

ELEMENTOS DISCONTINUOS LINEALES EN EL ANALISIS ELASTICO BIDIMENSIONAL CON EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Federico Paris*/ José Antonio Garrido**

* E.T.S.I.I. de Sevilla/** E.T.S.I.I. de Las Palmas

Resumen. - Se presenta una formulación de elementos lineales discontinuos en elasticidad bidimensional con el Método de los Elementos de contorno. La linealidad se consigue incluyendo dos nodos en cada uno de los elementos rectilíneos que representan el contorno. La discontinuidad está provocada porque dichos nodos no se encuentran en la intersección de los elementos contiguos, sino en el interior de los mismos, no estando garantizado por tanto, un valor único de las variables en la intersección de los elementos. La ventaja de esta formulación radica en que las condiciones de contorno, pese a la variación lineal, tiene la conocida simplicidad de los elementos constantes con una casuística reducida. Los ejemplos que se incluyen ponen de manifiesto que la penalización en cuanto al tamaño del sistema de ecuaciones que es preciso resolver, frente al caso lineal de elementos continuos, para obtener una aproximación similar, es reducida.

1.- INTRODUCCION.

Desde que en 1967, Rizzo [1] publicó el primer trabajo de lo que hoy conocemos como Método de los Elementos de Contorno, han aparecido numerosas publicaciones tendentes, tanto a demostrar la aplicabilidad del Método a diferentes campos de la Mecánica de los Medios Continuos y de la Física en general, como a hacerlo comparable en eficacia a otras alternativas numéricas, fundamentalmente al Método de los Elementos Finitos. Para esta segunda cuestión, es preciso prestar cuidadosa atención a todos los aspectos relacionados con la formulación numérica e implementación en ordenador del proceso de cálculo, máxime teniendo en cuenta el grado de sofisticación conseguido en el campo de los elementos finitos para este tipo de cuestiones. Un aspecto especialmente delicado en el Método de los Elementos de Contorno es la aplicación de las condiciones de contorno sobre los puntos que tienen asociados los valores de las variables. La trascendencia que esta cuestión plantea es debido a la casuística que se origina sobre todo cuando la discretización incluye nodos en la intersección de los elementos del contorno, con objeto de obtener variaciones de las funciones de orden lineal o superior. Esta casuística tiene una repercusión inmediata en el tamaño del programa necesario para la implementación. Así, mientras que en un programa con elementos constantes [2], que no implica nodos interelementales, las condiciones de contorno se aplican en un número muy reducido de sentencias, en un programa con elementos de variación lineal de las funciones [3] se requiere casi un

50% de la programación para su aplicación, si se quiere cubrir de forma completa y correctamente la casuística que se presenta, y ello introduciendo para algunas situaciones, hipótesis que permiten hacer acorde el número de incógnitas asociadas a un punto con el de ecuaciones integrales que se aplican en él, [3], [4] y [5]. En elementos parabólicos o de orden superior, el problema es similar.

Las implicaciones del problema aumentan, -- cuando lo extendemos al caso tridimensional, ya que no abarcan exclusivamente al número de sentencias necesarias para aplicar las condiciones de contorno [6], sino porque el número total de situaciones que se presentan no admite garantías de ser tratada en forma completa y algunos de los casos tratados lo son en forma muy aproximada.

La alternativa aparentemente evidente para conjugar la ventaja de la facilidad de aplicación de las condiciones de contorno de los elementos constantes y la mayor precisión de los elementos de orden superior parece estar en situar los nodos en estas últimas en el interior de los elementos. Esto presenta de forma inmediata un serio inconveniente al duplicarse (para el caso lineal) el tamaño del sistema de ecuaciones, pues de cada nodo intersección de dos elementos, hemos generado dos nodos en el interior de cada uno de ellos. Hay, sin embargo, que indicar que la precisión que se consigue está en función del número de nodos al que se asignen valores discretos de la función y cómo estos representan la evolución de la misma sobre el contorno. Por ello, hay que pensar que el --

problema con elementos discontinuos lineales -- habría que buscarlo más cerca de uno con mismo número de nodos (y por tanto mitad de elementos), con lo que el tamaño del sistema de ecuaciones no sufrirá un aumento muy significativo. Los resultados presentados en el apartado 5 así lo indican. Previamente, en el apartado 2 se -- presentan brevemente las ecuaciones que gobiernan el problema. Una descripción más profunda -- del mismo puede encontrarse en [3] y [6]. En el apartado 3 se establece la formulación numérica particular a la aproximación que se propone. El apartado 4 recoge finalmente la simplicidad de aplicación de las condiciones de contorno.

2. ECUACIONES DE CONTORNO.

Nuestro objeto de estudio es un dominio -- elástico D acotado por un contorno ∂D , sobre el cual están definidas las tensiones o los desplazamientos. Fig. 1.

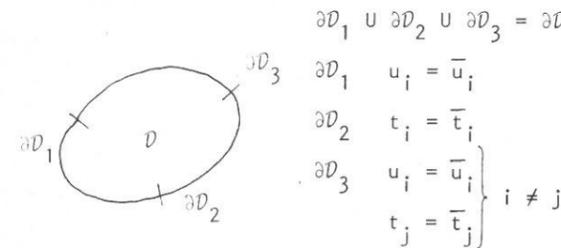


Fig. 1.- Definición del problema.

El planteamiento de contorno se consigue a través del 2º teorema de reciprocidad de Betti.

$$\int_D X_i \psi_i dv + \int_{\partial D} t_i \psi_i ds = \int_D X_i^\psi u_i dv + \int_{\partial D} t_i^\psi u_i ds \quad (1)$$

donde X_i , t_i y u_i representan las fuerzas por -- unidad de volumen, de contorno y desplazamientos del problema en estudio, y X_i^ψ , t_i^ψ y u_i^ψ tienen -- el mismo significado para un caso auxiliar que a continuación definiremos. Si suponemos fuerzas de volumen nulas en el problema bajo estudio y el campo auxiliar de fuerzas por unidad -- de volumen, lo reducimos a una carga concentrada unidad en un punto $x \in D$, (1) toma la forma

$$u_j(x) + \int_{\partial D} T_{ij}(x,y) u_i(y) ds(y) = \int_{\partial D} U_{ij}(x,y) t_i(y) ds(y) \quad (2)$$

ecuación que se conoce como identidad de Somigliana, y donde $T_{ij}(x,y)$ y $U_{ij}(x,y)$, representan la solución de Kelvin, tensiones y desplazamientos en un punto $y \in \partial D$ en la dirección j -- cuando aplicamos fuerza unidad en el punto --

$x \in D$ en la dirección i .

Si en la expresión anterior hacemos $x \rightarrow \partial D$, obtenemos

$$C_{ij}(x) u_j(x) + \int_{\partial D} T_{ij}(x,y) u_i(y) ds(y) = \int_{\partial D} U_{ij}(x,y) t_i(y) ds(y) \quad (3)$$

donde: $x, y \in \partial D$

C_{ij} llamado término libre depende de la forma local del contorno en x . Un estudio analítico detallado de $C_{ij}(x)$ puede encontrarse en [3].

La ecuación (3) incluye únicamente variables u y t sobre el contorno, por lo que constituye la base de la aproximación numérica del método de los elementos de contorno que para la formulación que se propone se presenta en el apartado siguiente. (2) permite posteriormente la determinación del campo de desplazamientos en el dominio si se está interesado en su conocimiento y la introducción de (2) en la ley de comportamiento permite obtener una formulación integral de contorno de las tensiones en D para proceder a su cálculo.

3. FORMULACION NUMERICA.

La aproximación se consigue en la forma -- habitual, sustituyendo el contorno ∂D por un -- conjunto de elementos, ∂D_k , rectilíneos en este caso, sobre los que se realizarán las integrales indicadas por (2) y (3). Si sobre estos elementos suponemos una cierta evolución de las funciones, esto equivale a realizar la siguiente aproximación sobre las mismas

$$\underline{u} = N_i a_i \quad \underline{t} = N_i b_i \quad (4)$$

donde a_i y b_i representan los desplazamientos y tensiones en puntos del contorno fijados como -- referencia para establecer la variación. La -- ecuación (2) es sustituida por:

$$C_{ij} u_i + \sum_{k=1}^{NE} \left[\int_{\partial D_k} T_{ij} u_i \right]_{\partial D_k} ds_k - \int_{\partial D_k} U_{ij} t_i \Big|_{\partial D_k} ds_k = 0 \quad (5)$$

donde NE es el número total de elementos rectilíneos que representan el contorno. Para introducir la aproximación (4) vamos a definir la -- situación de los puntos de referencia que establecen la evolución lineal de \underline{u} y \underline{t} , sobre un elemento genérico, Fig. 2.

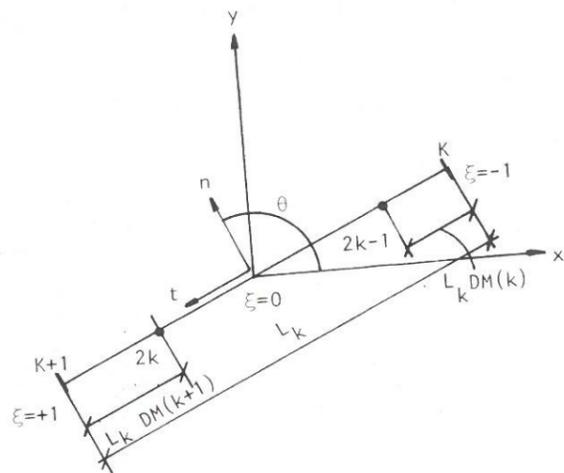


Fig. 2.- Configuración de un elemento genérico ∂D_k .

k y $k+1$ representan los extremos del elemento ∂D_k , $2k-1$ y $2k$ representan los puntos que definen la variación lineal y cuya posición dentro del elemento viene definida a partir de la longitud del elemento por los coeficientes $DM(k)$ y $DM(k+1)$, asociados a cada extremo del elemento, pudiendo tomar valores diferentes en ambos. ξ representa la coordenada natural sobre el elemento y θ define el sistema local de coordenadas que más adelante utilizaremos. (4) sobre ∂D_k se reduce a (para \underline{u}):

$$u_i)_{\partial D_k} = \begin{vmatrix} N_1 & N_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(k) \\ u_i(k+1) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\text{con } N_1 = -\frac{1}{2}(\xi-1) \text{ y } N_2 = \frac{1}{2}(\xi+1)$$

relacionando los valores de \underline{u} en los extremos, \underline{u}_e , con los valores en los nodos internos $2k-1$ y $2k$, \underline{u}_n .

$$\underline{u}_e = \begin{Bmatrix} u_i(k) \\ u_i(k+1) \end{Bmatrix} = \frac{1}{S} \begin{vmatrix} 1 - DM(k+1) & -DM(k) \\ -DM(k+1) & 1 - DM(k) \end{vmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_i(2k-1) \\ u_i(2k) \end{Bmatrix} = \underline{q}^k \cdot \underline{u}_n^k \quad (7)$$

siendo $S = 1 - DM(k) - DM(k+1)$.

Si expresamos ahora las variables en el sistema local definido en la Fig. 2.

$$\underline{u}_e^k = \begin{Bmatrix} u_i(2k-1) \\ u_i(2k) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_{Li}(2k-1) \\ u_{Li}(2k) \end{Bmatrix} = \underline{l}^k \cdot \underline{u}_{nL}^k \quad (8)$$

Así, la evolución de u_i y t_i sobre ∂D_k queda

$$\begin{aligned} \underline{u})_{\partial D_k} &= \underline{N} \cdot \underline{Q}^k \cdot \underline{l}^k \cdot \underline{u}_{nL}^k \\ \underline{t})_{\partial D_k} &= \underline{N} \cdot \underline{Q}^k \cdot \underline{l}^k \cdot \underline{t}_{nL}^k \end{aligned} \quad (9)$$

donde, por ejemplo

$$\underline{u})_{\partial D_k} = \begin{Bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ v(k) \\ v(k+1) \end{Bmatrix}; \quad \underline{u}_{nL}^k = \begin{Bmatrix} u_L(2k-1) \\ u_L(2k) \\ v_L(2k-1) \\ v_L(2k) \end{Bmatrix}$$

$$\underline{N} = \begin{vmatrix} N_1 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 \end{vmatrix}; \quad \underline{Q}^k = \begin{vmatrix} \underline{q}^k & 0 \\ 0 & \underline{q}^k \end{vmatrix}$$

$$\underline{l}^k = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Introduciendo (9) en (5) obtenemos, en notación matricial:

$$\frac{1}{2} \underline{l} \cdot \underline{u} + \sum_{k=1}^{NE} (A^k \underline{u}_{nL}^k - B^k \underline{t}_{nL}^k) \underline{Q}^k \underline{l}^k = 0 \quad (10)$$

donde A^k y B^k representan las integraciones de los núcleos T_{ij} y U_{ij} sobre ∂D_k afectados de las funciones de forma. Estas integraciones se calculan numéricamente mediante la fórmula de Gauss, en el caso en que el punto en que se aplica la ecuación integral no pertenezca al elemento sobre el que se integra. En caso contrario la integración se calcula analíticamente y se describe en el apéndice 1. Si (10) la expresamos para cada nodo de cada elemento, obtenemos un sistema de 4NE ecuaciones con 8NE variables (vectores \underline{u}_{nL}^k y \underline{t}_{nL}^k). La aplicación de las condiciones de contorno permitirá obtener un sistema determinado de la forma

$$\underline{K} \cdot \underline{x} = \underline{F} \quad (11)$$

Para el cálculo de los desplazamientos en puntos interiores, la ecuación (2) se discretiza en forma similar a la (3), obteniéndose una ecuación similar a (10), salvo el coeficiente de \underline{u} que es 1, donde el sumatorio es conocido, previa resolución de (11). Asimismo el cálculo de las

tensiones se realiza sin ninguna diferenciación con respecto al caso de elementos lineales continuos por lo que su formulación puede consultarse en [3], y realizarse introduciendo las modificaciones descritas para el elemento en este apartado.

4. APLICACION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO.

Dado que cada nodo, al cual se asocian variables, está situado en un punto en el que no hay discontinuidad en la normal, sólo hay cuatro casos de condiciones de contorno que se recogen en la tabla 1.

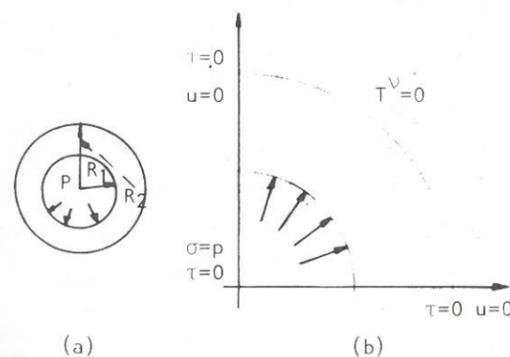
	Datos	Incógnitas
Caso 1	u_L, v_L	σ_L, τ_L
Caso 2	σ_L, τ_L	u_L, v_L
Caso 3	u_L, τ_L	v_L, σ_L
Caso 4	v_L, σ_L	u_L, τ_L

Tabla 1. Condiciones de contorno.

Puesto que en todos los casos sólo hay dos incógnitas, basta reordenar los coeficientes de \underline{u}_{nL} y \underline{t}_{nL} para dejarlos en \underline{K} si van asociados a una incógnita o incluirlos en \underline{F} si van asociados a un dato.

5. EJEMPLOS.

Consideremos en primer lugar el caso de una tubería sometida a presión interior, Fig. 3.a. Aprovechando las condiciones de simetría estudiaremos únicamente su cuadrante, Fig. 3.b.



$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \text{ cms.} & E &= 200.000 \text{ Kg/cm}^2 \\ R_2 &= 25 \text{ cms.} & \nu &= 0,25. \\ P &= 100 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Fig. 3. Tubería sometida a presión interior.

Con elementos discontinuos utilizaremos una discretización de 12 elementos que incluyen 24 nodos situados en todos los casos a $0,25 L_k$ de cada extremo del elemento, siendo L_k la longitud del elemento. La discretización se indica en la Fig. 4.

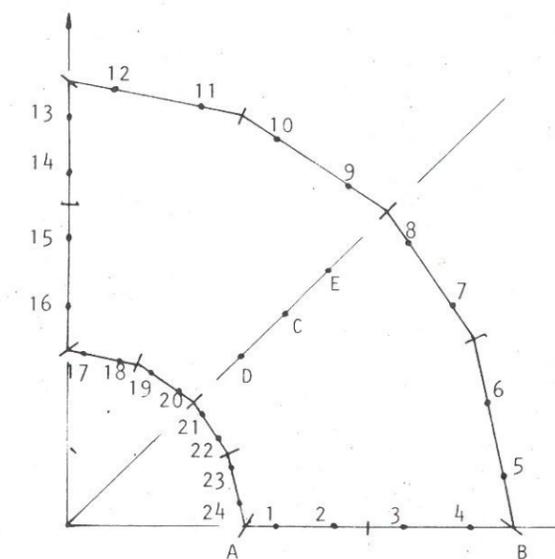


Fig. 4. Discretización con elementos discontinuos.

A continuación en la Tabla 2 comparamos valores de la tensión circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ pertenecientes a los elementos de contorno. Se compara con los obtenidos de elementos lineales continuos, aunque en puntos distintos, tomando estos valores de la referencia [3]. (σ en Kg/cm^2).

	Punto	Teoría Elasticidad	M.E.C.	n° elementos	n° nodos	Tamaño Sistema
elementos continuos	A	-138	-138,4	24	24	48
	B	-38	-34,07			
elementos discontinuos	1	-103,38	-104	12	24	48
	2	-41,25	-42,31			

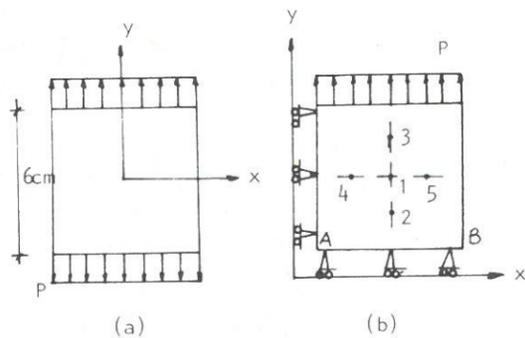
Tabla 2. Valor de $\sigma_{\theta\theta}$ perteneciente a un radio situado sobre el contorno de la discretización de la Fig. 4.

En la tabla 3 se comparan los valores de σ_x y τ_{xy} en puntos interiores situados también sobre un radio.

Punto	Teoría	M.E.C.(d)	Teoría	M.E.C.(d)
C	19	19,07	-38,85	-39,11
D	19	18,93	-62,94	-63,22
E	19	19,19	-26,32	-26,32
		σ_x (Kg/cm ²)	τ_{xy} (Kg/cm ²)	

Tabla 3. Valor de σ_x y τ_{xy} en puntos internos.

Consideremos en segundo lugar la placa a tracción que se indica en la Fig. 5.a de la cual se ha discretizado un cuadrante aplicando condiciones de simetría, Fig. 5.b, con 24 elementos.



$P = 1000 \text{ Kg/cm}^2$ $\nu = 0,25$
 $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ $DM = 0,25$

Fig. 5. Placa a tracción.

	Punto	Teoría	M.E.C.(d)
$u_y \times 10^3 \text{ cm}$	1		0,706419
	4	0,714285	0,706549
	5		0,704577
	2	0,357142	0,350622
	3	1,071428	1,062696
$u_x \times 10^3 \text{ cm}$	1		0,181835
	2	0,178571	0,182979
	3		0,180210
	4	0,089285	0,092079
	5	0,267857	0,271535

Tabla 4. Valores de los desplazamientos en la placa a tracción.

Los valores de σ_y a lo largo de AB presentan un error de un 3% salvo en los nodos más próximos a los extremos en que el error es de -3,4%. En el interior (puntos 1 a 5) los errores en σ_y se mantienen también próximos al 3%.

La tabla 4 resume los resultados de desplazamientos en puntos del interior.

6. CONCLUSIONES.

Se ha establecido una formulación de elementos de contorno para problemas bidimensionales, con variación lineal discontinua entre los elementos. Los resultados obtenidos en los ejemplos presentados, arrojan una precisión similar que la obtenida con elementos lineales continuos, para una discretización que incluya la resolución de un sistema de ecuaciones del mismo tamaño. Cabe citar que para este caso y puesto que los nodos se generan automáticamente, la discretización es la mitad.

Se ha reducido drásticamente el tipo de condiciones de contorno que se pueden presentar, lo que ha supuesto un ahorro de más de un 50% del tamaño del programa que permite la implementación en ordenador.

A partir de estos resultados parece que la ampliación de la formulación con elementos discontinuos al caso tridimensional es necesaria, puesto que los inconvenientes de los elementos continuos para este caso son mayores que en dos dimensiones.

7. REFERENCIAS.

- Rizzo, F.J. "An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics". Q. Appl. Math. 25(1), 83-95, (1967).
- Domínguez, J. "Cálculo de tensiones en las inmediaciones de anclajes. Aplicación del Método de los Elementos de Contorno". Tesis E.T.S.I.I. de Sevilla, (1977).
- Paris, F. "El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad". Tesis, E.T.S.I.I. de Madrid, (1979).
- Alarcón et al. "Boundary elements in Potential and Elasticity Theory". Computers and Structures. Vol. 10, pp. 351-362 (1979).
- Paris et al. "SERBA: a B.I.E. program with linear elements for 2-D elastostatics analysis". Advances in Engineering Software, Vol. 2, N° 2, 79-87, (1980).
- Doblaré, M. "Formulación Tridimensional del Método de los Elementos de Contorno con interpolación parabólica". Tesis, E.T.S.I.I. de Madrid, (1981).

Apendice 1.- Cálculo de las integraciones sobre el propio elemento.

El cálculo de los elementos de A^k se reduce teniendo en cuenta que T_{11} y T_{22} son nulos y $T_{12} = T_{21}$. Basta por tanto calcular $A^k(1,3)$ y $A^k(1,4)$. Las integraciones se realizan en el sentido del valor principal de Cauchy.

$$A(1,3) = \int_{\partial D_k} T_{12} N_1 ds_k = \int_0^a T_{12} N_1 ds_k + \int_{a+b}^a T_{12} N_1 ds_k = \int_a^{a+b} T_{12} N_1 ds_k$$

La descomposición está referida a la Fig.6 y las integraciones tanto de U_{ij} como de T_{ij} se hacen con las identificaciones que se mencionan a continuación.

$$n_1 = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta$$

tramo IA

$$r_{,1} = \sin \theta; \quad r_{,2} = -\cos \theta,$$

$$n_1 r_{,2} - n_2 r_{,1} = -1$$

tramo IB

$$v_{,1} = -\sin \theta; \quad v_{,2} = \cos \theta,$$

$$n_1 v_{,2} - n_2 v_{,1} = 1$$

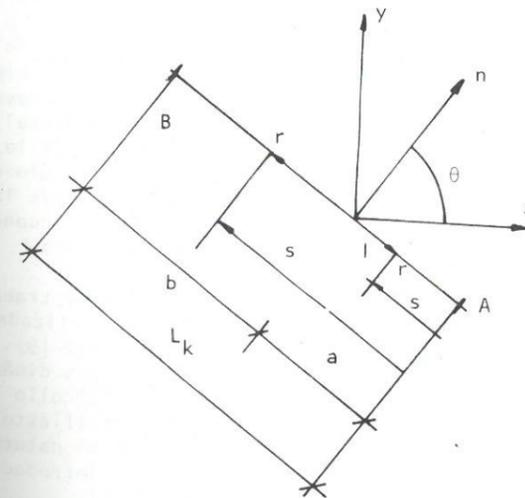


Fig. 6.- Configuración del elemento.

$$A(1,3) = C \left[\int_0^a \frac{1-\eta}{a-s} ds - \int_a^{a+b} \frac{1-\eta}{s-a} ds \right]; \quad \eta = \frac{s}{a+b}$$

$$= C \left[1 - \frac{b}{a+b} \ln \frac{b}{a} \right]$$

análogamente:

$$A(1,4) = \int T_{12} N_2 ds = -C \left(1 + \frac{a}{a+b} \ln \frac{b}{a} \right)$$

$$\text{siendo } C = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}$$

Para la obtención de B_{ij} se procede en forma similar.

$$B(1,1) = \int_{\partial D_k} U_{11} N_1 ds_k = \left[C_2 I1 + \sin^2 \theta I2 \right] \cdot C_1$$

$$B(2,3) = \int_{\partial D_k} U_{22} N_1 ds_k = \left[C_2 I1 + \cos^2 \theta I2 \right] \cdot C_1$$

$$\text{con } I1 = \frac{1}{L_k} \left[-a L_k (\ln a - 1) + a^2 \ln(a-1) - \frac{a^2}{2} (\ln a - \frac{1}{2}) + ab (\ln b - 1) + \frac{b^2}{2} \left| \ln b - \frac{1}{2} \right| - L_k \cdot b (\ln b - 1) \right]$$

$$I2 = \frac{L_k}{2}$$

$$C_1 = \frac{1+\nu}{4\pi E(1-\nu)}; \quad C_2 = (3-4\nu)$$

$$B(1,2) = \int_{\partial D_k} U_{11} N_2 ds_k = C_1 \left[C_2 G1 + \sin^2 \theta G2 \right]$$

$$B(2,4) = \int_{\partial D_k} U_{22} N_2 ds_k = C_1 \left[C_2 G1 + \cos^2 \theta G2 \right]$$

$$\text{con } G1 = -\frac{1}{L_k} \left[a^2 \ln(a-1) - \frac{a^2}{2} (\ln a - \frac{1}{2}) + ab (\ln b - 1) + \frac{b^2}{2} (\ln b - \frac{1}{2}) \right]$$

$$G2 = \frac{L_k}{2}$$

$$B(1,3) = \int_{\partial D_k} U_{12} N_1 ds_k = -C_1 \left[\sin \theta \cos \theta \frac{L_k}{2} \right]$$

$$B(1,4) = B(1,3)$$

y debido a la simetría de U_{ij}

$$B(1,3) = B(1,2) \text{ y } B(1,4) = B(2,2).$$