

R. 5418

LBS. 769.082

043  
111

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMATICAS  
BIBLIOTECA

*Un problema de localización  
Max-Min  
con restricciones*

Memoria de Tesis que presenta

*Fernando Fernández Palacín*

para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

**Directores de Tesis**

**Dr. D. Antonino García Rendón**

Catedrático de Estadística  
e Investigación Operativa  
Universidad de Cádiz

Fdo.: Antonino García Rendón

**Dr. D. José Muñoz Pérez**

Catedrático de Ciencias  
de la Computación  
e Inteligencia Artificial  
Universidad de Málaga

Fdo.: José Muñoz Pérez

Sevilla 1.993

TUTOR

Dr.D. Rafael Infante Macías

Catedrático de Estadística e Investigación Operativa

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral  
el folio 74 número 77 del libro  
correspondiente.

Sevilla, 17. 1994

El Jefe del Negociado de Tesis,

*Fernando Fernández Palacín*

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en *Dpto. Estadística*  
de la *Fac. de Matemáticas*  
de esta Universidad desde el día *17. 1. 94*  
hasta el día

Sevilla de de 19  
EL DIRECTOR DE

*Un problema de localización  
Max-Min  
con restricciones*

*Fernando Fernández Palacín*

# Indice

<b>1</b>	<b>Inscripción de un círculo en un polígono</b>	<b>10</b>
1.1	Introducción. . . . .	10
1.2	Construcción de la trayectoria del centro de los círculos inscritos en un polígono. . . . .	11
<b>2</b>	<b>Un problema de localización Max-Min con restricciones</b>	<b>35</b>
2.1	Introducción. . . . .	35
2.2	Formulación del problema. . . . .	37
2.3	Formulación del problema. . . . .	58
<b>3</b>	<b>Aplicacion: Localización de un centro emisor de gases</b>	<b>64</b>
3.1	Introducción . . . . .	64
3.2	Planteamiento del problema. . . . .	65
3.3	Determinación de la región factible. . . . .	67
3.4	Formulación del problema. . . . .	68
3.5	Algoritmo . . . . .	70
3.5.1	Rutinas del Algoritmo . . . . .	70
3.5.2	Programa principal . . . . .	74
3.6	Construcción de las Poligonales de indiferencia . . . . .	82
<b>A</b>	<b>Algunos resultados sobre convexidad.</b>	<b>84</b>
<b>B</b>	<b>Restricciones sobre los <math>r_i</math> para que el Polígono de vientos sea convexo.</b>	<b>88</b>

## Introducción

La teoría de la localización nace en el siglo *XVII* cuando *Fermat* al final de un célebre trabajo de máximos y mínimos plantea el siguiente problema: "Dados tres puntos en el plano, encontrar un cuarto punto, de tal modo que la suma de las distancias de éste a los puntos originales sea mínima". Sin embargo, no es hasta principios de esta centuria, y debido al interés de ciertos economistas -que, además de la distancia consideran factores de carácter socioeconómicos-, cuando alcanza su verdadera dimensión.

La dificultad principal en la resolución de los problemas de localización radica en el hecho de que, en la mayoría de los casos, no existen soluciones analíticas; por ello, a lo largo del tiempo, se han dado soluciones de tipo gráfico y analógico de gran imaginación<sup>1</sup>. En la actualidad, gracias a las modernas técnicas de investigación y al uso de ordenadores, es posible el empleo de procedimientos algorítmicos de alta precisión y rapidez.

---

<sup>1</sup>La primera solución de tipo gráfico al problema de *Fermat* la dio *Torricelli* en 1640 (*Infante* [19]). Por otra parte, una solución analógica muy ingeniosa a un cierto tipo de problema de localización -modelo de enclaves ponderado- lo dio *Varignon*, a través de su conocido Armazón.

Una primera clasificación de los modelos de localización, dividiría a éstos en Centros de localización deseables en proximidad y Centros de localización de efectos peligrosos o molestos; a partir de ahora, Centros deseables y Centros peligrosos, respectivamente.

La investigación realizada sobre Centros peligrosos, motivo de nuestro trabajo, tiene sus orígenes a finales de los años setenta, y, según *Erkut y Neuman* [9] los estudios sobre este tipo de modelos apenas suponen el 2% del total de trabajos sobre localización. En opinión de los mismos autores, la causa de la tardanza en el planteamiento de esta clase de problemas se debe al hecho de que la mayoría de los centros peligrosos son una consecuencia del desarrollo tecnológico e industrial. Piénsese en centrales nucleares, centros de tratamientos de residuos tóxicos, mega-aeropuertos, etc. Por otra parte, la desproporción entre el número de trabajos realizados sobre centros peligrosos respecto a centros deseables se explica, además de por lo expuesto en el párrafo anterior, porque es mucho más frecuente el problema de localizar un Centro deseable que uno peligroso. De hecho, la mayoría de las veces la localización de un centro deseable tiene un carácter local, mientras que la localización de un centro peligroso implica, generalmente, a grandes regiones, en ocasiones de ámbito supranacional (Ver *Hansen, Peeters y Thisse* [14]).

*Criterios de localización de Centros Peligrosos.* Antes de continuar, expondremos una serie de criterios que nos ayudarán en la clasificación de los modelos de localización de centros peligrosos.

1. Por el número de centros a localizar:
  - Problema de localización simple.
  - Problema de localización de múltiples centros.
2. Por el espacio en el que se plantea el problema:

- $\mathbb{R}^k$ .
  - Redes.
3. Por la región,  $\mathcal{S}$ , donde es factible la localización de los centros:
- Discreta.
  - Continua:
    - Polígono convexo.
    - Polígono no convexo.
    - Otra.
4. Por la medida utilizada:
- Euclídea.
  - Rectilínea.
  - Sobre red.
  - Otra.
5. Por la función objetivo:
- Objetivo único:
    - MAXMIN.
    - MAXISUM.
  - Multiobjetivo.
6. Por las interacciones consideradas:
- Sólo entre los centros a localizar y los existentes.
  - Sólo entre los centros a localizar.

- Con los dos tipos de interacción anteriores.

7. Por las ponderaciones utilizadas:

- Modelo ponderado.
- Modelo no ponderado.

Especialmente interesante resulta la clasificación en relación con la función objetivo que se utilice. Si el objetivo es único, como ocurrirá en el modelo que desarrollaremos, los dos criterios utilizables son los MAXMIN y MAXISUM. Dichos criterios se corresponden, respectivamente, con los MINIMAX y MINISUM en la localización de centros deseables y, mientras que en éstos la opción mayoritariamente elegida ha sido la MINISUM, por motivos de rentabilidad y eficacia, en trabajos con centros peligrosos se impone el criterio MAXMIN, entendemos que debido al interés en proteger mínimamente al enclave que resultará más afectado.

Es evidente que para el problema de localización de centros peligrosos, la zona factible debe ser acotada, pues, de no ser así, la naturaleza del problema nos llevará a una imposible localización en el infinito.

Una vez expuestos los aspectos generales de la teoría nos centraremos en el problema del tipo MAXMIN, que en su forma más general podemos expresar como:

$$\max_{X \in \mathcal{S}} \min_{1 \leq i \leq m} w_i d(X, P_i)$$

donde  $X$  representa la localización del centro peligroso,  $P_i = (x_i, y_i)$   $i = 1, \dots, m$ , la localización de los enclaves existentes,  $\mathcal{S}$  es la región factible,  $d$  una cierta distancia y  $w_i$  la ponderación de  $P_i$  que refleja el nivel de incompatibilidad entre el centro peligroso y el enclave existente  $P_i$ . En la mayoría de los casos la distancia utilizada es la euclídea.

En orden cronológico, los primeros en plantear este tipo de problemas fueron *Dasarathy y White* [1], resolviéndolo para el caso en que  $w_i = 1$

para todo  $i$  y siendo  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^k$  una región convexa poliédrica. Demuestran la existencia de un número finito de candidatos a óptimos y ofrecen un algoritmo de tipo combinatorio para  $k = 2$  y  $k = 3$ . Asimismo, dan otro algoritmo para el plano basado en los *polígonos de Voronoi*.

*Drezner y Wesolowsky* [3] dan soluciones para el problema ponderado, estando constituida la región factible por la intersección de  $m$  círculos centrados en los enclaves existentes. Proponen un algoritmo de bisección.

*Melachrinoudis y Cullinane* [27] y [28] presentan problemas MaxMin ponderados en regiones poligonales no convexas y donde, con centro en cada localización existente, se han considerado regiones circulares en las cuales no está permitida la localización del centro peligroso. Asimismo aportan sendos algoritmos.

*Melachrinoudis* [26] demuestra que una solución óptima del problema está localizada en un vértice de  $\mathcal{S}$  (si  $\mathcal{S}$  es una región poligonal), ó sobre un lado de  $\mathcal{S}$   $w$ -distante de, al menos, dos localizaciones existentes, ó en el interior de  $\mathcal{S}$ ,  $w$ -distante de, al menos, tres localizaciones existentes.

Para ciertos problemas de contaminación ambiental por la emisión de ruidos, gases, etc., *Melachrinoudis y Cullinane* [29] consideran el problema de encontrar sobre un polígono convexo,  $\mathcal{S}$ , el punto  $X(x, y)$  que satisface:

$$\min_{X \in \mathcal{S}} \max_{1 \leq i \leq m} \frac{w_i}{r_i^2}$$

donde:

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

*Erkut y Öncü* [10] generalizan el problema anterior, planteando:

$$\min_{X \in \mathcal{S}} \max_{1 \leq i \leq m} \frac{w_i}{d(X, P_i)^q}$$

para  $q = 2$  se tendría el modelo de *Melachrinoudis y Cullinane*.

En nuestro trabajo, tratamos el problema de localización de un centro peligroso en un polígono convexo,  $\mathcal{S}$  -aunque en la Segunda parte del Capítulo II consideramos un caso en el que sólo exigimos a  $\mathcal{S}$  que sea múltiplemente conexo- dentro de una región donde existen otras localizaciones que pueden verse afectadas. Para cada una de dichas localizaciones existentes establecemos un área de seguridad poligonal convexa donde queda excluida la localización del centro peligroso, que llamamos *Area de respeto* de la población o enclave. El criterio utilizado es el de maximizar la mínima distancia a las Areas de respeto.

El esquema de la presente memoria es el siguiente:

En el Primer capítulo abordamos el problema de la inscripción de un círculo en un polígono, tomando como base un trabajo de *Karkazis y Karagiorgis* [20], al cual hemos añadido numerosas aportaciones y realizado algunas modificaciones. En concreto, se han eliminado algunos conceptos que realmente aportaban poco a la comprensión del problema, como los de *Area activa*, *Punto tangencial piloto*,...; se han añadido algunos resultados fundamentales que caracterizan la inscripción de un círculo en un polígono; se han mejorado algunas demostraciones y se ha simplificado y clarificado el algoritmo.

En el Segundo capítulo se plantea el problema central de nuestro estudio. Este capítulo lo hemos dividido en dos partes, en la primera se analiza el problema en su forma general. Para ello, se ha procedido a realizar una partición de la región factible en una serie de polígonos, al objeto de garantizar la existencia y unicidad de óptimos en un cierto tipo de polígono. Una vez realizada la partición, hemos puesto de manifiesto la correspondencia existente entre los óptimos de nuestro problema y los centros de los círculos máximos inscritos en los polígonos. Los últimos resultados de esta parte caracterizan los posibles óptimos del problema. En la segunda parte se

introduce una restricción adicional al problema original, consistente en dar al exterior del polígono  $\mathcal{S}$  la misma consideración que al resto de polígonos de seguridad y hacer máxima también la distancia a su frontera. Además, la única exigencia, tanto sobre  $\mathcal{S}$  como sobre el resto de polígonos de seguridad, es la de que sea múltiplemente conexo. El objeto que se persigue con esta variación -amén de dar solución a un problema concreto que pudiera realmente presentarse- es el de ofrecer algunas condiciones para la existencia y unicidad de soluciones en el interior de recintos poligonales.

En el Tercer capítulo se ha desarrollado una aplicación consistente en la localización de un centro emisor de gases en una región donde existen unas tendencias definidas en cuanto a la velocidad y dirección del viento. Dichas tendencias son las que determinarán las Areas de respeto de las que hablamos más arriba. Proponemos un algoritmo para determinar los óptimos locales, concluyéndose el Capítulo con una exposición de pautas para la construcción de *Poligonales de indiferencia*.

Por último, se incluyen dos Apéndices, el primero de ellos sobre *Algunos resultados sobre convexidad en polígonos*, necesario para el desarrollo de la primera parte del Capítulo II; y el segundo ofrece las condiciones para que las Areas de respeto sean convexas.

## Notación de utilización general:

- La distancia utilizada es la Euclídea, representada por "d".
- En general hemos utilizado letras latinas mayúsculas para identificar puntos del plano y minúsculas para referirnos a las componentes de los puntos.
- Hemos empleado letra Caligráfica en la notación de figuras en el plano: Círculos y Polígonos y les hemos añadido el subíndice "0" cuando consideráramos circunferencias o perímetros de polígono.

- Denotamos con  $N(X, \delta)$  al conjunto siguiente:

$$N(X, \delta) = \{Y \in \mathbb{R}^2 / d(X, Y) < \delta\}$$

Es decir, la bola abierta de centro  $X$  y radio  $\delta$ .

- Decimos que el vértice  $Q$  de un polígono  $\mathcal{P}$  es convexo si existe una recta  $\lambda$ , que pasa por  $Q$ , y un  $\delta > 0$  tal que:

$$\lambda \cap N(Q, \delta) \cap \mathcal{P} = Q$$

en otro caso  $Q$  es no convexo.

- Decimos que un círculo  $\mathcal{C}(X, r)$  está inscrito en un polígono  $\mathcal{P}$  si  $Int(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}$  y el cardinal de  $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$  es finito.
- Llamamos  $S(X, Y)$ ,  $S[X, Y]$ ,  $S(X, Y]$  y  $[X, Y)$  a, respectivamente, los segmentos abierto, cerrado, semiabierto por la izquierda y semiabierto por la derecha entre los puntos  $X$  e  $Y$ .

# Capítulo 1

## Inscripción de un círculo en un polígono

### 1.1 Introducción.

Pretendemos en este capítulo caracterizar las condiciones para la inscripción de un círculo dentro de un polígono acotado y simplemente conexo, convexo o no, y analizar en qué circunstancias el círculo inscrito es máximo. El método utilizado es el propuesto por *Karkazis y Karagiorgis* [20].

Supongamos un polígono  $\mathcal{P}$ , *simple, cerrado y acotado* con perímetro  $\mathcal{P}_0$  y vértices  $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n\}$ . -el Teorema de la curva de Jordan, garantiza que  $\mathcal{P}$  es simplemente conexo <sup>1</sup>-, con perímetro  $\mathcal{P}_0$  y vértices  $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n\}$ . Consideremos un punto  $P_t$  que recorre  $\mathcal{P}_0$  desde  $\mathcal{V}_1$  en el sentido contrario a las agujas del reloj, llamaremos a  $P_t$  *punto tangencial base1*; *base1* a partir de ahora.

Asociamos a  $P_t$  un círculo  $\mathcal{C}_t(X, r)$ , que es máximo entre todos los círculos

---

<sup>1</sup>Una demostración geométrica puede verse en los apéndices del volumen 1 de "Analytic Function Theory", por E.Hille [16]

inscritos en  $\mathcal{P}$  que tocan en  $P_t$ . Al círculo  $\mathcal{C}_t(X, r)$  asociado a cada  $P_t$  le llamaremos "círculo rodante",  $CR$  en adelante. Puesto que  $base1$  se mueve de forma continua, el lugar geométrico del centro de los  $CR$ ,  $\{CR\}$  abreviadamente, es también una línea continua. En otras palabras,  $\{CR\}$  es un grafo conexo porque el polígono  $\mathcal{P}$  es simplemente conexo. En realidad  $\{CR\}$ , está formada por segmentos y arcos de parábolas, unidos. Los puntos de unión, finitos, son puntos de cambio de dirección de  $\{CR\}$  y constituyen los puntos singulares del problema.

Sea  $A \in P_0$  la posición actual de  $base1$  y  $\mathcal{C}(X, r)$  su  $CR$  asociado. Veremos más adelante que  $\mathcal{C}(X, r)$  tiene al menos otro punto de tangencia con  $\mathcal{P}_0$ , supongamos que  $B$  es el primer punto de tangencia que nos encontramos al recorrer la circunferencia  $\mathcal{C}_0(X, r)$  a partir de  $A$  en sentido contrario a las agujas del reloj, llamaremos a  $B$  *punto tangencial base2*,  $base2$  en lo que sigue. En la sección siguiente explicamos de forma esquemática los pasos a dar para la construcción de  $\{CR\}$ .

## 1.2 Construcción de la trayectoria del centro de los círculos inscritos en un polígono.

Para empezar, es evidente que  $\{CR\}$  contiene a todos los vértices convexos del polígono, además cuando  $base1$  y  $base2$  son interiores a dos lados del polígono el centro de los  $CR$  se mueve a lo largo de un segmento, y cuando uno de los dos es un vértice no convexo el centro de los  $CR$  describe un arco de parábola, pues, en ese caso,  $\{CR\}$  equidista de un punto y una recta.

Obsérvese, asimismo, que los papeles de  $base1$  y  $base2$  se intercambian cuando  $P_t$  recorre  $\mathcal{P}_0$ .

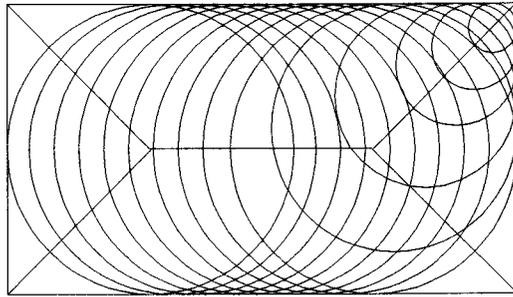


Figura 1.1:

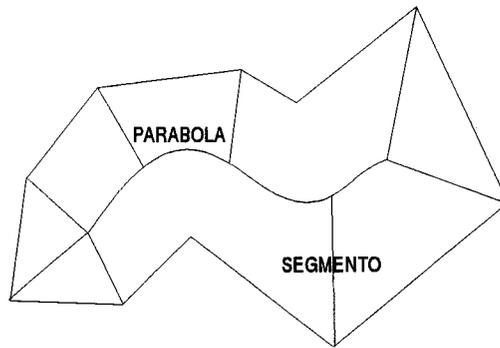


Figura 1.2:

De forma más detallada, si consideramos los lados y los vértices no convexos del polígono  $\mathcal{P}$  como una lista de elementos ordenados, cada trozo de la trayectoria  $\{CR\}$  viene determinado por dos de esos elementos, que denominamos activos:  $base1$  y  $base2$ , y pasamos a otro trozo de  $\{CR\}$  cuando un tercer elemento entra en actividad relevando a una de las bases.

En todo caso, la construcción de  $\{CR\}$  parte de un vértice convexo continuando con la bisectriz de los lados que encierran a dicho vértice (*Figura 1.1*).

Estos dos lados se corresponden con las bases, es decir, son los elementos activos y decimos que la bisectriz es la trayectoria actual de  $\{CR\}$ . Para obtener el elemento que sustituirá a una de las bases arbitramos un procedimiento combinatorio, obteniendo las trayectorias determinadas por  $base1$  y el resto de elementos hasta  $base2$ , y por  $base2$  y el resto de elementos hasta  $base1$ , la primera trayectoria que interseca con la trayectoria actual sustituye a ésta y se produce una bifurcación de  $\{CR\}$  (Figura 1.2). Por una parte, tendremos la rama de  $\{CR\}$  dada por la trayectoria determinada por  $base1(2)$  y el nuevo elemento activo y, por otra, una segunda rama entre el nuevo elemento activo y  $base2(1)$ , que habrá igualmente que explorar. Excepcionalmente puede haber terceras o más ramas, cuando el círculo en cuestión tenga cuatro o más puntos de tangencia. Cada una de las ramas que se produce tras una bifurcación tendrá que ser analizada hasta que nos encontremos con un vértice convexo donde termina. Todo lo anterior se explica con detalle en el desarrollo del algoritmo que se ofrece en el Tercer capítulo.

**Definición 1.1** Dado  $X \in \mathcal{P}$ , decimos que  $\mathcal{C}(X, r)$  es un círculo inscrito máximo, CIM en adelante, local en  $\mathcal{P}$  si existe un  $\delta > 0$ , de tal forma que  $\forall X' \in N(X, \delta)$ ,  $X' \neq X$ , el CIM con centro en  $X'$ ,  $\mathcal{C}(X', r')$ , verifica que  $r' \leq r$ . Si  $r' < r$ , decimos que  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM local estricto en  $\mathcal{P}$ .

Si para todo CIM  $\mathcal{C}(X', r')$  con  $X' \in \mathcal{P}$ ,  $X' \neq X$  se verifica que  $r' \leq r$  entonces decimos que  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM global. Si  $r' < r$  entonces  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM global estricto en  $\mathcal{P}$ . Todo CIM global lo es local.

**Definición 1.2** Diremos que un círculo es tangente a un polígono si está inscrito en él y su circunferencia adjunta es tangente a uno de sus lados o bien toca uno de sus vértices.

El siguiente resultado está tomado de Karkazis y Karagiorgis [20].

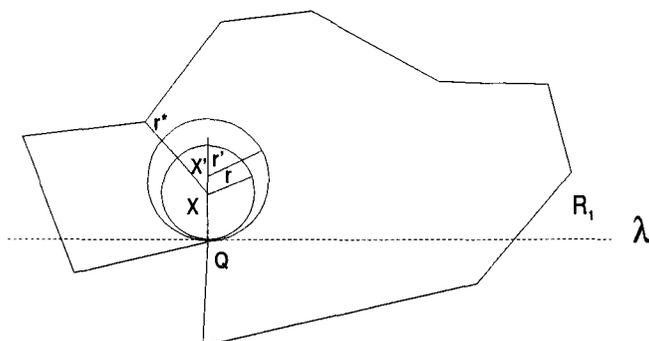


Figura 1.3:

**Lema 1.1** *Cualquier CIM en el interior de un polígono  $\mathcal{P}$  es tangente al perímetro del polígono,  $\mathcal{P}_0$ , en, al menos, dos puntos.*

La *Figura 1.3* ilustra esta situación. Observe que conservando el punto de tangencia  $Q$  el círculo puede crecer hasta encontrar, al menos, un segundo punto de tangencia.

*Aunque también el Lema que sigue es del mismo trabajo de Karkazis y Karagiorgis [20] hemos detectado algunas imprecisiones en su demostración que nos han llevado a rehacerla.*

**Lema 1.2** *Si un CIM tiene exactamente dos puntos tangenciales con  $\mathcal{P}_0$ , entonces ambos puntos están unidos por un diámetro y son interiores a caras paralelas de  $\mathcal{P}_0$ .*

*Demostración: Probaremos en primer lugar que si  $Q_1$  y  $Q_2$  son los puntos tangenciales son antidiagonales. Para ello supondremos que no es así y llegaremos a una contradicción. Si  $Q_1$  y  $Q_2$  no son antidiagonales, entonces las rectas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tangentes a  $C(X, r)$  en  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente, no son paralelas y, por tanto, tendrán un punto de corte que llamaremos  $A$ . Si*

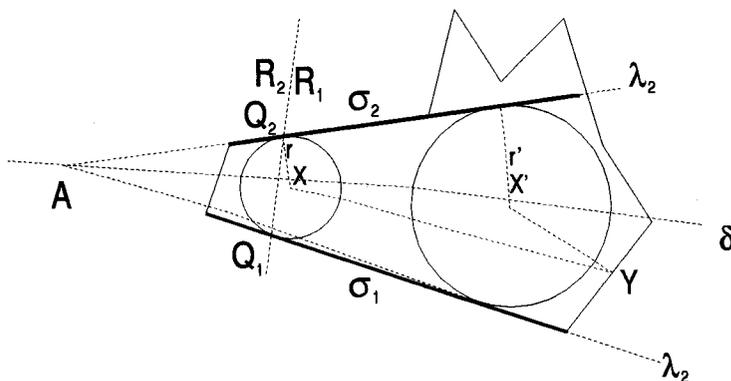


Figura 1.4:

llamamos  $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cap \Gamma$ , donde  $\Gamma$  es la región angular cerrada definida por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  que contiene a  $X$ , entonces  $\mathcal{C}(X, r)$  está inscrita en  $\mathcal{P}^*$  (ya que  $\mathcal{C}(X, r)$  está inscrita en ambos  $\mathcal{P}$  y  $\Gamma$ ) y es tangente al perímetro de  $\mathcal{P}^*$  exactamente en dos puntos,  $Q_1$  y  $Q_2$  (Figura 1.4).

Además, si  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son los lados de  $\mathcal{P}^*$  donde se encuentran respectivamente  $Q_1$  y  $Q_2$ , entonces es evidente que  $Q_1$  y  $Q_2$  son interiores a estos lados, ya que los vértices adjuntos a  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son convexos.

Definimos:

$$P_1 = \mathcal{P}_0 \cap \Gamma' \cap \Omega_1 \tag{1}$$

y

$$P_2 = \mathcal{P}_0 \cap \Gamma' \cap \Omega_2 \tag{2}$$

donde  $\Gamma'$  representa al interior de  $\Gamma$ ,  $\Omega_1$  es el semiplano abierto determinado por  $S(Q_1, Q_2)$  y que contiene a  $X$ , y  $\Omega_2$  el complementario de  $\Omega_1$ .

Si elegimos  $r^*$  de la siguiente forma:

$$r^* = \inf\{d(X, Y) / Y \in P_1\} \tag{3}$$

entonces

$$\epsilon^* = r^* - r > 0 \quad (4)$$

ya que  $\mathcal{C}(X, r)$  no tiene puntos comunes con  $P_1$  y por tanto:

$$d(X, Y) \geq \epsilon^* + r \quad \forall Y \in P_1 \quad (5)$$

Consideramos a continuación el círculo  $\mathcal{C}(X', r')$  centrado en la bisectriz de  $\Gamma$ , que llamaremos  $\tau$ , y a una distancia  $\epsilon \leq \frac{\epsilon^*}{2}$ ,  $-\epsilon > 0$  tan pequeña como se quiera- de  $X$  alejándose de  $A$ , y con radio:

$$r' = r + \epsilon \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \quad (6)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo que forma  $\lambda_1$  con  $\lambda_2$ . Por otro lado si  $Y \in P_1$  entonces

$$\begin{aligned} d(X', Y) &\geq d(X, Y) - d(X, X') \geq \epsilon^* + r - \epsilon \geq \epsilon^* + r - \frac{\epsilon^*}{2} = \\ &= r + \frac{\epsilon^*}{2} \geq r + \epsilon = r' - \epsilon \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \epsilon = r' + \epsilon \left( 1 - \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Además es evidente que

$$d(X', Y) > d(X', X) - d(X, Y) > r' \quad \forall Y \in P_2 \quad (8)$$

Considerando finalmente que  $\mathcal{C}(X', r')$  está inscrito en  $\Gamma$  ya que:

$$d(X', \sigma_1) = r + \epsilon \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = r' = d(X', \sigma_2) \quad (9)$$

resulta que:

$$d(X', Y) \geq r' \quad \forall Y \in \mathcal{P}^* \quad (10)$$

y entonces:

$$d(X', Y) \geq r' \quad \forall Y \in \mathcal{P}_0 \quad (11)$$

lo que implica que  $\mathcal{C}(X', r')$  está inscrito en  $\mathcal{P}$ .

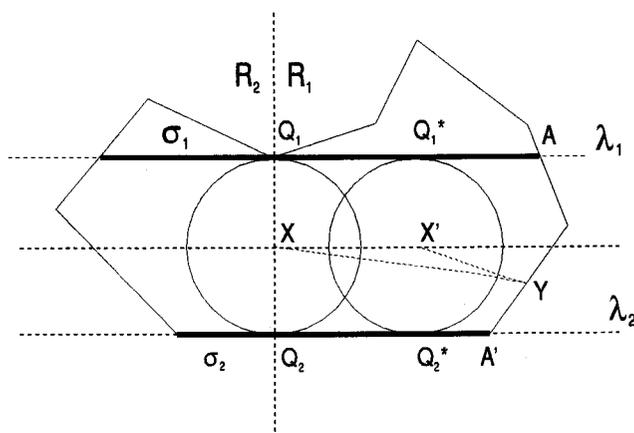


Figura 1.5:

Pero esto contradice la suposición inicial de que  $C(X, r)$  era un CIM, ya que  $r < r'$  y además  $X'$  está tan próximo como se quiera de  $X$ , por tanto  $Q_1$  y  $Q_2$  son antidiagonales.

Veremos a continuación que  $Q_1$  y  $Q_2$  son puntos interiores a dos lados de  $\mathcal{P}_0$ . Esto es equivalente a demostrar que ninguno de los dos puntos es un vértice.

Observemos, en primer lugar, que ni  $Q_1$  ni  $Q_2$  pueden ser vértices convexos. Supongamos entonces que uno de los dos, por ejemplo  $Q_1$ , es un vértice no convexo. Llegaremos a una contradicción.

Sea  $R_1$  el semiplano abierto a la derecha de  $S(Q_1, Q_2)$  y  $R_2$  el complementario de  $R_1$ . Consideremos las rectas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , tangentes a  $C(X, r)$  en  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente. Ya que  $Q_1$  y  $Q_2$  son antidiagonales las rectas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son paralelas, consideremos la banda limitada por ambas rectas que llamaremos  $\Delta$  (Figura 1.5).

Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  los lados de  $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cap \Delta$  en los cuales se encuentran  $Q_1$  y

$Q_2$ , respectivamente. Definimos:

$$P_1 = \mathcal{P}_0 \cap \Delta' \cap R_1 \quad (12)$$

y

$$P_2 = \mathcal{P}_0 \cap \Delta' \cap R_2 \quad (13)$$

donde  $\Delta'$  representa el interior de  $\Delta$ .

Puesto que  $Q_1$  es un vértice no convexo existirá un entorno suyo en el que  $\sigma_1$  no coincidirá con  $\mathcal{P}_0$ , supongamos que esto ocurre a la derecha de  $Q_1$ . Sea  $A$  el punto de  $\sigma_1 \cap \mathcal{P}_0 \cap R_1$  más próximo a  $Q_1$  y  $A'$  el vértice derecho adjunto de  $Q_2$  si  $Q_2$  es interior a un lado de  $\mathcal{P}_0$ , y  $A'$  el punto de  $\sigma \cap \mathcal{P}_0 \cap R_1$  más próximo de  $Q_2$  si  $Q_2$  es un vértice no convexo. Entonces es evidente que:

$$r_1 = d(Q_1, A) > 0 \quad (14)$$

Por otra parte:

$$d(X, Y) > r \quad \forall Y \in P_1 \quad (15)$$

ya que  $\mathcal{C}(X, r)$  no posee puntos comunes con  $P_1$ . De aquí

$$r_2 = \inf\{d(X, Y) / Y \in P_1\} > r \quad (16)$$

y también:

$$r_3 = d(Q_2, A') > 0 \quad (17)$$

ya que  $Q_2$  es un punto interior de  $\sigma_2$ .

Consideremos ahora el círculo  $\mathcal{C}(X', r)$  con centro en la mediatriz  $\mu$  de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  y a una distancia  $\epsilon \leq \epsilon^*$  ( $\epsilon > 0$  tan pequeño como queramos) a la derecha de  $X$ , donde:

$$\epsilon^* = \frac{\min\{r_1, r_2 - r, r_3\}}{2} \quad (18)$$

Supongamos que  $Q_1^*$  y  $Q_2^*$  son puntos tangentes de  $\mathcal{C}(X', r)$  con  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente, entonces  $Q_1^*$  es un punto interior de  $S(Q_1, A)$ , porque:

$$d(Q_1, Q_1^*) = d(X, X') \leq \epsilon^* < r_1 = d(Q_1, A) \quad (19)$$

y por definición de  $A$

$$Q_1^* \notin \mathcal{P}_0 \quad (20)$$

Además, es evidente que  $\mathcal{C}(X', r)$  se encuentra estrictamente a la derecha de  $P_2$ , por tanto:

$$d(X', Y) > r \quad \forall Y \in P_2 \quad (21)$$

Por otro lado, si  $Y \in P_1$ , tomando el triángulo  $XX'Y$ , tendremos:

$$d(X', Y) > d(X, Y) - d(X, X') = d(X, Y) - \epsilon \quad (22)$$

y por tanto:

$$d(X', Y) \geq r_2 - \epsilon \geq r_2 - \epsilon^* \geq r_2 - \frac{r_2 - r}{2} > \frac{2r}{2} = r \quad \forall Y \in P_1 \quad (23)$$

Considerando las ecuaciones (20), (21) y (23), concluimos que  $\mathcal{C}(X', r)$  posee, a lo sumo, un único punto tangencial con  $\mathcal{P}_0$  (Si  $Q_2^* \in \mathcal{P}_0$  ese es el punto, si no es así, no hay ninguno). En definitiva, tenemos un círculo  $\mathcal{C}(X', r)$  con  $X'$  tan próximo como se quiera de  $X$ , con radio  $r$  y con, a lo más, un único punto tangencial con  $\mathcal{P}_0$ , por el Lema 1.1 no puede ser un CIM y consecuentemente  $\mathcal{C}(X, r)$  tampoco, en contradicción con la hipótesis de partida. Como consecuencia,  $Q_1$  y  $Q_2$  no pueden ser vértices no convexos y pertenecen al interior de dos lados de  $\mathcal{P}_0$ .

Como los anteriores el siguiente resultado es de los mismos autores, aunque también aquí hemos detectado alguna deficiencia. Concretamente se ha apoyado la demostración en una cierta ilustración cuando se pueden presentar otro tipo de situaciones donde lo que se dice no es absolutamente cierto.

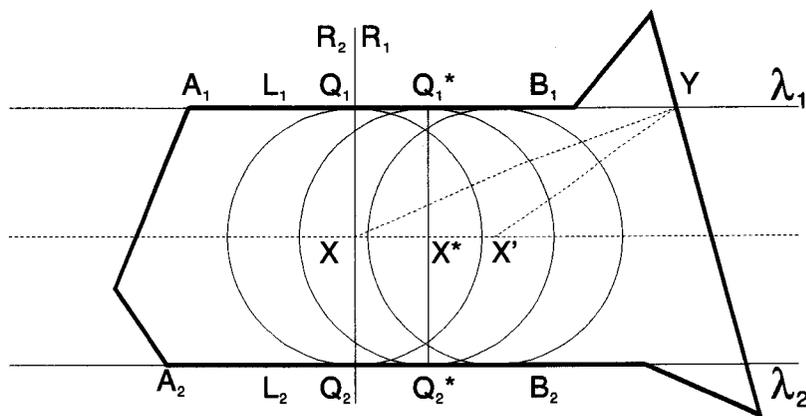


Figura 1.6:

**Lema 1.3** Si un CIM local:  $\mathcal{C}(X, r)$ , de un polígono  $\mathcal{P}$  tiene exactamente dos puntos tangenciales  $Q_1$  y  $Q_2$ , entonces: Existen infinitos CIM locales, cada uno de ellos con exactamente dos puntos tangenciales, que llamaremos CIM triviales.

Demostración: Sea  $R_1$  el semiplano abierto a la derecha de  $S(Q_1, Q_2)$  y  $R_2$  el complementario de  $R_1$ . Consideremos las rectas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , tangentes a  $\mathcal{C}(X, r)$  en  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente. Ya que  $Q_1$  y  $Q_2$  son antidiagonales las rectas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son paralelas, consideremos la banda limitada por ambas rectas que llamaremos  $\Delta$ .

Por el Lema 1.2,  $Q_1$  y  $Q_2$  son interiores a dos lados paralelos de  $\mathcal{P}_0$ ,  $L_1$  y  $L_2$ , consideremos los extremos de ambos lados:  $A_1$  y  $B_1$  para  $L_1$  y  $A_2$  y  $B_2$  para  $L_2$ . (Figura 1.6) Consideremos los extremos a la derecha de  $Q_1$  y  $Q_2$ :  $B_1$  y  $B_2$  (De igual forma procederíamos hacia la izquierda). Definimos  $P_1$  y  $P_2$  como:

$$P_1 = \mathcal{P}_0 \cap \Delta' \cap R_1 \tag{24}$$

y

$$P_2 = \mathcal{P}_0 \cap \Delta' \cap R_2 \quad (25)$$

Consideremos las siguientes distancias:

$$r_1 = d(Q_1, B_1) > 0 \quad (26)$$

ya que  $Q_1$  es interior a  $L_1$ . Por otra parte:

$$d(X, Y) > r \quad \forall Y \in P_1 \quad (27)$$

ya que  $\mathcal{C}(X, r)$  no posee puntos comunes con  $P_1$ . De aquí

$$r_2 = \inf\{d(X, Y) / Y \in P_1\} > r \quad (28)$$

y también:

$$r_3 = d(Q_2, B_2) > 0 \quad (29)$$

ya que  $Q_2$  es un punto interior del  $L_2$ .

Consideremos ahora el punto  $X'$  en la mediatriz de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  y a una distancia  $\epsilon^*$  a la derecha de  $X$ , donde:

$$\epsilon^* = \frac{\text{Min}\{r_1, r_2 - r, r_3\}}{2} \quad (30)$$

Obviamente  $\epsilon^* > 0$ .

Es evidente que  $\forall X^* \in S[X, X']$  el círculo  $\mathcal{C}(X^*, r)$  tiene dos puntos de tangencia antidiagonales,  $Q_1^*$  y  $Q_2^*$ , contenidos en  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente. Veremos que no hay ningún otro punto de tangencia.

Es trivial ver que  $\mathcal{C}(X^*, r)$  se encuentra estrictamente a la derecha de  $P_2$ , por tanto:

$$d(X^*, Y) > r \quad \forall Y \in P_2 \quad (31)$$

Por otro lado, si  $Y \in P_1$ , tendremos:

$$d(X^*, Y) > d(X', Y) \geq d(X, Y) - d(X, X') =$$

$$= d(X, Y) - \epsilon^* \geq r_2 - \epsilon^* \geq r_2 - \frac{r_2 - r}{2} > \frac{2r}{2} = r \quad (32)$$

Veamos que  $\mathcal{C}(X^*, r)$  es un CIM local. Supongamos que no, entonces  $\forall \delta > 0 \exists X_1 \in N(X^*, \delta)$  y un  $r_1 > r$  tal que  $\mathcal{C}(X_1, r_1)$  está inscrita en  $\mathcal{P}$ , es decir:

$$d(X_1, Y) \geq r_1 \quad \forall Y \in \mathcal{P}_0 \quad (33)$$

Tomemos  $\delta$  como:

$$\delta = \min\{d(Q_1^*, A_1), d(Q_1^*, B_1), d(Q_2^*, A_2), d(Q_2^*, B_2)\} \quad (34)$$

Consideremos ahora el diámetro  $D$  de  $\mathcal{C}(X_1, r_1)$  paralelo a  $S(Q_1^*, Q_2^*)$ ,  $D$  toca a la circunferencia en dos puntos:  $T_1$  y  $T_2$ .  $D$  es perpendicular a  $L_1$  y  $L_2$ , además:

$$d(T_1, T_2) = 2r_1 > 2r = d(L_1, L_2) \quad (35)$$

De lo anterior deducimos que  $S(T_1, T_2)$  tiene puntos exteriores a la banda formada por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ; es decir,  $S(T_1, T_2)$  corta, al menos, una de las rectas, supongamos que a  $\lambda_1$ , en un punto  $C_1$ . Y puesto que  $d(X^*, X_1) < \delta$ , tendremos que  $d(Q_1^*, C_1) < \delta$ . De donde deducimos que  $C_1 \in L_1$  y que  $S(T_1, T_2)$  tiene puntos exteriores a  $\mathcal{P}$ , lo que contradice que  $\mathcal{C}(X_1, r_1)$  esté inscrito en  $\mathcal{P}$ . De todo lo anterior podemos afirmar que  $\mathcal{C}(X^*, r)$  es CIM local y ya que esto ocurre para todo círculo cuyo centro se encuentre en  $S[X, X']$ , existen infinitos CIM locales con exactamente dos puntos de tangencia con  $\mathcal{P}_0$ .

**Lema 1.4** Si un círculo es CIM para un polígono  $P$ , entonces no puede ocurrir que todos los puntos de tangencia pertenezcan a la misma semicircunferencia abierta.

Demostración: Supongamos que no es así. Sea  $S_0[\mathcal{C}(X, r)]$  la semicircunferencia abierta que contiene a todos los puntos de tangencia y  $D$  el diámetro

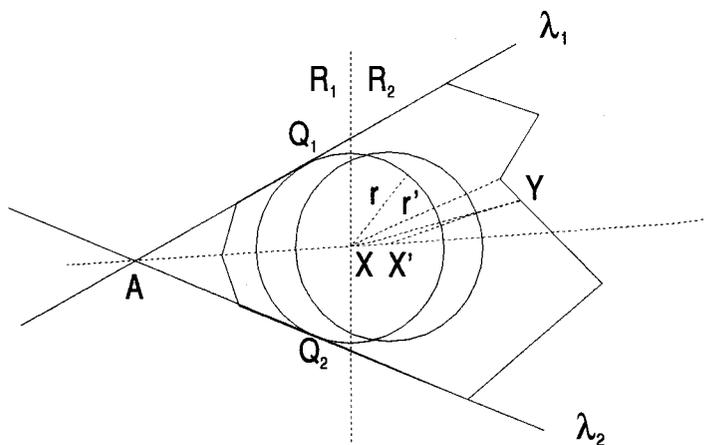


Figura 1.7:

que la define, llamemos  $Q_1$  y  $Q_2$  a los puntos de tangencia más próximos a los extremos de  $D$ , sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las tangentes en  $Q_1$  y  $Q_2$  y  $A$  el punto de corte de éstas, consideremos la región angular  $\Gamma$  determinada por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ,  $R_1$  el semiplano abierto limitado por  $D$  y que contiene a  $A$  y  $R_2$  su complementario. (Figura 1.7)

Definimos:

$$P_1 = \mathcal{P}_0 \cap \Gamma' \cap R_1 \quad (36)$$

y

$$P_2 = \mathcal{P}_0 \cap \Gamma' \cap R_2 \quad (37)$$

Con  $\Gamma' \equiv \text{Int}(\Gamma)$ . Si elegimos  $r'$  de la forma:

$$r' = \inf\{d(X, Y) / Y \in P_2\} \quad (38)$$

entonces tendremos que:

$$\epsilon' = r' - r > 0 \quad (39)$$

ya que  $\mathcal{C}(X, r)$  no tiene puntos en común con  $P_2$ .

Tomando ahora  $\mathcal{C}(X', r)$  con  $X'$  centrado en la bisectriz de  $\Gamma$  a una distancia  $\epsilon < \frac{\epsilon'}{2}$ , ( $\epsilon > 0$  tan pequeño como se quiera), de  $X$  alejándose de  $A$ , tendremos:

$$d(X', Y) \geq d(X, Y) - d(X, X') \geq r' - \epsilon > r' - \frac{\epsilon'}{2} > r \quad \forall Y \in P_2 \quad (40)$$

y

$$d(X', Y) > d(X, Y) \geq r \quad \forall Y \in P_1 \quad (41)$$

Y ya que obviamente  $d(X', \lambda_1) > r$  y  $d(X', \lambda_2) > r$ , tendremos que:

$$d(X', Y) > r \quad \forall Y \in \mathcal{P}_0 \quad (42)$$

y por el Lema 1.1, podemos encontrar un  $r' > r$  tal que  $\mathcal{C}(X', r')$  está inscrito en  $\mathcal{P}$ . Luego  $\mathcal{C}(X', r)$  no es CIM y puesto que  $X'$  está tan próximo a  $X$  como queramos  $\mathcal{C}(X, r)$  tampoco lo será. Por tanto la hipótesis de partida es falsa y no todos los puntos pueden estar dentro de la misma circunferencia abierta.

**Lema 1.5** Si  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM con todos sus puntos tangenciales dentro de una misma semicircunferencia cerrada, entonces tiene dos puntos tangenciales antidiagonales. Además, existen infinitos CIM.  $\mathcal{C}(X, r)$  sería un CIM local no estricto.

*Demostración:* La primera parte es trivial, pues si no fuera así, todos los puntos estarían dentro de una semicircunferencia abierta y por el resultado anterior el círculo no sería CIM.

La segunda parte es consecuencia inmediata del Lema 1.2.

A la vista del resultado anterior podríamos decir que un CIM que no tenga todos sus puntos de tangencia dentro una misma semicircunferencia cerrada está encajado en el polígono y no tiene posibilidad alguna de "rodar". El resultado siguiente viene a profundizar un poco más en la cuestión.

**Teorema 1.1** *Un círculo  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM local estricto si y sólo si, tiene tres o más puntos de tangencia no todos contenidos en la misma semicircunferencia cerrada.*

*Demostración: Supongamos que  $\mathcal{C}(X, r)$  tiene tres puntos de tangencia no contenidos en la misma semicircunferencia cerrada, si  $\mathcal{C}(X, r)$  no es un CIM local estricto entonces existe un círculo inscrito en  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{C}(X', r')$ , con centro en la bola  $N(X, \delta)$ ,  $\delta > 0$  tan pequeño como se quiera, en una cierta dirección  $\theta$  desde  $X$  y tal que  $r' \geq r$ . Consideremos el diámetro  $D$  de  $\mathcal{C}(X, r)$  perpendicular a la dirección  $\theta$  y el diámetro  $D'$  de  $\mathcal{C}(X', r')$  paralelo a  $D$ . Llamemos  $R_1$  al semiplano abierto determinado por  $D$  conteniendo a  $X'$  y  $R_2$  a su complementario.*

*Definimos:*

$$P_1 = R_1 \cap \mathcal{C}_0(X, r) \quad (43)$$

*Puesto que no todos los puntos tangenciales pertenecen a la misma semicircunferencia cerrada, existe al menos uno,  $Q$ , que pertenece a  $P_1$ . Sea  $Q^*$  la proyección de  $Q$  sobre la recta que pasa por  $X$  en la dirección  $\theta$ , tomemos  $X' \in S(X, Q^*)$ , sea  $\alpha$  el ángulo  $Q^*XQ$  y  $\beta$  el ángulo  $Q^*X'Q$  (Figura 1.8)*

*obviamente  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  y, por tanto,  $\text{sen } \alpha < \text{sen } \beta$ , entonces:*

$$r = d(X, Q) = \frac{d(Q, Q^*)}{\text{sen } \alpha} > \frac{d(Q, Q^*)}{\text{sen } \beta} = d(X', Q) \quad (44)$$

*lo que implica que  $Q \in \text{Int}[\mathcal{C}(X', r')]$ , y llegamos a una contradicción puesto que  $\mathcal{C}(X', r')$  no puede contener en su interior puntos de  $\mathcal{P}_0$ .*

*El recíproco es consecuencia inmediata del Lema 1.5.*

**Teorema 1.2** *Para cualquier polígono existe un CIM que tiene, al menos, tres puntos tangenciales con el perímetro del polígono.*

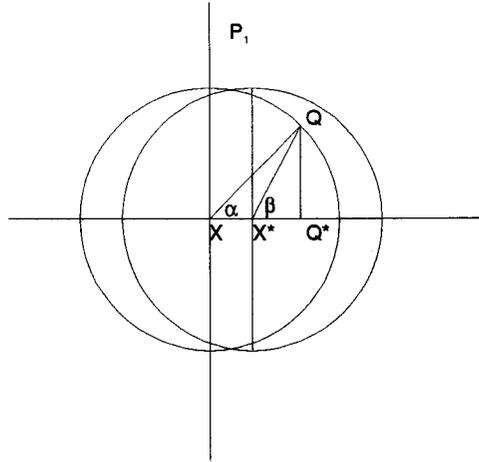


Figura 1.8:

*Demostración: Supongamos que lo anterior no es cierto. Ello implica, por el Lema 1.1, que todos los CIM tienen exactamente dos puntos de tangencia con  $\mathcal{P}_0$  y, por el Lema 1.2, dichos puntos son antidiagonales e interiores a lados paralelos de  $\mathcal{P}_0$ . Sea  $\mathcal{C}(X, r)$  el CIM cuyo radio es mayor o igual que el de cualquier otro CIM. Emplearemos la notación de los lemas anteriores.*

*Hemos visto que  $\mathcal{C}(X, r)$  no tiene puntos comunes con  $P_1$  y  $P_2$ , mientras que tiene dos puntos tangenciales con  $\sigma_1(Q_1)$  y  $\sigma_2(Q_2)$ . Es evidente que si  $\mathcal{C}(X, r)$  es obligada a "rodar" hacia  $P_1(P_2)$  entonces, acaba tocando  $P_1(P_2)$ . En esta operación el centro del círculo habrá trazado un segmento de tamaño no nulo en la mediatriz de  $\Delta$ . Denominemos a ese segmento  $S[X, B](S[A, X])$ .*

*Obviamente:*

$$d(B, Y') = r \tag{45}$$

*para un cierto  $Y' \in P_1$ , y*

$$d(B, Y) \geq r \quad \forall Y \in P_1 \tag{46}$$

Además,  $\mathcal{C}(B, r)$  tiene dos puntos de tangencia con  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , sean  $Q_1^*$  y  $Q_2^*$  dichos puntos. Si  $Q_1^*$  y  $Q_2^*$  pertenecen a  $\mathcal{P}_0$  entonces queda demostrado el Teorema y a  $\mathcal{C}(B, r)$  le llamamos CIM mayorante; si no es así, uno de ellos,  $Q_1^*$  por ejemplo, es interior a  $\mathcal{P}$ . (Es interior ya que si fuera exterior existiría un  $X' \in S(X, B)$  que toca a  $P_1$ , en contra de que  $\mathcal{C}(B, r)$  es la primera que lo toca). Tenemos que puesto que  $Q_1^*$  es distinto de  $Y'$ , los puntos de tangencia de  $\mathcal{C}(B, r)$ ,  $Q_2^*$  e  $Y'$ , pertenecen a una semicircunferencia abierta, y por el Lema 1.4  $\mathcal{C}(B, r)$  no es CIM local; es decir, existe un  $B'$  en un entorno de  $B$  y un  $r' > r$  tal que  $\mathcal{C}(B', r')$  está inscrito en  $\mathcal{P}$ , en contra de que el CIM global tiene radio  $r$ .

El Lema y el Teorema que siguen pertenecen al artículo de Karkazis y Karagiorgis [20] y han sido respetados en su totalidad.

**Lema 1.6** *El máximo círculo  $\mathcal{C}(X, r)$  inscrito en un polígono  $\mathcal{P}$  y tangente a  $\mathcal{P}_0$  en un punto  $A$ , posee, al menos, un punto tangencial más.*

**Teorema 1.3** *El centro de un círculo  $\mathcal{C}(X, r)$ , inscrito en un polígono  $\mathcal{P}$ , se encuentra en  $\{CR\}$  si y solo si la circunferencia  $\mathcal{C}_0(X, r)$  tiene al menos dos puntos de tangencia con  $\mathcal{P}_0$ .*

**Corolario 1.3.1** *Si  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM para  $\mathcal{P}$  entonces  $X \in \{CR\}$ .*

*Demostración:* Si  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM para  $\mathcal{P}$  posee, al menos, dos puntos de tangencia con  $\mathcal{P}_0$  y, por tanto,  $X \in \{CR\}$ .

**Definición 1.3** *Decimos que el punto  $X \in \{CR\}$  es un nudo si  $\forall \delta > 0$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $\mathcal{C}_0(X, \epsilon)$  está contenido en  $N(X, \delta)$  y corta a  $\{CR\}$  en, al menos, tres puntos.*

**Teorema 1.4** *Si un círculo  $\mathcal{C}(X, r)$  tiene tres o más puntos de tangencia en lados distintos de  $\mathcal{P}_0$  entonces  $X$  es un nudo, el recíproco también es cierto, si  $X$  es un nudo  $\mathcal{C}(X, r)$  tiene, al menos, tres puntos de tangencia.*

*Demostración:* Supongamos dos puntos de tangencia de  $\mathcal{C}(X, r)$  contiguos:  $Q_1$  y  $Q_2$  que no pertenezcan al mismo lado de  $\mathcal{P}_0$ , es evidente que ni  $Q_1$  ni  $Q_2$  pueden ser vértices convexos. Definimos  $R_1$  como el semiplano determinado por  $S(Q_1, Q_2)$  que no contiene a  $X$ .

Necesariamente en el recinto  $R = R_1 \cap \mathcal{P}$  existe al menos un vértice convexo y por tanto  $\{CR\} \cap R \neq \emptyset$ , por los mismos motivos  $\{CR\} \cap (\mathcal{P} - R) \neq \emptyset$  y puesto que  $\{CR\}$  es una línea continua cortará, al menos, uno de los segmentos  $S(Q_1, X)$  o  $S(X, Q_2)$ . Supongamos que  $X' \in \{CR\} \cap S(Q_1, X)$  es claro que:

$$r' = \min\{d(X', Y) \mid Y \in \mathcal{P}_0\} = d(X', Q_1) < r \quad (47)$$

Por tanto el CIM con centro en  $X'$  es  $\mathcal{C}(X', r')$ .

Además, es evidente que  $\mathcal{C}(X', r') \subset \mathcal{C}(X, r)$  y que  $\mathcal{C}_0(X', r') \cap \mathcal{C}_0(X, r) = \{Q_1\}$ , por tanto  $\mathcal{C}(X', r')$  tiene un único punto de tangencia con  $\mathcal{P}_0$ ,  $Q_1$ ; pero por el Teorema 1.3, para que un punto pertenezca a  $\{CR\}$  el CIM con centro en él debe tener, al menos, dos puntos de tangencia. Consecuentemente  $X' \notin \{CR\}$  y la única posibilidad es que  $X' = X$ .

Recíprocamente, si  $X$  es un nudo hay, al menos, dos trayectorias que se cortan y, al menos, dos puntos por cada trayectoria no todos coincidentes, pues pertenecen a distintas bases.

De la demostración anterior se deduce que si un círculo  $\mathcal{C}(X, r)$  tiene  $k > 2$  puntos de tangencia, en el nudo  $X$  confluyen  $k$  ramas de  $\{CR\}$ .

**Corolario 1.4.1** *Si  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM estricto entonces  $X$  es un nudo. El recíproco no es cierto.*

*Demostración:* La primera parte es consecuencia inmediata del Teorema 1.4. Para ver que el recíproco no es cierto basta considerar el ejemplo gráfico mostrado en la Figura 1.9, en donde los puntos  $A_1$  y  $A_2$  son nudos y  $\mathcal{C}(A_1, r)$  y  $\mathcal{C}(A_2, r)$  son CIM locales no estrictos.

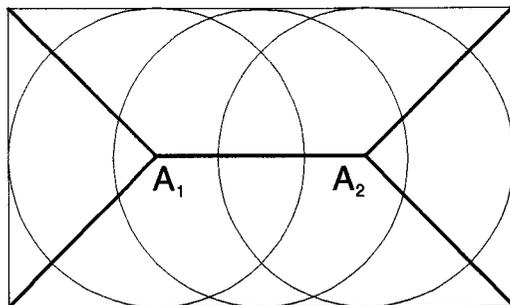


Figura 1.9:

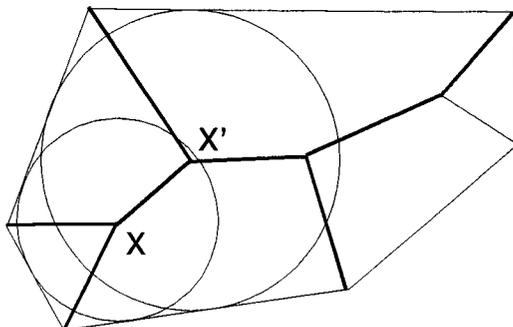


Figura 1.10:

Obsérvese que hay un número finito de nudos; dicho número estará en función de la cantidad y disposición de los vértices convexos del polígono, como veremos a continuación. Sin embargo, no todos ellos serán CIM locales, como se puede apreciar en la Figura 1.10. Así  $X$  es un nudo y además CIM estricto pero  $X'$  a pesar de ser nudo no es ni siquiera un CIM ya que el círculo puede rodar a través del segmento que une  $X'$  con  $X$  aumentando el tamaño del radio.

El siguiente es un resultado de Karkazis y Karagiorgis [20], sin embargo

incluimos una demostración que entendemos es más rigurosa que la aportada por éstos autores.

**Teorema 1.5**  $\{CR\}$  no tiene bucles.

Demostración: Supongamos que existe un bucle,  $\Phi_0$ , tomemos  $X' \in \text{Int}(\Phi)$ , siendo  $\Phi$  el recinto cuya frontera es  $\Phi_0$ , ello implica que:

$$d(X', Y) > 0 \quad \forall Y \in \Phi_0 \quad (48)$$

Consideremos el CIM centrado en  $X'$ ,  $\mathcal{C}(X', r')$ ; existirá, al menos, un punto tangencial  $Q_1$ , tal que  $d(X', Q_1) = r'$ . Determinamos el punto de corte de  $S(X', Q_1)$  con  $\Phi_0$ , sea dicho punto  $Q_1^*$ ; el CIM centrado en él,  $\mathcal{C}(Q_1^*, r_1^*)$  tendrá, al menos, dos puntos de tangencia,  $T_1, T_2, \dots$ . Veremos que uno de ellos coincide con  $Q_1$ . Supongamos que no. Sea  $T_i$  el punto más próximo a  $Q_1$ :

$$d(X', T_i) \leq d(X', Q_1^*) + d(Q_1^*, T_i) < d(X', Q_1^*) + d(Q_1^*, Q_1) = d(X', Q_1) \quad (49)$$

ello implica que  $T_i \in \text{Int}[\mathcal{C}(X', r')]$ , en contra de que  $T_i$  es un punto de  $\mathcal{P}_0$ . Luego  $T_i \equiv Q_1$ . De lo anterior deducimos que  $\mathcal{C}(X', r')$  y  $\mathcal{C}(Q_1^*, r_1^*)$  tienen un punto de tangencia común:  $Q_1$  y además  $Q_1^* \in S(X', Q_1)$ , y, por tanto,  $\mathcal{C}(Q_1^*, r_1^*) \subset \mathcal{C}(X', r')$  estrictamente y consecuentemente el resto de los puntos tangenciales de  $\mathcal{C}(Q_1^*, r_1^*)$  son interiores a  $\mathcal{C}(X', r')$ , en contra de pertenecer a  $\mathcal{P}_0$ . Como consecuencia de lo anterior  $\text{Int}(\Phi) \equiv \emptyset$  y no existen bucles en  $\{CR\}$ .

- El teorema viene a decir que existe un único camino para ir de un punto de  $\{CR\}$  a otro; luego tiene estructura de árbol.

NOTACION

- Dados  $X_1$  y  $X_2$  pertenecientes a  $\{CR\}$ , notamos con  $C(X_1, X_2) \subset \{CR\}$  al camino abierto de  $\{CR\}$  que une  $X_1$  con  $X_2$ .  $C[X_1, X_2]$ ,  $C(X_1, X_2)$  y  $C(X_1, X_2]$  serán los caminos cerrados y semiabiertos por la derecha e izquierda, respectivamente.
- Llamaremos  $\tau$  a la topología inducida en  $\{CR\}$ , los abiertos de  $\tau$  vienen dados por  $B(X, \delta) = \{CR\} \cap N(X, \delta)$ .

**Definición 1.4** Si en  $X \in \{CR\}$  coinciden  $k$  ramas, diremos que  $X$  es un punto de orden  $k - 2$ . Por ejemplo, en el centro de un cuadrado coinciden 4 ramas y éste sería un punto de orden 2. Por extensión, podríamos decir que todo punto  $X$  de  $\{CR\}$  que no es un nudo es un punto de orden 0, puesto que puede verse como la confluencia de dos ramas. Es decir, el orden de un punto  $X \in \{CR\}$  se determinaría como el número de puntos de tangencia del CIM  $C(X, r)$  menos 2 y es igual al número de nudos que coinciden en  $X$ .

**Lema 1.7** Si un polígono  $\mathcal{P}$  tiene  $N$  vértices convexos la suma de los órdenes de  $\{CR\}$  es igual a  $N - 2$ . O lo que es lo mismo posee  $N - 2$  nudos.

*Demostración:* Desde cada vértice convexo nace una rama de  $\{CR\}$ . Por el Teorema 1.5, para ir de un vértice convexo  $\mathcal{V}_1$  a otro  $\mathcal{V}_2$  existe un único camino  $C(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ . Si consideramos un tercer vértice convexo el camino que lo une a  $\mathcal{V}_1$  ó a  $\mathcal{V}_2$  coincide, a partir de un punto  $X_1$ , con  $C(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ . Es evidente que en  $X_1$  confluyen tres ramas de  $\{CR\}$ , las que van a  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{V}_2$  y  $\mathcal{V}_3$ , y por tanto  $X_1$  es un nudo. A continuación, consideramos un cuarto vértice  $\mathcal{V}_4$  y el camino que lo une con  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{V}_2$  ó  $\mathcal{V}_3$ , es evidente que dicho camino coincide con alguno de los dos anteriores a partir de un punto  $X_2$ , en el que vuelven a confluir tres ramas de  $\{CR\}$ , la que va  $\mathcal{V}_4$  y a dos de los  $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3\}$ . Continuando con el procedimiento llegaríamos al último de los vértices convexos  $\mathcal{V}_N$  que generaría un nuevo y último nudo  $X_{N-2}$ .

**Lema 1.8** *Dado cualquier punto  $X \in \{CR\}$  que no sea un nudo, y su CIM asociado  $\mathcal{C}(X, r)$ , el único punto de corte de  $\{CR\}$  con el diámetro de  $\mathcal{C}(X, r)$  perpendicular a  $\{CR\}$  es  $X$ .*

*Demostración:* Si  $\{CR\}$  corta en un punto  $X_0 \neq X$ , es evidente que  $\mathcal{C}(X_0, r_0) \subset \mathcal{C}(X, r)$  y  $r_0 < r$ , lo que implica que  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  sólo tiene un punto de tangencia, contradiciendo que  $X_0 \in \{CR\}$ .

De igual forma se demostraría el siguiente Lema:

**Lema 1.9** *Sea  $Q$  un punto de tangencia de  $\mathcal{C}(X, r)$ , con  $X \in \{CR\}$ , entonces se verifica que  $\{CR\} \cap S(X, Q) = \emptyset$ .*

Llegados a este punto, es evidente la importancia que tiene  $\{CR\}$  en la búsqueda de los círculos inscritos máximos; por ello hemos considerado interesante dotarnos de una herramienta que facilite el trabajo con  $\{CR\}$ , a la vez que nos permita hacer una mejor formalización del problema. Nos estamos refiriendo a la función  $\gamma$  que definimos a continuación.

**Definición 1.5** *Definimos la función  $\gamma$  como:*

$$\begin{aligned} \gamma : \{CR\} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longrightarrow r_X \end{aligned} \tag{50}$$

donde  $r_X$  es el radio del CIM con centro en  $X$ .

**Lema 1.10** *La función  $\gamma$  toma siempre valores mayores o iguales a cero y  $\gamma(X) = 0$  si y sólo si  $X$  es un vértice convexo del polígono.*

*Demostración:* Trivial.

**Lema 1.11** *La función  $\gamma$  es continua.*

Demostración: Supongamos la sucesión  $\{X_n\} \subset \{CR\}$  que converge a  $X_0$ , demostraremos que  $\{\gamma(X_n)\}$  converge a  $\gamma(X_0)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{X_n \rightarrow X_0} \gamma(X_n) &= \lim_{X_n \rightarrow X_0} r_{X_n} = \lim_{X_n \rightarrow X_0} \left\{ \min_{Y \in \mathcal{P}_0} d(X_n, Y) \right\} = \\ &= \min_{Y \in \mathcal{P}_0} \lim_{X_n \rightarrow X_0} d(X_n, Y) = \min_{Y \in \mathcal{P}_0} d(X_0, Y) = r_{X_0} = \gamma(X_0) \end{aligned} \quad (51)$$

Además de la continuidad, la función  $\gamma$  goza de ciertas propiedades que la harán muy deseable desde el punto de vista de obtención de óptimos, como veremos en el siguiente capítulo. Por otra parte el Teorema siguiente, que relaciona los CIM de  $\mathcal{P}$  con la función  $\gamma$ , es evidente sin más que tener presente la definición de  $\gamma$ .

**Teorema 1.6**  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM para  $\mathcal{P}$  si y sólo si  $X$  es un máximo para  $\gamma$ ; y será CIM estricto si y sólo si el máximo es estricto.

Demostración: Si  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM para  $\mathcal{P}$  entonces, por el Corolario del Teorema 1.3,  $X \in \{CR\}$ , además  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall Y \in N(X, \delta)$  el CIM con centro en  $Y$ ,  $\mathcal{C}(Y, r_Y)$  verifica que  $r_Y \leq r$  y por tanto  $\forall Y \in B(X, \delta) \subset N(X, \delta)$ ,  $\gamma(Y) \leq \gamma(X)$  y  $\gamma$  toma un máximo en  $X$ . Si el CIM es estricto, las desigualdades son estrictas y el máximo de  $\gamma$  estricto.

Recíprocamente, si  $X$  es un máximo para  $\gamma$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall Y \in B(X, \delta)$ ,  $\gamma(Y) \leq \gamma(X)$  y  $r_Y \leq r$ . Supongamos que  $\mathcal{C}(X, r)$  no es un CIM para  $\mathcal{P}$ , en ese caso  $\forall \epsilon, \exists Z \in N(X, \epsilon)$  tal que  $r_Z > r$ . Tomemos  $\epsilon = \delta$ , en tal caso  $Z \in N(X, \delta) \cap \{CR\}^c$ , y el CIM  $\mathcal{C}(Z, r_Z)$  tiene un único punto de tangencia,  $Q$ .

Consideremos el punto  $Z^* \in \{CR\}$  en la perpendicular a  $\{CR\}$  que pasa por  $Z$ ,  $Z^* \in B(X, \delta)$  y:

$$r_{Z^*} = d(Z^*, Q) = d(Z^*, Z) + d(Z, Q) > r_Z \quad (52)$$

Pero por ser  $Z^* \in B(X, \delta)$ ,  $r_{Z^*} \leq r$  y  $r_Z \leq r$ .

*Si el máximo de  $\gamma$  es estricto, las desigualdades son estrictas y el CIM estricto.*

**Corolario 1.6.1**  *$\gamma$  es constante en  $C[X_1, X_2]$  si y solo si  $\forall X \in C(X_1, X_2)$  el círculo inscrito máximo en  $\mathcal{P}$  con centro en  $X$ ,  $\mathcal{C}(X, r)$ , es un CIM trivial para  $\mathcal{P}$ .*

*Demostración: Evidente a la vista del Teorema.*

## Capítulo 2

# Un problema de localización Max-Min con restricciones

### 2.1 Introducción.

*En el desarrollo de este capítulo, que hemos dividido en dos partes, trataremos del problema de localización de un centro peligroso en un recinto poligonal utilizando el criterio Max-Min.*

*En la primera parte abordaremos el problema de localización en una región convexa, en cuyo interior o proximidad existen otras localizaciones que pueden verse afectadas por dicho centro. Como se ha dicho, utilizaremos el criterio Max-Min, con la novedad de que maximizaremos la distancia, no a las localizaciones existentes, sino a unos ciertos polígonos convexos construidos alrededor de cada una de dichas localizaciones -que podemos asociar con zonas mínimas de seguridad- y en cuyo interior no es posible la ubicación del centro peligroso.*

*La segunda parte, la dedicamos a la localización del centro peligroso dentro de un recinto poligonal, de tal forma que la distancia euclídea desde dicho*

*centro a la frontera del recinto sea máxima.*

## PRIMERA PARTE

## 2.2 Formulación del problema.

El problema, al que nos referiremos como  $\varphi_1$ , lo formulamos como:

$$\max_{P \in \mathbb{R}^2} \min_{1 \leq j \leq n} \{d(P, \mathcal{S}_j)\} \quad (1)$$

con

$$\mathcal{S}_j \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c_{ij}x + d_{ij}y \leq b_{ij}\} \quad 1 \leq i \leq k \quad (2)$$

Donde:

$$d(P, \mathcal{S}_j) = \min_{Q \in \mathcal{S}_j} d(P, Q) \quad (3)$$

restringido a:

$$P \in \{\mathcal{S} \cap (\bigcap_{j=1}^n \mathcal{S}_j^c)\} \equiv \mathcal{R}_F \quad (4)$$

siendo

$$\mathcal{S} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c_j x + d_j y \leq b_j \quad 1 \leq j \leq p\} \quad (5)$$

A  $\mathcal{R}_F$  le llamaremos la región factible (Figura 2.1). Supondremos que  $\mathcal{R}_F$  no es vacía; si no fuera así, en el Capítulo III se ofrece una solución alternativa para el caso concreto que se plantea.

Si en 4 consideramos  $\mathcal{S} \equiv \mathbb{R}^2$ , tendríamos:

$$P \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{S}_i^c \equiv \mathcal{R}_F \quad (6)$$

al problema así planteado sustituyendo 4 por 6 lo denominaremos  $\varphi_2$ .

- Si  $\mathcal{R}_F$  no es convexo los problemas  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$  no son convexos.

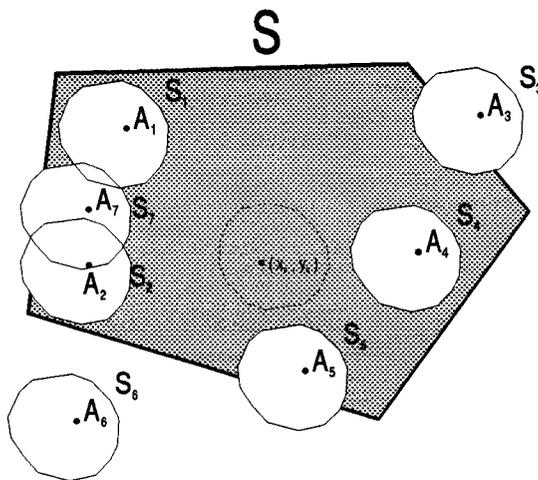


Figura 2.1:

- Obsérvese, que si para algún  $j$ ,  $Int(S \cap S_j) \neq \emptyset$  y  $S \cap Fr(S_j)$  no está contenida en un único lado de  $S_j$ ,  $\mathcal{R}_F$  es, en general no convexa. La excepción estaría en el caso excepcional en que los  $\{S_j\}$  estuvieran dispuestos en grupos formando bandas que contuvieran a lados completos de  $S$ .

**Definición 2.1** Decimos que un punto  $X_0 \in \mathcal{R}_F$  es un óptimo local para  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$  si  $\exists N(X_0, r)$  tal que  $\forall X \in N(X_0, r) \cap \mathcal{R}_F$ ,  $X \neq X_0$ , se verifica que:

$$\min_{1 \leq j \leq n} d(X, S_j) \leq \min_{1 \leq j \leq n} d(X_0, S_j) = r_0 \quad (7)$$

Si la desigualdad anterior es estricta el óptimo es estricto o único. Si la condición expresada en la ecuación anterior es válida para cualquier  $X \in \mathcal{R}_F$  entonces el óptimo es global<sup>1</sup>.

En lo que sigue usaremos algunas propiedades de los polígonos convexos

---

<sup>1</sup>Los óptimos globales sólo tienen sentido para el problema  $\varphi_1$ , pues es evidente que no existen óptimos globales finitos para  $\varphi_2$ .

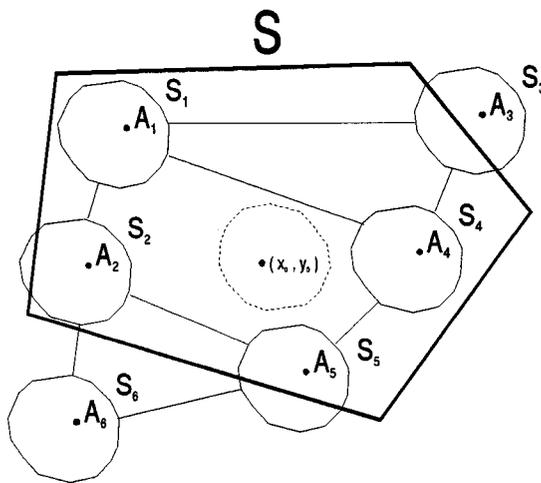


Figura 2.2:

que se recogen en un anexo al final del capítulo.

**Definición 2.2** Decimos que el segmento  $S[U_1, U_2]$ , con  $U_1 \in Fr(\mathcal{S}_i)$  y  $U_2 \in Fr(\mathcal{S}_j)$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , es un **Estrechamiento** para  $\{\mathcal{S}_j\}_{1 \leq j \leq n}$  si se verifican las dos condiciones siguientes:

1.  $\exists \delta > 0$ , tal que  $\forall X \in \mathbb{R}^2$  y con  $d(X, S[U_1, U_2]) < \delta$  entonces

$$d(X, \mathcal{S}_i) + d(X, \mathcal{S}_j) \geq d(U_1, U_2) \quad (8)$$

2.

$$d(m(U_1, U_2), \mathcal{S}_r) > \frac{d(U_1, U_2)}{2} \quad \forall r \neq i, j; \quad 1 \leq r \leq n \quad (9)$$

A  $d(U_1, U_2)$  lo llamaremos tamaño del estrechamiento (Figura 2.2).

**Definición 2.3** Si  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , se cortan en uno o dos puntos, o coinciden en un trozo de frontera, existirán, respectivamente, uno, dos o un segmento de estrechamientos entre ambos polígonos, de tamaño cero que denominaremos **Estrechamientos nulos**.

**Definición 2.4** Si un estrechamiento  $S[U_1, U_2]$  es de tal forma que una de sus caras paralelas de dos polígonos  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$  y al menos uno de los dos,  $U_1$  o  $U_2$ , no es un vértice, entonces existirán infinitos estrechamientos de igual tamaño entre  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$ . A dichos estrechamientos los denominaremos **Estrechamientos triviales** y a los estrechamientos extremos, que encierran al resto, los llamaremos **Estrechamientos mayorantes**.

**Lema 2.1** Al menos uno de los extremos de un estrechamiento mayorante es un vértice.

*Demostración: Trivial.*

Es interesante observar que en el caso de que entre  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$  existan estrechamientos triviales que unan lados paralelos  $\mathcal{L}_i$  y  $\mathcal{L}_j$ , y para el estrechamiento  $S[U_1, U_2]$  que vaya desde un vértice de uno de ellos,  $U_1$  o  $U_2$ , al otro, (teóricamente un estrechamiento mayorante), se verifique para un cierto  $r \neq i, j$ , que:

$$d(m(U_1, U_2), \mathcal{S}_r) = \frac{d(U_1, U_2)}{2} \quad (10)$$

tendríamos que  $S[U_1, U_2]$  no sería estrechamiento mayorante, puesto que no se verifica la condición 9, produciéndose una cierta indefinición. Para soslayar el problema definimos el estrechamiento mayorante adjunto a  $S[U_1, U_2]$  como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S[X_n, Y_n] \quad (11)$$

siendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = U_1 \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = U_2$$

y donde  $\{X_n\} \in \mathcal{L}_i$  e  $\{Y_n\} \in \mathcal{L}_j$ .

Las situaciones que se reflejan en las definiciones precedentes se recojen y justifican en el siguiente Lema.

**Lema 2.2** *El conjunto  $\mathcal{E}^* = \{E_t^*\}_{t \in T}$ , donde  $E_t^* = S[U_1^t, U_2^t]$ , de estrechamientos entre los polígonos  $\{\mathcal{S}_j\}_{1 \leq j \leq n}$  es finito o no numerable.*

*Demostración: Efectivamente, dados dos polígonos cualesquiera  $S_i$  y  $S_j$ , puede no haber estrechamientos entre ellos si no se verifica la condición 9; puede existir un estrechamiento si son disjuntos y sus caras más próximas no son paralelas ó bien si se tocan en un único punto (Estrechamiento nulo); pueden existir dos estrechamientos si  $\text{Int}(S_i \cap S_j) \neq \emptyset$ , que coincidirían con los dos puntos de corte de sus perímetros (Estrechamientos nulos); pueden existir un conjunto no numerable de estrechamientos si  $\text{Int}(S_i \cap S_j) = \emptyset$  y  $S_i$  y  $S_j$  coinciden en un trozo de frontera (Estrechamientos nulos); y la última situación que puede plantearse es que sean disjuntos y que sus caras más próximas sean paralelas, en cuyo caso podrían existir un conjunto no numerable de estrechamientos entre ambas caras (Estrechamientos triviales y triviales mayorantes).*

**Lema 2.3** *Si  $S[U_1, U_2]$  es un estrechamiento no nulo entre  $S_i$  y  $S_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , entonces una de las dos condiciones siguientes es cierta:*

1.  $U_1$  y  $U_2$  son interiores a caras paralelas de  $S_i$  y  $S_j$ , respectivamente.
2. Al menos uno de los dos es un vértice.

*Demostración: Supongamos que ninguna de las dos condiciones es cierta. Es decir,  $U_1$  y  $U_2$  son interiores a lados,  $\mathcal{L}_i$  y  $\mathcal{L}_j$ , no paralelos de  $S_i$  y  $S_j$ , respectivamente. Consideremos el semiplano abierto  $R$  determinado por  $S[U_1, U_2]$  en la dirección de convergencia de  $\mathcal{L}_i$  y  $\mathcal{L}_j$ . Puesto que ni  $U_1$  ni  $U_2$  son vértices, existirá un punto  $X \in R$  en la proximidad de  $S[U_1, U_2]$  y tal que la recta que pasa por él, paralela a  $S[U_1, U_2]$ , corta a  $\mathcal{L}_i$  y  $\mathcal{L}_j$ , de modo que:*

$$d(X, \mathcal{S}_i) + d(X, \mathcal{S}_j) < d(U_1, U_2) \quad (12)$$

*en contra de la condición 8 de estrechamiento.*

**Lema 2.4** *Si  $S[U_1, U_2]$  es un estrechamiento entre  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , entonces se verifica que:*

$$d(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j) = d(U_1, U_2) \quad (13)$$

*Demostración: Si el estrechamiento es nulo,  $U_1 = U_2$  y entonces trivialmente:*

$$d(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j) = 0 = d(U_1, U_2) \quad (14)$$

*Si el estrechamiento no es nulo, consideremos las rectas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  perpendiculares a  $S[U_1, U_2]$  en  $U_1$  y  $U_2$ , respectivamente, y sea  $\Delta$  la banda cerrada determinada por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Veamos que existe un  $\delta > 0$  tal que:*

$$Fr(\mathcal{S}_i) \cap Int(\Delta) \cap N(U_1, \delta) = \emptyset \quad (15)$$

y

$$Fr(\mathcal{S}_j) \cap Int(\Delta) \cap N(U_2, \delta) = \emptyset \quad (16)$$

*Supongamos que no fuera así y, por ejemplo:*

$$X \in Fr(\mathcal{S}_i) \cap Int(\Delta) \cap N(U_1, \delta) \quad (17)$$

*Consideremos el triángulo  $U_1XU_2$ , podemos tomar  $\delta$  lo suficientemente pequeño para que  $S[U_1, U_2]$  sea la hipotenusa del triángulo, por tanto:*

$$d(X, \mathcal{S}_i) + d(X, \mathcal{S}_j) = d(X, \mathcal{S}_j) \leq d(X, U_2) < d(U_1, U_2) \quad (18)$$

*pero lo anterior contradice la condición 8 de estrechamiento, luego 15 y 16 son ciertas y en sendos entornos de  $U_1$  y  $U_2$ ,  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$  están separados por la banda  $\Delta$  de anchura  $d(U_1, U_2)$ . De aquí, por la convexidad de  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$ , éstos están separados por la misma banda  $\Delta$ . Luego:*

$$d(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j) \geq d(U_1, U_2) \quad (19)$$

*y por ser  $S[U_1, U_2]$  un estrechamiento quedaría demostrado el Lema.*

**Lema 2.5** *Entre dos polígonos  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , existe, a lo más, un estrechamiento que no sea ni trivial ni nulo.*

*Demostración:* Hemos visto en el Lema 2.4 que si  $S[U_1, U_2]$  es un estrechamiento no nulo existe una banda de anchura  $d(U_1, U_2)$  que los separa, por tanto no puede haber ningún estrechamiento nulo. Si existiera otro estrechamiento  $S[V_1, V_2]$  necesariamente se tendría que:

$$d(V_1, V_2) = d(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j) = d(U_1, U_2) \quad (20)$$

y por la convexidad de  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$ , se tendría que  $U_1, V_1, U_2$  y  $V_2$  pertenecerían, respectivamente a lados  $\mathcal{L}_i$  y  $\mathcal{L}_j$  paralelos y los estrechamientos entre ellos serían triviales.

**Definición 2.5** *Consideremos ahora  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ , obtenido de  $\mathcal{E}^*$  al eliminar los estrechamientos nulos y los triviales no mayorantes. Obviamente  $\mathcal{E}$  está formado por un número finito de elementos.*

**Lema 2.6**  *$\mathcal{E}$  define una partición sobre  $\cap_{j=1}^n \mathcal{S}_j^c$ , es decir sobre la región factible para  $\wp_2$ . Denotamos con  $\Lambda = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s\}$  el conjunto de polígonos cerrados y acotados de la partición, tal que  $\text{Int}(\mathcal{P}_i) \neq \emptyset$ . Las  $\text{Fr}(\mathcal{P}_i)$  están determinadas por  $\{\text{Fr}(\mathcal{S}_j)\}_{1 \leq j \leq n}$  y por, en general,  $\{E_t\}_{1 \leq t \leq m}$ .*

*Demostración:* Trivial.

**Definición 2.6** *Sea  $\mathcal{P}_i \in \Lambda$  tal que  $\{E_t\}_{1 \leq t \leq k} \in \text{Fr}(\mathcal{P}_i)$ ;  $E_t = S[U_1^t, U_2^t]$ . Definimos:*

$$\mathcal{P}_i^* = \mathcal{P}_i \cup \left[ \bigcup_{t=1}^k R_t \right] \quad (21)$$

donde  $R_t$  es el rectángulo cerrado de base  $S[U_1^t, U_2^t]$  y altura  $\frac{d(U_1^t, U_2^t)}{2}$ , exterior a  $\mathcal{P}_i$  (Figura 2.3).

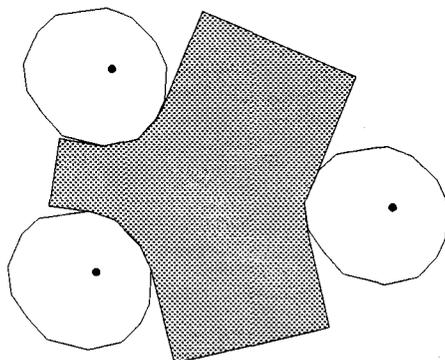


Figura 2.3:

La razón de definir estos polígonos  $\mathcal{P}_i^*$  nos la dará el Teorema 2.3 y no es otra que la de conectar los óptimos de nuestro problema con el centro del círculo máximo inscrito en un polígono, cuestión analizada en el Capítulo I. Es evidente, que los  $\mathcal{P}_i$  no deben ser los polígonos de inscripción puesto que no es necesario maximizar la distancia a los estrechamientos. El añadir un rectángulo en cada estrechamiento de altura la mitad de la longitud de éste, nos ha parecido una solución aceptable y cómoda.

El Lema y Corolario que siguen garantizan que los círculos inscritos en  $\mathcal{P}_i^*$  no contienen en su interior puntos de los polígonos  $\mathcal{S}'_j$ s.

**Lema 2.7** Dado  $X \in \mathcal{P}_i$  entonces se verifica que:

$$d(X, Fr(\mathcal{P}_i^*)) = \min_{1 \leq j \leq n} d(X, Fr(\mathcal{S}_j)) \quad (22)$$

Demostración: Si  $X \in Fr(\mathcal{P}_i)$  entonces, ó  $X \in Fr(\mathcal{S}_j)$  para algún  $j = 1, \dots, n$  con lo que el Lema estaría demostrado, ó bien  $X \in E_t \equiv S[U_1^t, U_2^t]$  para  $t = 1, \dots, k$ , pero por la construcción de  $R_t$  y la condición 9 se tendría que:

$$d(X, Fr(\mathcal{P}_i^*)) = \min_{i=1,2} \{d(X, U_1^t)\} = \min_{1 \leq j \leq n} \{d(X, Fr(\mathcal{S}_j))\} \quad (23)$$

Supongamos ahora que  $X \in \text{Int}(\mathcal{P}_i)$  y sea  $Y \in \text{Fr}(\mathcal{P}_i^*)$  tal que:

$$d(X, Y) < \min_{1 \leq j \leq n} \{d(X, \text{Fr}(\mathcal{S}_j))\} \quad (24)$$

Es evidente que:

$$Y \in \bigcup_{t=1}^k \{\text{Fr}(R_t) \cap E_t^c\} \quad (25)$$

Consideremos el segmento  $S[X, Y]$ , puesto que  $X \in \text{Int}(\mathcal{P}_i)$ ,  $S[X, Y]$  corta bien a algún  $\mathcal{S}_j$  ó bien a algún  $E_t$ ; si corta a algún  $\mathcal{S}_j$  se tendría que:

$$d(X, \mathcal{S}_j) \leq d(X, Y) \quad (26)$$

en contra de lo que dice la ecuación 24. Supongamos pues que  $S[X, Y]$  corta a algún  $E_t$ ; sea  $Z$  el punto de corte. Sea  $U_1^t$  el extremo del estrechamiento más próximo a  $Z$ . Es claro que:

$$d(X, Y) = d(X, Z) + d(Z, Y) \quad (27)$$

ahora bien

$$d(Z, Y) \geq d(Z, U_1^t) \quad (28)$$

por la razón que aducíamos en la primera parte de la demostración. Por tanto tendremos que:

$$d(X, Y) \geq d(X, Z) + d(Z, U_1^t) \geq d(X, U_1^t) \quad (29)$$

con lo que el Lema queda demostrado.

**Corolario 2.0.2** Todos los puntos de tangencia de un CIM en  $\mathcal{P}_i^*$  con centro en  $\text{Int}(\mathcal{P}_i)$  pertenecen a  $\bigcup_{j=1}^n \text{Fr}(\mathcal{S}_j)$  y, por tanto, a  $\text{Fr}(\mathcal{P}_i)$ .

Demostración: Inmediato a partir del Lema anterior.

**Teorema 2.1** Dado  $\mathcal{P}_i \in \Lambda$ ,  $X_0 \in \mathcal{P}_i$  es un óptimo local para  $\wp_2$  si y sólo si  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  es un CIM para  $\mathcal{P}_i^*$ . Donde

$$r_0 = \min_{1 \leq j \leq n} d(X_0, \mathcal{S}_j) \quad (30)$$

El óptimo será estricto si y sólo si el CIM lo es.

Demostración: Supongamos que  $X_0 \in \mathcal{P}_i \in \Lambda$  es un óptimo local para  $\wp_2$ , entonces  $\exists \delta$  tal que  $\forall X \in N(X_0, \delta) \cap \mathcal{R}_F$  tendríamos:

$$\min_{1 \leq j \leq n} d(X, \mathcal{S}_j) \leq \min_{1 \leq j \leq n} d(X_0, \mathcal{S}_j) = r_0 \quad (31)$$

Supongamos el CIM en  $\mathcal{P}_i^*$  con centro en  $X$ :  $\mathcal{C}(X, r)$ , tendremos:

$$\begin{aligned} r &= d(X, Fr(\mathcal{P}_i^*)) = \min_{1 \leq j \leq n} d(X, Fr(\mathcal{S}_j)) = \\ &= \min_{1 \leq j \leq n} d(X, \mathcal{S}_j) \leq \min_{1 \leq j \leq n} d(X_0, \mathcal{S}_j) = r_0 \end{aligned} \quad (32)$$

y por tanto  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  es un CIM. Si el óptimo es estricto la desigualdad es estricta y el CIM es estricto.

Recíprocamente, si  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  es un CIM para  $\mathcal{P}_i^*$ ,  $\exists \delta$  tal que  $\forall X \in N(X_0, \delta)$  el CIM con centro en  $X$ :  $\mathcal{C}(X, r)$  verifica que  $r \leq r_0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq j \leq n} d(X, \mathcal{S}_j) &= \min_{1 \leq j \leq n} d(X, Fr(\mathcal{S}_j)) = d(X, Fr(\mathcal{P}_i^*)) = r \leq \\ &\leq r_0 = d(X_0, Fr(\mathcal{P}_i^*)) = \min_{1 \leq j \leq n} d(X_0, Fr(\mathcal{S}_j)) = \min_{1 \leq j \leq n} d(X_0, \mathcal{S}_j) \end{aligned} \quad (33)$$

y consecuentemente  $X_0$  es un óptimo local para  $\wp_2$ . Si el CIM es estricto, la desigualdad es estricta y el óptimo estricto.

**Definición 2.7** Los polígonos de  $\Lambda$  podemos subdividirlos en dos categorías:

I) Los polígonos  $\Lambda_1 \equiv \mathcal{P}_i \in \Lambda$  cuya frontera contiene a dos estrechamientos paralelos mayorantes y tal que los otros dos lados, también paralelos,

están formados por segmentos de  $Fr(\mathcal{S}_j)_{1 \leq j \leq n}$ ; obviamente  $\mathcal{P}_i$  tendrá forma de rectángulo.

II) El resto de polígonos de  $\Lambda$  no contenidos en la categoría I,  $\Lambda_2 \equiv \Lambda - \Lambda_1$ . Es decir, aquellos polígonos cuya frontera contiene al menos tres estrechamientos. Obviamente, la frontera de estos polígonos tendrá intersección no vacía con, al menos, tres  $\mathcal{S}'_j$ s.

NOTACION:

- Llamaremos  $m(E_t)$  al centro del segmento  $E_t$ .
- Notaremos con  $d(E_t)$  a la longitud de  $E_t$ .

**Teorema 2.2** Si  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_1$ , no existe ningún óptimo estricto  $X_0 \in \mathcal{P}_i$  para el problema  $\wp_2$ .

Demostración: Sea  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_1$ ,  $E_1$  y  $E_2$  los estrechamientos mayorantes y consideremos el  $\{CR\}$  de  $\mathcal{P}_i^*$ . Es evidente que  $\{CR\} \cap \mathcal{P}_i = S[m(E_1), m(E_2)]$ , que si  $X \in S(m(E_1), m(E_2))$   $X$  es un óptimo no estricto y que los puntos  $m(E_1)$  y  $m(E_2)$  no son ni siquiera óptimos. Veamos que efectivamente  $m(E_1)$  no es óptimo. Sea  $E_1 = S[Q_i, Q_j]$ , con  $Q_i \in \mathcal{S}_i$  y  $Q_j \in \mathcal{S}_j$ .  $\forall \delta > 0$   $\exists X \in B(m(E_i), \delta) \cap \mathcal{P}_i^c$  tal que:

$$d(X, \mathcal{S}_i) + d(X, \mathcal{S}_j) > d(Q_i, Q_j) \quad (34)$$

por ser  $Q_i$  o  $Q_j$  vértice no convexo por el Lema 2.3. Además, por la condición 9 de estrechamiento, es posible tomar  $\delta$  para que:

$$d(X, \mathcal{S}_r) > \frac{d(Q_i, Q_j)}{2} \quad \forall r \neq i, j \quad (35)$$

de las ecuaciones anteriores podemos deducir que:

$$2\gamma(X) = 2r_X = d(X, \mathcal{S}_i) + d(X, \mathcal{S}_j) > d(Q_i, Q_j) = 2\gamma(m(E_1)) \quad (36)$$

y  $\gamma(X) > \gamma(m(E_1))$ , con lo que  $m(E_1)$  no puede ser óptimo.

Los Corolarios siguientes son evidentes:

**Corolario 2.2.1** Sea  $\mathcal{P}_i \in \Lambda$ ;  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM en  $\mathcal{P}_i^*$  con exactamente dos puntos de tangencia,  $Q_1$  y  $Q_2$ , si y sólo si  $S[Q_1, Q_2]$  es un estrechamiento trivial no mayorante para  $\{\mathcal{S}_j\}_{1 \leq j \leq n}$  y entonces  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_1$ . En ese caso  $m(Q_1, Q_2)$  es un óptimo local no estricto.

**Corolario 2.2.2** Dado  $\mathcal{P}_i$ , la función  $\gamma$  es constante en un camino  $C[X, Y] \subset \{CR\}$  con  $X \neq Y$  si y solo si  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_1$ .

**Corolario 2.2.3** Si  $\mathcal{C}(X, r)$  es un CIM en  $\mathcal{P}_i^*$  con  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_2$ , entonces tiene, al menos, tres puntos de tangencia con  $Fr(\mathcal{P}_i)$ .

**Teorema 2.3** Sea  $E_t$  un estrechamiento entre dos polígonos  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$ , tal que  $E_t \in \mathcal{P}_i^*$  con  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_2$  para un cierto  $i$ , entonces se verifica que  $m(E_t) \in \{CR\}$ . Además,  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall X \in B(m(E_t), \delta) \cap \mathcal{P}_i$  se tiene que  $\gamma(X) > \gamma(m(E_t))$ .

Recíprocamente, si  $\exists \delta > 0$  tal que  $0 < \gamma(X_0) < \gamma(X)$ ,  $\forall X \in B(X_0, \delta) \cap \mathcal{P}_i$ , entonces  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_2$  y  $X_0 = m(E_t)$  para algún estrechamiento  $E_t$ .

Demostración: Sea  $E_t = S[U_1, U_2]$  con  $U_1 \in \mathcal{S}_i$  y  $U_2 \in \mathcal{S}_j$ . El círculo con centro en  $m(E_t)$  y radio  $\frac{d(E_t)}{2}$  tiene dos puntos de tangencia,  $U_1$  y  $U_2$  y está inscrito en  $\mathcal{P}_i^*$ , ya que si no fuera así,  $\exists X \in \mathcal{S}_r$  para algún  $r \neq i, j$  tal que:

$$X \in \text{Int} \left[ \mathcal{C} \left( m(E_t), \frac{d(E_t)}{2} \right) \right] \quad (37)$$

y esto implicaría que:

$$d(X, m(E_t)) < \frac{d(E_t)}{2} \quad (38)$$

pero esto contradice la condición 9 de estrechamiento, por tanto  $m(E_t) \in \{CR\}$ .

Supongamos ahora que  $\forall \delta > 0, \exists X \in B(m(E_t), \delta) \cap \mathcal{P}_i, X \neq m(E_t)$ , tal que  $\gamma(X) \leq \gamma(m(E_t))$ . Necesariamente  $X \in \text{Int}(\mathcal{P}_i)$ . Si  $\mathcal{C}(X, r_X)$  es el CIM con centro en  $X$  se tendría que  $r_X \leq \frac{d(E_t)}{2}$ , y por tanto  $2r_X = d_X \leq d(E_t)$ . Además, por pertenecer  $X$  a  $\{CR\}$ ,  $\mathcal{C}(X, r_X)$  tiene, al menos, dos puntos de tangencia,  $Q_1$  y  $Q_2$ . Por la condición 9 es posible elegir  $\delta$  para que:

$$d(X, \mathcal{S}_r) > \frac{d(E_t)}{2} \quad \forall r \neq i, j; \quad 1 \leq r \leq n \quad (39)$$

y por tanto, necesariamente  $Q_1$  y  $Q_2$  pertenecen a  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$ . Así:

$$d(X, \mathcal{S}_i) + d(X, \mathcal{S}_j) = d(X, Q_1) + d(X, Q_2) = d_x \leq d(E_t) \quad (40)$$

pero por la condición 8:

$$d(X, \mathcal{S}_i) + d(X, \mathcal{S}_j) \geq d(U_1, U_2) = d(E_t) \quad (41)$$

de la doble desigualdad se tendría que:

$$d(X, \mathcal{S}_i) + d(X, \mathcal{S}_j) = d(U_1, U_2) \quad (42)$$

con lo que  $S[Q_1, Q_2]$  sería un estrechamiento, y al existir dos estrechamientos entre  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$ , ambos son triviales. Además por ser  $X \in \text{Int}(\mathcal{P}_i)$ , se verifica que  $S[Q_1, Q_2] \cap \text{Int}(\mathcal{P}_i) \neq \emptyset$ , lo que es imposible. Consecuentemente  $\gamma(X) > \gamma(m(E_t))$ .

Para el recíproco, es evidente que  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_2$  puesto que si no fuera así la función  $\gamma$  sería constante. Además  $X_0$  no es un vértice convexo puesto que  $\gamma(X_0) > 0$ . Por otra parte, es evidente que si  $X_0$  perteneciera a algun estrechamiento coincidiría con su punto medio ya que éste es el único punto que está en  $\{CR\}$ . Supongamos, por tanto, que  $X_0$  no pertenece a ningún estrechamiento, se verificará que  $X_0 \in \text{Int}(\mathcal{P}_i)$ . Sea  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  el círculo inscrito máximo con centro en  $X_0$ , obviamente todos los puntos de tangencia de  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  están en la misma semicircunferencia cerrada, puesto que si

no fuera así por el Teorema 1.1  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  sería CIM local estricto y por el Teorema 1.6  $\gamma$  tomaría un máximo en  $X_0$ . Sean  $Q_1 \in \mathcal{S}_i$  y  $Q_2 \in \mathcal{S}_j$  los puntos de tangencia de  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  más alejados entre sí, existen puesto que por ser  $X_0 \in \{CR\}$  posee al menos dos puntos de tangencia, veremos que son antidiagonales. Supongamos que no lo son, consideremos el triángulo  $\Gamma = Q_1X_0Q_2$ , es claro que  $\{CR\} \cap \Gamma \neq \emptyset$ , puesto que entre  $Q_1$  y  $Q_2$  hay un vértice convexo y además por el Lema 1.9  $\{CR\}$  no corta ni a  $S(X_0, Q_1)$  ni a  $S(X_0, Q_2)$ . Podemos tomar  $X \in \{CR\}$  tan próximo como queramos de  $X_0$  tal que  $Q_1XQ_2 \subset \Gamma$  y por tanto  $\gamma(X) < \gamma(X_0)$ . Consecuentemente,  $Q_1$  y  $Q_2$  son antidiagonales. Si ambos,  $Q_1$  y  $Q_2$ , pertenecen al interior de dos lados del polígono entonces  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  es un CIM trivial y  $\gamma$  toma un máximo en  $X_0$ , por lo que al menos uno de los dos,  $Q_1$  o  $Q_2$ , ha de ser un vértice no convexo.

Veamos que la única posibilidad es que  $S[Q_1, Q_2]$  sea un estrechamiento. Efectivamente, la condición 9 se da trivialmente y si no se diera la condición 8 tendríamos que  $\forall \delta > 0$  existiría un  $X$  tal que  $d(X, S[Q_1, Q_2]) < \delta$  se verificaría que:

$$d(X, \mathcal{S}_i) + d(X, \mathcal{S}_j) < d(Q_1, Q_2) \quad (43)$$

suponiendo que  $d(X, \mathcal{S}_i) = d(X, Q_i)$  con  $Q_i \in \mathcal{S}_i$  y que  $d(X, \mathcal{S}_j) = d(X, Q_j)$  con  $Q_j \in \mathcal{S}_j$  y tomando  $X^* = S[Q_i, Q_j] \cap \{CR\}$  tendríamos que  $\gamma(X^*) < \gamma(X_0)$ , estando  $X^*$  tan próximo como queramos de  $X_0$ . Luego  $S[Q_1, Q_2]$  es un estrechamiento y  $X_0 = m(E_t)$ , como queríamos demostrar.

**Corolario 2.3.1** Sea  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_2$ , si  $X \in \{CR\}$  y existe un  $\delta > 0$  tal que  $\gamma(X) < \gamma(Y) \quad \forall Y \in B(X, \delta)$  entonces ó  $X$  es un vértice convexo ó  $X = m(E_t)$  para un cierto estrechamiento  $E_t$ .

Demostración: Trivial.

**Corolario 2.3.2** *Sea  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_2$  y  $\mathcal{P}_i^*$  asociado a  $\mathcal{P}_i$ . Consideremos el  $\{CR\}$  de  $\mathcal{P}_i^*$ . Entonces si  $E_t$  es un estrechamiento contenido en  $\mathcal{P}_i^*$  se verifica que  $m(E_t)$  es un nudo de  $\{CR\}$ .*

*Demostración: Hemos visto que  $\{CR\}$  pasa por  $m(E_t)$  y que en este punto, por la construcción de  $R_t$ , confluyen las ramas de  $\{CR\}$  que van a los dos vértices convexos de  $R_t \cap E_t^c$ , luego  $m(E_t)$  es un nudo.*

**Lema 2.8** *Sea  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_2$  y consideremos el  $\{CR\}$  de  $\mathcal{P}_i^*$ . La función  $\gamma$  es estrictamente monótona entre nudos en  $\mathcal{P}_i \cap \{CR\}$ .*

*Demostración: Supongamos  $X_1$  y  $X_2$  pertenecientes a  $\{CR\} \cap \mathcal{P}_i$  tal que  $C[X_1, X_2] \subset \{CR\}$  no contiene nudos. Además  $\gamma$  no puede ser constante en ningún camino puesto que si no fuera así  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_1$ . Vamos a considerar las dos situaciones posibles:*

1. *Si  $X \in C(X_1, X_2)$  tal que  $\gamma(X_1) < \gamma(X)$  y  $\gamma(X) > \gamma(X_2)$ ; es decir, si los CIM vienen dados por  $\mathcal{C}(X, r)$ ,  $\mathcal{C}(X_1, r_1)$  y  $\mathcal{C}(X_2, r_2)$ , entonces  $r_1 < r$  y  $r > r_2$ . Consideremos los diámetros de los CIM perpendiculares a  $\{CR\}$ , evidentemente se tendrá que  $d_1 < d$  y  $d > d_2$ . Necesariamente en el interior del sector determinado por  $d_1$  y  $d_2$  existe al menos un vértice convexo  $\mathcal{V}$ , del cual parte una rama de  $\{CR\}$  y puesto que por el 1.8,  $\{CR\}$  no corta a los diámetros de los CIM perpendiculares a él, existiría un nudo en  $C(X_1, X_2)$ , en contra de lo supuesto.*
2. *Si  $X \in C(X_1, X_2)$  tal que  $\gamma(X_1) > \gamma(X)$  y  $\gamma(X) < \gamma(X_2)$ . Por la continuidad de  $\gamma$  existirá un punto  $X_0 \in \text{Int}(\mathcal{P}_i)$  tal que  $\gamma(X_0)$  es un mínimo local estricto, pero esto implica que  $X_0 = m(E_t)$  para un cierto estrechamiento  $E_t$  y  $\mathcal{P}_i$  contendrá en su interior puntos de  $E_t$ , lo que es imposible.*

**Teorema 2.4** Si  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_2$  entonces existe un único óptimo local de  $\wp_2$ ,  $X_0$ , tal que  $X_0 \in \text{Int}(\mathcal{P}_i)$ .

*Demostración:* Al ser  $\gamma$  monótona estricta entre nudos en  $\mathcal{P}_i \cap \{CR\}$  y tomar valores mínimos estrictos en  $m(E_t)$ , en todos los estrechamientos  $E_t$  de  $\mathcal{P}_i$ , y en todos los vértices convexos, necesariamente ha de existir un único máximo de  $\gamma$  en  $\{CR\} \cap \text{Int}(\mathcal{P}_i)$ , que será, por tanto, el único óptimo para  $\wp_2$  en  $\mathcal{P}_i$ .

**Teorema 2.5** Si  $X_0 \in \mathcal{P}_i \in \Lambda_2$ , óptimo para  $\wp_2$ , es tal que  $X_0 \in \mathcal{S}$  entonces  $X_0$  es el único óptimo local para  $\wp_1$  contenido en  $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{S}$ . Recíprocamente, si  $X_0 \in \text{Int}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{P}_i$  es un óptimo para  $\wp_1$  entonces  $X_0$  es el único óptimo para  $\wp_2$  en  $\mathcal{P}_i$ .

*Demostración:* La primera parte es evidente puesto que  $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{P}_i$ .

Para demostrar el recíproco, puesto que  $X_0$  es óptimo sólo si  $\gamma(X_0)$  es máximo estricto en  $\text{Int}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{P}_i \cap \{CR\}$ , entonces  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall X \in B(X_0, \delta)$  se verifica que  $\gamma(X) < \gamma(X_0)$ . Es decir,  $X_0$  es un máximo local y puesto que los únicos mínimos están en los vértices convexos y en los puntos medios de los estrechamientos,  $X_0$  es el único máximo local en  $\mathcal{P}_i \cap \{CR\}$  y, consecuentemente, es el único óptimo para  $\wp_2$  en  $\mathcal{P}_i$ .

**Teorema 2.6** Si  $X_0 \in \mathcal{S}$  es un óptimo estricto para  $\wp_1$  y no es óptimo para  $\wp_2$ , entonces  $X_0 \in \text{Fr}(\mathcal{S})$ .

*Demostración:* Haremos la demostración en dos partes, en la primera supondremos que  $X_0 \in \mathcal{P}_i$  para algún  $\mathcal{P}_i \in \Lambda_2$  y en la segunda que  $X_0 \notin \mathcal{P}_i \forall i$ .

1. Sea  $X_0 \in \mathcal{P}_i$ , si  $X_0 \in \text{Int}(\mathcal{S})$ , entonces  $X_0 \in \mathcal{P}_i \cap \text{Int}(\mathcal{S})$  y por el Teorema 2.5  $X_0$  sería óptimo para  $\wp_2$ , luego necesariamente  $X_0 \in \text{Fr}(\mathcal{S})$ .

2. Sea ahora  $X_0 \notin P_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, s$ . Volvamos a suponer que  $X_0 \in \text{Int}(\mathcal{S})$ .

El CIM  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  tiene todos sus puntos de tangencia con los  $\{\mathcal{S}_j\}$  en la misma semicircunferencia cerrada. De no ser así consideramos los puntos de tangencia contiguos,  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$  con los polígonos  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_r$ ; si tomamos ahora dos puntos de tangencia consecutivos  $Q_1$  y  $Q_2$ , -es evidente que no pueden ser antidiagonales, pues si lo fueran todos los  $Q_i$  estarían en la misma semicircunferencia cerrada y consideramos el semiplano determinado por ellos que no contiene a  $X_0$ , es trivial ver que en dicho semiplano existe uno o varios estrechamientos que unen  $\mathcal{S}_1$  con  $\mathcal{S}_2$ . Lo mismo podríamos hacer con  $\mathcal{S}_2$  y  $\mathcal{S}_3, \dots, \mathcal{S}_r$  y  $\mathcal{S}_1$ ; de tal forma, que  $X_0$  está contenido en el interior del polígono  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_r, Q_1)$  que está claramente contenido en un  $P_i$ . Luego  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  tiene todos sus puntos de tangencia en la misma semicircunferencia cerrada. Además si tiene dos puntos de tangencia antidiagonales, o bien éstos serían interiores a caras paralelas de los polígonos  $\mathcal{S}'_j$ s y entonces  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  sería un CIM trivial y  $X_0$  no sería óptimo estricto, o bien, al menos uno de los dos sería un vértice no convexo, con lo que  $X_0$  sería el centro de un estrechamiento y  $\gamma$  tomaría un mínimo en  $X_0$ , en contra de ser óptimo. Luego todos los puntos de tangencia de  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  pertenecen a la misma semicircunferencia abierta.

Si  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  tiene un único punto de tangencia con un polígono  $\mathcal{S}_i$ ,  $Q$ , basta considerar otro punto  $X_1$  en la recta determinada por  $X_0$  y  $Q$  a una distancia  $\delta > 0$  (suficientemente pequeña) de  $X_0$  alejándose de  $Q$ , de tal forma que  $X_1 \in \mathcal{S}$  y  $d(X_1, \mathcal{S}_r) > r_0 + \delta \quad \forall r \neq i$ , lo cual es factible puesto que  $X_0$  es el único punto de tangencia, de tal forma que  $\mathcal{C}(X_1, r_1)$  tiene un único punto de tangencia con los  $\mathcal{S}'_j$ s,  $Q$ , y  $r_1 > r_0$ ,

en contra de que  $X_0$  era óptimo.

Si  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  posee más de un punto de tangencia, consideremos los puntos  $Q_1, Q_r$  que encierran al resto. Trazamos las rectas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  que pasan por  $Q_1X_0$  y  $Q_rX_0$ , respectivamente, sea  $\mathcal{S}_c$  el sector circular de  $\mathcal{C}(X_0, r_0)$  determinado por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  opuesto al que contiene los puntos de tangencia.

Si  $\text{Int}(\mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}) = \emptyset$  entonces  $X_0 \in \text{Fr}(\mathcal{S})$ . Supongamos entonces que  $\text{Int}(\mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}) \neq \emptyset$ . Si  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$  son los únicos puntos de tangencia existirá  $\delta > 0$  tal que  $\forall X \in N(X_0, \delta)$  se verifique que  $d(X, \mathcal{S}_k) > r_0 \quad \forall k \neq 1, 2, \dots, r$ . Si consideramos  $X \in N(X_0, \delta) \cap \text{Int}(\mathcal{S}_c \cap \mathcal{S})$ , tendremos, por la convexidad de los  $\{\mathcal{S}_j\}$  que:

$$d(X, \mathcal{S}_i) > d(X_0, \mathcal{S}_i) = r_0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (44)$$

y, por tanto,  $d(X, \mathcal{S}_j) > r_0$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ ; con lo que  $X_0$  no puede ser óptimo. De 1) y 2) concluimos que  $X_0 \in \text{Fr}(\mathcal{S})$ .

**Teorema 2.7** Sea  $X_0 \in \mathcal{P}_i \in \Lambda_2$  un óptimo para  $\wp_2$  con  $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$  y tal que  $X_0 \notin \mathcal{S}$ . Consideremos  $\mathcal{H} = \{CR\} \cap \text{Int}(\mathcal{P}_i) \cap \text{Fr}(\mathcal{S})$ . Entonces:

1. Si  $\mathcal{H} = \{\emptyset\}$  y  $X_1$  es un óptimo estricto para  $\wp_1$ , entonces  $X_1$  coincide con un vértice de  $\mathcal{S}$ .
2. Si  $\mathcal{H} \neq \{\emptyset\}$  y  $X_1$  es un óptimo estricto para  $\wp_1$ , entonces ó  $X_1$  coincide con un vértice de  $\mathcal{S}$ , ó bien  $X_1 \in \mathcal{H}$ .

Demostración:

1. Sea  $X_1$  óptimo para  $\wp_1$ , necesariamente  $X_1 \in \text{Int}(\mathcal{P}_i) \cap \text{Fr}(\mathcal{S}) \cap \{CR\}^c$ . Supongamos que  $X_1 \in \text{Int}(\mathcal{L})$  donde  $\mathcal{L}$  es un lado de  $\mathcal{S}$ , puesto que  $X_1 \in \text{Int}(\mathcal{P}_i) \exists N(X_1, \delta_1)$  tal que  $N(X_1, \delta_1) \cap \mathcal{S} \subset \text{Int}(\mathcal{P}_i) \cap \text{Int}(\mathcal{L})$ . Sea

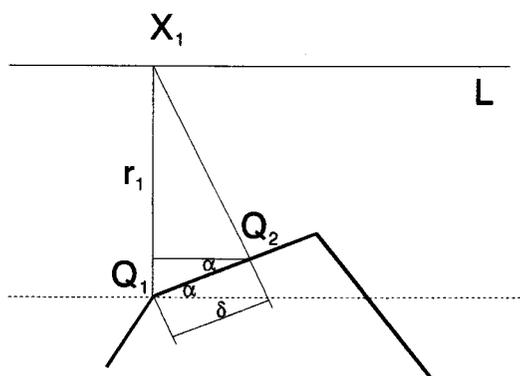


Figura 2.4:

$C(X_1, r_1)$  el CIM con centro en  $X_1$ , puesto que  $X_1 \notin \{CR\}$   $C(X_1, r_1)$  tiene un único punto de tangencia con  $S_i$  para algún  $i = 1, 2, \dots, n$ , sea este punto  $Q_1$ , por tanto  $\exists \delta_2 > 0$  tal que  $d(X_1, S_j) > r_1 + \delta_2 \quad \forall j \neq i$ .

Consideremos la banda cerrada,  $\Delta$ , determinada por  $L$  y la recta paralela a  $L$  que pasa por  $Q_1$ . Demostraremos que  $S_i \cap \text{Int}(\Delta) = \emptyset$  -para ello es suficiente ver que es cierto en un entorno de  $Q_1$ , pues por la convexidad de  $S_i$  lo será en todo-. Si no fuera así tomamos un punto  $Q_2$  en la frontera de  $S_i$  interior a  $\Delta$  y a una distancia  $\delta < 2r_1 \sin \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo que forma  $Q_1Q_2$  con  $L$ , tendremos que (Figura 2.4):

$$d(X_1, Q_2)^2 = (r_1 - \delta \sin \alpha)^2 + \delta^2 \cos^2 \alpha = r_1^2 + \delta^2 \sin^2 \alpha - 2r_1 \delta \sin \alpha + \delta^2 \cos^2 \alpha = r_1^2 + \delta^2 - 2r_1 \delta \sin \alpha = r_1^2 + \delta(\delta - 2r_1 \sin \alpha) < r_1^2 \quad (45)$$

y por tanto  $Q_2 \in S_i$  sería interior a  $C(X_1, r_1)$  lo que no es posible. Luego  $S_i \cap \text{Int}(\Delta) = \emptyset$ , por lo que, ó  $Q_1$  es interior a un lado  $L_1$  de  $S_i$  paralelo a  $L$  y entonces  $X_1$  no es óptimo estricto, ó es un vértice convexo de  $S_i$ . Si fuera esto último, sería posible encontrar

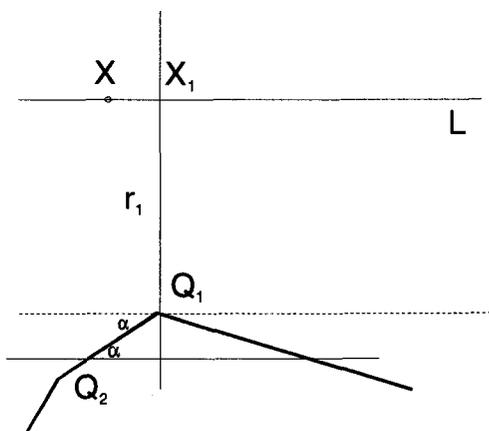


Figura 2.5:

un punto  $Q_2$  de  $Fr(\mathcal{S}_i)$  tal que  $d(Q_1, Q_2) < \delta$ , con  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  tal que  $\forall X \in N(X_1, \epsilon) \cap Fr(\mathcal{S}) \cap T$ , donde  $\epsilon = d(Q_1, Q_2) \cos \alpha$ ,  $T$  el semiplano determinado por  $X_1$  y  $Q_1$  que contiene a  $Q_2$  y  $\alpha$  igual que antes, tendríamos (Figura 2.5):

$$d(X, X_1) < d(Q_1, Q_2) \cos \alpha < d(Q_1, Q_2) \leq \delta_1 \quad (46)$$

y, consiguientemente,  $X \in Int(\mathcal{P}_i) \cap Int(\mathcal{L})$ . Además:

$$\begin{aligned} d(X, \mathcal{S}_j) &\geq d(X_1, \mathcal{S}_j) - d(Q_1, Q_2) \cos \alpha > r_1 + \delta_2 - \\ &- \delta \cos \alpha \geq r_1 + \delta_2 - \delta_2 \cos \alpha \geq r_1 \quad \forall j \neq i \end{aligned} \quad (47)$$

Y también, de forma trivial:

$$d(X, \mathcal{S}_i) > d(X_1, \mathcal{S}_i) = r_1 \quad (48)$$

Luego el CIM en  $X_2$ ,  $\mathcal{C}(X_2, r_2)$  verifica que  $r_2 > r_1$ , en contra de que  $X_1$  era óptimo. Por tanto, de existir óptimo estricto, necesariamente debe coincidir con un vértice de  $\mathcal{S}$ .

2. *Supongamos que  $X_1$  es un óptimo para  $\varphi_1$  tal que  $X_1 \in \text{Int}(\mathcal{L})$  para un cierto lado de  $\mathcal{S}$  y  $X_1 \notin H$ , utilizando el mismo razonamiento que en el apartado anterior llegaríamos a la misma contradicción, por lo que debe darse una de las dos condiciones expuestas.*

## PARTE SEGUNDA

En la primera parte de este capítulo hemos tratado el problema de localizar un centro peligroso en un polígono convexo  $\mathcal{S}$ , de tal forma que dicho centro estuviera en el exterior de otros polígonos  $\{\mathcal{S}_j\}_{1 \leq j \leq n}$ , también convexos, situados alrededor de una serie de localizaciones existentes. Para ello hemos hecho una partición de  $\mathcal{S}$  a través de lo que hemos denominado estrechamientos entre los polígonos  $\{\mathcal{S}_j\}_{1 \leq j \leq n}$ .

Nos planteamos ahora un enfoque distinto del problema, consistente en la localización del centro peligroso dentro de un recinto poligonal  $\mathcal{S}^*$ , de tal forma que la distancia euclídea desde dicho centro a la frontera del recinto sea máxima.

### 2.3 Formulación del problema.

El problema, al que nos referiremos como  $\wp$ , lo formulamos como:

$$\max_{P \in \mathcal{S}^*} \min_{Y \in Fr(\mathcal{S}^*)} d(P, Y) \quad (49)$$

con

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} - \bigcup_{j=1}^n \mathcal{S}_j \quad (50)$$

donde tanto  $\mathcal{S}$  como  $\mathcal{S}_j$  son polígonos acotados y simplemente conexos (Figura 2.6).

Admitimos la posibilidad de que todos los  $\mathcal{S}'_j$ s sean vacíos y que, por tanto,  $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$ . Si alguno de los  $\mathcal{S}'_j$ s es distinto de vacío, y está contenido en  $Int(\mathcal{S})$ , entonces  $\mathcal{S}^*$  es un recinto poligonal múltiplemente conexo.

La formulación de los problemas  $\wp_1$  y  $\wp$  es bastante parecida, de hecho el problema  $\wp$  coincide básicamente con el problema  $\wp_1$ , en el que además

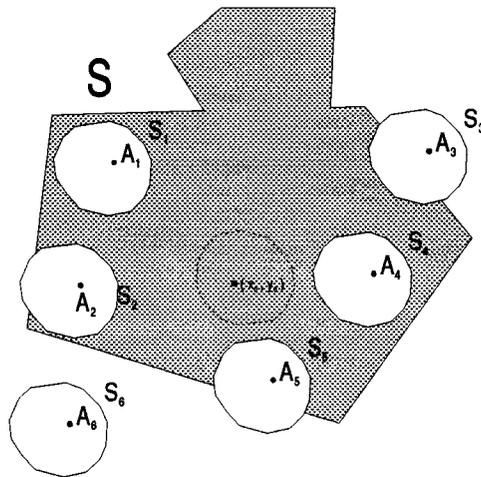


Figura 2.6:

debemos hacer máxima la distancia a  $S$ . Para abordar el problema  $\varphi$  debemos redefinir algunos de los conceptos dados.

**Definición 2.8** Decimos que un punto  $X_0 \in S^*$  es un óptimo local para  $\varphi$  si  $\exists N(X_0, \delta)$  tal que  $\forall X \in N(X_0, r) \cap S^*$ ,  $X \neq X_0$ , se verifica que:

$$\min_{Y \in Fr(S^*)} d(X, Y) \leq \min_{Y \in Fr(S^*)} d(X_0, Y) \quad (51)$$

Si la desigualdad es estricta el óptimo es estricto. Si la condición expresada en la ecuación anterior es válida para cualquier  $X \in S^*$  entonces el óptimo es global.

El concepto de estrechamiento tiene en este caso algunos matices distintos, derivados de que se establece entre polígonos, y partes de polígonos, que no son necesariamente convexos. Ahora, por ejemplo, ninguno de los extremos de los estrechamientos mayorantes han de coincidir necesariamente con vértices no convexos.

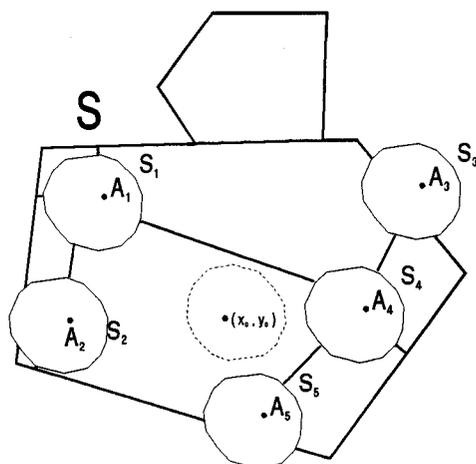


Figura 2.7:

**Definición 2.9** Decimos que el segmento  $S[U_1, U_2]$  es un estrechamiento para  $\mathcal{S}^*$  si  $S[U_1, U_2] \subset \mathcal{S}^*$ ,  $U_1$  y  $U_2$  pertenecen a lados no contiguos de  $\mathcal{S}^*$ , y verifican las dos condiciones siguientes (Figura 2.7):

1. Para cualquier par de puntos,  $Z_1 \neq U_1$  y  $Z_2 \neq U_2$ , que pertenezcan, respectivamente, a los mismos lados que  $U_1$  y  $U_2$ , se tiene que:

$$d(Z_1, Z_2) \geq d(U_1, U_2) \tag{52}$$

- 2.

$$d(m(U_1, U_2), \{Fr(\mathcal{S}^*) - \{U_1, U_2\}\}) > \frac{d(U_1, U_2)}{2} \tag{53}$$

Decimos que un estrechamiento es estricto si la desigualdad 52 es estricta, y trivial si es igualdad. Como anteriormente, en este último caso existirían infinitos estrechamientos triviales y a los estrechamientos que encierran al resto los llamaremos mayorantes.

Antes de dar el siguiente resultado conviene aclarar que el concepto de convexidad hay que verlo desde el interior de  $\mathcal{S}$  y el exterior de los  $\mathcal{S}'_j$ s.

**Lema 2.9** Si  $S[U_1, U_2]$  es un estrechamiento, ni  $U_1$  ni  $U_2$  pueden ser vértices convexos de  $\mathcal{S}^*$ .

Demostración: Sea  $U_1 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_1^*$  vértice convexo de  $\mathcal{S}$ , intersección de los lados  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_1^*$ . Consideremos el círculo  $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}(m(U_1, U_2); \frac{d(U_1, U_2)}{2})$ , que pasa obviamente por  $U_1$  y  $U_2$ . Supongamos la tangente a  $\mathcal{C}$  en  $U_1$ , por ser  $U_1$  vértice convexo existirá  $\delta > 0$  tal que si  $X \in N(U_1, \delta) \cap Fr(\mathcal{S}^*)$  entonces  $X \in Int(\mathcal{C}) \cap \mathcal{L}$ , donde  $\mathcal{L}$  es igual a  $\mathcal{L}_1$  ó  $\mathcal{L}_1^*$ , consideremos el segmento  $S(X, U_2)$ ;  $X$  y  $U_2$  pertenecen a lados no contiguos de  $\mathcal{S}^*$  y además por ser  $X$  interior a  $\mathcal{C}$  se tendrá que:

$$d(X, U_2) < d(U_1, U_2) \quad (54)$$

en contra de la condición 52 de estrechamiento.

**Corolario 2.7.1** Si  $\mathcal{S}^*$  es un polígono convexo, de contener estrechamientos estos serían triviales.

Demostración: Es una consecuencia inmediata del Lema.

**Definición 2.10** Decimos que un recinto poligonal es estrecho-convexo si no contiene ningún estrechamiento.

Es evidente que hay polígonos convexos que no son estrecho-convexos y polígonos estrecho-convexos que no son convexos. En la figura Figura 2.8 el polígono  $A$  es convexo y estrecho-convexo; el polígono  $B$  es convexo pero no estrecho-convexo; mientras que el polígono  $C$  es estrecho-convexo pero no es convexo.

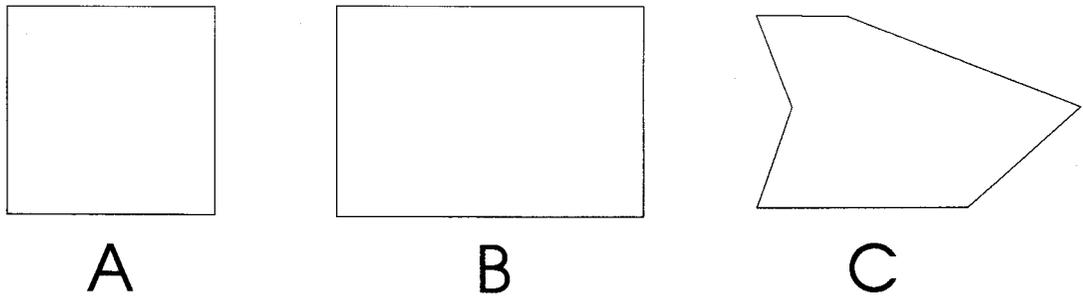


Figura 2.8:

**Lema 2.10** Si  $\mathcal{S}^*$  es estrecho-convexo entonces es un polígono simplemente conexo.

*Demostración:* Si  $\mathcal{S}^*$  tuviera agujeros poligonales en su interior,  $\mathcal{S}_1^*, \dots, \mathcal{S}_k^*$ , es evidente que existirían estrechamientos entre ellos y con  $\mathcal{S}$ , por ejemplo el segmento de longitud mínima entre dos de los recintos  $\mathcal{S}, \mathcal{S}_1^*, \dots, \mathcal{S}_k^*$  sería claramente un estrechamiento. Y, por tanto,  $\mathcal{S}^*$  no sería estrecho-convexo.

**Teorema 2.8** La condición necesaria y suficiente para que en un recinto poligonal  $\mathcal{S}^*$  exista un único óptimo local es que  $\mathcal{S}^*$  sea estrecho-convexo.

*Demostración:* Condición suficiente: Sea  $\mathcal{S}^*$  estrecho-convexo. Supongamos el  $\{CR\}$  asociado al polígono  $\mathcal{S}^*$  y la función  $\gamma$  definida sobre  $\{CR\}$ , utilizando el mismo razonamiento del Lema 2.8, se demuestra que  $\gamma$  es estrictamente monótona entre nudos en  $\{CR\}$ , además, en este caso,  $\gamma$  toma valores mínimos únicamente en los vértices convexos, donde obviamente se anula. Por tanto, existe un único óptimo en  $\mathcal{S}^*$ .

Condición necesaria: Si  $\mathcal{S}^*$  no fuera estrecho-convexo contendría estrechamientos en su interior que generaría una partición en  $\mathcal{S}^*$ , y cada uno de los polígonos de la partición (existirían como mínimo dos) contendría, al menos, un óptimo local. Luego  $\mathcal{S}^*$  tendría más de un óptimo.

*Es evidente que dado un recinto poligonal  $S^*$ , los estrechamientos estrictos y los triviales mayorantes definen una partición sobre  $S^*$ , de forma que dicha partición está compuesta por polígonos estrecho-convexos -cada uno de ellos por el Teorema 2.8 con su óptimo local estricto-, y por polígonos determinados por estrechamientos mayorantes, donde existen una infinidad de óptimos locales triviales.*

## Capítulo 3

# Aplicación: Localización de un centro emisor de gases

### 3.1 Introducción

*Nos proponemos estudiar el problema de localizar un centro peligroso dentro de una región donde existen distintos núcleos urbanos, teniendo en cuenta que dicho centro emite determinados gases que producen ciertas molestias, de tal forma que el alcance de éstas están en función de la dirección e intensidad del viento. Es razonable esperar que dentro de una región haya una cierta estabilidad en las condiciones climatológicas y por tanto, analizando el direccionamiento y la intensidad del viento en un período largo podremos obtener, centrándonos en un punto, lo que se podría denominar haz de vientos. Los meteorólogos para realizar lo anterior dividen la circunferencia en 16 sectores de amplitud  $22,5^\circ$  y estudian en cada uno de ellos las pautas del viento, obteniéndose el haz a que hacíamos referencia.*

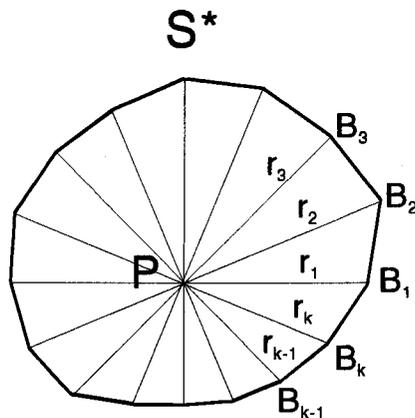


Figura 3.1:

### 3.2 Planteamiento del problema.

Consideremos una serie de puntos **Destinos** en el plano:  $A_i(a_i; b_i)$   $i = 1, \dots, n$ . El problema consiste en localizar dentro de polígono  $S$ , convexo y cerrado, una **Fuente**  $P(x; y)$ , de tal forma que la distancia mínima entre el **Area de riesgo** del punto  $P(x; y)$  y los puntos destinos, sea máxima.

El área de riesgo,  $S^*$ , para un punto  $P(x_0; y_0)$  queda determinada de la siguiente manera: Con origen en  $P(x_0; y_0)$  trazamos un abanico de  $k$  segmentos ( $k$  par) de tamaño o intensidad  $r_i$  y a una distancia angular de  $(\frac{2\pi}{k})^\circ$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Llamando  $B_i$  a los extremos de los segmentos, obtenemos  $S^*$  uniendo los  $B_i$  adyacentes (Figura 3.1).

Aunque nos acercaríamos más a un modelo real uniendo los  $B_i$  por funciones parabólicas pensamos que si  $k$  es suficientemente grande la aproximación lineal es bastante buena.

Supongamos que  $S^*$  es convexo. En el Anexo 1 se analizan las condiciones que han de cumplirse para que  $S^*$  sea convexo, que, como veremos, no son

demasiado restrictivas). Los puntos  $B_i$  vienen dados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 B_1 &\equiv \left( x_0 + r_1 \cos \frac{2\pi 0}{k}; y_0 + r_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi 0}{k} \right) \\
 &\quad \dots \\
 B_i &\equiv \left( x_0 + r_i \cos \frac{2\pi(i-1)}{k}; y_0 + r_i \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)}{k} \right) \\
 &\quad \dots \\
 B_k &\equiv \left( x_0 + r_k \cos \frac{2\pi(k-1)}{k}; y_0 + r_k \operatorname{sen} \frac{2\pi(k-1)}{k} \right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Obtendremos a continuación las ecuaciones de  $\mathcal{S}^*$ . La recta que pasa por  $B_i$  y  $B_{i+1}$  tiene ecuación:

$$\begin{aligned}
 &\frac{x - \left( x_0 + r_i \cos \frac{2\pi(i-1)}{k} \right)}{\left( x_0 + r_{i+1} \cos \frac{2\pi i}{k} \right) \left( x_0 + r_i \cos \frac{2\pi(i-1)}{k} \right)} = \\
 &= \frac{y - \left( y_0 + r_i \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)}{k} \right)}{\left( y_0 + r_{i+1} \operatorname{sen} \frac{2\pi i}{k} \right) \left( y_0 + r_i \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)}{k} \right)} = \\
 &= \frac{x - x_0 - r_i \cos \frac{2\pi(i-1)}{k}}{r_{i+1} \cos \frac{2\pi i}{k} - r_i \cos \frac{2\pi(i-1)}{k}} = \\
 &= \frac{y - y_0 - r_i \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)}{k}}{r_{i+1} \operatorname{sen} \frac{2\pi i}{k} - r_i \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)}{k}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Quitando los denominadores

$$\begin{aligned}
 (x - x_0)r_{i+1} \operatorname{sen} \frac{2\pi i}{k} - (x - x_0)r_i \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)}{k} - r_i r_{i+1} \cos \frac{2\pi(i-1)}{k} \operatorname{sen} \frac{2\pi i}{k} + \\
 + r_i^2 \cos \frac{2\pi(i-1)}{k} \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)}{k} = (y - y_0)r_{i+1} \cos \frac{2\pi i}{k} - (y - y_0)r_i \cos \frac{2\pi(i-1)}{k} \\
 - r_i r_{i+1} \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)}{k} \cos \frac{2\pi i}{k} + r_i^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)}{k} \cos \frac{2\pi(i-1)}{k} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Y simplificando nos queda:

$$M_i(x - x_0) + N_i(y - y_0) + L_i = 0 \quad (4)$$

Donde

$$\begin{aligned} M_i &= r_i \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)}{k} - r_{i+1} \operatorname{sen} \frac{2\pi i}{k} \\ N_i &= r_{i+1} \operatorname{cos} \frac{2\pi i}{k} - r_i \operatorname{cos} \frac{2\pi(i-1)}{k} \\ L_i &= r_i r_{i+1} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{k} \end{aligned} \quad (5)$$

Y de aquí  $\mathcal{S}^*(x_0; y_0)$  queda determinado por las  $k$  inecuaciones:

$$M_i(x - x_0) + N_i(y - y_0) + L_i = 0 \quad 1 \leq i \leq k \quad (6)$$

En todo lo anterior consideramos que  $B_{k+1} \equiv B_1$  y que  $r_{k+1} \equiv r_1$ .

### 3.3 Determinación de la región factible.

Dado un destino  $A_j(a_j; b_j)$ , la zona prohibida para localizar el centro peligroso en su proximidad, que denominamos **Zona de respeto** para el destino  $A_j$  viene dada por el recinto  $\mathcal{S}_j$ , determinado por las inecuaciones:

$$\begin{aligned} &(x - a_j) \left[ r_i \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi(i-1)}{k} + \pi \right) - r_i \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi i}{k} + \pi \right) \right] + \\ &+(y - b_j) \left[ r_{i+1} \operatorname{cos} \left( \frac{2\pi i}{k} + \pi \right) - r_i \operatorname{cos} \left( \frac{2\pi(i-1)}{k} + \pi \right) \right] + \\ &+ r_i r_{i+1} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{k} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq k \end{aligned} \quad (7)$$

Efectivamente, sea el punto  $P(x; y) \in \mathcal{S}_j$ , veremos que la fuente no puede localizarse en él. Supongamos que el segmento  $S(A_j, P)$  tiene dirección  $\theta$ , de tal forma que para algún  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$  se verifica que:

$$\frac{2\pi(i-1)}{k} \leq \theta < \frac{2\pi i}{k} \quad (8)$$

por tanto  $P$  se encuentra comprendido entre segmentos de intensidad  $r_{i+\frac{k}{2}}$  y  $r_{i+\frac{k}{2}+1}$ , y a una distancia  $\delta$  de  $A_j$ . Es fácil ver que:

$$\delta \leq r_{i+\frac{k}{2}} \left[ \frac{\frac{2\pi i}{k} - \theta}{\frac{2\pi}{k}} \right] + r_{i+\frac{k}{2}+1} \left[ \frac{\theta - \frac{2\pi(i-1)}{k}}{\frac{2\pi}{k}} \right] \quad (9)$$

Si localizamos la fuente en  $P$ ,  $S(P, A_j)$  tendrá dirección  $\pi + \theta$ . La ecuación anterior puede ponerse:

$$\delta \leq r_{i+\frac{k}{2}} \left[ \frac{\frac{2\pi i}{k} + \pi - (\theta + \pi)}{\frac{2\pi}{k}} \right] + r_{i+\frac{k}{2}+1} \left[ \frac{(\theta + \pi) - \frac{2\pi(i-1)}{k} + \pi}{\frac{2\pi}{k}} \right] \quad (10)$$

lo que implica que  $A_j \in \mathcal{S}^*(x, y)$  y por tanto que la fuente no puede localizarse en  $P(x; y)$ . Recíprocamente, es fácil ver que si  $P(x; y) \notin \mathcal{S}_j$ , entonces  $A_j \notin \mathcal{S}^*(x; y)$ .

### 3.4 Formulación del problema.

El problema a resolver es, básicamente, el planteado en el Capítulo II, donde los  $\mathcal{S}_j$  son los determinados en el punto anterior. Las únicas diferencias están en las restricciones adicionales que se harán sobre  $\mathcal{S}$ .

Pediremos que  $\mathcal{S}$  tenga al menos cinco lados, exigencia fácilmente asumible, pues si fuera un triángulo o un trapecio bastaría una pequeña deformación para obtener ese número mínimo de lados. Además, si  $\alpha_i$  y  $\alpha_{i+1}$  son ángulos contiguos e interiores de  $\mathcal{S}$ , deberá verificarse que:

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi \quad (11)$$

Estas exigencias tienen que ver con el desarrollo del algoritmo, como pondremos de manifiesto más adelante.

Por otra parte, en la Formulación del problema hecha en el Capítulo II, se advertía de la posibilidad de que  $\mathcal{R}_F$  fuera vacío. Esto es debido a que  $\mathcal{S}$

está contenido en la unión de los  $S'_j$ s. Si ocurriera esto una solución sería reducir el tamaño de las zonas de seguridad de las poblaciones, haciendo:

$$r_i = r_i - C \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (12)$$

tomando  $0 < C < \min_i r_i$ , lo suficientemente grande para que  $\mathcal{R}_F$  deje de ser vacío.

La idea anterior nos servirá además para construir poligonales de indiferencia alrededor de cada óptimo local. Piénsese que aunque consideremos  $S$  como polígono de localización posible del centro peligroso, pueden existir zonas dentro de él donde sea técnicamente inviable dicha localización.

## 3.5 Algoritmo

*Antes de entrar en el algoritmo del programa principal procedemos a dar una lista de las rutinas necesarias para ejecutarlo. Las rutinas de carácter general y fácil desarrollo sólo se enumeran, mientras que las específicas del problema que estamos tratando son tratadas con detalle.*

### 3.5.1 Rutinas del Algoritmo

#### Enumeración de rutinas necesarias para ejecutar el algoritmo

- *Rutina para obtener el segmento mínimo que une dos segmentos.*
- *Rutina para obtener el punto de corte de dos segmentos.*
- *Rutina para obtener los puntos de corte de un segmento y un arco de parábola.*
- *Rutina para obtener la distancia entre un punto y un segmento.*
- *Rutina para calcular la trayectoria del segmento que equidista de dos segmentos. Observe que la trayectoria puede ser vacía. De hecho, siempre que calculemos una trayectoria dependiendo de algún segmento, sólo nos interesará el trozo de esta que se encuentre en la intersección de la banda determinada por las perpendiculares trazadas en los extremos del segmento con el polígono  $S$ .*
- *Rutina para obtener la trayectoria del arco de parábola que equidista de un segmento y un punto. Por la misma razón de antes, esta trayectoria también podría ser vacía.*
- *Rutina para obtener la trayectoria de la recta que equidista de dos puntos.*

**Desarrollo de algunas rutinas necesarias para ejecutar el algoritmo****Rutina de obtención de estrechamientos no nulos.**

1. *Calculamos  $\alpha = \text{Argumento}[\overline{A_i A_j}]$  (en grados sexagesimales). Calculamos  $E = \text{Parte entera de } [\frac{\alpha}{360}16 + 1]$  [De esta forma conseguimos determinar los lados más próximos entre  $S_i$  y  $S_j$ ; pues éstos serán los que cortan al vector  $\overline{A_i A_j}$ . Ya que los polígonos son convexos.]*
2. *Aplicamos la Rutina que calcula los segmentos mínimos que unen dos segmentos dados, a  $L_E^{A_i}$  y  $L_{E+8}^{A_j}$ . [Los subíndices de los lados están dados en Módulo 16+1.]*
3. *Para cada uno de los segmentos (dos a lo sumo, en caso de lados paralelos) que se obtengan de aplicar la Rutina anterior calculamos su punto medio  $M$  y determinamos la distancia a cualquiera del resto de los "polígonos de respeto". [Para cada polígono de respeto  $S_r$  obtendríamos el lado que corta al vector  $\overline{A_r M}$  y aplicaríamos la Rutina que nos da la distancia entre un punto y un segmento.]*
4. *Si todas las distancias son estrictamente mayores que la mitad de la longitud del segmento considerado entre  $S_i$  y  $S_j$  diremos que dicho segmento es un estrechamiento e incluimos en  $LE$  una lista que incluya: los dos extremos del segmento, los dos lados en los que se encuentran, las coordenadas de las poblaciones, el punto medio del segmento, su tamaño y un contador a cero si sólo existe un segmento y a uno si existen dos segmentos mínimos, mayorantes, entre  $S_i$  y  $S_j$ , o bien si el estrechamiento se da entre dos poblaciones ficticias. En caso contrario desecharíamos el segmento.*

**Rutina de obtención de estrechamientos nulos.**

1. Recorremos los lados de los polígonos  $S_i$  y  $S_j$  y aplicamos a cada combinación de lados la Rutina que obtiene los puntos de intersección entre dos segmentos.
2. Si hay puntos de corte, por cada uno incluimos en  $LE$  una lista que incluya: el punto de corte repetido dos veces, los dos lados en los que se encuentra, las coordenadas de las poblaciones, el punto de corte, el tamaño igual a cero y un contador a uno. [El colocar contadores en los estrechamientos obedece a que sólo son utilizables un número concreto de veces y luego quedan inactivos. Concretamente, los estrechamientos nulos y los mayorantes son utilizables una sólo vez y los no nulos dos veces.]
3. Si no hay puntos de corte aplicamos la Rutina de obtención de estrechamientos no nulos.

**Rutina para obtener la trayectoria del centro de los círculos inscritos en un polígono y el posible óptimo local.**

1. Realizamos lo que sigue en tanto que  $base1$  y  $base2$  no sean consecutivos.
2. Hacemos Trayectoria actual  $\equiv T_a$  a la que, partiendo de  $V$  está determinada por  $base1$  y  $base2$ , aplicando la Rutina de obtención de la trayectoria determinada por dos segmentos.
3. Consideramos  $M = +\infty$  de la máquina.
4. Recorremos desde  $i = base1 + 1$  hasta  $base2 - 1$ .
5. Calculamos la Trayectoria  $\equiv T_c$  determinada por  $base1$  y el elemento  $i$ -ésimo, lado o vértice, hasta  $base2 - 1$ . Utilizamos la Rutina para

obtener la trayectoria del segmento que equidista de dos segmentos, *la* Rutina para obtener la trayectoria del arco de parábola que equidista de un segmento y un punto *y la* Rutina para obtener la recta que equidista de dos puntos.

6. Calculamos  $P_c = T_a \cap T_c$ .
7. Calculamos  $d(P_a, P_c)$ .
8. Si  $d(P_a, P_c) < M$ .
  - Hacemos  $M = d(P_a, P_c)$ .
  - Guardamos  $P_{prov} = P_c$  y  $T_{prov} = T_c$ .
9. Calculamos la Trayectoria  $\equiv T_c$  determinada por *base2* y el elemento *i*-ésimo, lado o vértice, hasta *base1* + 1.
10. Calculamos  $P_c = T_a \cap T_c$ .
11. Calculamos  $d(P_a, P_c)$ .
12. Si  $d(P_a, P_c) < M$ .
  - Hacemos  $M = d(P_a, P_c)$ .
  - Guardamos  $P_{prov} = P_c$  y  $T_{prov} = T_c$ .
13. Fin bucle(*i*).
14. Obtenemos  $D = d(P_c, base1)$ . [Pues  $P_c$  equidista de *base1* y *base2*.]
15. Hacemos  $P_a = P_c$ .
16. Si  $D > r_{max}$  y  $P_c \in \mathcal{S}$ . [Situación ideal, puesto que el punto de cambio mejora al anterior y se encuentra en  $\mathcal{S}$ .]

- Hacemos  $O_a = P_c$ ,  $r_{max} = D$ .

17. Si  $P_c \notin S$  y  $P_a \in S$ . [Aplicamos Bolzano y buscamos el óptimo en la frontera de  $S$ .]

- Hacemos  $P_0 = T_a \cap S_0$  y  $D = d(P_c, base1)$ .

- Si  $D > r_{max}$  y  $P_0 \in P_i$ .

– Hacemos  $r_{max} = D$  y  $O_a = P_0$ .

18. Hacemos  $T_a = T_c$ .

19. Creamos una lista ordenada de los elementos entre  $base1$  y  $base2$  que distan  $D$  de  $P_a$ .

20. Aplicamos esta rutina a cada par de elementos consecutivos de la lista. [Obsérvese el carácter recursivo de la Rutina. Así se analizaría todo el árbol.]

21. Fin condición.

**FIN RUTINA.**

### 3.5.2 Programa principal

**Entrada de datos**

1. Introducir coordenadas del polígono convexo  $S$ . Supondremos que  $S$  posee al menos cinco lados.

$$S = \{(x, y) | c_j x + d_j y \leq b_j; \quad 1 \leq j \leq p; \quad p \geq 5\}$$

- Generar lista ordenada de vértices de  $S$ .

$$\{(V_{x_1}, V_{y_1}), \dots, (V_{x_p}, V_{y_p})\}$$

- Si notamos con  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  a los ángulos interiores de  $S$  asociado a cada vértice, exigiremos que:

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi \quad \forall i = 1, \dots, p; \quad p+1 \equiv 1$$

- Llamamos  $D_S$  al diámetro de  $S$ , que vendrá dado por la distancia entre los dos vértices más alejados.

2. Introducir las coordenadas de las poblaciones existentes.

$$A_j \equiv (P_{x_j}, P_{y_j}) \quad j = 1, \dots, n_E$$

Donde  $n_E$  denota el número de poblaciones existentes.

3. Introducir la intensidad del viento en cada una de las 16 direcciones situadas a una distancia angular de  $(\frac{2\pi}{16})$ .

$$r_i = I \left( \left( \frac{2\pi i}{16} \right) \right) \quad 1 \leq i \leq 16$$

- Comprobar que el polígono de vientos, centrado en el origen, resultante es convexo. Si para algún  $i = 1, \dots, 16$ , ocurre que:

$$r_i < \frac{2r_{i-1}r_{i+1} \cos \frac{\pi}{8}}{r_{i-1} + r_{i+1}} = M_i$$

entonces hacer  $r_i = M_i$  y volver a comprobar desde  $i = 1$ .

Considerar  $r_{17} \equiv r_1$ .

- Calculamos el diámetro máximo de un Polígono de Respeto:

$$D_V = \max_{1 \leq i \leq 8} [r_i + r_{i+8}]$$

4. Introducir las coordenadas de 6 poblaciones ficticias en los vértices de un exágono regular centrado en el centro de gravedad de las poblaciones existentes y de radio  $r_E = \frac{\sqrt{3}-1}{4}[D_S + D_V]$ .

$$A_{E+j} \equiv (P_{x_{E+j}}, P_{y_{E+j}}) \quad 1 \leq j \leq 6$$

Notaremos  $n_E + 6$  como  $n_T$ , número total de poblaciones. [Con la inclusión de estas poblaciones ficticias pretendemos que  $\mathcal{S}$  quede cubierta por los polígonos estrecho-convexos que definiremos más adelante, al objeto de darle un tratamiento uniforme al problema.]

5. Generar lista ordenada de poblaciones.

$$\{(P_{x_1}, P_{y_1}), \dots, (P_{x_{n_T}}, P_{y_{n_T}})\},$$

donde  $n_T$  denota el número total de poblaciones

### Determinación de las zonas de respeto

1. Generación del Polígono de Respeto centrado en el origen.

- En la dirección  $(\frac{2\pi i}{16})$  con  $i = 1, \dots, 16$ , el centro peligroso ha de hallarse a una distancia mínima de  $r_{i+8}$ . [La Zona de Respeto se obtiene dando un giro de  $180^\circ$  al polígono de vientos.]
- Generar lista ordenada de Vértices de Respeto para el origen de coordenadas.

$$\{(r_{x_1}, r_{y_1}), \dots, (r_{x_{16}}, r_{y_{16}})\}$$

[Generación de los Polígonos de Respeto de las poblaciones. Cada vez que se quiera utilizar el Polígono de Respeto de la población  $A_j = (P_{x_j}, P_{y_j})$ , sumamos las coordenadas de  $A_j$  a las coordenadas de los Vértices de Respeto en el origen. No obstante lo anterior, cabría la posibilidad, si hubiera razones para ello, de construir los polígonos de respeto de forma personalizada, de forma que no todos ellos fueran iguales.]

NOTACION

- Llamaremos  $S_j$ , al Polígono de Respeto de la población  $A_j$ .

$$S_j \equiv \{(r_{x_1}^{A_j}, r_{y_1}^{A_j}), \dots, (r_{x_{16}}^{A_j}, r_{y_{16}}^{A_j})\} \quad j = 1, \dots, n_T$$

- Llamaremos  $V_i^{A_j}$ , al vértice  $i$ -ésimo del polígono  $S_j$ .

$$V_i^{A_j} \equiv (r_{x_i}^{A_j}, r_{y_i}^{A_j}) \quad i = 1, \dots, 16$$

- Notaremos con  $L_i^{A_j}$  al lado  $i$ -ésimo del polígono  $S_j$ .

$$L_i^{A_j} \equiv S[V_i^{A_j}, V_{i+1}^{A_j}] \quad i = 1, \dots, 16 \quad y \quad V_{17}^{A_j} = V_1^{A_j}$$

### Determinación de estrechamientos entre polígonos de respeto

1. Creamos la lista  $LE = \{\emptyset\}$
2. Recorremos los Polígonos de Respeto  $S_i$  desde  $i = 1$  hasta  $n_T - 1$ .
3. Recorremos los Polígonos de Respeto  $S_j$  desde  $j = i + 1$  hasta  $n_T$ .
4. Si  $\text{Modulo}[A_i, A_j] > D_V$  [ $S_i$  y  $S_j$  son disjuntos y la distancia entre ellos estrictamente mayor que cero].
  - Aplicamos la Rutina de obtención de estrechamientos no nulos.
5. Si  $\text{Modulo}[A_i, A_j] > D_V$ . [Existe la posibilidad de que  $S_i$  y  $S_j$  tengan intersección distinta del vacío.]
  - Aplicamos la Rutina de obtención de estrechamientos nulos.
6. Fin bucles( $j, i$ ).

**Determinacion de los poligonos estrecho-convexos**

1. Copiamos  $LE$  en  $LET$ .
2. Creamos la lista  $LEC = \{\emptyset\}$ .
3. Hacemos  $r = 3$ . [Vamos a construir los polígonos estrecho-convexos empezando por los más simples, es decir los que están determinados por tres estrechamientos ("triángulos"), luego los de cuatro ("cuadrados"), etc. Obsérvese que el número de triángulos a investigar es del orden de  $n^3$ , el de cuadrados del orden de  $n^4$ . Y es evidente que no puede haber un polígono generado por cuatro estrechamientos que contenga a uno de tres, y así sucesivamente. Como por otra parte los estrechamientos tienen un máximo de dos usos, la lista  $LET$  decrece rápidamente y la rutina se ejecuta rápidamente.]
4. Ejecutamos lo que sigue en tanto que  $r$  sea menor o igual que la longitud de  $LET$ .
5. Generamos una lista de combinaciones de los elementos de  $LET$ , tomados de  $r$  en  $r$  que llamaremos  $LCr$ .
6. Recorremos  $LCr$  desde  $p = 1$  hasta la longitud de la lista. [Vamos a comprobar que la combinación tomada genera realmente un polígono acotado.]
7. Generamos  $ListaA=Lista$  de polígonos de respeto contenidos en el elemento  $p$ -ésimo de  $CLr$ .
8. Si  $Cardinal[ListaA] \neq r$  desechamos  $CLr[[p]]$ . [Es evidente que una combinación de estrechamientos genera un polígono si hay el mismo número de estrechamientos que de polígonos de respeto afectados.]

9. *Generamos ListaB=Lista encadenada de polígonos de respeto contenidos en el elemento p-ésimo de CLr. [El encadenamiento respeta el orden y los elementos repetidos.]*
10. *Ordenamos la ListaB.*
11. *Hacemos ListaC =Elementos impares de ListaB.*
12. *Si ListaC  $\neq$  ListaA desechamos el elemento p-ésimo de CLr.*
13. *Ordenamos los estrechamientos contenidos en el elemento p-ésimo de CLr. A partir de uno de los extremos del primer estrechamiento nos desplazamos por el perímetro del polígono de respeto hasta el extremo del estrechamiento que se encuentre más próximo, recorremos este estrechamiento hasta conectar con el siguiente polígono y así sucesivamente. En la última operación volveremos al otro extremo del estrechamiento de partida. Llamamos  $\mathcal{P}_{rp}$  al polígono así generado.*
14. *Hacemos Bandera = 0. [Vamos a comprobar que no existe otro polígono anterior contenido en éste.]*
15. *Recorremos LEC desde  $j = 1$  hasta su longitud actual.*
16. *Si el elemento j-ésimo de LEC es un subconjunto  $\mathcal{P}_{rp}$  ponemos Bandera=1.*
17. *Fin del bucle(j).*
18. *Si Bandera = 0: [Esto significa que efectivamente no contiene a otro polígono.]*
  - (a) *Añadimos  $\mathcal{P}_{rp}$  a LEC.*

- (b) Sumamos una unidad al contador de los estrechamientos que pertenecen a  $\mathcal{P}_{rp}$ .
- (c) Si el contador del estrechamiento está en 2, eliminamos dicho estrechamiento de *LET*. [Con esto eliminamos de *LET* aquellos elementos que han quedado inactivos.]

19. Fin del bucle(*p*).

20. Hacemos  $r = r + 1$ .

21. Fin de la condición.

### **Determinación de la trayectoria de los círculos inscritos en los polígonos Estrecho-convexos.**

1. Recorremos *LEC* desde  $i = 1$  hasta longitud de *LEC*.
2. A partir de cada polígono estrecho-convexo  $\mathcal{P}_i$  contenido en *LEC* construimos otro polígono  $\mathcal{P}_i^*$  sustituyendo cada lado que coincide con un estrechamiento por tres lados: dos de ellos coincidiendo en uno de sus extremos con los del estrechamiento, perpendiculares a éste y de longitud la mitad de la del estrechamiento y el tercero que une los otros extremos de los dos primeros. [En definitiva, se trata de añadirle un rectángulo a cada lado del polígono  $\mathcal{P}_i$  que coincida con un estrechamiento que tenga de altura la mitad de la longitud de éste]. Incluimos la pareja de polígonos originales y transformados en la lista *LECT*.
3. Fin bucle(*i*).
4. Creamos una lista vacía de óptimos locales, que llamaremos *LOC*.

5. Recorremos *LECT* desde  $i = 1$  hasta longitud de *LECT*.
6. Consideramos el vértice  $V$  del polígono  $\mathcal{P}_i^*$  que se encuentre más a la izquierda del plano. [Es decir, aquel cuya coordenada  $X$  sea menor, que necesariamente es convexo].
7. Denominamos *base1* y *base2* a los lados adyacentes al vértice  $V$  y ordenamos el resto de elementos de  $\mathcal{P}_i^*$ , lados y vértices no convexos, entre *base1* y *base2*, considerando dos punteros que recorran dichos elementos entre una base y la otra.
8. Hacemos *Optimo actual*  $\equiv O_a = V$ ,  $C_{max} = V$ ,  $r_{max} = 0$ .
9. Hacemos *Punto de cambio actual*  $\equiv P_a = V$
10. Aplicamos a  $\mathcal{P}_i^*$  la Rutina de obtención de la trayectoria del centro de los círculos inscritos en *base1* y *base2*.
11. Si  $r_{max} > 0$  incluir  $\{\mathcal{P}_i, O_a, d(O_a, \mathcal{P}_{i_0})\}$  en *LOC*. [Hemos encontrado un punto equidistante de, al menos, dos polígonos de respeto, puesto que el círculo adjunto tiene, al menos, dos puntos de tangencia.]
12. Si  $r_{max} = 0$ . [La única posibilidad de que exista un óptimo local en  $\mathcal{P}_i$  es que éste se encuentre en un vértice de  $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_i$ , por lo que a continuación recorremos dichos vértices.]
  - Recorremos la lista *LV* de vértices  $V_i$  de  $\mathcal{S}$  contenidos en  $\mathcal{P}_i$ .
  - Calculamos  $D = d(V_i, \mathcal{P}_{i_0})$ .
  - Si  $D > r_{max}$  hacemos  $O_a = V_i$  y  $r_{max} = D$ .
  - Fin bucle( $i$ ).
  - Si  $r_{max} > 0$  incluir  $\{\mathcal{P}_i, V_i, r_{max}\}$  en *LOC*.
13. Fin bucle( $i$ ).

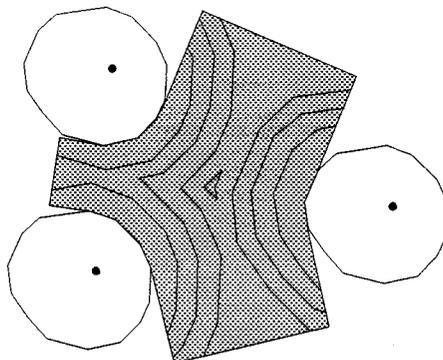


Figura 3.2:

### Obtención del óptimo global

[Es interesante ofrecer la lista de todos los óptimos locales, pues pueden producirse circunstancias para la elección de uno de ellos en detrimento del óptimo global.]

*Ordenamos los elementos de LOC en función de su tercera componente y la imprimimos.*

*Elegimos aquel cuya segunda componente sea mayor. Si hubiera dos nos quedamos con ambos.*

**Fin del programa principal.**

## 3.6 Construcción de las Poligonales de indiferencia

*Para cada polígono Estrecho-convexo  $\mathcal{P}_i$  construimos las poligonales de indiferencia de la siguiente manera (Figura 3.2):*

1. *Obtenemos el radio del CIM inscrito en  $\mathcal{P}_i^*$ , sea  $r$  dicho radio.*

2. Establecemos la distancia entre dos poligonales consecutivas como un porcentaje de  $r$ ,  $p = \frac{r}{n}$  con  $n \geq 2$ .
3. Consideramos las poblaciones cuyos Polígonos de respeto originales, llamemosles  $\mathcal{S}_{j_i}$  para  $j_i = 1, \dots, t_i$ , tienen frontera común con  $\mathcal{P}_i$  y para cada  $h = 0, \dots, n$ , calculamos el Polígono de respeto, cuya componente en la dirección  $l$ -ésima viene dada por:

$$r_l + ph \quad \text{donde } l = 1, \dots, k \quad (13)$$

que llamaremos  $\mathcal{S}_{j_i}^h$ .

4. Para cada valor de  $h$  obtenemos una poligonal de indiferencia como:

$$P_{i_h} = Fr \left[ \mathcal{P}_i \bigcap_{j_i=1}^{t_i} (\mathcal{S}_{j_i}^h)^c \right] \quad (14)$$

Obviamente, para  $h = n$  la poligonal de indiferencia coincide con el centro del CIM y para  $h = 0$  con el Polígono Estrecho-converso.

# Apéndice A

## Algunos resultados sobre convexidad.

*Lo que sigue son algunos resultados sencillos sobre convexidad en polígonos que se utilizan en el desarrollo de la primera parte del Capítulo II.*

**Lema A.1** *Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son polígonos convexos y cerrados, entonces cada lado del polígono  $\mathcal{A}$  tiene ninguno, uno, dos o infinitos puntos de corte con  $Fr(\mathcal{B})$ .*

*Demostración: Supongamos que un lado de  $\mathcal{A}$  tiene un número finito  $n > 2$  de puntos de corte con  $Fr(\mathcal{B})$ , tomemos tres puntos de corte consecutivos:  $X, Y$  y  $Z$ , con  $Y$  en el centro (lógicamente  $S[X, Z] \subset Fr(\mathcal{A})$ ), por la convexidad de  $\mathcal{B}$ ,  $S(X, Z)$  está contenido en  $\mathcal{B}$  y corta a  $Fr(\mathcal{B})$  en un punto interior  $Y$ , ello implica que  $S[X, Z] \subset Fr(\mathcal{B})$  y por tanto que  $Fr(\mathcal{A}) \cap Fr(\mathcal{B})$  tiene un número infinito de puntos.*

**Lema A.2** *Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son polígonos convexos y cerrados con  $Int(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \neq \emptyset$ , entonces se verifica al menos una de las condiciones siguientes:*

1.  $\mathcal{A} \cap Fr(\mathcal{B})$  tiene intersección con al menos dos lados distintos de  $\mathcal{A}$ .

2.  $\mathcal{B} \cap Fr(\mathcal{A})$  tiene intersección con al menos dos lados distintos de  $\mathcal{B}$ .

Demostración: Supongamos que no se verifica ninguna de las dos condiciones, entonces  $\mathcal{A} \cap Fr(\mathcal{B})$  está contenido en un lado de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ , y  $\mathcal{B} \cap Fr(\mathcal{A})$  está contenido en un lado de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{L}_\mathcal{B}$ . En esas condiciones:

$$\begin{aligned} Fr(\mathcal{A}) \cap Fr(\mathcal{B}) &\subset [\mathcal{A} \cap Fr(\mathcal{A})] \cap [\mathcal{B} \cap Fr(\mathcal{B})] = \\ &= [\mathcal{A} \cap Fr(\mathcal{B})] \cap [\mathcal{B} \cap Fr(\mathcal{A})] \subset \mathcal{L}_\mathcal{A} \cap \mathcal{L}_\mathcal{B} \end{aligned} \quad (1)$$

lo que implica que, a lo sumo, un único lado de  $\mathcal{A}$  intersecciona con un único lado de  $\mathcal{B}$ ; es decir:  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  tienen en común, a lo más, un trozo de lado y por consiguiente  $Int(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \emptyset$ , en contra de la hipótesis de partida.

**Lema A.3** Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son polígonos convexos y cerrados con  $Int(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \neq \emptyset$ , entonces se verifica una y sólo una de las condiciones siguientes:

1.  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c$  no es convexo.
2.  $\mathcal{A} \cap Fr(\mathcal{B})$  está contenido en un único lado del polígono  $\mathcal{B}$ .

Demostración: Sean  $X$  e  $Y$  los puntos de corte de las fronteras de los polígonos,  $\{X, Y\} \in Fr[\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c]$ . Supongamos que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c$  es convexo, entonces  $\forall \lambda \in (0; 1)$  tendremos que:

$$Z = \lambda X + (1 - \lambda)Y \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c \quad (2)$$

por tanto  $Z \notin Int(\mathcal{B})$  y puesto que  $Z \in \mathcal{B}$ , necesariamente  $Z \in Fr(\mathcal{B})$  con lo que  $X$  e  $Y$  pertenecen al mismo lado del polígono  $\mathcal{B}$  y consecuentemente que  $\mathcal{A} \cap Fr(\mathcal{B})$  está contenido en un lado del polígono  $\mathcal{B}$ .

Recíprocamente, si  $\mathcal{A} \cap Fr(\mathcal{B})$  no está contenido en un lado del polígono  $\mathcal{B}$  consideremos dos puntos  $X$  e  $Y$  de  $\mathcal{A} \cap Fr(\mathcal{B})$  no pertenecientes al mismo lado de  $Fr(\mathcal{B})$ , entonces, por la convexidad de  $\mathcal{B}$ ,  $\forall \lambda \in (0; 1)$  tendremos que:

$$Z = \lambda X + (1 - \lambda)Y \in Int(\mathcal{B}) \quad (3)$$

y por tanto  $Z \neq \mathcal{B}^c$  y  $Z \neq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c$ , lo que implica, puesto que  $X$  e  $Y$  pertenecen a  $Fr[\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c]$ , que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c$  no es convexo.

**Lema A.4** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos polígonos convexos y cerrados con  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ , si existen  $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$  e  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{B}$ ,  $X_1 \neq X_2$  e  $Y_1 \neq Y_2$ , tal que:

$$d(X_1, Y_1) = d(X_2, Y_2) = d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad (4)$$

entonces:

1.  $X_1$  y  $X_2$  ( $Y_1$  e  $Y_2$ ) pertenecen al mismo lado de  $Fr(\mathcal{A})$  ( $Fr(\mathcal{B})$ ).
2.  $S[X_1, Y_1]$  y  $S[X_2, Y_2]$  son paralelos, y
3.  $\forall X \in S(X_1, X_2)$  (existen infinitos)  $\exists Y \in S(Y_1, Y_2)$  tal que  $d(X, Y) = d(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

*Demostración:* Los segmentos  $S[X_1, X_2] \in \mathcal{A}$  y  $S[Y_1, Y_2] \in \mathcal{B}$ , por la convexidad de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Puesto que  $d(X_1, Y_1) = d(X_2, Y_2)$ ,  $X_1X_2Y_2Y_1$  es trivialmente un rectángulo, por tanto  $\forall X \in S(X_1, X_2) \exists Y \in S(Y_1, Y_2)$  tal que  $d(X, Y) = d(X_1, Y_1) = d(X_2, Y_2)$ . Ahora bien si  $X_1$  y  $X_2$  no pertenecen a la misma cara de  $Fr(\mathcal{A})$  entonces  $S(X_1, X_2) \in Int(\mathcal{A})$  y consecuentemente  $S(X, Y)$  corta a  $Fr(\mathcal{A})$ , en contra de que  $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(X, Y)$ , luego  $X_1$  y  $X_2$  pertenecen a la misma cara de  $Fr(\mathcal{A})$  y puesto que  $X_1X_2Y_2Y_1$  es un rectángulo  $S[X_1, X_2]$  es paralelo a  $S[Y_1, Y_2]$ .

**Lema A.5** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos polígonos convexos y cerrados con  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ , entonces si  $A \in \mathcal{L}_\mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{L}_\mathcal{B}$ , con  $\mathcal{L}_\mathcal{A}$  y  $\mathcal{L}_\mathcal{B}$  lados de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  respectivamente, son dos puntos tales que  $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(A, B) = d$ , entonces si existen  $A' \in \mathcal{A}$  y  $B' \in \mathcal{B}$ , tal que  $d(A', B') = d$ , necesariamente  $A' \in \mathcal{L}_\mathcal{A}$  y  $B' \in \mathcal{L}_\mathcal{B}$ .

Demostración: Supongamos que  $A' \neq \mathcal{L}_A$ , por convexidad de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ ,  $S(A, A') \in \mathcal{A}$  y  $S(B, B') \in \mathcal{B}$ . El rectángulo  $AA'BB'$  contiene en su interior, al menos, un vértice de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{V}$ , y por tanto  $d(\mathcal{V}, S(B, B')) < d$  y consecuentemente  $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < d$ , en contra de las hipótesis de partida.

## Apéndice B

### Restricciones sobre los $r_i$ para que el Polígono de vientos sea convexo.

Supongamos tres vértices consecutivos de  $S^*$ :  $B_{i-1}$ ,  $B_i$  y  $B_{i+1}$ , calculemos el valor  $r_i$  para que el vértice  $B_i$  sea convexo (Figura B.1).

Obviamente:

$$\gamma = \pi - \frac{2\pi}{k} - \beta \quad y \quad \gamma' = \pi - \frac{2\pi}{k} - (\pi - \beta) = \beta - \frac{2\pi}{k} \quad (1)$$

Se cumple que:

$$\frac{r_{i-1}}{\text{sen } \beta} = \frac{r}{\text{sen} \left( \pi - \frac{2\pi}{k} \right)} \quad (2)$$

y

$$\frac{r_{i+1}}{\text{sen}(\pi - \beta)} = \frac{r}{\text{sen} \left( \beta - \frac{2\pi}{k} \right)} \quad (3)$$

Despejando:

$$r = \frac{r_{i-1} \left[ \text{sen} \left( \pi - \frac{2\pi}{k} \right) \cos \beta - \cos \left( \pi - \frac{2\pi}{k} \right) \text{sen } \beta \right]}{\text{sen } \beta} \quad (4)$$

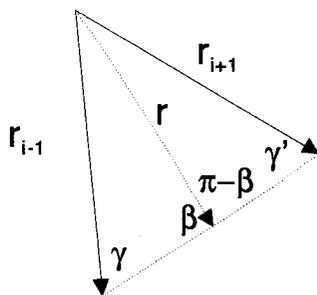


Figura B.1:

y

$$r = \frac{r_{i+1} \left[ \text{sen } \beta \cos \frac{2\pi}{k} - \cos \beta \text{sen } \frac{2\pi}{k} \right]}{\text{sen } \beta} \quad (5)$$

Operando y despejando  $\cot \beta$ , tenemos:

$$\cot \beta = \frac{r + r_{i-1} \cos(\pi - \frac{2\pi}{k})}{r_{i-1} \text{sen}(\pi - \frac{2\pi}{k})} \quad (6)$$

y

$$\cot \beta = \frac{r_{i+1} \cos \frac{2\pi}{k} - r}{r_{i+1} \text{sen} \frac{2\pi}{k}} \quad (7)$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{r + r_{i-1} \cos(\pi - \frac{2\pi}{k})}{r_{i-1} \text{sen}(\pi - \frac{2\pi}{k})} = \frac{r_{i+1} \cos \frac{2\pi}{k} - r}{r_{i+1} \text{sen} \frac{2\pi}{k}} \quad (8)$$

Eliminando los denominadores tendremos:

$$rr_{i+1} + r_{i+1}r_{i-1} \cos(\pi - \frac{2\pi}{k}) = r_{i+1}r_{i-1} \cos \frac{2\pi}{k} - rr_{i-1} \quad (9)$$

Despejando  $r$  queda:

$$r = \frac{2r_{i-1}r_{i+1} \cos \frac{2\pi}{k}}{r_{i-1}r_{i+1}} \quad (10)$$

Y, por tanto:

$$r \geq \frac{2r_{i-1}r_{i+1} \cos \frac{2\pi}{k}}{r_{i-1}r_{i+1}} \quad (11)$$

Lógicamente en la expresión anterior  $k + 1 = 1$  y  $0 = k$ .

Para comprobar que la condición de convexidad no es demasiado restrictiva véase, por ejemplo, que si  $k = 16$  y  $r_{i-1} = 1200$  y  $r_{i+1} = 1300$ , entonces  $r_i$  debe ser superior a 1153,1.

# Bibliografía

- [1] DASARATHY, B.; WHITE, L.J. (1980) *A maximin location problem. Operations Research*, 28/6, 1385-1401.
- [2] DOMSCHKE, W.; DREXL, A. (1985) *Location and Layout Planning. Springer-Verlag, Berlín.*
- [3] DREZNER, Z.; WESOŁOWSKY, G.O. (1980) *A maximin location problem with maximum distance constraints. AIIE Transactions*, 12/3, 249-252.
- [4] DREZNER, Z.; WESOŁOWSKY, G.O. (1983) *The location of an obnoxious facility with rectangular distances. Journal of Regional Science*, 23/2, 241-248.
- [5] DREZNER, Z.; WESOŁOWSKY, G.O. (1985) *Location of multiple obnoxious facilities. Transportation Science*, 19/3, 193-202.
- [6] DREZNER, Z. (1985) *Sensitivity analysis of the optimal location of a facility. Naval Research Logistics Quarterly*, 32, 209-224.
- [7] DREZNER, Z.; THISE, J.F.; WESOŁOWSKY, G.O. (1986) *The minimax-min location problem. Journal of Regional Science*, 26/1, 87-101.

- [8] ELZINGA, D.J.; HEARN, D.W. (1972) *The minimum covering sphere problem. Management Science*, 19/1, 96-104.
- [9] ERKUT, E.; NEUMAN, S. (1989) *Analytical models for locating undesirable facilities. European Journal of Operational Research*, 40, 275-291.
- [10] ERKUT, E.; ÖNCÜ, T.S. (1991) *A parametric 1-maxmin location problem. Journal of the Operational Research Society*, 42/1, 49-55.
- [11] EYSTER, J.W.; WHITE, J.A. (1973) *Some properties of the squared euclidean distance location problem. AIIE Transactions*, 5/3, 275-280.
- [12] FRANCIS, R.L.; WHITE, J.A. (1974) *Facility layout and location. Prentice-Hall, New Jersey.*
- [13] HALL, R.W. (1988) *Median, mean and optimum as facility locations. Journal of regional Science*, 28/1, 65-81.
- [14] HANSEN, P.; PEETERS, D.; THISSE, J.F. (1981) *Some localization theorems for a constrained Weber problem. Journal of Regional Science*, 21/1, 103-115.
- [15] HANSEN, P.; PEETERS, D.; THISSE, J.F. (1981) *On the location of an obnoxious facility. Sistemi Urbani*, 3, 299-317.
- [16] HILLE, E. (1959) *Analytic function theory. 2Vol. Chelsea P. C., New York.*
- [17] HURIOT; PERREUR, J. (1973) *Modèles de localisation et distance rectilinéaire. Revue d'Economie Politique*, 83,640-662.

- [18] HURTER, A.P.; MARTINICH, J.S. (1989) *Facility location and the theory of production*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [19] INFANTE MACIAS, R. (1988) *Teoría de la Localización: Evolución y estado actual*. Apertura del curso (1988-89). Universidad de Sevilla.
- [20] KARKAZIS, J.; KARAGIORGIS, P. (1986) *A method to locate the maximun circle(s) inscribed in a polygon*. *Belgian Journal of Operations Research*, 26/3, 3-36.
- [21] KARKAZIS, J.; KARAGIORGIS, P. (1988) *An algorithm solving the general problem of locating obnoxious facilities on the plane*. *Operational Research*, , 702-717.
- [22] KOLMOGOROV, A.N.; FOMIN, S.V. (1975) *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Mir, Moscú.
- [23] LOVE, R.F.; MORRIS, J.G.; WESOLOWSKY, G.O. (1988) *Facilities location: Models and methods*. North-Holland, Amsterdam.
- [24] MEHREZ, A.; SINUANY-STERN, Z.; STULMAN, A. (1983) *The one-dimensional single facility maximin distance location problem*. *Journal of Regional Science*, 23/2, 233-239.
- [25] MEHREZ, A.; SINUANY-STERN, Z.; STULMAN, A. (1986) *An enhancement of the Drezner-Wesolowsky algorithm for single-facility location with maxmin of rectilinear distance*. *Journal of the Operational Research Society*, 37/10, 971-977.
- [26] MELACHRINOUDIS, E. (1985) *Determining an optimun location of an undesirable facility in a workroom environment*. *Applied Mathematical Modeling*, 9, 365-369.

- [27] MELACHRINOUDIS, E.; CULLINANE, T.P. (1982) *A maxmin approach to the location of an undesirable facility in a nonconvex region. Modeling and Simulation, 13, 533-538.*
- [28] MELACHRINOUDIS, E.; CULLINANE, T.P. (1985) *Locating an undesirable facility within a geographical region using the maxmin criterion. Journal of Regional Science, 25/1, 115-127.*
- [29] MELACHRINOUDIS, E.; CULLINANE, T.P. (1986) *Locating an undesirable facility with a minimax criterion. European Journal of Operational Research, 24, 239-246.*
- [30] OSTRECH, L.M. (1977) *The multifacility location problem: applications and descent theorems. Journal of Regional Science, 17/3, 409-419.*
- [31] PLASTRIA, F. (1984) *Localization in single facility location. European Journal of Operational Research, 18, 215-219.*
- [32] ROCKAFELLAR, R.T. (1970) *Convex Analysis. Princeton University Press, New Jersey.*
- [33] TELLIER, L.N. (1972) *The Weber problem: Solution and interpretation. Geographical Analysis, 4/3, 215-233.*
- [34] TELLIER, L.N.; POLANSKI, B. (1989) *The Weber problem: Frequency of different solution types and extension to repulsive forces and dynamic processes. Journal of Regional Science, 29/3, 387-405.*
- [35] THISE, J.F.; ZOLLER, H. (1983) *Locational analysis of public facilities. North-Holland, Amsterdam.*

- [36] WEISZFELD, E. (1937) *Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. Tohoku Mathematical Journal*, 43, 355-386.
- [37] WENDELL, R.E.; HURTER, A.P. (1973) *Location theory, dominance and convexity. Operations Research*, 21, 314-320.
- [38] WESOLOWSKY, G.O. (1977) *The Weber problem with rectangular distances and randomly distributed destinations. Journal of Regional Science*, 17/1, 53-60.
- [39] WIRTH, N. (1982) *Algoritmos+Estructura de datos=Programas. Castillo, Madrid.*
- [40] WOLFRAM, S. (1991) *Mathematica. "A system for doing mathematics by computer". Addison-Wesley.*

## ERRATAS DETECTADAS EN LA MEMORIA

Página 16. Definición 1.1. 3ª Línea, debe decir: "... $\forall X' \in N(X, \delta)$ ,  $X' \neq X$ , cualquier círculo inscrito en  $P$  con centro en  $X'$ ..."

Página 58. 2.3 Formulación del problema II. 2º Párrafo. 3ª Línea, debe decir: "...es un recinto poligonal múltiplemente conexo o incluso desconexo."

Página 81. En el punto 12 debe decir:

"12. Hacemos  $Bandera=0$ .  
Recorremos la lista  $LV$  de vértices  $V_i$  de  $S$  contenidos en  $P$ ,  
Calculamos  $D=d(V_i, P_{io})$ .  
Si  $D \geq r_{max}$  hacemos  $O_a=V_i$ ,  $r_{max}=D$  y  $Bandera=1$ .  
Fin bucle( $i$ )  
Si  $Bandera=1$  incluir  $\{P_i, O_a, r_{max}\}$  en  $LOC$ ."

.....

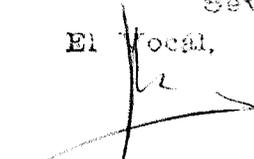
# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes  
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de  
D. Fernando Fernando Salasín  
titulada Un problema de localización Max-Min  
con restricciones"

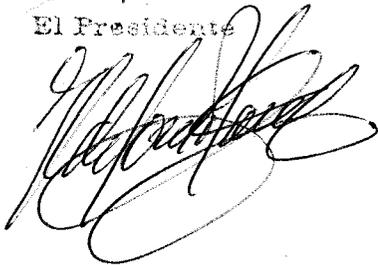
acordó otorgarle la calificación de ABTO CUM LAUDE

Sevilla, 13 de abril 1994

El Vocal,



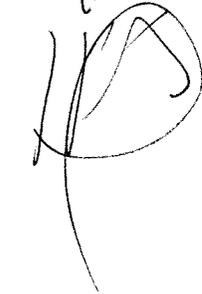
El Presidente



El Vocal,



El Secretario,



El Vocal,



El Doctorado,

