 \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) \neq 0$ .
- f)**  $\tilde{h}(u, v) = u^{n_1} v^{n_2} [(v - \tilde{a}u)^2 + (-1)^s u^2]^m \tilde{f}(u, v)$ , con  $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ , si  $\mathbf{t} = (1, 1)$  y  $h(x, y) = (y - \lambda_1 x)^{n_1} (y - \lambda_2 x)^{n_2} [(y - ax)^2 + (-1)^s b^2 x^2]^m f(x, y)$  con  $s \in \{0, 1\}$ ,  $n_2, m \in \mathbb{N}$ ,  $n_1 \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)b \neq 0$ .
- g)**  $\tilde{h}(u, v) = v^n [v^2 + (-1)^s u^2]^m \tilde{f}(u, v)$ , si  $\mathbf{t} = (1, 1)$  y  $h(x, y) = (y - \lambda x)^n [(y - ax)^2 + (-1)^s b^2 x^2]^m f(x, y)$  con  $s \in \{0, 1\}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$  y  $b[(\lambda - a)^2 + (-1)^s b^2] \neq 0$ .
- h)**  $\tilde{h}(u, v) = [v^2 + (-1)^{s_1} u^2]^{m_1} [v^2 + (-1)^{s_2} B^2 u^2]^{m_2} \tilde{f}(u, v)$ ,  $0 < B \in \mathbb{R}$ , si  $\mathbf{t} = (1, 1)$  y  $h(x, y) = [(y - a_1 x)^2 + (-1)^{s_1} b_1^2 x^2]^{m_1} [(y - a_2 x)^2 + (-1)^{s_2} b_2^2 x^2]^{m_2} f(x, y)$ , con  $s_1, s_2 \in \{0, 1\}$ ,  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ,  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ ,  $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$  y además  $s_1 s_2 = 0$  o bien  $s_1 = s_2 = 1$  y  $b_1 + b_2 < |a_2 - a_1|$ .

*Demostración:* Para obtener el resultado aplicamos el Lemma 2.3.29 y el cambio de variables de grado cero (2.3.9) con los siguientes valores:

- a)**  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = \lambda^{\frac{1}{t_1+t_2}}$  y  $\alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3}$ . Estos valores son posibles tomarlos ya que  $t_1 + t_2$  es impar.
- b)**  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = |b\alpha_4^{t_1}|^{1/t_2}$ .
- c)**  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = -\lambda_1$  y  $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$ . Así obtenemos  $h(x, y) = y^{n_1} [y - (\lambda_2 - \lambda_1)x^{t_2}]^{n_2} \tilde{f}(x, y)$  y ahora aplicamos el resultado del apartado **a)**.
- d)**  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = -a$ ,  $\alpha_3 = |b|^{1/t_2}$ ,  $\alpha_4 = 1$ .
- e)**  $\alpha_1 = -\frac{1}{\lambda_1}$ ,  $\alpha_2 = -\lambda_2$  y  $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$ . Así, obtenemos  $h(x, y) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2} x^{n_1} y^{n_2} \left( y - \frac{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} x \right) \tilde{f}(x, y)$ . Aplicando ahora el apartado **a)**, se obtiene el resultado.
- f)**  $\alpha_1 = -\frac{1}{\lambda_1}$ ,  $\alpha_2 = -\lambda_2$  y  $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$ . Así, obtenemos  $h(x, y) = \frac{(\lambda_1 - a)^2 + b^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} x^{n_1} y^{n_2} \left[ \left( y + \frac{2\lambda_1(b^2 + (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a))}{b^2 + (\lambda_1 - a)^2} x \right)^2 + (-1)^s \frac{\lambda_1^2 b^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(b^2 + (\lambda_1 - a)^2)^2} x^2 \right] \tilde{f}(x, y)$ . Aplicando ahora el apartado **b)**, se obtiene el resultado.

**g)**  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = -\lambda$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\alpha_4 = 1$ . Así, si denotamos  $A = (-1)^s b^2 + (\lambda - a)^2 \neq 0$ , obtenemos  $h(x, y) = A^m y^n \left[ \left( x + \frac{\lambda - a}{A} y \right)^2 + \frac{(-1)^s b^2}{A^2} y^2 \right]^m f(x, y + \lambda x)$ . Aplicando ahora el cambio (2.3.9) con  $\alpha_3 = 1$ ,  $\alpha_1 = \frac{\lambda - a}{A}$ ,  $\alpha_2 = 0$  y  $\alpha_4 = \frac{b}{A}$ , se obtiene el resultado.

**h)**  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = -a_1$ ,  $\alpha_3 = b_1$ ,  $\alpha_4 = 1$ , por el apartado **d)** obtenemos que  $\tilde{h}(u, v) = [v^2 + (-1)^{s_1} u^2]^{m_1} [(v - au)^2 + (-1)^{s_2} b^2 u^2]^{m_2} \tilde{f}(u, v)$ , donde  $a = \frac{a_2 - a_1}{b_1}$  y  $b = \frac{b_2}{b_1}$ . Si  $a = 0$ , ya tenemos el resultado.

Si  $a \neq 0$ , aplicando de nuevo el cambio (2.3.9) con  $\alpha_1 = \alpha_4 = 1$ ,  $\alpha_2 = (-1)^{s_1+1} A$ ,  $\alpha_3 = A$ ,  $A^2 + (-1)^{s_1} \neq 0$ , resulta:

$$\begin{aligned} \hat{h}(u, v) &= [(-1)^{s_1} + A^2]^{m_1} [v^2 + (-1)^{s_1} u^2]^{m_1} \left\{ [(1 + (-1)^{s_1} a A)^2 + (-1)^{s_2} b^2 A^2] v^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(-1)^{s_1} a \left[ A^2 - \frac{a^2 + (-1)^{s_2} b^2 - (-1)^{s_1}}{a} A - (-1)^{s_1} \right] uv \right. \\ &\quad \left. + [(A - a)^2 + (-1)^{s_2} b^2] u^2 \right\}^{m_2} \hat{f}(u, v). \end{aligned}$$

Nos interesa hacer cero el coeficiente de  $uv$  en el segundo factor. Esto es, buscamos las soluciones de la ecuación  $A^2 - \frac{a^2 + (-1)^{s_2} b^2 - (-1)^{s_1}}{a} A - (-1)^{s_1} = 0$ . Estos valores siempre existen si  $\Delta = (a^2 + (-1)^{s_2} b^2 - (-1)^{s_1})^2 + 4(-1)^{s_1} a^2 > 0$ .

Si  $s_1 = 0$  se tiene  $\Delta > 0$  y  $A^2 + (-1)^{s_1} > 0$ .

Si  $s_1 = 1$ ,  $\Delta = (a^2 - 1 + (-1)^{s_2} b^2)^2 + 4(-1)^{s_2} b^2$ . Por tanto, si además  $s_2 = 0$ , también se tiene  $\Delta > 0$ . Por otra parte, es fácil comprobar que las soluciones  $A = A_0$  no anulan  $A_0^2 + (-1)^{s_1}$ .

Si  $s_1 = s_2 = 1$  y  $\Delta = (a^2 - 1 - b^2)^2 - 4b^2 > 0$ , lo cual (como  $b > 0$ ) equivale a  $2b < |a^2 - 1 - b^2|$ , que a su vez es equivalente a  $2b < a^2 - 1 - b^2$  o  $-a^2 + 1 + b^2 < -2b$ . Esto es,  $(1 + b)^2 < a^2$  lo que es equivalente a  $1 + b < |a|$ , es decir,  $b_1 + b_2 < |a_2 - a_1|$ . Por otra parte es fácil comprobar que los valores  $A = A_0$  no anulan  $A_0^2 + (-1)^{s_1}$ , ya que en caso contrario  $A_0 = \pm 1$  lo que implica  $|a \mp 1| = b$  y como  $b < |a| - 1$  se tendría  $1 - |a| < a \mp 1 < |a| - 1$ , por tanto  $2 - |a| < a < |a|$  o bien  $-|a| < a < |a| - 2$  y ninguna de dichas desigualdades posee solución.

En cada uno de estos casos basta elegir un valor  $A = A_0$  solución de

dicha ecuación resultando:

$$\begin{aligned}\hat{h}(u, v) &= [(-1)^{s_1} + A_0^2]^{m_1} [v^2 + (-1)^{s_1} u^2]^{m_1} \times \\ &\quad \{ [(a^2 + (-1)^{s_2} b^2) A_0^2 + 2(-1)^{s_1} a A_0 + 1] v^2 \\ &\quad + [A_0^2 - 2a A_0 + (-1)^{s_2} b^2] u^2 \}^{m_2} \hat{f}(u, v).\end{aligned}$$

Es posible también elegir  $A_0$  tal que no anule el coeficiente de  $v^2$  del segundo factor, esto siempre es posible ya que ambas ecuaciones de segundo grado no son proporcionales. Como el carácter real o complejo de los factores no se modifica al aplicar dichos cambios, basta aplicar posteriormente un escalado en el tiempo para obtener el resultado. ■

**Nota:** El anterior procedimiento no es más que una generalización de la forma canónica de Jordan. Si consideramos el tipo homogéneo  $(t_1, t_2) = (1, 1)$  y un sistema con parte lineal no nula, su primer término es  $\mathbf{F}_0 = (a_{1,0}x + a_{0,1}y, b_{1,0}x + b_{0,1}y)^T$  siendo  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0$ , donde:

$$\begin{aligned}h(x, y) &= \frac{1}{2} [-a_{0,1}y^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})xy + b_{1,0}x^2], \\ \mu(x, y) &= \frac{a_{1,0} + b_{0,1}}{2}.\end{aligned}$$

Sea  $\Delta = (b_{0,1} - a_{1,0})^2 + 4a_{0,1}b_{1,0}$  el discriminante de  $h$ . Encontramos las siguientes situaciones:

- Si  $\Delta > 0$ ,  $a_{0,1} \neq 0$  entonces  $h(x, y) = -\frac{a_{0,1}}{2}(y - \lambda_1 x)(y - \lambda_2 x)$  con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Mediante el cambio  $u = y - \lambda_1 x$ ,  $v = y - \lambda_2 x$  llegamos a un sistema cuya primera componente es  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{X}_{\tilde{h}} + \tilde{\mu} \mathbf{D}_0$ , donde  $\tilde{h} = cuv$ ,  $c \neq 0$ ,  $\tilde{\mu} = d$  y por tanto  $\mathbf{G}_0 = ((d - c)u, (d + c)v)^T$ . Este sistema tiene su parte lineal en forma canónica de Jordan con autovalores distintos.
- Si  $\Delta > 0$  y  $a_{0,1} = 0$ , entonces  $(b_{0,1} - a_{1,0})$  es distinto de cero y  $h(x, y) = \frac{b_{0,1} - a_{1,0}}{2}x \left( y + \frac{b_{1,0}}{b_{0,1} - a_{1,0}}x \right)$ . El cambio  $u = x$ ,  $v = y + \frac{b_{1,0}}{b_{0,1} - a_{1,0}}x$  conduce al mismo campo anterior.

- Si  $\Delta = 0$ ,  $a_{0,1} \neq 0$ , entonces  $h(x, y) = -\frac{a_{0,1}}{2}(y - \lambda x)^2$ . Mediante el cambio  $u = x$ ,  $v = y - \lambda x$  y posteriormente un cambio de escala en el tiempo se consigue transformar el sistema en otro cuya primera componente es  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{X}_{\tilde{h}} + \tilde{\mu}\mathbf{D}_0$ , donde  $\tilde{h}(u, v) = -\frac{1}{2}v^2$ ,  $\tilde{\mu}(u, v) = d$ . Así, se tiene  $\mathbf{G}_0 = (du + v, dv)^T$  y la parte lineal del sistema está en forma canónica de Jordan.
- Si  $\Delta = 0$ ,  $a_{0,1} = 0$ ,  $b_{1,0} \neq 0$ , entonces  $h(x, y) = \frac{1}{2}b_{1,0}x^2$ , y se obtiene el mismo campo anterior cambiando  $x \leftrightarrow y$ .
- Si  $\Delta = 0$ ,  $a_{0,1} = 0$ ,  $b_{1,0} = 0$ , entonces  $h \equiv 0$  y, por tanto, la primera componente del campo es  $\mathbf{F}_0 = a_{1,0}(x, y)^T$  donde la matriz de la parte lineal ya está en forma canónica de Jordan.
- Si  $\Delta < 0$ , entonces  $a_{0,1}b_{1,0} \neq 0$  y  $h(x, y) = -\frac{a_{0,1}}{2} \left[ \left( y - \frac{b_{0,1} - a_{1,0}}{2a_{0,1}}x \right)^2 - \frac{\Delta}{4a_{0,1}^2}x^2 \right]$ .  
El cambio  $u = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a_{0,1}}x$ ,  $v = y - \frac{b_{0,1} - a_{1,0}}{2a_{0,1}}x$ , conduce a un sistema cuyo primer término es  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{X}_{\tilde{h}} + \tilde{\mu}\mathbf{D}_0$ , donde  $\tilde{h}(u, v) = \frac{c}{2}[v^2 + u^2]$ ,  $c \neq 0$  y  $\tilde{\mu}(u, v) = d$ . Así, tenemos que  $\mathbf{G}_0 = (du - cv, cu + dv)^T$ , cuya matriz de la parte lineal es una forma canónica de Jordan real con autovalores complejos conjugados  $d \pm cI$ .

### 3.3. Reversibilidad

En esta sección nos planteamos analizar la reversibilidad del sistema (3.1.1). A continuación recordamos algunas definiciones

- Una involución es una función  $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(U_0 \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , tal que  $\sigma \circ \sigma = Id$ , donde  $U_0$  es un entorno del origen.
- $\text{Fix}(\sigma)$  denota el conjunto de los puntos fijos de  $\sigma$ :  $\text{Fix}(\sigma) = \{\mathbf{x} \in U_0 \mid \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$ .
- Un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es  $\sigma$ -reversible, si existe una involución  $\sigma$ ,  $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , tal que  $\sigma_*\mathbf{F} = -\mathbf{F}$ .



- Un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  es reversible si es  $\sigma$ -reversible y  $\dim(\text{Fix}(\sigma)) = n - 1$ .
- Un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  es time-reversible a  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , si es  $R_{x_i}$ -reversible, donde

$$R_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

es decir, el cambio  $x_i \rightarrow -x_i$ ,  $t \rightarrow -t$  deja invariante el sistema.

- Un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  es time-reversible cuando es time-reversible a  $x_i$  para algún  $i = 1, \dots, n$

**Nota:** La condición  $\sigma_*\mathbf{F} = -\mathbf{F}$  es equivalente a  $D\sigma(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{y}) = -\mathbf{F}(\sigma(\mathbf{y}))$ .

**Lema 3.3.68** Consideremos las descomposiciones en componentes cuasihomogéneas:  $\mathbf{F} = \sum_{j=r}^{\infty} \mathbf{F}_j$ ,  $\sigma = \sum_{j=i_0}^{\infty} \sigma_j$ ;  $\mathbf{F}_j, \sigma_j \in \mathcal{Q}_j^t$ , con  $r, i_0 \in \mathbb{Z}$ . Entonces, la ecuación  $D\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}(\sigma(\mathbf{x}))$ , mediante el escalado  $\mathbf{x} = E\mathbf{y}$ ,  $E = \text{diag}(\varepsilon^{t_1}, \dots, \varepsilon^{t_n})$ , se transforma en:

$$\varepsilon^{i_0} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{j=0}^i D\sigma_{i+i_0}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{F}_{r+j-i}(\mathbf{y}) = - \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{F}_{r+j} \left( \varepsilon^{i_0} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sigma_{i+i_0}(\mathbf{y}) \right) \quad (3.3.3)$$

*Demostración:* Aplicando el escalado  $\mathbf{x} = E\mathbf{y}$  se tiene:

$$D\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = D\sigma(E\mathbf{y}) \cdot \mathbf{F}(E\mathbf{y}) = \left[ \sum_{i=0}^{\infty} D\sigma_{i+i_0}(E\mathbf{y}) \right] \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_{r+j}(E\mathbf{y}) \right]$$

Por la Proposición 1.3.2 b) y el Lema 1.3.5 se tiene:

$$\begin{aligned} D\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= E \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+i_0} D\sigma_{i+i_0}(\mathbf{y}) \right] E^{-1} E \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{r+j} \mathbf{F}_{r+j}(\mathbf{y}) \right] \\ &= \varepsilon^{r+i_0} E \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i D\sigma_{i+i_0}(\mathbf{y}) \right] \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{F}_{r+j}(\mathbf{y}) \right] \\ &= \varepsilon^{r+i_0} E \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{j=0}^i D\sigma_{i+i_0}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{F}_{r+j-i}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la Proposición 1.3.2 **b)**, tenemos por otra parte que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\sigma(\mathbf{x})) &= \mathbf{F}(\sigma(E\mathbf{y})) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_{r+j} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{i+i_0}(E\mathbf{y}) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_{r+j} \left( E\varepsilon^{i_0} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sigma_{i+i_0}(\mathbf{y}) \right) = E \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{r+j} \mathbf{F}_{r+j} \left( \varepsilon^{i_0} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sigma_{i+i_0}(\mathbf{y}) \right) \\
&= E\varepsilon^r \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{F}_{r+j} \left( \varepsilon^{i_0} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sigma_{i+i_0}(\mathbf{y}) \right).
\end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos el resultado. ■

**Lema 3.3.69** *Sea  $\mathbf{F} = \sum_{j=r}^{\infty} \mathbf{F}_j$   $\sigma$ -reversible, con  $\sigma = \sum_{j=i_0}^{\infty} \sigma_j$ , donde  $\mathbf{F}_j, \sigma_j \in \mathcal{Q}_j^t$ ,  $r, i_0 \in \mathbb{Z}$ .*

*Si  $i_0 \geq 0$ , entonces  $i_0 = 0$ ,  $\sigma_0$  es una involución y  $\mathbf{F}_r$  es  $\sigma_0$ -reversible.*

*Demostración:* Teniendo en cuenta que  $\sigma \circ \sigma = Id$  y la Proposición 1.3.2 **b)**, podemos escribir La ecuación  $E\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , como:

$$\begin{aligned}
E\mathbf{y} &= \mathbf{x} = \sigma(\sigma(\mathbf{x})) = \sigma(\sigma(E\mathbf{y})) = \sum_{j=i_0}^{\infty} \sigma_j \left( \sum_{i=i_0}^{\infty} \sigma_i(E\mathbf{y}) \right) \\
&= \sum_{j=i_0}^{\infty} \sigma_j \left( E \sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon^i \sigma_i(\mathbf{y}) \right) = E\varepsilon^{i_0} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+i_0} \sigma_{j+i_0} \left( \varepsilon^{i_0} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+i_0} \sigma_{i+i_0}(\mathbf{y}) \right).
\end{aligned}$$

Por tanto,  $i_0 = 0$  e igualando los términos con menor grado en  $\varepsilon$  obtenemos que  $\sigma_0(\sigma_0(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ .

Por otra parte, volviendo a aplicar el escalado  $\mathbf{x} = E\mathbf{y}$  a ambos miembros de la igualdad  $D\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}(\sigma(\mathbf{x}))$  e igualando los coeficientes de la menor potencia de  $\varepsilon$  en (3.3.3), se tiene  $D\sigma_0 \cdot \mathbf{F}_r(\mathbf{y}) = -\mathbf{F}_r(\sigma_0(\mathbf{y}))$ . ■

**Lema 3.3.70** *Sea  $\sigma$  una involución y  $\Psi$  un cambio de variables, ambos definidos en un entorno del origen. Si  $\mathbf{F}$  es  $\sigma$ -reversible entonces  $\Psi_*\mathbf{F}$  es  $\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}$ -reversible.*

*Demostración:* Se cumple trivialmente que  $\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}$  es una involución. Para probar el resultado hay que demostrar que  $D\hat{\sigma}(\mathbf{y})\mathbf{G}(\mathbf{y}) = -\mathbf{G}(\hat{\sigma}(\mathbf{y}))$ , donde  $\hat{\sigma} = \Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}$ ,  $\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \Psi_*\mathbf{F}(\mathbf{y})$ , esto es,  $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = [D\Psi(\Psi^{-1}(\mathbf{y}))]\mathbf{F}(\Psi^{-1}(\mathbf{y}))$ . Ahora bien

$$\begin{aligned}
D\hat{\sigma}(\mathbf{y})\mathbf{G}(\mathbf{y}) &= D(\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1})(\mathbf{y})D\Psi(\Psi^{-1}(\mathbf{y}))\mathbf{F}(\Psi^{-1}(\mathbf{y})) \\
&= D\Psi(\sigma \circ \Psi^{-1}(\mathbf{y}))D\sigma(\Psi^{-1}(\mathbf{y})) \overbrace{D\Psi^{-1}(\mathbf{y})D\Psi(\Psi^{-1}(\mathbf{y}))}^{Id} \mathbf{F}(\Psi^{-1}(\mathbf{y})) \\
&= D\Psi(\sigma(\mathbf{x}))D\sigma(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad [\mathbf{F} \text{ es } \sigma\text{-reversible}] \\
&= D\Psi(\sigma(\mathbf{x}))(-\mathbf{F}(\sigma(\mathbf{x}))) = -D\Psi(\sigma \circ \Psi^{-1}(\mathbf{y}))\mathbf{F}(\sigma \circ \Psi^{-1}(\mathbf{y})) \\
&= -D\Psi(\Psi^{-1} \circ (\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}))(\mathbf{y})\mathbf{F}(\Psi^{-1} \circ (\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}))(\mathbf{y}) \\
&= -\mathbf{G}(\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}(\mathbf{y})) = -\mathbf{G}(\hat{\sigma}(\mathbf{y})).
\end{aligned}$$

■

A continuación damos una demostración constructiva, que usaremos posteriormente, de un corolario del Teorema de Montgomery-Bochner, (ver [53] página 206).

**Teorema 3.3.71** *Si  $\mathbf{F}$  es  $\sigma$ -reversible,  $\sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$ ,  $\sigma_j \in \mathcal{Q}_j^t$ , entonces el cambio de variables*

$$\Psi = \frac{1}{2}(Id + \sigma_0 \circ \sigma),$$

*verifica:  $\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j$ ,  $\Psi_j \in \mathcal{Q}_j^t$ ,  $\Psi_0 = Id$  y además  $\Psi_*\mathbf{F}$  es  $\sigma_0$ -reversible.*

*Demostración:* Utilizando el desarrollo  $\sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$  y la Proposición 1.3.2 **b)**, se tiene que  $\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j$  con  $\Psi_j \in \mathcal{Q}_j^t$ ,  $\Psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y  $\Psi_0 = \frac{1}{2}(Id + \sigma_0 \circ \sigma_0)$ . Por el Lema 3.3.69,  $\sigma_0$  es una involución y  $\Psi_0 = \frac{1}{2}(Id + Id) = Id$ .

Además

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \sigma(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(\sigma(\mathbf{x}) + \sigma_0(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}(\sigma_0(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})) \\
&= \sigma_0(\Psi(\mathbf{x})) = (\sigma_0 \circ \Psi)(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Por tanto,  $\sigma_0 = \Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}$ , y aplicando el Lema 3.3.70 se completa el resultado.

■

**Teorema 3.3.72** Si  $\mathbf{F}$  es  $\sigma_0$ -reversible,  $\sigma_0 \in \mathcal{Q}_0^{\mathbf{t}}$  y  $\dim(\text{Fix}(\sigma_0)) = k < n$ , entonces existe  $\Psi_0 \in \mathcal{Q}_0^{\mathbf{t}}$ ,  $\det(D\Psi_0(\mathbf{0})) \neq 0$ ,  $\text{diag}(D\Psi_0(\mathbf{0})) = \text{diag}(Id)$ , tal que  $(\Psi_0)_*\mathbf{F}$  es  $R_k$ -reversible, donde

$$R_k(x_1, \dots, x_n) = ((-1)^{i_1}x_1, \dots, (-1)^{i_n}x_n),$$

$$i_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n \text{ y } \sum_{j=1}^n i_j = n - k.$$

*Demostración:* Descomponemos  $\sigma_0 = \sum_{i=1}^s \sigma_0^{(j_i)}$ ,  $s \geq 0$ , donde  $j_1 < j_2 < \dots < j_s$  y  $\sigma_0^{(j_i)} \in \mathcal{Q}_{j_i}^{(1, \dots, 1)}$ . Por ser el tipo homogéneo se tiene que  $j_1 \geq 0$  y por el Lema 3.3.69 es  $j_1 = 0$  y  $\sigma_0^{(0)}$  involución.

Como  $\mathbf{F}$  es  $\sigma_0$ -reversible, aplicando el Teorema 3.3.71 se tiene que el cambio  $\hat{\Psi} = \frac{1}{2}(Id + \sigma_0^{(0)} \circ \sigma_0)$  verifica  $\hat{\Psi} \in \mathcal{Q}_0^{\mathbf{t}}$ , si respecto al grado homogéneo es  $\hat{\Psi} = \sum_{i=1}^s \hat{\Psi}^{(j_i)}$  con  $\hat{\Psi}^{(j_i)} \in \mathcal{Q}_{j_i}^{(1, \dots, 1)}$  entonces  $j_1 = 0$  y  $\hat{\Psi}^{(0)} = Id$ . Además  $\hat{\Psi}_*\mathbf{F}$  es  $\sigma_0^{(0)}$ -reversible.

Como  $\sigma_0^{(0)}$  es homogéneo de grado cero se tiene  $\sigma_0^{(0)}(\mathbf{x}) = D\sigma_0^{(0)}(\mathbf{0})\mathbf{x}$ . Supongamos que  $l$  coordenadas del tipo  $\mathbf{t}$  valen uno,  $0 \leq l \leq n$ , en el caso particular  $l = n$  se tiene el tipo homogéneo. Para facilitar el razonamiento podemos suponer que son las  $l$  primeras, esto es,  $\mathbf{t} = (\overbrace{1, \dots, 1}^l, t_{l+1}, \dots, t_n)$ . Así

$$D\sigma_0^{(0)}(\mathbf{0}) = \left( \begin{array}{c|cccc} A & & & & \\ \hline & a_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & a_{n-l} \end{array} \right),$$

como  $D\sigma_0^{(0)}(\mathbf{0})$  es involución se tiene que  $A$  es una matriz cuadrada  $l \times l$ ,  $A^2 = Id$  y  $a_i = \pm 1$   $i = 1, \dots, n - l$ .

Por otra parte, si  $\dim(\text{Fix}(\sigma_0)) = k$ , entonces  $\dim(\text{Fix}(D\sigma_0(\mathbf{0}))) = k$  y, por tanto,  $\dim(\text{Fix}(D\sigma_0^{(0)}(\mathbf{0}))) = k$ . Así,  $D\sigma_0^{(0)}(\mathbf{0})$  tiene el autovalor 1 con multiplicidad algebraica y geométrica igual a  $k$ . Como  $(D\sigma_0^{(0)}(\mathbf{0}))^2 = Id$ , se tiene que el espectro de  $D\sigma_0^{(0)}(\mathbf{0})$  es  $\{\pm 1\}$ . Por tanto,  $D\sigma_0^{(0)}(\mathbf{0})$  es una matriz diagonalizable con autovalores 1 y  $-1$  siendo  $k$  la multiplicidad algebraica de 1 y  $n - k$  la del autovalor  $-1$ . Sea  $P$  una matriz de paso:  $\text{diag}((-1)^{i_1}, \dots, (-1)^{i_n}) =$

$P \cdot D\sigma_0^{(0)}(\mathbf{0}) \cdot P^{-1}$ , con  $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ ,  $i_1 + \dots + i_n = n - k$ . Entonces,  $R_k(\mathbf{x}) = P \cdot D\sigma_0^{(0)}(\mathbf{0}) \cdot P^{-1}$ , siendo

$$P = \left( \begin{array}{c|ccc} \hat{P} & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} \right),$$

de donde  $P\mathbf{x} \in \mathcal{Q}_0^{\mathbf{t}} \cap \mathcal{Q}_0^{(1, \dots, 1)}$ . Aplicando el Lema 3.3.70, se tiene que  $(\Psi_0)_*\mathbf{F}$  es  $R_k$ -reversible con  $\Psi_0 = P \circ \hat{\Psi} \in \mathcal{Q}_0^{\mathbf{t}}$ . Además

$$\det(\Psi_0(\mathbf{0})) = \det(P) \det(\hat{\Psi}(\mathbf{0})) = \det(P) \det(\hat{\Psi}^{(0)}(\mathbf{0})) = \det(P) \neq 0,$$

y como  $\text{diag}(P) = \text{diag}(\hat{P}, 1, \dots, 1)$  y  $\hat{\Psi}^{(0)} = Id$ , para obtener  $\text{diag}(D\Psi_0(\mathbf{0})) = (1, \dots, 1)$ , basta elegir una base de los autovectores que forman las columnas de  $\hat{P}$  con unos en su diagonal, lo cual es siempre posible. ■

### 3.3.1. Reversibilidad de campos planos

Es lógico pensar que si un campo  $\mathbf{F}$  es  $\sigma$ -reversible, esta condición imponga alguna reversibilidad sobre su primer término. Pero este primer término depende del tipo elegido. En resumen, supuesto que  $\mathbf{F}$  es  $\sigma$ -reversible, pretendemos encontrar un tipo  $\mathbf{t}$  de forma que  $\mathbf{F}_r$ , primer término cuasihomogéneo de  $\mathbf{F}$  respecto al tipo  $\mathbf{t}$ , sea  $\sigma_0$ -reversible. Con esto se tendrá una condición necesaria de reversibilidad sobre el primer término de  $\mathbf{F}$ . Para ello, intentaremos encontrar un tipo  $\mathbf{t}$  respecto del cual el primer término cuasihomogéneo de la involución  $\sigma$  tenga grado no negativo, en particular el tipo homogéneo lo cumple. En estas condiciones el Lema 3.3.69 nos garantiza que el primer término cuasihomogéneo de  $\mathbf{F}$  es  $\sigma_0$ -reversible.

El problema es que el tipo homogéneo en la mayoría de los casos no es el tipo de una cara compacta del diagrama de Newton de  $\mathbf{F}$ . Sería deseable encontrar tipos asociados a caras compactas del diagrama de Newton de  $\mathbf{F}$  tales que los primeros términos cuasihomogéneos de la involución  $\sigma$  sean de grado cero. Con este propósito enunciamos los siguientes resultados.

**Lema 3.3.73** *Si  $\sigma$  es una involución, entonces el punto  $(1, 1)$  siempre pertenece a una cara del diagrama de Newton de  $\sigma$ .*

*Demostración:* Como  $\sigma$  es una involución con  $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , se tiene  $D\sigma(\mathbf{0})^2 = Id$ . Así, desarrollando  $\sigma$  con respecto al grado homogéneo se tienen dos casos posibles:

$$\begin{aligned}\sigma(x, y) &= \text{diag}(sx, -sy) + \dots, \quad \text{con } s = \pm 1, \\ \sigma(x, y) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots, \quad \text{con } a^2 + bc = 1, bc \neq 0.\end{aligned}$$

En el primer caso, el punto  $(1, 1)$  es un punto soporte del diagrama de Newton de  $\sigma$  y en el segundo puede que no sea un punto soporte pero como  $bc \neq 0$  los puntos  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$  son puntos soportes del diagrama de Newton de  $\sigma$  y por tanto el punto  $(1, 1)$  está en la única cara compacta del diagrama de Newton de  $\sigma$ . ■

**Lema 3.3.74** *Sea  $\sigma$  una involución. Existen dos números racionales no negativos  $\alpha_\sigma, \beta_\sigma$ ,  $0 \leq \alpha_\sigma \leq 1 \leq \frac{1}{\beta_\sigma} \leq +\infty$  tales que para todo tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  con  $\alpha_\sigma \leq \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{1}{\beta_\sigma}$ , el grado del primer término cuasihomogéneo de  $\sigma$  respecto al tipo  $\mathbf{t}$  es cero.*

*Demostración:* Por el Lema 3.3.73 se tiene que  $(1, 1)$  es siempre un punto que pertenece al diagrama de Newton de  $\sigma$ . De esta forma, el diagrama de Newton de  $\sigma$  consta a lo sumo de dos caras compactas, y cualquiera de ellas contiene al punto  $(1, 1)$ . Sea  $\alpha_\sigma$  el exponente de la cara superior,  $0 < \alpha_\sigma \leq 1$  si la cara es compacta y cero en otro caso. Sea también  $\frac{1}{\beta_\sigma}$  el exponente de la cara inferior,  $0 < \beta_\sigma \leq 1$  si la cara es compacta y cero en otro caso.

Si  $\alpha_\sigma = \beta_\sigma = 1$ , entonces el diagrama de Newton de  $\sigma$  posee una única cara compacta de exponente 1 que además contiene al punto  $(1, 1)$ . Por tanto, el grado del primer término homogéneo de  $\sigma$  es cero, como se quería demostrar.

Si  $\alpha_\sigma \neq \beta_\sigma$ , entonces el diagrama de Newton de  $\sigma$  posee dos caras, pero puede que no sean compactas. Si tomamos  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  con  $\alpha_\sigma \leq \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{1}{\beta_\sigma}$ , entonces  $(1, 1)$  es también un punto soporte del primer término cuasihomogéneo de  $\sigma$

respecto al tipo  $\mathbf{t}$ . De esta forma, el grado del primer término cuasihomogéneo de  $\sigma$  respecto al tipo  $\mathbf{t}$  es cero. ■

**Lema 3.3.75** *Sea  $\mathbf{F} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_{r+j}$   $\sigma$ -reversible, con  $\mathbf{F}_{r+j} \in \mathcal{Q}_{r+j}^{\mathbf{t}}$  respecto a un cierto tipo  $\mathbf{t}$ .*

- a) *Si  $\alpha_{\sigma} = \beta_{\sigma} = 1$  y tomamos el tipo  $\mathbf{t} = (1, 1)$ , entonces el diagrama de Newton de  $\mathbf{F}_r$  no se reduce a un único punto soporte.*
- b) *Si  $0 < \alpha_{\sigma} \neq \beta_{\sigma}$  y tomamos el tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  tal que  $\frac{t_2}{t_1} = \alpha_{\sigma}$ , entonces el diagrama de Newton de  $\mathbf{F}_r$  no se reduce a un único punto soporte excepto si el punto está en el eje de ordenadas.*
- c) *Si  $0 < \beta_{\sigma} \neq \alpha_{\sigma}$  y tomamos el tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  tal que  $\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\beta_{\sigma}}$ , entonces el diagrama de Newton de  $\mathbf{F}_r$  no se reduce a un único punto soporte excepto si el punto está en el eje de abscisas.*

*Demostración:* Probemos por reducción al absurdo que el diagrama de Newton de  $\mathbf{F}_r$  no se reduce a un único punto. En caso contrario, si  $(m_0, n_0)$  es el único punto soporte con  $m_0, n_0 \in \mathbb{N}_0$ , entonces tendríamos que  $\mathbf{F}_r = (a_0 \chi_{\{n_0 > 0\}} x^{m_0} y^{n_0-1}, b_0 \chi_{\{m_0 > 0\}} x^{m_0-1} y^{n_0})^T$ , con  $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$ .

Según el Lema 3.3.73, el punto  $(1, 1)$  siempre pertenece a una cara del diagrama de Newton de  $\sigma$ , sea o no vértice.

Si  $(1, 1)$  no es vértice, entonces el diagrama de Newton de  $\sigma$  posee una única cara. Esta cara debe tener como vértices los puntos soportes  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$  y exponente igual a uno. Por tanto  $\alpha_{\sigma} = \beta_{\sigma} = 1$ . Esta es la situación **a)**. Tomando el tipo  $\mathbf{t} = (1, 1)$  asociado a la única cara compacta del diagrama de Newton de  $\sigma$ , por el Lema 3.3.74 el grado del primer término homogéneo de  $\sigma$  respecto al tipo  $\mathbf{t}$  es cero y por el Lema 3.3.69 se tiene que  $\sigma_0$  es una involución y  $\mathbf{F}_r$  es  $\sigma_0$ -reversible. Así,  $\sigma_0(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , con  $a^2 + bc = 1$ ,  $bc \neq 0$ .

Se tiene que cumplir  $D\sigma_0 \cdot \mathbf{F}_r = -\mathbf{F}_r \circ \sigma_0$ . Operando, obtenemos

$$D\sigma_0 \cdot \mathbf{F}_r(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \chi_{\{n_0 > 0\}} x^{m_0} y^{n_0-1} \\ b_0 \chi_{\{m_0 > 0\}} x^{m_0-1} y^{n_0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} aa_0\chi_{\{n_0>0\}}x^{m_0}y^{n_0-1} + bb_0\chi_{\{m_0>0\}}x^{m_0-1}y^{n_0} \\ ca_0\chi_{\{n_0>0\}}x^{m_0}y^{n_0-1} - ab_0\chi_{\{m_0>0\}}x^{m_0-1}y^{n_0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}_r \circ \sigma_0(x, y) &= \begin{pmatrix} a_0\chi_{\{n_0>0\}}(ax + by)^{m_0}(cx - ay)^{n_0-1} \\ b_0\chi_{\{m_0>0\}}(ax + by)^{m_0-1}(cx - ay)^{n_0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como se puede comprobar nunca coinciden ya que  $bc \neq 0$ , y así llegamos a una contradicción.

Probemos la afirmación del apartado **c**). La demostración del apartado **b**) es análoga.

Si  $0 < \beta_\sigma$ , entonces la cara inferior del diagrama de Newton de  $\sigma$  es compacta. Dicha cara consta de dos vértices: uno de ellos es  $(1, 1)$  y el otro  $(m_\sigma + 1, 0)$  con  $m_\sigma \in \mathbf{N}$ .

Tomando el tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  asociado a la cara compacta inferior del diagrama de Newton de  $\sigma$ , esto es,  $\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\beta_\sigma}$ , por el Lema 3.3.74 el grado del primer término cuasihomogéneo de  $\sigma$  respecto al tipo  $\mathbf{t}$  es cero y por el Lema 3.3.69 se tiene que  $\sigma_0$  es una involución y  $\mathbf{F}_r$  es  $\sigma_0$ -reversible. Así será  $\sigma_0(x, y) = \text{diag}(-sx, sy + Ax^{m_\sigma})$  con  $A \neq 0$  y  $s = \pm 1$ . Si  $s = 1$  entonces  $m_\sigma$  es impar.

Veamos que de nuevo no se cumple la igualdad  $D\sigma_0 \cdot \mathbf{F}_r(x, y) = -\mathbf{F}_r(\sigma_0(x, y))$ . Ahora tenemos:

$$\begin{aligned} D\sigma_0 \cdot \mathbf{F}_r(x, y) &= \begin{pmatrix} -s & 0 \\ m_\sigma Ax^{m_\sigma-1} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0\chi_{\{n_0>0\}}x^{m_0}y^{n_0-1} \\ b_0\chi_{\{m_0>0\}}x^{m_0-1}y^{n_0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -sa_0\chi_{\{n_0>0\}}x^{m_0}y^{n_0-1} \\ sb_0\chi_{\{m_0>0\}}x^{m_0-1}y^{n_0} + m_\sigma Aa_0\chi_{\{n_0>0\}}x^{m_\sigma+m_0-1}y^{n_0} \end{pmatrix}, \\ -\mathbf{F}_r(\sigma_0(x, y)) &= -\mathbf{F}_r(-sx, sy + Ax^{n_0}) = - \begin{pmatrix} a_0\chi_{\{n_0>0\}}(-sx)^{m_0}(sy + Ax^{m_\sigma})^{n_0-1} \\ b_0\chi_{\{m_0>0\}}(-sx)^{m_0-1}(sy + Ax^{m_\sigma})^{n_0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como se puede comprobar, si  $A \neq 0$  no son iguales, salvo cuando  $n_0 = 0$  y  $(-s)^{m_0-1} = s$ , para cualquier valor de  $A$ . ■

**Definición 3.3.76** Sea  $\mathbf{F}$  un campo, definimos

- $\alpha_{\mathbf{F}}$  igual a 1 si no existe ninguna cara, compacta o no, con exponente menor o igual que uno, y al máximo de los exponentes menores o iguales a uno de las caras en el caso de que exista alguna.



- $\frac{1}{\beta_{\mathbf{F}}}$  igual a 1 si no existe ninguna cara, compacta o no, con exponente mayor o igual a uno, y al mínimo de los exponentes mayores o iguales a uno de las caras en el caso de que exista alguna.

**Proposición 3.3.77** Sea  $\mathbf{F} = \sum_{j=r}^{\infty} \mathbf{F}_j$   $\sigma$ -reversible, con  $\sigma = \sum_{j=i_0}^{\infty} \sigma_j$ , donde  $\mathbf{F}_j, \sigma_j \in \mathcal{Q}_j^t$ .

Si el tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  verifica  $\alpha_{\mathbf{F}} \leq \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{1}{\beta_{\mathbf{F}}}$ , entonces se cumple:  $i_0 = 0$ ,  $\sigma_0$  es una involución y  $\mathbf{F}_r$  es  $\sigma_0$ -reversible.

*Demostración:* En primer lugar, vemos que  $0 < \alpha_{\mathbf{F}}$  (en caso contrario  $\mathbf{F}$  tendría una cara compacta con exponente cero lo cual es contradictorio). Análogamente, debe ser  $0 < \beta_{\mathbf{F}}$  (en otro caso  $\mathbf{F}$  tendría una cara compacta con exponente infinito lo cual también es contradictorio).

Veamos ahora que  $\alpha_{\sigma} \leq \alpha_{\mathbf{F}}$ . Si  $0 < \alpha_{\mathbf{F}} < \alpha_{\sigma} \leq 1$ , tomando el tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  con  $\frac{t_2}{t_1} = \alpha_{\sigma}$  no puede ser que  $\mathbf{F}_r$  tenga un punto en el eje de ordenadas como único punto soporte en el polígono de Newton ya que  $\alpha_{\mathbf{F}} < \frac{t_2}{t_1}$  y por el Lema 3.3.75 a), su diagrama de Newton tampoco puede reducirse a un único punto soporte. Por tanto, existe una cara compacta con soporte  $\frac{t_2}{t_1} \leq 1$  y exponente mayor que  $\alpha_{\mathbf{F}}$ , lo cual es contradictorio.

Tampoco puede ser  $0 < \frac{1}{\beta_{\mathbf{F}}} < \frac{1}{\beta_{\sigma}}$  ya que, tomando el tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  con  $\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\beta_{\sigma}}$ ,  $\mathbf{F}_r$  no tiene un punto en el eje de abscisas como único punto en su diagrama de Newton, ya que  $\frac{1}{\beta_{\mathbf{F}}} < \frac{t_2}{t_1}$  y por el Lema 3.3.75 b), su diagrama de Newton tampoco puede reducirse a un único punto soporte. Por tanto, existe una cara compacta con soporte  $\frac{t_2}{t_1} \geq 1$  y exponente menor que  $\frac{1}{\beta_{\mathbf{F}}}$ , lo cual es contradictorio.

De esta forma, se cumple que  $\alpha_{\sigma} \leq \alpha_{\mathbf{F}} \leq 1 \leq \frac{1}{\beta_{\mathbf{F}}} \leq \frac{1}{\beta_{\sigma}}$ . Así, para todo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  con  $\alpha_{\mathbf{F}} \leq \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{1}{\beta_{\mathbf{F}}}$  se tiene  $\alpha_{\sigma} \leq \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{1}{\beta_{\sigma}}$  y por el Lema 3.3.74 se tiene que  $i_0 = 0$ . Aplicando ahora el Lema 3.3.69, se tiene el resultado. ■

### 3.3.2. Reversibilidad de campos cuasihomogéneos planos

En esta subsección vamos a considerar sistemas cuasihomogéneos planos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_r(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.3.4)$$

donde  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$ .

**Lema 3.3.78** *Sea  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$   $\sigma$ -reversible, con  $\sigma = \sum_{i=i_0}^{\infty} \sigma_i$ ,  $\sigma_i \in \mathcal{Q}_i^t$ . Entonces,  $i_0 = 0$ ,  $\sigma_0$  es una involución y  $\mathbf{F}_r$  es  $\sigma_0$ -reversible.*

*Demostración:* Basta probar que se cumple  $\alpha_{\mathbf{F}_r} \leq \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{1}{\beta_{\mathbf{F}_r}}$  y el resultado se tiene aplicando la Proposición 3.3.77.

Si el diagrama de Newton de  $\mathbf{F}_r$  se reduce a un único punto soporte, entonces  $\alpha_{\mathbf{F}_r} = \beta_{\mathbf{F}_r} = 0$ , y por tanto  $\alpha_{\mathbf{F}_r} < \frac{t_2}{t_1} < \frac{1}{\beta_{\mathbf{F}_r}}$ .

Si el diagrama de Newton de  $\mathbf{F}_r$  no se reduce a un único punto soporte, entonces su diagrama de Newton posee una única cara compacta, de exponente  $\frac{t_2}{t_1}$ , y puede que también contenga alguna cara no acotada, a lo sumo dos.

Si  $\alpha_{\mathbf{F}_r} = 0$ , entonces el diagrama de Newton de  $\mathbf{F}_r$  posee una cara no acotada vertical y otra compacta de exponente  $\frac{t_2}{t_1}$ . Por tanto,  $\alpha_{\mathbf{F}_r} < \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{1}{\beta_{\mathbf{F}_r}}$ .

Si  $0 < \alpha_{\mathbf{F}_r} < 1$ , entonces  $\alpha_{\mathbf{F}_r} = \frac{t_2}{t_1}$  y se cumple  $\alpha_{\mathbf{F}_r} = \frac{t_2}{t_1} < \frac{1}{\beta_{\mathbf{F}_r}}$ .

Si  $\alpha_{\mathbf{F}_r} = 1$  y  $\mathbf{t} = (1, 1)$ , entonces  $\alpha_{\mathbf{F}_r} = \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{1}{\beta_{\mathbf{F}_r}}$ .

Si  $\alpha_{\mathbf{F}_r} = 1 < \frac{t_2}{t_1}$ , entonces el diagrama de Newton de  $\mathbf{F}_r$  posee un vértice exterior superior y una cara compacta de exponente  $\frac{t_2}{t_1}$ . Por tanto,  $\alpha_{\mathbf{F}_r} < \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{1}{\beta_{\mathbf{F}_r}}$ . ■

**Corolario 3.3.79** *Sea  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$  reversible. Entonces, existe un cambio de variables  $\Psi_0 \in \mathcal{Q}_0^t$  tal que  $\text{diag}(D(\Psi_0(\mathbf{0}))) = \text{diag}(Id)$  y  $\Psi_{0*}\mathbf{F}_r$  es time-reversible.*

*Demostración:* Si  $\mathbf{F}_r$  es  $\sigma$ -reversible con  $\sigma = \sum_{i=i_0}^{\infty} \sigma_i$ ,  $\sigma_i \in \mathcal{Q}_i^t$  y  $\dim(\text{Fix}(\sigma)) = 1$ , por el Lema 3.3.78 obtenemos  $i_0 = 0$ ,  $\sigma_0$  involución y  $\mathbf{F}_r$   $\sigma_0$ -reversible. Aplicando el Teorema 3.3.72, se tiene que  $\mathbf{F}_r$  es  $R_x$ -reversible o  $R_y$ -reversible. ■

**Lema 3.3.80** *Si  $|\mathbf{t}|$  y  $r$  son impares, entonces (3.3.4) es time-reversible*

*Demostración:* Aplicando la Proposición 1.3.2 b) a  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$ , se tiene que  $\mathbf{F}_r(\text{diag}((-1)^{t_1}, (-1)^{t_2})\mathbf{x}) = (-1)^r \text{diag}((-1)^{t_1}, (-1)^{t_2})\mathbf{F}_r(\mathbf{x})$ . Por otra parte como  $|\mathbf{t}|$  es impar, o bien  $t_1$  es par y  $t_2$  impar, o al revés.

- Si  $t_1$  es impar y  $t_2$  par, se tiene  $\mathbf{F}_r(\text{diag}(-1, 1)\mathbf{x}) = -\text{diag}(-1, 1)\mathbf{F}_r(\mathbf{x})$ . Así tomando  $\Phi(x, y) = (-x, y)$  resulta  $\Phi_*\mathbf{F}_r = -\mathbf{F}_r$ , esto es,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r$  es time-reversible a  $x$ .
- Si  $t_1$  es par y  $t_2$  impar, se tiene  $\mathbf{F}_r(\text{diag}(1, -1)\mathbf{x}) = -\text{diag}(1, -1)\mathbf{F}_r(\mathbf{x})$ . Por el mismo razonamiento, se obtiene que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r$  es time-reversible a  $y$ .

■

**Lema 3.3.81** Sea  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu\mathbf{D}_0$ .

- a) El sistema (3.3.4) es time-reversible a  $x$  si, y sólo si,  $h(-x, y) = h(x, y)$  y  $\mu(-x, y) = -\mu(x, y)$ .
- b) El sistema (3.3.4) es time-reversible a  $y$  si, y sólo si,  $h(x, -y) = h(x, y)$  y  $\mu(x, -y) = -\mu(x, y)$ .

*Demostración:* Sólo probaremos el apartado a), el otro apartado se demuestra de forma análoga.

Observemos que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$  es time-reversible a  $x$  si, y sólo si,  $\text{diag}(1, -1)\mathbf{F}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_r(\text{diag}(-1, 1)\mathbf{x})$ . Si  $\mathbf{F}_r = (P, Q)^T$ , entonces  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$  es time-reversible a  $x$  si, y sólo si,  $P(-x, y) = P(x, y)$  y  $Q(-x, y) = -Q(x, y)$ .

Veamos la condición necesaria. Supongamos que  $P(-x, y) = P(x, y)$  y  $Q(-x, y) = -Q(x, y)$  entonces:

$$\begin{aligned} h(-x, y) &= \frac{1}{r+|t|}\mathbf{D}_0(-x, y) \wedge \mathbf{F}_r(-x, y) = \frac{1}{r+|t|}(-t_1xQ(-x, y) - t_2yP(-x, y)) \\ &= \frac{1}{r+|t|}(t_1xQ(x, y) - t_2yP(x, y)) = h(x, y), \\ \mu(-x, y) &= \frac{1}{r+|t|} \left( \frac{\partial P(-x, y)}{\partial(-x)} + \frac{\partial Q(-x, y)}{\partial y} \right) = \frac{1}{r+|t|} \left( -\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) = -\mu(x, y). \end{aligned}$$

Ahora vemos la condición suficiente. Supongamos que  $h(-x, y) = h(x, y)$  y  $\mu(-x, y) = -\mu(x, y)$  entonces:

$$\begin{aligned} P(-x, y) &= -\frac{\partial h(-x, y)}{\partial y} + t_1(-x)\mu(-x, y) = -\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} + t_1x\mu(x, y) = P(x, y), \\ Q(-x, y) &= \frac{\partial h(-x, y)}{\partial(-x)} + t_2y\mu(-x, y) = -\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} - t_2y\mu(x, y) = -Q(x, y). \end{aligned}$$

■

**Lema 3.3.82** Sea  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0$ , con  $r$  par.

- a) Si  $t_2$  es par, entonces el sistema (3.3.4) no es time reversible a  $x$ .  
 b) Si  $t_1$  es par entonces el sistema (3.3.4) no es time reversible a  $y$ .

*Demostración:* Por el Lema 3.3.81 basta probar que  $h(-x, y) \neq h(x, y)$  para el apartado **a)** y  $h(x, -y) \neq h(x, y)$  para el **b)**.

- a) Como  $t_2$  es par,  $t_1$  debe ser impar y por tanto:

$$h(-x, y) = h((-1)^{t_1}, (-1)^{t_2}y) = (-1)^{r+t_1+t_2}h(x, y) = -h(x, y) \neq h(x, y).$$

- b) Como  $t_1$  es par,  $t_2$  debe ser impar y por tanto:

$$h(x, -y) = h((-1)^{t_1}x, (-1)^{t_2}y) = (-1)^{r+t_1+t_2}h(x, y) = -h(x, y) \neq h(x, y).$$

■

En los siguientes lemas usaremos la descomposición en factores irreducibles sobre  $\mathbb{R}[x, y]$  de  $h(x, y)$ :

$$h(x, y) = x^{m_x} y^{m_y} \prod_{j=1}^M (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})^{m_j} \prod_{j=1}^N [(y^{t_1} - a_j x^{t_2})^2 + b_j^2 x^{2t_2}]^{n_j}, \quad (3.3.5)$$

y los números asociados a  $h$  definidos por

$$\alpha = \text{mediana} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_M, a_1, \dots, a_N, (0, \text{ si } m_y > 0) \}, \quad (3.3.6)$$

$$\beta = \text{mediana} \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_M}, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_N}, (0, \text{ si } m_x > 0) \right\}. \quad (3.3.7)$$

**Lema 3.3.83** Sean  $h$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  dados por (3.3.5), (3.3.6) y (3.3.7) respectivamente, se verifica:

- a) Si  $h(-x, y) = h(x, y)$ , entonces  $m_x$ ,  $M$ ,  $N$  son pares y  $\alpha = \beta = 0$ .  
 b) Si  $h(x, -y) = h(x, y)$ , entonces  $m_y$ ,  $M$ ,  $N$  son pares y  $\alpha = \beta = 0$ .

*Demostración:*

- b) Si  $h(x, -y) = h(x, y)$ , se cumple  $\frac{\partial^l h(x, -y)}{\partial y^l} = (-1)^l \frac{\partial^l h(x, y)}{\partial y^l}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ . Por tanto, si  $\lambda_j$  es una raíz real o compleja de multiplicidad  $m_j$  de  $h(1, y)$ , entonces  $-\lambda_j$  es también una raíz con la misma multiplicidad.

Así,  $M$  y  $N$  deben ser pares,  $\alpha = \beta = 0$  y

$$h(x, y) = x^{m_x} y^{m_y} \prod_{j=1}^{M/2} [y^{2t_1} - \lambda_j^2 x^{2t_2}] \prod_{j=1}^{N/2} [(y^{2t_1} + (a_j^2 + b_j^2)x^{2t_2})^2 - 4a_j^2 x^{2t_2} y^{2t_1}]^{n_j}.$$

De aquí obtenemos  $h(x, -y) = (-1)^{m_y} h(x, y)$ . Por tanto,  $m_y$  debe ser par.

- a) Se obtiene con el mismo razonamiento, cambiando  $x$  por  $y$ . ■

**Nota:** El Lema 3.3.80 nos asegura que, si  $|\mathbf{t}|$  y  $r$  son impares, el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$  es time-reversible. La siguiente proposición proporciona condiciones necesarias de time-reversibilidad.

**Proposición 3.3.84 (Condición necesaria de time-reversibilidad).** *Sea  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0$  con  $h$  dada en (3.3.5) y  $\alpha, \beta$  dados en (3.3.6) y (3.3.7).*

*Si el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r$  es time-reversible, entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- a)  $|\mathbf{t}|$  y  $r$  son impares.
- b)  $M$  y  $N$  son pares y  $\alpha = \beta = 0$ . Además,  $m_x$  es par si es time-reversible a  $x$  y  $m_y$  es par si es time-reversible a  $y$ .

*Demostración:* Supongamos que no se cumple el apartado a).

Si  $|\mathbf{t}|$  es par, entonces  $t_1, t_2$  son impares. Por ser  $\mathbf{F}_r$  time-reversible, se cumple  $h(-x, y) = h(x, y)$  o bien  $h(x, -y) = h(x, y)$ . El resultado se obtiene aplicando el Lema 3.3.83.

Si  $r$  es par y  $t_1$  es par, entonces  $t_2$  es impar. Además, por el Lema 3.3.82, obtenemos que  $\mathbf{F}_r$  no puede ser time-reversible a  $y$ , por tanto, es time-reversible a  $x$ . Así, obtenemos el resultado aplicando el Lema 3.3.83 a).

Si  $r$  es par y  $t_2$  es par, entonces  $t_1$  es impar. Además, por el Lema 3.3.82, obtenemos que  $\mathbf{F}_r$  no puede ser time-reversible a  $x$  y, por tanto, es time-reversible a  $y$ . El resultado se obtiene aplicando el Lema 3.3.83 b). ■

**Proposición 3.3.85 (Condición necesaria y suficiente de reversibilidad, caso homogéneo).** *Sea  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0 \in \mathcal{Q}_r^{(1,1)}$ , con  $\mu(x, y) = \sum_{j=0}^r D_j x^j y^{r-j}$  y  $h(x, y) = \sum_{j=0}^{r+2} C_j x^j y^{r+2-j}$ . Entonces:*

$\mathbf{F}_r$  es lineal reversible si, y sólo si, existen  $b, c \in \mathbb{R}$ ,  $bc \neq 1$  cumpliendo alguna de las siguientes condiciones:

- a)  $\sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{m_1=0}^i \frac{(2k+1)!(r+1-2k)!i!(r+2-i)!}{(2k+1-m_1)!m_1!(r-2k+1-i+m_1)!(i-m_1)!} C_i b^{i-m_1} c^{2k+1-m_1} = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{r+2}{2} \rfloor$  y  $\sum_{i=0}^{2k} \sum_{m_1=0}^i \frac{(2k)!(r-2k)!i!(r-i)!}{(2k-m_1)!m_1!(r-2k-i+m_1)!(i-m_1)!} D_i b^{i-m_1} c^{2k-m_1} = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ .
- b)  $\sum_{i=0}^{2k+2} \sum_{m_1=0}^i \frac{(2k+2)!(r-2k)!i!(r+2-i)!}{(2k+2-m_1)!m_1!(r-2k-i+m_1)!(i-m_1)!} C_i b^{i-m_1} c^{2k+2-m_1} = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{r+2}{2} \rfloor$ ,  $\sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{m_1=0}^i \frac{(2k+1)!(r-2k-1)!i!(r-i)!}{(2k+1-m_1)!m_1!(r-2k-1-i+m_1)!(i-m_1)!} D_i b^{i-m_1} c^{2k+1-m_1} = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$  y  $r$  es impar.

*Demostración:* Por el Teorema 3.3.72, el sistema (3.1.1) es  $A$ -reversible, donde  $A$  una involución lineal si, y sólo si, existe una matriz  $P$  no singular tal que  $P_* \mathbf{F}_r$  es time-reversible, siendo además  $\text{diag}(P) = \text{diag}(Id)$ .

Si aplicamos el cambio  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + bv \\ cu + v \end{pmatrix}$  al campo  $\mathbf{F}_r$ , entonces  $P_* \mathbf{F}_r = \mathbf{X}_{h^*} + \mu^* \mathbf{D}_0$  es time-reversible. Por el Lema 2.3.29, se tiene:

$$\begin{aligned} h^*(u, v) &= (1 - bc)h(u + bv, cu + v), \\ \mu^*(u, v) &= \mu(u + bv, cu + v). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \partial_u h^* &= (\partial_x + c\partial_y)h, \\ \partial_v h^* &= (b\partial_x + \partial_y)h. \end{aligned}$$

De este modo  $h^*(u, v)$  es par en  $u$  si, y sólo si, para  $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{r+2}{2} \rfloor$  se cumplen las siguientes condiciones equivalentes:

$$\begin{aligned} \partial_u^{2k+1} \partial_v^{r+2-(2k+1)} h^* &= 0, \\ (\partial_x + c\partial_y)^{2k+1} (b\partial_x + \partial_y)^{r+2-(2k+1)} h(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \partial_u^M \partial_v^N &= (\partial_x + c\partial_y)^M (b\partial_x + \partial_y)^N \\ &= \left( \sum_{m_1+m_2=M} \binom{M}{m_1} c^{m_2} \partial_x^{m_1} \partial_y^{m_2} \right) \left( \sum_{n_1+n_2=N} \binom{N}{n_1} b^{n_1} \partial_x^{n_1} \partial_y^{n_2} \right) \\ &= \sum_{\substack{m_1+m_2=M \\ n_1+n_2=N}} \binom{M}{m_1} \binom{N}{n_1} b^{n_1} c^{m_2} \partial_x^{m_1+n_1} \partial_y^{m_2+n_2} \\ &= \sum_{m_1=0}^M \sum_{n_1=0}^N \binom{M}{m_1} \binom{N}{n_1} b^{n_1} c^{M-m_1} \partial_x^{m_1+n_1} \partial_y^{M+N-m_1-n_1}, \end{aligned}$$

denotando  $i = m_1 + n_1$ , se obtiene:

$$\partial_u^M \partial_v^N = \sum_{i=0}^M \sum_{m_1=0}^i \binom{M}{m_1} \binom{N}{i-m_1} b^{i-m_1} c^{M-m_1} \partial_x^i \partial_y^{M+N-i}.$$

Para completar la demostración, basta observar que  $\partial_x^M \partial_y^{r+2-M} h(x, y) = M!(r+2-M)!C_M$ .

La demostración para el resultado sobre reversibilidad respecto a  $y$  o sobre los coeficientes de  $\mu$  es análoga. ■

**Proposición 3.3.86 (Condición necesaria y suficiente de reversibilidad, caso no homogéneo).** *Sea  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0$  con  $h$  dada en (3.3.5) y  $\alpha, \beta$  dados en (3.3.6) y (3.3.7). Entonces:*

- a) *Si  $t_1, t_2 > 1$ , el sistema (3.3.4) es reversible si, y sólo si, es time-reversible.*
- b) *Si  $t_1 = 1, t_2 > 1$ , el sistema (3.3.4) es reversible si, y sólo si, el sistema  $(\dot{u}, \dot{v})^T = \Psi_*(\mathbf{F}_r)(u, v)$  es time-reversible, donde  $\Psi(u, v) = (x, -\alpha x^{t_2} + y)^T$ .*

- c) Si  $t_2 = 1$ ,  $t_1 > 1$ , el sistema (3.3.4) es reversible si, y sólo si, el sistema  $(\dot{u}, \dot{v})^T = \Psi_*(\mathbf{F}_r)(u, v)$  es time-reversible, donde  $\Psi(u, v) = (x - \beta y^{t_1}, y)^T$ .

*Demostración:* Supongamos que  $\mathbf{F}_r$  es time-reversible o bien que existe un cambio  $\Psi \in \mathcal{Q}_0^t$  tal que  $\Psi_*\mathbf{F}_r$  es time-reversible. Entonces,  $\mathbf{F}_r$  es  $R_1$ -reversible en el primer caso con  $R_1(x, y) = ((-1)^{i_1}x, (-1)^{i_2}y)$ ,  $i_1, i_2 \in \{0, 1\}$ ,  $i_1 + i_2 = 1$ ; y en el segundo caso es  $\sigma$ -reversible, con  $\sigma = \Psi^{-1} \circ R_1 \circ \Psi$ .

Probemos ahora la condición necesaria. Si (3.3.4) es reversible, entonces por el Corolario 3.3.79, existe un cambio de variables de grado cero  $u = x + \alpha_1 \chi_{\{t=(1,1)\}}y$ ,  $v = \alpha_2 \chi_{\{t=(1,t_2)\}}x^{t_2} + y$ , que transforma el sistema (3.1.1) en otro  $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{F}}_r = \mathbf{X}_{\tilde{h}} + \tilde{\mu}\mathbf{D}_0$  que es time-reversible.

Usando el Lema 2.3.29, se tiene que

$$\tilde{h}(u, v) = [1 - \alpha_1 \alpha_2 \chi_{\{t=(1,1)\}}] h(x, y), \quad \tilde{\mu}(u, v) = \mu(x, y).$$

De esta forma:

- a) Si  $t_1, t_2 > 1$ , el único cambio posible es la identidad,  $u = x$ ,  $v = y$ . En consecuencia,  $\mathbf{F}_r$  es reversible sólo si es time-reversible

- b) Si  $t_1 = 1$ ,  $t_2 > 1$ , entonces el cambio  $u = x$ ,  $v = \alpha_2 x^{t_2} + y$ , transforma  $\mathbf{F}_r$  en un campo time-reversible, siendo el cambio inverso  $x = u$ ,  $y = -\alpha_2 u^{t_2} + v$ .

De esta forma, se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(u, v) &= h(x, y) = h(u, -\alpha_2 u^{t_2} + v) \\ &= u^{m_x} (v - \alpha_2 u^{t_2})^{m_y} \prod_{j=1}^M (v - (\alpha_2 + \lambda_j) u^{t_2})^{m_j} \times \\ &\quad \prod_{j=1}^N \left[ (v - (\alpha_2 + a_j) u^{t_2})^2 + b_j^2 u^{2t_2} \right]^{n_j}. \end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 3.3.84, se tiene  $\alpha_2 = -\alpha$ .

- c) El razonamiento es análogo al del apartado anterior.

■



### 3.3.3. Aplicaciones

En esta subsección pretendemos caracterizar familias de campos reversibles.

**Teorema 3.3.87** *Sea el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{22}(\mathbf{x})$  con dado por:*

$$\mathbf{F}_{22}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_0y^5 + a_1x^5y^2 \\ b_0x^4y^3 + b_1x^9 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_{22}^{(3,5)}.$$

*Entonces: el campo  $\mathbf{F}_{22}$  es reversible si, y sólo si,  $b_0 = a_1 = 0$ .*

*Demostración:* Por la Proposición 3.3.86 **a)**, el sistema es reversible si, y sólo si, es time-reversible. Esto ocurre si, y sólo si, es time-reversible a  $x$ , esto es,  $b_0 = a_1 = 0$ . ■

**Nota:** Existen centros cuasihomogéneos que no son reversibles. Un ejemplo sería el sistema hamiltoniano  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x})$  donde  $h \in \mathcal{P}_{30}^t$  con  $\mathbf{t} = (3, 5)$  siendo:

$$h(x, y) = (y^3 - ax^5)^2 + x^{10} = y^6 - 2ax^5y^3 + (a^2 + 1)x^{10}, a \neq 0,$$

el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -6y^5 + 6ax^5y^2 \\ -10ax^4y^3 + 10(a^2 + 1)x^9 \end{pmatrix},$$

es monodrómico y hamiltoniano por lo tanto centro y como se puede apreciar, no es time-reversible. Por la Proposición 3.3.86 no puede ser reversible.

**Teorema 3.3.88** *Sea el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_8(\mathbf{x})$  con*

$$\mathbf{F}_8(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_0y^3 + a_1x^3y^2 + a_2x^6y + a_3x^9 \\ b_0x^2y^3 + b_1x^5y^2 + b_2x^8y + b_3x^{11} \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_8^{(1,3)}$$

*y definamos  $c_0 = -\frac{3}{12}a_0$ ,  $c_1 = \frac{b_0-3a_1}{12}$ ,  $c_2 = \frac{b_1-3a_2}{12}$ ,  $c_3 = \frac{b_2-3a_3}{12}$ ,  $c_4 = \frac{b_3}{12}$ ,  $d_0 = \frac{3a_1+3b_0}{12}$ ,  $d_1 = \frac{6a_2+2b_1}{12}$ ,  $d_2 = \frac{9a_3+b_2}{12}$ .*

*Entonces, el campo  $\mathbf{F}_8$  es reversible en los siguientes casos:*

**a)**  $c_0 = c_1 = d_0 = 0$ ,  $2c_2d_2 - d_1c_3 = 0$ ,

**b)**  $c_0 \neq 0$  y  $d_0 = 0$ ,  $4c_0d_2 - d_1c_1 = 0$ ,  $c_1^3 - 4c_1c_2c_0 + 8c_3c_0^2 = 0$ .

*Demostración:* Observemos que  $\mathbf{F}_8 = \mathbf{X}_h + \mu\mathbf{D}_0$  con  $h(x, y) = c_0y^4 + c_1x^3y^3 + c_2x^6y^2 + c_3x^9y + c_4x^{12}$  y  $\mu(x, y) = d_0x^2y^2 + d_1x^5y + d_2x^8$ . Por el Corolario 3.3.79, si  $\mathbf{F}_8$  es reversible entonces existe un cambio  $x = u$ ,  $y = cu^3 + v$  que lo transforma en un campo time-reversible. Si  $\tilde{\mathbf{F}}_8 = \mathbf{X}_{\tilde{h}} + \tilde{\mu}\mathbf{D}_0$  es el nuevo campo, se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{h}(u, v) &= c_0v^4 + (4c_0c + c_1)u^3v^3 + (6c_0c^2 + 3c_1c + c_2)u^6v^2 \\ &\quad + (4c_0c^3 + 3c_1c^2 + 2c_2c + c_3)u^9v + (c_0c^4 + c_1c^3 + c_2c^2 + c_3c + c_4)u^{12}, \\ \tilde{\mu}(u, v) &= d_0u^2v^2 + (2d_0c + d_1)u^5v + (d_0c^2 + d_1c + d_2)u^8.\end{aligned}$$

Para que  $\tilde{\mathbf{F}}_8$  sea time-reversible, debe existir  $c \in \mathbb{R}$  tal que:

$$4c_0c + c_1 = 0, \quad (\mathbf{C1})$$

$$4c_0c^3 + 3c_1c^2 + 2c_2c + c_3 = 0, \quad (\mathbf{C2})$$

$$d_0 = 0, \quad (\mathbf{D1})$$

$$d_0c^2 + d_1c + d_2 = 0. \quad (\mathbf{D2}).$$

Si  $c_0 = 0$ , de la condición **(C1)** se deduce que  $c_1 = 0$ , y de **(C2)**, **(D2)** se deduce que  $2c_2d_2 - d_1c_3 = 0$ . Con esto obtenemos el apartado **a)**.

Si  $c_0 \neq 0$ , de la condición **(C1)** se deduce que  $c = -\frac{c_1}{4c_0}$ . Sustituyendo este valor en **(C2)** y **(D2)** se obtiene el apartado **b)**. ■

**Teorema 3.3.89** *Consideremos el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x})$  con*

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_0y^2 + a_1xy + a_2x^2 \\ b_0y^2 + b_1xy + b_2x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_1^{(1,1)},$$

y denotemos  $c_0 = -\frac{1}{3}a_0$ ,  $c_1 = \frac{b_0 - a_1}{3}$ ,  $c_2 = \frac{b_1 - a_2}{3}$ ,  $c_3 = \frac{b_2}{3}$ ,  $d_0 = \frac{a_1 + 2b_0}{3}$ ,  $d_1 = \frac{2a_2 + b_1}{3}$ .

Entonces, el campo  $\mathbf{F}_1$  es reversible si,

$$\begin{aligned}0 &= c_0(c_1d_1^2 - 2c_2d_1d_0 + 3c_3d_0^2)^3 \\ &\quad - c_1(c_1d_1^2 - 2c_2d_1d_0 + 3c_3d_0^2)^2(3c_0d_1^2 - 2c_1d_1d_0 + c_2d_0^2) \\ &\quad + c_2(c_1d_1^2 - 2c_2d_1d_0 + 3c_3d_0^2)(3c_0d_1^2 - 2c_1d_1d_0 + c_2d_0^2)^2 \\ &\quad - c_3(3c_0d_1^2 - 2c_1d_1d_0 + c_2d_0^2)^3.\end{aligned}$$

*Demostración:* Observamos que  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{X}_h + \mu\mathbf{D}_0$ , donde  $h(x, y) = c_0y^3 + c_1xy^2 + c_2x^2y + c_3x^3$  y  $\mu(x, y) = d_0y + d_1x$ . Por el Corolario 3.3.79, si  $\mathbf{F}_1$  es reversible, entonces existe un cambio  $x = u + bv$ ,  $y = cu + v$  que lo transforma en un campo time-reversible. Si  $\tilde{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{X}_{\tilde{h}} + \tilde{\mu}\mathbf{D}_0$  es el nuevo campo, se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{h}(u, v) &= (c_0 + bc_1 + b^2c_2 + c_3b^3)v^3 + ((3c_0 + 2c_1b + c_2b^2)c + c_1 + 2c_2b + 3c_3b^2)uv^2 \\ &\quad + (3c_0c^2 + 2c_1c + c_2 + (c_1c^2 + 2c_2c + 3c_3)b)u^2v + (c_0c^3 + c_1c^2 + c_2c + c_3)u^3, \\ \tilde{\mu}(u, v) &= (d_0 + d_1b)v + (d_0c + d_1)u.\end{aligned}$$

Si  $\tilde{\mathbf{F}}_1$  es  $R_u$ -reversible, entonces:

$$\begin{aligned}(3c_0 + 2c_1b + c_2b^2)c + c_1 + 2c_2b + 3c_3b^2 &= 0, \quad (\mathbf{C1u}) \\ c_0c^3 + c_1c^2 + c_2c + c_3 &= 0, \quad (\mathbf{C2u}) \\ d_0 + d_1b &= 0. \quad (\mathbf{D1u})\end{aligned}$$

En cambio, si es  $R_v$ -reversible obtenemos:

$$\begin{aligned}c_0 + bc_1 + b^2c_2 + c_3b^3 &= 0, \quad (\mathbf{C1v}) \\ 3c_0c^2 + 2c_1c + c_2 + (c_1c^2 + 2c_2c + 3c_3)b &= 0, \quad (\mathbf{C2v}) \\ d_0c + d_1 &= 0. \quad (\mathbf{D1v})\end{aligned}$$

Si  $d_0 = d_1 = 0$ , por el Lema 3.2.67 **g**), existe un cambio de grado cero que convierte la función de Hamilton en time-reversible.

Si  $d_0 = 0$ ,  $d_1 \neq 0$ , la única opción para que  $\tilde{\mathbf{F}}_1$  sea time-reversible es que sea  $R_u$ -reversible. Por lo tanto, debe ser  $b = 0$ . Así, las condiciones que tiene que cumplir son:  $3c_0c + c_1 = 0$ ,  $c_0c^3 + c_1c^2 + c_2c + c_3 = 0$ ; o equivalentemente  $2c_1^3 - 9c_0c_1c_2 + 27c_3c_0^2 = 0$ .

Si  $d_0 \neq 0$  y  $d_1 = 0$ , la única opción para que  $\tilde{\mathbf{F}}_1$  sea time-reversible es que sea  $R_v$ -reversible. Por lo tanto, debe ser  $c = 0$ . Las condiciones que deben cumplirse son:  $c_2 + 3c_3b = 0$ ,  $c_0 + c_1b + c_2b^2 + c_3b^3 = 0$ , o equivalentemente  $2c_2^3 - 9c_0c_3c_2 + 27c_3^2c_0 = 0$ .

Si  $d_0d_1 \neq 0$  y  $\tilde{\mathbf{F}}_1$  es  $R_u$ -reversible, obtenemos el valor de  $b$  en la ecuación **(D1u)** y lo sustituimos en **(C1u)**. La resolvente de **(C1u)** y **(C2u)**, respecto a la variable  $c$ , conduce a la ecuación del enunciado.

Si  $d_0 d_1 \neq 0$  y  $\tilde{\mathbf{F}}_1$  es  $R_v$ -reversible, obtenemos el valor de  $c$  en la ecuación **(D1v)** y lo sustituimos en **(C2v)**. La resolvente de **(C1v)** y **(C2v)**, respecto a la variable  $b$ , da lugar al resultado.

La condición obtenida es sólo necesaria, pues la resolvente puede incluir valores complejos de  $c$ ,  $b$  que no están permitidos. ■

## 3.4. La condición para un centro o un foco

### 3.4.1. Determinación topológica

Como vimos en el Capítulo 2, algunas de las propiedades del retrato de fases de campos vectoriales cuasihomogéneos pueden ser convenientemente establecidas usando la descomposición algebraica (2.2.2). La siguiente proposición clasifica los diferentes tipos topológicos de un sistema plano cuasihomogéneo en función de  $h$  y  $\mu$ .

**Proposición 3.4.90** Sean  $\mu$  y  $h$  los polinomios cuasihomogéneos definidos en (2.2.2) asociados al sistema (3.1.1). Entonces:

- a) Si  $h \equiv 0$  y  $\mu \equiv 0$ , el sistema es trivial: todos los puntos son de equilibrio.
- b) Si  $h \equiv 0$  y  $\mu \not\equiv 0$ , el origen es un nodo: todas las órbitas de (3.1.1) se acercan o alejan del origen.
- c) Si  $h \not\equiv 0$  y  $h(x, y)$  posee factores reales del tipo  $x$ ,  $y$  o  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2}$ , (véase (2.3.8)), entonces las curvas  $x = 0$ ,  $y = 0$  o  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2} = 0$ , respectivamente son invariantes al flujo del campo (3.1.1).
- d) Si  $h \not\equiv 0$  y  $h(x, y)$  no posee factores reales del tipo descrito en **c)**, entonces el origen del sistema (3.1.1) es monodrómico.

*Demostración:* Si aplicamos al sistema (3.1.1) el cambio a coordenadas polares generalizadas (2.4.11) (descrito en la Proposición 2.4.31), obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} u' &= [-h'(\theta) + 2t_1 t_2 \mu(\theta)] u, \\ \theta' &= (r + |\mathbf{t}|) h(\theta). \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Hemos de hacer notar también que dichos cambios no alteran el sentido de las órbitas. ya que los valores utilizados en estas operaciones son estrictamente positivos. A partir de este sistema deducimos todos los resultados:

a) Es trivial.

b) Si  $h \equiv 0$  y  $\mu \neq 0$ , podemos integrar el sistema (3.4.8), obteniendo:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta_0, \\ u(t) &= u_0 e^{2t_1 t_2 \mu(\theta_0)t},\end{aligned}$$

con lo cual se demuestra que es un nodo estrellado.

c) En este caso, atendiendo a la expresión (2.3.8), si  $h(x, y)$  posee los factores reales  $x, y$  o  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2}$ , entonces  $h(\theta) = 0$  tendrá por soluciones  $\text{Cs}(\theta_0) = 0$ ,  $\text{Sn}(\theta_0) = 0$  o  $\text{tg}(\theta_0) = \tilde{a}_j$  respectivamente, con  $\text{tg}(\theta) = \frac{\text{Sn}^{t_1}(\theta)}{\text{Cs}^{t_2}(\theta)}$ .

Sea  $\theta = \theta_0$  una de ellas. Es evidente que la recta  $\theta = \theta_0$  es una recta invariante del sistema (3.4.8). Deshaciendo el cambio, el factor en  $(x, y)$  será una curva invariante del sistema original.

d) Si  $h \neq 0$  y no existen factores reales como los descritos en **c)**, entonces  $h(\theta) \neq 0$  para todo  $\theta \in [0, T]$ . Además, como  $h$  es continua en  $[0, T]$ , podemos asegurar que existe  $m > 0$ , tal que  $|h(\theta)| > m, \forall \theta \in [0, T]$ . Cambiando el tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \left[ -\frac{1}{r+|t|} \frac{h'(\theta)}{h(\theta)} + \frac{2t_1 t_2}{r+|t|} \frac{\mu(\theta)}{h(\theta)} \right] u, \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}\tag{3.4.9}$$

con lo que queda probado el resultado.

**Nota:** El cambio de escala en el tiempo cambia el sentido de las órbitas si  $h < 0$ , y no las cambia si  $h > 0$ .

■

Para el caso monodrómico, (apartado **d)** de la Proposición anterior), podemos hallar condiciones de centro o foco, analizando la correspondiente aplicación

de Poincaré. Integrando el sistema (3.4.9), obtenemos:

$$u(\theta, u_0) = u_0 e^{-\frac{1}{r+|\mathbf{t}|} \int_0^\theta \frac{h'(t)}{h(t)} dt + \frac{2t_1 t_2}{r+|\mathbf{t}|} \int_0^\theta \frac{\mu(t)}{h(t)} dt}.$$

Así pues, la aplicación de Poincaré esta dada por

$$\Pi(u_0) = u(T, u_0) = u_0 e^{-\frac{1}{r+|\mathbf{t}|} \int_0^T \frac{h'(\theta)}{h(\theta)} d\theta + \frac{2t_1 t_2}{r+|\mathbf{t}|} \int_0^T \frac{\mu(\theta)}{h(\theta)} d\theta} = u_0 e^{\text{signo}(h) \frac{2}{r+|\mathbf{t}|} f_0},$$

donde

$$f_0 = t_1 t_2 \int_0^T \frac{\mu(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{h(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))} d\theta. \quad (3.4.10)$$

La siguiente proposición caracteriza la monodromía y estabilidad del origen del sistema (3.1.1).

**Proposición 3.4.91** *El origen del sistema (3.1.1) es un foco o un centro si, y sólo si, el polinomio  $h(x, y)$  definido en (2.2.2), no tiene factores reales del tipo  $x$ ,  $y$  o  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2}$ . Más aún, el origen es un centro global si, y sólo si,  $f_0 = 0$ ; un foco inestable si  $h f_0 > 0$ ; o un foco estable si  $h f_0 < 0$ .*

### 3.4.2. Cálculo de $f_0$

Es posible encontrar expresiones más simples para el valor de  $f_0$ . Para ello describiremos algunas propiedades de los polinomios cuasihomogéneos.

**Lema 3.4.92** *Si  $h(x, y)$  no posee factores reales del tipo  $x$ ,  $y$  o  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2}$ , (caso **d**) de la Proposición 3.4.90), entonces el grado de cuasihomogéneo de  $h$ ,  $r + |\mathbf{t}|$ , es igual a  $2Dt_1 t_2$  donde  $D \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración:* Para que  $h(x, y)$  no contenga el factor  $x$ , usando (2.3.8) deducimos que  $m_x = 0$ ; para que no contenga el factor  $y$  debe ser  $m_y = 0$ , mientras que si no contiene factores  $y^{t_1} - \tilde{a}_j x^{t_2}$ ,  $j = 1, \dots, M$  debe ser  $M = 0$ . De esta forma,  $r + |\mathbf{t}| = 2t_1 t_2 \sum_{j=1}^N n_j$ , de donde se sigue el resultado. ■

**Nota:** El polinomio  $\mu(x, y)$  es de grado  $r$  y, por el lema anterior, se tiene  $r = 2Dt_1 t_2 - |\mathbf{t}| = 2(D-1)t_1 t_2 + t_2(t_1 - 1) + t_1(t_2 - 1)$ . En consecuencia:

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= x^{t_2-1} y^{t_1-1} \mu^{\text{hom}}(X, Y), \\ h(x, y) &= h^{\text{hom}}(X, Y), \end{aligned}$$

donde  $\mu^{\text{hom}}$ ,  $h^{\text{hom}}$  son polinomios homogéneos en las variables  $X$  e  $Y$ , de grados  $2N - 2$ ,  $2N$ , respectivamente.

**Lema 3.4.93** *Las funciones  $\text{Cs}(\theta)$ ,  $\text{Sn}(\theta)$  (definidas en (2.4.11)) son periódicas de periodo  $T$ , y verifican las siguientes propiedades:*

- a)  $\text{Cs}(\theta) = -\text{Cs}(\theta + \frac{T}{2}) = -\text{Cs}(\frac{T}{2} - \theta) = \text{Cs}(-\theta)$  y  $\text{Sn}(\theta) = -\text{Sn}(\theta + \frac{T}{2}) = \text{Sn}(\frac{T}{2} - \theta) = -\text{Sn}(-\theta)$  para  $0 \leq \theta < \frac{T}{2}$ .
- b)  $\text{Cs}^{2t_2}(\theta) + \text{Sn}^{2t_1}(\theta) = 1$ .

*Demostración:*

- a) Basta comprobar que  $(-\text{Cs}(\theta + \frac{T}{2}), -\text{Sn}(\theta + \frac{T}{2}))$ ,  $(-\text{Cs}(\frac{T}{2} - \theta), \text{Sn}(\frac{T}{2} - \theta))$  y  $(\text{Cs}(-\theta), -\text{Sn}(-\theta))$  son soluciones del problema de valor inicial (2.4.10).
- b) Es trivial, ya que las soluciones de (2.4.10) satisfacen la ecuación del hamiltoniano. ■

Veamos ahora una expresión más simple de  $f_0$ .

**Lema 3.4.94** *Se tiene que*

$$f_0 = \begin{cases} 2t_1 t_2 \int_{-T/4}^{T/4} \frac{\mu(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{h(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))} d\theta, & \text{si } |\mathbf{t}| \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } |\mathbf{t}| \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración:* Podemos expresar  $f_0$  como suma de dos integrales:  $f_0 = I_0 + I_1$ , donde  $I_0 = t_1 t_2 \int_0^{T/2} \frac{\mu(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{h(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))} d\theta$ ,  $I_1 = t_1 t_2 \int_{T/2}^T \frac{\mu(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{h(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))} d\theta$ . Realizando en esta última integral el cambio  $\theta = \xi + \frac{T}{2}$  y aplicando el Lema 3.4.93 a), obtenemos  $I_1 = t_1 t_2 \int_0^{T/2} \frac{\mu(-\text{Cs}(\theta), -\text{Sn}(\theta))}{h(-\text{Cs}(\theta), -\text{Sn}(\theta))} d\theta$ .

Del mismo modo, se tiene:  $I_i = t_1 t_2 \int_0^{T/2} \frac{\mu((-1)^i \text{Cs}(\theta), (-1)^i \text{Sn}(\theta))}{h((-1)^i \text{Cs}(\theta), (-1)^i \text{Sn}(\theta))} d\theta = I_i^{(0)} + I_i^{(1)}$ , donde  $I_i^{(0)} = t_1 t_2 \int_0^{T/4} \frac{\mu((-1)^i \text{Cs}(\theta), (-1)^i \text{Sn}(\theta))}{h((-1)^i \text{Cs}(\theta), (-1)^i \text{Sn}(\theta))} d\theta$ ,  $I_i^{(1)} = t_1 t_2 \int_{T/4}^{T/2} \frac{\mu((-1)^i \text{Cs}(\theta), (-1)^i \text{Sn}(\theta))}{h((-1)^i \text{Cs}(\theta), (-1)^i \text{Sn}(\theta))} d\theta$ , donde  $i = 0, 1$ .

Realizando en esta última integral el cambio  $\theta = \frac{T}{2} - \xi$  y aplicando el Lema 3.4.93 a), obtenemos  $I_i^{(1)} = t_1 t_2 \int_0^{T/4} \frac{\mu((-1)^{i+1} \text{Cs}(\theta), (-1)^i \text{Sn}(\theta))}{h((-1)^{i+1} \text{Cs}(\theta), (-1)^i \text{Sn}(\theta))} d\theta$ .

Así:  $f_0 = \sum_{i,j=0}^1 I_i^{(j)}$ , siendo  $I_i^{(j)} = t_1 t_2 \int_0^{T/4} \frac{\mu((-1)^{i+j} \text{Cs}(\theta), (-1)^i \text{Sn}(\theta))}{h((-1)^{i+j} \text{Cs}(\theta), (-1)^i \text{Sn}(\theta))} d\theta$ .

Por otra parte, por la cuasihomogeneidad, se tiene:  $\frac{\mu((-1)^{t_1} \text{Cs}(\theta), (-1)^{t_2} \text{Sn}(\theta))}{h((-1)^{t_1} \text{Cs}(\theta), (-1)^{t_2} \text{Sn}(\theta))} = \frac{(-1)^r \mu(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{(-1)^{r+|t|} h(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}$ . Por lo tanto:

- Si  $t_1$  es par y  $t_2$  impar, obtenemos  $I_1^{(1)} = -I_0^{(0)}$ ,  $I_1^{(0)} = -I_0^{(1)}$  y en consecuencia  $f_0 = 0$ .
- Si  $t_1$  es impar y  $t_2$  par, entonces  $I_0^{(1)} = -I_0^{(0)}$ ,  $I_1^{(0)} = -I_1^{(1)}$  y así:  $f_0 = 0$ .
- Si  $t_1, t_2$  son impares, entonces  $I_1^{(0)} = I_0^{(0)}$ ,  $I_0^{(1)} = I_1^{(1)}$  y por tanto  $f_0 = 2(I_0^{(0)} + I_1^{(1)})$ . Por otra parte, aplicando a  $I_1^{(1)}$  el cambio  $\theta = -\xi$ , y utilizando el apartado **a)** del Lema 3.4.93, se tiene que  $I_1^{(1)} = t_1 t_2 \int_{-T/4}^0 \frac{\mu(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{h(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))} d\theta$ , de donde deducimos el resultado. ■

**Proposición 3.4.95** Si  $|t|$  es par, entonces  $f_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^{\text{hom}}(1, Y)}{h^{\text{hom}}(1, Y)} dY$ .

*Demostración:* Por el lema anterior:

$$\begin{aligned} f_0 &= 2t_1 t_2 \int_{-T/4}^{T/4} \frac{\mu(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))}{h(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))} d\theta = \int_{-T/4}^{T/4} \frac{2t_1 t_2 \text{Cs}^{t_2-1}(\theta) \text{Sn}^{t_1-1}(\theta) \mu^{\text{hom}}(\text{Cs}^{t_2}(\theta), \text{Sn}^{t_1}(\theta))}{h^{\text{hom}}(\text{Cs}^{t_2}(\theta), \text{Sn}^{t_1}(\theta))} d\theta \\ &= \int_{-T/4}^{T/4} \frac{2t_1 t_2 \text{Cs}^{t_2-1}(\theta) \text{Sn}^{t_1-1}(\theta)}{\text{Cs}^{2t_2}(\theta)} \frac{\mu^{\text{hom}}(1, \text{Tg}(\theta))}{h^{\text{hom}}(1, \text{Tg}(\theta))} d\theta, \end{aligned}$$

donde  $\text{Tg}(\theta) = \frac{\text{Sn}^{t_1}(\theta)}{\text{Cs}^{t_2}(\theta)}$ .

Aplicando el cambio  $v = \text{Tg}(\theta)$ , y usando el apartado **b)** del Lema 3.4.93, tenemos que:

$$dv = \frac{2t_1 t_2 \text{Sn}^{t_1-1} \text{Cs}^{t_2-1}(\theta) [\text{Cs}^{2t_2}(\theta) + \text{Sn}^{2t_1}(\theta)]}{\text{Cs}^{2t_2}(\theta)} d\theta = \frac{2t_1 t_2 \text{Sn}^{t_1-1} \text{Cs}^{t_2-1}(\theta)}{\text{Cs}^{2t_2}(\theta)} d\theta.$$

Por lo tanto:

$$f_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^{\text{hom}}(1, v)}{h^{\text{hom}}(1, v)} dv.$$

Esta integral converge ya que  $\deg(h^{\text{hom}}) - \deg(\mu^{\text{hom}}) = 2$  (véase la nota que sigue al Lema 3.4.92). ■



**Corolario 3.4.96** Si  $|\mathbf{t}|$  es par, entonces  $f_0 = t_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(1,y)}{h(1,y)} dy$ .

*Demostración:* Aplicando el cambio  $v = y^{t_1}$  a la expresión de  $f_0$  dada en la Proposición 3.4.95, se obtiene:

$$f_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t_1 y^{t_1-1} \mu^{\text{hom}}(1,y^{t_1})}{h^{\text{hom}}(1,y^{t_1})} dy = t_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(1,y)}{h(1,y)} dy,$$

como se quería demostrar. ■

**Teorema 3.4.97** El origen del sistema (3.1.1) es un foco o un centro si, y sólo si, el polinomio  $h(x,y) = \prod_{j=1}^m (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})$ , (definido en (2.3.7)), tiene raíces  $\lambda_j$ , complejos no reales.

Además, el origen es un centro global si, y sólo si,  $|\mathbf{t}|$  es impar o  $f_0 = 0$ . Si  $|\mathbf{t}|$  es par, el origen es un foco inestable si  $hf_0 > 0$ , o un foco estable si  $hf_0 < 0$ , donde:

$$f_0 = - \sum_{\substack{Im(\lambda_j) > 0 \\ h^{\text{hom}}(1,\lambda_j) = 0}} Im \left( \text{Res} \left[ \frac{\mu^{\text{hom}}(1,y)}{h^{\text{hom}}(1,y)}, \lambda_j \right] \right). \quad (3.4.11)$$

*Demostración:* Por el Lema 3.1.64,  $\text{grad}(h^{\text{hom}}(1,Y)) - \text{grad}(\mu^{\text{hom}}(1,Y)) = 2$ . Por tanto, la integral dada en la expresión de  $f_0$  de la Proposición 3.4.95 es convergente y  $f_0 = 2\pi I \sum_{Im(\lambda_j) > 0} \text{Res} \left[ \frac{\mu^{\text{hom}}(1,y)}{h^{\text{hom}}(1,y)}, \lambda_j \right]$  (observemos que  $\lambda_j$  son raíces de  $h^{\text{hom}}(1,y)$ ).

Por otra parte, para cada  $\lambda_j$  es  $\text{Res} \left[ \frac{\mu^{\text{hom}}(1,y)}{h^{\text{hom}}(1,y)}, \bar{\lambda}_j \right] = \overline{\text{Res} \left[ \frac{\mu^{\text{hom}}(1,y)}{h^{\text{hom}}(1,y)}, \lambda_j \right]}$ , y por el teorema de los residuos resulta:

$$0 = \sum_{h^{\text{hom}}(1,\lambda_j) = 0} \text{Res} \left[ \frac{\mu^{\text{hom}}(1,y)}{h^{\text{hom}}(1,y)}, \lambda_j \right] = 2Re \left( \sum_{\substack{Im(\lambda_j) > 0 \\ h^{\text{hom}}(1,\lambda_j) = 0}} \text{Res} \left[ \frac{\mu^{\text{hom}}(1,y)}{h^{\text{hom}}(1,y)}, \lambda_j \right] \right).$$

En consecuencia:

$$f_0 = 2\pi I \left[ Re \left( \sum_{\substack{Im(\lambda_j) > 0 \\ h^{\text{hom}}(1,\lambda_j) = 0}} \text{Res} \left[ \frac{\mu^{\text{hom}}(1,y)}{h^{\text{hom}}(1,y)}, \lambda_j \right] \right) + Im \left( \sum_{\substack{Im(\lambda_j) > 0 \\ h^{\text{hom}}(1,\lambda_j) = 0}} \text{Res} \left[ \frac{\mu^{\text{hom}}(1,y)}{h^{\text{hom}}(1,y)}, \lambda_j \right] \right) I \right],$$

de donde se obtiene el resultado. ■

### 3.4.3. Ejemplos

Supongamos que  $|\mathbf{t}|$  es par y que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$  es monodrómico. A partir del Lema 3.4.92, obtenemos  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})\mathbf{D}_0$ , donde

$$\begin{aligned}\mu(x, y) &= x^{t_2-1}y^{t_1-1} \sum_{j=0}^{2N-2} d_j x^{t_2 j} y^{t_1(2N-2-j)}, \\ h(x, y) &= \prod_{j=1}^N [(y^{t_1} - a_j x^{t_2})^2 + b_j^2 x^{2t_2}].\end{aligned}\quad (3.4.12)$$

Aplicando un escalado, (véase el Lema 3.2.67), podemos suponer  $b_1 = 1$ . Además, por el mismo lema, si  $t_2 = 1$  podemos también suponer  $a_1 = 0$ .

Si  $|\mathbf{t}|$  es par, tenemos:

$$\begin{aligned}\mu^{\text{hom}}(1, Y) &= \sum_{j=0}^{2D-2} d_j Y^{2D-2-j}, \\ h^{\text{hom}}(1, Y) &= [(Y - a_1)^2 + 1]^{n_1} \prod_{j=2}^N [(Y - a_j)^2 + b_j^2]^{n_j},\end{aligned}$$

donde  $D = \sum_{j=1}^N n_j$ . Estas expresiones son útiles en el cálculo de  $f_0$ :

**Caso  $D = 1$**  Se tiene

$$f_0 = \frac{d_0}{2}, \quad (3.4.13)$$

por tanto todos los centros son hamiltonianos.

**Caso  $D = 2$**  Pueden darse dos casos:

- Que  $h^{\text{hom}}$  tenga raíces complejas simples:  $h^{\text{hom}}(1, Y) = [(Y - a_1)^2 + 1][(Y - a_2)^2 + b_2^2]$ , en cuyo caso:

$$f_0 = \frac{[d_0[a_2^2 + b_2^2 + b_2(a_1^2 + 1)] + d_1(a_1 b_2 + a_2) + d_2(1 + b_2)]}{2b_2[(1 + b_2)^2 + (a_1 - a_2)^2]}. \quad (3.4.14)$$

Como  $1 + b_2 \neq 0$ , podemos asegurar que el sistema monodrómico (3.4.12), cuya función de Hamilton de la parte conservativa tiene cuatro raíces complejas simples, es un centro si, y sólo si,

$$d_2 = -\frac{d_0[a_2^2 + b_2^2 + b_2(a_1^2 + 1)] + d_1(a_1 b_2 + a_2)}{1 + b_2}.$$

- Que  $h^{\text{hom}}$  posea raíces complejas dobles:  $h^{\text{hom}}(1, Y) = [(Y - a_1)^2 + 1]^2$ , en cuyo caso:

$$f_0 = \frac{d_0(a_1^2+1)+d_1a_1+d_2}{4}. \quad (3.4.15)$$

Así, el sistema monodrómico (3.4.12), cuya función de Hamilton de la parte conservativa posee dos raíces complejas dobles, es un centro si, y sólo si,

$$d_2 = -d_0(a_1^2 + 1) - d_1a_1.$$

**Caso  $D = 3$**  Pueden presentarse tres situaciones:

- Que todas las raíces de  $h^{\text{hom}}$  sean simples:  $h^{\text{hom}}(1, Y) = [(Y - a_1)^2 + 1][(Y - a_2)^2 + b_2^2][(Y - a_3)^2 + b_3^2]$ , en cuyo caso:

$$f_0 = \frac{p_0d_0+p_1d_1+p_2d_2+p_3d_3+p_4d_4}{2b_2b_3[(b_2+b_3)^2+(a_2-a_3)^2][(a_1-a_2)^2+(1+b_2)^2][(a_1-a_3)^2+(1+b_3)^2]},$$

donde

$$\begin{aligned} p_0 &= b_2(a_3^2 + b_3^2)^2[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 + 1)^2] - 2[(1 + a_1^2)^2 a_2 b_2 + (a_2^2 + b_2^2)^2 a_1] a_3 b_3 \\ &\quad + b_3(a_3^2 + b_3^2)[(a_2^2 + b_2^2)^2 + 4b_2^2(1 + a_1^2) + b_2(4a_2^2 + 4b_2^2 + (1 + a_1^2)^2)] \\ &\quad + (1 + a_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + b_2(1 + a_1^2))b_3 + 2[a_2^2 + b_2^2 + b_2(1 + a_1^2)]^2 b_3^2, \\ p_1 &= 2b_3[a_2^2 + b_2(a_1^2 + 1) + b_2^2][b_3(a_2 + a_1 b_2) - a_3(a_1 a_2 - b_2)] \\ &\quad + b_3(a_3^2 + b_3^2)[b_2^2(a_2 + 2a_1) + b_2(a_1(a_1^2 + 1) + 2a_2) + a_3^3] \\ &\quad + b_2 a_3(a_3^2 + b_3^2)[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 + 1)^2] + (1 + a_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_2 + b_2 a_1) b_3, \\ p_2 &= 2(b_2 - a_1 a_2)(a_2 + b_2 a_1) a_3 b_3 + b_3(a_3^2 + b_3^2)[a_2^2 + b_2^2 + b_2(a_1^2 + 1)] \\ &\quad + (1 + a_1^2)(b_2 + 1)(a_2^2 + b_2^2) b_3 + b_2[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 + 1)^2] a_3^2 \\ &\quad + [b_2(b_2^2 + (a_2 + a_1)^2 + 1) + 2a_2^2 + 2b_2^2(a_1^2 + 1)] b_3^2, \\ p_3 &= +[b_2 a_1(b_2^2 + a_2^2 + 2b_2) + a_2(a_1^2 + 2b_2 + 1)] b_3 + b_3(a_3^2 + b_3^2)(a_2 + b_2 a_1) \\ &\quad + 2(b_2 + 1) b_3 [b_3(a_2 + b_2 a_1) + a_3(b_2 - a_1 a_2)] + b_2 a_3 [(a_2 - a_1)^2 + (b_2 + 1)^2], \\ p_4 &= b_2[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 + 1)^2] + b_3^3(b_2 + 1) \\ &\quad + [(a_3 - a_1)^2 + b_2(a_3 - a_2)^2 + b_2^3 + (2b_2 + 1)^2] b_3 + 2(b_2 + 1)^2 b_3^2. \end{aligned}$$

Como  $p_4 > 0$ , el sistema monodrómico (3.4.12), cuya función de Hamilton de la parte conservativa tiene seis raíces complejas simples,

es un centro si, y sólo si,

$$d_4 = -\frac{p_0 d_0 + p_1 d_1 + p_2 d_2 + p_3 d_3}{p_4}.$$

- Que  $h^{\text{hom}}$  posea una raíz compleja doble y otra simple:  $h^{\text{hom}}(1, Y) = [(Y - a_1)^2 + 1]^2 [(Y - a_2)^2 + b_2^2]$ . Entonces:

$$f_0 = \frac{p_0 d_0 + p_1 d_1 + p_2 d_2 + p_3 d_3 + p_4 d_4}{4b_2[(a_2 - a_1)^2 + (1 + b_2)^2]^2}, \quad (3.4.16)$$

donde

$$\begin{aligned} p_0 &= 2(a_2^2 + b_2^2)^2 + b_2(a_1^2 + 1)^2(a_1^2 - 2a_1a_2 + 4b_2 + 1) \\ &\quad + b_2(a_2^2 + b_2^2)(a_1^2 + 5)(a_1^2 + 1), \\ p_1 &= 2a_2[b_2(1 - a_1^4) + b_2^2 + a_2^2] + a_1b_2(a_2^2 + b_2^2)(3 + a_1^2) \\ &\quad + a_1(a_1^2 + 1)^2b_2 + 4a_1(a_1^2 + 1)b_2^2, \\ p_2 &= 2a_2^2 - 2a_1(a_1^2 - 1)a_2b_2 + b_2(a_1^2 + 1)(a_2^2 + b_2^2 + a_1^2 + 1) \\ &\quad + 2(2a_1^2 + 1)b_2^2, \\ p_3 &= b_2[2a_2 + a_1(3 + a_1^2 + (a_2 - a_1)^2 + b_2^2)] + 2a_2 + 4a_1b_2^2, \\ p_4 &= 2 + b_2[(a_2 - a_1)^2 + b_2^2 + 5] + 4b_2^2. \end{aligned}$$

Como  $p_4 > 0$ , el sistema monodrómico (3.4.12), cuya función de Hamilton de la parte conservativa tiene dos raíces complejas simples y dos dobles, es un centro si, y sólo si,

$$d_4 = -\frac{p_0 d_0 + p_1 d_1 + p_2 d_2 + p_3 d_3}{p_4}.$$

- Que  $h^{\text{hom}}$  posea raíces complejas triples:  $h^{\text{hom}}(1, Y) = [(Y - a_1)^2 + 1]^3$ . Entonces:

$$f_0 = \frac{4a_1(3 + a_1^2)d_0 + 3(1 + a_1^2)d_1 + 2a_1d_2 + d_3}{16}. \quad (3.4.17)$$

Por tanto, el sistema monodrómico (3.4.12), cuya función de Hamilton de la parte conservativa tiene dos raíces complejas triples, es un centro si, y sólo si,

$$d_3 = -4a_1(3 + a_1^2)d_0 - 3(1 + a_1^2)d_1 - 2a_1d_2.$$

### 3.5. Integrabilidad polinomial

Diremos que una función no constante  $H$  es una integral primera de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  en un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , si  $H$ , no constante en  $U$ , es constante sobre cada curva solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Claramente si  $H \in \mathcal{C}^1(U)$  entonces  $\nabla H \cdot \mathbf{F} \equiv 0$ . En el caso de que exista una integral primera del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , diremos que el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  es integrable. En este caso y por brevedad también diremos que  $\mathbf{F}$  es integrable y que  $H$  es una integral primera de  $\mathbf{F}$ . Diremos que  $\mathbf{F}$  es integrable analíticamente, formalmente, polinomialmente o de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , si existe una integral primera  $H$  de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  analítica, formal, polinomial o de clase  $\mathcal{C}^\infty$  respectivamente. En lo que sigue supondremos al menos que  $H \in \mathcal{C}^1(U)$ .

Para que un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x}) + \dots$  sea integrable, es preciso que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$  lo sea. Es decir, la integrabilidad del primer término cuasihomogéneo de un campo perturbado es condición necesaria para la integrabilidad del campo perturbado. Por tanto, un primer paso en el problema de la integrabilidad analítica de un campo es el análisis de la integrabilidad analítica de su primer término.

El siguiente lema asegura que, si un sistema con un sólo término cuasihomogéneo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$  posee una integral primera analítica o formal entonces cada término cuasihomogéneo de dicha integral primera es una integral primera polinomial. Es decir la integrabilidad analítica de estos campos equivale a la integrabilidad polinomial.

**Lema 3.5.98** *Sea  $H = \sum_{i=m}^{\infty} H_i$  donde  $H_i \in \mathcal{P}_i^t$  entonces  $H$  es una integral primera formal del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$  con  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$  si, y sólo si, para todo  $i \geq m$ ,  $H_i$  es una integral primera polinomial.*

*Demostración:* La condición suficiente es trivial. Probemos la condición necesaria. Si  $H$  es una integral primera, entonces

$$\nabla H \cdot \mathbf{F}_r = \sum_{i=m}^{\infty} \nabla H_i \cdot \mathbf{F}_r \equiv 0.$$

Como para cada  $i \geq m$ ,  $\nabla H_i \cdot \mathbf{F}_r \in \mathcal{P}_{i+r}^t$ , comparando los términos cuasihomogéneos de cada miembro de la anterior igualdad grado a grado, se llega a

que  $\nabla H_i \cdot \mathbf{F}_r \equiv 0$ , para todo  $i \geq m$ . ■

En primer lugar nos planteamos cuándo un sistema con un sólo término cuasihomogéneo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x}) = (P(x, y), Q(x, y))^T$  posee una integral primera polinomial.

Consideraremos que  $\mathbf{F}_r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  ya que en otro caso el teorema de la caja de flujo garantiza la existencia de una integral primera analítica en un entorno del origen. También supondremos que las componentes de  $\mathbf{F}_r$  son coprimas, no tienen factores comunes. En caso contrario, si existe  $f \in \mathcal{P}_{r-s}^t$  tal que  $\mathbf{F}_r = f\mathbf{F}_s$  entonces  $\mathbf{F}_r$  es integrable si, y sólo si, lo es  $\mathbf{F}_s$ . Dos casos particulares se tienen cuando  $P \equiv 0$  o  $Q \equiv 0$ , ya que  $\mathbf{F}_r(x, y) = Q(x, y)(0, 1)^T$ ,  $\mathbf{F}_r(x, y) = P(x, y)(1, 0)^T$  respectivamente y  $\mathbf{F}_r$  en ambos casos es integrable ya que  $y, x$  respectivamente son integrales primeras. Un campo vectorial con ambas componentes no idénticamente nulas y sin factores comunes lo llamaremos *irreducible*, en caso contrario lo llamaremos *reducible*.

Consideremos la descomposición del campo cuasihomogéneo en sus partes conservativa y disipativa:  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu\mathbf{D}_0$  con  $\mu \in \mathcal{P}_r^t$  y  $h \in \mathcal{P}_{r+|t|}^t$ . Sabemos que si  $\mu \equiv 0$  entonces el campo es hamiltoniano y, por lo tanto,  $h$  es una integral primera polinomial. Si  $h$  es constante, el campo  $\mu\mathbf{D}_0$  es un campo radial, (véase apartado **b** de la Proposición 3.4.90), y por tanto no posee integral primera.

En resumen, las hipótesis sobre el campo  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu\mathbf{D}_0$  serán:  $\mathbf{F}_r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{F}_r$  irreducible,  $\mu \neq 0$ ,  $h \neq$  constante.

Observemos que el sistema (3.1.1) siempre posee una integral primera: Usando el Lema 1.3.12 obtenemos  $[\mathbf{F}_r, \mathbf{D}_0] = r\mathbf{F}_r$ . Por tanto,  $\frac{1}{r+|t|}\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{F}_r = h$  es un factor integrante inverso de (3.1.1), (véase Olver [55]). Además,  $H(x, y) = f(x) + \int \frac{P(x, y)}{h(x, y)} dy$ , donde  $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{Q(x, y)}{h(x, y)}$  es una integral primera de (3.1.1). En general,  $H$  no está definida en el origen y por tanto no es una integral primera analítica ni formal en el origen.

El siguiente lema aporta información sobre la forma y el grado de la integral primera cuasihomogénea del campo cuasihomogéneo  $\mathbf{F}_r$ .

**Lema 3.5.99** *El sistema (3.1.1) posee una integral primera polinomial si, y sólo si, existe  $H \in \mathcal{P}_{r+s+|t|}^t$  y  $f \in \mathcal{P}_s^t$  con  $s > 0$  tal que  $f\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_H$ . Además  $H = \frac{r+|t|}{r+s+|t|}fh$ .*

*Demostración:*

**Condición necesaria.** Sea  $H \in \mathcal{P}_i^t$  una integral primera de  $\mathbf{F}_r = (P, Q)^T$ . Entonces,  $\nabla H \cdot \mathbf{F}_r = \frac{\partial H}{\partial x}P + \frac{\partial H}{\partial y}Q = 0$ . Como ninguna de las componentes de  $\mathbf{F}_r$  es nula, podemos escribir  $-\frac{\frac{\partial H}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial x}} = \frac{P}{Q}$  donde  $P \in \mathcal{P}_{r+t_1}^t$ ,  $Q \in \mathcal{P}_{r+t_2}^t$ ,  $\frac{\partial H}{\partial y} \in \mathcal{P}_{s+t_1}^t$  y  $\frac{\partial H}{\partial x} \in \mathcal{P}_{s+t_2}^t$ . Como  $P$  y  $Q$  no tienen factores comunes, la fracción  $\frac{P}{Q}$  es irreducible, por lo que debe existir  $f \in \mathcal{P}_s^t$ ,  $s > 0$  tal que  $-\frac{\partial H}{\partial y} = fP$  y  $\frac{\partial H}{\partial x} = fQ$ . En consecuencia  $f\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_H$ . Por tanto  $i = r + s + |\mathbf{t}|$  y

$$(r + s + |\mathbf{t}|)H = \mathbf{D}_0 \wedge (f\mathbf{F}_r) = f\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{F}_r = f(r + |\mathbf{t}|)h.$$

**Condición suficiente.**  $H$  es una integral primera polinomial de  $\mathbf{F}_r$  puesto que  $0 \equiv \nabla H \cdot \mathbf{X}_H = \nabla H \cdot (f\mathbf{F}_r) = f\nabla H \cdot \mathbf{F}_r$ . ■

A continuación veremos la relación que existe entre las descomposiciones de dos campos proporcionales. Notemos que los factores de proporcionalidad del campo son factores de la función de Hamilton  $h$  de la parte conservativa.

**Lema 3.5.100** *Sea  $\mathbf{F}_r = f\mathbf{F}_s$  con  $r > s$ ,  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu\mathbf{D}_0$  y  $\mathbf{F}_s = \mathbf{X}_{g_{s+|\mathbf{t}|}} + \nu_s\mathbf{D}_0$ . Entonces:*

$$\begin{aligned} h &= \frac{s+|\mathbf{t}|}{r+|\mathbf{t}|}fg_{s+|\mathbf{t}|}, \\ \mu &= f\nu_s + \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}\nabla f \cdot \mathbf{X}_{g_{s+|\mathbf{t}|}}. \end{aligned}$$

*Demostración:* Es un simple ejercicio:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{F}_r = \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}f\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{F}_s = \frac{s+|\mathbf{t}|}{r+|\mathbf{t}|}fg_{s+|\mathbf{t}|}, \\ \mu &= \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}\operatorname{div}(\mathbf{F}_r) = \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}f\operatorname{div}(\mathbf{F}_s) + \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}\nabla f \cdot \mathbf{F}_s \\ &= \frac{s+|\mathbf{t}|}{r+|\mathbf{t}|}f\nu_s + \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}\nabla f \cdot \mathbf{X}_{g_{s+|\mathbf{t}|}} + \frac{r-s}{r+|\mathbf{t}|}f\nu_s \\ &= f\nu_s + \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}\nabla f \cdot \mathbf{X}_{g_{s+|\mathbf{t}|}}. \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado nos relaciona la existencia entre una integral primera del sistema (3.1.1) y los polinomios cuasihomogéneos  $h$  y  $\mu$  asociados a  $\mathbf{F}_r$ .

**Teorema 3.5.101** *Consideremos el sistema plano (3.1.1) con  $\mathbf{F}_r$  irreducible, y  $h \neq \text{const}$ . Entonces, el sistema (3.1.1) posee una integral primera polinomial si, y sólo si,  $\mu \equiv 0$  o bien  $h = \prod_{j=1}^k f_j$  donde  $f_j \in \mathcal{P}_{s_j}^{\mathbf{t}}$  son factores irreducibles sobre  $\mathbb{K}[x, y]$ , (donde  $\mathbb{K}$  es  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ),  $k \geq 2$  y existen  $k$  números enteros no negativos,  $n_1, \dots, n_k$ , no todos nulos, tales que*

$$\mu = -\frac{1}{\sum_{j=1}^k (n_j+1)s_j} \sum_{j=1}^k \sum_{l=j+1}^k (n_j - n_l) \frac{h}{f_l f_j} \nabla f_j \cdot \mathbf{X}_{f_l}. \quad (3.5.18)$$

Además, en ese caso,  $\prod_{j=1}^k f_j^{n_j+1}$  es una integral primera polinomial de (3.1.1).

*Demostración:* Si  $\mu \equiv 0$ , el sistema (3.1.1) es hamiltoniano y  $h$  es una integral primera polinomial.

Supongamos que  $\mu \neq 0$  y  $\mathbf{F}_r$  posee una integral primera polinomial:  $H \in \mathcal{P}_{M_0}^{\mathbf{t}}$ . Por el Lema 3.5.99, sabemos que existe  $\tilde{f} \in \mathcal{P}_{M_0-r-|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$  tal que

$$\tilde{f} \mathbf{F}_r = \mathbf{X}_H. \quad (3.5.19)$$

Ésto se cumple si, y sólo si,  $\text{div}(\tilde{f} \mathbf{F}_r) = 0$ . Por otra parte

$$\text{div}(\tilde{f} \mathbf{F}_r) = \nabla \tilde{f} \cdot \mathbf{F}_r + \tilde{f} \text{div}(\mathbf{F}_r) = \nabla \tilde{f} \cdot \mathbf{X}_h + (M_0 - r - |\mathbf{t}|) \mu \tilde{f} + (r + |\mathbf{t}|) \mu \tilde{f}.$$

Así,  $\mathbf{F}_r$  es integrable si, y sólo si, existe  $\tilde{f} \in \mathcal{P}_{M_0-r-|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$  tal que

$$\nabla \tilde{f} \cdot \mathbf{X}_h = -M_0 \mu \tilde{f}. \quad (3.5.20)$$

De (3.5.20) deducimos que  $\tilde{f}(x, y) = 0$  es una curva invariante polinomial de  $\mathbf{X}_h$  que pasa por el origen. Así, si  $f_1, f_2, \dots, f_k$  son todos los factores irreducibles en  $\mathbb{K}[x, y]$  de  $h$ :  $h = \prod_{j=1}^k f_j^{m_j}$ , siendo  $f_j \in \mathcal{P}_{s_j}^{\mathbf{t}}$ ,  $m_j$  enteros positivos con  $\sum_{j=1}^k m_j s_j = r + |\mathbf{t}|$ , entonces  $\tilde{f}$  tiene la expresión

$$\tilde{f} = \prod_{j=1}^k f_j^{n_j}, \quad n_j \in \mathbb{N}_0; j = 1, \dots, k; \quad \sum_{j=1}^k n_j > 0. \quad (3.5.21)$$

Puesto que  $\tilde{f}$  es un polinomio cuasihomogéneo real, se tiene que  $n_i = n_j$  si  $f_i = \bar{f}_j$ . Notemos que  $\text{grad}(\tilde{f}) = M_0 - r - |\mathbf{t}| = \sum_{j=1}^k s_j n_j$ .



Así, el primer miembro de la igualdad (3.5.20) resulta:

$$\begin{aligned}\nabla \tilde{f} \cdot \mathbf{X}_h &= \nabla \left( \prod_{j=1}^k f_j^{n_j} \right) \cdot \mathbf{X}_h = \sum_{j=1}^k \frac{n_j \prod_{j=1}^k f_j^{n_j}}{f_j} \nabla f_j \cdot \mathbf{X}_h \\ &= \left( \prod_{j=1}^k f_j^{n_j} \right) \sum_{j=1}^k n_j \frac{\nabla f_j \cdot \mathbf{X}_h}{f_j} = \tilde{f} \sum_{j=1}^k n_j \frac{\nabla f_j \cdot \mathbf{X}_h}{f_j}.\end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.5.20), el sistema (3.1.1) tiene una integral primera polinomial si, y sólo si,

$$\mu = - \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{r+|\mathbf{t}|+\sum_{j=1}^k n_j s_j} \frac{\nabla f_j \cdot \mathbf{X}_h}{f_j}. \quad (3.5.22)$$

Probemos ahora que  $h$  tiene al menos dos factores irreducibles simples sobre  $\mathbb{K}[x, y]$ . Usaremos reducción al absurdo.

Supongamos que  $h$  fuera de la forma  $h = f^m$  con  $m \geq 1$ . Imponiendo (3.5.22), se tendría  $\mu \equiv 0$ . Así llegamos a una contradicción.

Por otra parte, si  $h = \prod_{l=1}^k f_l^{m_l}$ , con algún  $m_l > 1$ ,  $1 \leq l \leq k$ , se tendría:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_h &= \mathbf{X}_{\prod_{l=1}^k f_l^{m_l}} = \sum_{l=1}^k \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k f_j^{m_j} \right) \mathbf{X}_{f_l^{m_l}} = \sum_{l=1}^k m_l f_l^{m_l-1} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k f_j^{m_j} \right) \mathbf{X}_{f_l} \\ &= \sum_{l=1}^k m_l \frac{h}{f_l} \mathbf{X}_{f_l} = \left( \prod_{j=1}^k f_j^{m_j-1} \right) \sum_{l=1}^k m_l \frac{\prod_{j=1}^k f_j}{f_l} \mathbf{X}_{f_l},\end{aligned}$$

y para cualquier  $j = 1, \dots, k$  se tendría:

$$\nabla f_j \cdot \mathbf{X}_h = \left( \prod_{j=1}^k f_j^{m_j-1} \right) \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k m_l \frac{\prod_{j=1}^k f_j}{f_l} \nabla f_j \cdot \mathbf{X}_{f_l}.$$

Así, por (3.5.22),  $f_l^{m_l-1}$  sería un factor de  $h$  y de  $\mu$  lo cual contradice que  $\mathbf{F}_r$  sea irreducible.

Por lo tanto,  $h = \prod_{j=1}^k f_j$  con  $k \geq 2$ , y en tal caso la igualdad (3.5.22) queda:

$$\mu = - \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k \frac{n_j}{\sum_{j=1}^k (n_j+1)s_j} \frac{\prod_{j=1}^k f_j}{f_l f_j} \nabla f_j \cdot \mathbf{X}_{f_l}$$

$$= -\frac{1}{\sum_{j=1}^k (n_j+1)s_j} \sum_{j=1}^k \sum_{l=j+1}^k (n_j - n_l) \frac{h}{f_l f_j} \nabla f_j \cdot \mathbf{X}_{f_l}.$$

Por último, si  $H \in \mathcal{P}_{M_0}^t$  es una integral primera polinomial de (3.1.1), se llega a la ecuación (3.5.19). Utilizando esta ecuación y el Lema de Euler para polinomios cuasihomogéneos obtenemos:

$$M_0 H = \mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{X}_H = \mathbf{D}_0 \wedge (\tilde{f} \mathbf{F}_r) = \tilde{f} \mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{F}_r = (r + |\mathbf{t}|) \tilde{f} h,$$

de donde obtenemos el resultado utilizando la expresión de  $\tilde{f}$  dado en (3.5.21).

■

**Nota:** En la demostración hemos probado que si  $f_i, f_j$  son factores irreducibles de  $h$  con  $f_i = \bar{f}_j$  entonces  $n_i = n_j$ .

**Corolario 3.5.102 (Condición necesaria de integrabilidad polinomial)**

Consideremos el sistema plano (3.1.1) con  $\mathbf{F}_r$  irreducible,  $\mu \neq 0$  y  $h \neq \text{const}$ . Si el sistema (3.1.1) posee una integral primera polinomial, entonces la descomposición de  $h$  en factores irreducibles sobre  $\mathbb{C}[x, y]$  es

$$h(x, y) = cx^{\delta_x} y^{\delta_y} \prod_{i=1}^m (y^{t_1} - \lambda_i x^{t_2}), \quad (3.5.23)$$

con  $r + |\mathbf{t}| = t_1 \delta_x + t_2 \delta_y + t_1 t_2 m$ , donde  $c \neq 0$ ,  $\delta_x, \delta_y \in \{0, 1\}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  son números complejos distintos no nulos y  $\delta_x + \delta_y + m \geq 2$  (si  $\delta_x = \delta_y = 0$  y  $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, m$  entonces  $m \geq 4$ ). Si  $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  para algún  $i = 1, \dots, m$ , entonces existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $j \neq i$  tal que  $\lambda_j = \bar{\lambda}_i$ .

En lo que sigue, supondremos que se tiene más de un factor y todos los factores son simples. Concretamente, utilizando (2.3.6), se tiene:

**Lema 3.5.103** Sea  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$  y  $h$  definido en (3.5.23). Entonces:

$$-\delta_x \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(X, 1), 0] + \delta_y \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] + \sum_{i=1}^k \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), \lambda_i] = 0,$$

$$\text{donde } \eta^{\text{hom}}(X, Y) = \frac{\mu^{\text{hom}}(X, Y)}{X^{\delta_x} Y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(X, Y)}.$$

*Demostración:* Utilizando el teorema de los residuos generalizado, se tiene:

$$\operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \infty] + \delta_y \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), 0] + \sum_{i=1}^k \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \lambda_i] = 0.$$

Basta probar que

$$\operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \infty] = -\delta_x \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(X, 1), 0].$$

**Caso**  $\delta_x = 0$ . Por el Lema 3.1.64, para la función racional  $\frac{\mu^{\operatorname{hom}}(1, Y)}{Y^{\delta_y} h^{\operatorname{hom}}(1, Y)}$ , se cumple que el grado del denominador menos el grado del numerador es igual a dos. Por lo tanto,  $\operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \infty] = 0$ , como se quería demostrar.

**Caso**  $\delta_x = 1$ . Por el Lema 3.1.64, para la función racional  $\frac{\mu^{\operatorname{hom}}(1, Y)}{Y^{\delta_y} h^{\operatorname{hom}}(1, Y)}$  se cumple que el grado del denominador menos el grado del numerador es igual a uno. Por lo tanto,  $\operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \infty] = -\lim_{Y \rightarrow \infty} (Y \eta^{\operatorname{hom}}(1, Y))$ .

Usando el Lema 3.1.65, como  $s_x = s_y = 0$  y  $m_j = 1$  para  $j = 1, \dots, m$ , se tiene que

$$\eta^{\operatorname{hom}}(X, Y) = \frac{\sum_{j=0}^{m-1+\delta_y} d_j X^{m-1+\delta_y-j} Y^j}{cXY^{\delta_y} \prod_{i=1}^m (Y - \lambda_i X)}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(X, 1), 0] &= \lim_{X \rightarrow 0} X \eta^{\operatorname{hom}}(X, 1) = \frac{d_{m-1+\delta_y}}{c} = \lim_{Y \rightarrow \infty} Y \eta^{\operatorname{hom}}(1, Y) \\ &= -\operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \infty]. \end{aligned}$$

■

A continuación, enunciamos un teorema análogo al Teorema 3.5.101, que simplifica la determinación de integrabilidad polinomial de un campo cuasihomogéneo plano. Además, estas condiciones son óptimas para determinar en una familia de campos planos cuasihomogéneos, aquellos que son integrables polinomialmente.

**Teorema 3.5.104** *Sea  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^{\mathbf{t}}$  irreducible y  $h$  dado en (3.5.23). Entonces: el sistema (3.1.1) posee integral primera polinomial si, y sólo si,  $\mu \equiv 0$  o bien existen  $n_x, n_y, n_i, i = 1, \dots, m$  enteros no negativos, no todos nulos, tales que*

$$\begin{cases} \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(X, 1), 0] = \frac{(n_x+1)(r+|\mathbf{t}|-M_0)}{t_2 M_0}, & \text{si } \delta_x = 1, \\ \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), 0] = -\frac{(n_y+1)(r+|\mathbf{t}|-M_0)}{t_1 M_0}, & \text{si } \delta_y = 1, \\ \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \lambda_i] = -\frac{(n_i+1)(r+|\mathbf{t}|-M_0)}{M_0}, & i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (3.5.24)$$

donde  $\eta^{\text{hom}}(X, Y) = \frac{\mu^{\text{hom}}(X, Y)}{X^{\delta_x} Y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(X, Y)}$  y  $M_0 = t_1(n_x + 1)\delta_x + t_2(n_y + 1)\delta_y + t_1 t_2 \sum_{j=1}^m (n_j + 1)$ .

Además, en este caso, una integral primera de grado  $M_0$  es

$$H = x^{(n_x+1)\delta_x} y^{(n_y+1)\delta_y} \prod_{i=1}^m (y^{t_1} - \lambda_i x^{t_2})^{n_i+1}.$$

*Demostración:* Comenzamos probando la condición necesaria.

Si  $\mu \equiv 0$ , el sistema es hamiltoniano y  $h$  es una integral primera polinomial. Si  $\mu \not\equiv 0$  y (3.1.1) tiene una integral primera polinomial, usando (3.5.23) y (3.5.18) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mu(x, y) = & \frac{-1}{M_0} \left[ (n_x - n_y) \delta_x \delta_y \nabla(x) \cdot \mathbf{X}_y \frac{h(x, y)}{x^{\delta_x} y^{\delta_y}} \right. \\ & + \sum_{j=1}^m (n_x - n_j) \delta_x \nabla(x) \mathbf{X}_{(y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})} \frac{h(x, y)}{x^{\delta_x} (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})} \\ & + \sum_{j=1}^m (n_y - n_j) \delta_y \nabla(y) \cdot \mathbf{X}_{(y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})} \frac{h(x, y)}{y^{\delta_y} (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})} \\ & \left. + \sum_{j=1}^m \sum_{l=j+1}^m (n_j - n_l) \nabla(y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2}) \mathbf{X}_{(y^{t_1} - \lambda_l x^{t_2})} \frac{h(x, y)}{(y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})(y^{t_1} - \lambda_l x^{t_2})} \right]. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\mu(x, y)}{h(x, y)} = & \frac{1}{M_0} \left[ (n_x - n_y) \delta_x \delta_y \frac{1}{x^{\delta_x} y^{\delta_y}} + \sum_{j=1}^m t_1 (n_x - n_j) \delta_x y^{t_1-1} \frac{1}{x^{\delta_x} (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})} \right. \\ & + \sum_{j=1}^m t_2 \lambda_j (n_y - n_j) \delta_y x^{t_2-1} \frac{1}{y^{\delta_y} (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})} \\ & \left. - \sum_{j=1}^m \sum_{l=j+1}^m t_1 t_2 (n_j - n_l) (\lambda_j - \lambda_l) x^{t_2-1} y^{t_1-1} \frac{1}{(y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})(y^{t_1} - \lambda_l x^{t_2})} \right], \end{aligned}$$

donde  $M_0 = (n_x + 1)\delta_x t_1 + (n_y + 1)\delta_y t_2 + \sum_{j=1}^m (n_j + 1)t_1 t_2$ .

Por otra parte, utilizando el Lema 3.1.65, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\mu(x, y)}{h(x, y)} &= \frac{x^{(t_2-1)(1-\delta_x)} y^{(t_1-1)(1-\delta_y)} \mu^{\text{hom}}(x^{t_2}, y^{t_1})}{x^{\delta_x} y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(x^{t_2}, y^{t_1})} = \frac{x^{t_2-1} y^{t_1-1} \mu^{\text{hom}}(x^{t_2}, y^{t_1})}{x^{t_2 \delta_x} y^{t_1 \delta_y} h^{\text{hom}}(x^{t_2}, y^{t_1})} \\ &= x^{t_2-1} y^{t_1-1} \eta^{\text{hom}}(X, Y). \end{aligned}$$

Así resulta:

$$\begin{aligned} \eta^{\text{hom}}(X, Y) = & \frac{1}{M_0} \left[ (n_x - n_y) \delta_x \delta_y \frac{1}{X^{\delta_x} Y^{\delta_y}} + \sum_{j=1}^m t_1 (n_x - n_j) \delta_x \frac{1}{X^{\delta_x} (Y - \lambda_j X)} \right. \\ & + \sum_{j=1}^m t_2 \lambda_j (n_y - n_j) \delta_y \frac{1}{Y^{\delta_y} (Y - \lambda_j X)} \\ & \left. - \sum_{j=1}^m \sum_{l=j+1}^m t_1 t_2 (n_j - n_l) (\lambda_j - \lambda_l) \frac{1}{(Y - \lambda_j X)(Y - \lambda_l X)} \right]. \end{aligned}$$

A continuación, consideramos los siguientes casos.

- Si  $\delta_x = 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(X, 1), 0] &= \lim_{X \rightarrow 0} X \eta^{\text{hom}}(X, 1) = \frac{(n_x - n_y) \delta_y + \sum_{j=1}^m t_1 (n_x - n_j)}{M_0} \\ &= \frac{t_1 [(n_x + 1) - (n_x + 1)] \delta_x + t_2 [(n_x + 1) - (n_y + 1)] \delta_y + t_1 t_2 \sum_{j=1}^m [(n_x + 1) - (n_j + 1)]}{t_2 M_0} \\ &= \frac{(n_x + 1)(r + |\mathbf{t}|) - M_0}{t_2 M_0}. \end{aligned}$$

- Análogamente, si  $\delta_y = 1$  tenemos

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] &= \lim_{Y \rightarrow 0} Y \eta^{\text{hom}}(1, Y) = \frac{(n_x - n_y) \delta_x - \sum_{j=1}^m t_2 (n_y - n_j)}{M_0} \\ &= \frac{-t_1 [(n_y + 1) - (n_x + 1)] \delta_x - t_2 [(n_y + 1) - (n_y + 1)] \delta_y - t_1 t_2 \sum_{j=1}^k [(n_y + 1) - (n_j + 1)]}{t_1 M_0} \\ &= -\frac{(n_y + 1)(r + |\mathbf{t}|) - M_0}{t_1 M_0}. \end{aligned}$$

- Por último, para cada  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), \lambda_i] &= \lim_{Y \rightarrow \lambda_i} (Y - \lambda_i) \eta^{\text{hom}}(1, Y) \\ &= \frac{t_1 (n_x - n_i) \delta_x + t_2 (n_y - n_i) \delta_y - \sum_{j=1}^m t_1 t_2 (n_i - n_j)}{M_0} \\ &= -\frac{t_1 [(n_i + 1) - (n_x + 1)] \delta_x + t_2 [(n_i + 1) - (n_y + 1)] \delta_y + t_1 t_2 \sum_{j=1}^m [(n_i + 1) - (n_j + 1)]}{M_0} \\ &= -\frac{(n_i + 1)[t_1 \delta_x + t_2 \delta_y + t_1 t_2 k] - M_0}{M_0} = -\frac{(n_i + 1)(r + |\mathbf{t}|) - M_0}{M_0}. \end{aligned}$$

Probemos ahora la condición suficiente. En primer lugar, probamos que si  $h$  es de la forma (3.5.23), las condiciones (3.5.24) lo determinan unívocamente:

Por el Lema 3.1.65, se tiene que

$$\mu(x, y) = x^{(t_2-1)(1-\delta_x)} y^{(t_1-1)(1-\delta_y)} \sum_{j=0}^{m-2+\delta_x+\delta_y} d_j x^{t_2(m-2+\delta_x+\delta_y-j)} y^{jt_1}.$$

Para determinar este polinomio, basta obtener el polinomio en una variable  $\mu^{\text{hom}}(1, Y) = \sum_{j=0}^{m-2+\delta_x+\delta_y} d_j Y^j$ , con  $Y = y^{t_1}$ . Para este propósito, necesitamos el valor de  $\mu^{\text{hom}}(1, Y)$  en  $m-1+\delta_x+\delta_y$  nodos distintos (ténganse en cuenta que una de las condiciones de (3.5.24), por el Lema 3.5.103, es consecuencia de las restantes):

$$\begin{aligned} \mu^{\text{hom}}(1, \lambda_i) &= \lim_{Y \rightarrow \lambda_i} \mu^{\text{hom}}(1, Y) = \lim_{Y \rightarrow \lambda_i} (Y - \lambda_i) \eta^{\text{hom}}(1, Y) \lim_{Y \rightarrow \lambda_i} \frac{Y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(1, Y)}{Y - \lambda_i} \\ &= \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), \lambda_i] \left. \frac{d(Y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(1, Y))}{dY} \right|_{Y=\lambda_i}, \text{ para } i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

y, si  $\delta_y = 1$ :

$$\begin{aligned} \mu^{\text{hom}}(1, 0) &= \lim_{Y \rightarrow 0} \mu^{\text{hom}}(1, Y) = \lim_{Y \rightarrow 0} Y \eta^{\text{hom}}(1, Y) \lim_{Y \rightarrow 0} \frac{Y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(1, Y)}{Y} \\ &= \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] h^{\text{hom}}(1, 0). \end{aligned}$$

En consecuencia, existe sólo un polinomio  $\mu^{\text{hom}}(1, Y)$  de grado  $m-1+\delta_x+\delta_y$  que cumpla las condiciones (3.5.24).

Dado  $h$ , consideremos que  $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}_r^t$  cumpla la igualdad (3.5.18). Por el teorema 3.5.101, se tiene que  $\tilde{\mathbf{F}}_r = \mathbf{X}_h + \tilde{\mu} \mathbf{D}_0$  es integrable polinomialmente. Por otra parte, su polinomio homogéneo asociado  $\tilde{\mu}^{\text{hom}}$  es de grado  $m-1+\delta_x+\delta_y$ . Como hemos probado en la condición necesaria, también cumple (3.5.24), y por lo tanto  $\tilde{\mu} = \mu$ . ■

### Notas:

- 1) Si  $\lambda_i = \bar{\lambda}_j$ , teniendo en cuenta que el residuo de  $\frac{\mu^{\text{hom}}(1, Y)}{Y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(1, Y)}$  en  $Y = \bar{\lambda}_j$ , conjugado de  $\lambda_i$ , es el conjugado del residuo para  $\lambda_i$ . Puesto que ambos residuos son reales, obtenemos  $n_i = n_j$ .
- 2) Por el Lema 3.5.103, obtenemos que una condición de las descritas en (3.5.24) es dependiente de las restantes.

3) Si el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$  es monodrómico e integrable, es centro. Por otra parte, utilizando el Teorema 3.5.104 y el Lema 3.5.103, sabemos que

$$\text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), \lambda_i] = -\frac{(r+|\mathbf{t}|)(n_i+1)-M_0}{M_0} \in \mathbb{Q}.$$

Por tanto, aplicando el Teorema 3.4.97, también obtenemos la condición de centro.

En la siguiente subsección exponemos los resultados obtenidos por algunos autores respecto a la relación que existe entre los exponentes de Kowalevskaya y la integrabilidad polinomial de un campo cuasihomogéneo, así como la expresión de la condición de integrabilidad obtenida en el Teorema 3.5.104 en términos de los exponentes de Kowalevskaya.

### 3.5.1. Integrabilidad y exponentes de Kowalevskaya

Esta subsección esta motivada por el trabajo de Llibre y Zhang en [46] donde analizan la integrabilidad polinomial en términos de los llamados exponentes de Kowalevskaya.

El interés para los sistemas cuasihomogéneos (3.1.1) se centra en la existencia de soluciones particulares de la forma  $(x(t), y(t))^T = (c_1 t^{-t_1}, c_2 t^{-t_2})^T$ , donde los coeficientes  $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  están dados por la ecuación vectorial

$$\mathbf{F}_r(\mathbf{c}) + \frac{1}{r} \mathbf{D}_0(\mathbf{c}) = 0. \quad (3.5.25)$$

A estas soluciones se les llama *balances* del sistema (3.1.1).

Para cada balance  $\mathbf{c}$ , se define la llamada matriz de Kowalevskaya

$$K(\mathbf{c}) = D \left( \mathbf{F}_r + \frac{1}{r} \mathbf{D}_0 \right) (\mathbf{c}).$$

Los autovalores de  $K(\mathbf{c})$  son llamados los *exponentes de Kowalevskaya* del balance  $\mathbf{c}$ . Sophia Kowalevskaya introdujo la matriz  $K$  para obtener las soluciones en serie de Laurent del movimiento de un cuerpo rígido. Puede demostrarse que siempre existe un exponente de Kowalevskaya igual a  $-1$ , cuyo autovector asociado es  $\frac{1}{r}(t_1 c_1, t_2 c_2)$  (véase Tsygvintsev [61] y Yoshida [66]).

Furta [30] y Goriely [37] probaron independientemente la existencia de una relación entre los exponentes de Kowalevskaya de sistemas polinomiales cuasihomogéneos de dimensión  $n$  y el grado de sus integrales primeras polinomiales cuasihomogéneas. Más tarde, Llibre & Zhang [46] proporcionan una nueva relación que mejora los resultados dados en Furta [30] y Goriely [37].

Hasta donde conocemos, sólo Llibre & Zhang [46] y Tsygvintsev [61] han caracterizado la integrabilidad de los sistemas planos cuadráticos utilizando sus exponentes de Kowalevskaya. Entre los resultados de Llibre & Zhang [46], para sistemas polinomiales cuasihomogéneos planos de grado uno, que generaliza al dado por Tsygvintsev [61] para sistemas planos homogéneos cuadráticos, se encuentra el siguiente:

**Teorema 3.5.105 (Llibre & Zhang [46])** *Consideramos el sistema (3.1.1) de grado  $r = 1$ , con  $\mathbf{F}_r$  irreducible. Entonces:*

**a)** *Si el sistema (3.1.1) tiene dos balances independientes con exponentes de Kowalevskaya  $(-1, \rho_1)$  y  $(-1, \rho_2)$ , el sistema (3.1.1) tiene una primera integral polinomial cuasihomogénea de grado  $m \in \mathbb{N}$  si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1} \leq 1, \quad m\rho_i^{-1} \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2.$$

**b)** *Si el sistema (3.1.1) tiene un único balance independiente con exponentes de Kowalevskaya  $(-1, \rho)$ ,  $\rho \neq 0$ , el sistema (3.1.1) tiene una integral primera polinomial cuasihomogénea de grado  $m \in \mathbb{N}$  si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\rho^{-1} \leq 1, \quad m\rho^{-1} \in \mathbb{N}.$$

**c)** *Si el sistema (3.1.1) no tiene balances o tiene infinitos balances independientes, entonces no tiene integral primera polinomial cuasihomogénea.*

Recientemente, Cairó & Llibre [?] han estudiado el caso de sistemas polinomiales cuasihomogéneos planos de grado dos.

A continuación, mostramos los resultados que hemos obtenido respecto de la relación que existe entre los exponentes de Kowalevskaya y la integrabilidad polinomial.



Comenzamos, en la siguiente proposición, calculando los balances del sistema (3.1.1).

**Proposición 3.5.106** *Si  $\mathbf{c}$  es un balance de (3.1.1), entonces  $h(\mathbf{c}) = 0$ .*

*Además, si  $\mathbf{F}_r$  es irreducible, se tiene:*

a) *Si  $x$  es factor de  $h$ , entonces  $r$  es múltiplo de  $t_2$  y existen  $\frac{r}{t_2}$  balances*

$$\mathbf{c} = (0, c_2) \text{ con } c_2^{r/t_2} = -\frac{t_2}{rQ(0,1)}.$$

b) *Si  $y$  es factor de  $h$ , entonces  $r$  es múltiplo de  $t_1$  y existen  $\frac{r}{t_1}$  balances*

$$\mathbf{c} = (c_1, 0) \text{ con } c_1^{r/t_1} = -\frac{t_1}{rP(1,0)}.$$

c) *Si  $y^{t_1} - \lambda x^{t_2}$  es un factor de  $h$ , entonces existen  $r$  balances  $\mathbf{c} = (u^{t_1}, u^{t_2} \lambda^{1/t_1})$*

$$\text{con } u^r = -\frac{t_1}{rP(1, \lambda^{1/t_1})}.$$

*Demostración:* Cada balance  $\mathbf{c}$  es una solución sobre  $\mathbb{C}[x, y]$  de la ecuación  $\mathbf{F}_r(\mathbf{c}) + \frac{1}{r}\mathbf{D}_0(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ . Por tanto,  $(r + |\mathbf{t}|)h(\mathbf{c}) = \mathbf{D}_0(\mathbf{c}) \wedge \mathbf{F}_r(\mathbf{c}) = \mathbf{D}_0(\mathbf{c}) \wedge [\mathbf{F}_r(\mathbf{c}) + \frac{1}{r}\mathbf{D}_0(\mathbf{c})] = 0$ . Así, todo balance es solución de un factor irreducible de  $h$  en el campo complejo.

Supongamos ahora que  $\mathbf{F}_r = (P, Q)^T$  es irreducible. También podemos suponer que  $r + |\mathbf{t}| \in \mathcal{I}$ , ya que en caso contrario por el apartado a) del Lema 2.3.26 sería  $h \equiv \text{const}$ . Así,  $r + |\mathbf{t}| = k_3 t_1 t_2 + k_2 t_2 + k_1 t_1$ , con  $0 \leq k_i < t_{3-i} - 1$  para  $i = 1, 2$ . Es fácil probar que  $k_1 = (t_2 - 1)\delta_1$  y  $k_2 = (t_1 - 1)\delta_2$  con  $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}$ , ya que en otro caso  $\mathbf{F}_r$  posee el factor común  $x$  o  $y$ . Hemos de hacer notar que si  $t_2 = 1$  suponemos  $\delta_1 = 0$  y si  $t_1 = 1$  entonces  $\delta_2 = 0$ . Así:

$$r = [k_3 - (1 - \delta_1) - (1 - \delta_2)]t_1 t_2 + (1 - \delta_2)(t_1 - 1)t_2 + (1 - \delta_1)(t_2 - 1)t_1,$$

con  $k_3 - (1 - \delta_1) \geq 0$  y  $k_3 - (1 - \delta_2) \geq 0$ , ya que de otra forma  $P$  o  $Q$  son nulos. Para justificar esta última afirmación consideremos, por ejemplo, que  $k_3 - (1 - \delta_1) < 0$ . Entonces  $0 \leq k_3 < 1 - \delta_1$ , así que  $k_3 = \delta_1 = 0$  y por tanto  $r + t_1 = -(1 - \delta_2)t_2$ , con lo que  $P$  sería nulo.

Por tanto, de la expresión de  $r$  y del Lemma 2.3.26 se tendría:

$$P(\mathbf{c}) = c_1^{\delta_1} c_2^{(t_1-1)(1-\delta_2)} P^{\text{hom}}(c_1^{t_2}, c_2^{t_1}), \quad Q(\mathbf{c}) = c_1^{(t_2-1)(1-\delta_1)} c_2^{\delta_2} Q^{\text{hom}}(c_1^{t_2}, c_2^{t_1}),$$

donde  $P^{\text{hom}}$  y  $Q^{\text{hom}}$  son polinomios homogéneos de grado  $k_3 - (1 - \delta_2)$  y  $k_3 - (1 - \delta_1)$  respectivamente.

Ahora, analizamos tres casos que se corresponden con cada uno de los posibles factores de  $h$ . Por la descomposición dada en (2.3.7), estos factores sólo pueden ser de tres tipos:  $x$ ,  $y$  o  $y^{t_1} - \lambda x^{t_2}$  con  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- Si  $x$  es factor de  $h(x, y) = t_1 x Q(x, y) - t_2 y P(x, y)$ , entonces  $x$  es factor de  $P$  ( $P(0, y) \equiv 0$ ). Observamos que  $Q(0, 1) \neq 0$ , pues de otra forma  $x$  sería factor común de ambas componentes de  $\mathbf{F}_r$ .

A continuación, calculamos el balance  $\mathbf{c} = (0, c_2)$  de (3.1.1). Como  $P(0, c_2) = 0$ , la primera ecuación de (3.5.25) para  $(0, c_2)$  se satisface. Por otra parte, vemos que  $(t_2 - 1)(1 - \delta_1) = 0$  ya que si  $\delta_1 = 0$  y  $t_2 > 1$ , sería  $x$  factor común de  $P$  y de  $Q$ . Con este resultado, la segunda ecuación de (3.5.25) resulta:

$$0 = c_2^{\delta_2} Q(0, 1) c_2^{(k_3 - 1 + \delta_1)t_1} + \frac{t_2 c_2}{r} = c_2 \left[ c_2^{t_1(k_3 + \delta_1 - 1) - 1 + \delta_2} Q(0, 1) + \frac{t_2}{r} \right].$$

Además,  $r = t_2[t_1(k_3 - 1 + \delta_1) - 1 + \delta_2]$  por lo que  $r$  es múltiplo de  $t_2$ , y por tanto  $c_2^{r/t_2} = -\frac{t_2}{rQ(0,1)}$ , con lo que deducimos el apartado **a**).

- Si  $y$  es un factor de  $h(x, y) = t_1 x Q(x, y) - t_2 y P(x, y)$ , entonces  $y$  es un factor de  $Q$  ( $Q(x, 0) \equiv 0$ ). Observemos  $P(1, 0) \neq 0$ , ya que en caso contrario  $y$  sería factor de ambas componentes de  $\mathbf{F}_r$ . Como  $Q(c_1, 0) = 0$ , la segunda ecuación de (3.5.25) para  $(c_1, 0)$  se satisface. Además,  $(t_1 - 1)(1 - \delta_2) = 0$ , ya que en otro caso,  $\delta_2 = 0$  y  $t_1 > 1$ , se tendría que  $y$  es factor común de ambas componentes de  $\mathbf{F}_r$ . Por tanto, la primera ecuación de (3.5.25) resulta:

$$0 = c_1^{\delta_1} P(1, 0) c_1^{(k_3 - 1 + \delta_2)t_2} + \frac{t_1 c_1}{r} = c_1 \left[ c_1^{t_2(k_3 - 1 + \delta_2) - 1 + \delta_1} P(1, 0) + \frac{t_1}{r} \right].$$

Además,  $r = t_1[t_2(k_3 - 1 + \delta_2) - 1 + \delta_1]$ , por lo que  $r$  es múltiplo de  $t_1$ , siendo  $c_1^{r/t_1} = -\frac{t_1}{rP(1,0)}$ . Así queda demostrado el apartado **b**).

- Si  $y^{t_1} - \lambda x^{t_2}$  es un factor de  $h$ , donde  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , entonces existe un balance de la forma  $\mathbf{c} = (c_1, c_2) = (u^{t_1}, u^{t_2} \lambda^{1/t_1})$  con  $u \neq 0$ , ya que  $h(u^{t_1}, u^{t_2} \lambda^{1/t_1}) = u^{r+|t|} h(1, \lambda^{1/t_1}) = 0$ .

La primera ecuación de (3.5.25) viene dada por:

$$0 = P(u^{t_1}, u^{t_2} \lambda^{1/t_1}) + \frac{t_1 u^{t_1}}{r} = u^{t_1} \left[ u^r P(1, \lambda^{1/t_1}) + \frac{t_1}{r} \right].$$

Observemos que  $P(1, \lambda^{1/t_1}) \neq 0$ , ya que en caso contrario, por ser  $0 = h(1, \lambda^{1/t_1}) = t_1 Q(1, \lambda^{1/t_1}) - t_2 \lambda^{1/t_1} P(1, \lambda^{1/t_1})$ , tendríamos  $Q(1, \lambda^{1/t_1}) = 0$  y entonces  $y^{t_1} - \lambda x^{t_2}$  sería factor común de ambas componentes de  $\mathbf{F}_r$ . De esta forma, se deduce que  $u^r = -\frac{t_1}{rP(1, \lambda^{1/t_1})}$ . La segunda ecuación de (3.5.25),  $Q(c_1, c_2) + \frac{t_2 c_2}{r} = 0$ , también se cumple ya que despejando  $Q$  en la ecuación  $(r + |\mathbf{t}|)h(x, y) = t_1 x Q(x, y) - t_2 y P(x, y)$  y sustituyendo en la segunda ecuación de (3.5.25), resulta:

$$t_1 c_1 \left[ Q(c_1, c_2) + \frac{t_2 c_2}{r} \right] = (r + |\mathbf{t}|)h(c_1, c_2) + t_2 c_2 \left[ P(c_1, c_2) + \frac{t_1 c_1}{r} \right] = 0.$$

Así demostramos el apartado **c**).

Falta probar que hay exactamente  $r$  balances. La primera componente del balance es:

$$\begin{aligned} c_1 &= u^{t_1} = \sqrt[r]{\frac{(-1)^{t_1} t_1^{t_1}}{r^{t_1} (P(1, \lambda^{1/t_1}))^{t_1}}}, \\ c_2 &= u^{t_2} \lambda^{1/t_1} = \lambda^{1/t_1} \sqrt[r]{\frac{(-1)^{t_2} t_1^{t_2}}{r^{t_2} (P(1, \lambda^{1/t_1}))^{t_2}}} = \sqrt[r]{\frac{(-1)^{t_2} t_1^{t_2} \lambda^{r/t_1}}{r^{t_2} \lambda^{(r+t_1)/t_1} (P(\lambda^{-1/t_2}, 1))^{t_2}}} \\ &= \sqrt[r]{\frac{(-1)^{t_2} t_1^{t_2}}{r^{t_2} \lambda (P(\lambda^{-1/t_2}, 1))^{t_2}}}. \end{aligned}$$

Puesto que  $(P(1, \lambda^{1/t_1}))^{t_1}$  y  $(P(\lambda^{-1/t_2}, 1))^{t_2}$  están unívocamente determinados por  $\lambda$ , se obtienen  $r$  balances. ■

En la siguiente proposición, obtenemos los exponentes de Kowalevskaya asociados a los balances de (3.1.1) a través de la función racional homogénea  $\eta^{\text{hom}}(X, Y) := \frac{\mu^{\text{hom}}(X, Y)}{X^{\delta_x} Y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(X, Y)}$  que, a su vez, se construye a partir de las funciones  $\mu$  y  $h$ .

**Proposición 3.5.107** *Sea  $\mathbf{F}_r$  irreducible. Entonces, los exponentes de Kowalevskaya de los balances asociados a un factor de  $h$  son iguales.*

*Además, si  $h(x, y) = x^{m_x} y^{m_y} \prod_{i=1}^m (y^{t_1} - \lambda_i x^{t_2})^{m_i}$ , con  $m_x = s_x t_2 + \delta_x$ ,  $m_y = s_y t_1 + \delta_y$ ,  $\delta_x, \delta_y \in \{0, 1\}$ ,  $s_x, s_y \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Entonces, se cumple:*

**a)**  $\rho_x = \frac{r+|\mathbf{t}|}{r} [1 + t_2 \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(X, 1), 0]]^{-1}$  si  $m_x = 1$ ; y  $\rho_x = 0$  si  $m_x > 1$ .

$$\text{b) } \rho_y = \frac{r+|\mathbf{t}|}{r} [1 - t_1 \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0]]^{-1} \text{ si } m_y = 1; \text{ y } \rho_y = 0 \text{ si } m_y > 1.$$

$$\text{c) } \rho_i = \frac{r+|\mathbf{t}|}{r} [1 - \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), \lambda_i]]^{-1} \text{ si } m_i = 1; \text{ y } \rho_i = 0 \text{ si } m_i > 1, \\ i = 1, \dots, m,$$

donde  $\eta^{\text{hom}}(X, Y) = \frac{\mu^{\text{hom}}(X, Y)}{X^{\delta_x} Y^{\delta_y} h^{\text{hom}}(X, Y)}$ ,  $h^{\text{hom}}(X, Y) = X^{s_x} Y^{s_y} \prod_{i=1}^m (Y - \lambda_i X)^{m_i}$  y  $\rho_x$ ,  $\rho_y$  y  $\rho_i$  representan los exponentes de Kowalevskaya asociados a los factores  $x$ ,  $y$  y  $y^{t_1} - \lambda_i x^{t_2}$ .

*Demostración:* Utilizando la descomposición de un campo en sus partes conservativa-disipativa, se tiene:

$$\mathbf{F}_r + \frac{1}{r} \mathbf{D}_0 = \mathbf{X}_h + \left[ \mu + \frac{1}{r} \right] \mathbf{D}_0.$$

La traza de su diferencial es

$$\begin{aligned} & [-h_{xy} + \mu_x t_1 x + \mu t_1 + \frac{1}{r} t_1 + h_{yx} + \mu_y t_2 y + \mu t_2 + \frac{1}{r} t_2] \\ &= [\nabla \mu \cdot \mathbf{D}_0 + \left( \mu + \frac{1}{r} \right) |\mathbf{t}|] = [r\mu + |\mathbf{t}| \mu + \frac{1}{r} |\mathbf{t}|] \\ &= (r + |\mathbf{t}|) \mu + \frac{|\mathbf{t}|}{r}. \end{aligned}$$

Así, para cada balance  $\mathbf{c}$ , si  $\rho(\mathbf{c})$  es el autovalor distinto de  $-1$  asociado al balance  $\mathbf{c}$ , se tiene que  $\rho(\mathbf{c}) - 1 = \text{tr}(K(\mathbf{c})) = (r + |\mathbf{t}|) \mu(\mathbf{c}) + \frac{|\mathbf{t}|}{r}$ , de donde obtenemos

$$\rho(\mathbf{c}) = (r + |\mathbf{t}|) \left[ \mu(\mathbf{c}) + \frac{1}{r} \right]. \quad (3.5.26)$$

Calculemos ahora los exponentes de Kowalevskaya asociados a los factores de  $h$ .

- Supongamos que  $x$  es un factor de  $h$ , esto es, existen balances de la forma  $(0, c_2)$ . De la descomposición (2.2.2) se tiene  $h_x(x, y) = Q(x, y) - t_2 y \mu(x, y)$ . Como  $\mu(0, c_2) = c_2^{r/t_2} \mu(0, 1)$  (ya que  $\mu$  es un polinomio cuasihomogéneo de grado  $r$  respecto al tipo  $\mathbf{t}$ ), aplicando (3.5.26) y la Proposición 3.5.106, obtenemos:

$$\begin{aligned} h_x(0, 1) &= Q(0, 1) - t_2 \mu(0, 1) = Q(0, 1) - \frac{t_2 \mu(0, c_2)}{c_2^{r/t_2}} \\ &= Q(0, 1) + r \mu(0, c_2) Q(0, 1) = r \left[ \mu(0, c_2) + \frac{1}{r} \right] Q(0, 1) \\ &= \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \rho_x Q(0, 1), \end{aligned}$$

con  $Q(0, 1) \neq 0$ . Por tanto, todos los balances  $(0, c_2)$  tienen los mismos autovalores. Más aún,  $\rho_x = 0$  si, y sólo sí,  $h_x(0, 1) = 0$ , esto es,  $m_x > 1$ . En caso contrario, aplicando el Lema 3.1.66, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_x} &= \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \frac{Q(0,1)}{h_x(0,1)} = \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \frac{h_x(0,1)+t_2\mu(0,1)}{h_x(0,1)} = \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ 1 + t_2 \operatorname{Res} \left[ \frac{\mu(x,1)}{h(x,1)}, 0 \right] \right] \\ &= \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ 1 + t_2 \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(X, 1), 0] \right]. \end{aligned}$$

- Razonando de forma análoga, supongamos que  $y$  es un factor de  $h$ , esto es, existen balances de la forma  $(c_1, 0)$ . De la descomposición (2.2.2), se obtiene  $h_y(x, y) = -P(x, y) + t_1 x \mu(x, y)$ . Como  $\mu(c_1, 0) = c_1^{r/t_1} \mu(1, 0)$  (ya que  $\mu$  es un polinomio cuasihomogéneo de grado  $r$  respecto al tipo  $\mathbf{t}$ ), aplicando (3.5.26) y la Proposición 3.5.106, obtenemos:

$$\begin{aligned} h_y(1, 0) &= -P(1, 0) + t_1 \mu(1, 0) = -P(1, 0) + \frac{t_1 \mu(c_1, 0)}{c_1^{r/t_1}} \\ &= -P(1, 0) - r \mu(c_1, 0) P(1, 0) = -r \left[ \mu(c_1, 0) + \frac{1}{r} \right] P(1, 0) \\ &= -\frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \rho_y P(1, 0), \end{aligned}$$

con  $P(1, 0) \neq 0$ . Por tanto, todos los balances  $(c_1, 0)$  tienen los mismos autovalores. Más aún,  $\rho_y = 0$  si, y sólo sí,  $h_y(1, 0) = 0$ , esto es,  $m_y > 1$ . En caso contrario, aplicando el Lema 3.1.66, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_y} &= -\frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \frac{P(1,0)}{h_y(1,0)} = \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \frac{h_y(1,0)-t_1\mu(1,0)}{h_y(1,0)} = \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ 1 - t_1 \operatorname{Res} \left[ \frac{\mu(1,y)}{h(1,y)}, 0 \right] \right] \\ &= \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ 1 - t_1 \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), 0] \right]. \end{aligned}$$

- Para finalizar, calculamos los exponentes  $\rho_i$  asociados al factor  $y^{t_1} - \lambda_i x^{t_2}$ , donde  $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . De la descomposición (2.2.2) se tiene  $h_y(x, y) = -P(x, y) + t_1 x \mu(x, y)$ . También se cumple  $\mu(c_1, c_2) = \mu(u^{t_1}, u^{t_2} \lambda_i^{1/t_1}) = u^r \mu(1, \lambda_i^{1/t_1})$ . Así, usando la Proposición 3.5.106, obtenemos:

$$\begin{aligned} h_y(1, \lambda_i^{1/t_1}) &= -P(1, \lambda_i^{1/t_1}) + t_1 \mu(1, \lambda_i^{1/t_1}) = -P(1, \lambda_i^{1/t_1}) + \frac{t_1 \mu(c_1, c_2)}{u^r} \\ &= -P(1, \lambda_i^{1/t_1}) - r \mu(c_1, c_2) P(1, \lambda_i^{1/t_1}) \\ &= -r \left[ \mu(c_1, c_2) + \frac{1}{r} \right] P(1, \lambda_i^{1/t_1}) = -\frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \rho_i P(1, \lambda_i^{1/t_1}), \end{aligned}$$

con  $P(1, \lambda_i^{1/t_1}) \neq 0$ . Por tanto, todos los balances  $(c_1, c_2)$  asociados al mismo factor tienen el mismo exponente de Kowalevskaya. Más aún,  $\rho_i = 0$  si, y sólo si,  $h_y(1, \lambda_i^{1/t_1}) = 0$ , esto es,  $m_i > 1$ . En caso contrario, aplicando el Lema 3.1.66, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_i} &= -\frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \frac{P(1, \lambda_i^{1/t_1})}{h_y(1, \lambda_i^{1/t_1})} = \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \frac{h_y(1, \lambda_i^{1/t_1}) - t_1 \mu(1, \lambda_i^{1/t_1})}{h_y(1, \lambda_i^{1/t_1})} = \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ 1 - t_1 \operatorname{Res} \left[ \frac{\mu(1, y)}{h(1, y)}, \lambda_i^{1/t_1} \right] \right] \\ &= \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ 1 - \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \lambda_i] \right]. \end{aligned}$$

■

A continuación, encontramos una relación entre los inversos de los exponentes de Kowalevskaya del sistema (3.1.1), cuya parte conservativa está determinada por  $h$  dada en (3.5.23).

**Lema 3.5.108** *Sea  $\mathbf{F}_r$  irreducible y  $h$  dado en (3.5.23). Entonces*

$$\frac{t_1 \delta_x}{\rho_x} + \frac{t_2 \delta_y}{\rho_y} + \sum_{i=1}^m \frac{t_1 t_2}{\rho_i} = r.$$

*Demostración:* Utilizando en primer lugar el Lema 3.5.103 y posteriormente  $r + |\mathbf{t}| = \operatorname{grad}(h) = t_1 \delta_x + t_2 \delta_y + m t_1 t_2$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} r &= r - \frac{r t_1 t_2}{r+|\mathbf{t}|} \left[ -\delta_x \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(X, 1), 0] + \delta_y \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), 0] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \lambda_i] \right] \\ &= \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ t_1 \delta_x + t_2 \delta_y + m t_1 t_2 \right] - \frac{r t_1 t_2}{r+|\mathbf{t}|} \left[ -\delta_x \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(X, 1), 0] \right. \\ &\quad \left. + \delta_y \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), 0] + \sum_{i=1}^m \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \lambda_i] \right] \\ &= \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ t_1 \delta_x + t_2 t_1 \delta_x \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(X, 1), 0] + t_2 \delta_y - t_1 t_2 \delta_y \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), 0] \right. \\ &\quad \left. + t_1 t_2 \sum_{i=1}^m (1 - \operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), \lambda_i]) \right] \\ &= \frac{t_1 \delta_x}{\rho_x} + \frac{t_2 \delta_y}{\rho_y} + \sum_{i=1}^m \frac{t_1 t_2}{\rho_i}. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene de la Proposición 3.5.107. ■

En el siguiente teorema mostramos cómo son los exponentes de Kowalevskaya cuando el sistema (3.1.1) tiene una integral primera polinomial cuasihomogénea. Este resultado generaliza a los obtenidos por Tsygvintsev [61] y Llibre [46]. Llamamos la atención de que nuestros resultados generalizan a cualquier grado los obtenidos por Llibre [46] en el Teorema 3.5.105 para  $r = 1$ .

**Teorema 3.5.109** *Sea  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$  irreducible. El sistema (3.1.1) posee integral primera polinomial de grado  $M_0$  si, y sólo si,  $h$  tiene la forma dada por (3.5.23) y existen  $n_x, n_y, n_i, i = 1, \dots, m$  enteros no negativos, no todos nulos, que cumplen*

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{r(n_x+1)}{M_0}, \quad \frac{1}{\rho_y} = \frac{r(n_y+1)}{M_0}, \quad \frac{1}{\rho_i} = \frac{r(n_i+1)}{M_0}, \quad i = 1, \dots, m,$$

donde  $\rho_x, \rho_y$  y  $\rho_i$  son los exponentes de Kowalevskaya distintos de  $-1$  asociados a los factores de  $h, x, y, y^{t_1} - \lambda_i x^{t_2}$  respectivamente, y  $M_0 = t_1(n_x + 1)\delta_x + t_2(n_y + 1)\delta_y + t_1 t_2 \sum_{j=1}^m (n_j + 1)$ .

*Demostración:* La demostración se obtiene como consecuencia del Teorema 3.5.104 y de la Proposición 3.5.107. Del anterior Teorema obtenemos:  $M_0 = r + |\mathbf{t}| + n_x \delta_x t_1 + n_y \delta_y t_2 + \sum_{j=1}^k n_j t_1 t_2$ . Además:

- Si  $\delta_x = 1$ , entonces  $\frac{1}{\rho_x} = \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ 1 + t_2 \frac{(r+|\mathbf{t}|)(n_x+1)-M_0}{t_2 M_0} \right] = \frac{r(n_x+1)}{M_0}$ .
- Si  $\delta_y = 1$ , entonces  $\frac{1}{\rho_y} = \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ 1 + t_1 \frac{(r+|\mathbf{t}|)(n_y+1)-M_0}{t_1 M_0} \right] = \frac{r(n_y+1)}{M_0}$ .
- Por último,  $\frac{1}{\rho_i} = \frac{r}{r+|\mathbf{t}|} \left[ 1 + \frac{(r+|\mathbf{t}|)(n_i+1)-M_0}{M_0} \right] = \frac{r(n_i+1)}{M_0}$ .

■

### 3.6. Ejemplos

En esta sección, caracterizamos la integrabilidad polinomial de algunos sistemas cuasihomogéneos  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^t$ , irreducible. Comenzamos estudiando los sistemas cuasihomogéneos nilpotentes, posteriormente consideramos sistemas cuasihomogéneos nilpotentes generalizados para terminar caracterizando los campos cuasihomogéneos integrables polinomialmente de grado cero, uno y dos.

**Caso nilpotente, tipo  $(1, n)$ ,  $n \geq 2$ .** Consideremos el campo con sólo un término cuasihomogéneo de grado  $n - 1$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{n-1} = \begin{pmatrix} y + ax^n \\ b_0x^{n-1}y + b_1x^{2n-1} \end{pmatrix}, \quad (3.6.27)$$

con  $a, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ . En este caso, tenemos:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= -\frac{1}{2} \left[ y^2 - \frac{b_0-na}{n} x^n y - \frac{b_1}{n} x^{2n} \right], \\ \mu(x, y) &= \frac{b_0+na}{2n} x^{n-1}. \end{aligned}$$

Si  $b_0 + na = 0$ , el campo es hamiltoniano y por tanto, integrable polinomialmente. En el caso  $b_0 + na \neq 0$ , discutiremos la integrabilidad según el signo de  $\Delta = (b_0 - na)^2 + 4nb_1$ :

- Si  $\Delta < 0$ , el campo es monodrómico siendo  $h_{2n}(x, y) = -\frac{1}{2}(y - \lambda x^n)(y - \bar{\lambda}x^n)$ , con  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Como posee un único factor irreducible sobre  $\mathbb{R}[x, y]$ , por el Corolario 3.5.102, el sistema no es integrable.
- Si  $\Delta = 0$ , entonces  $h(x, y) = -n(y - \lambda x^n)^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Como los factores son múltiples, por el Corolario 3.5.102,  $\mathbf{F}_{n-1}$  es no integrable.
- Si  $\Delta > 0$ , entonces  $h(x, y) = -\frac{1}{2}(y - \lambda_1 x^n)(y - \lambda_2 x^n)$ , donde  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 = \frac{(b_0-na)+\sqrt{\Delta}}{2n}$ ,  $\lambda_2 = \frac{(b_0-na)-\sqrt{\Delta}}{2n}$ , son ambos reales. Aplicando los cambios de variables descritos en el Lema 3.2.67 y posteriormente aplicando un escalado en el tiempo, podemos reducir el sistema a forma canónica, en la que  $h(x, y) = y(y - x^n)$  y  $\mu(x, y) = dx^{n-1}$ . Usando ahora el Teorema 3.5.104, el sistema (3.6.27) es integrable si, y sólo si, existen  $n_1, n_2$  enteros no negativos, no ambos nulos, tales que:

$$\text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 1] = d = -\frac{2n(n_2+1)-M_0}{M_0}$$

con  $M_0 = n(n_1 + n_2 + 2)$ .

**Proposición 3.6.110** *El sistema (3.6.27) es integrable polinomialmente si  $b_0 + na = 0$  o bien si  $b_0 + na \neq 0$ ,  $\Delta = (b_0 - na)^2 + 4nb_1 > 0$ .*

*En el segundo caso, dicho sistema es  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalente a  $(\dot{x}, \dot{y})^T = (-2y + (d+1)x^n, n(d-1)x^{n-1}y)^T$ , siendo este sistema integrable polinomialmente si, y sólo si,  $d = 1 - \frac{2p}{p+q}$  con  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p+q \geq 2$ .*



**Caso nilpotente, tipo  $(2, 2n + 1)$ .** Consideremos el campo con un sólo término cuasihomogéneo de grado  $2n - 1$ .

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay \\ bx^{2n} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{2n-1}(x, y).$$

Si  $ab \neq 0$ , el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{2n-1}(\mathbf{x})$  es siempre integrable.

**Caso nilpotente generalizado I, tipo  $(2, 3)$ .** Consideremos el campo cuasihomogéneo de grado 4:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + Ax^3 \\ Bx^2y \end{pmatrix} = \mathbf{F}_4(x, y), \quad (3.6.28)$$

donde  $AB \neq 0$  ( en otro caso es reducible a uno integrable). La función de Hamilton de la parte conservativa y su divergencia son:

$$\begin{aligned} 9h(x, y) &= (2B - 3A)x^3y - 3y^3 = -3y(y^2 - \frac{2B-3A}{3}x^3), \\ 9\mu(x, y) &= (3A + B)x^2. \end{aligned}$$

- Si  $3A + B = 0$ , es integrable por ser hamiltoniano.
- Si  $2B - 3A = 0$ , entonces  $h(x, y) = -\frac{1}{3}y^3$ . Como  $y$  es un factor múltiple, por el Corolario 3.5.102,  $\mathbf{F}_4$  es no integrable.
- Si  $2B - 3A \neq 0$ , entonces para que sea integrable se tiene que cumplir

$$\text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] = \frac{3A+B}{2B-3A} = -\frac{(n_y+1)9-M_0}{2M_0},$$

donde  $M_0 = 3(n_y + 1) + 6(n_1 + 1)$ . Por tanto:  $B = -3\frac{n_1+1}{n_y+1}A$

**Proposición 3.6.111** *El sistema (3.6.28) es integrable si, y sólo si, se cumple alguna de las siguientes condiciones:  $AB = 0$  o  $3A + B = 0$  o  $AB(3A + B) \neq 0$  y  $B = -3\frac{p}{q}A$  donde  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p + q \geq 2$ .*

**Caso nilpotente generalizado II, tipo (1, 3).** Consideremos el campo cuasihomogéneo de grado 8:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0 = \mathbf{F}_8(x, y), \quad (3.6.29)$$

donde:

$$\begin{aligned} 12h(x, y) &= -x^{12} - y^4 = -\prod_{i=1}^2 (y - \lambda_i x^3)(y - \bar{\lambda}_i x^3), \\ 12\mu(x, y) &= Ax^8 + Bx^5y + Cx^2y^2, \end{aligned}$$

con  $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + I)$ ,  $\lambda_2 = -\bar{\lambda}_1$ .

Puede comprobarse que se cumplen las condiciones necesarias de integrabilidad. Para que sea integrable, se tiene que cumplir además:

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), \lambda_1] &= \frac{A+B\lambda_1+C\lambda_1^2}{(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\bar{\lambda}_2)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}(C-A) - \frac{\sqrt{2}}{8}(A+C+\sqrt{2}B)I = -\frac{(n_1+1)12-M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), \bar{\lambda}_1] &= \frac{\sqrt{2}}{8}(C-A) + \frac{\sqrt{2}}{8}(A+C+\sqrt{2}B)I = -\frac{(n_1+1)12-M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), \lambda_2] &= \frac{A+B\lambda_2+C\lambda_2^2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\bar{\lambda}_1)(\lambda_2-\bar{\lambda}_2)} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8}(C-A) - \frac{\sqrt{2}}{8}(A+C-\sqrt{2}B)I = -\frac{(n_2+1)12-M_0}{M_0}, \end{aligned}$$

donde  $M_0 = 6(n_1 + 1) + 6(n_2 + 1)$ . De esta forma, obtenemos:  $B = 0$ ,  $A = -C$ ,  $C = \frac{2\sqrt{2}(n_2-n_1)}{n_1+n_2+2}$ . Además, una integral primera es:

$$H(x, y) = \left[ y^2 + \sqrt{2}x^3y + x^6 \right]^{n_1+1} \left[ y^2 - \sqrt{2}x^3y + x^6 \right]^{n_2+1}.$$

**Proposición 3.6.112** *El sistema (3.6.29) es integrable polinomialmente si, y sólo si,  $B = 0$ ,  $A = -C$ ,  $C = 2\sqrt{2}\frac{p-q}{p+q}$  con  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p + q \geq 2$ .*

A continuación, vamos a estudiar los sistemas cuasihomogéneos de grado cero que son polinomialmente integrables.

### 3.6.1. Sistemas cuasihomogéneos de grado cero

**Proposición 3.6.113** *Sea  $\mathbf{F}_0^{\mathbf{t}} \in \mathcal{Q}_0^{\mathbf{t}}$  irreducible con  $\text{div}(\mathbf{F}_0^{\mathbf{t}}) \neq 0$  donde  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  con  $t_1 \leq t_2$ , coprimos. Entonces,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_0^{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$  es polinomialmente integrable si, y sólo si,  $t_1 = 1$  y existe un cambio de variables de grado cero y un*

escalado en el tiempo que lo transforma en  $\mathbf{G}_0^{(1,t_2)} = ((d-1)x, (1+t_2d)y)^T$ , con  $d = 1 - (t_2+1)\frac{p}{q+t_2p}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  y  $p+q \geq 2$ .

*Demostración:* Los campos cuasihomogéneos de grado cero del tipo  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  con  $t_1 \leq t_2$ , se estudiar en tres casos:

(a)  $t_1 > 1$ . En este caso  $\mu_0 = \operatorname{div} \left( \mathbf{F}_0^{(t_1, t_2)} \right) \equiv 0$ .

(b)  $t_1 = 1, t_2 > 1$ . En este caso se tiene  $\mathbf{F}_0^{(1, t_2)} = (a_1x, b_1x^{t_2} + b_2y)^T$  y, así:  $h(x, y) = \frac{1}{t_2+1}x[(b_2 - t_2a_1)y + t_2b_1x^{t_2}]$  y  $\mu(x, y) = \frac{a_1+b_2}{t_2+1}$ . Observemos que  $b_2 - t_2a_1 \neq 0$ , ya que en otro caso  $h$  sería idénticamente cero o bien tendría factores múltiples. Por tanto, siempre es posible mediante un cambio de variables, reducir nuestro campo a  $\mathbf{G}_0^{(1, t_2)}$  con  $\tilde{\mu}(x, y) = d$  y cuya función de Hamilton de la parte conservativa es  $\tilde{h}(x, y) = xy$ . Por tanto,  $\mathbf{G}_0^{(1, t_2)} = ((d-1)x, (1+t_2d)y)^T$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104, es integrable si, y sólo si, existen  $n_x, n_y \in \mathbb{N}_0$ , no ambos nulos, tales que  $\operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), 0] = d = -\frac{(t_2+1)(n_y+1)-M_0}{M_0}$ , donde  $M_0 = (n_x+1) + t_2(n_y+1)$ . Esto es, debe ser  $d = 1 - (t_2+1)\frac{p}{q+t_2p}$  con  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p+q \geq 2$ .

(c)  $t_1 = t_2 = 1$ . En este caso, se tiene  $\mathbf{F}_0^{(1, 1)} = (a_1x+a_2y, b_1x+b_2y)^T$ ,  $\mu(x, y) = \frac{a_1+b_2}{2}$  y  $h(x, y) = \frac{1}{2}(b_1x^2 + (b_2 - a_1)xy - a_2y^2)$ . Sea  $\Delta = (b_2 - a_1)^2 + 4a_2b_1$ . Si  $\Delta \leq 0$ ,  $h$  sólo posee dos factores complejos conjugados o uno real doble por lo que no cumple la condición necesaria de integrabilidad. Si  $\Delta > 0$ , aplicando cambios de variables (véase el Lema 3.2.67) se puede conseguir un nuevo campo  $\mathbf{G}_0^{(1, 1)}$  tal que  $\tilde{\mu}(x, y) = d$  y  $\tilde{h}(x, y) = xy$ . Por tanto,  $\mathbf{G}_0^{(1, 1)} = ((d-1)x, (d+1)y)^T$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104, es integrable si, y sólo si, existen  $n_x, n_y \in \mathbb{N}_0$ , no ambos nulos, tales que  $\operatorname{Res} [\eta^{\operatorname{hom}}(1, Y), 0] = d = -\frac{2(n_y+1)-M_0}{M_0}$ , donde  $M_0 = (n_x+1) + (n_y+1)$ . Esto es, debe ser  $d = 1 - 2\frac{p}{q+p}$  con  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p+q \geq 2$ .

■

### 3.6.2. Sistemas cuasihomogéneos de grado uno

**Proposición 3.6.114** *Sea  $\mathbf{F}_1^{\mathbf{t}} \in \mathcal{Q}_1^{\mathbf{t}}$  irreducible con  $\text{div}(\mathbf{F}_1^{\mathbf{t}}) \neq 0$  donde  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  con  $t_1 \leq t_2$ , coprimos. Entonces,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_1^{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$  es polinomialmente integrables si, y sólo si, existe un cambio de variables de grado cero y un escalado en el tiempo, que lo transforma en:*

- $\mathbf{G}_1^{(1,2)} = (-2y + (d+1)x^2, 2(d-1)xy)^T$ , donde  $d = 1 - 2\frac{p}{q+p}$  y  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p+q > 2$ .
- $\mathbf{G}_{1,a}^{(1,1)} = ((d_0+1)x^2 + (d_1-2)xy, (d_0-2)xy + (d_1+1)y^2)^T$ , donde  $d_1 = \frac{(n_y-n_x)+(n_1-n_x)}{n_x+n_y+n_1+3}$ ,  $d_0 = \frac{(n_x-n_y)+(n_1-n_y)}{n_x+n_y+n_1+3}$ , siendo  $n_x, n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_x + n_y + n_1 \geq 1$ .
- $\mathbf{G}_{1,b}^{(1,1)} = (-3y^2 + (d_0-1)x^2 + d_1xy, (d_0+2)xy + d_1y^2)^T$ , donde  $d_1 = 0$  y  $d_0 = \frac{2(n_1-n_y)}{n_y+2n_1+3}$ , siendo  $n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_y + n_1 \geq 1$ .

*Demostración:* Distinguiremos cuatro casos:

(a)  $t_1 > 1$ . En este caso  $\text{div}(\mathbf{F}_1^{(t_1, t_2)}) \equiv 0$ , por lo que no cumple las hipótesis.

(b)  $t_1 = 1, t_2 \geq 3$ . En este caso  $\mathbf{F}_1^{(1, t_2)} = (a_1x^2, b_1x^{t_2+1} + b_2xy)^T = x(a_1x, b_1x^{t_2} + b_2y)^T$  es reducible, por lo tanto no lo estudiaremos.

(c)  $t_1 = 1, t_2 = 2$ . En este caso  $\mathbf{F}_1^{(1,2)} = (a_1x^2 + a_2y, b_1x^3 + b_2xy)^T$ ,  $h(x, y) = \frac{1}{4}[-2a_2y^2 + (b_2 - 2a_1)x^2y + b_1x^4]$  y  $\mu(x, y) = \frac{2a_1+b_2}{4}x$ . Sea  $\Delta = (b_2 - 2a_1)^2 + 8a_2b_1$ . Si  $\Delta \leq 0$ ,  $h$  sólo posee dos factores complejos conjugados o uno real doble, por lo que no cumple la condición necesaria de integrabilidad. Si  $\Delta > 0$ , aplicando cambios de variables, (véase el apartado c) del Lema 3.2.67), se puede conseguir un nuevo campo  $\mathbf{G}_1^{(1,2)}$  tal que  $\tilde{\mu}(x, y) = dx$  y  $\tilde{h}(x, y) = y(y-x^2)$ . Por tanto,  $\mathbf{G}_1^{(1,2)} = (-2y + (d+1)x^2, 2(d-1)xy)^T$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104, es integrable si, y sólo si, existen  $n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ , no ambos nulos, tales que  $\text{Res}[\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] = -d = -\frac{4(n_y+1)-M_0}{M_0}$ , donde  $M_0 = 2(n_y + 1) + 2(n_1 + 1)$ . Esto es, debe ser  $d = 1 - 2\frac{p}{q+p}$  con  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p+q > 2$ .

(d)  $t_1 = t_2 = 1$ . En este caso  $\mathbf{F}_1^{(1,1)} = (a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2, b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2)^T$ ,  $h(x, y) = \frac{1}{3}[-a_3y^3 + (b_3 - a_2)xy^2 + (b_2 - a_1)x^2y + b_1x^3]$  y  $\mu(x, y) = \frac{2a_1+b_2}{3}x + \frac{a_2+2b_3}{3}y$ . Para que sea integrable, todos los factores de  $h$  deben ser simples. Así,  $h$  debe tener tres factores reales simples distintos o un factor real y dos factores complejos conjugados.

- Si  $h(x, y) = -\frac{a_3}{3}(y - \lambda_1x)(y - \lambda_2x)(y - \lambda_3x)$  con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  y distintos, aplicando cambios de variables, (véase el apartado **f**) del Lema 3.2.67), se puede conseguir un nuevo campo  $\mathbf{G}_{1,a}^{(1,1)}$  para el que  $\tilde{\mu}(x, y) = d_0x + d_1y$  y  $\tilde{h}(x, y) = xy(y - x)$ . Por tanto,  $\mathbf{G}_{1,a}^{(1,1)} = ((d_0 + 1)x^2 + (d_1 - 2)xy, (d_0 - 2)xy + (d_1 + 1)y^2)^T$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104, es integrable si, y sólo si, existen  $n_x, n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ , no todos nulos, tal que

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(X, 1), 0] &= d_1 = \frac{3(n_x+1)-M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] &= -d_0 = -\frac{3(n_y+1)-M_0}{M_0}, \end{aligned}$$

donde  $M_0 = (n_x + 1) + (n_y + 1) + (n_1 + 1)$ . Esto es, debe ser  $d_1 = \frac{(n_y-n_x)+(n_1-n_x)}{n_x+n_y+n_1+3}$  y  $d_0 = \frac{(n_x-n_y)+(n_1-n_y)}{n_x+n_y+n_1+3}$  con  $n_x, n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_x + n_y + n_1 \geq 1$ .

- Si  $h(x, y) = -\frac{a_3}{3}(y - \lambda x)[(y - ax)^2 + b^2x^2]$  con  $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ , aplicando cambios de variables, (véase el apartado **g**) del Lema 3.2.67), se puede conseguir un nuevo campo  $\mathbf{G}_{1,b}^{(1,1)}$  para el que  $\tilde{\mu}(x, y) = d_0x + d_1y$  y  $\tilde{h}(x, y) = y(y^2 + x^2)$ . Por tanto,  $\mathbf{G}_{1,b}^{(1,1)} = (-3y^2 + (d_0 - 1)x^2 + d_1xy, (d_0 + 2)xy + d_1y^2)^T$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104, es integrable si, y sólo si, existen  $n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ , no todos nulos, tal que

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] &= d_0 = -\frac{3(n_y+1)-M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), I] &= \frac{d_0+d_1I}{-2} = -\frac{3(n_1+1)-M_0}{M_0}, \end{aligned}$$

donde  $M_0 = (n_y + 1) + 2(n_1 + 1)$ . Esto es, debe ser  $d_1 = 0$  y  $d_0 = \frac{2(n_1-n_y)}{n_y+2n_1+3}$  con  $n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_y + n_1 \geq 1$ .

■

### 3.6.3. Sistemas cuasihomogéneos de grado dos

**Proposición 3.6.115** Sea  $\mathbf{F}_2^{\mathbf{t}} \in \mathcal{Q}_2^{\mathbf{t}}$  irreducible con  $\text{div}(\mathbf{F}_2^{\mathbf{t}}) \not\equiv 0$  donde  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  con  $t_1 \leq t_2$ , coprimos. Entonces,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_2^{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$  es polinomialmente integrable si, y sólo si, existe un cambio de variables de grado cero y un escalado en el tiempo que lo transforma en:

- $\mathbf{G}_2^{(1,3)} = (-2y + (d+1)x^3, 3(d-1)x^2y)^T$ , donde  $d = 1 - 2\frac{p}{q+p}$  con  $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 1)\}$ .
- $\mathbf{G}_{2,a}^{(1,2)} = ((d_0 - 2)xy + (d_1 + 1)x^3, (d_0 + 1)y^2 + (2d_1 - 3)x^2y)^T$ , donde  $d_1 = \frac{2(n_x - n_y) + 2(n_x - n_1)}{n_x + 2n_y + 2n_1 + 5}$  y  $d_0 = \frac{(n_y - n_x) + 2(n_y - n_1)}{n_x + 2n_y + 2n_1 + 5}$  con  $(n_x, n_y, n_1) \in \mathbb{N}_0^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .
- $\mathbf{G}_{2,b}^{(1,2)} = ((d_0 - 2)x^2y + d_1xy, 5x^4 + (d_0 + 1)x^2y + d_1y^2)^T$ , donde  $d_0 = 0$  y  $d_1 = \frac{4(n_x - n_1)}{n_x + 4n_1 + 5}$  con  $(n_x, n_1) \in \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- $\mathbf{G}_{2,a}^{(1,1)} = ((d_0 - \lambda)x^3 + (d_1 + 2(\lambda + 1))x^2y + (d_2 - 3)xy^2, (d_0 + 3\lambda)x^2y + (d_1 - 2(\lambda + 1))xy^2 + (d_2 + 1)y^3)^T$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  donde  $d_2 = \frac{(n_x - n_y) + (n_x - n_1) + (n_x - n_2)}{n_x + n_y + n_1 + n_2 + 4}$ ,  $d_1 = \lambda \frac{(n_x - n_y) + (n_1 - n_y) + (n_2 - n_y)}{n_x + n_y + n_1 + n_2 + 4}$  y  $d_0 = -d_1 - d_2 + (1 - \lambda) \frac{(n_x - n_1) + (n_y - n_1) + (n_2 - n_1)}{n_x + n_y + n_1 + n_2 + 4}$  con  $(n_x, n_y, n_1, n_2) \in \mathbb{N}_0^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ .
- $\mathbf{G}_{2,b}^{(1,1)} = ((d_2 - 3)xy^2 + (d_1 + 4a)x^2y + (d_0 - (a^2 + 1))x^3, (d_2 + 1)y^3 + (d_1 - 4a)xy^2 + (d_0 + 3(a^2 + 1))x^2y)^T$ , donde  $d_2 = \frac{(n_x - n_y) + 2(n_x - n_1)}{n_x + n_y + 2n_1 + 4}$ ,  $d_0 = (a^2 + 1) \frac{(n_x - n_y) + 2(n_1 - n_y)}{n_x + n_y + 2n_1 + 4}$  y  $d_1 = -\frac{ad_0 + (3a^2 - 1)d_2}{a^2 + 1}$  con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(n_x, n_y, n_1) \in \mathbb{N}_0^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .
- $\mathbf{G}_{2,c}^{(1,1)} = (-4y^3 + d_2xy^2 + (d_1 - 2(b^2 + 1))x^2y + d_0x^3, d_2y^3 + (d_1 + 2(b^2 + 1))xy^2 + d_0x^2y + 4b^2x^3)^T$ , donde  $d_2 = d_0 = 0$  y  $d_1 = (b^2 - 1) \frac{2(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2 + 2}$  con  $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ ,  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

En este caso, el origen es un centro si, y sólo si,  $d_0 = 0$ . Por tanto, si  $d_0 = 0$  y  $d_1 \neq (b^2 - 1) \frac{2(n_2 - n_1)}{n_1 + n_2 + 2}$  o  $d_2 \neq 0$  se tienen centros no integrables.

*Demostración:* Distinguiremos seis casos:

- (a)  $t_1 > 2$ . En este caso,  $\text{div}(\mathbf{F}_2^{(t_1, t_2)}) \equiv 0$ , por lo que no verifica las hipótesis.
- (b)  $t_1 = 2$ . En este caso,  $\mathbf{F}_2^{(2, t_2)} = (a_1x^2, b_1xy)^T = x(a_1x, b_1y)^T$  y por tanto es reducible.

(c)  $t_1 = 1, t_2 > 3$ . En este caso,  $\mathbf{F}_2^{(1,t_2)} = (a_1x^3, b_1x^{t_2+2} + b_2x^2y)^T = x^2(a_1x, b_1x^{t_2} + b_2y)^T$  y por tanto, es reducible.

(d)  $t_1 = 1, t_2 = 3$ . En este caso,  $\mathbf{F}_2^{(1,3)} = (a_1x^3 + a_2y, b_1x^5 + b_2x^2y)^T$ ,  $h(x, y) = \frac{1}{6}[-3a_2y^2 + (b_2 - 3a_1)x^3y + b_1x^6]$  y  $\mu(x, y) = \frac{3a_1+b_2}{6}x^2$ . Sea  $\Delta = (b_2 - 3a_1)^2 + 12a_2b_1$ . Si  $\Delta \leq 0$ ,  $h$  sólo posee dos factores complejos conjugados o uno real doble, por lo que no cumple la condición necesaria de integrabilidad. Si  $\Delta > 0$ , aplicando cambios de variables, (véase el apartado c) del Lema 3.2.67), se puede conseguir un nuevo campo  $\mathbf{G}_2^{(1,3)}$  para el que  $\tilde{\mu}(x, y) = dx^2$  y  $\tilde{h}(x, y) = y(y - x^3)$ . Por tanto,  $\mathbf{G}_2^{(1,3)} = (-2y + (d+1)x^3, 3(d-1)x^2y)^T$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104, es integrable si, y sólo si, existen  $n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ , no ambos nulos, tales que  $\text{Res}[\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] = -d = -\frac{6(n_y+1)-M_0}{M_0}$ , donde  $M_0 = 3(n_y + 1) + 3(n_1 + 1)$ . Esto es, debe ser  $d = 1 - 2\frac{p}{q+p}$  con  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p + q > 2$ .

(e)  $t_1 = 1, t_2 = 2$ . En este caso  $\mathbf{F}_2^{(1,2)} = (a_1x^3 + a_2xy, b_1x^4 + b_2x^2y + b_3y^2)^T$ ,  $h(x, y) = \frac{1}{4}[(b_3 - 2a_2)y^2 + (b_2 - 2a_1)x^2y + b_1x^4]$  y  $\mu(x, y) = \frac{3a_1+b_2}{4}x^2 + \frac{a_2+2b_3}{4}y$ . Para que  $\mathbf{F}_2^{(1,1)}$  sea integrable, todos los factores de  $h$  deben ser simples. Así,  $h$  debe tener tres factores reales simples distintos o un factor real y dos factores complejos conjugados. Sea  $\Delta = (b_2 - 2a_1)^2 - 4b_1(b_3 - 2a_2)$ . Si  $(b_3 - 2a_2) = 0$ , entonces  $h$  tiene el factor  $x$  múltiple. Si  $\Delta = 0$ ,  $h$  posee un factor real doble. Por tanto, sólo estudiaremos el caso  $(b_3 - 2a_2)\Delta \neq 0$ . Concretamente, si  $\Delta < 0$ ,  $h$  posee el factor  $x$  y dos factores complejos conjugados y si  $\Delta > 0$ ,  $(b_3 - 2a_2) \neq 0$ , entonces  $h$  posee el factor  $x$  y otros dos factores reales simples:

- Si  $b_3 - 2a_2 \neq 0$  y  $h(x, y) = \frac{b_3-2a_2}{4}x(y - \lambda_1x^2)(y - \lambda_2x^2)$  con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , aplicando cambios de variables, (véase el apartado c) del Lema 3.2.67), y un escalado en el tiempo, se puede conseguir un nuevo campo  $\mathbf{G}_{2,a}^{(1,2)}$  para el que  $\tilde{\mu}(x, y) = d_0x^2 + d_1y$  y  $\tilde{h}(x, y) = xy(y - x^2)$ . Por tanto  $\mathbf{G}_{2,a}^{(1,2)} = ((d_0 - 2)xy + (d_1 + 1)x^3, (d_0 + 1)y^2 + (2d_1 - 3)x^2y)^T$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104, es integrable si,

y sólo si, existen  $n_x, n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ , no todos nulos, tales que

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(X, 1), 0] &= d_1 = \frac{5(n_x+1)-M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] &= -d_0 = -\frac{5(n_y+1)-M_0}{M_0}, \end{aligned}$$

donde  $M_0 = (n_x + 1) + 2(n_y + 1) + 2(n_1 + 1)$ . Esto es, debe ser  $d_1 = \frac{2(n_x-n_y)+2(n_x-n_1)}{n_x+2n_y+2n_1+5}$  y  $d_0 = \frac{(n_y-n_x)+2(n_y-n_1)}{n_x+2n_y+2n_1+5}$  con  $n_x, n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_x + n_y + n_1 \geq 1$ .

- Si  $b_3 - 2a_2 \neq 0$  y  $h(x, y) = \frac{b_3-2a_2}{5}x[(y-ax^2)^2 + b^2x^4]$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ , aplicando cambios de variables, (véase el apartado **d**) del Lema 3.2.67), y un escalado en el tiempo, se puede conseguir un nuevo campo  $\mathbf{G}_{2,b}^{(1,2)}$  para el que  $\tilde{\mu}(x, y) = d_0x^2 + d_1y$  y  $\tilde{h}(x, y) = x(y^2 + x^4)$ . Por tanto,  $\mathbf{G}_{2,b}^{(1,2)} = ((d_0 - 2)x^2y + d_1xy, 5x^4 + (d_0 + 1)x^2y + d_1y^2)^T$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104, es integrable si, y sólo si, existen  $n_x, n_1 \in \mathbb{N}_0$ , no todos nulos, tales que

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(X, 1), 0] &= d_1 = \frac{5(n_x+1)-M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), I] &= \frac{d_0+d_1I}{2I} = \frac{d_1}{2} - \frac{d_0}{2}I = -\frac{5(n_1+1)-M_0}{M_0}, \end{aligned}$$

donde  $M_0 = (n_x + 1) + 4(n_1 + 1)$ . Esto es, debe ser  $d_0 = 0$  y  $d_1 = \frac{4(n_x-n_1)}{n_x+4n_1+5}$  con  $n_x, n_1 \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_x + n_1 \geq 1$ .

- (f)  $t_1 = t_2 = 1$ . En este caso  $\mathbf{F}_2^{(1,1)} = (a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3, b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3)^T$ ,  $\mu(x, y) = \frac{3a_1+b_2}{4}x^2 + \frac{2a_2+b_2}{4}xy + \frac{a_3+3b_4}{4}y^2$  y  $h(x, y) = \frac{1}{4}[-a_4y^4 + (b_4 - a_3)xy^3 + (b_3 - a_2)x^2y^2 + (b_2 - a_1)x^3y + b_1x^4]$ . Para que  $\mathbf{F}_2^{(1,1)}$  sea integrable, todos los factores de  $h$  deben ser simples. Así  $h$  debe tener cuatro factores reales simples distintos, dos factores reales distintos y dos factores complejos conjugados o bien dos factores complejos distintos y sus conjugados.

- Si  $h$  posee cuatro factores reales distintos, aplicando cambios de variables, (véase el apartado **e**) del Lema 3.2.67), y un escalado en el tiempo, se puede conseguir un nuevo campo  $\mathbf{G}_{2,a}^{(1,1)}$  para el que  $\tilde{\mu}(x, y) = d_0x^2 + d_1xy + d_2y^2$  y  $\tilde{h}(x, y) = xy(y-x)(y-\lambda x)$  con



$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Por tanto,  $\mathbf{G}_{2,a}^{(1,1)} = ((d_0 - \lambda)x^3 + (d_1 + 2(\lambda + 1))x^2y + (d_2 - 3)xy^2, (d_0 + 3\lambda)x^2y + (d_1 - 2(\lambda + 1))xy^2 + (d_2 + 1)y^3)^T$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104 es integrable si, y sólo si, existen  $n_x, n_y, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$  no todos nulos tal que

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(X, 1), 0] &= d_2 = \frac{4(n_x+1)-M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] &= \frac{d_0}{\lambda} = -\frac{4(n_y+1)-M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 1] &= \frac{d_0+d_1+d_2}{1-\lambda} = -\frac{4(n_1+1)-M_0}{M_0} \end{aligned}$$

donde  $M_0 = (n_x + 1) + (n_y + 1) + (n_1 + 1) + (n_2 + 1)$ . Esto es, debe ser  $d_2 = \frac{(n_x-n_y)+(n_x-n_1)+(n_x-n_2)}{n_x+n_y+n_1+n_2+4}$ ,  $d_1 = \lambda \frac{(n_x-n_y)+(n_1-n_y)+(n_2-n_y)}{n_x+n_y+n_1+n_2+4}$  y  $d_0 = -d_1 - d_2 + (1 - \lambda) \frac{(n_x-n_1)+(n_y-n_1)+(n_2-n_1)}{n_x+n_y+n_1+n_2+4}$  con  $n_x, n_y, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_x + n_y + n_1 + n_2 \geq 1$ .

- Si  $h$  posee dos factores reales distintos y dos complejos conjugados, aplicando cambios de variables, (véase el apartado **f**) del Lema 3.2.67), se puede conseguir un nuevo campo  $\mathbf{G}_{2,b}^{(1,1)}$  para el que  $\tilde{\mu}(x, y) = d_0x^2 + d_1xy + d_2y^2$  y  $\tilde{h}(x, y) = xy((y - ax)^2 + x^2)$  con  $a \in \mathbb{R}$  por tanto  $\mathbf{G}_{2,b}^{(1,1)} = ((d_2 - 3)xy^2 + (d_1 + 4a)x^2y + (d_0 - (a^2 + 1))x^3, (d_2 + 1)y^3 + (d_1 - 4a)xy^2 + (d_0 + 3(a^2 + 1))x^2y)^T$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104, es integrable si, y sólo si, existen  $n_x, n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ , no todos nulos, tal que

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(X, 1), 0] &= d_2 = \frac{4(n_x+1)-M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), 0] &= \frac{d_0}{a^2+1} = -\frac{4(n_y+1)-M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), a + I] &= \frac{d_0-(a^2+1)d_2+(ad_0+(a^2+1)d_1+(3a^2-1)d_2)I}{-2(a^2+1)} \\ &= -\frac{4(n_1+1)-M_0}{M_0}, \end{aligned}$$

donde  $M_0 = (n_x + 1) + (n_y + 1) + 2(n_1 + 1)$ . Esto es, debe ser  $d_2 = \frac{(n_x-n_y)+2(n_x-n_1)}{n_x+n_y+2n_1+4}$ ,  $d_0 = (a^2 + 1) \frac{(n_x-n_y)+2(n_1-n_y)}{n_x+n_y+2n_1+4}$  y  $d_1 = -\frac{ad_0+(3a^2-1)d_2}{a^2+1}$  con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n_x, n_y, n_1 \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_x + n_y + n_1 \geq 1$ .

- Si  $h$  posee dos factores complejos distintos y sus factores complejos conjugados, aplicando cambios de variables, (véase el apartado **h**) del Lema 3.2.67), se puede conseguir un nuevo campo  $\mathbf{G}_{2,c}^{(1,1)}$  para

el que  $\tilde{\mu}(x, y) = d_0x^2 + d_1xy + d_2y^2$  y  $\tilde{h}(x, y) = (y^2 + x^2)(y^2 + b^2x^2)$  con  $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ . Por tanto  $\mathbf{G}_{2,c}^{(1,1)} = (-4y^3 + d_2xy^2 + (d_1 - 2(b^2 + 1))x^2y + d_0x^3, d_2y^3 + (d_1 + 2(b^2 + 1))xy^2 + d_0x^2y + 4b^2x^3)^T$ ,  $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ .

Este campo transformado, por el Teorema 3.5.104, es integrable si, y sólo si, existen  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ , no ambos nulos, tales que

$$\begin{aligned} \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), I] &= \frac{-d_1 + (d_2 - d_0)I}{2(b^2 - 1)} = -\frac{4(n_1 + 1) - M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), -I] &= \frac{-d_1 - (d_2 - d_0)I}{2(b^2 - 1)} = -\frac{4(n_1 + 1) - M_0}{M_0}, \\ \text{Res} [\eta^{\text{hom}}(1, Y), bI] &= \frac{bd_1 - (d_0 - b^2d_2)I}{2b(b^2 - 1)} = -\frac{4(n_2 + 1) - M_0}{M_0}, \end{aligned}$$

donde  $M_0 = 2(n_1 + 1) + 2(n_2 + 1)$ . Así, de la primera ecuación obtenemos  $d_2 - d_0 = 0$  y, por tanto,  $d_1 = 2(b^2 - 1)\frac{n_1 - n_2}{(n_1 + 1) + (n_2 + 1)}$ . Sustituyendo estos valores en la tercera ecuación obtenemos  $d_2 = 0$ . En resumen:  $d_2 = d_0 = 0$  y  $d_1 = (b^2 - 1)\frac{2(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2 + 2}$  con  $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_1 + n_2 \geq 1$ .

En este caso, aplicando el Teorema 3.4.97, el origen es un centro si, y sólo sí,  $d_0 = 0$ .

■



# Capítulo 4

## Integrabilidad de sistemas planos

### 4.1. Introducción

Un método clásico para determinar el comportamiento cualitativo del plano de fases de un sistema plano, en un entorno de un punto de equilibrio, consiste en obtener una integral primera: una función no constante, definida en algún subconjunto abierto, no vacío, de  $\mathbb{R}^2$ , la cual es constante a lo largo de las curvas solución del sistema.

En este capítulo estudiamos el problema de la integrabilidad (que consiste en probar la existencia de integrales primeras) para una familia concreta de sistemas planos: aquella que puede ser expresada como una perturbación de un sistema cuasihomogéneo hamiltoniano con términos cuasihomogéneos de mayor grado. Más aún, supondremos que la función de Hamilton satisface alguna condición genérica; en concreto, que todos los factores irreducibles sobre  $\mathbb{C}[x, y]$  son simples. En todo este capítulo, escribiremos el sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_{r+j}(\mathbf{x}), \quad (4.1.1)$$

donde  $\mathbf{x} = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{F}_{r+j} \in \mathcal{Q}_{r+j}^t$ ,  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$  con  $h \in \mathcal{P}_{r+|t|}$  teniendo sólo factores simples en  $\mathbb{C}[x, y]$ , esto es  $h = x^{\delta_x} y^{\delta_y} \prod_{j=1}^d (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})$ , con  $\delta_x, \delta_y \in \{0, 1\}$  y  $0 \neq \lambda_j \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  para  $i \neq j$ . Esta situación contiene, como caso

particular, la perturbación de un silla lineal con traza cero, la perturbación de un centro lineal, y los sistemas nilpotentes con primer término hamiltoniano. etc.

Si existe una integral primera formal (o analítica) del anterior sistema, entonces se dice que el sistema es integrable formalmente (analíticamente). Un resultado debido a Mattei & Moussu [49] afirma que, si  $\mathbf{F}$  es analítico y posee integral primera formal, entonces es integrable analíticamente. Por tanto, el análisis formal (sin entrar en cuestiones de convergencia) basta para analizar tanto integrabilidad formal como la analítica. Por esta razón, de ahora en adelante, sólo hablaremos de integrabilidad.

Es bien conocido que  $H$  es una integral primera de clase  $\mathcal{C}^1$  si y sólo sí, satisface  $\nabla H \cdot \mathbf{F} = 0$  (a la que nos referiremos como ecuación de integrabilidad).

El principal resultado de este capítulo se presenta en la Subsección 4.2.4. Afirma, bajo algunas condiciones, que la integrabilidad es equivalente al carácter conservativo módulo conjugación disipativa. Para obtener este resultado, desarrollamos los conceptos de integral primera y de forma normal en el contexto cuasihomogéneo.

Finalmente en la Sección 4.3 incluimos resultados prácticos sobre computación de formas normales cuasihomogéneas. Estos resultados se utilizarán para determinar la integrabilidad de una familia concreta de sistemas planos degenerados, cuyo análisis ha sido obtenido seleccionando el tipo  $\mathbf{t} = (2, 3)$ .

## 4.2. Integrabilidad y formas normales

La descomposición (2.2.2) se puede aplicar a cada término cuasihomogéneo del desarrollo en serie del campo vectorial  $\mathbf{F}$  del sistema (4.1.1).

Puesto que supondremos el primer término  $\mathbf{F}_r$  del campo  $\mathbf{F}$  es hamiltoniano (esto es, que la parte disipativa es nula), podemos escribir  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$ , para algún  $h \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$ . Más aún, supondremos que la factorización (2.3.7) para  $h$  sólo tiene factores simples, esto se puede expresar como (3.5.23). Por tanto, si denotamos

$d = m + \delta_x + \delta_y$ , la función de Hamilton se puede escribir como:

$$h(x, y) = \prod_{j=1}^d f_j(x, y), \text{ con } f_j(x, y) = x, y \text{ o } y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2}, \quad (4.2.2)$$

(recordemos que  $\lambda_j$  son números complejos no nulos y distintos).

A continuación enunciamos un resultado que será utilizado en el resto de la memoria y será útil para futuras referencias.

**Lema 4.2.116** *El tipo  $\mathbf{t}$  puede elegirse de forma que el grado del primer término cuasihomogéneo,  $\mathbf{F}_r$ , del sistema (4.1.1) verifique:  $r + |\mathbf{t}| \geq t_1 t_2$ .*

*Demostración:* Si el diagrama de Newton del sistema (4.1.1) sólo posee un único vértice con soporte  $(m, n)$ , podemos tomar el tipo homogéneo,  $\mathbf{t} = (1, 1)$ . En este caso, si el campo  $(ax^m y^{n-1}, bx^{m-1} y^n)^T$  es el campo cuyo soporte es el vértice, se tiene que respecto al tipo homogéneo, su grado es  $r = m + n - 1 - 1$ . Así,  $r + |\mathbf{t}| = m + n \geq t_1 t_2 = 1$ .

Si el diagrama de Newton del sistema (4.1.1) posee más de un vértice, denotamos  $(m, n + p)$ ,  $(m + q, n)$  los soportes de dos vértices consecutivos, con  $m, n \in \mathbb{N}_0$  y  $p, q \in \mathbb{N}$ . Sean  $\mathbf{F}^{(1)} = (a_1 x^m y^{n+p-1}, b_1 x^{m-1} y^{n+p})^T$ ,  $\mathbf{F}^{(2)} = (a_2 x^{m+q} y^{n-1}, b_2 x^{m+q-1} y^n)^T$  los campos cuyos soportes son los vértices anteriores. Si  $k = m.c.d(p, q)$ , entonces el tipo de la cara asociada a dichos vértices es  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  donde  $p = kt_1$ ,  $q = kt_2$ . Así pues,  $\mathbf{F}^{(1)}$  y  $\mathbf{F}^{(2)}$  son parte del primer término  $\mathbf{F}_r$ . Por tanto,  $r = t_1 m + t_2(n + t_1 k - 1) - t_1$ , es decir,  $r + |\mathbf{t}| = kt_1 t_2 + t_1 m + t_2 n \geq t_1 t_2$ . ■

La primera parte de esta sección está dedicada a probar que, si el sistema (4.1.1) admite integrales primeras, una de ellas tiene como término cuasihomogéneo de menor grado igual a  $h$ .

### 4.2.1. Forma de las integrales primeras

Con objeto de describir la forma de una integral primera del campo (4.1.1), utilizaremos la descomposición conservativa-disipativa expresando el sistema (4.1.1) en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_r + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{F}_{r+j} = \mathbf{X}_h + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \mathbf{X}_{h_{r+j+|\mathbf{t}|}} + \mu_{r+j} \mathbf{D}_0 \right], \quad (4.2.3)$$

donde  $h \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$ , y  $h_{r+|\mathbf{t}|+j} \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|+j}^{\mathbf{t}}$ ,  $\mu_{r+j} \in \mathcal{P}_{r+j}^{\mathbf{t}}$  para todo  $j \geq 1$ .

Utilizaremos coordenadas polares generalizadas, para lo que consideraremos la función de Hamilton  $H(x, y) = x^{2t_2} + \lambda y^{2t_1}$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  es arbitrario. Denotamos  $\text{Cs}(\theta)$ ,  $\text{Sn}(\theta)$  las soluciones del problema de valor inicial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = \mathbf{X}_H(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = (0, 1)^T. \quad (4.2.4)$$

Notemos que ambas funciones son periódicas, y  $T$  denotará su periodo mínimo. Más aún, es fácil probar que estas funciones cumplen la ecuación  $\text{Cs}^{2t_2}(\theta) + \lambda \text{Sn}^{2t_1}(\theta) = 1$ .

La citada transformación es:

$$\begin{aligned} x &= u^{t_1} \text{Cs}(\theta), \\ y &= u^{t_2} \text{Sn}(\theta). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Además de esta transformación, aplicamos el escalado en el tiempo  $dt = \frac{2t_1 t_2}{u^r} d\tau$ . Entonces, el sistema (4.2.3) se transforma en:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{du}{d\tau} = -h'(\theta)u + \sum_{j=1}^{\infty} [2t_1 t_2 \mu_{r+j}(\theta) - h'_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta)] u^{j+1}, \\ \dot{\theta} &= \frac{d\theta}{d\tau} = (r + |\mathbf{t}|)h(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} (r + j + |\mathbf{t}|)h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta)u^j, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

donde  $h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\theta) = h_{r+j+|\mathbf{t}|}(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))$ ,  $\mu_{r+j}(\theta) = \mu_{r+j}(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta))$ .

**Lema 4.2.117** *Sea  $U \in \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$  una integral primera del sistema plano hamiltoniano  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x})$ , donde  $h \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$ . Entonces,  $U = \gamma h^{\frac{k}{r+|\mathbf{t}|}}$ , para algún  $\gamma \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración:* Tomamos cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tal que  $H(x, y) = x^{2t_2} + \lambda y^{2t_1}$  no sea factor irreducible de  $h$  sobre  $\mathbb{R}[x, y]$ . Si aplicamos el cambio (4.2.5), entonces el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x})$  se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -h'(\theta)u, \\ \dot{\theta} &= (r + |\mathbf{t}|)h(\theta). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Si  $U(x, y)$  es una integral primera de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x})$ , entonces  $U(u^{t_1} \text{Cs}(\theta), u^{t_2} \text{Sn}(\theta)) = u^k U(\theta)$  es una integral primera del sistema (4.2.7) (esta condición se tiene debido a la cuasihomogeneidad de  $U$ ). Por tanto,  $-ku^k U(\theta)h'(\theta) + (r +$

$|\mathbf{t}|)u^k U'(\theta)h(\theta) \equiv 0$ , esto es:

$$(r + |\mathbf{t}|)h(\theta)U'(\theta) - kh'(\theta)U(\theta) \equiv 0.$$

Integrando, conseguimos  $U^{r+|\mathbf{t}|}(\theta) = \beta h^k(\theta)$ , donde  $\beta$  es una constante de integración. Para obtener el resultado, es suficiente volver a las variables originales.

■

**Corolario 4.2.118** *Supongamos que  $h \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$  viene dado por (4.2.2) (esto es, su factorización sólo tiene factores simples). Si  $U \in \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$  es una integral primera de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x})$ , entonces existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $U = \gamma h^l$  para algún  $\gamma \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración:* Substituyendo la expresión de  $h$  dada en (4.2.2) en el Lema 4.2.117, obtenemos  $U = \gamma \prod_{j=1}^d f_j(x, y)^{\frac{k}{r+|\mathbf{t}|}}$ . Para completar la demostración es suficiente utilizar que  $U$  es un polinomio, esto garantiza la existencia de  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $k = l(r + |\mathbf{t}|)$  (recordemos que  $f_j(x, y) = x, y$  o  $y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2}$ ). ■

Nuestro siguiente objetivo es encontrar una integral primera para el sistema (4.1.1) (suponiendo que exista), hallando cada uno de sus términos cuasihomogéneos. El primer término cuasihomogéneo se obtiene en el Teorema 4.2.120 que sigue. En su demostración hacemos uso del siguiente resultado de Seidenberg [56]:

**Lema 4.2.119** *Consideremos el sistema  $\dot{x} = \lambda_1 x + P(x, y)$ ,  $\dot{y} = \lambda_2 y + Q(x, y)$ , donde  $P(x, y), Q(x, y) = \mathcal{O}(|x, y|^2)$ ;  $\lambda_1, \lambda_2$  son no nulos y cumplen  $\lambda_2 \neq n\lambda_1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, hay exactamente una solución de la forma  $y - \sum_{i,j \geq 2} a_{ij} x^i y^j = 0$ .*

**Teorema 4.2.120** *Consideremos el sistema plano (4.1.1), donde el primer término cuasihomogéneo es  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$ , con  $h \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$  dado en (4.2.2) (esto es, su factorización sólo tiene factores simples). Supongamos que existe una integral primera analítica (o formal) para el sistema (4.1.1). Entonces, una de ellas es de la forma  $U = h + \dots$ , donde los puntos indican términos cuasihomogéneos de mayor grado.*



*Demostración:* De nuevo, suponemos que hemos transformado el sistema (4.1.1) en (4.2.6).

Denotamos los equilibrios (reales o complejos) de este último sistema como  $(u, \theta) = (0, \theta_j)$   $j = 1, \dots, d$ . Observemos que  $\theta_j$  son todas las raíces, reales o complejas, de  $h(\theta)$  ya que hemos elegido  $\lambda$  tal que  $H(x, y)$  no sea un factor de  $h$  (si hubiéramos elegido  $H(x, y)$  como un factor de  $h$ , entonces este factor podría haber desaparecido ya que  $H(\text{Cs}(\theta), \text{Sn}(\theta)) = 1$ ).

Los autovalores de la matriz de linealización del sistema (4.2.6) en el equilibrio  $(u, \theta) = (0, \theta_j)$ :

$$\begin{pmatrix} -h'(\theta_j) & 0 \\ 0 & (r + |\mathbf{t}|)h'(\theta_j) \end{pmatrix},$$

son no nulos (puesto que  $h'(\theta_j) \neq 0$  al ser los factores de  $h$  simples). En consecuencia, podemos aplicar el Lema 4.2.119, el cual asegura la existencia de una solución de la forma  $\theta - \theta_j + \phi^{(j)}(u, \theta) = 0$ , con  $\phi^{(j)}(u, \theta) = \mathcal{O}(|u, \theta - \theta_j|^2)$ .

Por tanto, podemos escribir las integrales primeras del sistema (4.2.6) como

$$\psi(u, \theta) u^m \prod_{j=1}^d (\theta - \theta_j + \phi^{(j)}(u, \theta))^{n_j},$$

para algún  $m, n_j \in \mathbb{N}$ , donde  $\psi(0, \theta_j) \neq 0$  para cada  $j = 1, \dots, d$ .

Deshaciendo la transformación (4.2.5), obtenemos una integral primera del sistema (4.1.1):

$$U(x, y) = \psi(x, y) \prod_{j=1}^d \left[ f_j(x, y) + \tilde{\phi}^{(j)}(x, y) \right]^{n_j}.$$

Si expresamos esta integral primera como suma de sus términos cuasihomogéneos:  $U(x, y) = \sum_{j=s}^{\infty} U_j(x, y)$ , e igualamos el término de menor grado en la ecuación de integrabilidad, entonces obtenemos que su término de menor grado  $U_s \in \mathcal{P}_s^{\mathbf{t}}$  es una integral primera de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x})$ . Por el Corolario 4.2.118, existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $U_s(x, y) = \gamma h(x, y)^l$ . Esta igualdad tiene algunas consecuencias. En primer lugar, deducimos que  $s = l(r + |\mathbf{t}|)$ . Más aún, comparando con la forma de la expresión de  $U$ , obtenemos  $m = s$  y  $n_j = l$  para cada

$j = 1, \dots, d$ , y entonces:

$$U(x, y) = \psi(x, y) \prod_{j=1}^d \left( f_j(x, y) + \tilde{\phi}^{(j)}(x, y) \right)^l,$$

donde  $\psi(0, 0) \neq 0$ . Más aún, cambiando el signo si es necesario, podemos suponer  $\psi(0, 0) > 0$ . Si denotamos  $\Psi(x, y) = \psi(x, y)^{\frac{1}{l}}$  (que cumple  $\Psi(0, 0) \neq 0$  y puede desarrollarse formalmente en sus términos cuasihomogéneos), entonces podemos escribir:

$$U(x, y) = \left( \Psi(x, y) \left( h(x, y) + \tilde{\psi}(x, y) \right) \right)^l.$$

De aquí, es inmediato probar que  $\bar{U}(x, y) = h(x, y) + \tilde{\psi}(x, y)$  es otra integral primera del sistema original. ■

### 4.2.2. Formas normales

Ahora vamos a determinar condiciones que impiden la integrabilidad formal. Si el sistema (4.1.1) posee una integral primera formal, por el Teorema 4.2.120, una de ellas se puede tomar como:  $U = h + \sum_{j=1}^{\infty} U_{r+|\mathbf{t}|+j}$ , donde cada  $U_{r+|\mathbf{t}|+j} \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|+j}^{\mathbf{t}}$ . Igualando los términos cuasihomogéneos de grado  $2r+|\mathbf{t}|+1$  en la ecuación de integrabilidad  $\nabla U \cdot \mathbf{F} \equiv 0$ , resulta:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \nabla U_{r+|\mathbf{t}|+1} \cdot \mathbf{X}_h + \nabla h \cdot \mathbf{X}_{h_{r+|\mathbf{t}|+1}} + \nabla h \cdot (\mu_{r+1} \mathbf{D}_0) \\ &\equiv \nabla U_{r+|\mathbf{t}|+1} \cdot \mathbf{X}_h - \nabla h_{r+|\mathbf{t}|+1} \cdot \mathbf{X}_h + (r + |\mathbf{t}|) h \mu_{r+1} \\ &\equiv \nabla (U_{r+|\mathbf{t}|+1} - h_{r+|\mathbf{t}|+1}) \cdot \mathbf{X}_h + (r + |\mathbf{t}|) h \mu_{r+1}. \end{aligned}$$

La anterior igualdad puede ser escrita como:

$$\ell_{2r+|\mathbf{t}|+1} (U_{r+|\mathbf{t}|+1} - h_{r+|\mathbf{t}|+1}) + (r + |\mathbf{t}|) \delta_{2r+|\mathbf{t}|+1} (\mu_{r+1}) \equiv 0, \quad (4.2.8)$$

donde hemos utilizado los siguientes operadores lineales, el primero de ellos ya definido en (1.3.15):

$$\begin{array}{ll} \ell_k : \mathcal{P}_{k-r}^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} & \delta_{r+|\mathbf{t}|+k} : \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|+k}^{\mathbf{t}} \\ \mu_{k-r} \longrightarrow \nabla \mu_{k-r} \cdot \mathbf{X}_h & \mu_k \longrightarrow h \mu_k. \end{array}$$

**Nota 1:** En este caso, el operador  $\ell_k$  puede ser definido en términos del paréntesis de Poisson, concretamente  $\ell_k(\mu_{k-r}) = \{h, \mu_{k-r}\}$ .

**Nota 2:** Hay un tipo de relación de conmutación para los anteriores operadores, que será de gran interés posteriormente. Concretamente:

$$\ell_{2r+|\mathbf{t}|+k}(\delta_{r+|\mathbf{t}|+k}(\mu_k)) = \delta_{2r+|\mathbf{t}|+k}(\ell_{r+k}(\mu_k)). \quad (4.2.9)$$

Se deduce fácilmente utilizando  $\nabla h \cdot \mathbf{X}_h = 0$ .

Siguiendo las ideas de la teoría de formas normales, descomponemos  $\mu_{r+1} = \mu_{r+1}^{(1)} + \mu_{r+1}^{(2)}$ , con  $\mu_{r+1}^{(1)} \in \text{Im}(\ell_{r+1})$  y  $\mu_{r+1}^{(2)} \in \text{Cor}(\ell_{r+1})$  (un subespacio complementario a  $\text{Im}(\ell_{r+1})$ ). Entonces existe  $\eta_1 \in \mathcal{P}_1^{\mathbf{t}}$  tal que  $\mu_{r+1}^{(1)} = \ell_{r+1}(\eta_1)$ . De (4.2.9), podemos escribir (4.2.8) como

$$\ell_{2r+|\mathbf{t}|+1}(U_{r+|\mathbf{t}|+1} - h_{r+|\mathbf{t}|+1} + (r + |\mathbf{t}|)h\eta_1) + (r + |\mathbf{t}|)\delta_{2r+|\mathbf{t}|+1}(\mu_{r+1}^{(2)}) \equiv 0.$$

Es posible que esta igualdad no se cumpla si existe  $\mu_{r+1}^{(2)} \in \text{Cor}(\ell_{r+1})$  tal que  $\delta_{2r+|\mathbf{t}|+1}(\mu_{r+1}^{(2)}) \notin \text{Im}(\ell_{2r+|\mathbf{t}|+1})$ .

Se pueden obtener condiciones similares que impiden la integrabilidad a orden cuasihomogéneo superior a  $2r + |\mathbf{t}| + 1$  usando razonamientos análogos, aunque los cálculos se vuelven cada vez más complicados. Para sortear esta dificultad, aplicaremos al sistema (4.1.1) las técnicas de formas normales descritas en el Capítulo 1.

El procedimiento de la forma normal puede ser adaptado para el caso que estamos considerando: esto es, el término cuasihomogéneo de menor grado  $\mathbf{F}_r$  es hamiltoniano.

La siguiente proposición describe como actúa el corchete de Lie sobre las partes conservativa y disipativa de dos campos, así como, las partes conservativa y disipativa del resultado del producto de multiplicar un escalar por un campo.

**Proposición 4.2.121** *Sea  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu\mathbf{D}_0$ , donde  $h \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$ ,  $\mu \in \mathcal{P}_r^{\mathbf{t}}$ . Consideremos  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$  y denotemos sus partes conservativa y disipativa como  $\mathbf{P}_k^c = \Pi_k^c(\mathbf{P}_k) = \mathbf{X}_g \in \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}}$  (donde  $g \in \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$ ), y  $\mathbf{P}_k^d = \Pi_k^d(\mathbf{P}_k) = \mu_k\mathbf{D}_0 \in \mathcal{D}_k^{\mathbf{t}}$  (donde  $\mu_k \in \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$ ). Entonces:*

- (a)  $[\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_h] = C_{r+k}(\nabla g \cdot \mathbf{X}_h) \in C_{r+k}^t$ .
- (b)  $\Pi_{r+k}^c(\mu_k \mathbf{X}_h) = C_{r+k}\left(\frac{r+|\mathbf{t}|}{r+k+|\mathbf{t}|}\mu_k h\right)$ ,  $\Pi_{r+k}^d(\mu_k \mathbf{X}_h) = D_{r+k}\left(\frac{\nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h}{r+k+|\mathbf{t}|}\right)$ .
- (c)  $\Pi_{r+k}^d([\mathbf{P}_k^d, \mathbf{X}_h]) = D_{r+k}\left(\frac{k+|\mathbf{t}|}{r+k+|\mathbf{t}|}\nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h\right)$ ,  
 $\Pi_{r+k}^c([\mathbf{P}_k^d, \mathbf{X}_h]) = C_{r+k}\left(-\frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|}\mu_k h\right)$ .
- d)  $[\mathbf{P}_k^d, \mu \mathbf{D}_0] = D_{r+k}((k-r)\mu_k \mu)$ .

*Demostración:*

- (a) Un simple cálculo prueba que

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_h] &= \begin{pmatrix} g_{xy}h_y - g_{yy}h_x - h_{xy}g_y + h_{yy}g_x \\ -g_{xx}h_y + g_{yx}h_x + h_{xx}g_y - h_{yx}g_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y}(-g_x h_y + g_y h_x) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-g_x h_y + g_y h_x) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{X}_{-g_x h_y + g_y h_x} = \mathbf{X}_{\nabla g \cdot \mathbf{X}_h} = C_{r+k}(\nabla g \cdot \mathbf{X}_h). \end{aligned}$$

- (b) Observemos que:

$$\begin{aligned} \Pi_{r+k}^c(\mu_k \mathbf{X}_h) &= C_{r+k} \circ c_{r+k+|\mathbf{t}|}(\mu_k \mathbf{X}_h) = C_{r+k}\left(\frac{\mu_k \mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{X}_h}{r+k+|\mathbf{t}|}\right) \\ &= C_{r+k}\left(\frac{r+|\mathbf{t}|}{r+k+|\mathbf{t}|}\mu_k h\right), \\ \Pi_{r+k}^d(\mu_k \mathbf{X}_h) &= D_{r+k} \circ d_{r+k}(\mu_k \mathbf{X}_h) = D_{r+k}\left(\frac{\operatorname{div}(\mu_k \mathbf{X}_h)}{r+k+|\mathbf{t}|}\right) \\ &= D_{r+k}\left(\frac{\nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h}{r+k+|\mathbf{t}|}\right) \end{aligned}$$

- (c) Utilizando el Lema 1.3.11 y el apartado anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{X}_h] &= [\mu_k \mathbf{D}_0, \mathbf{X}_h] = (\nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h) \mathbf{D}_0 + \mu_k [\mathbf{D}_0, \mathbf{X}_h] \\ &= (\nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h) \mathbf{D}_0 - r \mu_k \mathbf{X}_h \\ &= D_{r+k}(\nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h) - \frac{r}{r+k+|\mathbf{t}|} D_{r+k}(\nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h) - \frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|} C_{r+k}(\mu_k h) \\ &= D_{r+k}\left(\frac{k+|\mathbf{t}|}{r+k+|\mathbf{t}|}\nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h\right) + C_{r+k}\left(-\frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|}\mu_k h\right). \end{aligned}$$

- d) En este caso:

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_k^d, \mu \mathbf{D}_0] &= [\mu_k \mathbf{D}_0, \mu \mathbf{D}_0] = (\nabla \mu_k \cdot (\mu \mathbf{D}_0)) \mathbf{D}_0 + \mu_k [\mathbf{D}_0, \mu \mathbf{D}_0] \\ &= k \mu_k \mu \mathbf{D}_0 - r \mu_k \mu \mathbf{D}_0 = D_{r+k}((k-r)\mu_k \mu) \end{aligned}$$

■

**Nota 1:** La Proposición anterior puede ser expresada en términos del paréntesis de Poisson, utilizando que

$$\nabla g \cdot \mathbf{X}_h = \left( -\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \{g, h\}. \quad (4.2.10)$$

**Nota 2:** En la demostración del apartado (b) de la anterior Proposición, hemos demostrado que

$$\mu_k \mathbf{X}_h = D_{r+k} \left( \frac{1}{r+k+|t|} \{ \mu_k, h \} \right) + C_k \left( \frac{r+|t|}{r+k+|t|} \mu_k h \right). \quad (4.2.11)$$

Pasamos a continuación a definir el operador homológico. En nuestro análisis, identificaremos  $\mathcal{Q}_k^t = \mathcal{D}_k^t \oplus \mathcal{C}_k^t \equiv \mathcal{D}_k^t \times \mathcal{C}_k^t$ , a través de los operadores proyecciones  $\Pi_k^c, \Pi_k^d$ . Entonces, en el caso  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h = \mathbf{F}_r^c$ , tenemos la siguiente expresión para el operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{r+k} &: \mathcal{D}_k^t \times \mathcal{C}_k^t \longrightarrow \mathcal{D}_{r+k}^t \times \mathcal{C}_{r+k}^t \\ (\mathbf{P}_k^d, \mathbf{P}_k^c) &\rightarrow \mathbf{L}_{r+k} (\mathbf{P}_k^d, \mathbf{P}_k^c) = \left( [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d, [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c + [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c] \right). \end{aligned}$$

Si tomamos una base de  $\mathcal{Q}_k^t = \mathcal{D}_k^t \oplus \mathcal{C}_k^t$  como la unión de una de  $\mathcal{D}_k^t$  y otra de  $\mathcal{C}_k^t$ , llegamos a una representación matricial de  $\mathbf{L}_{r+k}$  con la siguiente estructura:

$$\left( \begin{array}{c|c} [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d & 0 \\ \hline [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c & [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c] \end{array} \right).$$

Para eliminar términos disipativos, es suficiente tomar elementos en  $\mathcal{D}_k^t$ . Esto sugiere introducir el siguiente operador lineal:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{r+k}^d &: \mathcal{D}_k^t \longrightarrow \mathcal{D}_{r+k}^t \\ \mathbf{P}_k^d &\rightarrow \mathbf{L}_{r+k}^d (\mathbf{P}_k^d) = [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d. \end{aligned}$$

La siguiente proposición proporciona la expresión del operador homológico  $\mathbf{L}_{r+k}^d$  en términos del operador lineal escalar  $\ell_{r+k}$ .

**Proposición 4.2.122** Sea  $\mathbf{P}_k^d = \mu_k \mathbf{D}_0 \in \mathcal{D}_k^t$ . Entonces:

$$\mathbf{L}_{r+k}^d(\mathbf{P}_k^d) = D_{r+k}(\ell_{r+k}(\mu_k)).$$

En particular,

(a)  $\text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}^d) = D_{r+k}(\text{Im}(\ell_{r+k})),$

(b)  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{r+k}^d) = D_k(\text{Ker}(\ell_{r+k})).$

*Demostración:* Es suficiente aplicar la Proposición 4.2.121 (c). Los apartados (a), (b) son consecuencia de la inyectividad de los operadores  $D_k, D_{r+k}$ . ■

**Teorema 4.2.123** Supongamos que el primer término cuasihomogéneo del sistema (4.1.1) es  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$ . Entonces, dicho sistema es  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugado (utilizando sólo cambios de variables de la forma identidad más términos disipativos), al sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{X}_{g_{r+j+|t|}}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{r+j}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}), \quad (4.2.12)$$

donde  $\mu_{r+j} \in \text{Cor}(\ell_{r+j})$  para  $j \geq 1$ , siendo  $\tau$  un término flat.

*Demostración:* Es suficiente aplicar la Proposición 4.2.122, descomponiendo cada término cuasihomogéneo en el sistema transformado en la forma (2.2.2), y el teorema de Borel (ver Hartman [39]). ■

Es importante hacer notar que hemos expresado el operador homológico  $\mathbf{L}_{r+k}$  en términos del operador  $\ell_{r+k}$ , el cual actúa sobre funciones escalares en lugar de campos vectoriales.

El anterior teorema es válido para cualquier función de Hamilton cuasihomogénea  $h$ . Más adelante, probaremos que el cálculo de los subespacios complementarios al rango del operador homológico (y en consecuencia, el cálculo de formas normales) se puede hacer de forma eficiente en el caso particular de una función de Hamilton cuasihomogénea  $h$  con todos sus factores simples.

### 4.2.3. El operador $\ell_{r+k}$

Aquí mostramos como determinar un subespacio complementario al rango del operador lineal  $\ell_{r+k}$ . En general, el cálculo de dicho subespacio para cualquier  $h$  y  $k$  es una tarea difícil. Sin embargo, esta tarea puede llevarse a cabo si  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h \in \mathcal{Q}_r^t$ , donde  $h$  está dado en (4.2.2) (esto es, su factorización sólo tiene factores simples).

El siguiente lema refleja un cierto carácter cíclico de las dimensiones de los espacios  $\mathcal{P}_k^t$ .

**Lema 4.2.124** *Sea  $k \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$  tal que  $r + |\mathbf{t}| = dt_1t_2 + \delta_2t_2 + \delta_1t_1 \geq t_1t_2$ , donde  $\delta_i = 0$  o  $1$ ,  $d \in \mathbb{N}_0$ . Si  $k - r \in \mathcal{I}^t$ , entonces*

$$\dim(\mathcal{P}_{k+r+|\mathbf{t}|}^t) - \dim(\mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^t) = \dim(\mathcal{P}_k^t) - \dim(\mathcal{P}_{k-r}^t).$$

*Demostración:* Comenzamos el estudio distinguiendo los siguientes casos:

**A)** Si  $r + |\mathbf{t}| = t_1t_2$ , como  $k - r \in \mathcal{I}^t$ , aplicando el Lema 2.3.28 se tiene

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{P}_{k+r+|\mathbf{t}|}^t) &= 1 + \dim(\mathcal{P}_k^t), \\ \dim(\mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^t) &= 1 + \dim(\mathcal{P}_{k-r}^t), \end{aligned}$$

de donde obtenemos el resultado.

**B)** Si  $r + |\mathbf{t}| > t_1t_2$ , aplicando el Lema 2.3.27 se tiene que  $r \in \mathcal{I}^t$ . En concreto,  $r = r_3t_1t_2 + r_2t_2 + r_1t_1$ , y por tanto

$$r_3 = d + \delta_1 + \delta_2 - 2, \quad r_2 = (t_1 - 1)(1 - \delta_2), \quad r_1 = (t_2 - 1)(1 - \delta_1).$$

Por otra parte, como  $k - r \in \mathcal{I}^t$ , existirán unos valores  $k_3, k_2, k_1 \in \mathbb{N}_0$  tales que

$$k - r = k_3t_2t_1 + k_2t_2 + k_1t_1, \quad 0 \leq k_i < t_{3-i}, \quad i = 1, 2.$$

También sabemos que  $|\mathbf{t}|, r \in \mathcal{I}^t$ . Utilizando la propiedad de que la suma es una ley interna en el conjunto  $\mathcal{I}^t$ , resulta que  $k, k + |\mathbf{t}|$  y  $k + r + |\mathbf{t}|$

pertenecen a  $\mathcal{I}^t$ . En resumen, tenemos:

$$\begin{aligned} k - r &= k_3 t_2 t_1 + k_2 t_2 + k_1 t_1, \\ k &= [k_3 + r_3] t_2 t_1 + [k_2 + r_2] t_2 + [k_1 + r_1] t_1, \\ k + |\mathbf{t}| &= [k_3 + r_3] t_2 t_1 + [k_2 + r_2 + 1] t_2 + [k_1 + r_1 + 1] t_1, \\ k + r + |\mathbf{t}| &= [k_3 + 2r_3] t_2 t_1 + [k_2 + 2r_2 + 1] t_2 + [k_1 + 2r_1 + 1] t_1. \end{aligned}$$

Aplicando (2.3.4) y el Lema 2.3.26 resulta:

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{P}_{k+r+|\mathbf{t}|}^t) &= k_3 + 2r_3 + \left\lfloor \frac{k_2+2r_2+1}{t_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_1+2r_1+1}{t_2} \right\rfloor + 1, \\ \dim(\mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^t) &= k_3 + r_3 + \left\lfloor \frac{k_2+r_2+1}{t_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_1+r_1+1}{t_2} \right\rfloor + 1, \\ \dim(\mathcal{P}_k^t) &= k_3 + r_3 + \left\lfloor \frac{k_2+r_2}{t_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_1+r_1}{t_2} \right\rfloor + 1, \\ \dim(\mathcal{P}_{k-r}^t) &= k_3 + 1, \end{aligned}$$

donde  $\lfloor x \rfloor$  es la parte entera de  $x$ . Si denotamos  $D = \dim(\mathcal{P}_{k+r+|\mathbf{t}|}^t) - \dim(\mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^t) - \dim(\mathcal{P}_k^t) + \dim(\mathcal{P}_{k-r}^t)$ , entonces  $D = A_1 + A_2$ , donde

$$A_{3-i} = \left\lfloor \frac{k_i+2r_i+1}{t_{3-i}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k_i+r_i+1}{t_{3-i}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k_i+r_i}{t_{3-i}} \right\rfloor, \quad i = 1, 2.$$

Si  $\delta_i = 0$ , entonces  $r_i = 0$  y  $A_{3-i} = 0$ . Si  $\delta_i = 1$ , tenemos  $r_i = t_{3-i} - 1$  y también se obtiene  $A_{3-i} = 0$ . En definitiva,  $D = 0$ . ■

Los siguientes resultados muestran algunas propiedades del núcleo del operador  $\ell_{r+k}$ .

**Lema 4.2.125** *Consideremos  $k = l_1(r + |\mathbf{t}|) + l_2 \in \mathbb{N}$  donde  $0 \leq l_2 < r + |\mathbf{t}|$ . Entonces:*

$$\text{Ker}(\ell_{r+k}) = \begin{cases} \langle h^{l_1} \rangle & \text{si } l_2 = 0, \\ \{0\} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

*Demostración:* Es suficiente usar que los elementos de  $\text{Ker}(\ell_{r+k})$  son las integrales primeras cuasihomogéneas de grado  $k$  del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x})$ , y aplicar el Corolario 4.2.118. ■



**Lema 4.2.126** *Supongamos que  $k - r \in \mathcal{I}^t \setminus \{0\}$ . Entonces:*

$$\dim(\text{Cor}(\ell_{k+r+|\mathbf{t}|})) = \dim(\text{Cor}(\ell_k)).$$

*Demostración:* Notemos que

$$\begin{aligned} \dim(\text{Cor}(\ell_{r+|\mathbf{t}|+k})) &= \dim(\mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|+k}^t) - \dim(\mathcal{P}_{|\mathbf{t}|+k}^t) + \dim(\text{Ker}(\ell_{r+|\mathbf{t}|+k})), \\ \dim(\text{Cor}(\ell_k)) &= \dim(\mathcal{P}_k^t) - \dim(\mathcal{P}_{k-r}^t) + \dim(\text{Ker}(\ell_k)). \end{aligned}$$

Usando (4.2.2), podemos escribir  $h(x, y) = x^{\delta_x} y^{\delta_y} \prod_{j=1}^d (y^{t_1} - \lambda_j x^{t_2})$ , donde  $\delta_x, \delta_y = 0$  o  $1$ . Entonces:  $r + |\mathbf{t}| = dt_1 t_2 + \delta_y t_2 + \delta_x t_1$ . Además, hemos elegido el tipo  $\mathbf{t}$  tal que  $r + |\mathbf{t}| \geq t_1 t_2$ , (véase el lema 4.2.116). Por tanto, el Lema 4.2.124 asegura:  $\dim(\mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|+k}^t) - \dim(\mathcal{P}_{|\mathbf{t}|+k}^t) = \dim(\mathcal{P}_k^t) - \dim(\mathcal{P}_{k-r}^t)$ . Para obtener el resultado, como  $k - r \in \mathbb{N}$ , basta aplicar el Lema 4.2.125. ■

**Lema 4.2.127** *Consideremos  $k \in \mathcal{I}^t \setminus \{0\}$ . Si  $\ell_{r+k}(\mu_k) \in \text{Im}(\delta_{r+k})$ , entonces  $\mu_k \in \text{Im}(\delta_k)$ .*

*Demostración:* Si  $\ell_{r+k}(\mu_k) \in \text{Im}(\delta_{r+k})$ , entonces existe  $\nu \in \mathcal{P}_r^t$  tal que  $\{h, \mu_k\} = h\nu$ . Utilizando la factorización (4.2.2),  $h = \prod_{j=1}^d f_j$ , obtenemos:

$$\{h, \mu_k\} = \left\{ f_j \frac{h}{f_j}, \mu_k \right\} = f_j \left\{ \frac{h}{f_j}, \mu_k \right\} + \frac{h}{f_j} \{f_j, \mu_k\}.$$

Como  $\{h, \mu_k\} = h\nu$ , deducimos que  $\{f_j, \mu_k\}$  es múltiplo de  $f_j$ .

Para probar que  $\mu_k \in \text{Im}(\delta_k)$ , debemos probar que  $\mu_k$  es múltiplo de  $h$ , esto es, que es un múltiplo de  $f_j$  para todo  $j = 1, \dots, d$ :

- Si  $f_j = x$ : Como  $\{x, \mu_k\}$  es un múltiplo de  $x$ , obtenemos que  $\frac{\partial \mu_k}{\partial y}$  es múltiplo de  $x$  y por lo tanto  $\mu_k$  es también múltiplo de  $x$ .
- Si  $f_j = y$ : Como  $\{y, \mu_k\}$  es múltiplo de  $y$ , obtenemos que  $-\frac{\partial \mu_k}{\partial x}$  y  $\mu_k$  son también múltiplos de  $y$ .
- Si  $f_j = y^{t_1} - \lambda x^{t_2}$ : en este caso tenemos que  $\{y^{t_1} - \lambda x^{t_2}, \mu_k\}$  es un múltiplo de  $y^{t_1} - \lambda x^{t_2}$ . Para probar que  $\mu_k$  también es un múltiplo de  $y^{t_1} - \lambda x^{t_2}$ , basta utilizar que:

$$\begin{aligned} x \{y^{t_1} - \lambda x^{t_2}, \mu_k\} &= x \left[ \frac{\partial \mu_k}{\partial x} (-t_1 y^{t_1-1}) + \frac{\partial \mu_k}{\partial y} (-t_2 \lambda x^{t_2-1}) \right] \\ &= -y^{t_1-1} \left[ t_1 x \frac{\partial \mu_k}{\partial x} + t_2 y \frac{\partial \mu_k}{\partial y} \right] + t_2 \frac{\partial \mu_k}{\partial y} (y^{t_1} - \lambda x^{t_2}) \\ &= -y^{t_1-1} k \mu_k + t_2 \frac{\partial \mu_k}{\partial y} (y^{t_1} - \lambda x^{t_2}). \end{aligned}$$

■

**Lema 4.2.128** Sea  $k > 0$ . Entonces:

- a)  $\delta_{r+k+|\mathbf{t}|}(\text{Im}(\ell_k)) \subset \ell_{r+k+|\mathbf{t}|}(\text{Im}(\delta_{k+|\mathbf{t}|}))$ .  
 b)  $\ell_{r+k}(\text{Im}(\delta_k)) \subset \delta_{r+k}(\text{Im}(\ell_{k-|\mathbf{t}|}))$ .

*Demostración:*

- a) Consideremos  $\mu_k \in \text{Im}(\ell_k)$ , (si  $\text{Im}(\ell_k) = 0$ , la inclusión es cierta trivialmente). Entonces, existe  $\mu_{k-r} \in \mathcal{P}_{k-r}^{\mathbf{t}}$  tal que  $\ell_k(\mu_{k-r}) = \{h, \mu_{k-r}\} = \mu_k$ . De esta forma,  $\delta_{r+k+|\mathbf{t}|}(\mu_k) = \mu_k h = \{h, \mu_{k-r}\} h = \{h, \mu_{k-r} h\} = \ell_{r+k+|\mathbf{t}|}(\mu_{k-r} h)$ .
- b) Consideremos  $\mu_k \in \text{Im}(\delta_k) \setminus \{0\}$ , (de nuevo, si  $\text{Im}(\delta_k) = 0$  la inclusión es cierta trivialmente). Entonces, existe  $\mu_{k-r-|\mathbf{t}|} \in \mathcal{P}_{k-r-|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}} \setminus \{0\}$ , tal que  $\mu_k = \mu_{k-r-|\mathbf{t}|} h$  y por tanto:

$$\ell_{r+k}(\mu_k) = \{h, \mu_k\} = \{h, \mu_{k-r-|\mathbf{t}|} h\} = \{h, \mu_{k-r-|\mathbf{t}|}\} h = \ell_{k-|\mathbf{t}|}(\mu_{k-r-|\mathbf{t}|}) h.$$

■

**Lema 4.2.129** Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces, es posible elegir  $\text{Cor}(\ell_k)$  tal que  $\text{Ker}(\ell_{r+k}) \subset \text{Cor}(\ell_k)$ .

*Demostración:* Si  $\text{Ker}(\ell_{r+k}) = \{0\}$ , el resultado es evidente. En otro caso, usando el Corolario 4.2.125 deducimos que  $k = l(r + |\mathbf{t}|)$  y  $h^l \in \text{Ker}(\ell_{r+k})$ . Probaremos que  $h^l \notin \text{Im}(\ell_k)$  por reducción al absurdo. En caso contrario, existiría  $\mu_{k-r} \in \mathcal{P}_{k-r}^{\mathbf{t}} \setminus \{0\}$ , tal que  $\ell_k(\mu_{k-r}) = h^l \in \text{Im}(\delta_k)$ . Por el Lema 4.2.127, debe ser  $\mu_{k-r} \in \text{Im}(\delta_{k-r})$ , esto es,  $\mu_{k-r} = \mu_{k-r-(r+|\mathbf{t}|)} h$ . Por tanto:

$$\ell_k(\mu_{k-r}) = \ell_k(\mu_{k-r-(r+|\mathbf{t}|)} h) = \ell_{k-(r+|\mathbf{t}|)}(\mu_{k-r-(r+|\mathbf{t}|)}) h = h^l.$$

De esta forma:

$$\ell_{(l-1)(r+|\mathbf{t}|)}(\mu_{(l-1)(r+|\mathbf{t}|)-r}) = h^{l-1} \in \text{Im}(\ell_{(l-1)(r+|\mathbf{t}|)}).$$

Aplicando de forma reiterada este razonamiento, obtenemos que  $h \in \text{Im}(\ell_{r+|\mathbf{t}|})$ , y en consecuencia existe  $\mu_{|\mathbf{t}|} \in \mathcal{P}_{|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}} \setminus \{0\}$  tal que  $\ell_{r+|\mathbf{t}|}(\mu_{|\mathbf{t}|}) = h$ . Por el Lema 4.2.127, debe ser  $\mu_{|\mathbf{t}|} \in \text{Im}(\delta_{|\mathbf{t}|})$ . Pero esto es imposible, ya que  $\deg(h) = (r + |\mathbf{t}|) > |\mathbf{t}|$  por tanto  $\mu_{|\mathbf{t}|} \equiv 0$  de donde se tiene la contradicción. ■

La siguiente proposición pone de relieve el comportamiento cíclico del operador  $\ell$  con periodo  $r + |\mathbf{t}|$ .

**Proposición 4.2.130** *Supongamos que  $k - r \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}} \setminus \{0\}$ , y denotemos por  $\text{Cor}(\ell_k)$  un subespacio complementario al rango del operador  $\ell_k$ . Entonces:*

$$\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) = \delta_{r+k+|\mathbf{t}|}(\text{Cor}(\ell_k)), \quad (4.2.13)$$

*es un subespacio complementario al rango de  $\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}$ .*

*Demostración:* Utilizando el Lema 4.2.126, obtenemos

$$\dim(\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})) = \dim(\text{Cor}(\ell_k)) = \dim(\delta_{r+k+|\mathbf{t}|}(\text{Cor}(\ell_k))),$$

ya que  $\delta_{r+k+|\mathbf{t}|}$  es inyectivo. Para completar la demostración, basta probar que  $h\mu_k \notin \text{Im}(\ell_{k+r+|\mathbf{t}|})$  para cada  $\mu_k \in \text{Cor}(\ell_k) \setminus \{0\}$ . De nuevo, usaremos reducción al absurdo: si existiera  $\mu_k \in \text{Cor}(\ell_k) \setminus \{0\}$ , tal que  $\delta_{k+r+|\mathbf{t}|}(\mu_k) = h\mu_k \in \text{Im}(\ell_{k+r+|\mathbf{t}|})$ , entonces  $h\mu_k = \ell_{k+r+|\mathbf{t}|}(\nu_{k+|\mathbf{t}|})$ .

Por el Lema 4.2.127, se tiene que  $\nu_{k+|\mathbf{t}|} \in \text{Im}(\delta_{k+|\mathbf{t}|})$ , esto es, existe  $\nu_{k-r} \in \mathcal{P}_{k-r}^{\mathbf{t}} \setminus \{0\}$ , tal que  $\nu_{k+|\mathbf{t}|} = \delta_{k+|\mathbf{t}|}(\nu_{k-r})$ , (hacemos notar que  $\mathcal{P}_{k-r}^{\mathbf{t}}$  no es el subespacio trivial ya que  $k - r \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}} \setminus \{0\}$ ). De (4.2.9), obtenemos

$$\ell_{k+r+|\mathbf{t}|}(\nu_{k+|\mathbf{t}|}) = \ell_{k+r+|\mathbf{t}|}(\delta_{k+|\mathbf{t}|}(\nu_{k-r})) = \delta_{r+|\mathbf{t}|+k}(\ell_k(\nu_{k-r})).$$

Por tanto,  $h\mu_k = h\ell_k(\nu_{k-r})$  y tendríamos  $\mu_k \in \text{Im}(\ell_k)$ , lo cual es contradictorio. ■

#### 4.2.4. Resultado Principal

El resultado principal de este capítulo queda recogido en el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.131** *Supongamos que el primer término cuasihomogéneo del sistema (4.1.1) es  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$ , donde  $h$  viene dado por (4.2.2) (esto es, su factorización sólo tiene factores simples). Entonces, dicho sistema es integrable si, y sólo si, es formalmente conjugado, con cambios de variables disipativos, a un sistema con divergencia nula.*

*Demostración:* La condición suficiente es trivial. Probemos la condición necesaria.

Si el sistema (4.1.1) posee integral primera formal, entonces su forma normal (4.2.12) (dada en el Teorema 4.2.123) también tiene integral primera formal. Por el Teorema 4.2.120, una integral primera formal puede ser elegida del tipo  $U = h + \sum_{j=1}^{\infty} U_{r+|\mathbf{t}|+j}$ , siendo  $U_{r+|\mathbf{t}|+j} \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|+j}^{\mathbf{t}}$ .

Denotemos la parte conservativa de la forma normal (4.2.12) como  $\mathbf{C} = \mathbf{X}_h + \sum_{j \geq 1} \mathbf{X}_{g_{r+|\mathbf{t}|+j}}$ , cuya función de Hamilton es  $g = h + \sum_{j \geq 1} g_{r+|\mathbf{t}|+j}$ ; y la parte disipativa como  $\mathbf{D} = \sum_{j \geq 1} \mu_{r+j} \mathbf{D}_0$ . Los subíndices denotarán el correspondiente grado cuasihomogéneo. En particular, identificamos  $U_{r+|\mathbf{t}|} \equiv h$ .

Debemos probar que  $\mathbf{D} = 0$ , esto es,  $\mu_{r+j} = 0$  para todo  $j \geq 1$ . Consideramos una serie formal  $F(g) = g + \sum_{k \geq 2} a_k g^k$ , donde  $a_k \in \mathbb{R}$  son coeficientes a determinar. Observemos que  $F(g)$  es también una integral primera del campo  $\mathbf{C}$ . Por último, denotamos  $V = U - F(g)$ .

Como  $U$  es una integral primera del sistema (4.2.12), tenemos que

$$\nabla U \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \nabla(V + F(g)) \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \nabla V \cdot \mathbf{C} + \nabla(V + F(g)) \cdot \mathbf{D} = 0.$$

Considerando los términos cuasihomogéneos de grado  $2r + |\mathbf{t}| + j$  en esta igualdad, encontramos:

$$\sum_{k=0}^j \left( \nabla V_{r+|\mathbf{t}|+k} \cdot \mathbf{C}_{r+j-k} + \nabla(F(g) + V)_{r+|\mathbf{t}|+k} \cdot \mathbf{D}_{r+j-k} \right) = 0. \quad (4.2.14)$$

Probaremos que  $\mu_{r+j} = 0$  por inducción. A la vez, veremos que podemos elegir  $a_k$  adecuadamente de forma que  $V_{r+|\mathbf{t}|+j} = 0$  para  $j \geq 0$ .

- Para  $j = 0$ , la afirmación anterior se verifica trivialmente.

- Supongamos que  $V_{r+|\mathbf{t}|+k} = \mu_{r+k} = 0$  para  $k = 0, \dots, j-1$ . Debemos probar que  $V_{r+|\mathbf{t}|+j} \equiv \mu_{r+j} \equiv 0$ . Ahora, la ecuación (4.2.14) queda:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla(F(g) + V)_{r+|\mathbf{t}|} \cdot \mathbf{D}_{r+j} + \nabla V_{r+|\mathbf{t}|+j} \cdot \mathbf{C}_r \\ &= \nabla h \cdot (\mu_{r+j} \mathbf{D}_0) + \nabla V_{r+|\mathbf{t}|+j} \cdot \mathbf{X}_h \\ &= (r + |\mathbf{t}|)h\mu_{r+j} + \ell_{2r+|\mathbf{t}|+j}(V_{r+|\mathbf{t}|+j}). \end{aligned}$$

Por la Proposición 4.2.130, obtenemos  $\mu_{r+j}h \in \text{Cor}(\ell_{2r+|\mathbf{t}|+j})$ . Entonces  $\mu_{r+j} \equiv 0$  y  $V_{r+|\mathbf{t}|+j} \in \text{Ker}(\ell_{2r+|\mathbf{t}|+j})$ .

Por el Lema 4.2.125, observamos que  $\text{Ker}(\ell_{2r+|\mathbf{t}|+j})$  es el espacio trivial si  $j \neq l(r + |\mathbf{t}|)$ ,  $\forall l \geq 1$ ; o bien  $\text{Ker}(\ell_{2r+|\mathbf{t}|+j}) = \langle h^{l+1} \rangle$  si  $j = l(r + |\mathbf{t}|)$  para algún  $l$ . En este último caso, podemos escribir  $V_{r+|\mathbf{t}|+j} = \gamma h^{l+1}$ . Más aún,  $V_{r+|\mathbf{t}|+j} = U_{r+|\mathbf{t}|+j} - (F(g))_{r+|\mathbf{t}|+j}$  donde  $U_{r+|\mathbf{t}|+j}$  es conocido y  $-(F(g))_{r+|\mathbf{t}|+j}$  contiene el término  $-a_{l+1}h^{l+1}$ . Basta entonces tomar  $a_{l+1} = -\gamma$  para obtener  $V_{(l+1)(r+|\mathbf{t}|)} = 0$ . De esta manera, completamos la demostración. ■

De este teorema se deduce el siguiente resultado de Strozyna & Zoladek, [57]:

**Corolario 4.2.132** *El sistema (4.1.1), con  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$  y  $h(x, y) = -\frac{1}{2n}(ny^2 + x^{2n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es integrable si y sólo si es formalmente equivalente a  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x})$ .*

*Demostración:* La condición suficiente es trivial, ya que si es formalmente equivalente al sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x})$  y éste es integrable, el sistema original también lo es.

Veamos ahora la condición necesaria. Si (4.1.1) es integrable, aplicando el Teorema 4.2.131 se tiene que el sistema es formalmente conjugado a  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{X}_{g_{2n+j}}(\mathbf{x})$ , siendo  $H(x, y) = h(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} g_{2n+j}(x, y)$  una integral primera formal de este sistema reducido.

Por otra parte,  $\mathbf{X}_{x^k y} \in \text{Im}(\mathbf{L}_{k-1})$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , ya que:

$$\left[ \left( \begin{array}{c} y \\ -x^{2n-1} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ -x^k \end{array} \right) \right] = \left( \begin{array}{c} -x^k \\ kx^{k-1}y \end{array} \right) = \mathbf{X}_{x^k y}.$$

Por tanto, el sistema (4.1.1) es formalmente conjugado a  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_h(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{X}_{\tilde{g}_{2n+j}}(\mathbf{x})$  donde una integral primera no contiene los monomios  $x^k y$ , es decir, es de la forma  $G(x, y) = h(x, y) + \tilde{g}_{2n+j}(x, y) = -\frac{1}{2n}(ny^2 + x^{2n}) + y^2 f_1(x, y) + x^{2n} f_2(x)$  por tanto  $-G(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - f_1(x, y)) + \frac{x^{2n}}{2n}(1 - f_2(x))$ . Si aplicamos el cambio  $Y = \frac{y}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - f_1(x, y)}$ ,  $X = \frac{x}{\sqrt[2n]{2n}}\sqrt[2n]{1 - f_2(x)}$ , obtenemos un nuevo sistema equivalente al original con integral primera  $\bar{H}(X, Y) = -\frac{1}{2n}(nY^2 + X^{2n})$ . Como el sistema  $(\dot{X}, \dot{Y}) = \mathbf{X}_{\bar{H}}(X, Y)$  tiene la misma integral primera, ambos son formalmente equivalentes. ■

**Nota:** Este corolario incluye, como caso particular, el conocido resultado de Poincaré, que afirma que cualquier centro que sea perturbación analítica de un centro lineal es integrable.

### 4.3. Aplicaciones

La aplicación de los anteriores resultados a un sistema concreto requiere un método eficiente para calcular la forma normal (4.2.12), porque esto permite determinar condiciones de integrabilidad basadas en la anulación de la parte disipativa de dicha forma normal, esto es, la anulación de los elementos  $\mu_{r+j}$  que pertenecen a espacios complementarios al rango del operador  $\ell_{r+j}$ .

La siguiente proposición es útil para determinar estos subespacios complementarios.

**Proposición 4.3.133** *Supongamos que el término cuasihomogéneo de menor grado del sistema (4.1.1) es  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$ , donde  $h$  viene dado en (4.2.2) (esto es, su factorización sólo tiene factores simples). Consideramos  $k = (r + |\mathbf{t}|)l_1 + l_2 \in \mathbb{N}$  con  $0 \leq l_2 < r + |\mathbf{t}|$ . Entonces,*

$$\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) = \begin{cases} h^{l_1+1} \cdot \text{Cor}(\ell_{l_2}), & \text{si } l_2 - r \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}} \setminus \{0\}, \\ h^{l_1} \cdot \text{Cor}(\ell_{r+|\mathbf{t}|+l_2}), & \text{si } l_2 - r \notin \mathcal{I}^{\mathbf{t}} \setminus \{0\} \text{ y } l_2 + |\mathbf{t}| \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}}, \\ h^{l_1-1} \cdot \text{Cor}(\ell_{2(r+|\mathbf{t}|)+l_2}), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración:* Si aplicamos de forma reiterada la Proposición 4.2.130, obtenemos  $\text{Cor}(\ell_{k+r+|\mathbf{t}|}) = h^j \cdot \text{Cor}(\ell_{(l_1+1-j)(r+|\mathbf{t}|)+l_2})$  siempre que  $(l_1 + 1 - j)(r + |\mathbf{t}|) + l_2 - r \in \mathcal{I}^{\mathbf{t}} \setminus \{0\}$ .

Si  $l_2 - r \in \mathcal{I}^t \setminus \{0\}$ , obtenemos el resultado para  $j = l_1 + 1$ . Para  $l_2 - r \notin \mathcal{I}^t \setminus \{0\}$  pero  $r + |\mathbf{t}| + l_2 - r = l_2 + |\mathbf{t}| \in \mathcal{I}^t \setminus \{0\}$ , el resultado se tiene para  $j = l_1$ . En otro caso, tenemos que  $2(r + |\mathbf{t}|) + l_2 - r = r + |\mathbf{t}| + l_2 + |\mathbf{t}| \in \mathcal{I}^t \setminus \{0\}$ , ya que  $r + |\mathbf{t}| \geq t_1 t_2$  y por tanto  $2(r + |\mathbf{t}|) + l_2 - r > t_1 t_2 - |\mathbf{t}|$ . Aplicando el Lema 2.3.27 se llega al resultado para  $j = l_1 - 1$ . ■

La Proposición 4.3.133 se utiliza en el siguiente teorema, que expresa la forma normal formal disipativa bajo conjugación en una forma más cómoda.

**Teorema 4.3.134** *Supongamos que la primera componente cuasihomogénea del sistema (4.1.1) es  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$ , donde  $h$  viene dado en (4.2.2) (esto es, su factorización sólo tiene factores simples). Denotamos*

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \{k \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq k < r + |\mathbf{t}|\}, \\ \mathcal{I}_1 &= \{k \in \mathcal{I} \mid k - r \in \mathcal{I}^t \setminus \{0\}\}, \\ \mathcal{I}_2 &= \{k \in \mathcal{I} - \mathcal{I}_1 \mid k + |\mathbf{t}| \in \mathcal{I}^t\}, \\ \mathcal{I}_3 &= \mathcal{I} - (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2), \\ \mathcal{I}_4 &= \{k \in \mathcal{I} \mid k > r\}.\end{aligned}$$

Entonces, una forma normal formal disipativa, es:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{X}_h(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{X}_{g_{r+|\mathbf{t}|+j}}(\mathbf{x}) + \sum_{k_3 \in \mathcal{I}_3} p_{k_3}^{(0)}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0(\mathbf{x}) + \sum_{k_4 \in \mathcal{I}_4} p_{k_4}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0(\mathbf{x}) \quad (4.3.15) \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \sum_{k_3 \in \mathcal{I}_3} p_{k_3}^{(l)}(\mathbf{x}) h^{l-1}(\mathbf{x}) + \sum_{k_2 \in \mathcal{I}_2} p_{k_2}^{(l)}(\mathbf{x}) h^l(\mathbf{x}) + \sum_{k_1 \in \mathcal{I}_1} p_{k_1}^{(l)}(\mathbf{x}) h^{l+1}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{D}_0(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

donde  $p_{k_3}^{(0)} \in \text{Cor}(\ell_{r+|\mathbf{t}|+k_3})$ ,  $p_{k_4} \in \text{Cor}(\ell_{k_4})$ ; y  $p_{k_3}^{(l)} \in \text{Cor}(\ell_{2(r+|\mathbf{t}|)+k_3})$ ,  $p_{k_2}^{(l)} \in \text{Cor}(\ell_{r+k_2+|\mathbf{t}|})$ ,  $p_{k_1}^{(l)} \in \text{Cor}(\ell_{k_1})$  para  $l \geq 1$ .

*Demostración:* Basta aplicar el Teorema 4.2.123 y la Proposición 4.3.133. ■

**Nota 1:** Observemos que la caracterización de la anterior forma normal sólo necesita el cálculo de un número finito de subespacios complementarios al rango de  $\ell_j$ .

**Nota 2:** Como hemos visto, la presencia de algunos elementos no nulos  $p_{k_4}$ ,  $p_{k_1}$ ,  $p_{k_2}$  o  $p_{k_3}$  impide la integrabilidad formal del sistema (4.1.1).

Ahora, aplicamos nuestros resultados a algunos casos concretos de gran interés. Consideramos sistemas nilpotentes con primer término cuasihomogéneo, que incluyen como caso particular a perturbaciones de centros lineales y de sillars lineales con divergencia nula. Terminamos estudiando la integrabilidad de un sistema con parte lineal nula.

### 4.3.1. Singularidad Takens-Bogdanov de tipo $\mathbf{t} = (1, n)$

Nuestro primer ejemplo corresponde a sistemas del tipo (4.1.1) cuyo primer término cuasihomogéneo es de la forma  $\mathbf{F}_r = \begin{pmatrix} y + ax^n \\ bx^ny + cx^{2n-1} \end{pmatrix}$ , donde  $n \geq 1$  está fijado, y además  $4nc - (b - na)^2 \neq 0$ . El campo  $\mathbf{F}_r$  es cuasihomogéneo del tipo  $\mathbf{t} = (1, n)$  y grado  $r = n - 1$  y la función de Hamilton de la parte conservativa de  $\mathbf{F}_r$  es:

$$h(x, y) = \frac{1}{2n} (cx^{2n} + (b - na)x^ny - ny) = -\frac{1}{2} \left[ \left( y - \frac{b-na}{2n}x^n \right)^2 - \frac{4nc - (b-na)^2}{4n^2}x^{2n} \right].$$

La hipótesis  $4nc - (b - na)^2 \neq 0$  se impone para que  $h(x, y)$  no tenga factores múltiples. Si usamos cambio de variables  $v = y - \frac{b-na}{2n}x^n$ ,  $u = \frac{\sqrt{|4nc - (b-na)^2|}}{2n}x$ , podemos suponer que  $\mathbf{F}_r = \begin{pmatrix} y \\ \sigma x^{2n-1} \end{pmatrix} + dx^{n-1} \begin{pmatrix} x \\ ny \end{pmatrix}$ , donde  $\sigma = \pm 1$ ,  $d \in \mathbb{R}$ . Tomaremos  $d = 0$  para estar en las condiciones del Teorema 4.2.131. Por tanto, estudiaremos los sistemas de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \sigma x^{2n-1} \end{pmatrix} + \text{H.O.T.}, \quad (4.3.16)$$

siendo  $\sigma = \pm 1$ . Notemos que el primer término cuasihomogéneo ha sido reducido a  $\mathbf{F}_{n-1}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ \sigma x^{2n-1} \end{pmatrix}$ .

Si llamamos  $h(x, y) = \frac{1}{2} (-y^2 + \frac{\sigma}{n}x^{2n}) \in \mathcal{P}_{2n}^{\mathbf{t}}$ , tenemos que  $\mathbf{F}_{n-1} = \mathbf{X}_h$ .

Para calcular su forma normal. Hemos de analizar previamente el rango del operador  $\ell_{n-1+k}$ .



Puesto que, en este caso:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \{0, 1, \dots, 2n - 1\}, \\ \mathcal{I}_1 &= \{n, \dots, 2n - 1\}, \\ \mathcal{I}_2 &= \{0, 1, \dots, n - 1\}, \\ \mathcal{I}_3 &= \emptyset, \\ \mathcal{I}_4 &= \mathcal{I}_1,\end{aligned}$$

debemos considerar las siguientes situaciones:

■ Caso  $k \in \mathcal{I}_1$ :

Si  $n \leq k \leq 2n - 2$ : tenemos  $\text{Ker}(\ell_k) = \{0\}$ ,  $\text{Cor}(\ell_k) = \text{span}\{x^k\}$ .

Si  $k = 2n - 1$ : escribimos  $\mu_n(x, y) = \alpha_0^{(0)}x^n + \alpha_0^{(1)}y \in \mathcal{P}_n^t$ . Después de algunos cálculos, obtenemos  $\ell_{2n-1}(\mu_n) = \sigma\alpha_0^{(1)}x^{2n-1} + n\alpha_0^{(0)}x^{n-1}y$ . Entonces:  $\text{Ker}(\ell_{2n-1}) = \{0\}$ , y  $\text{Cor}(\ell_{2n-1}) = \{0\}$ .

■ Caso  $k \in \mathcal{I}_2$ :

Si  $0 \leq k \leq n - 2$ : escribimos  $\mu_{n+k+1}(x, y) = \alpha_0^{(0)}x^{n+k+1} + \alpha_0^{(1)}x^{k+1}y$ . Tenemos

$$\begin{aligned}\ell_{2n+k}(\mu_{n+k+1}) &= \frac{\sigma(n+1+k)}{n}\alpha_0^{(1)}x^{2n+k} + (n+k+1)\alpha_0^{(0)}x^{n+k}y \\ &\quad + (k+1)\alpha_0^{(1)}x^k h(x, y).\end{aligned}$$

De aquí, obtenemos que  $\text{Ker}(\ell_{2n+k}) = \{0\}$  y  $\text{Cor}(\ell_{2n+k}) = \text{span}\{x^k h\}$ .

Si  $k = n - 1$ : escribimos  $\mu_{2n}(x, y) = \alpha_0^{(0)}x^{2n} + \alpha_0^{(1)}x^n y + \alpha_0^{(2)}h$ . Tenemos

$$\ell_{3n-1}(\mu_{2n}) = 2\sigma\alpha_0^{(1)}x^{3n-1} + 2n\alpha_0^{(0)}x^{2n-1}y - 2n\alpha_0^{(1)}x^{n-1}h.$$

En consecuencia,  $\text{Ker}(\ell_{3n-1}) = \{h\}$  y  $\text{Cor}(\ell_{3n-1}) = \text{span}\{x^{n-1}h\}$ .

Del anterior análisis, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4.3.135** *El sistema (4.3.16) es formalmente conjugado, utilizando únicamente transformaciones disipativas, a:*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y \\ \sigma x^{2n-1} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{X}_{g_{2n+j}}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \sum_{j=n}^{2n-2} \alpha_j^{(0)} x^j \mathbf{D}_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2n-2} \alpha_j^{(l)} x^j h^l(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0.\end{aligned}\tag{4.3.17}$$

**Nota:** Si  $n = 1$ , para  $\sigma = -1$  se tiene el caso perturbación de centro lineal y para  $\sigma = 1$  el caso perturbación de un silla lineal con divergencia nula.

### 4.3.2. Singularidad Takens-Bogdanov de tipo $(2, 2n + 1)$

Nuestro segundo ejemplo corresponde a sistemas cuyo primer término cuasi-homogéneo es  $\mathbf{F}_r = \begin{pmatrix} y \\ bx^{2n} \end{pmatrix}$ , donde  $n \in \mathbf{N}$  y  $b \neq 0$ . Este campo es del tipo  $\mathbf{t} = (2, 2n + 1)$  y grado  $r = 2n - 1$ .

Mediante una adecuada reparametrización, podemos suponer  $b = 1$ , es decir  $\mathbf{F}_{2n-1} = \begin{pmatrix} y \\ x^{2n} \end{pmatrix}$ . Si denotamos  $h(x, y) = -\frac{1}{2} \left( y^2 - \frac{2}{2n+1} x^{2n+1} \right) \in \mathcal{P}_{4n+2}^{\mathbf{t}}$ , entonces,  $\mathbf{F}_{2n-1} = \mathbf{X}_h$ .

Para calcular la forma normal de sistemas de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^{2n} \end{pmatrix} + \text{H.O.T.}, \quad (4.3.18)$$

analizaremos previamente el rango del operador  $\ell_{2n-1+k}$ . Notemos que, en este caso:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \{0, 1, \dots, 4n + 1\}, \\ \mathcal{I}_1 &= \{2n + 1, 2n + 3, \dots, 4n + 1\} \cup \{4n\}, \\ \mathcal{I}_2 &= \{0, 2, \dots, 2n - 2\} \cup \{1, 3, \dots, 2n - 1\} \cup \{2n, 2n + 2, \dots, 4n - 2\}, \\ \mathcal{I}_3 &= \emptyset, \\ \mathcal{I}_4 &= \{2n, \dots, 4n - 1\}. \end{aligned}$$

Observamos que sólo necesitamos calcular  $\text{Cor}(\ell_k)$  para  $k \in \mathcal{I}_1$ ,  $k \in \mathcal{I}_4$  y  $\text{Cor}(\ell_{4n+2+k})$ , para  $k \in \mathcal{I}_2$ .

■ Caso  $k \in \mathcal{I}_4$ :

Si  $k = 2n + 2j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , tenemos que  $\mathcal{P}_{2j+1}^{\mathbf{t}} = \{0\}$ . Por tanto,  $\text{Cor}(\ell_k) = \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} = \langle x^{n+j} \rangle$ . Entonces:

$$\text{Ker}(\ell_k) = \{0\}, \quad \text{Cor}(\ell_k) = \langle x^{n+j} \rangle.$$

Si  $k = 2n + 1 + 2j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ,  $\mathcal{P}_{2j+2}^t = \{x^{j+1}\}$ . Por lo que escribimos  $\mu_{2j+2}(x, y) = \alpha_0^{(j)}x^{j+1}$ . Tenemos

$$\ell_{2n+1+2j}(\mu_{2j+2}) = (j+1)\alpha_0^{(j)}x^jy.$$

De aquí, hallamos que  $\text{Im}(\ell_k) = \langle x^jy \rangle$ . Entonces:

$$\text{Ker}(\ell_k) = \{0\}, \quad \text{Cor}(\ell_k) = \{0\}.$$

■ Caso  $k \in \mathcal{I}_2$ :

Si  $k = 2j$ ,  $0 \leq j \leq n - 1$ , escribimos  $\mu_{2n+3+k}(x, y) = \mu_{2n+1+2(j+1)}(x, y) = \alpha_0^{(j)}x^{j+1}y$ . Operando, obtenemos que

$$\ell_{4n+2+k}(\mu_{2n+1+2(j+1)}) = -2(j+1)\alpha_0^{(j)}x^jy + \left(1 + \frac{2(j+1)}{2n+1}\right)\alpha_0^{(j)}x^{2n+j+1}.$$

De aquí, deducimos que

$$\text{Ker}(\ell_{4n+2+k}) = \{0\}, \quad \text{Cor}(\ell_{4n+2+k}) = \text{span}\{x^jy\}.$$

Si  $k = 2j - 1$ ,  $1 \leq j \leq n - 1$ , escribiendo  $\mu_{2n+3+k}(x, y) = \mu_{2n+2+2j}(x, y) = \alpha_0^{(j)}x^{n+1+j}$ , tras algunas operaciones obtenemos

$$\ell_{4n+2+k}(\mu_{2n+3+k}) = (n+1+j)\alpha_0^{(j)}x^{n+j}y.$$

De aquí, se deduce que

$$\text{Ker}(\ell_{4n+2+k}) = \{0\}, \quad \text{Cor}(\ell_{4n+2+k}) = \{0\}.$$

Si  $k = 2n - 1$ , escribiendo  $\mu_{2n+3+k}(x, y) = \mu_{4n+2}(x, y) = \alpha_0x^{2n+1} + \alpha_1h(x, y)$ , tras algunos cálculos obtenemos

$$\ell_{4n+2+k}(\mu_{2n+3+k}) = (2n+1)\alpha_0x^{2n}y.$$

De aquí, deducimos que

$$\text{Ker}(\ell_{4n+2+k}) = \{h\}, \quad \text{Cor}(\ell_{4n+2+k}) = \{0\}.$$

Si  $k = 2n+2j$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ , escribiendo  $\mu_{4n+3+2j}(x, y) = \mu_{2n+1+2(n+j+1)}(x, y) = \alpha_0^{(j)} x^{n+j+1} y$ , tras algunas operaciones, llegamos a:

$$\ell_{4n+2+k}(\mu_{2n+3+k}) = \left(1 + \frac{2(n+j+1)}{2n+1}\right) \alpha_0^{(j)} x^{3n+j+1} - 2(n+j+1) \alpha_0^{(j)} x^{n+j} h.$$

De aquí, se deduce que

$$\text{Ker}(\ell_{4n+2+k}) = \{0\}, \quad \text{Cor}(\ell_{4n+2+k}) = \text{span}\{x^{n+j}h\}.$$

- Caso  $k \in \mathcal{I}_1$ :

Si  $k = 2n+2j+1$ ,  $0 \leq j \leq n$ , escribiendo  $\mu_{k-(2n-1)}(x, y) = \mu_{2(j+1)}(x, y) = \alpha_0^{(j)} x^{j+1}$ , tras algunos cálculos obtenemos

$$\ell_k(\mu_{k-(2n-1)}) = (j+1) \alpha_0^{(j)} x^j y.$$

De aquí, deducimos que

$$\text{Ker}(\ell_k) = \{0\}, \quad \text{Cor}(\ell_k) = \{0\}.$$

Si  $k = 4n$ , escribiendo  $\mu_{k-(2n-1)}(x, y) = \mu_{2n+1}(x, y) = \alpha_0 y$ , obtenemos

$$\ell_k(\mu_{k-(2n-1)}) = \alpha_0 x^{2n}.$$

De aquí, se deduce que

$$\text{Ker}(\ell_k) = \{0\}, \quad \text{Cor}(\ell_k) = \{0\}.$$

Del anterior análisis, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4.3.136** *El sistema (4.3.18) es formalmente conjugado, utilizando únicamente transformaciones disipativas, a:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^{2n} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{X}_{g_{4n+2+j}} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^{(0)} x^{n+j} \mathbf{D}_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_j^{(l)} x^j h^l \mathbf{D}_0. \quad (4.3.19)$$

### 4.3.3. Un caso de singularidad nilpotente generalizada

La integrabilidad de sistemas con parte lineal nula ha sido poco tratada en la literatura. Consideramos ahora un caso particular de este tipo de sistemas correspondiente al tipo  $\mathbf{t} = (2, 3)$ . Observemos que en este caso  $\mathbf{D}_0(x, y) = (2x, 3y)^T$ .

El caso concreto que vamos a considerar es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^3 - 2ax^3y \\ x^5 + 3ax^2y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0x^5 + a_1x^2y^2 \\ b_0x^4y + b_1xy^3 \end{pmatrix} + \cdots, \quad (4.3.20)$$

donde  $a, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ .

El término cuasihomogéneo de menor grado es  $\mathbf{F}_7 = (-y^3 - 2ax^3y, x^5 + 3ax^2y^2)^T$ , teniendo grado  $r = 7$ . Este campo es hamiltoniano, con función de Hamilton:

$$h(x, y) = \frac{1}{4}y^4 + ax^3y^2 + \frac{1}{6}x^6 = \left(\frac{1}{2}y^2 + ax^3\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - a^2\right)x^6 \in \mathcal{P}_{12}^{\mathbf{t}}.$$

Supondremos  $a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ , ya que entonces la descomposición (4.2.2) para  $h$  sólo tiene factores simples.

Como antes, para determinar una forma normal, necesitamos el análisis del rango del operador:

$$\begin{aligned} \ell_{7+k} &: \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{P}_{7+k}^{\mathbf{t}} \\ \mu_k &\rightarrow \nabla \mu_k \cdot \mathbf{F}_7. \end{aligned}$$

Puesto que, en este caso

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \{9, 10, 11\}, & \mathcal{I}_2 &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \\ \mathcal{I}_3 &= \emptyset, & \mathcal{I}_4 &= \{8, 9, 10, 11\}, \end{aligned}$$

a partir del Teorema 4.3.134, es suficiente calcular los subespacios complementarios al rango de  $\ell_k$ , para  $8 \leq k \leq 11$  y  $\ell_{12+k}$  para  $0 \leq k \leq 8$ . Esto es una tarea fácil (la cual conlleva algunos cálculos), que haremos usando las bases de  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$  dadas en el Lema 2.3.26 (b).

- Caso  $k = 8 \in \mathcal{I}_4$ , escribiendo  $\mu_1(x, y) = 0 \in \mathcal{P}_1^{\mathbf{t}}$ , obtenemos que  $\ell_8(\mu_1) = 0$ . En consecuencia:

$$\text{Cor}(\ell_8) = \text{span} \{x^4, xy^2\}.$$

- Caso  $k = 9 \in \mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_1$ , escribiendo  $\mu_2(x, y) = \alpha_2 x \in \mathcal{P}_2^t$ , obtenemos que  $\ell_9(\mu_2) = -2\alpha_2 a x^3 y - \alpha_2 y^3$ . En consecuencia:

$$\text{Cor}(\ell_9) = \{x^3 y\}.$$

- Caso  $k = 10 \in \mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_1$ , escribiendo  $\mu_3(x, y) = \alpha_3 y \in \mathcal{P}_3^t$ , obtenemos que  $\ell_{10}(\mu_3) = \alpha_3 x^5 + 3\alpha_3 a x^2 y^2$ . En consecuencia:

$$\text{Cor}(\ell_{10}) = \{x^2 y^2\}.$$

- Caso  $k = 11 \in \mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_1$ , escribiendo  $\mu_4(x, y) = \alpha_4 x^2 \in \mathcal{P}_4^t$ , obtenemos que  $\ell_{11}(\mu_4) = -4\alpha_4 a x^4 y - 2\alpha_4 x y^3$ . En consecuencia:

$$\text{Cor}(\ell_{11}) = \{x^4 y\}.$$

- Caso  $k = 0 \in \mathcal{I}_2$ , escribiendo  $\mu_5(x, y) = \alpha_5 x y \in \mathcal{P}_5^t$  y después de algunos cálculos, conseguimos:  $\ell_{12}(\mu_5) = \frac{5}{3}\alpha_5 x^6 + 5\alpha_5 a x^3 y^2 - 4\alpha_5 h(x, y)$ . En consecuencia:

$$\text{Cor}(\ell_{12}) = \text{span}\{x^3 y^2, h\}.$$

- Caso  $k = 1 \in \mathcal{I}_2$ , escribiendo  $\mu_6(x, y) = \alpha_6^{(1)} x^3 + \alpha_6^{(2)} y^2 \in \mathcal{P}_6^t$  y después de algunos cálculos, obtenemos:  $\ell_{13}(\mu_6) = -2(3a\alpha_6^{(1)} - \alpha_6^{(2)})x^5 y - 3(\alpha_6^{(1)} - 2a\alpha_6^{(2)})x^2 y^3$ . Por ser  $6a^2 - 1 \neq 0$ , se obtiene:

$$\text{Cor}(\ell_{13}) = \text{span}\{0\}.$$

- Caso  $k = 2 \in \mathcal{I}_2$ , escribiendo  $\mu_7(x, y) = \alpha_7 x^2 y \in \mathcal{P}_7^t$  y después de algunos cálculos, obtenemos  $\ell_{14}(\mu_7) = \frac{7}{3}\alpha_7 x^7 + 7a\alpha_7 x^4 y^2 - 8\alpha_7 x h$ . En consecuencia:

$$\text{Cor}(\ell_{14}) = \text{span}\{x^4 y^2, x h\}.$$

- Caso  $k = 3 \in \mathcal{I}_1$ , escribiendo  $\mu_8(x, y) = \alpha_8^{(1)} x^4 + \alpha_8^{(2)} x y^2 \in \mathcal{P}_8^t$  y después de algunos cálculos, obtenemos  $\ell_{15}(\mu_8) = -\frac{8}{3}(3a\alpha_8^{(1)} - \alpha_8^{(2)})x^6 y - 4(\alpha_8^{(1)} - 2a\alpha_8^{(2)})x^3 y^3 - 4\alpha_8^{(2)} y h(x, y)$ . Por ser  $6a^2 - 1 \neq 0$ , se obtiene:

$$\text{Cor}(\ell_{15}) = \text{span}\{y h\}.$$

- Caso  $k = 4 \in \mathcal{I}_2$ , escribiendo  $\mu_9(x, y) = \alpha_9^{(1)}x^3y + \alpha_9^{(2)}y^3 \in \mathcal{P}_9^t$  y después de algunos cálculos, obtenemos  $\ell_{16}(\mu_9) = 3(\alpha_9^{(1)} - 2a\alpha_9^{(2)})x^8 + 3(3a\alpha_9^{(1)} + (1 - 12a^2)\alpha_9^{(2)})x^5y^2 - 12(\alpha_9^{(1)} - 3a\alpha_9^{(2)})x^2h(x, y)$ . Por ser  $6a^2 - 1 \neq 0$ , se obtiene:

$$\text{Cor}(\ell_{16}) = \text{span}\{x^2h\}.$$

- Caso  $k = 5 \in \mathcal{I}_2$ , escribiendo  $\mu_{10}(x, y) = \alpha_{10}^{(1)}x^5 + \alpha_{10}^{(2)}x^2y^2 \in \mathcal{P}_{10}^t$  y después de algunos cálculos, obtenemos  $\ell_{17}(\mu_{10}) = -\frac{10}{3}(3a\alpha_{10}^{(1)} - \alpha_{10}^{(2)})x^7y - 5(\alpha_{10}^{(1)} - 2a\alpha_{10}^{(2)})x^4y^3 - 8\alpha_{10}^{(2)}xyh(x, y)$ . Por ser  $6a^2 - 1 \neq 0$ , se obtiene:

$$\text{Cor}(\ell_{17}) = \text{span}\{xyh\}.$$

- Caso  $k = 6 \in \mathcal{I}_2$ , escribiendo  $\mu_{11}(x, y) = \alpha_{11}^{(1)}x^4y + \alpha_{11}^{(2)}xy^3 \in \mathcal{P}_{11}^t$  y después de algunos cálculos, obtenemos  $\ell_{18}(\mu_{11}) = \frac{11}{3}(\alpha_{11}^{(1)} - 2a\alpha_{11}^{(2)})x^9 + \frac{11}{3}(3a\alpha_{11}^{(1)} + (1 - 12a^2)\alpha_{11}^{(2)})x^6y^2 - 4(4\alpha_{11}^{(1)} - 11a\alpha_{11}^{(2)})x^3h(x, y) - 4\alpha_{11}^{(2)}y^2h(x, y)$ . Por ser  $6a^2 - 1 \neq 0$ , se obtiene:

$$\text{Cor}(\ell_{18}) = \text{span}\{x^3h, y^2h\}.$$

- Caso  $k = 7 \in \mathcal{I}_2$ , escribiendo  $\mu_{12}(x, y) = \alpha_{12}^{(1)}x^6 + \alpha_{12}^{(2)}x^3y^2 + \alpha_{12}^{(3)}h(x, y) \in \mathcal{P}_{12}^t$  y después de algunos cálculos, obtenemos  $\ell_{19}(\mu_{12}) = -4(3a\alpha_{12}^{(1)} - \alpha_{12}^{(2)})x^8y - 6(\alpha_{12}^{(1)} - 2a\alpha_{12}^{(2)})x^5y^3 - 12\alpha_{12}^{(2)}x^2yh(x, y)$ . Por ser  $6a^2 - 1 \neq 0$ , se obtiene:

$$\text{Cor}(\ell_{19}) = \text{span}\{x^2yh\}.$$

- Caso  $k = 8 \in \mathcal{I}_2$ , escribiendo  $\mu_{13}(x, y) = \alpha_{13}^{(1)}x^5y + \alpha_{13}^{(2)}x^2y^3 \in \mathcal{P}_{13}^t$  y después de algunos cálculos, obtenemos  $\ell_{20}(\mu_{13}) = \frac{13}{3}(\alpha_{13}^{(1)} - 2a\alpha_{13}^{(2)})x^{10} + \frac{13}{3}(3a\alpha_{13}^{(1)} + (1 - 12a^2)\alpha_{13}^{(2)})x^7y^2 - 4(5\alpha_{13}^{(1)} - 13a\alpha_{13}^{(2)})x^4h(x, y) - 8\alpha_{13}^{(2)}xy^2h(x, y)$ . Por ser  $6a^2 - 1 \neq 0$  se obtiene:

$$\text{Cor}(\ell_{20}) = \text{span}\{x^4h, xy^2h\}.$$

Utilizando ahora el Teorema 4.3.134, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4.3.137** *El sistema (4.3.20) es formalmente conjugado, usando únicamente cambios de variables disipativos, a:*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -y^3 - 2ax^3y \\ x^5 + 3ax^2y^2 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{X}_{g_{12+j}}(\mathbf{x}) + \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \left( \alpha_{12l+8}^{(1)} x^4 h^l + \alpha_8^{(2)} xy^2 h^l \right) \mathbf{D}_0 \right. \\
&+ \alpha_{12l+9} x^3 y h(x, y)^l \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+10} x^2 y^2 h(x, y)^l \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+11} x^4 y h(x, y)^l \mathbf{D}_0 \\
&+ \left( \alpha_{12l+12}^{(1)} h(x, y)^{l+1} + \alpha_{12l+12}^{(2)} x^3 y^2 h(x, y)^l \right) \mathbf{D}_0 \\
&+ \left( \alpha_{12l+14}^{(1)} x h(x, y)^{l+1} + \alpha_{12l+14}^{(2)} x^4 y^2 h(x, y)^l \right) \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+15} y h(x, y)^{l+1} \mathbf{D}_0 \\
&+ \alpha_{12l+16} x^2 h(x, y)^{l+1} \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+17} xy h(x, y)^{l+1} \mathbf{D}_0 \\
&+ \left( \alpha_{12l+18}^{(1)} x^3 h(x, y)^{l+1} + \alpha_{12l+18}^{(2)} y^2 h(x, y)^{l+1} \right) \mathbf{D}_0 \\
&\left. + \alpha_{12l+19} x^2 y h(x, y)^{l+1} \mathbf{D}_0 \right] \tag{4.3.21}
\end{aligned}$$

donde los subíndices de los coeficientes  $\alpha$  indican el correspondiente grado cuasihomogéneo.

**Nota:** Como ya sabemos, la presencia de coeficientes  $\alpha_{12l+j}^{(i)}$  con  $i = 1, 2$  y  $8 \leq j \leq 19$ , impide la integrabilidad formal.

## 4.4. Estudio de integrabilidad para algunas familias

Apliquemos ahora las formas normales calculadas anteriormente al análisis de la integrabilidad de distintas familias.

### 4.4.1. Caso nilpotente

Consideremos la siguiente familia de campos vectoriales cuasihomogéneos del tipo  $\mathbf{t} = (1, 2)$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \sigma x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 x^3 + a_1 xy \\ b_3 x^4 + b_2 x^2 y + b_1 y^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \pm 1. \tag{4.4.22}$$

Para  $\sigma = -1$ , el origen de este sistema es monodrómico y los sistemas integrables serán por tanto centros integrables. En el trabajo de Chavarriga [19]



se caracterizan los campos de esta familia que son integrables, y los centros en el trabajo de Gasull & Torregrosa [35]. El siguiente resultado incluye, para  $\sigma = -1$ , el obtenido en [19].

**Teorema 4.4.138** *El sistema (4.4.22) es integrable si, y sólo si, se verifica una de las siguientes condiciones:*

- a)  $a_1 + 2b_1 = b_2 + 3a_2 = 0$  (caso hamiltoniano).
- b)  $a_2 = b_2 = 0$  (reversible a  $y \rightarrow -y, t \rightarrow -t$ ).
- c)  $b_2 + 3a_2 = a_1 - b_1 + \sigma b_3 = 6a_2^2 + b_1b_3 + 2b_3^2 = 0$ .

*Demostración:* El sistema (4.4.22) también puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{\frac{\sigma}{4}x^4 - \frac{1}{2}y^2} + \mathbf{X}_{c_0x^5 + c_1x^3y + c_2xy^2} + (d_0x^2 + d_1y) \mathbf{D}_0,$$

siendo:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{b_2 - 2a_2}{5}, & d_0 &= \frac{3a_2 + b_2}{5}, & c_0 &= \frac{b_3}{5}, \\ c_2 &= \frac{b_1 - 2a_1}{5}, & d_1 &= \frac{2b_1 + a_1}{5}. \end{aligned}$$

Utilizando la forma normal (4.3.17), para que tengamos integrabilidad, debe anularse el siguiente coeficiente:

$$\alpha_2^{(1)} = d_0.$$

Bajo la hipótesis  $d_0 = 0$ , el siguiente coeficiente que debe anularse para que tengamos integrabilidad es:

$$\alpha_0^{(1)} = d_1c_1(d_1 - 5\sigma c_0 + 3c_2).$$

El caso hamiltoniano descrito en **a)** aparece si  $d_0 = d_1 = 0$ .

Si  $d_0 = c_1 = 0$ , tenemos el caso reversible al cambio  $y \rightarrow -y, t \rightarrow -t$  descrito en **b)**. En esta situación, el sistema es integrable ya que, aplicando el cambio  $u = x, v = y^2, dt = \frac{d\tau}{y}$ , obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= 1 + a_1u, \\ \frac{dv}{d\tau} &= 2\sigma u^3 + 2b_3u^4 + 2b_1v, \end{aligned}$$

que es integrable por el teorema de la caja de flujo.

Si  $d_0 = 0$ ,  $d_1 = 5\sigma c_0 - 3c_2$ ,  $c_1 d_1 \neq 0$ , el siguiente coeficiente viene dado por:

$$\alpha_1^{(1)} = c_1 d_1 (6c_1^2 - 25c_0 c_2).$$

De nuevo, debemos imponer que este coeficiente se anule para encontrar casos de integrabilidad. El caso  $d_0 = 0$ ,  $d_1 = 5\sigma c_0 - 3c_2$  y  $6c_1^2 - 25c_0 c_2 = 0$  aparece recogido en el apartado **c**). Para comprobar que efectivamente es integrable, parametrizamos mediante  $c_1 = 25\lambda c_2$ ,  $c_0 = 150\lambda^2 c_2$ , con  $\lambda c_2 \neq 0$ . Obtenemos así el campo:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \sigma x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25\lambda c_2 x^3 - 5c_2(-150\sigma\lambda^2 + 1)xy \\ 750\lambda^2 c_2 x^4 + 75\lambda c_2 x^2 y - 5c_2(-300\sigma\lambda^2 + 1)y^2 \end{pmatrix}.$$

Este campo es integrable, ya que posee un factor integrante inverso:  $(1 + v_1 x + v_2 y + v_3 x^2)^{\frac{1}{A}}$ , donde  $v_1 = -5c_2(-300\sigma\lambda^2 + 1)$ ,  $v_2 = 25\sigma\lambda c_2 v_1$ ,  $v_3 = 15\lambda v_2$  y  $A = -\frac{300\sigma\lambda^2 - 1}{3(250\sigma\lambda^2 - 1)}$ . ■

#### 4.4.2. Un caso nilpotente generalizado

Consideremos la familia:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^3 - 2ax^3y \\ x^5 + 3ax^2y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0x^5 + a_1x^2y^2 \\ b_0x^4y + b_1xy^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2x^4y + a_3xy^3 \\ b_2x^6 + b_3x^3y^2 + b_4y^4 \end{pmatrix}.$$

Si  $a^2 < \frac{1}{6}$ , el sistema es monodrómico y los sistemas integrables serán por tanto centros integrables. Si  $a^2 > \frac{1}{6}$  el origen es un punto de silla hiperbólico, y si  $a^2 = \frac{1}{6}$  un punto de silla degenerado, con una variedad semihiperbólica.

Este sistema también puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{\frac{1}{6}x^6 + ax^3y^2 + \frac{1}{4}y^4} + (d_0x^4 + d_1xy^2) \mathbf{D}_0 + \mathbf{X}_{c_0x^5y + c_1x^2y^3} \\ + (d_2x^3y + d_3y^3) \mathbf{D}_0 + \mathbf{X}_{c_2x^7 + c_3x^4y^2 + c_4xy^4}, \quad (4.4.23)$$

siendo:

$$c_0 = \frac{2b_0 - 3a_0}{13}, \quad c_1 = \frac{2b_1 - 3a_1}{13}, \quad d_0 = \frac{5a_0 + b_0}{13}, \quad d_1 = \frac{2a_1 + 3b_1}{13}, \\ c_2 = \frac{2b_2}{14}, \quad c_3 = \frac{2b_3 - 3a_2}{14}, \quad c_4 = \frac{2b_4 - 3a_3}{14}, \quad d_2 = \frac{2b_3 + 4a_2}{14}, \quad d_3 = \frac{4b_4 + a_3}{14},$$

y  $\mathbf{D}_0 = (3x, 3y)^T$ .

**Teorema 4.4.139** *El sistema (4.4.23), con  $6a^2 - 1 \neq 0$  es integrable si, y sólo si, se verifica una de las siguientes condiciones:*

- a)**  $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$  (caso hamiltoniano).
- b)**  $d_0 = d_1 = c_0 = c_1 = 0$ ,  $d_2 = 2ad_3$ ,  $c_3 = 4ac_4$ ,  $d_3 \neq 0$  (caso reversible a  $y \rightarrow -y$ ,  $t \rightarrow -t$ ).
- c)**  $d_0 = d_1 = c_2 = 0$ ,  $d_2 = -\frac{2}{7}(6a^2 - 25)c_0^2$ ,  $c_1 = ac_0$ ,  $c_3 = \frac{1}{14}(4a^2 - 5)c_0^2$ ,  $c_4 = \frac{1}{7}\frac{4a^2-5}{a}c_0^2$ ,  $d_3 = -\frac{1}{7}\frac{6a^2-25}{a}c_0^2$ ,  $a(6a^2 - 25)c_0 \neq 0$ .

*Demostración:* Los dos primeros coeficientes de la forma normal (4.3.21), vienen dados por:

$$\begin{aligned}\alpha_8^{(1)} &= d_0, \\ \alpha_8^{(2)} &= d_1.\end{aligned}$$

Para encontrar casos de integrabilidad imponemos que ambos sean cero. En esta situación, el siguiente coeficiente de la forma normal es:

$$\alpha_9 = d_2 - 2ad_3.$$

De nuevo, si este coeficiente se anula encontramos que el siguiente coeficiente es:

$$\alpha_{10} = d_3(c_1 - ac_0).$$

La anulación de este coeficiente conduce a varios casos:

- A)**  $d_3 = 0$ . Es el caso hamiltoniano descrito en el apartado **a)**.
- B)**  $d_3 \neq 0$ ,  $c_1 = ac_0$ . Ahora, el siguiente coeficiente es:

$$\alpha_{11} = -c_3 + 4ac_4 - \frac{1}{2}(4a^2 - 5)c_0^2,$$

que se anula si  $c_3 = 4ac_4 - \frac{1}{2}(4a^2 - 5)c_0^2$ . En este caso, los siguientes coeficientes son:

$$\begin{aligned}\alpha_{12}^{(1)} &= (-d_3 - 5c_4 - 7c_2 + 2ac_0^2)c_0, \\ \alpha_{12}^{(2)} &= [7a(3c_2 - 2c_4) + 2(4a^2 - 5)c_0^2]c_0.\end{aligned}$$

La anulación simultánea de ambos coeficientes conduce a la siguiente clasificación:

**B1)**  $c_0 = 0$ . Se trata de un campo reversible a  $y \rightarrow -y$ ,  $t \rightarrow -t$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^3 - 2ax^3y \\ x^5 + 3ax^2y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4a(d_3 - 2c_4)x^4y + 2(d_3 - 2c_4)xy^3 \\ 7c_2x^6 + 2a(3d_3 + 8c_4)x^3y^2 + (3d_3 + c_4)y^4 \end{pmatrix}.$$

El cambio  $v = (y^2 + 2ax^3)^2$ ,  $u = x$ ,  $dt = \frac{1}{y(y^2 + 2ax^3)}d\tau$  lo transforma en:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4(1 - 6a^2)u^5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(d_3 - 2c_4)u \\ 28(c_2 - 4a^2c_4)u^6 + 4(3d_3 + c_4)v \end{pmatrix},$$

que es integrable por el teorema de la caja de flujo. Se trata del caso descrito en el apartado **b**).

**B2)**  $c_0 \neq 0$  y  $a = 0$ . En este caso,  $\alpha_{12}^{(2)} = -10c_0^3$ , luego no es integrable.

**B3)**  $c_0 \neq 0$  y  $a \neq 0$ , o equivalentemente:

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{2}{5}ac_0^2 - \frac{1}{5}d_3 - \frac{7}{5}c_2, \\ c_2 &= -\frac{12}{203}ac_0^2 - \frac{2}{29}d_3 + \frac{50}{203a}c_0^2 \end{aligned}$$

Para estos valores, los siguientes coeficientes de la forma normal son:

$$\begin{aligned} \alpha_{14}^{(1)} &= [7ad_3 + (6a^2 - 25)c_0^2] [(120a^4 + 988a^2 - 545)c_0^2 - 112a(6a^2 - 1)d_3], \\ \alpha_{14}^{(2)} &= [7ad_3 + (6a^2 - 25)c_0^2] [(146a^4 - 43a^2 + 45)c_0^2 - 28a(6a^2 - 1)d_3]. \end{aligned}$$

La única posibilidad para que estos coeficientes se anulen es que:

$$d_3 = -\frac{6a^2 - 25}{7a}c_0^2.$$

Observemos que, en este caso, debe ocurrir que  $6a^2 - 25 \neq 0$  puesto que suponemos  $d_3 \neq 0$ . Para este valor de  $d_3$ , resulta el campo:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^3 - 2ax^3y \\ x^5 + 3ax^2y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_0x^5 - 3ac_0x^2y^2 \\ 5c_0x^4y + 2ac_0xy^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_0^2(4a^2 - 15)x^4y - \frac{2(2a^2 - 5)c_0^2}{a}xy^3 \\ -4c_0^2(a^2 - 5)x^3y^2 - \frac{2(a^2 - 5)c_0^2}{a}y^4 \end{pmatrix}.$$

Un factor integrante inverso para este sistema es  $(1 + v_2x + v_3y)^{\frac{1}{A}}$ , donde  $A = \frac{a^2 - 5}{6a^2 - 25}$ ,  $v_2 = \frac{2Ac_0^2(6a^2 - 25)}{a}$ ,  $v_3 = \frac{2Ac_0^3(6a^2 - 25)}{a}$ , si  $a^2 \neq 5$ .

Si  $a^2 = 5$ , un factor integrante inverso es  $e^{v_2x + v_3y}$ , donde  $v_2 = \frac{2c_0^2(6a^2 - 25)}{a}$ ,  $v_3 = \frac{2c_0^3(6a^2 - 25)}{a}$ . Este es el caso descrito en el apartado **c**).



# Capítulo 5

## Formas normales conservativas-disipativas

### 5.1. Introducción

La idea subyacente en la teoría de las formas normales es utilizar cambios de variables para obtener otro campo equivalente más simple. El proceso de simplificación consiste en eliminar los términos que pertenecen a la imagen del operador homológico, para lo que debemos fijar un subespacio complementario al espacio imagen del operador homológico, (co-rango del operador homológico). En este sentido hay tantas formas normales de un campo como posibles elecciones del mencionado subespacio complementario. Fijado un co-rango, algunos autores se plantean el problema de obtener la máxima simplificación, buscando las expresiones analíticas con menos términos.

Otra posibilidad es seleccionar la forma normal que mejor se adapta a nuestro problema: se trata, en definitiva, de elegir unas coordenadas que nos proporcionen la máxima información dinámica del sistema. Veamos a continuación algunos ejemplos:

En el caso de una perturbación de un centro lineal, los co-rangos que se eligen usualmente están generados por  $(x^2 + y^2)^l \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ,  $(x^2 + y^2)^l \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $l \geq 1$ . Estos co-rangos surgen de forma natural al escribir el sistema en variables en forma compleja.

Para la forma normal de la singularidad nilpotente, Takens [60] utilizó como bases para los co-rangos  $(x^l, 0)^T$ ,  $(0, x^l)^T$ ,  $l \geq 2$ , mientras que Bogdanov [15] tomó como bases  $(0, x^l)^T$ ,  $(0, x^{l-1}y)^T$ ,  $l \geq 2$ . Nosotros hemos elegido co-rangos disipativos. Estos fueron utilizados por Baider & Sander ([14]) y posteriormente por Loray ([48]), Strozyna & Zoladek ([58]).

Es importante señalar que una forma normal correspondiente a co-rangos disipativos determina la integrabilidad formal del campo (véase el Capítulo 4). Sin embargo, en el problema de centro, es más conveniente eliminar el mayor número de elementos conservativos, para posteriormente, aplicar cambios de variables que no alteren éstos, y eliminar el máximo número de elementos disipativos. En definitiva, cada problema requiere una forma normal adecuada.

Consideremos un campo plano, de la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{j=r}^{\infty} \mathbf{F}_j(\mathbf{x}), \text{ donde } \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.1.1)$$

siendo  $\mathbf{F}_j \in \mathcal{Q}_j^t$ . Tomaremos  $t_1 \leq t_2$  ya que en otro caso bastaría aplicar el cambio  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow x$  para estar en la situación deseada.

Utilizando la descomposición conservativa disipativa, se tendrá:

$$\mathbf{F}_{r+j} = \mathbf{X}_{h_{r+j+|t|}} + \mu_{r+j} \mathbf{D}_0, \quad \text{con } h_{r+j+|t|} \in \mathcal{P}_{r+j+|t|}^t, \mu_{r+j} \in \mathcal{P}_{r+j}^t.$$

Por brevedad denotaremos  $h_{r+|t|} = h$ ,  $\mu_r = \mu$ .

En este capítulo obtendremos formas normales para sistemas (5.1.1) suponiendo que  $\mu \equiv 0$ . El caso  $\mu \not\equiv 0$  es significativamente más complejo y no incluiremos los resultados por cuestión de brevedad.

## 5.2. Preliminares

En nuestro análisis, identificaremos  $\mathcal{Q}_k^t = \mathcal{D}_k^t \oplus \mathcal{C}_k^t \equiv \mathcal{D}_k^t \times \mathcal{C}_k^t$ , a través de los operadores de proyección  $\Pi^c$ ,  $\Pi^d$ . Además, denotaremos  $\Pi^d([\mathbf{P}, \mathbf{F}]) = [\mathbf{P}, \mathbf{F}]^d$ , y  $\Pi^c([\mathbf{P}, \mathbf{F}]) = [\mathbf{P}, \mathbf{F}]^c$ .

El operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -equivalencia:

$$\mathcal{L}_{r+k} : \mathcal{C}_k^t \times \mathcal{D}_k^t \times \text{Cor}(\ell_k) \longrightarrow \mathcal{C}_{r+k}^t \times \mathcal{D}_{r+k}^t,$$

está definido por

$$\mathcal{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k^c, \mathbf{P}_k^d, \nu_k) = \left( [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r]^c + [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c + (\nu_k \mathbf{F}_r^c)^c, [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^d]^d + [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r]^d + (\nu_k \mathbf{F}_r)^d \right),$$

donde  $\mathbf{P}_k^c = \mathbf{X}_g$ , con  $g \in \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^t$ ,  $\mathbf{P}_k^d = \mu_k \mathbf{D}_0$  con  $\mu_k \in \mathcal{P}_k^t$  y  $\nu_k \in \text{Cor}(\ell_k)$ .

Utilizando la Proposición 4.2.121, la matriz de este operador lineal, respecto de bases adecuadas, es:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} C_{r+k} \left( \nabla g \cdot \mathbf{X}_h + \frac{k(k+|\mathbf{t}|)\mu g}{r+|\mathbf{t}|+k} \right) & C_{r+k} \left( -\frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+|\mathbf{t}|+k} \mu_k h \right) & C_{r+k} \left( \frac{(r+|\mathbf{t})\nu_k h}{r+|\mathbf{t}|+k} \right) \\ \hline D_{r+k} \left( -\frac{r+|\mathbf{t}|}{r+|\mathbf{t}|+k} \nabla \mu \cdot \mathbf{X}_g \right) & D_{r+k} \left( \frac{(k+|\mathbf{t})\nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h}{r+|\mathbf{t}|+k} + (k-r)\mu_k \mu \right) & D_{r+k} \left( \frac{\nabla \nu_k \cdot \mathbf{X}_h}{r+|\mathbf{t}|+k} + \nu_k \mu \right) \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathcal{C}_{r+k}^t \\ \mathcal{D}_{r+k}^t \end{array}$$

El operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación se obtiene simplemente con  $\nu_k \equiv 0$ .

Suponiendo que  $\mu \equiv 0$ , es decir, si el término cuasihomogéneo de menor grado  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$ , es hamiltoniano, la matriz del operador  $\mathcal{L}_{r+k}$  es la siguiente:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} C_{r+k}(\nabla g \cdot \mathbf{X}_h) & C_{r+k} \left( -\frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+|\mathbf{t}|+k} \mu_k h \right) & C_{r+k} \left( \frac{(r+|\mathbf{t})\nu_k h}{r+|\mathbf{t}|+k} \right) \\ \hline \mathbf{0} & D_{r+k} \left( \frac{(k+|\mathbf{t})\nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h}{r+|\mathbf{t}|+k} \right) & D_{r+k} \left( \frac{\nabla \nu_k \cdot \mathbf{X}_h}{r+|\mathbf{t}|+k} \right) \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathcal{C}_{r+k}^t \\ \mathcal{D}_{r+k}^t \end{array}$$

La estructura de esta matriz sugiere cambiar el orden de los términos conservativos, disipativos. Esto es, aplicaremos en primer lugar cambios de variables disipativos con el propósito de eliminar términos disipativos, para posteriormente aplicar cambios de variables conservativos que no alteren los términos disipativos. Es importante señalar que aunque esta estrategia difiere de la propuesta para el problema de centro, las formas normales coinciden.

De esta forma, definimos

$$\mathcal{L}_{r+k} : \mathcal{D}_k^t \times \text{Cor}(\ell_k) \times \mathcal{C}_k^t \longrightarrow \mathcal{D}_{r+k}^t \times \mathcal{C}_{r+k}^t,$$

mediante

$$\mathcal{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k^d, \nu_k, \mathbf{P}_k^c) = \left( [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r]^d + (\nu_k \mathbf{F}_r)^d + [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r]^d, [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c + (\nu_k \mathbf{F}_r^c)^c + [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c]^c \right),$$

donde  $\mathbf{P}_k^c = \mathbf{X}_g$ , con  $g \in \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^t$ ,  $\mathbf{P}_k^d = \mu_k \mathbf{D}_0$  con  $\mu_k \in \mathcal{P}_k^t$  y  $\nu_k \in \text{Cor}(\ell_k)$ .



Utilizando las propiedades de la Proposición 4.2.121, la matriz del operador  $\mathcal{L}_{r+k}$  es:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} D_{r+k} \left( \frac{(k+|\mathbf{t}|)\nabla\mu_k \cdot \mathbf{X}_h}{r+|\mathbf{t}|+k} \right) & D_{r+k} \left( \frac{\nabla\nu_k \cdot \mathbf{X}_h}{r+|\mathbf{t}|+k} \right) & \mathbf{0} \\ \hline C_{r+k} \left( -\frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+|\mathbf{t}|+k} \mu_k h \right) & C_{r+k} \left( \frac{(r+|\mathbf{t}|)\nu_k h}{r+|\mathbf{t}|+k} \right) & C_{r+k} (\nabla g \cdot \mathbf{X}_h) \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathcal{D}_{r+k}^{\mathbf{t}} \\ \mathcal{C}_{r+k}^{\mathbf{t}} \end{array}$$

$\mathcal{D}_k^{\mathbf{t}} \qquad \text{Cor}(\ell_k) \qquad \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}}$

### 5.2.1. $\mathcal{C}^\infty$ -Conjugación

El operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación  $\mathbf{L}_{r+k}$  se obtiene como antes, imponiendo  $\nu_k \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{r+k} &: \mathcal{D}_k^{\mathbf{t}} \times \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{D}_{r+k}^{\mathbf{t}} \times \mathcal{C}_{r+k}^{\mathbf{t}} \\ &(\mathbf{P}_k^{\mathbf{d}}, \mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}) \rightarrow \mathbf{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k^{\mathbf{d}}, \mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}) = \left( [\mathbf{P}_k^{\mathbf{d}}, \mathbf{F}_r^{\mathbf{c}}]^{\mathbf{d}}, [\mathbf{P}_k^{\mathbf{d}}, \mathbf{F}_r^{\mathbf{c}}]^{\mathbf{c}} + [\mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}, \mathbf{F}_r^{\mathbf{c}}] \right). \end{aligned}$$

A la vista de esta expresión, definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{r+k}^{\mathbf{d}} &: \mathcal{D}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{D}_{r+k}^{\mathbf{t}} \\ \mathbf{P}_k^{\mathbf{d}} &\rightarrow \mathbf{L}_{r+k}^{\mathbf{d}}(\mathbf{P}_k^{\mathbf{d}}) = [\mathbf{P}_k^{\mathbf{d}}, \mathbf{F}_r^{\mathbf{c}}]^{\mathbf{d}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{r+k}^{\mathbf{c}} &: \text{Ker}(\mathbf{L}_{k+r}^{\mathbf{d}}) \times \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{C}_{r+k}^{\mathbf{t}} \\ &(\tilde{\mathbf{V}}_k^{\mathbf{d}}, \mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}) \rightarrow \mathbf{L}_{r+k}^{\mathbf{c}}(\tilde{\mathbf{V}}_k^{\mathbf{d}}, \mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}) = [\mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}, \mathbf{F}_r^{\mathbf{c}}] + [\tilde{\mathbf{V}}_k^{\mathbf{d}}, \mathbf{F}_r^{\mathbf{c}}]^{\mathbf{c}}. \end{aligned}$$

La siguiente proposición muestra que la simplificación de la forma normal puede alcanzarse mediante dos cambios de variable: el primero anula términos en  $\mathcal{D}_{k+r}^{\mathbf{t}}$  y el segundo no altera la parte disipativa.

**Proposición 5.2.140**  $\text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}) = \text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}^{\mathbf{d}}) \oplus \text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}^{\mathbf{c}})$ .

*Demostración:* Tomamos una base de  $\mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} = \mathcal{D}_k^{\mathbf{t}} \oplus \mathcal{C}_k^{\mathbf{t}}$  como la union de una de  $\mathcal{D}_k^{\mathbf{t}}$  y otra de  $\mathcal{C}_k^{\mathbf{t}}$ . La representación matricial del operador  $\mathbf{L}_{r+k}$  en la anterior base tiene la estructura:

$$\left( \begin{array}{c|c} [\mathbf{P}_k^{\mathbf{d}}, \mathbf{F}_r^{\mathbf{c}}]^{\mathbf{d}} & 0 \\ \hline [\mathbf{P}_k^{\mathbf{d}}, \mathbf{F}_r^{\mathbf{c}}]^{\mathbf{c}} & [\mathbf{P}_k^{\mathbf{c}}, \mathbf{F}_r^{\mathbf{c}}] \end{array} \right).$$

Podemos descomponer  $\mathcal{D}_k^t = D_k^t \oplus \text{Ker}(\mathbf{L}_{r+k}^d)$ . Probemos que  $\dim(D_k^t) \leq \dim(\mathcal{D}_{r+k}^t)$ . Pueden darse las siguientes situaciones:

- Si  $k \notin \mathcal{I}$ , entonces  $\dim(\mathcal{D}_k^t) = 0$  y la desigualdad se cumple trivialmente.
- Si  $k \in \mathcal{I}$  y  $r+k \notin \mathcal{I}$ , entonces  $\mathcal{D}_{r+k}^t$  es el espacio trivial. Por tanto  $\mathcal{D}_k = \text{Ker}(\mathbf{L}_{r+k}^d)$  y así  $D_k^t$  también es el espacio trivial.
- Si  $k, r+k \in \mathcal{I}$ , entonces  $\dim(D_k^t) \leq \dim(\mathcal{D}_k^t) = \dim(\mathcal{P}_k^t) \leq \dim(\mathcal{P}_{r+k}^t) = \dim(\mathcal{D}_{r+k}^t)$ .

Tomando una base adecuada en  $D_k^t \oplus \text{Ker}(\mathbf{L}_k^d) \oplus \mathcal{C}_k^t$ , podemos representar  $\mathbf{L}_{r+k}$  matricialmente como:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d & 0 & 0 \\ \hline [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c & [\tilde{\mathbf{V}}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c & [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c] \end{array} \right),$$

donde la submatriz superior izquierda tiene rango máximo. Como  $\dim(D_k^t) \leq \dim(\mathcal{D}_{r+k}^t)$ , podemos utilizar la reducción por filas (que equivale a un cambio de base) para obtener:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d & 0 & 0 \\ \hline 0 & [\tilde{\mathbf{V}}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c & [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c] \end{array} \right).$$

Esto prueba que  $\text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}) = \text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}^d) + \text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}^c)$ . Además, la intersección de los espacios imágenes de ambas aplicaciones es cero, pues  $\mathcal{Q}_k^t = \mathcal{D}_k^t \oplus \mathcal{C}_k^t$ .

■

La siguiente proposición proporciona la expresión de la parte disipativa del operador homológico  $\mathbf{L}_{r+k}$  en términos del operador lineal escalar  $\ell_{r+k}$ .

**Proposición 5.2.141** *Sea  $\mathbf{P}_k^d = \mu_k \mathbf{D}_0 \in \mathcal{D}_k^t$ . Entonces:*

$$\mathbf{L}_{r+k}^d(\mathbf{P}_k^d) = D_{r+k}(\ell_{r+k}(\mu_k)).$$

*En particular,*

$$(a) \quad \text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}^d) = D_{r+k}(\text{Im}(\ell_{r+k})),$$

$$(b) \quad \text{Ker}(\mathbf{L}_{r+k}^d) = D_k(\text{Ker}(\ell_{r+k})).$$

*Demostración:* La expresión para  $\mathbf{L}_{r+k}^d(\mathbf{P}_k^d)$  es consecuencia del apartado (c) de la Proposición 4.2.121. Los apartados (a), (b) se tienen porque los operadores  $D_k, D_{r+k}$  son inyectivos. ■

El siguiente Teorema determina un subespacio complementario al espacio imagen del operador homológico bajo  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugación  $\mathbf{L}_{r+k}$ , en términos del operador lineal escalar  $\ell_{r+k}$ .

**Teorema 5.2.142** *Sea  $k \in \mathbb{N}$  y supongamos que el primer término cuasihomogéneo del sistema (5.1.1)  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$  es hamiltoniano. Entonces:*

$$(a) \quad \text{Cor}(\mathbf{L}_{r+k}) = D_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k})) \oplus C_{r+k}(\widehat{\text{Cor}}(\ell_{r+k+|t|})), \text{ donde } \text{Cor}(\ell_{r+k+|t|}) = (\delta_{r+k+|t|}(\text{Ker}(\ell_{r+k})) \cap \text{Cor}(\ell_{r+k+|t|})) \oplus \widehat{\text{Cor}}(\ell_{r+k+|t|}).$$

$$(b) \quad \text{Ker}(\mathbf{L}_{r+k}) = \left\{ (D_k(\tilde{\eta}_k), C_k(\tilde{g})) : \tilde{\eta}_k \in \text{Ker}(\ell_{r+k}), \tilde{g} \in \mathcal{P}_{k+|t|}^t, \ell_{r+k+|t|}(\tilde{g}) = \frac{r(r+|t|)}{r+k+|t|} \tilde{\eta}_k h \right\}.$$

*Demostración:* Sean  $\mathbf{P}_k^c = \mathbf{X}_g, \tilde{\mathbf{P}}_k^d = D_k(\tilde{\eta}_k), g \in \mathcal{P}_{k+|t|}^t, \tilde{\eta}_k \in \text{Ker}(\ell_{r+k})$ . Aplicando la Proposición 4.2.121, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{r+k}^c(\tilde{\mathbf{P}}_k^d, \mathbf{P}_k^c) &= C_{r+k}(\nabla g \cdot \mathbf{X}_h) - \frac{r(r+|t|)}{r+k+|t|} C_{r+k}(\tilde{\eta}_k h) \\ &= C_{r+k}(\ell_{r+k+|t|}(g) - \frac{r(r+|t|)}{r+k+|t|} \tilde{\eta}_k h) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} C_{r+k}(\ell_{r+k+|t|}^c(g, \tilde{\eta}_k)). \end{aligned}$$

(a) Usando que  $C_{r+k}$  es un isomorfismo,  $D_{r+k}$  es inyectivo, y aplicando la Proposición 5.2.141, obtenemos que un subespacio complementario a la imagen de  $\mathbf{L}_{r+k}$  es:

$$\begin{aligned} \text{Cor}(\mathbf{L}_{r+k}) &= \text{Cor}(\mathbf{L}_{r+k}^d) \oplus \text{Cor}(\mathbf{L}_{r+k}^c) = D_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k})) \oplus \text{Cor}(\mathbf{L}_{r+k}^c) \\ &= D_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k})) \oplus C_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k+|t|}^c)). \end{aligned}$$

Por último, como  $\text{Im}(\ell_{r+k+|t|}^c) = \text{Im}(\ell_{r+k+|t|}) + \delta_{r+k+|t|}(\text{Ker}(\ell_{r+k}))$ , se tiene:  $\text{Cor}(\ell_{r+k+|t|}^c) = \delta_{r+k+|t|}(\widehat{\text{Cor}}(\ell_{r+k+|t|}))$ .

- (b) Como  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{r+k}) = \text{Ker}(\mathbf{L}_{r+k}^c)$ , es suficiente determinar  $\text{Ker}(\ell_{r+k+|t|}^c)$ . Notemos que  $(\tilde{g}, \tilde{\eta}_k) \in \text{Ker}(\ell_{r+k+|t|}^c)$  si, y sólo si,  $\frac{r(r+|t|)}{r+k+|t|} \delta_{r+k+|t|}(\tilde{\eta}_k) = \ell_{r+k+|t|}^c(\tilde{g})$ , de donde se deduce el resultado. ■

**Nota :** La determinación de  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{r+k})$  es de utilidad para analizar la posibilidad de obtener simplificaciones adicionales en el procedimiento de la forma normal hacia la forma hipernormal.

### 5.2.2. $\mathcal{C}^\infty$ -Equivalencia

Para analizar el operador homológico bajo equivalencia  $\mathcal{L}_{r+k}$ , adaptamos las ideas desarrolladas anteriormente con el objeto de incluir los efectos de las reparametrizaciones en el tiempo. Por la Proposición 1.3.16, es suficiente restringir el dominio de  $\mathcal{L}_{r+k}$  a  $\mathcal{Q}_k^t \times \text{Cor}(\ell_k)$ . Para que la matriz del operador sea diagonal por bloques, escribimos el dominio y el espacio imagen de este operador en una forma diferente:

$$\mathcal{L}_{r+k} : \mathcal{D}_k^t \times \text{Cor}(\ell_k) \times \mathcal{C}_k^t \longrightarrow \mathcal{D}_{r+k}^t \times \mathcal{C}_{r+k}^t,$$

siendo

$$\mathcal{L}_{r+k}(\mathbf{P}_k^d, \nu_k, \mathbf{P}_k^c) = \left( [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d + (\nu_k \mathbf{F}_r^c)^d, [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c] + [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c + (\nu_k \mathbf{F}_r^c)^c \right).$$

Ahora definimos los operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{r+k}^d & : \mathcal{D}_k^t \times \text{Cor}(\ell_k) \longrightarrow \mathcal{D}_{r+k}^t \\ (\mathbf{P}_k^d, \nu_k) & \rightarrow \mathcal{L}_{r+k}^d(\mathbf{P}_k^d, \nu_k) = [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d + (\nu_k \mathbf{F}_r^c)^d, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{r+k}^c & : \text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}^d) \times \mathcal{C}_k^t \longrightarrow \mathcal{C}_{r+k}^t \\ (\tilde{\mathbf{P}}_k^d, \tilde{\nu}_k, \mathbf{P}_k^c) & \rightarrow \mathcal{L}_{r+k}^c(\tilde{\mathbf{P}}_k^d, \tilde{\nu}_k, \mathbf{P}_k^c) = [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c] + [\tilde{\mathbf{P}}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c + (\tilde{\nu}_k \mathbf{F}_r^c)^c. \end{aligned}$$

Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 5.2.143**  $\text{Im}(\mathcal{L}_{r+k}) = \text{Im}(\mathcal{L}_{r+k}^d) \oplus \text{Im}(\mathcal{L}_{r+k}^c)$ .

*Demostración:* Seguimos un procedimiento análogo al de la Proposición 5.2.140. Tomando una base adecuada, la matriz de  $\mathcal{L}_{r+k}$  es:

$$\left( \begin{array}{c|c} [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d + (\nu_k \mathbf{F}_r^c)^d & 0 \\ \hline [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c + (\nu_k \mathbf{F}_r^c)^c & [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c] \end{array} \right).$$

Escribimos  $\mathcal{D}_k^t \oplus \text{Cor}(\ell_k) = \tilde{\mathcal{D}}_k^t \oplus \text{Ker}(\mathcal{L}_k^d)$ , donde  $\tilde{\mathcal{D}}_k^t$  denota un subespacio complementario a  $\text{Ker}(\mathcal{L}_k^d)$ . Notemos que  $\dim(\tilde{\mathcal{D}}_k^t) \leq \dim(\mathcal{D}_{r+k}^t)$ .

Tomando una base adecuada en  $\tilde{\mathcal{D}}_k^t \oplus \text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}^d) \oplus \mathcal{C}_k^t$ , obtenemos una representación matricial para  $\mathcal{L}_{r+k}^d$  de la forma:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d & 0 & 0 \\ \hline [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c & \mathcal{L}_{r+k}^c(\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}^d)) & [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c] \end{array} \right).$$

Las columnas de la primera submatriz son linealmente independientes. Entonces, usando reducción por filas, podemos transformar la anterior matriz en:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{L}_{r+k}^c(\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}^d)) & [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c] \end{array} \right).$$

Esto prueba que  $\text{Im}(\mathcal{L}_{r+k}) = \text{Im}(\mathcal{L}_{r+k}^d) + \text{Im}(\mathcal{L}_{r+k}^c)$ . Finalmente, la suma es directa ya que  $\mathcal{Q}_k^t = \mathcal{D}_k^t \oplus \mathcal{C}_k^t$ . ■

La siguiente proposición expresa la parte disipativa de  $\mathcal{L}_{r+k}$  en términos del operador lineal escalar  $\ell_{r+k}$ .

**Proposición 5.2.144** Sea  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{P}_k^d = D_k(\mu_k) \in \mathcal{D}_k^t$ ,  $\nu_k \in \text{Cor}(\ell_k)$ . Entonces:

$$\mathcal{L}_{r+k}^d(\mathbf{P}_k^d, \nu_k) = D_{r+k} \left( \ell_{r+k} \left( \frac{(k+|\mathbf{t}|)\mu_k + \nu_k}{r+k+|\mathbf{t}|} \right) \right).$$

*Más aún:*

- (a)  $\text{Im}(\mathcal{L}_{r+k}^d) = D_{r+k}(\text{Im}(\ell_{r+k})) (= \text{Im}(\mathbf{L}_{r+k}^d)),$   
 (b)  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}^d) = \left\{ \left( \left( -\frac{1}{k+|\mathbf{t}|} \tilde{\nu}_k + \tilde{\eta}_k \right) \mathbf{D}_0, \tilde{\nu}_k \right) : \tilde{\nu}_k \in \text{Cor}(\ell_k), \tilde{\eta}_k \in \text{Ker}(\ell_{r+k}) \right\}.$

*Demostración:* Aplicando los apartados (c) y (d) de la Proposición 4.2.121, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{r+k}^d(\mathbf{P}_k^d, \nu_k) &= [\mathbf{P}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^d + (\nu_k \mathbf{F}_r^c)^d \\ &= D_{r+k} \left( \ell_{r+k} \left( \frac{k+|\mathbf{t}|}{r+k+|\mathbf{t}|} \mu_k \right) \right) + D_{r+k} \left( \ell_{r+k} \left( \frac{1}{r+k+|\mathbf{t}|} \nu_k \right) \right) \\ &= D_{r+k} \left( \ell_{r+k} \left( \frac{(k+|\mathbf{t}|)\mu_k + \nu_k}{r+k+|\mathbf{t}|} \right) \right). \end{aligned}$$

De esta igualdad se obtiene trivialmente el apartado (a). Para probar el apartado (b), notemos que  $(\tilde{\mathbf{P}}_k^d, \tilde{\nu}_k) \in \text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}^d)$  si, y sólo si  $(k+|\mathbf{t}|)\tilde{\mu}_k + \tilde{\nu}_k \in \text{Ker}(\ell_{r+k})$ , i.e.,  $\tilde{\mu}_k = -\frac{1}{k+|\mathbf{t}|}\tilde{\nu}_k + \tilde{\eta}_k$ , con  $\tilde{\eta}_k \in \text{Ker}(\ell_{r+k})$ . ■

El siguiente teorema determina una forma normal bajo equivalencia, basada en el operador lineal escalar  $\ell_{r+k}$ .

**Teorema 5.2.145** *Sea  $k \in \mathbb{N}$  y supongamos que el primer término cuasihomogéneo del sistema (5.1.1)  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$  es hamiltoniano. Entonces:*

- (a)  $\text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k}) = D_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k})) \oplus C_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) \cap \text{Cor}(\delta_{r+k+|\mathbf{t}|})).$   
 (b)  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}) = \left\{ \left( D_k \left( \tilde{\nu}_k - \frac{\tilde{\eta}_k}{k+|\mathbf{t}|} \right), \tilde{\nu}_k, C_k(\tilde{g}) \right) : \begin{array}{l} \nabla \tilde{g} \mathbf{X}_h = \left( \frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|} \tilde{\eta}_k - \frac{r+|\mathbf{t}|}{k+|\mathbf{t}|} \tilde{\nu}_k \right) h, \\ \tilde{\eta}_k \in \text{Ker}(\ell_{r+k}), \tilde{\nu}_k \in \text{Cor}(\ell_k), \\ \tilde{g} \in \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}} \end{array} \right\}.$

*Demostración:* Sean  $(\tilde{\mathbf{P}}_k^d, \tilde{\nu}_k) \in \text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}^d)$ , con  $\tilde{\mathbf{P}}_k^d = D_k \left( -\frac{1}{k+|\mathbf{t}|} \tilde{\nu}_k + \tilde{\eta}_k \right)$ , y  $\mathbf{P}_k^c = C_k(g)$ , donde  $g \in \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$ . Aplicando los apartados (a), (c) y (d) de la Proposición 4.2.121, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{r+k}^c(\tilde{\mathbf{P}}_k^d, \tilde{\nu}_k, \mathbf{P}_k^c) &= [\mathbf{P}_k^c, \mathbf{F}_r^c] + [\tilde{\mathbf{P}}_k^d, \mathbf{F}_r^c]^c + (\tilde{\nu}_k \mathbf{F}_r^c)^c \\ &= C_{r+k}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}(g)) - \frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|} C_{r+k} \left( -\frac{1}{k+|\mathbf{t}|} \tilde{\nu}_k h + \tilde{\eta}_k h \right) \\ &\quad + C_{r+k} \left( \frac{r+|\mathbf{t}|}{r+k+|\mathbf{t}|} \tilde{\nu}_k h \right) \\ &= C_{r+k} \left( \ell_{r+k+|\mathbf{t}|}(g) - \frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|} \tilde{\eta}_k h + \frac{r+|\mathbf{t}|}{k+|\mathbf{t}|} \tilde{\nu}_k h \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_{r+k} \left( \ell_{r+k+|t|} (g) + \delta_{r+k+|t|} \left( -\frac{r(r+|t|)}{r+k+|t|} \tilde{\eta}_k + \frac{r+|t|}{k+|t|} \tilde{\nu}_k \right) \right) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} C_{r+k} \left( \tilde{\ell}_{r+k+|t|}^c (g, \tilde{\eta}_k, \tilde{\nu}_k) \right).
\end{aligned}$$

(a) Usando que  $C_{r+k}$  es un isomorfismo,  $D_{r+k}$  es inyectivo, y aplicando la Proposición 5.2.144, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k}) &= \text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k}^d) \bigoplus \text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k}^c) = \text{Cor}(\mathbf{L}_{r+k}^d) \bigoplus \text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k}^c) \\
&= D_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k})) \bigoplus C_{r+k} \left( \text{Cor} \left( \tilde{\ell}_{r+k+|t|}^c \right) \right).
\end{aligned}$$

Utilizando el Lema 4.2.128 a) se deduce que  $\delta_{r+k+|t|}(\text{Im}(\ell_k)) \subset \text{Im}(\ell_{r+k+|t|})$  y por tanto:

$$\begin{aligned}
\text{Im} \left( \tilde{\ell}_{r+k+|t|}^c \right) &= \text{Im}(\ell_{r+k+|t|}) + \delta_{r+k+|t|}(\text{Ker}(\ell_{r+k})) + \delta_{r+k+|t|}(\text{Cor}(\ell_k)) \\
&= \text{Im}(\ell_{r+k+|t|}) + \text{Im}(\delta_{r+k+|t|}),
\end{aligned}$$

y de aquí obtenemos el resultado.

(b) Como  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}) = \text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}^c)$ , es suficiente determinar  $\text{Ker} \left( \tilde{\ell}_{r+k+|t|}^c \right)$ . Notemos que  $(\tilde{\eta}_k, \tilde{\nu}_k, \tilde{g}) \in \text{Ker} \left( \tilde{\ell}_{r+k+|t|}^c \right)$  si, y sólo si

$$\ell_{r+k+|t|}(\tilde{g}) = \delta_{r+k+|t|} \left( \frac{r(r+|t|)}{r+k+|t|} \tilde{\eta}_k - \frac{r+|t|}{k+|t|} \tilde{\nu}_k \right).$$

■

**Nota 1:** Observemos que  $\mathcal{L}_{r+k}$  y  $\mathbf{L}_{r+k}$  determinan las mismas simplificaciones en la parte disipativa. Sin embargo, en general,  $\mathcal{L}_{r+k}$  consigue mayores simplificaciones en la parte conservativa que  $\mathbf{L}_{r+k}$ , ya que

$$\begin{aligned}
\text{Cor}(\ell_{r+k+|t|}) &= (\text{Cor}(\ell_{r+k+|t|}) \cap \text{Cor}(\delta_{r+k+|t|})) \\
&\quad \bigoplus (\text{Cor}(\ell_{r+k+|t|}) \cap \text{Im}(\delta_{r+k+|t|})).
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\text{Cor}(\ell_{r+k+|t|}) \cap \delta_{r+k+|t|}(\text{Ker}(\ell_{r+k})) \subset \text{Cor}(\ell_{r+k+|t|}) \cap \text{Im}(\delta_{r+k+|t|}).$$

Por tanto,  $\text{Cor}(\ell_{r+k+|t|}) \cap \text{Cor}(\delta_{r+k+|t|}) \subset \widehat{\text{Cor}}(\ell_{r+k+|t|})$ .

**Nota 2:** La caracterización de  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k})$  es útil para conseguir simplificaciones adicionales en la forma normal.

**Teorema 5.2.146** *Supongamos que el primer término cuasihomogéneo del sistema (5.1.1)  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$  es hamiltoniano, y los factores de la descomposición (3.5.23) de  $h$  son simples. Entonces:*

- (a)  $\text{Cor}(\mathbf{L}_{r+k}) = D_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k})) \oplus C_{r+k}(\widehat{\text{Cor}}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}))$ ,  
donde  $\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) = \text{Ker}(\ell_{2r+k+|\mathbf{t}|}) \oplus \widehat{\text{Cor}}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .
- (b)  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{r+k}) = C_k(\text{Ker}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}))$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

*Demostración:*

- (a) Usando el Teorema 5.2.142, deducimos que  
 $\text{Cor}(\mathbf{L}_{r+k}) = D_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k})) \oplus C_{r+k}(\widehat{\text{Cor}}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}))$ , donde  $\widehat{\text{Cor}}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})$  denota un subespacio complementario a  $\delta_{r+k+|\mathbf{t}|}(\text{Ker}(\ell_{r+k})) \cap \text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})$  en  $\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})$ . Utilizando los Lemas 4.2.125 y 4.2.128 **a**) obtenemos  $\delta_{r+k+|\mathbf{t}|}(\text{Ker}(\ell_{r+k})) = \text{Ker}(\ell_{2r+k+|\mathbf{t}|}) \subset \text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})$ , de donde obtenemos el resultado.
- (b) El Teorema 5.2.142 muestra que los elementos de  $\text{Ker}(\mathbf{L}_{r+k})$  son de la forma  $(D_k(\tilde{\eta}_k), C_k(\tilde{g}))$ , con  $\tilde{\eta}_k \in \text{Ker}(\ell_{r+k})$ ,  $\tilde{g} \in \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$  tales que  $\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}(g) = \frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|} \tilde{\eta}_k h$ . Utilizando los Lemas 4.2.125 y 4.2.128 **a**) obtenemos que  $\tilde{\eta}_k h \in \delta_{r+k+|\mathbf{t}|}(\text{Ker}(\ell_{r+k})) = \text{Ker}(\ell_{2r+k+|\mathbf{t}|}) \subset \text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})$ . Por otra parte,  $\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}(g) \in \text{Im}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})$ , luego debe ser  $\tilde{\eta}_k = 0$  y  $\tilde{g} \in \text{Ker}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})$ . ■

**Teorema 5.2.147** *Supongamos que el primer término cuasihomogéneo del sistema (5.1.1)  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$  es hamiltoniano, donde  $h$  esta dado en (3.5.23), (esto es, su factorización sólo posee factores simples). Entonces:*

- (a) Si  $k - r \notin \mathcal{I}^{\mathbf{t}}$ :

$$\begin{aligned} \text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k}) &= D_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k})) \oplus C_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) \cap \text{Cor}(\delta_{r+k+|\mathbf{t}|})), \\ \text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}) &= \left\{ \left( D_k(\tilde{\eta}_k), \frac{r(k+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|} \tilde{\eta}_k, 0 \right) : \tilde{\eta}_k \in \text{Ker}(\ell_{r+k}) \right\}. \end{aligned}$$



(b) Si  $k - r \in \mathcal{I}^t$ :

$$\begin{aligned} \text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k}) &= D_{r+k}(\text{Cor}(\ell_{r+k})), \\ \text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}) &= \left\{ \left( D_k(\tilde{\eta}_k), \frac{r(k+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|}\tilde{\eta}_k, C_k(\tilde{g}) \right) : \begin{array}{l} \tilde{\eta}_k \in \text{Ker}(\ell_{r+k}), \\ \tilde{g} \in \text{Ker}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

*Demostración:* La expresión de  $\text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k})$  para  $k - r \notin \mathcal{I}^t$  está incluida en el Teorema 5.2.145.

Si  $k - r \in \mathcal{I}^t$ , por el Lema 4.2.130 se tiene que  $\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) \subset \text{Im}(\delta_{r+k+|\mathbf{t}|})$ , de donde obtenemos la expresión de  $\text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k})$  dada en (b).

Por el Teorema 5.2.145, se tiene que los elementos de  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k})$  son de la forma  $\left( D_k\left(\tilde{\eta}_k - \frac{\tilde{\nu}_k}{k+|\mathbf{t}|}\right), \tilde{\nu}_k, C_k(\tilde{g}) \right)$ , donde  $\tilde{\eta}_k \in \text{Ker}(\ell_{r+k})$ ,  $\tilde{\nu}_k \in \text{Cor}(\ell_k)$ ,  $\tilde{g} \in \mathcal{P}_{k+|\mathbf{t}|}^t$  y  $\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}(\tilde{g}) = \delta_{r+k+|\mathbf{t}|}\left(\frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|}\tilde{\eta}_k - \frac{r+|\mathbf{t}|}{k+|\mathbf{t}|}\tilde{\nu}_k\right)$ . Aplicando el Lema 4.2.129, se tiene que  $\frac{r(r+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|}\tilde{\eta}_k - \frac{r+|\mathbf{t}|}{k+|\mathbf{t}|}\tilde{\nu}_k \in \text{Cor}(\ell_k)$ , ya que  $\text{Ker}(\ell_{r+k}) \subset \text{Cor}(\ell_k)$ . Usando ahora el Lema 4.2.130 obtenemos que  $\delta_{r+k+|\mathbf{t}|}(\text{Cor}(\ell_k)) \subset \text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})$ , por lo que  $\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}(\tilde{g}) \in \text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) \cap \text{Im}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) = \{0\}$ . Así  $\tilde{g} \in \text{Ker}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|})$  y  $\tilde{\nu}_k = \frac{r(k+|\mathbf{t}|)}{r+k+|\mathbf{t}|}\tilde{\eta}_k$ , por tanto  $\tilde{\eta}_k - \frac{\tilde{\nu}_k}{k+|\mathbf{t}|} = \frac{k+|\mathbf{t}|}{r+k+|\mathbf{t}|}\tilde{\eta}_k$ . Este es el resultado sobre el núcleo dado en (b).

Por otra parte si  $\tilde{g} \in \text{Ker}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) \setminus \{0\}$ . aplicando el Lema 4.2.125 debe ser  $k + |\mathbf{t}| = l_1(r + |\mathbf{t}|)$  con  $l_1 \in \mathbb{N}$  y  $\tilde{g} = h^{l_1}$ . Así  $k - r = (l_1 - 1)(r + |\mathbf{t}|) \in \mathcal{I}^t$ , por lo que si  $k - r \notin \mathcal{I}^t$  debe ser  $\tilde{g} = 0$  que es el enunciado sobre el núcleo del apartado (a). ■

**Lema 5.2.148** Sea  $k = (r + |\mathbf{t}|)l_1 + l_2 \in \mathbb{N}$  con  $0 \leq l_2 < r + |\mathbf{t}|$ . Entonces:  $k - r \notin \mathcal{I}^t$  únicamente en uno de los siguientes casos:

(a)  $l_2 - r \notin \mathcal{I}^t$ ,  $l_2 + |\mathbf{t}| \notin \mathcal{I}^t$ ,  $l_1 = 1$ .

(b)  $l_2 - r \notin \mathcal{I}^t$ ,  $l_1 = 0$ ,  $l_2 > 0$ .

*Demostración:* De la expresión (3.5.23), se deduce que  $r + |\mathbf{t}| \in \mathcal{I}^t$ . Usando el Lema 4.2.116, se tiene también que  $r + |\mathbf{t}| \geq t_1 t_2$ . Por otra parte:  $k - r = l_1(r + |\mathbf{t}|) + l_2 - r$ .

Si  $l_2 - r \in \mathcal{I}^t$ , como  $l_1(r + |\mathbf{t}|) \in \mathcal{I}^t$  para  $l_1 \geq 0$ , se tiene que  $k - r \in \mathcal{I}^t$  (por ser la suma una ley interna en el conjunto  $\mathcal{I}^t$ ).

Si  $l_2 - r \notin \mathcal{I}^t$  y  $l_1 \geq 2$ , entonces

$$\begin{aligned} k - r &= l_1(r + |\mathbf{t}|) + l_2 - r = (l_1 - 1)(r + |\mathbf{t}|) + l_2 + |\mathbf{t}| > (l_1 - 1)(r + |\mathbf{t}|) \\ &\geq r + |\mathbf{t}| \geq t_1 t_2 > t_1 t_2 - |\mathbf{t}|. \end{aligned}$$

Usando el Lema 2.3.27, se tendría  $k - r \in \mathcal{I}^t$ .

Si  $l_2 - r \notin \mathcal{I}^t$ ,  $l_1 = 1$ ,  $l_2 + |\mathbf{t}| \in \mathcal{I}^t$ , entonces  $k - r = l_2 + |\mathbf{t}| \in \mathcal{I}^t$ .

Los dos únicos casos que restan son los expresados en el enunciado. En el caso **(b)**, hemos de tener en cuenta que  $l_2 > 0$ , ya que en otro caso  $k \notin \mathbb{N}$ . ■

**Teorema 5.2.149** *Supongamos que el primer término cuasihomogéneo del sistema (5.1.1)  $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h$  es hamiltoniano, donde  $h$  está dado en (3.5.23), (esto es, su factorización sólo posee factores simples). Denotemos*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \{i \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq i < r + |\mathbf{t}|\}, \\ \mathcal{I}_1 &= \{i \in \mathcal{I} \mid i - r \in \mathcal{I}^t \setminus \{0\}\}, \\ \mathcal{I}_2 &= \{i \in \mathcal{I} - \mathcal{I}_1 \mid i + |\mathbf{t}| \in \mathcal{I}^t\}, \\ \mathcal{I}_3 &= \mathcal{I} - (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2), \\ \mathcal{I}_4 &= \{i \in \mathcal{I} \mid i > r\}. \end{aligned}$$

Entonces, una forma normal formal bajo equivalencia a paso uno es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \mathbf{X}_h(\mathbf{x}) + \sum_{j_2 \in \mathcal{I}_2 \setminus \{0\}} \mathbf{X}_{q_{j_2}}(\mathbf{x}) + \sum_{j_3 \in \mathcal{I}_3} \mathbf{X}_{q_{j_3}}(\mathbf{x}) \\ &+ \sum_{i_4 \in \mathcal{I}_4} p_{i_4}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 + \sum_{i_3 \in \mathcal{I}_3} p_{i_3}^{(0)} \mathbf{D}_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \sum_{i_3 \in \mathcal{I}_3} p_{i_3}^{(l)}(\mathbf{x}) h^{l-1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \right. \\ &\left. + \sum_{i_2 \in \mathcal{I}_2} p_{i_2}^{(l)}(\mathbf{x}) h^l(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 + \sum_{i_1 \in \mathcal{I}_1} p_{i_1}^{(l)}(\mathbf{x}) h^{l+1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \right], \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

donde  $q_{j_2} \in \text{Cor}(\ell_{r+|\mathbf{t}|+j_2}) \cap \text{Cor}(\delta_{r+|\mathbf{t}|+j_2})$ ,  $q_{j_3} \in \text{Cor}(\ell_{2(r+|\mathbf{t}|)+j_3}) \cap \text{Cor}(\delta_{2(r+|\mathbf{t}|)+j_3})$ ,  $p_{i_4} \in \text{Cor}(\ell_{i_4})$ ,  $p_{i_3}^{(0)} \in \text{Cor}(\ell_{r+|\mathbf{t}|+i_3})$  y  $p_{i_3}^{(l)} \in \text{Cor}(\ell_{2(r+|\mathbf{t}|)+i_3})$ ,  $p_{i_2}^{(l)} \in \text{Cor}(\ell_{r+|\mathbf{t}|+i_2})$ ,  $p_{i_1}^{(l)} \in \text{Cor}(\ell_{i_1})$  para  $l \geq 1$ .

Además si  $k = l_1(r + |\mathbf{t}|) + l_2 \in \mathbb{N}$  con  $0 \leq l_2 < r + |\mathbf{t}|$  se tiene:

$$\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k}) = \begin{cases} (0, 0, C_k(h^{l_1+1})) & \text{si } l_2 = r, \\ \left(D_k(h^{l_1}), \frac{r[l_1(r+|\mathbf{t}|)+|\mathbf{t}|]}{(l_1+1)(r+|\mathbf{t}|)}h^{l_1}, 0\right) & \text{si } l_2 = 0, \\ (0, 0, 0) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración:* Basta usar el Teorema 5.2.147, combinandola con la Proposición 4.3.133 para hallar los  $\text{Cor}(\ell_{r+k})$ , la Proposición 5.2.148 para hallar  $\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) \cap \text{Cor}(\delta_{r+k+|\mathbf{t}|})$  en el caso  $k - r \notin \mathcal{I}^{\mathbf{t}}$  y el Lema 4.2.125 para la expresión de  $\text{Ker}(\ell_{r+k})$ . ■

### 5.3. Forma normal de algunas familias

En esta sección, aplicaremos las ideas anteriores al cálculo de diferentes formas normales en algunos casos particulares. Concretamente, consideraremos una singularidad de tipo Takens-Bogdanov hamiltoniana. Este análisis incluye como caso particular, la forma normal de una perturbación de un centro lineal y de un punto de silla lineal con traza cero. También consideramos varios casos de singularidades con parte lineal nula.

#### 5.3.1. Singularidad de Takens-Bogdanov de tipo $\mathbf{t} = (1, n)$

Nuestro primer ejemplo corresponde a la elección del tipo  $\mathbf{t} = (1, n)$ . Estudiamos perturbaciones del campo  $\mathbf{F}_r = (y, \sigma x^{2n-1})^T$ , donde  $\sigma = \pm 1$  y  $r = n-1$ . De esta forma, el sistema (5.1.1) queda:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \sigma x^{2n-1} \end{pmatrix} + \text{H.O.T.}, \quad (5.3.3)$$

siendo  $\sigma = \pm 1$ .

Observemos que  $\mathbf{F}_{n-1} = \mathbf{X}_h$  es un campo hamiltoniano, con función de Hamilton  $h(x, y) = \frac{1}{2n}\sigma x^{2n} - \frac{1}{2}y^2 \in \mathcal{P}_{2n}^{\mathbf{t}}$ .

En la Sección 4.3.1 llevamos a cabo el estudio del rango del operador  $\ell_{r+k}$ , y obtuvimos que  $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_4 = \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$ ,  $\mathcal{I}_3 = \emptyset$ ,  $\mathcal{I}_2 =$

$\{0, 1, \dots, n-1\}$ . Del mencionado estudio, se deduce, para  $k \in \mathcal{I}_2 \setminus \{0\}$ , que  $\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) \cap \text{Cor}(\delta_{r+k+|\mathbf{t}|}) = \{0\}$ . Aplicando el Teorema 5.2.149, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.3.150** *Una forma normal bajo equivalencia para el sistema (5.3.3) es:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \sigma x^{2n-1} \end{pmatrix} + \sum_{j=n}^{2n-2} \alpha_j^{(0)} x^j \mathbf{D}_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2n-2} \alpha_j^{(l)} x^j h^l(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0. \quad (5.3.4)$$

Además,  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{2(n-1)+2nl}) = \text{span}\{(0, 0, \mathbf{X}_{h^{l+1}})\}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ;  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{n-1+2nl}) = \text{span}\left\{\left(h^l \mathbf{D}_0, \frac{(n-1)(2nl+n+1)}{2n(l+1)} h^l, 0\right)\right\}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ; siendo  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k})$  el espacio trivial en los restantes casos.

**Nota:** Si  $n = 1$ , para  $\sigma = -1$  se tiene el caso perturbación de foco lineal con divergencia nula y para  $\sigma = 1$  el caso perturbación de un silla lineal con divergencia nula. Se puede probar que, en este caso, la anterior es la forma normal más simple que puede obtenerse.

### 5.3.2. Singularidad de Takens-Bogdanov de tipo $\mathbf{t} = (2, 2n+1)$

Consideremos el tipo  $\mathbf{t} = (2, 2n+1)$  y estudiemos perturbaciones del campo  $\mathbf{F}_r = (y, x^{2n})^T$ , donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $r = 2n - 1$ .

Por tanto, el sistema (5.1.1) se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^{2n} \end{pmatrix} + \text{H.O.T.} \quad (5.3.5)$$

Observemos que,  $\mathbf{F}_{2n-1} = \mathbf{X}_h$  es un campo hamiltoniano con función de Hamilton  $h(x, y) = \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} - \frac{1}{2} y^2 \in \mathcal{P}_{4n+2}^{\mathbf{t}}$ .

El estudio del rango del operador  $\ell_{r+k}$ , realizado en la Sección 4.3.2, muestra que  $\mathcal{I}_1 = \{2n + 2j + 1 : 0 \leq j \leq n\} \cup \{4n\}$ ,  $\mathcal{I}_2 = \{j : 0 \leq j \leq 2n - 1\} \cup \{2n + 2j : 0 \leq j \leq n - 1\}$ ,  $\mathcal{I}_3 = \emptyset$ ,  $\mathcal{I}_4 = \{j : 2n \leq j \leq 4n + 1\}$ . Del mencionado estudio se deduce que  $\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) \cap \text{Cor}(\delta_{r+k+|\mathbf{t}|}) = \{0\}$ , para  $k \in \mathcal{I}_2 \setminus \{0\}$ . Aplicando el Teorema 5.2.149, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.3.151** *Una forma normal bajo equivalencia para el sistema (5.3.5) es:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^{2n} \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^{(0)} x^{n+j} \mathbf{D}_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_j^{(l)} x^j h^l(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0. \quad (5.3.6)$$

Además,  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{4n-2+2(2n+1)l}) = \text{span}\{(0, 0, \mathbf{X}_{h^{l+1}})\}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{2n-1+2(2n+1)l}) = \text{span}\left\{\left(h^l \mathbf{D}_0, \frac{(2n-1)(2(2n+1)l+2n+3)}{2(2n+1)(l+1)} h^l, 0\right)\right\}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , y  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k})$  es el espacio trivial en el resto de casos.

### 5.3.3. Singularidad con parte lineal nula

Consideremos una perturbación de un sistema cúbico, dada por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^3 + 3\mu x^2 y \\ -x^3 - 3\mu x y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 x^4 + a_1 x^3 y + a_2 x^2 y^2 + a_3 x y^3 + a_4 y^4 \\ b_0 x^4 + b_1 x^3 y + b_2 x^2 y^2 + b_3 x y^3 + b_4 y^4 \end{pmatrix} + \dots \quad (5.3.7)$$

En este caso, el primer término cuasihomogéneo es  $\mathbf{F}_2 = (y^3 + 3\mu x^2 y, -x^3 - 3\mu x y^2)^T$ , del tipo  $\mathbf{t} = (1, 1)$  y grado  $r = 2$ .

Tenemos que  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{X}_h$  es un campo vectorial hamiltoniano, con función de Hamilton  $h(x, y) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{3}{2}\mu x^2 y^2 = -\frac{1}{4}[(y^2 + 3\mu x^2)^2 + (1 - 9\mu^2)x^4] \in \mathcal{P}_4^{\mathbf{t}}$ . Exigimos que  $\mu \neq \pm\frac{1}{3}$ , para que todos los factores de  $h$  sean simples. Notemos que, en este caso,  $\mathbf{D}_0 = (x, y)^T$ .

Como tenemos el tipo  $\mathbf{t} = (1, 1)$ , trabajaremos con términos homogéneos. Esto es,  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$  es el espacio de los polinomios escalares homogéneos de grado  $k$ .

Aplicando el Teorema 5.2.149, en este caso se tiene:  $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_4 = \{3\}$ ,  $\mathcal{I}_2 = \{0, 1, 2\}$  y  $\mathcal{I}_3 = \emptyset$ . Así, sólo necesitamos calcular  $\text{Cor}(\ell_k)$  para  $k = 3$ ,  $\text{Cor}(\ell_{4+k})$  para  $0 \leq k \leq 2$  y  $\text{Cor}(\ell_{4+k}) \cap \text{Cor}(\delta_{4+k})$ , para  $1 \leq k \leq 2$ .

- Caso  $k = 3 \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_4$ , escribiendo  $\mu_1(x, y) = \alpha_0^{(1)} x + \alpha_0^{(2)} y \in \mathcal{P}_1^{\mathbf{t}}$ . Tras algunas operaciones obtenemos  $\ell_3(\mu_1) = -\alpha_0^{(2)} x^3 + 3\alpha_0^{(1)} \mu x^2 y - 3\alpha_0^{(2)} \mu x y^2 + \alpha_0^{(1)} y^3$ , de donde

$$\text{Cor}(\ell_3) = \text{span}\{x^2 y, x y^2\}.$$

- Caso  $k = 0 \in \mathcal{I}_2$ , escribiremos  $\mu_2(x, y) = \alpha_0^{(1)} x^2 + \alpha_0^{(2)} x y + \alpha_0^{(3)} y^2 \in \mathcal{P}_2^{\mathbf{t}}$ . Usando un sistema de álgebra computacional, hemos obtenido:

$$\ell_4(\mu_2) = -2\alpha_0^{(2)} x^4 + 2\left(3\alpha_0^{(1)} \mu - \alpha_0^{(3)}\right) x^3 y - 6\alpha_0^{(2)} \mu x^2 y^2$$

$$+2 \left( \alpha_0^{(1)} - 3\alpha_0^{(3)} \mu \right) xy^3 - 4\alpha_0^{(2)} h(x, y).$$

Entonces, al ser  $\mu \neq \pm \frac{1}{3}$ , se tiene que:

$$\text{Cor}(\ell_4) = \text{span} \{h(x, y), x^2y^2\}.$$

- Caso  $k = 1 \in \mathcal{I}_2$ , escribimos  $\mu_3(x, y) = \alpha_0^{(1)}x^3 + \alpha_0^{(2)}x^2y + \alpha_0^{(3)}xy^2 + \alpha_0^{(4)}y^3 \in \mathcal{P}_3^{\mathbf{t}}$ . Después de algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned} \ell_5(\mu_3) &= -3 \left( \alpha_0^{(2)} - 3\alpha_0^{(4)} \mu \right) x^5 - 3 \left( \alpha_0^{(3)} - 3\alpha_0^{(1)} \mu \right) x^4y \\ &\quad - 3 \left( 3\alpha_0^{(2)} \mu + (1 - 18\mu^2) \alpha_0^{(4)} \right) x^3y^2 - 3 \left( 3\alpha_0^{(3)} \mu - \alpha_0^{(1)} \right) x^2y^3 \\ &\quad - 4 \left( 2\alpha_0^{(2)} - 9\alpha_0^{(4)} \mu \right) xh(x, y) - 4\alpha_0^{(3)}yh(x, y). \end{aligned}$$

Puesto que  $\mu \neq \pm \frac{1}{3}$ , se tiene que:

$$\text{Cor}(\ell_5) = \text{span} \{xh(x, y), yh(x, y)\}, \quad \text{Cor}(\ell_5) \cap \text{Cor}(\delta_5) = \{0\}.$$

- Caso  $k = 2 \in \mathcal{I}_2$ , si escribimos  $\mu_4(x, y) = \alpha_0^{(1)}x^4 + \alpha_0^{(2)}x^3y + \alpha_0^{(3)}x^2y^2 + \alpha_0^{(4)}xy^3 + \alpha_1^{(0)}h \in \mathcal{P}_4^{\mathbf{t}}$ . Tras algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned} \ell_6(\mu_4) &= 4 \left( 3\alpha_0^{(4)} \mu - \alpha_0^{(2)} \right) x^6 - 4 \left( \alpha_0^{(3)} - 3\alpha_0^{(1)} \mu \right) x^5y \\ &\quad - 4 \left( 3\alpha_0^{(2)} \mu + (1 - 18\mu^2) \alpha_0^{(4)} \right) x^4y^2 + 4 \left( \alpha_0^{(1)} - 3\alpha_0^{(3)} \mu \right) x^3y^3 \\ &\quad + 12 \left( \alpha_0^{(2)} - 4\alpha_0^{(4)} \mu \right) x^2h(x, y) - 8\alpha_0^{(3)}xyh(x, y) - 4\alpha_0^{(4)}y^2h(x, y). \end{aligned}$$

Al ser  $\mu \neq \pm \frac{1}{3}$ , tenemos:

$$\text{Cor}(\ell_6) = \text{span} \{x^2h(x, y), xyh(x, y), y^2h(x, y)\}, \quad \text{Cor}(\ell_6) \cap \text{Cor}(\delta_6) = \{0\}$$

Utilizando ahora el Teorema 5.2.149, deducimos el siguiente resultado:

**Teorema 5.3.152** *Una forma normal bajo equivalencia para el sistema (5.3.7)*

es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y^3 + 3\mu x^2y \\ -x^3 - 3\mu xy^2 \end{pmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty} \left( \alpha_{4l+3}^{(1)} x^2 y h^l(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 + \alpha_{4l+3}^{(2)} x y^2 h^l(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \right) \\ &\quad + \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \left( \alpha_{4l+4}^{(1)} h^{l+1}(\mathbf{x}) + \alpha_{4l+4}^{(2)} x^2 y^2 h^l(\mathbf{x}) \right) \mathbf{D}_0 \right. \\ &\quad + \left( \alpha_{4l+5}^{(1)} x h^{l+1}(\mathbf{x}) + \alpha_{4l+5}^{(2)} y h^{l+1}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{D}_0 \\ &\quad \left. + \left( \alpha_{4l+6}^{(1)} x^2 h^{l+1}(\mathbf{x}) + \alpha_{4l+6}^{(2)} x y h^{l+1}(\mathbf{x}) + \alpha_{4l+6}^{(3)} y^2 h^{l+1}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{D}_0 \right]. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Además,  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{4+4l}) = \text{span}\{(0, 0, \mathbf{X}_{h^{l+1}})\}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{2+4l}) = \text{span}\{(h^l \mathbf{D}_0, \frac{2l+1}{l+1} h^l, 0)\}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , siendo  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k})$  el espacio trivial en el resto de casos.

### 5.3.4. Otra singularidad con parte lineal nula

Consideremos el sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^3 - 2ax^3y \\ x^5 + 3ax^2y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0x^5 + a_1x^2y^2 \\ b_0x^4y + b_1xy^3 \end{pmatrix} + \dots, \quad (5.3.9)$$

donde  $a, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ . Se trata de un desarrollo en términos cuasihomogéneo de tipo  $\mathbf{t} = (2, 3)$ , cuyo término de menor grado es  $\mathbf{F}_7 = (-y^3 - 2ax^3y, x^5 + 3ax^2y^2)^T$ , teniendo grado  $r = 7$ . Este campo es hamiltoniano, con función de Hamilton:

$$h(x, y) = \frac{1}{4}y^4 + ax^3y^2 + \frac{1}{6}x^6 = (\frac{1}{2}y^2 + ax^3)^2 + (\frac{1}{6} - a^2)x^6 \in \mathcal{P}_{12}^{\mathbf{t}}.$$

Supondremos  $a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ , ya que entonces la descomposición (3.5.23) para  $h$  sólo tiene factores simples. Observemos que en este caso  $\mathbf{D}_0(x, y) = (2x, 3y)^T$ .

El estudio sobre el rango del operador  $\ell_{r+k}$  se llevó a cabo en la Subsección 4.3.3, donde obtuvimos  $\mathcal{I}_1 = \{9, 10, 11\}$ ,  $\mathcal{I}_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $\mathcal{I}_3 = \emptyset$  y  $\mathcal{I}_4 = \{8, 9, 10, 11\}$ . Además, para  $k \in \mathcal{I}_2 \setminus \{0\}$  se tiene que  $\text{Cor}(\ell_{r+k+|\mathbf{t}|}) \cap \text{Cor}(\delta_{r+k+|\mathbf{t}|}) = \{0\}$ , excepto para  $k = 2$ , donde  $\text{Cor}(\ell_{14}) \cap \text{Cor}(\delta_{14}) = \text{span}\{x^4y^2\}$ .

Utilizando ahora el Teorema 5.2.149, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.3.153** *Una forma normal bajo equivalencia para el sistema (5.3.9) es:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -y^3 - 2ax^3y \\ x^5 + 3ax^2y^2 \end{pmatrix} + \left( \alpha_8^{(1)}x^4 + \alpha_8^{(2)}xy^2 \right) \mathbf{D}_0 + \beta_9 \mathbf{X}_{x^4y^2} + \alpha_9 x^3y \mathbf{D}_0 \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \alpha_{12l+10} x^2y^2 h^l(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+11} x^4y h^l(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \right. \\ &+ \left. \left( \alpha_{12l+12}^{(1)} h^{l+1}(\mathbf{x}) + \alpha_{12l+12}^{(2)} x^3y^2 h^l(\mathbf{x}) \right) \mathbf{D}_0 \right. \\ &+ \left. \left( \alpha_{12l+14}^{(1)} x h^{l+1}(\mathbf{x}) + \alpha_{12l+14}^{(2)} x^4y^2 h^l(\mathbf{x}) \right) \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+15} y h^{l+1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \right. \\ &+ \left. \alpha_{12l+16} x^2 h^{l+1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+17} xy h^{l+1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \right] \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \alpha_{12l+18}^{(1)} x^3 h^{l+1}(\mathbf{x}) + \alpha_{12l+18}^{(2)} y^2 h^{l+1}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+19} x^2 y h^{l+1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \\
& + \left( \alpha_{12l+20}^{(1)} x^4 h^{l+1}(\mathbf{x}) + \alpha_{12l+20}^{(2)} x y^2 h^{l+1}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+21} x^3 y h^{l+1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \Big]
\end{aligned}$$

donde los subíndices de los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  indican su grado cuasihomogéneo.

Además,  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{14+12l}) = \text{span}\{(0, 0, \mathbf{X}_{h^{l+1}})\}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{7+12l}) = \text{span}\left\{\left(h^l \mathbf{D}_0, \frac{7(12l+5)}{12(l+1)} h^l, 0\right)\right\}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , siendo  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{r+k})$  el espacio trivial en el resto de situaciones.





# Bibliografía

- [1] A. ALGABA, E. FREIRE, AND E. GAMERO, *Hypernormal form for the hopf-zero bifurcation*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg, 8 (1998), pp. 1857–1887.
- [2] ———, *Hypernormal forms for equilibria of vector fields. codimension one linear degeneracies*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 29 (1999), pp. 13–45.
- [3] ———, *Characterizing and computing normal forms using lie transforms: a survey. computation of normal forms and applications*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 8 (2001), pp. 449–475.
- [4] ———, *Computing simplest normal form for the takens-bogdanov*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, 3 (2003), pp. 377–435.
- [5] A. ALGABA, E. FREIRE, E. GAMERO, AND C. GARCÍA, *Quasi-homogeneous normal forms*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 150 (2003), pp. 193–216.
- [6] ———, *Quasi-homogeneous normal forms for null linear part*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 10 (2003), pp. 247–261.
- [7] ———, *An algorithm for computing quasi-homogeneous formal normal forms under equivalence*, Acta Applicandae Mathematicae, 80 (2004), pp. 335–359.
- [8] A. ALGABA, E. FREIRE, E. GAMERO, AND A. J. RODRÍGUEZ-LUIS, *A three-parameter study of a degenerate case of the hopf-pitchfork bifurcation*, Nonlinearity, 12 (1999), pp. 1177–1206.

- 
- [9] M. J. ÁLVAREZ AND A. GASULL, *Monodromy and stability for nilpotent critical points*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 15 (2005), pp. 1253–1265.
- [10] A. F. ANDREEV, *Investigation of the behavior of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point. (russian)*, Vestnik Leningrad. Univ., 10 (1955), pp. 43–65.
- [11] J. ARANDA, *Métodos simples para el análisis de puntos degenerados de sistemas*, PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 1998.
- [12] A. BAIDER, *Unique normal forms for vector fields and Hamiltonians*, J. Differential Equations, 78 (1989), pp. 33–52.
- [13] A. BAIDER AND R. CHURCHILL, *Uniqueness and nonuniqueness of normal forms for vector fields*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 108 (1988), pp. 27–33.
- [14] A. BAIDER AND J. A. SANDERS, *Further reduction of the Takens-Bogdanov normal form*, J. Differential Equations, 99 (1992), pp. 205–244.
- [15] R. I. BOGDANOV, *Versal deformation of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues*, Functional Anal. Appl., 9 (1975), pp. 144–145.
- [16] H. W. BROER, F. DUMORTIER, S. J. VAN STRIEN, AND F. TAKENS, *Structures in dynamics. Finite-dimensional deterministic studies*, Studies in Mathematical Physics, 2, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991.
- [17] M. BRUNELLA AND M. MIARI, *Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through newton polyhedra*, Journal of Differential Equations, (1990), pp. 338–366.
- [18] A. D. BRUNO, *Local Methods in Nonlinear Differential Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1989.

- 
- [19] J. CHAVARRIGA, I. GARCÍA, AND J. GINÉ, *Integrability of centers perturbed by quasi-homogeneous polynomials*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (1997), pp. 268–278.
- [20] S.Ñ. CHOW AND J. K. HALE, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer Verlag, New York, 1982.
- [21] S.Ñ. CHOW, C. LI, AND D. WANG, *Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields*, Cambridge University Press, 1994.
- [22] L. O. CHUA AND H. KOKUBU, *Normal forms of nonlinear vector fields - part I: Theory and algorithm*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, (1988), pp. 863–880.
- [23] C. B. COLLINS, *Algebraic conditions for a centre or a focus in some simple systems of arbitrary degree*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (1995), pp. 719–735.
- [24] A. DEPRIT, *Canonical transformations dependig on a small parameter*, *Celest. Mechan.*, (1969), pp. 12–32.
- [25] F. DUMORTIER, *Singularities of vector fields on the plane*, *J. Differential Equations*, (1977), pp. 53–106.
- [26] ———, *Bifurcations and periodic orbits of vector fields*, in *Techniques in the Theory of Local Bifurcations: Blow-Up, Normal Forms, Nilpotent Bifurcations, Singular Perturbations*, D. Schlomiuk, ed., Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1993, pp. 19–73.
- [27] J. ÉCALLE, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, *Actualités Mathématiques*. [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1992.
- [28] C. ELPHICK, E. TIRAPEGUI, M. E. BRACHET, P. COULLET, AND G. IOOSS, *A simple global characterization for normal forms of singular vector fields*, *Physica D*, (1987), pp. 95–127.

- [29] E. FREIRE, E. GAMERO, AND E. PONCE, *An algorithm for symbolic computation of hopf bifurcation*, in *Computers and Mathematics*, E. K. S. Watt, ed., Springer-Verlag, 1989, pp. 109–118.
- [30] S. D. FURTA, *On non-integrability of general systems of differential equations*, *A. Angew Math. Phys.*, (1996), pp. 112–131.
- [31] E. GAMERO, E. FREIRE, AND E. PONCE, *On the normal forms for planar systems with nilpotent linear part*, in *Bifurcation and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications*, R. S. et al., ed., ESNM 97, Birkhäuser, 1991, pp. 123–127.
- [32] E. GAMERO, E. FREIRE, AND A. RODRÍGUEZ-LUIS, *Hopf-zero bifurcation: Normal form calculation and application to an electronic oscillator*, in *International Conference on Differential Equations*, C. P. et al., ed., World Scientific, 1993, pp. 517–524.
- [33] E. GAMERO, E. FREIRE, A. J. RODRÍGUEZ-LUIS, E. PONCE, AND A. ALGABA, *Hypernormal form calculation for triple-zero degeneracies*, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 6 (1999), pp. 357–368.
- [34] I. A. GARCIA, J. GINE, AND J. M. GRAU, *A necessary condition in the monodromy problem for analytic differential equations on the plane*, *Journal of Symbolic Computation*, 41 (2006), pp. 943–958.
- [35] A. GASULL AND J. TORREGROSA, *Center problem for several differential equation via cherkas' method*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (1998), pp. 322–342.
- [36] M. GOLUBITSKY AND D. G. SHAEFFER, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol. I, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [37] A. GORIELY, *Integrability, partial integrability, and nonintegrability for systems of ordinary differential equations*, *J. Math. Phys.*, (1996), pp. 1871–1893.

- 
- [38] J. GUCKENHEIMER AND P. J. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [39] P. HARTMAN, *Ordinary Differential Equations*, Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial Mathematics, Siam, segunda ed.
- [40] Y. S. IL'YASHENKO, *Finiteness theorems for limit cycles*, vol. 94 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. Traslated from the Russian by H.H. McFaden.
- [41] G. IOOSS AND M. ADELMAYER, *Topics in Bifurcation Theory and Applications*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [42] H. KOKUBU, H. OKA, AND D. WANG, *Linear grading function and further reduction of normal forms*, Journal of Differential Equations, (1996), pp. 293–318.
- [43] Y. KUZNETSOV, *Elements of Bifurcation Theory*, Springer Verlag, Berlin, 2005.
- [44] W. LI, J. LLIBRE, M. ÑICOLUA, AND X. ZHANG, *On the differentiability of first integrals of two dimensional flows*, Proc. Amer. Math. Soc., (2002), pp. 2079–2088.
- [45] A. LICHTENBERG AND M. LIEBERMAN, *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 38 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1992.
- [46] J. LLIBRE AND X. ZHANG, *Polynomial first integrals for quasi-homogeneous polynomial differential systems*, Nonlinearity, (2002), pp. 1269–1280.
- [47] ———, *Polynomial first integrals for weight-homogeneous planar polynomial differential systems of weight degree 3*, J. Math. Anal. Appl., (2007), pp. 1284–1298.
- [48] F. LORAY, *Réduction formelle des singularités cuspidales de champs de vecteurs analytiques*, J. Differential Equations, 158 (1999), pp. 152–173.

- 
- [49] J.-F. MATTEI AND R. MOUSSU, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 13 (1980), pp. 469–523.
- [50] L. MAZZI AND M. SABATINI, *A characterization of centres via first integrals*, J. Differential Equations, 76 (1988), pp. 222–237.
- [51] N. B. MEDVEDEVA, *A monodromic criterion for a singular point of a vector field on the plane*, St. Peterbourg Math. J., 13 (2002), pp. 253–268.
- [52] K. R. MEYER AND D. S. SCHMIDT, *Entrainment domains*, Funkcialaj Ekvacioj, 20 (1977), pp. 171–192.
- [53] D. MONTGOMERY AND L. ZIPPIN, *Topological transformations groups*, Interscience, New York, 1955.
- [54] R. MOUSSU, *Symetrie et forme normale des centres et foyers degeneres*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, (1982), pp. 241–251.
- [55] P. J. OLVER, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, 1986.
- [56] A. SEIDENBERG, *Reduction of singularities of the differential equation  $ady = bdx$* , Amer. J. Math., (1968), pp. 248–269.
- [57] E. STRÓŻYNA AND H. ŻOLADEK, *The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity*, J. Differential Equations, 179 (2002), pp. 479–537.
- [58] ———, *Orbital formal normal forms for general Bogdanov-Takens singularity*, J. Differential Equations, 193 (2003), pp. 239–259.
- [59] F. TAKENS, *Normal forms for certain singularities of vector fields*, Annales de l’Institut Fourier, (1973), pp. 163–195.
- [60] ———, *Singularities of vector fields*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (1974), pp. 47–100.

- 
- [61] A. TSYGVINTSEV, *On the existence of polynomial first integrals of quadratic homogeneous systems of ordinary differential equations*, J. Phys. A: Math. Gen., (2001), pp. 2185–2193.
- [62] S. USHIKI, *Normal forms for singularities of vector fields*, Japan Journal of Applied Mathematics, (1984), pp. 1–37.
- [63] A. VANDERBAUWHEDE, *Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations*, Dynamics Reported, (1989), pp. 89–169.
- [64] D. WANG, J. LI, M. HUANG, AND Y. JIANG, *Unique normal form of bogdanov-takens singularities*, Journal of Differential Equations, (2000), pp. 223–238.
- [65] S. WIGGINS, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer Verlag, New York, 2005.
- [66] H. YOSHIDA, *Necessary conditions for existence of algebraic first integrals*, Celestial Mech., (1983), pp. 363–399.