

SOBRE PROBLEMAS DE CONTACTO CON RETROCESO USANDO EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

Garrido, J.A.* , Calvo, F.* y Paris, F. **

* Escuela de Ingenieros Industriales de Valladolid
** Escuela de Ingenieros Industriales de Sevilla



RESUMEN:

Se propone una estrategia para determinar una situación compatible inicial que permita comenzar el análisis de problemas donde la zona de contacto disminuye al actuar la carga, pero no depende de la cantidad de carga aplicada. Se analiza el caso de compresión de una placa delgada sobre una cimentación estudiando con detalle para este caso, la influencia que en los resultados tienen las constantes elásticas relativas de ambos sólidos, así como la presencia de fricción en la zona de contacto.

Contact cases where the final contact zone is less than the initial contact zone are called receding contact. A procedure to deal with such cases is proposed. An especial attention is dedicated to cases when the contact zone changes after the application of the load, but do not change with the amount of load. The compression of a plate on a square region is studied, having into consideration the influence that the elastic constants of both bodies and the presence of friction have on the results.

1.- INTRODUCCION

Existen en la Ingeniería Civil y Mecánica un gran número de casos en los que al actuar una sollicitación se produce interacción entre sólidos a través de su contorno generándose en ellos un estado tensional.

La interacción se produce a través de una zona de contacto y en función de cómo ésta evolucione con la carga y con respecto a la situación inicial, se dan varios casos.

El contacto conforme es aquél en que las curvaturas de ambos sólidos en la zona de contacto coinciden y el tamaño de la zona de contacto no varía con la carga.

En el contacto con avance las curvaturas son diferentes y al aplicar la carga la zona de contacto aumenta.

En general, cuando la zona final de contacto es menor que la inicial, se dice que es un problema con retroceso. Situaciones de contacto inicialmente conforme admiten esta evolución. Sobre esta situación de contacto con retroceso caben aún dos posibilidades, según que la zona de contacto cambie progresivamente con el aumento de la sollicitación o que cambie bruscamente con la aplicación de la carga, por pequeña que sea, y luego no se modifique cuando la carga aumenta de módulo.

La primera de estas dos situaciones, desde un punto de

vista numérico, no se diferencia nada de la situación de avance. Admiten una formulación incremental que aunque puede ser costosa computacionalmente, no presenta dificultades de definición del procedimiento a seguir, Garrido/1/.

La segunda situación, tiene la dificultad de que no es posible aplicar desde el principio un procedimiento incremental, ya que no se conoce una situación inicial compatible sobre la que aplicarlo. La obtención de dicha situación inicial de una manera fiable y eficiente es objeto fundamental de este trabajo.

Tal como queda definido el problema, una vez encontrada dicha situación toda la carga puede ser aplicada en un único incremento para obtener la configuración final de tensiones y desplazamientos.

Para abordar esta clase de problemas, nos centramos en la situación más usual: Compresión de una carga delgada sobre una cimentación, siendo generalizables las conclusiones a otras situaciones que cumplan las premisas generales enumeradas.

Existen algunas publicaciones, Keer, Dundurs y Tsai /2/, Tsai, Dundurs y Keer /3/, Solechi /4/, sobre soluciones analíticas de esta clase de problemas, pero en todos los casos se refieren a dominios infinitos y situaciones sin fricción. Desde el punto de vista numérico, Mahmoud, Salamon and Marks /5/, estudiaron el problema de una viga sobre cimentación elástica, por medio del método de los Elementos Finitos, dando el valor de la zona final de contacto.

En el apartado 2 se define el problema sobre el que se va a trabajar, estableciendo las condiciones que debe cumplir la solución. En el apartado 3 se resume el Método de los Elementos de Contorno, utilizado para el Análisis. En el apartado 4 se establece la estrategia para alcanzar la situación inicial compatible. En el Apartado 5 se aplica dicha estrategia para el análisis de un problema concreto.

2.-CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL PROBLEMA A ANALIZAR.

A fin de explicar, de un modo sencillo, aquellos aspectos que caracterizan el problema de contacto con retroceso, nos apoyaremos en el caso plano simple representado en la figura 1. Si los dominios D^A y D^B , que inicialmente están en contacto a través de la interfase natural común ∂D_c^0 son comprimidos por la acción de la fuerza P , es conocido el

hecho de que el proceso de deformación elástica, en esta estructura, conducirá al despegue parcial de sus elementos. Este efecto es especialmente intuitivo para pequeños valores de h y en contacto entre materiales de características elásticas similares.

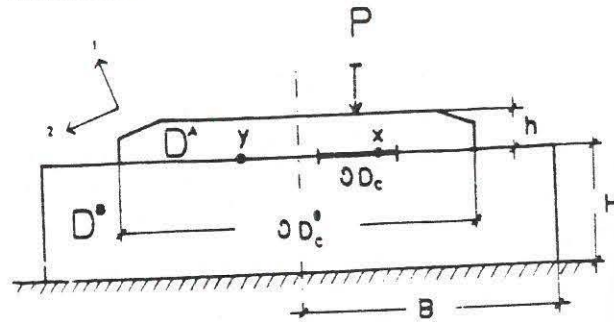


Fig. 1. Definición del problema

Sea μ el coeficiente de rozamiento entre ambas superficies (admitiremos por simplicidad la ley local elástica) y ∂D_c la zona final de contacto (cuyo tamaño y ubicación exacta desconocemos). Es un hecho bien conocido que el tamaño de ∂D_c depende de las características (elásticas y geométricas) de los cuerpos que conforman la estructura de contacto, del punto de aplicación de P y de su dirección, pero no de su módulo (ver, por ejemplo, las referencias /2/, /3/, /4/, /6/ y /7/).

La independencia de ∂D_c respecto del módulo de P , plantea un serio inconveniente para su determinación mediante cualquier procedimiento numérico, dado que no es posible utilizar un esquema de resolución basado en una formulación integral (de dominio o contorno) en términos de incrementos, que puedan valorarse estableciendo condiciones límites en los valores de P . Es, por tanto, necesario abordar el problema mediante cualquier procedimiento autocorrectivo que posibilite establecer con eficacia, la ubicación de la zona de contacto que permanece tras el retroceso inicial al aplicar la carga. Hacemos notar que las implicaciones de la situación planteada sobre cualquier esquema de resolución numérica de problemas de contacto, están relacionadas con la definición de las condiciones de contorno iniciales.

Antes de pasar a escribir, en los dos apartados que siguen, el método de análisis (M.E.C.) y fundamentalmente la estrategia de resolución que proponemos, expondremos a continuación aquellas relaciones, que necesariamente han de verificarse, entre las variables primarias en un planteamiento de contorno (tensiones y desplazamientos) que supuestamente formarían parte de la solución correcta.

Si t_j y u_j representan a las respectivas componentes

($j=1,2$) de la tensión y el desplazamiento de puntos del contorno, podemos, con referencia a la figura 1, escribir las siguientes relaciones incluidas en la solución.

Tensiones a nivel de punto

$$t_1^k(x) \leq 0 \quad (1.a)$$

$$|t_1^k(x)| \geq |t_2^k(x)| / \mu \quad (1.b)$$

$$t_1^k(y) = t_2^k(y) = 0 \quad (1.c)$$

donde x e y representan puntos del contorno del cuerpo k ($k=A,B$) incluidos en ∂D_c y $\partial D_c^0 - \partial D_c$ respectivamente. La ecuación (1.b) recoge la ley local de rozamiento. En ella, el signo igual indicará que a través del punto x (par de puntos materiales de uno u otro cuerpo que ocupan la misma posición) se puede producir deslizamiento entre ambos contornos. Por el contrario si la igualdad en (1.b) no se verifica, ambas superficies estarán adheridas en x . En lo que sigue, consideraremos este doble comportamiento, explícitamente, introduciendo la partición $\partial D_c = D_{ca} \cup \partial D_{cd}$, en la que el segundo subíndice denota adhesión y deslizamiento respectivamente.

A nivel de toda la zona de contacto la solución de tensiones deberá de ser tal que:

$$\int_{\partial D_c} t_1^k(x) ds = P_1 \quad (1.d)$$

$$\int_{\partial D_c} t_2^k(x) ds = \int_{\partial D_{ca}} t_2^k(x) ds + \int_{\partial D_{cd}} (\pm) t_1^k(x) ds = 0 \quad (1.e)$$

El signo (\pm) en la ecuación de equilibrio tangencial, se incluye para caracterizar cualquier posible sentido de la tensión local de rozamiento, independientemente de la restricción (1.a)

Desplazamientos.

Sea $g(z)$ una función que recoge la separación que se produce entre puntos (z) inicialmente en contacto, al aplicar P : $g(z) = g[u_j^A(z,P), u_j^B(z,P)]$. Establecemos las condiciones a que está sujeta la solución de desplazamientos, a través de $g(z)$. Así para puntos $x \in \partial D_c$, e $y \in \partial D_c^0 - \partial D_c$

$$g(x) = 0 \quad (2.a)$$

$$g(y) > 0 \quad (2.b)$$

Análogamente si $v(z)$ representa una función que proporciona el deslizamiento que se produce entre pares de

puntos (z): $v(z) = v(u_j^A, u_j^B)$, la solución deberá verificar que:

$$v(z) = 0 \quad \text{si } z \in \partial D_{ca} \quad (2.c)$$

y

$$v(z) t_2^k(z) \leq 0 \quad \text{si } z \in \partial D_{cd} \quad (2.d)$$

La restricción (2.d) recoge el carácter disipativo del trabajo de rozamiento.

Recalamos que con las ecuaciones (1) y las (2) no se quiere representar una relación de condiciones de contorno ni de ecuaciones básicas del modelo matemático, son simplemente un conjunto de restricciones y relaciones que sabemos debe de verificar la solución del problema. En este contexto, tan solo la (1.d) y (1.e) recogen relaciones de equilibrio global.

3.- ALGUNAS REFERENCIAS AL METODO DE ANALISIS

Aunque el objetivo de este trabajo es proponer una estrategia a seguir para definir correctamente las condiciones de contorno iniciales en problemas en los que el primer sistema de cargas que actúan implica una situación de contacto de retroceso entre sólidos, trataremos brevemente, en primer lugar, algunos aspectos sobre el método de análisis (M.E.C.) que vamos a aplicar.

Concretamente, se actúa estableciendo el sistema lineal que resultaría al plantear la compatibilidad cinemática y el equilibrio estático de los nodos ubicados en los elementos de contorno que describen el comportamiento de las zonas de contacto ($\partial D_c, \partial D_{cd}, \partial D_{ca}$) que suponemos solución con dicho método aproximado. Una descripción exhaustiva sobre los aspectos específicos de la aplicación del M.E.C. a problemas de contacto pueden encontrarse en Garrido /1/, París y Garrido /8/, París y Garrido /9/.

En general, y volviendo a las no linealidades propias del problema (conocidas $\partial D, \partial D_{ca}$ y ∂D_{cd}), se puede llegar a un sistema lineal como el representado por la ecuación (3.c), partiendo de sistemas como el (3.a) y (3.b), que describen el estado elástico aproximado del contorno de cada cuerpo (A,B), imponiendo, además de las condiciones de contorno propias del modelo, aquellas otras específicas de las zonas de contacto. La solución de (3.c) deberá de satisfacer las condiciones implícitas de las ecuaciones (1) y (2).

$$H^A u^A = G^A u^a \quad (3.a)$$

$$H^B u^B = G^B u^b \quad (3.b)$$

$$Kx = E \quad (3.c)$$

Los sistemas (3.a) y (3.b) tienen, en el caso bidimensional, orden $2N^A$ y $2N^B$ respectivamente, representando N^A y N^B los nodos utilizados en los contornos de cada cuerpo para llevar a cabo la aproximación matemática con el M.E.C. Los vectores u^k, \underline{t}^k ($k=A,B$) contienen las componentes del desplazamiento y la tensión en los nodos. El sistema final que resulta del acoplamiento (3.c) es de orden $2(N^A+N^B)$. Su matriz de coeficientes K y el vector de carga del sistema E se construyen a partir de H^k y G^k al imponer las condiciones de contorno prescritas y aquellas que son específicas del contacto. El vector x incluirá las $2(N^A+N^B)$ variables que entre desplazamientos y tensiones se desconocen, para definir completamente el estado elástico aproximado del contorno de cada cuerpo.

4.- ESTRATEGIA PARA LA DETERMINACION EFICIENTE DE LAS ZONAS DE CONTACTO EN PROBLEMAS CON RETROCESO.

La solución de cualquier problema de contacto con retroceso pasa por establecer el sistema (3.c) que se deriva de la definición correcta de $\partial D_C(\partial D_{Ca} \text{ y } \partial D_{Cd})$. Para llegar a localizar las zonas de contacto es preciso, tal y como hemos explicado, diseñar un procedimiento de aproximaciones sucesivas, que será más eficaz en la medida en que se consiga reducir el número de veces que ha de ser resuelto el sistema (3.c). La estrategia que, a tal efecto, proponemos, tiene siempre garantizada la convergencia y en síntesis consta de los siguientes pasos.

1.- Determinación de ∂D_C para el primer ensayo [$\partial D_C(1)$]

Una buena definición de $\partial D_C(1)$ puede ser estimada haciendo uso de la conocida relación de Keer, Dundurs y Tsai (referencias /2/ y /3/) que proporciona para un modelo simple y en ausencia de fricción, el tamaño de la zona de contacto en función de un parámetro de ajuste (α) que depende exclusivamente de las características elásticas de los materiales en contacto. Concretamente, si a es la semilongitud de contacto, h es el canto del elemento delgado y G^k y ν^k los módulos de rigidez y de Poisson respectivamente del cuerpo K ($K=A,B$), podemos utilizar:

$$a/h = f(\alpha) \quad (4.1); \text{ siendo } \alpha:$$

$$\left[G^B(1+\nu^B) - G^A(1+\nu^A) \right] / \left[G^B(1+\nu^B) + G^A(1+\nu^A) \right]$$

Este valor de a puede adoptarse como semilongitud de contacto para la prueba inicial, tomada a uno y otro lado del punto de ∂D_C^0 que en la configuración indeformada, está incluido en la línea de acción de P . Alternativamente puede definirse un tamaño de $\partial D_C(1)$ partiendo de la solución que aporta la teoría de flexión de placas. No obstante, conviene adoptar valores iniciales de $\partial D_C(1)$ algo mayores que los que se obtienen con estas teorías y ello debido a dos hechos concretos: que la zona de contacto es ligeramente mayor en presencia de fricción y que generalmente se produce una convergencia más rápida cuando se toma una zona inicial de contacto por exceso. Parece, por tanto, lógico proponer $\partial D_C(1) = \partial D_{Ca}(1)$ y considerar que inicialmente no existe zona de deslizamiento cuando $\mu = 0$. En el caso de contacto sin fricción el único problema que se plantea es encontrar el tamaño de ∂D_C , puesto que en cualquier ensayo $i: \partial D_C(i) = \partial D_{Ca}(i)$, pudiéndose, por lo demás, aplicar el esquema que sigue teniendo presente esta circunstancia.

2.- Análisis de la solución del ensayo

Partimos de unos resultados obtenidos de (3.c) sobre una zona $\partial D_C(1) = \partial D_{Ca}(1)$, escogida por exceso (obsérvese que con independencia de las recomendaciones anteriores siempre puede tomarse $\partial D_C(1) = \partial D_{Ca}(1) = \partial D_C^0$). La solución se considera admisible, en primera instancia si se verifican las relaciones (1.a), (1.c), (2.a), (2.b) y (2.c) o lo que es lo mismo si no se producen interpenetraciones entre los dos dominios y las tensiones de contacto son todas de compresión. Nótese que al considerar $\partial D_C = \partial D_{Ca}$ no se tienen en consideración en este primer nivel, posibles incompatibilidades en la dirección del vector tensión en puntos de la zona de contacto (ecuación 1.b).

Si la solución que se ha obtenido presenta tracciones en ∂D_C , será preciso proceder a un nuevo ensayo considerando que tales nodos no pertenecen a la zona de contacto. Por el contrario, si se ha partido de una zona de contacto por defecto, la solución incluirá incompatibilidades cinemáticas (no se verificará la ecuación 2.b) por interpenetración entre ambos dominios, por lo que en un nuevo ensayo habrá que incluir esos puntos en la zona de contacto.

No obstante conviene resaltar que tomando $\partial D_C(1) = \partial D_{Ca}(1) = \partial D_C^0$, se llega siempre fácilmente a una solución compatible a efectos de tamaño de la zona de contacto, considerando cada vez zonas más pequeñas en función de los pares de nodos que resulten traccionados. Esta opción solo es necesaria cuando no sea posible hacer estimaciones iniciales, a partir de casos más simples.

Conocido el tamaño aproximado de ∂D_C , se procede a la partición de ∂D_{Ca} y ∂D_{Cd} chequeando en cada par de puntos en contacto la dirección del vector tensión (ecuación 1.b). Este proceso es rápido y generalmente no afecta al valor de ∂D_C obtenido en el paso precedente.

3.- Mejora de la solución

Lógicamente, la solución numérica con el M.E.C. no puede producir tensiones nulas en los pares de puntos de contacto situados en los extremos de ∂D_C , lo que siempre ocurre si se produce el retroceso. Así, con referencia a la figura 2, que recoge esquemáticamente la situación alcanzada con el proceso descrito, vamos a obtener $t_1(i) = 0$ y $t_1(j) = 0$

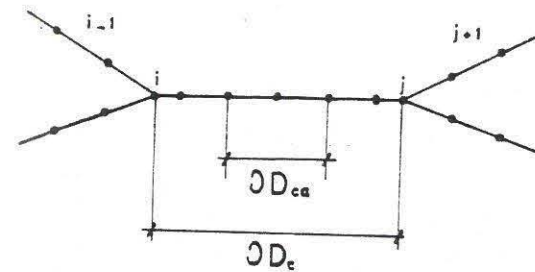


Fig. 2. Esquema de la configuración final

La solución puede mejorarse considerando nuevos elementos de contorno comprendidos entre: $(i \text{ e } i-1)$ y $(j \text{ y } j+1)$, considerando los nuevos pares en ∂D_{Cd} . Esta etapa está, por tanto, solo sujeta a la primera fase anterior; es decir eliminar de la solución aquellos pares que resultasen traccionados. Este esquema puede repetirse hasta alcanzar unos valores mínimos de las tensiones previamente establecidos.

5.- APLICACION: COMPORTAMIENTO DE LAS VARIABLES DE DISEÑO EN UN PROBLEMA TIPO DE CONTACTO CON RETROCESO

Sobre la Fig. 1, impondremos por simplicidad que la sollicitación concentrada P se aplica en el punto del elemento delgado (dominio D^A) que pertenece al eje de simetría de la estructura. Así mismo, consideraremos que el canto (h) es constante a lo largo de la longitud.

Con referencia a la Fig. 1, las dimensiones características del modelo son: $h=10(L)$, $H=205(L)$, $B=200(L)$, $\partial D_C^0/2=160(L)$. Los contornos de cada cuerpo han sido discretizados con elementos no conformes sobre los que se ha considerado una evolución lineal de tensiones y

desplazamientos, ref. /1/, /8/, /9/.

La carga P se ha modelado con una distribución triangular simétrica sobre dos elementos ubicados simétricamente, de dimensión lo suficientemente pequeña como para evitar posibles influencias sobre los tamaños mínimos de la zona de contacto que se han deducido (la relación entre la longitud de aplicación de la carga y la zona de contacto en el caso mayor es del orden de 1 a 15).

Por ser un problema internamente isostático, las soluciones de tensión que se presentan, no dependen de las constantes elásticas de cada cuerpo, aunque sí son función de las zonas de contacto que se producen. Ello implica una dependencia tan solo indirecta, a través del coeficiente α (ecuaciones 4.1 y 4.2), puesto que α es un parámetro característico del conjunto de la estructura.

Los resultados relativos a separaciones entre los cuerpos han sido obtenidos, para cada valor de α , considerando un módulo de Young unidad para D^A si $\alpha > 0$ ($E^A = E = 1 F/L^2$) y ($E^B = E = 1(F/L^2)$) si $\alpha < 0$. Se ha tomado siempre $\nu_A = \nu_B$.

En la fig. 3 se representan las distribuciones de tensión normal de contacto sin fricción para el caso de materiales idénticos ($\alpha=0$), así como para dos valores extremos ($\alpha=0.964$ y $\alpha=-0.923$). Los tamaños de las zonas obtenidas (a/h) y sus correspondientes distribuciones se ajustan excelentemente a los resultados que se presentan en la referencia 2, si bien aquellos corresponden a dominios no acotados y en ausencia de fricción.

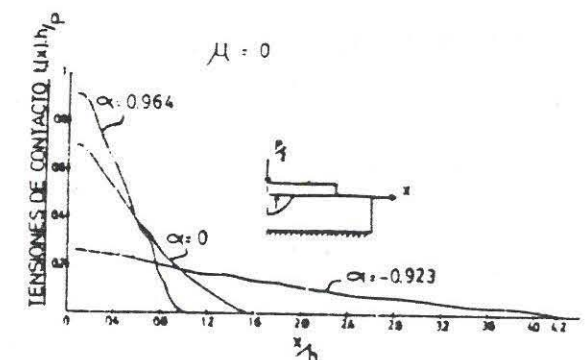


Fig. 3. Tensiones normales en ∂D_C

La influencia del rozamiento sobre el tamaño de la zona de contacto es más relevante para valores negativos del parámetro α ($E^B < E^A$), Figura 4. En lo que a las zonas de adhesión se refiere (tensiones tangenciales de contacto), se observa que para obtener una superficie adherida de tamaño



apreciable son necesarios valores altos del coeficiente de fricción entre ambas superficies, Fig. 5.

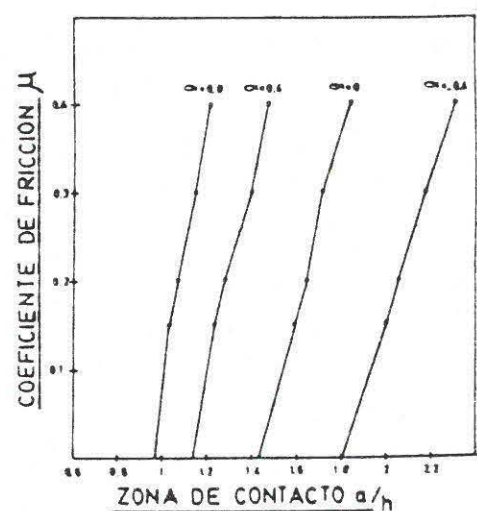


Fig. 4. Tamaño de la zona de contacto.

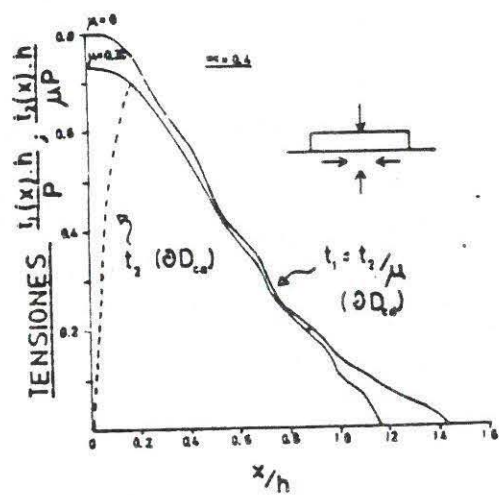


Fig. 5. Tensiones normales y tangenciales en ∂D_c .

En la Fig. 6 se muestra la variación de la tensión máxima de contacto con α , cuando el contacto se realiza sin fricción.

En lo que a las magnitudes cinemáticas se refiere, se representa en la figura 7 la variación de la separación máxima con α , y en la figura 8 las separaciones relativas que, a lo largo de toda la longitud, se producen entre los puntos incluidos en las zonas que sufren retroceso, para algunos valores concretos de α .

Hay que hacer notar que estos resultados de desplazamiento

son útiles únicamente para los valores de las constantes elásticas utilizadas en la solución del problema y no para cualquier combinación que produzca el mismo valor de α .

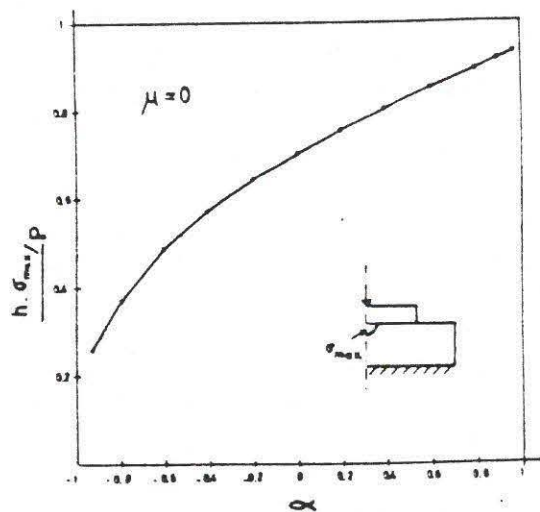


Fig. 6. Variación de la tensión normal con α .

Es razonable que las mínimas separaciones máximas (tendiendo a cero) se produzcan para valores de α tendiendo a -1, donde el sólido A es muy rígido y el sólido B es muy flexible, adaptándose a la configuración del A.

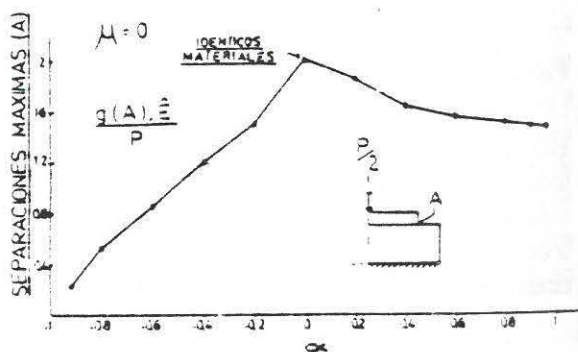


Fig. 7. Separaciones máximas en la zona de despegue.

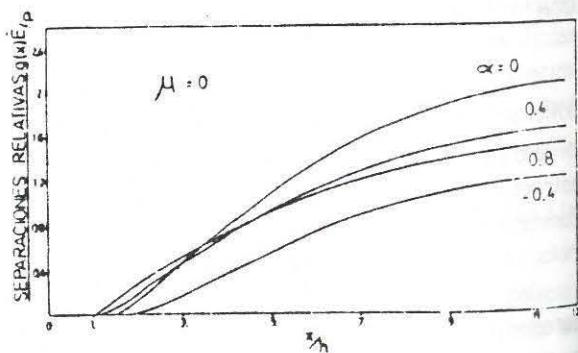


Fig. 8. Separaciones en la zona de despegue.

6.- CONCLUSIONES.

Se ha propuesto una línea de actuación para resolver, con el M.E.C., problemas de contacto con fricción entre sólidos que presentan retroceso inicial, que en síntesis consta de tres fases:

* Encontrar un tamaño de zona de contacto completamente adherida que forme parte de una solución exenta de incompatibilidades cinemáticas (interpenetraciones entre contornos) y estáticas (ausencia de tracciones).

* Ajustar las zonas de adhesión y deslizamiento forzando la compatibilidad de la dirección de los diferentes vectores tensión en los nodos de la zona de contacto.

* Mejorar la solución considerando más grados de libertad en los respectivos entornos de los nodos extremos de la solución obtenida, hasta encontrar unos valores, que entendamos suficientes, de las tensiones mínimas.

Con el M.E.C., se puede actuar eficientemente combinando posibles acercamientos a la solución en los sentidos de avance y retroceso. Así, por ejemplo podemos encontrar ∂D_{ca} en la primera etapa aumentando el tamaño de las zonas previamente obtenidas (incompatibilidades cinemáticas).

Con esta estrategia se han encontrado siempre soluciones iniciales compatibles y ello en un número reducido de pruebas. Puede ser aplicada a cualquier combinación de geometría y cargas que provoque situaciones cualitativamente equivalentes a la que se produce en el problema aquí analizado, Paris y Garrido /10/.

El problema concreto analizado puede aplicarse a muchas situaciones usuales en la Ingeniería siendo la más común la de cimentaciones flexibles, en las que puede producirse el despegue y transmitirse la carga al terreno en zonas reducidas con respecto a la zona original. En tales casos, el sólido A representaría la zapata y el B el terreno, produciéndose, por ejemplo, valores de α muy próximos a -1 cuando este sea arcilloso.

REFERENCIAS:

/1/ Garrido, J.A. "El Problema de contacto en Elasticidad mediante Ecuaciones Integrales" Tesis Doctoral Universidad Politécnica de las Palmas, 1.986

/2/ Keer, L., Dundurs, J. y Tsai, K. "Problems

Involving a Receding contact between a layer and a half Space". Journal of Applied Mechanics, pp 1115-1120, December 1972.

/3/ Tsai, K. Dundurs, J y Keer, L. "Elastic layer Pressed Against a Half Space". Journal of Applied Mechanics, pp 703-707, September - 1.974.

/4/ Solecki, R. "In-Plane Indentation and Separation of a Flat Space". Journal of Applied Mechanics, pp 785-789, December 1.986.

/5/ Mahmoud, F.F., Salamon, N.J., Marks, N.R., "A direct automated procedure for frictionless contact problems". Int. J. for Num. Met. in Eng., Vol. 18, pp 245-257, 1.982.

/6/ Gladwell, G. "Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity". Sijthoff and Noordhoff, 1.980.

/7/ Johnson, K. "Contact Mechanics". Cambridge University Press", 1.985.

/8/ Paris y Garrido. "On the use of Discontinuous Elements in two Dimensional Contact Problems". Boundary Elements VII. Springer-verlag, pp 13-30, 13-39, 1.985.

/9/ Paris y Garrido. "Aspectos Numéricos de la Aplicación del M.E.C. a Problemas de Contacto". Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño de Ingeniería, Vol 2, 1, pp 43-62, 1.986.

/10/ Paris y Garrido. "Friction Multicontact Problems with B.E.M.". Boundary Elements X, Vol 3. Springer Verlag, pp 305-319, 1.988.