

# Trabajo Fin de Grado

## Detección de conflictos entre trayectorias de avión en ascenso/descenso sujetas a vientos inciertos

Autor: Rocío Mohedano López

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de  
Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2018





Proyecto Fin de Grado  
Ingeniería Aeroespacial

# **Detección de conflictos entre trayectorias de avión en ascenso/descenso sujetas a vientos inciertos**

Autor:

Rocío Mohedano López

Tutor:

Alfonso Valenzuela Romero

Profesor Contratado Doctor Interino

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Grado: Detección de conflictos entre trayectorias de avión en ascenso/descenso sujetas a vientos inciertos

Autor: Rocío Mohedano López

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal



*A mis padres,  
mi ejemplo a seguir.*



# AGRADECIMIENTOS

---

*En primer lugar, me gustaría agradecer a todos aquellos que han hecho posible este proyecto tras un largo aprendizaje, no sólo a nivel académico sino también a nivel personal.*

*Principalmente, a mis padres y a mi hermano por todo su cariño, su paciencia y su apoyo; por ser mis referentes y mi ejemplo en la vida.*

*A Álvaro, sin él esto no hubiera sido posible, gracias por estar a mi lado en todo momento haciendo que las cosas parezcan más fáciles y, sobre todo, por confiar en mí más que yo misma.*

*Agradecer a Alfonso Valenzuela Romero por transmitirme este mundo que tanto le apasiona, por su implicación desde el primer momento, su ayuda y sus consejos.*

*También me gustaría dar las gracias a mis compañeros por todos los momentos vividos, por todas las risas y los agobios compartidos, por enseñarme a ser mejor.*



# RESUMEN

---

En este Trabajo Fin de Grado se analizan las trayectorias de dos aeronaves en busca de la existencia de conflictos bajo la influencia de vientos inciertos en el plano horizontal. Un conflicto se produce cuando se prevé en el futuro una pérdida de separación simultánea en el plano vertical y en el horizontal, es decir, cuando la distancia mínima de separación entre las aeronaves es inferior a una previamente fijada en ambos planos.

Los conflictos se analizan mediante el empleo de diversos indicadores como la duración o la distancia mínima entre las aeronaves. Se estudia la probabilidad de la existencia de conflictos para todos los puntos de las trayectorias de las aeronaves y se determinan los instantes en los que éstos comienzan y finalizan. Gracias a este análisis se constata cómo el viento es un factor muy influyente en la separación entre las dos aeronaves.

Debido a la forma en la que las componentes del viento son modeladas, se ha observado que pueden darse situaciones en la que los tiempos que delimitan los conflictos dejan de ser inciertos, es decir, el tiempo de inicio, de finalización o ambos pueden ser independientes de los vientos que afecten a las aeronaves. Para llevar a cabo el estudio con la presencia de vientos inciertos se hace uso del método de Monte Carlo.

A lo largo del desarrollo del trabajo se analizan dos escenarios diferentes en los cuales las aeronaves realizan trayectorias rectilíneas, a velocidad aerodinámica y velocidad de ascenso/descenso constante. En primer lugar, no se fijan restricciones en cuanto a las posiciones relativas entre las aeronaves ni el rumbo que éstas deben seguir. En el segundo escenario se generaliza el análisis para diferentes posiciones relativas entre las aeronaves y diferentes posiciones iniciales, dicha generalización permite realizar un estudio de un conjunto de trayectorias, analizando todas las posiciones posibles entre ambas aeronaves. Las dos aeronaves están inicialmente situadas sobre una circunferencia de radio dado volando hacia el centro de la misma.



# ABSTRACT

---

The aim of this project is to analyse the trajectory of two aircraft subject to uncertain winds in order to find whether a conflict does exist or not. A conflict takes place when it is predicted that the minimum distance between two aircraft will be violated at the same time at the horizontal and vertical plane.

By the application of several indicators, such as the duration or the minimum distance between aircraft the conflict can be analysed. The probability of having a conflict at each point of the trajectory is studied and the time when the conflict starts and ends is calculated. One of the main effects of wind is the variation in the separation distance.

Wind is defined as a random variable at the horizontal plane, therefore the influence is shown only at this plane. There can be situations where the times which characterise the conflict are not uncertain, the time when a conflict begins and ends can be independent of wind. The results are obtained applying the Monte Carlo method.

Throughout the project, two different scenarios are analysed. In both, the aircraft fly at straight trajectory, at constant airspeed and at constant ascent/descent speed. First of all, there are not restrictions that concern the positions between aircraft or the course. Nevertheless, the second scenario generalizes the study, different relative positions between aircraft and different initial positions are considered. Initially, the two aircraft should be placed on a circumference whose radius is given and they should fly towards its centre.



# ÍNDICE

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice</b>	<b>xv</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Antecedentes</i>	1
1.2 <i>Objetivos y metodología</i>	2
<b>2 Formulación del problema</b>	<b>3</b>
2.1 <i>Ecuaciones de movimiento</i>	3
2.2 <i>Detección de conflictos</i>	5
2.3 <i>Método numérico</i>	6
2.4 <i>Método analítico</i>	7
2.5 <i>Intervalos temporales en los que existe pérdida de separación.</i>	11
2.6 <i>Comprobación de los métodos de detección de conflictos</i>	12
<b>3 Influencia del viento en la pérdida de separación</b>	<b>15</b>
3.1 <i>Influencia del viento en el tiempo de alerta inicial</i>	15
3.2 <i>Influencia del viento en el tiempo de alerta final</i>	17
3.3 <i>Influencia del viento en el tiempo de alerta inicial y final</i>	19
3.4 <i>Influencia nula del viento en los tiempos de alerta</i>	21
<b>4 Análisis de conflictos entre aeronaves con vientos aleatorios</b>	<b>25</b>
4.1 <i>Método de Monte Carlo</i>	25
4.2 <i>Probabilidad de existencia de pérdida de separación en un punto de la trayectoria</i>	26
4.3 <i>Incertidumbre en tiempo de inicio de conflictos</i>	29
4.3.1 <i>Caso 1</i>	29
4.3.2 <i>Caso 2</i>	32
4.4 <i>Incertidumbre tiempo de finalización de conflictos</i>	35
4.4.1 <i>Caso 3</i>	35
4.4.2 <i>Caso 4</i>	38
4.5 <i>Incertidumbre tiempo inicial y final del conflicto</i>	40

---

4.5.1	Caso 5	40
4.5.2	Caso 6	42
<b>5</b>	<b>Análisis considerando diferentes posiciones relativas entre las aeronaves</b>	<b>47</b>
5.1	<i>Particularización de las ecuaciones del movimiento</i>	47
5.2	<i>Detección de conflictos</i>	49
5.3	<i>Incertidumbre tiempo inicial y final del conflicto</i>	50
5.4	<i>Incertidumbre tiempo inicial del conflicto</i>	55
<b>6</b>	<b>Conclusiones y desarrollos futuros</b>	<b>61</b>
	<b>Referencias</b>	<b>65</b>

# ÍNDICE DE TABLAS

---

<b>Tabla 1.</b> Tiempos de inicio y fin de la pérdida de separación aplicando el método numérico con variaciones del paso.	12
<b>Tabla 2.</b> Tiempos de inicio y fin de la pérdida de separación en los planos verticales y horizontales aplicando el método analítico	13
<b>Tabla 3.</b> Tiempos de inicio y fin de la pérdida de separación aplicando el método analítico.	13
<b>Tabla 4.</b> Influencia del viento en el tiempo de alerta inicial	16
<b>Tabla 5.</b> Influencia del viento en el tiempo de alerta final	18
<b>Tabla 6.</b> Influencia del viento en el tiempo de alerta inicial y final	20
<b>Tabla 7.</b> Influencia nula del viento en el tiempo de alerta inicial y final	22
<b>Tabla 8.</b> Error aproximación en las simulaciones Monte Carlo	28
<b>Tabla 9.</b> Valores característicos de los tiempos medios, distancia mínima media y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo inicial	31
<b>Tabla 10.</b> Valores característicos de los tiempos medios, distancia mínima media y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo inicial siendo $t^H \approx t^V$	33
<b>Tabla 11.</b> Valores característicos de los tiempos medios, distancia mínima media y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo de finalización	36
<b>Tabla 12.</b> Valores característicos de los tiempos medios, distancia mínima media y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo de finalización siendo $t_+^H \approx t_+^V$	39
<b>Tabla 13.</b> Valores característicos de los tiempos medios, distancia mínima media y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo inicial y final	41
<b>Tabla 14.</b> Valores característicos de los tiempos medios, distancias mínimas medias y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo inicial y final siendo $t^H \approx t^V$ y $t_+^H \approx t_+^V$	44



# Índice de Figuras

---

<b>Figura 2-1.</b> Triángulo del viento para la aeronave A	4
<b>Figura 2-2.</b> Cilindro de protección	5
<b>Figura 2-3.</b> Intervalos de pérdida de separación	11
<b>Figura 2-4.</b> Trayectorias aeronaves A y B con representación de la pérdida de separación	13
<b>Figura 3-1.</b> Intervalos característicos de la influencia del viento en el tiempo de alerta inicial	16
<b>Figura 3-2.</b> Representación del conflicto caracterizado por la influencia del viento en el tiempo inicial	17
<b>Figura 3-3.</b> Intervalos característicos de la influencia del viento en el tiempo de alerta final	18
<b>Figura 3-4.</b> Representación del conflicto caracterizado por la influencia del viento en el tiempo final	19
<b>Figura 3-5.</b> Intervalos característicos de la influencia del viento en el tiempo de alerta inicial y final	20
<b>Figura 3-6.</b> Representación del conflicto caracterizado por la influencia del viento en el tiempo inicial y final	21
<b>Figura 3-7.</b> Intervalos característicos de la influencia nula del viento en el tiempo de alerta inicial y final	22
<b>Figura 3-8.</b> Representación del conflicto caracterizado por la influencia nula del viento en el tiempo de alerta inicial y final	23
<b>Figura 4-1.</b> Probabilidad de conflicto en cada punto de la trayectoria con 10000 vientos aleatorios	28
<b>Figura 4-2.</b> Representación probabilidad de conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de inicio	30
<b>Figura 4-3.</b> Histograma tiempos de inicio del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial	31
<b>Figura 4-4.</b> Histograma tiempos de finalización del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial	31
<b>Figura 4-5.</b> Histograma intervalos de duración del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial	31
<b>Figura 4-6.</b> Representación probabilidad de conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de inicio siendo $t^H \approx t^V$	33
<b>Figura 4-7.</b> Histograma tiempos de inicio del conflicto para 10000 vientos aleatorios con	

incertidumbre en el tiempo inicial siendo $t^H \approx t^V$	34
<b>Figura 4-8.</b> Histograma tiempos de finalización del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial siendo $t^H \approx t^V$	34
<b>Figura 4-9.</b> Histograma intervalos de duración del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial siendo $t^H \approx t^V$	34
<b>Figura 4-10.</b> Representación probabilidad de conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de finalización	36
<b>Figura 4-11.</b> Histograma tiempos de inicio del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo final	37
<b>Figura 4-12.</b> Histograma tiempos de finalización del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo final	37
<b>Figura 4-13.</b> Histograma tiempos de duración del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo final	37
<b>Figura 4-14.</b> Representación probabilidad de conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de finalización siendo $t_+^H \approx t_+^V$	38
<b>Figura 4-15.</b> Histograma tiempos de inicio del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de finalización siendo $t_+^H \approx t_+^V$	39
<b>Figura 4-16.</b> Histograma tiempos de finalización del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de finalización siendo $t_+^H \approx t_+^V$	39
<b>Figura 4-17.</b> Histograma tiempos de duración del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de finalización siendo $t_+^H \approx t_+^V$	40
<b>Figura 4-18.</b> Representación probabilidad de conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final	41
<b>Figura 4-19.</b> Histograma tiempos de inicio conflictos para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final	42
<b>Figura 4-20.</b> Histograma tiempos de finalización del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final	42
<b>Figura 4-21.</b> Histograma tiempos de duración del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final	42
<b>Figura 4-22.</b> Representación probabilidad de conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final siendo $t^H \approx t^V$ y $t_+^H \approx t_+^V$	43
<b>Figura 4-23.</b> Histograma tiempos de inicio del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final siendo $t^H \approx t^V$ y $t_+^H \approx t_+^V$	44
<b>Figura 4-24.</b> Histograma tiempos de finalización del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final siendo	44
<b>Figura 4-25.</b> Histograma tiempos de duración del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final siendo $t^H \approx t^V$ y $t_+^H \approx t_+^V$	45
<b>Figura 5-1.</b> Representación de los ángulos $\alpha$ , $\beta$ y $\Upsilon$	48
<b>Figura 5-2.</b> Curvas de nivel esperanza tiempos iniciales del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^H$	51
<b>Figura 5-3.</b> Curvas de nivel esperanza tiempos finales del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^H$	51
<b>Figura 5-4.</b> Curvas de nivel esperanza duración del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^H$	52
<b>Figura 5-5.</b> Curvas de nivel desviación típica de los tiempos iniciales para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^H$	52

<b>Figura 5-6.</b> Curvas de nivel desviación típica de los tiempos finales para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^H$	53
<b>Figura 5-7.</b> Curvas de nivel desviación típica de la duración del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^H$	54
<b>Figura 5-8.</b> Curvas de nivel probabilidad de conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^H$	54
<b>Figura 5-9.</b> Curvas de nivel de la esperanza de los tiempos iniciales para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^V$	55
<b>Figura 5-10.</b> Curvas de nivel de la esperanza de los tiempos finales para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^V$	56
<b>Figura 5-11.</b> Curvas de nivel esperanza de la duración del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^V$	57
<b>Figura 5-12.</b> Curvas de nivel desviación típica de los tiempos iniciales para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^V$	57
<b>Figura 5-13.</b> Curvas de nivel desviación típica de los tiempos finales para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^V$	58
<b>Figura 5-14.</b> Curvas de nivel desviación típica de la duración del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^V$	58
<b>Figura 5-15.</b> Curvas de nivel probabilidad de conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de $\alpha$ y $\beta$ siendo $t_- = t_-^H$ y $t_+ = t_+^V$	59



# 1 INTRODUCCIÓN

---

La finalidad de este capítulo es contextualizar los aspectos que motivan la realización de este trabajo fin de grado e introducir algunos de los conceptos más importantes que se emplearán a lo largo del desarrollo del mismo. A continuación, se presentan los antecedentes, los objetivos perseguidos y la metodología seguida en el desarrollo del trabajo.

## 1.1 Antecedentes

La iniciativa comunitaria de Cielo Único Europeo (*Single European Sky*, SES) surgió en 1999 con la finalidad de crear un marco legislativo común para la aviación europea fruto de los problemas que supuso el incremento de capacidad. En el año 2005 se establecieron los objetivos políticos y de alto nivel a alcanzar para el año 2020 y en adelante. Estos objetivos incluyen aumentar la capacidad reduciendo los retrasos tanto en el aire como en tierra, una mejora en la seguridad, y una reducción de los costes de los servicios de gestión del tránsito aéreo (*Air Traffic Management*, ATM) y del impacto ambiental.

La gestión del tránsito aéreo (ATM) es la administración dinámica e integrada, entendiéndose por integrada: segura, económica y eficiente del tránsito aéreo y del espacio aéreo. El tránsito aéreo está compuesto por todas las aeronaves que se encuentran en vuelo y las que circulan por el área de maniobras de un aeródromo. El área de maniobras está formada por las calles de rodaje y las pistas, sin incluir las plataformas. La gestión del tránsito aéreo incluye los servicios de tránsito aéreo (*Air Traffic Services*, ATS), la gestión de la influencia del tránsito aéreo (*Air Traffic Flow Management*, ATFM) y la gestión del espacio aéreo (*Airspace Management*, ASM) [1].

Los objetivos del ATS son los siguientes: prevenir colisiones entre aeronaves; prevenir colisiones entre aeronaves en el área de maniobras y entre éstas y los obstáculos que haya en dicha área; acelerar y mantener ordenadamente el movimiento del tránsito aéreo; asesorar y proporcionar información útil para la marcha segura y eficaz de los vuelos; y notificar a los organismos pertinentes respecto a las aeronaves que necesitan ayuda de búsqueda y salvamento, así como auxiliar a dichos organismos según sea necesario [1]. Para poder prevenir las colisiones es necesario realizar una predicción de las trayectorias de las aeronaves, la incertidumbre alrededor de la predicción de las trayectorias supone un reto de desarrollo para lograr mejoras en la capacidad, la eficiencia y la seguridad. Una de las principales causas de incertidumbre es la meteorología, donde el viento representa un papel fundamental. El servicio meteorológico es el encargado de suministrar la información meteorológica a los operadores de las aeronaves y las tripulaciones de vuelo para la planificación y replanificación del vuelo, a las dependencias ATS y de búsqueda y salvamento, a las administraciones de los aeropuertos para el funcionamiento de sus instalaciones y a todos aquellos usuarios relacionados con la navegación aérea. De esta forma contribuye a la regularidad, la eficiencia y la seguridad de la navegación aérea; la evitación de colisiones y de conflictos es imprescindible para lograr estas mejoras y conseguir los objetivos del ATS.

Un conflicto tiene lugar cuando se prevé una pérdida de separación de forma simultánea en el futuro para el plano vertical y para el horizontal, es decir, cuando la distancia mínima de separación entre las aeronaves es inferior a una distancia mínima previamente fijada en ambos planos.

## 1.2 Objetivos y metodología

El objetivo de este proyecto es analizar las trayectorias de ascenso/descenso de dos aeronaves en presencia de viento incierto en el plano horizontal para determinar si se produce o no conflicto entre ellas. Además de la existencia o no de conflicto entre las aeronaves es interesante conocer qué puntos de la trayectoria poseen una probabilidad más elevada de albergar conflictos para los diferentes vientos, la duración de los mismos y la intensidad de éstos.

Con el fin de tener una visión generalizada del desarrollo del trabajo se detalla el proceso seguido a lo largo del documento.

En primer lugar, en la sección 2 se particularizan las ecuaciones generales de la mecánica del vuelo para describir las trayectorias rectilíneas de ascenso/descenso seguidas por las aeronaves. Una vez que se conocen las trayectorias, se establecen las separaciones que deben existir entre las aeronaves, tanto en el plano vertical como en el horizontal, con el fin de cumplir con los objetivos de seguridad aérea. Se definen conceptos importantes como la pérdida de separación y conflicto, y se analiza la distancia de separación entre las aeronaves. Se proponen dos métodos para el estudio de la pérdida de separación, por un lado, el método numérico y, por otro, el método analítico. El método numérico se basa en una discretización del tiempo de duración del estudio, para cada instante de tiempo específico se calcula la posición de cada aeronave dando lugar a una trayectoria formada por dichos puntos. El método analítico proporciona los resultados exactos fruto de la resolución de las ecuaciones de la mecánica del vuelo planteadas con las restricciones oportunas. De esta forma se puede comprobar que los resultados obtenidos son muy próximos entre sí y, por tanto, que la implementación de ambos métodos es correcta, también se detallan las ventajas e inconvenientes que poseen cada uno de ellos. Los estudios estadísticos acerca de la probabilidad de conflicto, de las desviaciones típicas de los tiempos más representativos del conflicto y de sus esperanzas que se llevan a cabo en las siguientes secciones se realizan únicamente el método analítico por ser el más exacto de los dos propuestos.

En la sección 3 se analiza la influencia del viento en los instantes que determinan el comienzo y el final del conflicto. Para ello, se estudia el impacto que ocasiona el viento en los tiempos que delimitan la pérdida de separación en el plano vertical y horizontal.

A continuación, en la sección 4 una vez que se conoce cómo influye el viento en la separación entre aeronaves, se calcula la probabilidad de que se produzca un conflicto en cada punto de la trayectoria en base a una simulación realizada para  $N$  vientos aleatorios, los tiempos medios más significativos, las desviaciones típicas de éstos y la distancia mínima existente entre las aeronaves. Este análisis se realiza mediante el método de Monte Carlo y los resultados son presentados en histogramas.

Finalmente, en la sección 5 se generaliza el análisis para diferentes posiciones relativas entre las aeronaves y diferentes posiciones iniciales. La generalización del análisis permite realizar un estudio de un conjunto de trayectorias, analizando todas las posiciones posibles entre ambas aeronaves. Las ecuaciones del movimiento se expresan en función del ángulo relativo entre las aeronaves y de la dirección de referencia del viento, los resultados obtenidos se presentarán mediante curvas de nivel.

## 2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

---

En este capítulo se obtienen, en primer lugar, las ecuaciones que describen las trayectorias rectilíneas de dos aeronaves en ascenso/descenso en la presencia de viento. Seguidamente se desarrollan dos métodos que permiten determinar la existencia de conflicto entre dos aeronaves, el método analítico y el método numérico.

### 2.1 Ecuaciones de movimiento

A partir de las ecuaciones generales de la mecánica del vuelo [2] y aplicando las hipótesis de Tierra plana (para un sistema de referencia topocéntrico en el que el eje  $x$  va en la dirección norte, el eje  $y$  en la dirección este y, el eje  $z$  de forma que se complete el triedro a derechas; el plano  $xy$  es el horizontal), vuelo simétrico, velocidad aerodinámica constante, viento estacionario para toda la trayectoria de las aeronaves con componentes exclusivamente horizontales y vuelo en el plano vertical se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones cinemáticas.

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \cos \chi + w_1 \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \cos \gamma \sin \chi + w_2 \quad (2.2)$$

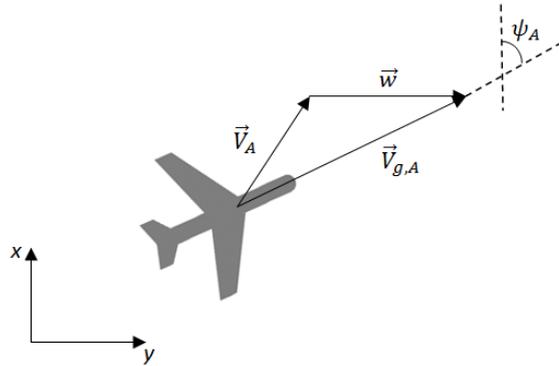
$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (2.3)$$

donde:

- $V$ : velocidad aerodinámica verdadera.
- $\gamma$ : ángulo de asiento de la velocidad, ángulo formado por el vector velocidad aerodinámica verdadera  $\vec{V}$  con el plano horizontal local; positivo cuando el avión sube.
- $\chi$ : ángulo de guiñada de velocidad, ángulo formado por la proyección del vector velocidad verdadera  $\vec{V}$  sobre el plano horizontal local con la dirección norte; positivo hacia el este.
- $w_1$ : componente del viento en el eje horizontal  $x$  (hacia el norte).
- $w_2$ : componente del viento en el eje horizontal  $y$  (hacia el este).

Para poder resolver el problema es necesario incorporar una nueva condición, por ejemplo, la velocidad vertical  $\left(\frac{dh}{dt}\right)$  representada en la ecuación 2.3. Estas ecuaciones deben ser particularizadas para cada aeronave.

Para obtener una relación entre el rumbo ( $\chi$ ) y el curso ( $\psi$ , ángulo formado por la proyección de la velocidad con respecto a tierra sobre el plano horizontal local con la dirección norte) se hace uso del triángulo del viento.



**Figura 2-1.** Triángulo del viento para la aeronave A

De esta forma se tiene que:

$$\chi = \psi - \text{asin}\left(\frac{w_c}{V}\right) \quad (2.4)$$

donde  $w_c$  es el viento cruzado que afecta a la aeronave. Se considera positivo si le entra por el ala izquierda y viene dado por la siguiente expresión:

$$w_c = w_2 \cos(\psi) - w_1 \sin(\psi) \quad (2.5)$$

Las ecuaciones que determinan la trayectoria de cada aeronave en función del tiempo se obtienen de la integración de las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3 particularizadas para cada una de ellas.

$$x(t) = x_0 + (V \cos(\gamma) \cos\left(\psi - \text{asin}\left(\frac{w_c}{V}\right)\right) + w_1) t \quad (2.6)$$

$$y(t) = y_0 + (V \cos(\gamma) \sin\left(\psi - \text{asin}\left(\frac{w_c}{V}\right)\right) + w_2) t \quad (2.7)$$

$$h(t) = h_0 + V \sin(\gamma) t \quad (2.8)$$

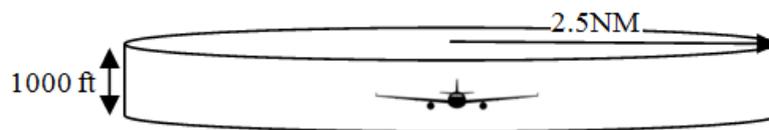
## 2.2 Detección de conflictos

Con el fin de cumplir los objetivos de tránsito aéreo de prevenir colisiones entre aeronaves y acelerar y mantener ordenadamente el movimiento del tránsito aéreo se establecen una serie de separaciones tanto a nivel vertical como horizontal.

La separación vertical se suele obtener mediante la asignación de diferentes niveles de vuelos seleccionados de las tablas de niveles de crucero. Para el desarrollo del estudio se establece una separación mínima de 1000 ft, de forma que cumpla con el mínimo de separación vertical establecido para niveles de vuelo por debajo de FL 290 y, para niveles de vuelo entre FL 290 y FL 410 para aquellas aeronaves capacitadas para volar en RVSM (*Reduced Vertical Separation Minima*) [1].

La separación horizontal mínima basada en radar permite disponer de herramientas como el encadenamiento directo o la guía vectorial y establece la separación mínima en 5NM, aunque puede ser reducida a 3NM si la autoridad *ATS* pertinente lo determina [1].

De manera general, en espacio aéreo con vigilancia radar y RVSM las separaciones mínimas horizontales y verticales quedan establecidas a 5 NM y 1000 ft respectivamente, formando un volumen cilíndrico de protección centrado en el centro de masas de la aeronave con 2.5 NM de radio y 500 ft de semi-altura en el cual no puede penetrar ninguna otra aeronave [1]. Este cilindro de protección puede observarse en la figura 2-2.



**Figura 2-2.** Cilindro de protección

Una vez que se conocen las trayectorias y las posiciones que ocupan las aeronaves en cada instante de tiempo, el siguiente paso es determinar si existen o no momentos en los que ambos volúmenes de protección interseccionan.

Se habla de pérdida de separación cuando las separaciones mínimas establecidas a nivel vertical y a nivel horizontal se incumplen simultáneamente, y se dice que existe conflicto cuando se prevé una pérdida de separación en el futuro.

La distancia mínima de separación entre las aeronaves cuando existe conflicto representa un indicador de la intensidad del conflicto y, por tanto, un dato de gran interés que se quiere conocer.

Se proponen dos métodos para el estudio de la pérdida de separación entre las aeronaves, por un lado, el método numérico y, por otro, el método analítico. El método numérico se basa en una discretización del tiempo de duración del estudio, para cada instante de tiempo concreto se calcula la posición de cada aeronave dando lugar a unas trayectorias compuestas por dichos puntos. El método analítico proporciona los resultados exactos fruto de la resolución de las ecuaciones de la mecánica del vuelo planteadas con las hipótesis anteriormente mencionadas. La realización del estudio mediante estos dos métodos permite comprobar los resultados obtenidos. El método numérico destaca por su facilidad de implementación, sin embargo, los resultados que proporciona son aproximaciones del valor real que dependen del paso considerado. Por el contrario, el método

analítico es más complicado de implementar, pero proporciona valores más exactos. Los estudios estadísticos acerca de la probabilidad de conflicto, de las desviaciones típicas de los tiempos más representativos del conflicto y de sus esperanzas que se desarrollan a lo largo del trabajo se realizan mediante el método más preciso, es decir, mediante el método analítico.

## 2.3 Método numérico

En primer lugar, se lleva a cabo el análisis mediante el método numérico. Los instantes en los que comienza o finaliza el conflicto se conocen con una precisión que coincide con el tiempo de muestro, pudiendo constituir una limitación para aquellos casos en los que se precise mayor exactitud. Sin embargo, es la facilidad de implementación lo que hace destacable a este método.

Para que exista un conflicto es necesario que se prevea una pérdida de separación de forma simultánea en el futuro en el plano vertical y en el horizontal, es decir, que la distancia mínima de separación entre las aeronaves en el plano vertical y horizontal sea inferior a una distancia mínima previamente fijada.

El cálculo de la distancia vertical entre las aeronaves ( $z$ ) supone un coste operacional mucho menor que el requerido para calcular la distancia horizontal ( $d$ ), de forma que si se evalúa en primer lugar la existencia de pérdida de separación en el plano vertical se consigue reducir el tiempo de cálculo necesario para determinar si es posible o no que tenga lugar un conflicto. Si la separación vertical mínima no se incumple no es necesario calcular la distancia de separación horizontal, puesto que ya se sabe de antemano que no habrá conflicto. Por el contrario, si se prevé que las aeronaves van a incumplir la separación mínima vertical es necesario comprobar si simultáneamente incumplirán la mínima de separación horizontal, de forma que se origine una intersección entre los discos de protección de ambas aeronaves, originando un conflicto.

Los vectores de posición de las aeronaves son los siguientes:

$$\vec{r}_A(t) = \begin{bmatrix} x_A(t) \\ y_A(t) \\ h_A(t) \end{bmatrix} \text{ vector posición de la aeronave A.}$$

$$\vec{r}_B(t) = \begin{bmatrix} x_B(t) \\ y_B(t) \\ h_B(t) \end{bmatrix} \text{ vector posición de la aeronave B.}$$

La separación vertical y horizontal de las aeronaves para un instante de tiempo concreto puede calcularse de la siguiente forma:

$$z(t_k) = |h_A(t_k) - h_B(t_k)| \quad (2.9)$$

$$d^H(t_k) = \sqrt{(x_A(t_k) - x_B(t_k))^2 + (y_A(t_k) - y_B(t_k))^2} \quad (2.10)$$

Donde:

- $t_k = t_0 + k \Delta t$
- $z(t_k)$  es la separación vertical entre las aeronaves A y B en el instante  $t_k$ .
- $d^H(t_k)$  es la separación horizontal entre las aeronaves A y B en el instante  $t_k$ .

Si  $z(t_k) < 1000$  ft y  $d^H(t_k) < 5$  NM, entonces existe conflicto.

La intensidad del conflicto se mide en función de la distancia mínima de separación entre las aeronaves, es decir, de la mínima distancia de separación en el plano vertical ( $d_{min}^V$ ) y horizontal ( $d_{min}^H$ ).

## 2.4 Método analítico

El instante concreto de tiempo en el cual tiene lugar la pérdida de separación se puede conocer mediante la determinación analítica de los instantes de tiempo en los que se violan las mínimas de separación, a partir de las posiciones iniciales, las trayectorias y las velocidades de ambas aeronaves.

- **Análisis en el plano vertical**

En primer lugar, al igual que sucedía en el método numérico se analiza el plano vertical, de esta forma se aprovecha su facilidad y menor coste operacional.

La posición relativa entre las aeronaves en el plano vertical ( $h(t)$ ) y la distancia de separación vertical entre las aeronaves ( $d^V(t)$ ) puede conocerse a partir de sus posiciones verticales iniciales ( $h_A(t = 0)$  y  $h_B(t = 0)$ ) y las velocidades de ambas aeronaves.

$$h(t) = s_z + tv_z \tag{2.11}$$

Donde:

$$s_z = h_B(t = 0) - h_A(t = 0).$$

$$v_z = \left[ \frac{dh_B}{dt} - \frac{dh_A}{dt} \right].$$

Para que no se incumpla la distancia de seguridad establecida en el plano vertical es necesario que  $h(t) > |H|$ , siendo  $H = 1000$  ft.

Debido a la presencia del operador valor absoluto en la expresión anterior, ésta se puede desdoblar en dos condiciones:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} -1, & h(t) < 0 \\ 1, & h(t) > 0 \end{cases}, \text{ siendo } \mathcal{E}h(t) = H$$

Para comprobar si se ha producido una pérdida de separación en el plano vertical se realiza el siguiente análisis:

$$\mathcal{E}(s_z + tv_z) = H, \text{ con } t = \frac{1}{v_z} \left( \frac{H}{\mathcal{E}} - s_z \right) \quad (2.12)$$

En caso de que exista pérdida de separación en el plano vertical, los instantes de tiempo que determinan el comienzo ( $t_-^V$ ) y el final ( $t_+^V$ ) de dicha pérdida de separación vienen determinados por:

$$t_-^V = \frac{1}{v_z} [-H - s_z] \quad (2.13)$$

$$t_+^V = \frac{1}{v_z} [H - s_z] \quad (2.14)$$

Si  $v_z \neq 0$ , la posición vertical relativa entre las aeronaves sufre variaciones. En función de los instantes de tiempo que determinan el comienzo de la pérdida de separación vertical,  $t_-^V$ , y el instante en que ésta finaliza,  $t_+^V$ , pueden darse diferentes situaciones acerca de la violación de la mínima de separación:

- Si  $v_z \neq 0 \rightarrow \exists \{t_-^V, t_+^V\} \in \mathbb{R}$ 
  - Si  $t_-^V, t_+^V < 0 \rightarrow$  *La violación de la mínima de separación fue en el pasado.*
  - Si  $t_-^V \leq 0, t_+^V > 0 \rightarrow$  *Existe violación de la mínima de separación en la actualidad*
  - Si  $t_-^V, t_+^V \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_-^V \leq t_+^V \rightarrow \text{Hay violación de la mínima de separación.} \\ \text{si } t_-^V > t_+^V \rightarrow \text{No hay violación de la mínima de separación.} \end{cases}$

Si  $v_z = 0$ , no se modifica la posición vertical relativa entre las aeronaves. Si existe una violación de la mínima de separación, ésta tiene lugar a lo largo de toda la trayectoria de las aeronaves, es decir, comienza en el instante inicial,  $t_-^V = 0$ , y se mantiene a lo largo de la misma coincidiendo  $t_+^V$  con el instante final de la trayectoria.

- Si  $v_z = 0 \rightarrow \begin{cases} |s_z| \leq H \rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \text{ hay violación de la mínima de separación.} \\ |s_z| > H \rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \text{ no hay violación de la mínima de separación.} \end{cases}$

- **Análisis en el plano horizontal**

Una vez que se ha comprobado que existe un incumplimiento en la mínima distancia de separación entre las aeronaves en el plano vertical se analiza el plano horizontal. En el plano horizontal se establece un margen de seguridad de 5 NM entre la aeronave A y la aeronave B, como se dijo anteriormente.

Sabiendo que la posición inicial de las aeronaves y su velocidad es conocida se establecen las siguientes relaciones:

$\vec{r}_{xyA} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$  representa las componentes horizontales del vector posición de la aeronave A.

$\vec{r}_{xyB} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$  representa las componentes horizontales del vector posición de la aeronave B.

$$\vec{s}_{xy} = \begin{bmatrix} x_B(t=0) - x_A(t=0) \\ y_B(t=0) - y_A(t=0) \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{dx_B}{dt} - \frac{dx_A}{dt} \\ \frac{dy_B}{dt} - \frac{dy_A}{dt} \end{bmatrix}$$

A partir de ellas se pueden calcular la posición relativa entre las aeronaves en el plano horizontal ( $\vec{r}_{xy}$ ), la distancia de separación horizontal entre las aeronaves ( $d^H$ ), y los instantes de tiempo en los que comienza ( $t_-^H$ ) y finaliza ( $t_+^H$ ) la pérdida de separación en el plano horizontal si la hubiera.

$$\vec{r}_{xy}(t) = \vec{r}_{xyB}(t) - \vec{r}_{xyA}(t) \rightarrow \boxed{\vec{r}_{xy}(t) = \vec{s}_{xy} + t\vec{v}_{xy}} \quad (2.15)$$

$$d^H(t) = \sqrt{t^2 \vec{v}_{xy} \vec{v}_{xy} + 2t \vec{s}_{xy} \vec{v}_{xy} + \vec{s}_{xy} \vec{s}_{xy}} \quad (2.16)$$

$$t_-^H = \frac{-2\vec{s}_{xy} \vec{v}_{xy} - \sqrt{(2\vec{s}_{xy} \vec{v}_{xy})^2 - 4\vec{v}_{xy} \vec{v}_{xy} (\vec{s}_{xy} \vec{s}_{xy} - D^2)}}{2\vec{v}_{xy} \vec{v}_{xy}} \quad (2.17)$$

$$t_+^H = \frac{-2\vec{s}_{xy} \vec{v}_{xy} + \sqrt{(2\vec{s}_{xy} \vec{v}_{xy})^2 - 4\vec{v}_{xy} \vec{v}_{xy} (\vec{s}_{xy} \vec{s}_{xy} - D^2)}}{2\vec{v}_{xy} \vec{v}_{xy}} \quad (2.18)$$

Analizando los resultados obtenidos mediante las ecuaciones 2.17 y 2.18 se puede determinar si existe o no pérdida de la separación mínima y en qué momento concreto tiene lugar:

- Si  $\vec{v}_{xy} \vec{v}_{xy} = 0 \rightarrow \begin{cases} \vec{s}_{xy} \vec{s}_{xy} < D^2 \rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \text{ hay violación de la mínima de separación.} \\ \vec{s}_{xy} \vec{s}_{xy} \geq D^2 \rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \text{ no hay violación de la mínima de separación.} \end{cases}$
- Si  $(2\vec{s}_{xy} \vec{v}_{xy})^2 - 4\vec{v}_{xy} \vec{v}_{xy} (\vec{s}_{xy} \vec{s}_{xy} - D^2) < 0 \rightarrow \nexists t \in \mathbb{R} \text{ no hay violación de la mínima de separación.}$
- Si  $(2\vec{s}_{xy} \vec{v}_{xy})^2 - 4\vec{v}_{xy} \vec{v}_{xy} (\vec{s}_{xy} \vec{s}_{xy} - D^2) \geq 0 \rightarrow \exists \{t_-^H, t_+^H\} \in \mathbb{R}$ , siendo  $t_-^H$  el instante donde la separación horizontal comienza a ser inferior a la mínima de separación y  $t_+^H$  el instante donde termina dicha violación de la mínima de separación. Pueden darse las siguientes situaciones:
  - Si  $t_-^H, t_+^H < 0 \rightarrow \text{La pérdida de separación fue en el pasado y no volverá a ocurrir.}$
  - Si  $t_-^H \leq 0, t_+^H > 0 \rightarrow \text{Existe violación de la mínima de separación actualmente.}$
  - Si  $t_-^H, t_+^H \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_-^H \leq t_+^H \rightarrow \text{Hay violación de la mínima de separación.} \\ \text{si } t_-^H > t_+^H \rightarrow \text{No hay violación de la mínima de separación.} \end{cases}$

El valor de la mínima distancia de separación entre las aeronaves en el plano horizontal se calcula a partir de la ecuación 2.16. En primer lugar, se deriva e iguala a cero dicha ecuación para obtener el instante en el que la distancia es mínima. Una vez conocido dicho instante, la distancia de separación mínima en el plano horizontal se calcula mediante la ecuación 2.21.

$$\frac{d}{dt}(d^H(t)) = \frac{1}{2} \frac{2tv_{xy}^2 + 2\vec{s}_{xy}\vec{v}_{xy}}{\sqrt{t^2v_{xy}^2 + 2t\vec{s}_{xy}\vec{v}_{xy} + s_{xy}^2}} \quad (2.19)$$

$$t_{d_{min}^H} = -\frac{\vec{s}_{xy}\vec{v}_{xy}}{v_{xy}^2} \quad (2.20)$$

De esta forma se obtiene que la distancia mínima entre las aeronaves en el plano horizontal es:

$$d_{min}^H = \sqrt{t_{d_{min}^H}^2 v_{xy}^2 + 2t_{d_{min}^H} \vec{s}_{xy}\vec{v}_{xy} + s_{xy}^2} = \sqrt{s_{xy}^2 - \frac{(\vec{s}_{xy}\vec{v}_{xy})^2}{v_{xy}^2}} \quad (2.21)$$

## 2.5 Intervalos temporales en los que existe pérdida de separación.

Los conflictos tienen lugar cuando se prevé que se producirá de forma simultánea una violación de la distancia mínima de separación vertical y horizontal entre las aeronaves. La determinación del intervalo temporal donde se prevé que exista pérdida de separación se genera a partir de la intersección de los intervalos que representan la pérdida de separación en el plano vertical y horizontal. El inicio de la pérdida de separación,  $t_-$ , viene marcado por el mayor de los tiempos iniciales, es decir, por el mayor entre  $t_-^V$  y  $t_-^H$ , mientras que el final de la pérdida de separación,  $t_+$ , viene determinado por el menor de los tiempos finales, es decir, el menor entre  $t_+^V$  y  $t_+^H$ .

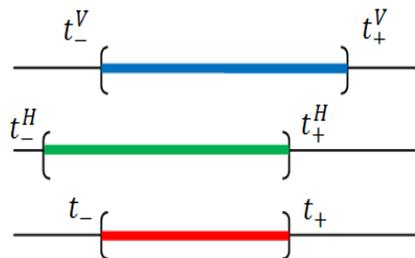


Figura 2-3. Intervalos de pérdida de separación

La figura 2-3 ilustra un ejemplo de la construcción de los intervalos en los cuales existe pérdida de separación. En ella se puede ver con trazo azul el intervalo temporal en el que se produce una pérdida de separación en el plano vertical  $[t_-^V, t_+^V]$ , con trazo verde el intervalo de tiempo correspondiente a la pérdida de separación en el plano horizontal  $[t_-^H, t_+^H]$ , y finalmente, con trazo rojo se representa el intervalo correspondiente a la pérdida de separación cuyo instante inicial coincide con  $t_-^H$  y su instante final coincide con  $t_+^V$ .

## 2.6 Comprobación de los métodos de detección de conflictos

En este apartado se van a comparar las soluciones obtenidas mediante los dos métodos de detección de conflictos propuestos con la ayuda del programa *Matlab*.

Los datos de partida en los que se basan estos cálculos son los siguientes:

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = 0 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 1567 \text{ m} \\ h_A(t=0) = 6096 \text{ m} \end{cases}, V_A = 226 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 10 \text{ m/s}, \psi_A = 105^\circ$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_B(t=0) = 14816 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 14816 \text{ m} \\ h_B(t=0) = 7620 \text{ m} \end{cases}, V_B = 218 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -7 \text{ m/s}, \psi_b = 135^\circ$$

con  $w_1 = 20 \text{ m/s}$  y  $w_2 = 11 \text{ m/s}$ .

En primer lugar, si se aplica el método numérico en un intervalo de tiempo comprendido entre 0 y 150 segundos y se varían los valores de paso se obtienen los siguientes tiempos de comienzo y finalización de conflicto y de distancia mínima entre las aeronaves en el plano horizontal.

Paso (s)	$t_-$ (s)	$t_+$ (s)	$d_{min}^H$ (m)
0.05	92.00	107.55	2643.5
0.01	91.99	107.57	2643.5
0.005	91.985	107.575	2643.5

**Tabla 1.** Tiempos de inicio y fin de la pérdida de separación aplicando el método numérico con variaciones del paso.

En vista de los resultados recogidos en la tabla 1 se puede comprobar que la  $d_{min}^H$  no varía para los valores de paso escogidos. Sin embargo, los instantes de tiempo que indican el comienzo y la finalización de la pérdida de separación sí se ven afectados por el paso seleccionado.

El método analítico proporciona los valores exactos de comienzo y fin de la pérdida de separación para el plano vertical y horizontal, así como el valor de la distancia mínima entre las aeronaves en el plano horizontal,  $d_{min}^H$ , recogidos en la tabla 2.

$t_-^V$ (s)	$t_+^V$ (s)	$t_-^H$ (s)	$t_+^H$ (s)	$d_{min}^H$ (m)
71.7176	107.5765	91.9849	251.565	2643.5

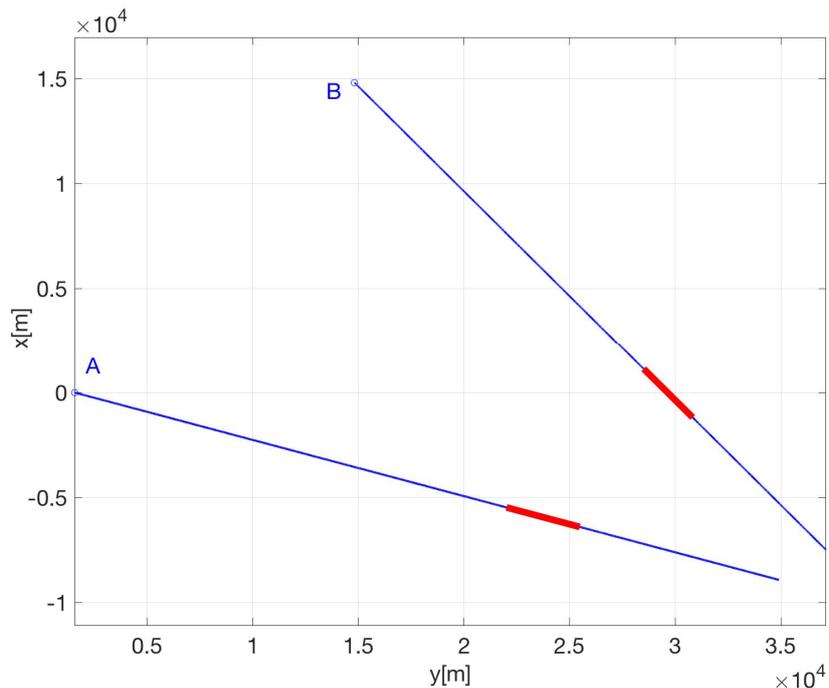
**Tabla 2.** Tiempos de inicio y fin de la pérdida de separación en los planos verticales y horizontales aplicando el método analítico

De esta forma, los instantes exactos en los que comienza y finaliza el conflicto calculados mediante el método analítico son:

$t_-$ (s)	$t_+$ (s)
91.9849	107.5765

**Tabla 3.** Tiempos de inicio y fin de la pérdida de separación aplicando el método analítico.

Un ajuste adecuado del paso empleado en el método numérico proporciona resultados de gran fiabilidad muy aproximados a los obtenidos mediante el método analítico, como puede observarse en la tabla 1. Al disminuir el paso se consigue una mejor aproximación entre ambos resultados.



**Figura 2-4.** Trayectorias aeronaves A y B con representación de la pérdida de separación

En la figura 2-4 se representa mediante un trazado de mayor espesor en color rojo el tramo de la trayectoria de cada aeronave donde se produce la pérdida de separación. El instante de tiempo que determina el comienzo y el final de los tramos de pérdida de separación puede variar según el viento que afecte a las aeronaves como se verá en la siguiente sección.

## 3 INFLUENCIA DEL VIENTO EN LA PÉRDIDA DE SEPARACIÓN

---

Las componentes del viento se modelan como variables que afectan exclusivamente al plano horizontal. Este hecho provoca que las variaciones en viento no produzcan cambios en los instantes  $t_-^V$  y  $t_+^V$  que determinan el comienzo y el final de la pérdida de separación en el plano vertical. Esto puede comprobarse directamente en las ecuaciones 2.13 y 2.14 que se definieron en la sección anterior.

Es decir, independientemente del viento que afecte a las aeronaves, la pérdida de separación mínima para el plano vertical tendrá lugar en unos instantes de tiempo fijos, siendo los tiempos que definen el comienzo y fin de la pérdida de separación en el plano horizontal los que sufrirán modificaciones como puede observarse en las ecuaciones 2.17 y 2.18.

Una vez que se sabe que sólo los instantes en los que comienza y finaliza la pérdida de separación en el plano horizontal varían en función del viento que afecte a las aeronaves pueden darse 4 situaciones diferentes:

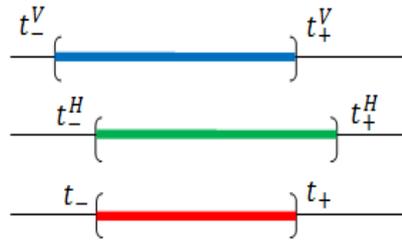
1. Influencia del viento en el tiempo de alerta inicial.
2. Influencia del viento en el tiempo de alerta final.
3. Influencia del viento en el tiempo de alerta inicial y final.
4. Influencia nula del viento en los tiempos de alerta.

A continuación se analizan cuatro escenarios de tráfico que dan lugar a cada una de estas situaciones.

### 3.1 Influencia del viento en el tiempo de alerta inicial

En este caso, la pérdida de separación en el plano horizontal tiene lugar en un instante de tiempo posterior al comienzo de la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_-^H > t_-^V$ ), y la alerta en el plano horizontal se prolonga hasta un instante de tiempo posterior a la del plano vertical ( $t_+^H > t_+^V$ ). Esto produce que en el estudio de la influencia de diferentes vientos se obtenga siempre el mismo valor de tiempo final, ya que éste viene determinado por el instante final de la pérdida de separación en el plano vertical, que es constante. Ésta es la razón por la que puede decirse que en estos casos la influencia del viento sólo se hace notable en el tiempo de inicio del conflicto.

La figura 3-1 muestra en color azul el intervalo de pérdida de separación en el plano vertical, en color verde el correspondiente a la pérdida de separación en el plano horizontal y, en color rojo la intersección de ambos intervalos que corresponde al intervalo en el que tiene lugar la pérdida de separación.



**Figura 3-1.**Intervalos característicos de la influencia del viento en el tiempo de alerta inicial

Dicha influencia del viento puede verse reflejada en el siguiente ejemplo, en el que se tienen dos aeronaves afectadas por diferentes vientos.

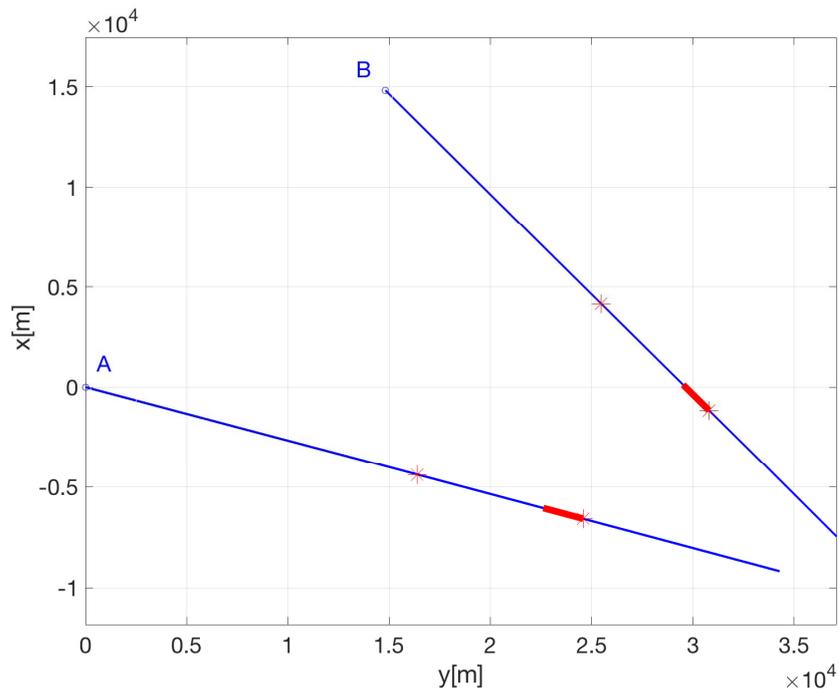
$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = 0 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 0 \text{ m} \\ h_A(t=0) = 6096 \text{ m} \end{cases}, V_A = 226 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 10 \text{ m/s}, \psi_A = 105^\circ$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_B(t=0) = 14816 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 14816 \text{ m} \\ h_B(t=0) = 7620 \text{ m} \end{cases}, V_B = 218 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -7 \text{ m/s}, \psi_b = 135^\circ$$

$w_1 \left(\frac{m}{s}\right)$	$w_2 \left(\frac{m}{s}\right)$	$t_-^V(s)$	$t_+^V(s)$	$t_-^H(s)$	$t_+^H(s)$	$t_-(s)$	$t_+(s)$	$d_{min}^H(m)$
19.62	19.87	71.717	<b>107.576</b>	<b>98.340</b>	250.469	<b>98.340</b>	<b>107.576</b>	8192
25.31	18.62	71.717	<b>107.576</b>	<b>99.537</b>	255.154	<b>99.537</b>	<b>107.576</b>	8339
18.71	22.61	71.717	<b>107.576</b>	<b>97.145</b>	247.591	<b>97.145</b>	<b>107.576</b>	8036
28.25	21.25	71.7176	<b>107.576</b>	<b>98.882</b>	254.487	<b>98.882</b>	<b>107.576</b>	8247

**Tabla 4.** Influencia del viento en el tiempo de alerta inicial

Como puede observarse en la tabla 4, los instantes que marcan el comienzo y el fin de la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_-^V, t_+^V$ ) permanecen constantes independientemente del viento que afecte a las aeronaves, mientras que los instantes que determinan el comienzo y el fin de la pérdida de separación en el plano horizontal ( $t_-^H, t_+^H$ ) sufren modificaciones en función de cada viento. Al ser  $t_-^H > t_-^V$  y  $t_+^H > t_+^V$  los instantes que marcan el inicio y la finalización del conflicto para cada caso vienen determinados por  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^V$ , de esta forma se obtiene que el instante en el que finaliza el conflicto es constante con independencia de los vientos que afecten a las aeronaves, mientras que el instante que determina el comienzo del mismo toma un valor particular para cada viento. La influencia del viento también queda recogida en las variaciones que sufren las distancias mínimas horizontales de separación entre las aeronaves.



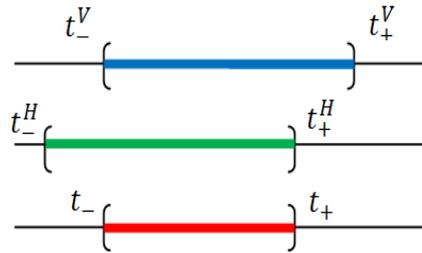
**Figura 3-2.** Representación del conflicto caracterizado por la influencia del viento en el tiempo inicial

La figura 3-2 representa el caso particular en el que  $w_1 = 28.25 \frac{m}{s}$  y  $w_2 = 21.25 \frac{m}{s}$ . En esta figura se representa el comienzo y la finalización de la pérdida de separación en el plano vertical mediante asteriscos. El tramo de la trayectoria en el que se prevé que se violen al mismo tiempo las mínimas de separación en el plano vertical y horizontal, es decir, donde existe conflicto se muestra mediante un trazado de mayor espesor y color rojo.

### 3.2 Influencia del viento en el tiempo de alerta final

Si la alerta en el plano horizontal comienza en un instante de tiempo anterior a la alerta en el plano vertical ( $t_-^H < t_-^V$ ), y concluye en un instante previo a la finalización de la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_+^H < t_+^V$ ) se tiene que, al estudiar los tiempos iniciales y finales de la pérdida de separación frente a diferentes vientos se obtiene un tiempo de inicio siempre constante e igual al tiempo de inicio de la pérdida de separación en el plano vertical. Esto provoca que la influencia del viento sólo se vea reflejada en el tiempo final.

En la figura 3-3 se representa mediante color azul el intervalo de tiempo en el que existe pérdida de separación en el plano vertical, mediante color verde el intervalo de pérdida de separación en el plano horizontal y, finalmente, en color rojo se muestra el intervalo de duración de la pérdida de separación.



**Figura 3-3.** Intervalos característicos de la influencia del viento en el tiempo de alerta final

A continuación, se propone un ejemplo que permite visualizar la influencia del viento en el tiempo de alerta final.

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = 10000 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 10000 \text{ m}, V_A = 226 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 10 \text{ m/s}, \psi_A = 45^\circ \\ h_A(t=0) = 6069 \text{ m} \end{cases}$$

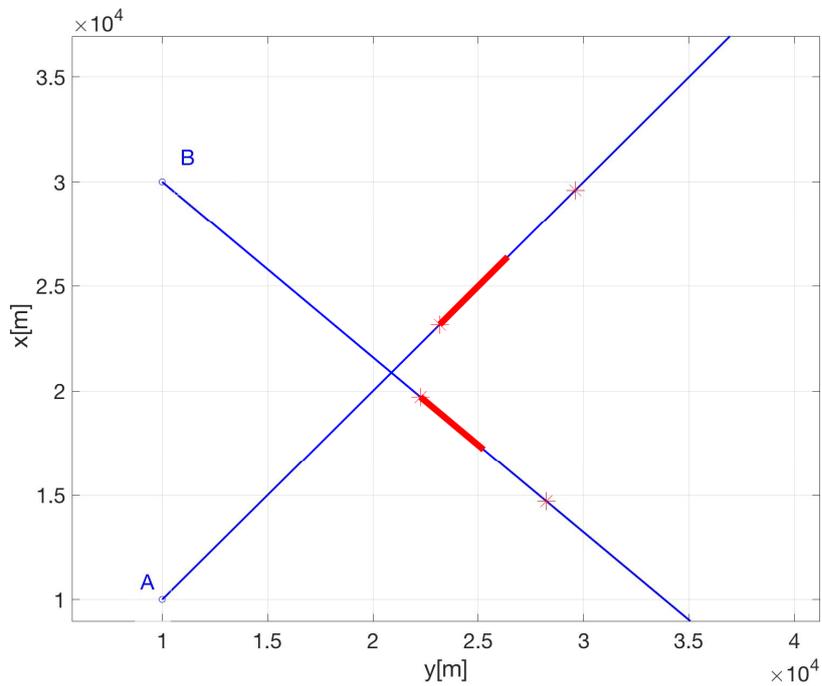
$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_B(t=0) = 30000 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 10000 \text{ m}, V_B = 218 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -7 \text{ m/s}, \psi_b = 130^\circ \\ h_B(t=0) = 7620 \text{ m} \end{cases}$$

$w_1 \left(\frac{m}{s}\right)$	$w_2 \left(\frac{m}{s}\right)$	$t_-^V$ (s)	$t_+^V$ (s)	$t_-^H$ (s)	$t_+^H$ (s)	$t_-$ (s)	$t_+$ (s)	$d_{min}^H$ (m)
24.18	25.19	<b>71.717</b>	107.576	33.197	<b>89.857</b>	<b>71.717</b>	<b>89.857</b>	3518
18.14	14.22	<b>71.717</b>	107.576	33.762	<b>91.908</b>	<b>71.717</b>	<b>91.908</b>	2668
12.62	22.49	<b>71.717</b>	107.576	34.341	<b>93.097</b>	<b>71.717</b>	<b>93.097</b>	3120
20.25	19.65	<b>71.717</b>	107.576	33.555	<b>91.146</b>	<b>71.717</b>	<b>91.146</b>	3068

**Tabla 5.** Influencia del viento en el tiempo de alerta final

En la tabla 5 se observa cómo los tiempos que marcan el comienzo y el fin de la pérdida de separación en el plano horizontal ( $t_-^H, t_+^H$ ) y la distancia mínima de separación en dicho plano ( $d_{min}^H$ ) se ven influenciados por el viento. Al ser  $t_-^H < t_-^V$  y  $t_+^H < t_+^V$  los tiempos que marcan el inicio y la finalización del conflicto para cada caso vienen determinados por  $t_- = t_-^V$  y  $t_+ = t_+^H$ , de esta forma se tiene que el instante en el que finaliza varía en función del viento que afecte a las aeronaves, mientras que el instante en que comienza toma un valor concreto con independencia del viento.

La figura 3-4 representa el caso particular en el que  $w_1 = 20.25 \frac{m}{s}$  y  $w_2 = 19.65 \frac{m}{s}$ .

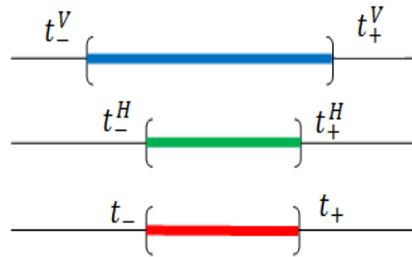


**Figura 3-4.** Representación del conflicto caracterizado por la influencia del viento en el tiempo final

### 3.3 Influencia del viento en el tiempo de alerta inicial y final

Si los tiempos de comienzo y finalización de la pérdida de separación en plano horizontal se encuentran comprendidos entre los tiempos de inicio y fin de la pérdida de separación del plano vertical, es decir, si  $t_+^H > t_-^V$  y  $t_+^H < t_+^V$ , entonces se produce una indeterminación debido a la influencia del viento en los instantes que determinan el inicio y la finalización del conflicto.

En la figura 3-5 se puede observar que el intervalo de pérdida de separación (representado en color rojo) coincide con la intersección de los intervalos de duración de la pérdida de separación en el plano vertical y horizontal, representados en color azul y verde respectivamente.



**Figura 3-5.** Intervalos característicos de la influencia del viento en el tiempo de alerta inicial y final

Esta situación puede representarse mediante el siguiente ejemplo:

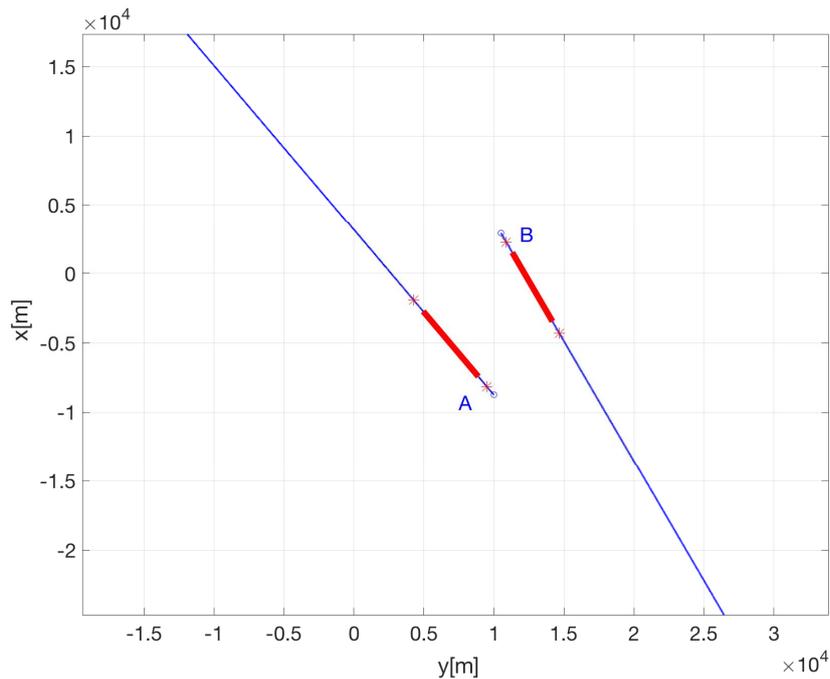
$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t = 0) = -8751 \text{ m} \\ y_A(t = 0) = 10000 \text{ m}, V_A = 226 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 10 \text{ m/s}, \psi_A = 320^\circ \\ h_A(t = 0) = 7196 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_{1B}(t = 0) = 2916 \text{ m} \\ y_B(t = 0) = 10500 \text{ m}, V_B = 218 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -7 \text{ m/s}, \psi_b = 150^\circ \\ h_B(t = 0) = 7560 \text{ m} \end{cases}$$

$w_1 \left(\frac{m}{s}\right)$	$w_2 \left(\frac{m}{s}\right)$	$t_-^V (s)$	$t_+^V (s)$	$t_-^H (s)$	$t_+^H (s)$	$t_- (s)$	$t_+ (s)$	$d_{min}^H (m)$
14.54	25.21	3.482	39.341	<b>7.721</b>	<b>34.757</b>	<b>7.721</b>	<b>34.757</b>	7107
20.44	11.72	3.482	39.341	<b>7.648</b>	<b>34.906</b>	<b>7.648</b>	<b>34.906</b>	7153
12.74	20.67	3.482	39.341	<b>7.683</b>	<b>34.675</b>	<b>7.683</b>	<b>34.675</b>	7111
12.45	11.33	3.482	39.341	<b>7.621</b>	<b>34.646</b>	<b>7.621</b>	<b>34.646</b>	7129

**Tabla 6.** Influencia del viento en el tiempo de alerta inicial y final

La tabla 6 muestra los tiempos característicos de la pérdida de separación en el plano horizontal ( $t_-^H, t_+^H$ ) y vertical ( $t_-^V, t_+^V$ ), y la distancia mínima de separación entre las aeronaves en el plano horizontal para cada uno de los vientos analizados. Al ser  $t_-^H > t_-^V$  y  $t_+^H < t_+^V$  los instantes que indican el inicio y la finalización del conflicto para cada caso son  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^H$ , por lo que ambos se verán influenciados por el viento que afecte a las aeronaves. La influencia del viento también se ve reflejada en la distancia mínima horizontal entre las aeronaves ( $d_{min}^H$ ).



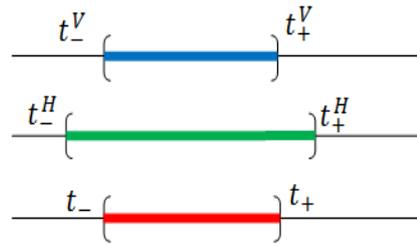
**Figura 3-6.** Representación del conflicto caracterizado por la influencia del viento en el tiempo inicial y final

La figura 3-6 muestra mediante un trazado de mayor espesor y color rojo el segmento de la trayectoria en el que tiene lugar el conflicto para  $w_1 = 12.45 \frac{m}{s}$  y  $w_2 = 11.33 \frac{m}{s}$ . Los tiempos en los que comienza y finaliza el conflicto coinciden con  $t_-^H$  y  $t_+^H$  que dependen del viento que afecte a las aeronaves como puede verse en la tabla 6 y, por lo tanto, tomarán valores diferentes en función de cada viento.

### 3.4 Influencia nula del viento en los tiempos de alerta

Finalmente, se analiza la situación en la que tanto el comienzo como el final del conflicto vienen determinados por los tiempos característicos de la pérdida de separación en el plano vertical debido a que  $t_-^H < t_-^V$  y  $t_+^H > t_+^V$ . De esta forma, se produce una situación opuesta a la anterior, es decir, independientemente del viento que afecte a las aeronaves los instantes de inicio y de finalización del conflicto son siempre los mismos e iguales a  $t_- = t_-^V$  y  $t_+ = t_+^V$ .

En la figura 3-7 se representa el intervalo correspondiente a la pérdida de separación construido a partir de la intersección del intervalo de la pérdida de separación en el plano vertical y horizontal.



**Figura 3-7.** Intervalos característicos de la influencia nula del viento en el tiempo de alerta inicial y final

Esta situación puede verse representada mediante el siguiente ejemplo:

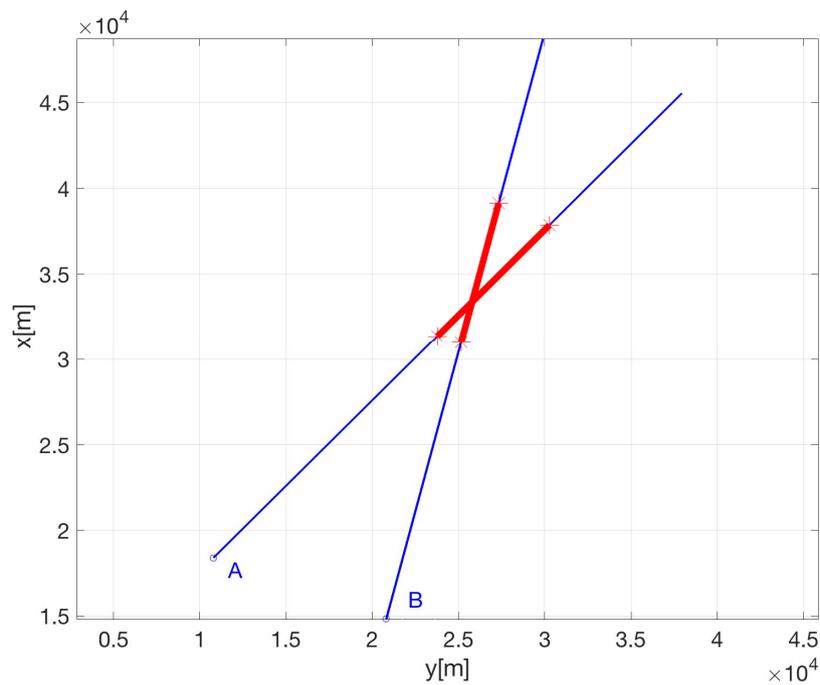
$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = 18390 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 10795 \text{ m}, V_A = 228 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 10 \text{ m/s}, \psi_A = 45^\circ \\ h_A(t=0) = 6096 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_{1B}(t=0) = 14810 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 20810 \text{ m}, V_B = 210 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -7 \text{ m/s}, \psi_b = 15^\circ \\ h_B(t=0) = 7620 \text{ m} \end{cases}$$

$w_1 \left(\frac{m}{s}\right)$	$w_2 \left(\frac{m}{s}\right)$	$t_-^V (s)$	$t_+^V (s)$	$t_-^H (s)$	$t_+^H (s)$	$t_- (s)$	$t_+ (s)$	$d_{min}^H (m)$
24.75	11.48	<b>71.717</b>	<b>107.576</b>	10.853	156.850	<b>71.717</b>	<b>107.576</b>	587.33
27.23	22.11	<b>71.717</b>	<b>107.576</b>	10.447	151.087	<b>71.717</b>	<b>107.576</b>	259.97
19.86	16.91	<b>71.717</b>	<b>107.576</b>	10.801	156.212	<b>71.717</b>	<b>107.576</b>	249.82
22.48	16.03	<b>71.717</b>	<b>107.576</b>	10.760	155.621	<b>71.717</b>	<b>107.576</b>	355.34

**Tabla 7.** Influencia nula del viento en el tiempo de alerta inicial y final

En la tabla 7 se comprueba que al ser  $t_-^H < t_-^V$  y  $t_+^H > t_+^V$  los tiempos que determinan el comienzo y la finalización del conflicto coinciden con  $t_- = t_-^V$  y  $t_+ = t_+^V$ , por lo que  $t_-$  y  $t_+$  toman siempre un valor constante al ser independientes del viento que afecta a las aeronaves. Al analizar la distancia mínima entre las aeronaves se observa cómo el valor de  $d_{min}^H$  sí varía para cada viento analizado.



**Figura 3-8.** Representación del conflicto caracterizado por la influencia nula del viento en el tiempo de alerta inicial y final

En la figura 3-8 se representa mediante asteriscos el comienzo y el fin de la pérdida de separación vertical. Analizando los resultados mostrados en la tabla 7, se observa que el valor de  $t_-^V$  y  $t_+^V$  no varía en función del viento, por lo tanto, la posición de los asteriscos permanecerá constante. A su vez, en esta ocasión se tiene que  $t_- = t_-^V$  y  $t_+ = t_+^V$ , por lo que el instante en el que comienza y finaliza la pérdida de separación también permanece fijo con independencia del viento que afecte a las aeronaves y es coincidente con el valor de los asteriscos.



# 4 ANÁLISIS DE CONFLICTOS ENTRE AERONAVES CON VIENTOS ALEATORIOS

---

En este capítulo se va a realizar un estudio de la probabilidad de la existencia de un conflicto para cada punto de la trayectoria de las dos aeronaves consideradas y de las desviaciones típicas de los tiempos más representativos de dichos conflictos. Los estudios estadísticos que se desarrollan están basados en el método de Monte Carlo.

El viento modelado como una variable aleatoria en el plano horizontal presenta unos valores comprendidos entre 11.75 y 28.40 m/s para  $w_1$  y entre 10.24 y 25.54 m/s para  $w_2$ . Los datos de viento inciertos se toman de los ofrecidos por las previsiones meteorológicas francesas, en particular se considera el pronóstico de tiempo *PEARP*. El viento que proporciona es el dado para un horizonte de pronóstico de 0 horas, realizado a las 06:00 el 5 de mayo de 2016, para un nivel de presión de 250 hPa y, para las coordenadas 38° Norte, 2.5° Este en el Sudeste de España. De acuerdo a lo observado en la sección 3, la presencia de vientos aleatorios no tiene por qué implicar que el conflicto sea incierto.

## 4.1 Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo es un método numérico empleado para la resolución de problemas en los que intervienen variables aleatorias. Se basa en la evaluación repetida de un modelo determinista que usa un modelo arbitrario como entrada, para producir una salida arbitraria de la cual se pueden extraer datos estadísticos como la media, la varianza o la probabilidad.

A menudo, los datos se obtienen de la ejecución de  $N$  simulaciones independientes de la variable  $X$ . Si se supone que el objetivo es estimar la media se puede emplear el siguiente estimador asumiendo que  $N$  tiende a infinito.

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (4.1)$$

Donde  $X_i$  es el resultado de cada una de las simulaciones.

La principal ventaja que presenta este método es su flexibilidad y la posibilidad de resolver problemas cuya solución analítica sería muy compleja. Su gran desventaja es la necesidad de realizar numerosas repeticiones de la simulación. Por tanto, es necesario llegar a un equilibrio entre la precisión de la solución y el esfuerzo computacional.

Además, es necesario establecer un criterio de parada que indique si los resultados obtenidos son suficientemente precisos dentro de los criterios establecidos para ese número de simulaciones o si, por el contrario, es necesario incrementar el valor de  $N$ . El objetivo es elegir un valor de  $N$  suficientemente grande, tal que la probabilidad de cometer un error mayor que la tolerancia ( $\varepsilon$ ) en el cálculo de la esperanza de una variable sea menor que un valor determinado,  $\delta$ . Donde  $\mu$  es el valor exacto de la esperanza.

$$P(|\bar{X}_N - \mu| > \varepsilon) \leq \delta \quad (4.2)$$

La probabilidad de error disminuye a medida que el valor de  $N$  aumenta. Se busca una solución de compromiso que satisfaga la ecuación 4.2 sin implicar un valor demasiado grande de  $N$ . Se fijan valores constantes, pequeños y positivos para  $\varepsilon$  y para  $\delta$ .

De modo que, la precisión de la aproximación puede caracterizarse por la probabilidad de que el error de la media obtenida mediante el método Monte Carlo sea mayor que una cierta tolerancia  $\varepsilon$ . Esto puede estimarse mediante (Bayer et al. [3]):

$$P[|\bar{X}_N - \mu| > \varepsilon] \approx 2 \left( 1 - \Phi \left[ \frac{\sqrt{N}\varepsilon}{\sigma} \right] \right) \quad (4.3)$$

Donde  $N$  representa para este estudio el número de vientos considerados,  $\Phi$  denota la distribución normal y  $\sigma$  el valor de la desviación típica de la variable  $X$ .

Esta desviación típica puede aproximarse a partir de los valores obtenidos en las simulaciones mediante la siguiente expresión.

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}_N)^2} \quad (4.4)$$

## 4.2 Probabilidad de existencia de pérdida de separación en un punto de la trayectoria

El estudio de la probabilidad de la existencia de un conflicto a lo largo de la trayectoria de dos aeronaves se basa en el análisis de la predicción de la pérdida de separación simultánea en el plano vertical y horizontal. Este análisis se realiza en cada punto de la trayectoria y se emplea el método analítico detallado en la sección 2.4 para obtener resultados exactos. Las componentes del viento se modelan como variables aleatorias que siguen una función de distribución uniforme y cuyos valores oscilan entre 11.75 y 28.40 m/s para  $w_1$  y entre 10.24 y 25.54 m/s para  $w_2$ . Al tratarse el viento como variables aleatorias será necesario emplear el método de Monte Carlo descrito en la sección 4.1.

La probabilidad de pérdida de separación en cada punto de la trayectoria se calcula contabilizando cuántos de los vientos aleatorios simulados producen pérdida de separación en el punto analizado,  $n$ , frente al número total de vientos simulados,  $N$ . Por tanto, dicha probabilidad se calculará de la siguiente forma para cada punto de la trayectoria de las aeronaves:

$$P_{\text{Pérdida de separación}} = \frac{n}{N} 100 \quad (4.5)$$

Para poder representar de forma visual la probabilidad de conflicto en cada punto de la trayectoria se emplea la función *colormap jet* de *Matlab*, adaptando sus propiedades de acuerdo al número de vientos considerados para el estudio. De esta forma se obtiene una gama de colores que va desde el azul al rojo oscuro, siendo el color rojo oscuro el color que representa siempre un valor del 100% de la probabilidad de conflicto en dicho punto.

A continuación, se muestra un caso particular en el que se recoge el procedimiento seguido para determinar el número de simulaciones a realizar para llegar a un equilibrio entre la precisión de la solución y el esfuerzo computacional.

Se parte de dos aeronaves cuyas posiciones iniciales, velocidades aerodinámicas, velocidades de ascenso/descenso y curso son los siguientes:

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = 12505 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 11058 \text{ m} \\ h_A(t=0) = 6096 \text{ m} \end{cases}, V_A = 226 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 10 \text{ m/s}, \psi_A = 60^\circ$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_B(t=0) = 14816 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 14816 \text{ m} \\ h_B(t=0) = 7620 \text{ m} \end{cases}, V_B = 218 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -7 \text{ m/s}, \psi_b = 45^\circ$$

El número de vientos que se van a simular en el estudio viene determinado por la probabilidad de que el error en la media de los tiempos característicos del conflicto y de las mínimas distancias de separación sea inferior a un 1%, por tanto, para determinar el número de vientos a considerar se emplea el método de Monte Carlo.

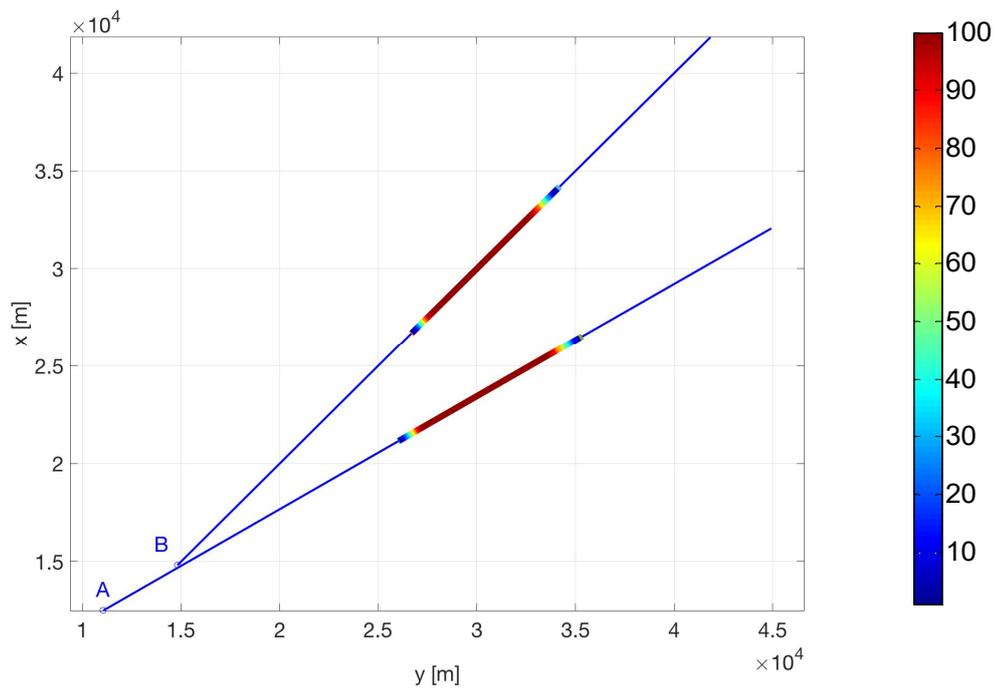
$$P[|\bar{X}_N - \mu| > \varepsilon] < 1\% \quad (4.6)$$

En la siguiente tabla se recogen los valores de  $\varepsilon$  obtenidos al considerar  $N$  vientos para los tiempos más representativos del conflicto y para la distancia mínima que tiene lugar en el plano horizontal.

$N$	$\varepsilon(t_-)$	$\varepsilon(t_+)$	$\varepsilon(t_{duración})$	$\varepsilon(d_{min}^H)$
10	0.0232 s	0.0636 s	0.0774 s	11.6515 m
100	0.0077 s	0.0216 s	0.02738 s	4.1579 m
1000	0.0023 s	0.0068 s	0.0083 s	1.2311 m
10000	0.0004 s	0.0016 s	0.0014 s	0.3851 m

**Tabla 8.** Error aproximación en las simulaciones Monte Carlo

Los errores de aproximación,  $\varepsilon$ , recogidos en la tabla 8, para los tiempos característicos del conflicto y las distancias mínimas demuestran que considerar  $N=10000$  vientos proporciona una buena aproximación para el caso particular analizado.



**Figura 4-1.** Probabilidad de conflicto en cada punto de la trayectoria con 10000 vientos aleatorios

En la figura 4-1 se representa mediante un trazo de mayor espesor el segmento de la trayectoria de cada aeronave donde existe conflicto para los vientos 10000 considerados. La gama de colores que se emplea permite visualizar con facilidad la probabilidad de la existencia de conflicto en cada punto de la trayectoria, los puntos en los que se tiene una probabilidad de conflicto del 100% se representan mediante el color rojo oscuro, mientras aquellos en los que la probabilidad es de un 1% se representan de color azul. La zona de mayor probabilidad de existencia de conflicto de una trayectoria se encuentra rodeada de puntos en los que la probabilidad de conflicto es menor.

### 4.3 Incertidumbre en tiempo de inicio de conflictos

En este apartado se analiza la incertidumbre existente en el tiempo de inicio del conflicto. Esta incertidumbre se debe a que el instante que marca el comienzo del conflicto viene determinado por el momento en el que comienza la pérdida de separación en el plano horizontal ( $t_- = t_-^H$ ), valor que sufre modificaciones para cada uno de los N vientos diferentes que afectan a las aeronaves. En cambio, el instante que determina el fin del conflicto coincide con el momento en el que finaliza la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_+ = t_+^V$ ), valor que permanece constante sin importar el viento que afecte a las aeronaves.

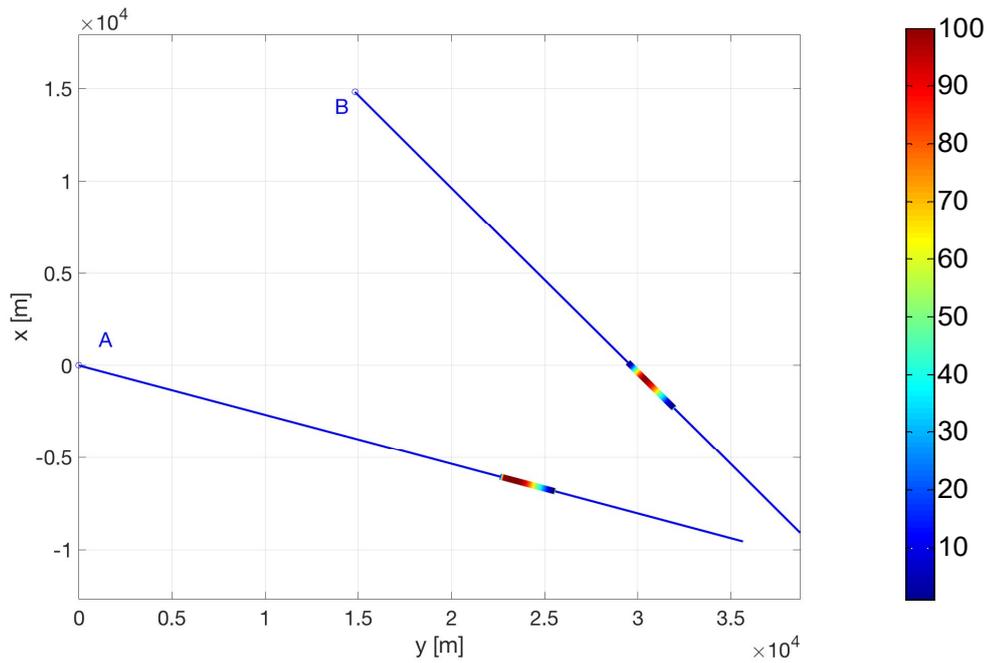
#### 4.3.1 Caso 1

A continuación, se realiza un análisis detallado de la probabilidad de existencia de conflicto, de las desviaciones típicas de los tiempos más representativos del mismo y de la distancia mínima de separación en el plano horizontal. Para ello, se parte de dos aeronaves cuyas posiciones iniciales, velocidades aerodinámicas, velocidades de ascenso/descenso y curso coinciden con los empleados en el apartado 3.1.

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = 0 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 0 \text{ m} \\ h_A(t=0) = 6096 \text{ m} \end{cases}, V_A = 226 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 10 \text{ m/s}, \psi_A = 105^\circ$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_B(t=0) = 14816 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 14816 \text{ m} \\ h_B(t=0) = 7620 \text{ m} \end{cases}, V_B = 218 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -7 \text{ m/s}, \psi_B = 135^\circ$$

En primer lugar, es necesario determinar el número de simulaciones que se van a emplear para realizar el análisis. Un valor de  $N = 10000$  vientos proporciona un error de aproximación para los tiempos que definen el conflicto menor que un 2%. Para conseguir una reducción del error con una probabilidad inferior al 1% es necesario un aumento muy significativo del valor de N ( $N = 35000$ ), lo que provocaría un coste operacional muy elevado, por lo que se considera que tomar un valor de  $N = 10000$  vientos proporciona una buena solución de equilibrio entre el coste operacional y la precisión.



**Figura 4-2.** Representación probabilidad de conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de inicio

En la figura 4-2 se muestra la trayectoria de la aeronave A y de la aeronave B, en ellas se resalta con un trazo de mayor espesor el tramo en el cual existe conflicto para alguno de los vientos bajo estudio. La probabilidad de conflicto en cada punto puede conocerse gracias a la gama de colores empleada. La probabilidad global de la existencia de conflicto a lo largo de la trayectoria completa de las aeronaves es de un 100%, es decir, todos los vientos estudiados producen conflicto en algún punto de la trayectoria.

El tiempo medio de duración del conflicto se calcula a partir de la duración de todos los conflictos que tienen lugar.

$$\bar{t}_{duración} = \frac{\sum_{i=0}^n t_{duración,i}}{n} \quad (4.7)$$

Siendo  $t_{duración,i} = t_{+,i} - t_{-,i}$

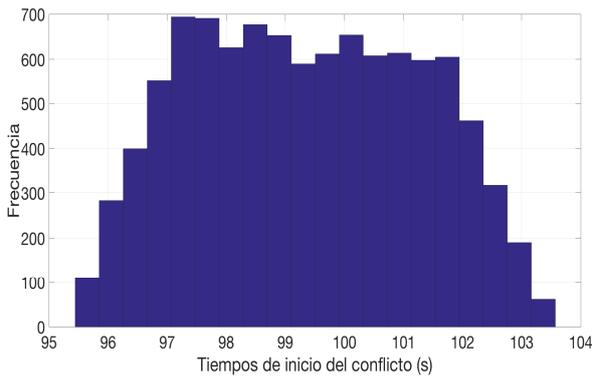
A continuación, se indican los valores numéricos obtenidos para el tiempo medio de duración del conflicto ( $\bar{t}_{duración}$ ), el tiempo medio de inicio del conflicto ( $\bar{t}_{-}$ ), el tiempo medio de finalización del conflicto ( $\bar{t}_{+}$ ), la distancia media de separación mínima en el plano horizontal ( $\bar{d}_{min}^H$ ), así como las desviaciones típicas del tiempo de inicio del conflicto ( $\sigma_{t_{-}}$ ), del tiempo final ( $\sigma_{t_{+}}$ ), de la duración ( $\sigma_{t_{duración}}$ ) y la desviación típica de la distancia mínima de separación horizontal ( $\sigma_{d_{min}^H}$ ).

$\bar{t}_-$	$\bar{t}_+$	$\bar{t}_{duración}$	$\bar{d}_{min}^H$	$\sigma_{t_-}$	$\sigma_{t_+}$	$\sigma_{t_{duración}}$	$\sigma_{d_{min}^H}$
99.4 s	107.6 s	8.2 s	8304 m	1.9 s	0 s	1.9 s	214.12 m

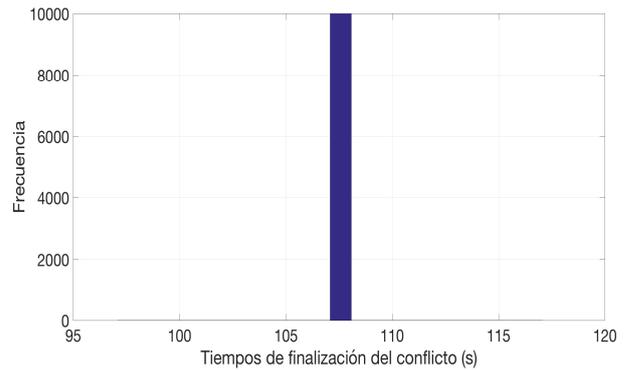
**Tabla 9.** Valores característicos de los tiempos medios, distancia mínima media y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo inicial

La tabla 9 recoge los resultados obtenidos del análisis de este primer caso. Destaca el valor nulo de la desviación típica de los tiempos finales al ser el tiempo de finalización del conflicto independiente del viento que afecte a las aeronaves. Sin embargo, el tiempo en el que comienza el conflicto sí se ve afectado por el viento que afecta a las aeronaves y, por lo tanto, presenta una desviación típica distinta de cero.

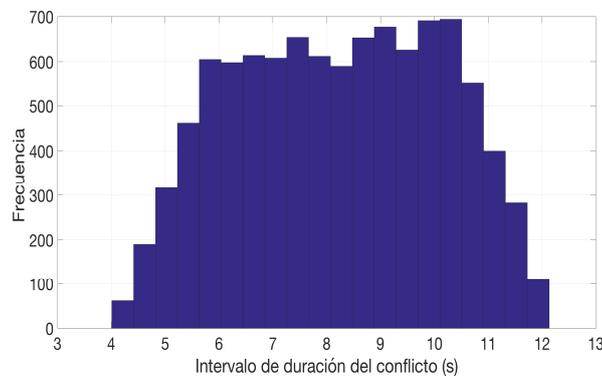
Los instantes que determinan el comienzo del conflicto se encuentran concentrados en torno al valor medio obtenido del tiempo inicial ( $\bar{t}_-$ ), tal y como se muestra en la figura 4-3. El tiempo de finalización del conflicto se produce en un instante concreto para todos los vientos analizados que coincide con  $t_+ = t_+^V = 107.6$  s como se muestra en la figura 4-4. En la figura 4-5 se representa el histograma de duración del conflicto, que mantiene una estructura similar a la del histograma de los tiempos de inicio al ser el valor de  $t_+$  constante.



**Figura 4-3.** Histograma tiempos de inicio del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial



**Figura 4-4.** Histograma tiempos de finalización del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial



**Figura 4-5.** Histograma intervalos de duración del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial

### 4.3.2 Caso 2

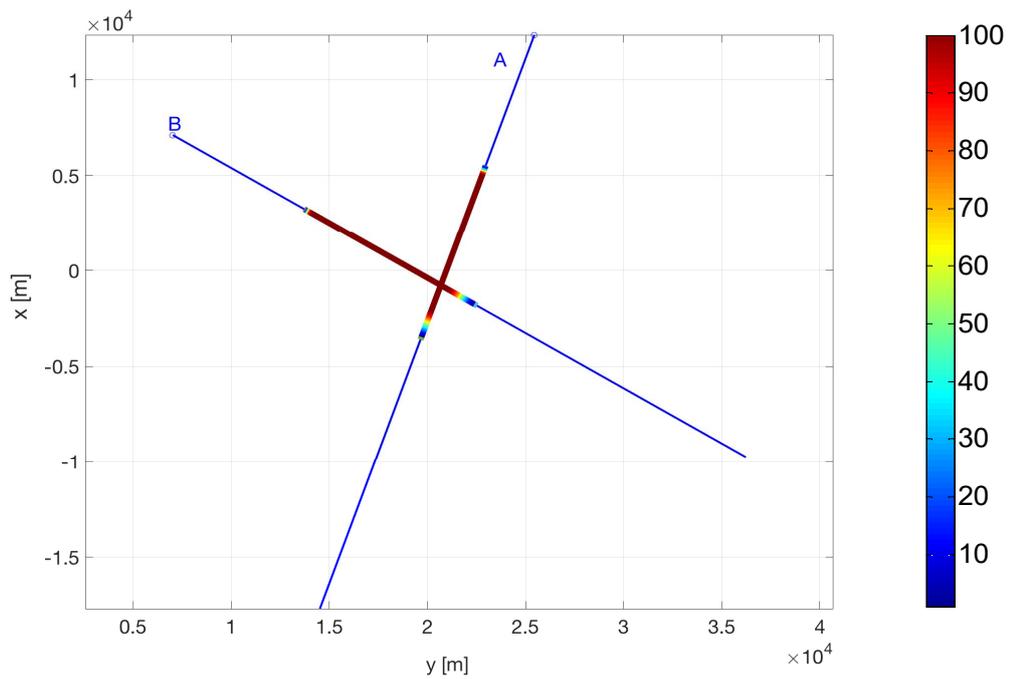
La finalización del conflicto viene determinada por la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_+ = t_+^V$ ), de forma que este instante de tiempo toma un valor constante independientemente del viento que afecte a las aeronaves. Si los tiempos en los que comienza la alerta en el plano vertical ( $t_-^V$ ) y en el plano horizontal ( $t_-^H$ ) son muy próximos entre sí ( $t_-^H \approx t_-^V$ ) se pueden dar dos situaciones diferentes en función del viento que afecte a las aeronaves. Por un lado habrá vientos que provoquen que  $t_-^H < t_-^V$ , por lo que el tiempo de inicio del conflicto vendrá determinado por el instante en el que comienza la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_- = t_-^V$ ) cuyo valor es independiente el viento y, por otro lado habrá vientos que provoquen que  $t_-^H > t_-^V$ , siendo entonces  $t_- = t_-^H$  dependiente del viento. Por lo tanto, el instante en el que comienza el conflicto es incierto.

Para ilustrar este caso se toman dos aeronaves cuyas posiciones iniciales, velocidades aerodinámicas, velocidades de ascenso/descenso y curso se detallan a continuación:

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = 12345 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 25450 \text{ m} \\ h_A(t=0) = 6500 \text{ m} \end{cases}, V_A = 228 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 8 \text{ m/s}, \psi_A = 200^\circ$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_B(t=0) = 7120 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 7020 \text{ m} \\ h_B(t=0) = 7310 \text{ m} \end{cases}, V_B = 210 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -6 \text{ m/s}, \psi_B = 120^\circ$$

Tomando  $N = 10000$  vientos se consigue un error de aproximación inferior a un 1% para los tiempos característicos del conflicto, es decir, para los tiempos que marcan el comienzo, el fin y la duración del mismo.



**Figura 4-6.** Representación probabilidad de conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de inicio siendo  $t_{-}^H \approx t_{-}^V$

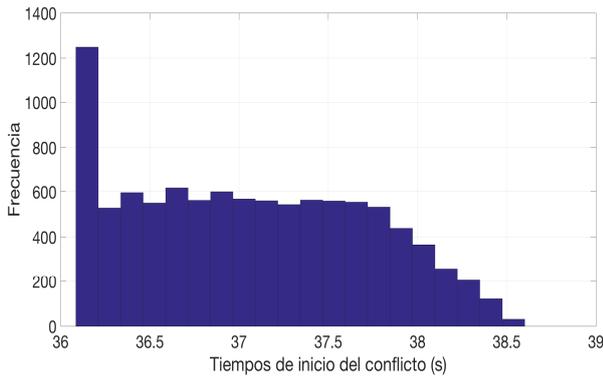
La figura 4-6 representa el tramo de las trayectorias de las aeronaves A y B donde tiene lugar el conflicto con un trazado de mayor espesor. En rojo oscuro se muestran los puntos que poseen una probabilidad del 100% de tener conflicto mientras que en azul se señalizan aquellos donde la probabilidad es mínima.

Los valores numéricos obtenidos en este caso particular son:

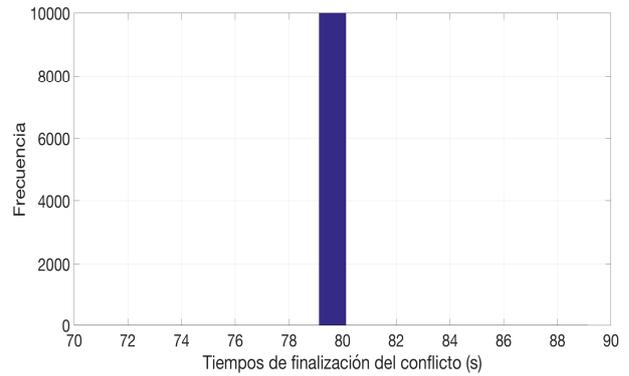
$\bar{t}_{-}$	$\bar{t}_{+}$	$\bar{t}_{duración}$	$\bar{d}_{min}^H$	$\sigma_{t_{-}}$	$\sigma_{t_{+}}$	$\sigma_{t_{duración}}$	$\sigma_{d_{min}^H}$
37.06 s	79.63 s	42.57 s	789.22 m	0.66s	0 s	0.66 s	298.32 m

**Tabla 10.** Valores característicos de los tiempos medios, distancia mínima media y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo inicial siendo  $t_{-}^H \approx t_{-}^V$

El valor de la desviación típica del tiempo de finalización del conflicto es nulo al ser  $t_{+}$  constante e independiente de los vientos que afecten a las aeronaves, mientras que el resto de valores recogidos en la tabla 10 reflejan la influencia del viento.



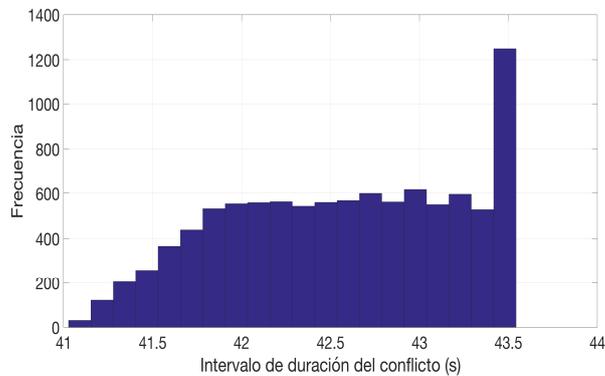
**Figura 4-7.** Histograma tiempos de inicio del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial siendo  $t_-^H \approx t_-^V$



**Figura 4-8.** Histograma tiempos de finalización del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial siendo  $t_-^H \approx t_-^V$

El tiempo de finalización del conflicto viene dominado por el tiempo que indica el final de la pérdida de separación en el plano vertical, por lo que mantiene su valor constante ( $t_+ = t_+^V = 79.63$  s) para todos los vientos, como puede verse en la figura 4-8. Sin embargo, el tiempo en el que comienza el conflicto sí se ve influenciado por el viento que afecta a las aeronaves. Al seleccionar unas condiciones de vuelo para las aeronaves que provocan que los tiempos en los que comienzan las pérdidas de separación en el plano vertical y horizontal sean muy próximos entre sí se origina un incremento muy significativo en la frecuencia de uno de los valores de la muestra que se sale de los parámetros habituales obtenidos cuando los valores de  $t_-^V$  y  $t_-^H$  no se encuentran tan próximos. El instante con mayor frecuencia que marca el inicio del conflicto es el menor de los tiempos posibles, que a su vez coincide con  $t_-^V$ . Esto se debe a que siempre que  $t_- = t_-^V$  se obtendrá dicho valor, sin embargo, cuando el inicio del conflicto viene determinado por el plano horizontal ( $t_- = t_-^H$ ) el instante en que comienza conflicto varirá en función del viento, proporcionando un conjunto de valores cuya frecuencia es menor.

Al ser el tiempo de finalización del conflicto constante y existir ese pico en frecuencia en los tiempos de inicio, el histograma que representa los intervalos de duración del conflicto también reproduce ese incremento significativo de frecuencia. En esta ocasión, el valor que posee mayor frecuencia es aquel que proporciona la mayor duración del conflicto como puede verse en la figura 4-9.



**Figura 4-9.** Histograma intervalos de duración del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial siendo  $t_-^H \approx t_-^V$

## 4.4 Incertidumbre tiempo de finalización de conflictos

El tiempo de inicio del conflicto viene determinado por el comienzo de la pérdida de separación mínima en el plano vertical ( $t_- = t_-^V$ ) y permanece constante para los N vientos diferentes que afecten a las aeronaves. En cambio, el tiempo que determina el final del conflicto coincide con el tiempo en que finaliza la pérdida de separación mínima en el plano horizontal ( $t_+ = t_+^H$ ) y varía con los vientos que afectan a las aeronaves.

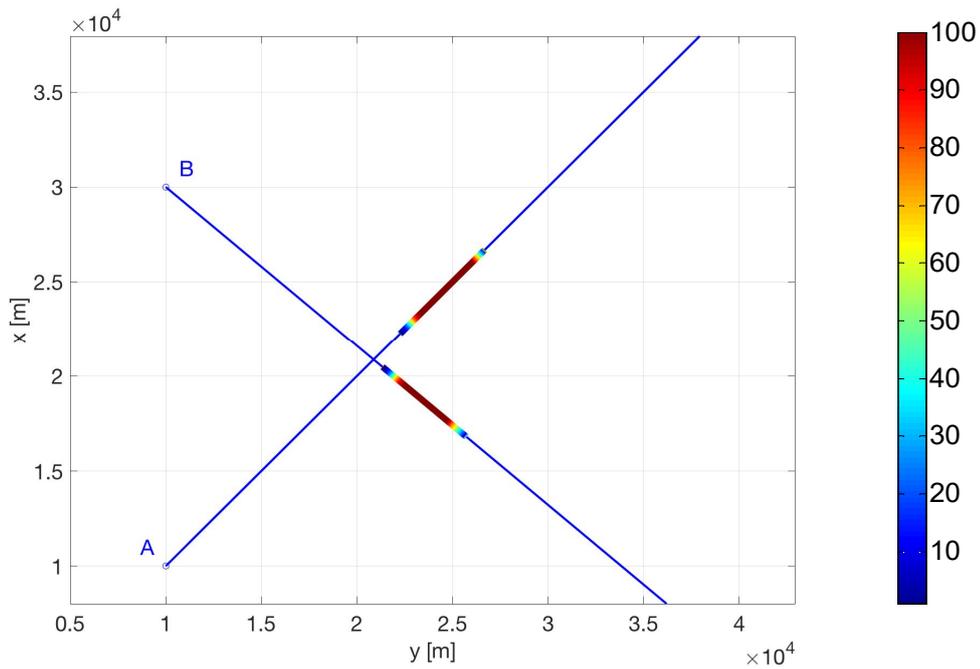
### 4.4.1 Caso 3

A continuación, se analiza la probabilidad de existencia de conflicto, las desviaciones típicas de los tiempos más representativos del conflicto y la distancia mínima de separación existente entre las trayectorias de las aeronaves definidas en la sección 3.2.

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = 10000 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 10000 \text{ m} \\ h_A(t=0) = 6069 \text{ m} \end{cases}, V_A = 226 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 10 \text{ m/s}, \psi_A = 45^\circ$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_B(t=0) = 30000 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 10000 \text{ m} \\ h_B(t=0) = 7620 \text{ m} \end{cases}, V_B = 218 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -7 \text{ m/s}, \psi_b = 130^\circ$$

Para determinar el número de simulaciones que se van a realizar se analiza el error de aproximación que se comete al calcular los tiempos que definen el conflicto. Para conseguir un error de aproximación inferior al 1% es necesario emplear  $N = 20000$  vientos.



**Figura 4-10.** Representación probabilidad de conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de finalización

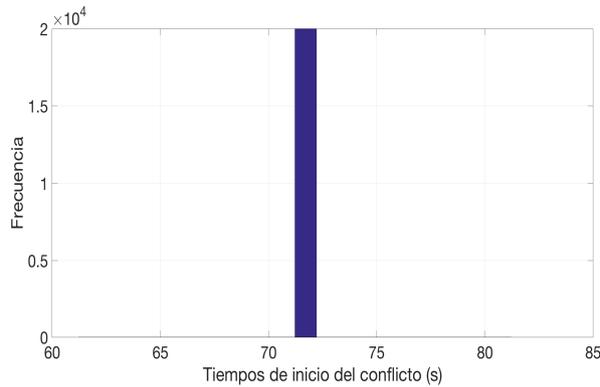
En la figura 4-10 se resalta el segmento de la trayectoria en el que existe conflicto mediante un trazado de mayor espesor. Gracias a la gama de colores se visualiza con mayor facilidad aquellos puntos en los que la probabilidad de que exista conflicto es máxima, representadas mediante un color rojo oscuro, y aquellos puntos en los que la probabilidad de que exista conflicto es mínima, representados por el color azul.

En esta ocasión, los valores numéricos obtenidos son los siguientes:

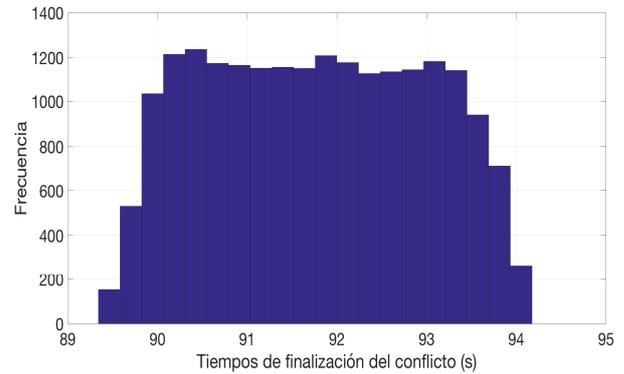
$\bar{t}_-$	$\bar{t}_+$	$\bar{t}_{duración}$	$\bar{d}_{mín}^H$	$\sigma_{t_-}$	$\sigma_{t_+}$	$\sigma_{t_{duración}}$	$\sigma_{d_{mín}^H}$
71.72 s	91.76 s	20.04 s	2969 m	0 s	1.21 s	1.21 s	304.54 m

**Tabla 11.** Valores característicos de los tiempos medios, distancia mínima media y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo de finalización

En la tabla 11 destaca el valor nulo de la desviación típica de los tiempos de inicio del conflicto al ser  $t_- = t_-^V$  independiente de los vientos que afectan a las aeronaves. La influencia del viento se reflejada en el resto de valores analizados.

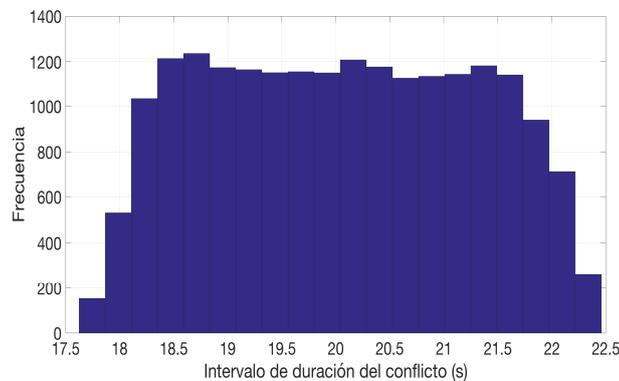


**Figura 4-11.** Histograma tiempos de inicio del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo final



**Figura 4-12.** Histograma tiempos de finalización del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo final

La figura 4-11 muestra que el tiempo de comienzo del conflicto es fijo y que toma un valor constante coincidente con el tiempo en el que comienza la pérdida de separación en el plano vertical  $t_- = t_-^V = 71.72$  s, mientras que los tiempos de finalización del conflicto, figura 4-12, sufren pequeñas variaciones en torno a  $\bar{t}_+$  al depender del valor en el que finaliza la pérdida de separación en el plano horizontal ( $t_+ = t_+^H$ ).



**Figura 4-13.** Histograma tiempos de duración del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo final

En el histograma que representa la duración del conflicto, figura 4-13, se observa la misma estructura que en el histograma de los tiempos de finalización del conflicto al ser el tiempo inicial constante.

#### 4.4.2 Caso 4

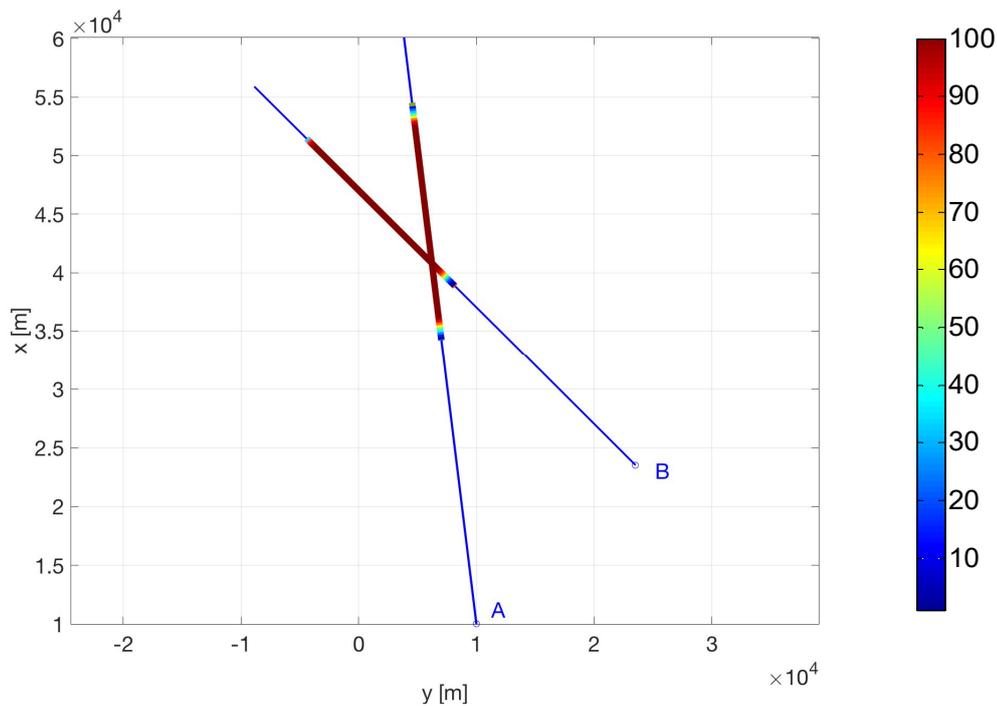
El tiempo en el que comienza el conflicto viene definido por el instante en el que se inicia la pérdida de separación mínima en el plano vertical ( $t_- = t_-^V$ ), que posee un valor constante. En este caso, los tiempos que indican el final de la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_+^V$ ) y horizontal ( $t_+^H$ ) están muy próximos entre sí ( $t_+^V \approx t_+^H$ ). Al ser los valores de  $t_+^V$  y  $t_+^H$  muy próximos entre sí habrá vientos que provoquen que el tiempo de finalización del conflicto venga determinado por el plano vertical ( $t_+ = t_+^V$ ), y otros que provoquen que el tiempo de finalización del conflicto venga dominado por el plano horizontal ( $t_+ = t_+^H$ ).

Partiendo del caso particular de dos aeronaves que verifican las condiciones expuestas anteriormente y cuyas posiciones iniciales, velocidades aerodinámicas, velocidades de ascenso/descenso y curso se detallan a continuación, se realiza un análisis de la probabilidad de la existencia de conflicto, de las desviaciones típicas de los tiempos más representativos del conflicto y de la distancia mínima de separación entre ellas.

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = 10000 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 10000 \text{ m}, V_A = 226 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 6 \text{ m/s}, \psi_A = 353^\circ \\ h_A(t=0) = 6096 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_B(t=0) = 23516 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 23516 \text{ m}, V_B = 218 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -1.6 \text{ m/s}, \psi_B = 315^\circ \\ h_B(t=0) = 7196 \text{ m} \end{cases}$$

Para determinar el número de simulaciones que se van a realizar se analiza el error de aproximación cometido para los tiempos característicos que definen el conflicto. Para conseguir un error menor que un 1% es necesario emplear un valor de  $N = 20000$  vientos.



**Figura 4-14.** Representación probabilidad de conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de finalización siendo  $t_+^H \approx t_+^V$

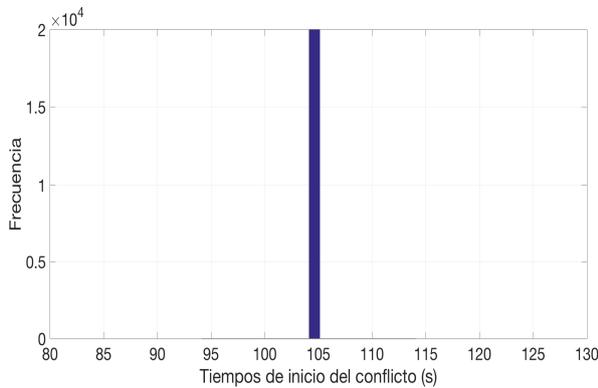
De la misma forma que en los ejemplos anteriores, el tramo de las trayectorias de las aeronaves donde existe conflicto ha sido representado mediante un trazo de mayor espesor y se han indicado los puntos que poseen una probabilidad de conflicto del 100% en rojo oscuro, mientras que los que poseen una probabilidad de conflicto del 1% se representan en azul oscuro.

Los valores numéricos que se obtienen en esta situación son los siguientes:

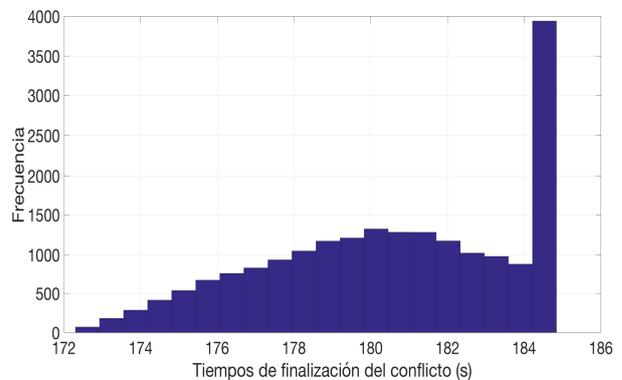
$\bar{t}_-$	$\bar{t}_+$	$\bar{t}_{duración}$	$\bar{a}_{min}^H$	$\sigma_{t_-}$	$\sigma_{t_+}$	$\sigma_{t_{duración}}$	$\sigma_{a_{min}^H}$
104.63 s	180.59 s	75.96 s	3346 m	0s	1.4 s	1.4 s	359.19 m

**Tabla 12.** Valores característicos de los tiempos medios, distancia mínima media y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo de finalización siendo  $t_+^H \approx t_+^V$

El tiempo de inicio del conflicto viene marcado por la pérdida de separación en el plano vertical, por lo que  $t_- = t_-^V$ , cuyo valor es independiente del viento y, por lo tanto, la desviación típica es nula como puede verse en la tabla 12.



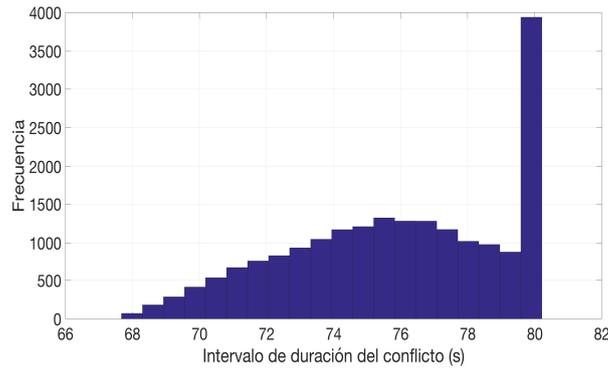
**Figura 4-15.** Histograma tiempos de inicio del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de finalización siendo  $t_+^H \approx t_+^V$



**Figura 4-16.** Histograma tiempos de finalización del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de finalización siendo  $t_+^H \approx t_+^V$

En la figura 4-15 se muestra el histograma de los tiempos de inicio del conflicto, que posee un valor constante ( $t_- = t_-^V = 102.5$  s) al ser independiente del viento.

En el histograma de la figura 4-16 se puede comprobar que el tiempo que determina la finalización del conflicto sí se ve influenciado por los vientos que afectan a las aeronaves. Al ser  $t_+^H \approx t_+^V$  se produce un incremento muy significativo en la frecuencia de uno de los valores de la muestra. El instante que posee mayor frecuencia es el mayor de los tiempos posibles que determinan el fin del conflicto y cuyo valor coincide con  $t_+^V$ . Esto se debe a que siempre que  $t_+ = t_+^V$ , el valor de  $t_+$  obtenido será el mismo con independencia del viento que afecte a las aeronaves. Sin embargo, si  $t_+ = t_+^H$ , el instante de finalización del conflicto variará en función del viento que afecte a las aeronaves, dando lugar a un conjunto de valores posibles con menor frecuencia.



**Figura 4-17.** Histograma tiempos de duración del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo de finalización siendo  $t_+^H \approx t_+^V$

Finalmente, en la figura 4-17 se representan los tiempos de duración del conflicto. Al ser el máximo valor posible de  $t_+$  el que posee mayor frecuencia y ser  $t_-$  constante, la duración del conflicto también presenta dicho incremento significativo de frecuencia para su máximo valor posible.

## 4.5 Incertidumbre tiempo inicial y final del conflicto

Si los tiempos de inicio y de finalización del conflicto coinciden con los tiempos que determinan la pérdida de separación mínima en el plano horizontal, ambos instantes variarán en función del viento que afecte a las aeronaves.

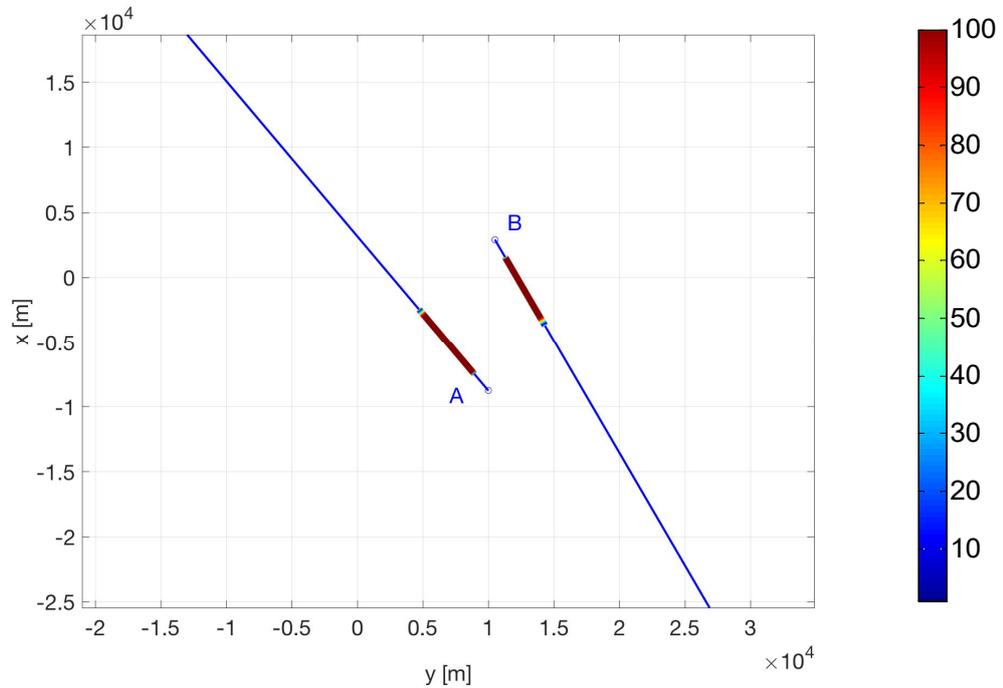
### 4.5.1 Caso 5

A partir del ejemplo definido en la sección 3.3, se analiza la probabilidad de existencia de conflicto, las desviaciones típicas de los tiempos más representativos del conflicto y la distancia mínima de separación existente entre las trayectorias de las aeronaves. Las posiciones iniciales, velocidades aerodinámicas, velocidades de ascenso/descenso y curso de las aeronaves se muestran a continuación:

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = -8751 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 10000 \text{ m}, V_A = 226 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 10 \text{ m/s}, \psi_A = 320^\circ \\ h_A(t=0) = 7196 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_{1B}(t=0) = 2916 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 10500 \text{ m}, V_B = 218 \text{ m/s}, \frac{dh_B}{dt} = -7 \text{ m/s}, \psi_b = 150^\circ \\ h_B(t=0) = 7560 \text{ m} \end{cases}$$

El número de simulaciones que es necesario realizar para conseguir que el error producido en la aproximación de los tiempos sea inferior a un 1% es  $N = 10000$  vientos.



**Figura 4-18.** Representación probabilidad de conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final

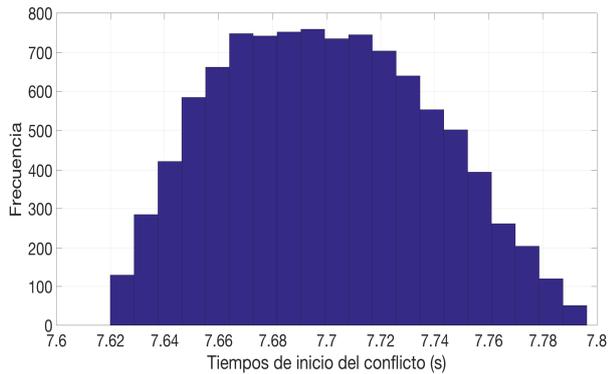
De la misma forma que en los casos anteriores, en la figura 4-18 se representa mediante un espesor mayor el tramo de la trayectoria de cada aeronave en el que existe conflicto y su probabilidad.

Los valores numéricos obtenidos en esta situación son los siguientes:

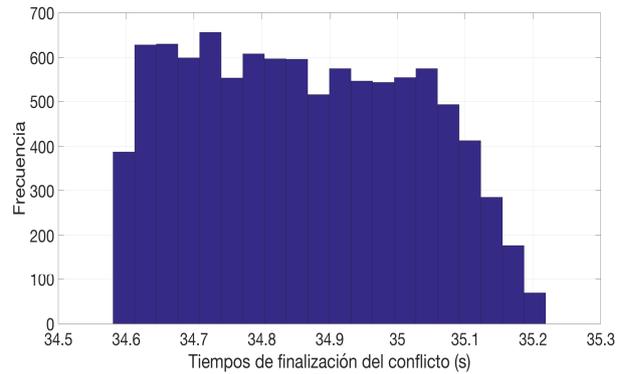
$\bar{t}_-$	$\bar{t}_+$	$\bar{t}_{duración}$	$\bar{d}_{min}^H$	$\sigma_{t_-}$	$\sigma_{t_+}$	$\sigma_{t_{duración}}$	$\sigma_{d_{min}^H}$
7.7 s	34.9 s	27.2 s	7139 m	0.04 s	0.18 s	0.16 s	17.236 m

**Tabla 13.** Valores característicos de los tiempos medios, distancia mínima media y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo inicial y final

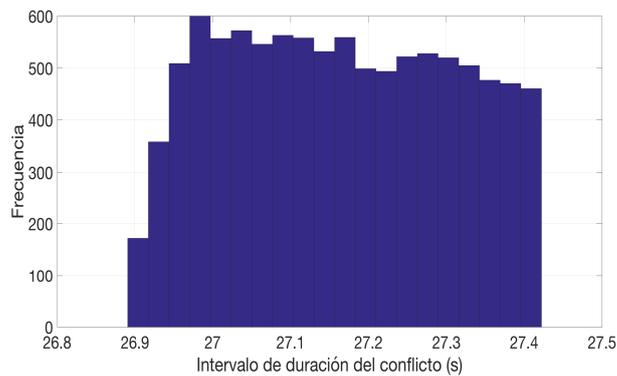
Los tiempos que indican el comienzo y el fin de cada conflicto no están determinados y varían para cada uno de los vientos, por lo tanto, los valores de las desviaciones típicas estudiadas son siempre distintas de cero.



**Figura 4-19.** Histograma tiempos de inicio conflictos para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final



**Figura 4-20.** Histograma tiempos de finalización del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final



**Figura 4-21.** Histograma tiempos de duración del conflicto para 10000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final

Los resultados representados en las figuras 4-19, 4-20 y 4-21 son opuestos a los que se obtendrían si los instantes de comienzo y finalización del conflicto viniesen dominados por la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_- = t_-^V$  y  $t_+ = t_+^V$ ). En cuyo caso, los tiempos en los que comienza y finaliza el conflicto permanecerían constantes con independencia de los vientos que afectasen a las aeronaves, por lo que el tiempo de duración del conflicto también permanecería constante para cualquier viento.

#### 4.5.2 Caso 6

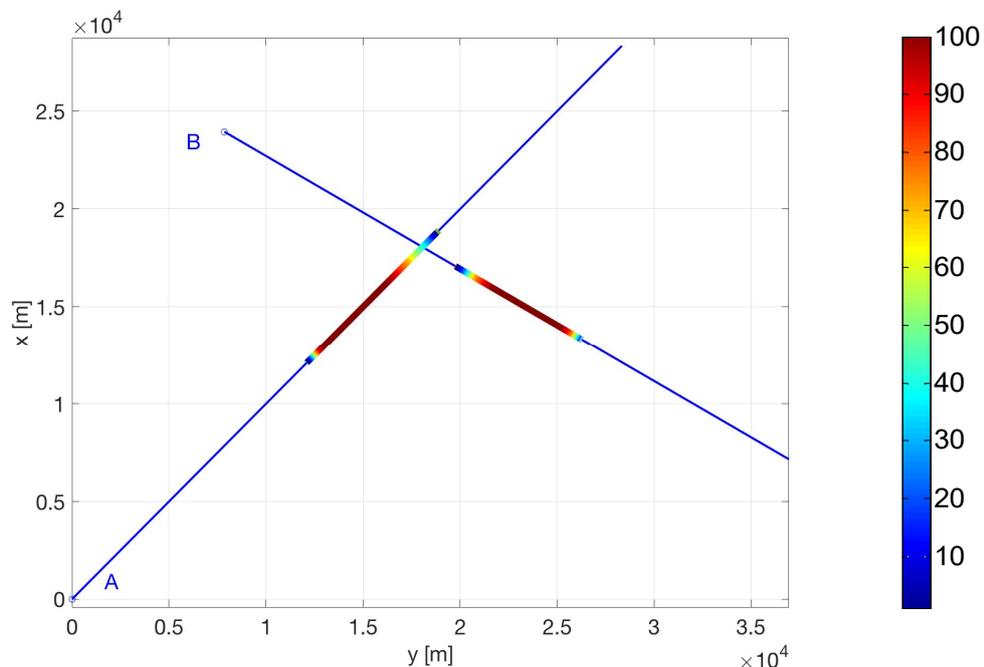
En este caso se analiza la situación en la que  $t_-^H \approx t_-^V$  y  $t_+^H \approx t_+^V$ . En función del viento que afecte a las aeronaves se pueden producir diferentes situaciones. Por un lado, el tiempo de inicio del conflicto puede venir marcado por el instante en que comienza la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_- = t_-^V$ ) o, por aquel que determina el inicio de la pérdida de separación en el plano horizontal ( $t_- = t_-^H$ ). De la misma forma, el tiempo de finalización del conflicto puede ser dominado por el fin de la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_+ = t_+^V$ ), o por el fin de la pérdida de separación en el plano horizontal ( $t_+ = t_+^H$ ).

Se parte de una pareja de aeronaves que cumple las condiciones citadas y cuyas posiciones iniciales, velocidades aerodinámicas, velocidades de ascenso/descenso y curso se detallan a continuación. Posteriormente, se analiza la probabilidad de existencia de conflicto, las desviaciones típicas de los tiempos más representativos del conflicto y la distancia mínima de separación existente entre las trayectorias de las aeronaves.

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t=0) = 0 \text{ m} \\ y_A(t=0) = 0 \text{ m} \\ h_A(t=0) = 6096 \text{ m} \end{cases}, V_A = 230 \text{ m/s}, \frac{dh_A}{dt} = 10 \text{ m/s}, \psi_A = 45^\circ$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_{1B}(t=0) = 23950 \text{ m} \\ y_B(t=0) = 7850 \text{ m} \\ h_B(t=0) = 7620 \text{ m} \end{cases}, V_B = 210 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \frac{dh_B}{dt} = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \psi_b = 120^\circ$$

En primer lugar, hay que determinar el número de simulaciones que se van a emplear para realizar el análisis. Un valor de  $N = 10000$  vientos proporciona un error de aproximación para los tiempos que definen el conflicto menor que un 5%, si se toma un valor de  $N = 20000$  vientos,  $N = 30000$  vientos o  $N = 40000$  vientos el error que se origina es inferior a un 3%. Para conseguir un error menor que un 1% es necesario emplear  $N = 175000$  vientos. Se considera que tomar un valor de  $N = 20000$  vientos proporciona una solución de compromiso entre el coste operacional y la precisión.

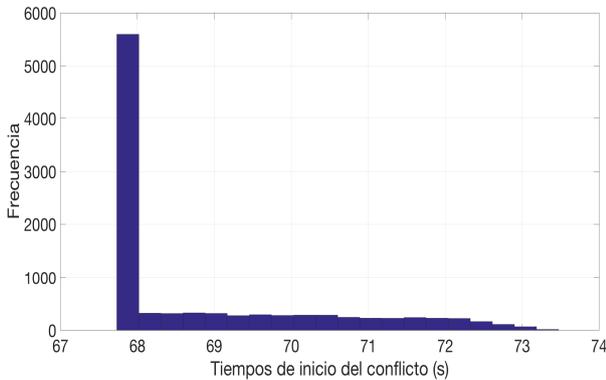


**Figura 4-22.** Representación probabilidad de conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final siendo  $t_-^H \approx t_-^V$  y  $t_+^H \approx t_+^V$

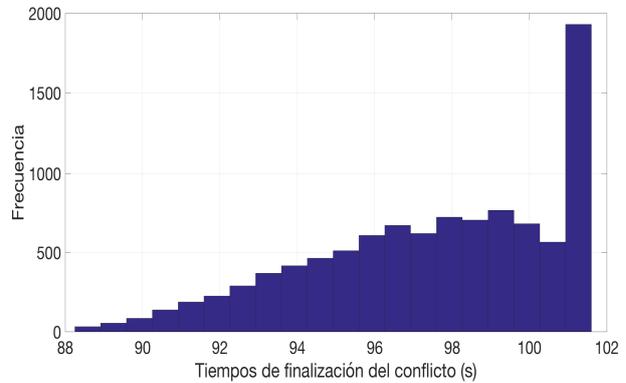
Los valores numéricos que se obtienen en este caso se recogen en la tabla 14. Se observa que tanto los tiempos de comienzo y fin del conflicto, como la distancia mínima de separación entre las aeronaves se ven afectados por el viento.

$\bar{t}_-$	$\bar{t}_+$	$\bar{t}_{duración}$	$\bar{d}_{min}^H$	$\sigma_{t_-}$	$\sigma_{t_+}$	$\sigma_{t_{duración}}$	$\sigma_{d_{min}^H}$
68.8 s	97.5 s	28.7 s	8140 m	1.52 s	3.21 s	4.38 s	411.579 m

**Tabla 14.** Valores característicos de los tiempos medios, distancias mínimas medias y desviaciones típicas para conflictos con incertidumbre en el tiempo inicial y final siendo  $t_-^H \approx t_-^V$  y  $t_+^H \approx t_+^V$



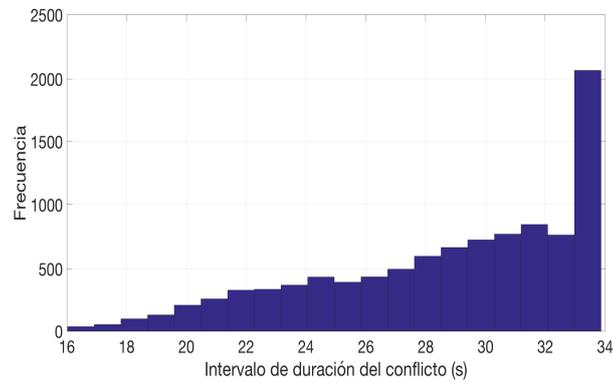
**Figura 4-23.** Histograma tiempos de inicio del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final siendo  $t_-^H \approx t_-^V$  y  $t_+^H \approx t_+^V$



**Figura 4-24.** Histograma tiempos de finalización del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final siendo  $t_-^H \approx t_-^V$  y  $t_+^H \approx t_+^V$

De forma equivalente a lo sucedía en el caso 2, el valor del tiempo de inicio del conflicto que posee mayor frecuencia se corresponde con  $t_- = t_-^V$ , que a su vez representa el menor instante de tiempo posible que marca el comienzo del conflicto, como puede verse en la figura 4-23. Esto se debe a que si  $t_- = t_-^V$ , el valor obtenido para  $t_-$  será siempre el mismo sin importar el viento que afecte a las aeronaves. Sin embargo, si  $t_- = t_-^H$ , el instante que marca el comienzo del conflicto sí depende del viento y, por tanto, se producen otros instantes de inicio de conflicto con menor frecuencia.

En la figura 4-24 se representan los tiempos de finalización del conflicto. El mayor de los valores posibles destaca por su elevada frecuencia, al igual que sucedía en el caso 4. Para aquellos casos en los que  $t_+ = t_+^V$ , el valor de  $t_+$  será siempre constante con independencia del viento. Si  $t_+ = t_+^H$ , el instante de finalización del conflicto variará dependiendo del viento que afecte a las aeronaves, originando un conjunto de valores posibles con menor frecuencia.



**Figura 4-25.** Histograma tiempos de duración del conflicto para 20000 vientos aleatorios con incertidumbre en el tiempo inicial y final siendo  $t_-^H \approx t_-^V$  y  $t_+^H \approx t_+^V$

Por último, en la figura 4-25 se muestra el histograma de los tiempos de duración del conflicto. En él se puede observar cómo el valor que corresponde a la máxima duración del intervalo es aquel que posee mayor frecuencia. Este resultado es fruto del comportamiento analizado anteriormente para los tiempos que determinan el comienzo y el fin del conflicto.



# 5 ANÁLISIS CONSIDERANDO DIFERENTES POSICIONES RELATIVAS ENTRE LAS AERONAVES

---

En este capítulo se realiza el análisis de un segundo escenario en el que se lleva a cabo una generalización del problema anterior. Ahora las aeronaves, que llevan a cabo trayectorias rectilíneas, a velocidad aerodinámica y velocidad de ascenso/descenso constante se encuentran inicialmente ubicadas sobre una circunferencia de radio  $R$  volando hacia el interior de la misma.

Este estudio se basa en el artículo “*Probabilistic Aircraft Conflict Detection Considering Wind Forecast Uncertainty*” [4], en el que se analizan las trayectorias rectilíneas de las aeronaves a velocidad aerodinámica constante y mismo nivel de vuelo. Ambas aeronaves se encuentran afectadas por el mismo viento y se sitúan inicialmente sobre una misma circunferencia de radio  $R$  volando hacia su centro.

## 5.1 Particularización de las ecuaciones del movimiento

En las ecuaciones del movimiento definidas en la sección 2.1 aparece explícitamente el curso seguido por las aeronaves, dada la definición de este segundo escenario, en el cual el curso que siguen las aeronaves se describe mediante la relación de los ángulos entre ellas y la dirección de referencia del viento es necesario definir los siguientes ángulos y reescribirlas.

- $\Upsilon$ : dirección de referencia del viento formada por el ángulo entre las dos componentes principales.
- $\alpha$ : dirección relativa del viento, ángulo formado entre el curso de la aeronave A y la dirección de referencia del viento.
- $\beta$ : curso relativo, ángulo entre el curso de la aeronave A y la aeronave B

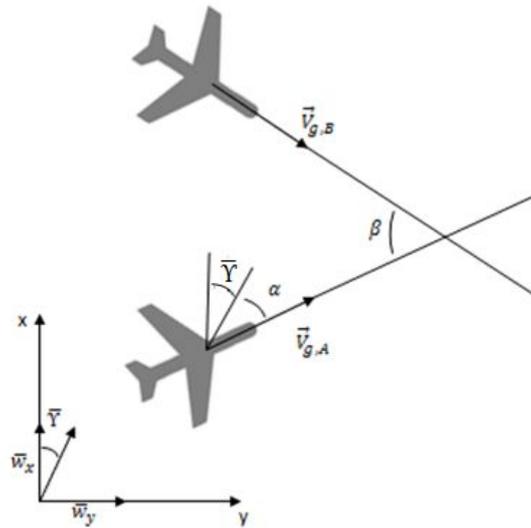
Estos tres ángulos vienen determinados mediante las siguientes expresiones y son conocidos si se conoce la distribución de los vientos.

$$\Upsilon = \arctan\left(\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1}\right) \quad (5.1)$$

$$\alpha = \psi_A - \gamma \quad (5.2)$$

$$\beta = \psi_B - \psi_A \quad (5.3)$$

Las aeronaves vuelan hacia un punto común, partiendo de unas posiciones iniciales que deben cumplir la siguiente condición: las aeronaves A y B deben estar situadas sobre una circunferencia de radio  $R$  centrada en el punto de corte de las trayectorias hacia donde se dirigen las aeronaves. Los diferentes valores tomados por  $\alpha$  y  $\beta$  dan lugar a las distintas posiciones iniciales de las aeronaves sobre la circunferencia.



**Figura 5-1.** Representación de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$

Particularizando las ecuaciones de la trayectoria para cada aeronave se tiene:

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} x_A(t) = x_{A,0} + \left( V_A \cos \left( \alpha + \gamma - a \sin \left( \frac{w_{c,A}}{V_A} \right) \right) + w_1 \right) t & (5.4) \\ y_A(t) = y_{A,0} + \left( V_A \sin \left( \alpha + \gamma - a \sin \left( \frac{w_{c,A}}{V_A} \right) \right) + w_2 \right) t & (5.5) \\ h_A(t) = h_{A,0} + V_A \sin \left( a \sin \left( \frac{dh_A/dt}{V_A} \right) \right) t & (5.6) \end{cases}$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} x_B(t) = x_{B,0} + \left( V_B \cos \left( \alpha + \Upsilon + \beta - a \sin \left( \frac{w_{c,B}}{V_B} \right) \right) + w_1 \right) t & (5.7) \\ y_B(t) = y_{B,0} + \left( V_B \sin \left( \alpha + \Upsilon + \beta - a \sin \left( \frac{w_{c,B}}{V_B} \right) \right) + w_2 \right) t & (5.8) \\ h_B(t) = h_{B,0} + V_B \sin \left( a \sin \left( \frac{dh_B/dt}{V_B} \right) \right) t & (5.9) \end{cases}$$

Donde:

$$x_{A,0} = -R \cos(\psi_A) = -R \cos(\alpha + \Upsilon) \quad (5.10)$$

$$y_{A,0} = -R \sin(\psi_A) = -R \sin(\alpha + \Upsilon) \quad (5.11)$$

$$w_{c,A} = w_2 \cos(\alpha + \Upsilon) - w_1 \sin(\alpha + \Upsilon) \quad (5.12)$$

$$x_{B,0} = -R \cos(\psi_B) = -R \cos(\alpha + \beta + \Upsilon) \quad (5.13)$$

$$y_{B,0} = -R \sin(\psi_B) = -R \sin(\alpha + \beta + \Upsilon) \quad (5.14)$$

$$w_{c,B} = w_2 \cos(\alpha + \beta + \Upsilon) - w_1 \sin(\alpha + \beta + \Upsilon) \quad (5.15)$$

Los valores de  $h_{A,0}$  y  $h_{B,0}$  son constantes que se determinan en la definición del problema. De la misma forma, los valores de las velocidades aerodinámicas verdaderas de las aeronaves ( $V_A, V_B$ ) también son datos conocidos.

## 5.2 Detección de conflictos

Las separaciones mínimas verticales y horizontales se establecen conforme a lo detallado en la sección 2.2. Es decir, para espacio aéreo con vigilancia radar y RVSM, la distancia mínima de separación horizontal queda establecida a 5 NM y la separación mínima vertical se establece en 1000 ft formando un volumen cilíndrico de protección centrado en el centro de masas de la aeronave en el cual no puede penetrar ninguna otra.

Para resolver el nuevo escenario que se plantea es necesario detallar los valores de las siguientes variables: el radio de la circunferencia sobre las que se encuentran las aeronaves ( $R$ ), la altura de vuelo de las mismas ( $h_{A,0}$ ,  $h_{B,0}$ ), las velocidades aerodinámicas verdaderas ( $V_A, V_B$ ), la velocidad de ascenso/descenso de cada aeronave ( $\frac{dh_A}{dt}$ ,  $\frac{dh_B}{dt}$ ), la dirección relativa del viento ( $\alpha$ ) y el curso relativo del viento ( $\beta$ ).

La dirección relativa del viento toma valores que van desde  $\alpha = 0^\circ$  hasta  $\alpha = 360^\circ$  y, el curso relativo va desde  $\beta = 6^\circ$  a  $\beta = 354^\circ$ . Este rango de valores provoca que no exista conflicto en las posiciones iniciales de las aeronaves, ya que, por ejemplo, si  $\beta = 0^\circ$  las aeronaves partirían del mismo punto inicial, por lo que la distancia de separación tanto en el plano horizontal como vertical sería nula y habría conflicto.

Los valores aleatorios que modelan las componentes horizontales del viento están comprendidos entre unos máximos y mínimos definidos en la sección 4, cuyos valores medios son  $\bar{w}_1 = 20.08$  m/s, y  $\bar{w}_2 = 17.89$  m/s. Una vez conocidos estos valores medios, aplicando la ecuación 6.1 se obtiene la dirección de referencia del viento.

$$Y = \arctan\left(\frac{17.89}{20.08}\right) = 41.70^\circ$$

### 5.3 Incertidumbre tiempo inicial y final del conflicto

De la misma forma que sucedía en el escenario analizado en las secciones 3 y 4, si el tiempo en el que comienza y finaliza el conflicto viene determinado por los tiempos que marcan el inicio y el fin de la pérdida de separación en el plano en el plano horizontal ( $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^H$ ) cuyos valores se ven afectados por la influencia del viento, se origina una situación en la cual los tiempos característicos del conflicto son inciertos.

A continuación, se realiza un análisis detallado de la probabilidad de la existencia de conflicto, de las desviaciones típicas y de la esperanza de los tiempos iniciales, finales y de la duración del conflicto. Para ello, se parte de dos aeronaves de las que se conoce su altura de vuelo inicial, su velocidad aerodinámica verdadera y su velocidad de ascenso/descenso. Así como el radio de la circunferencia sobre la que se encuentran, cuyo valor es  $R = 50$  NM. Estos valores coinciden con los empleados en el artículo “*Probabilistic Aircraft Conflict Detection Considering Wind Forecast Uncertainty*” [4].

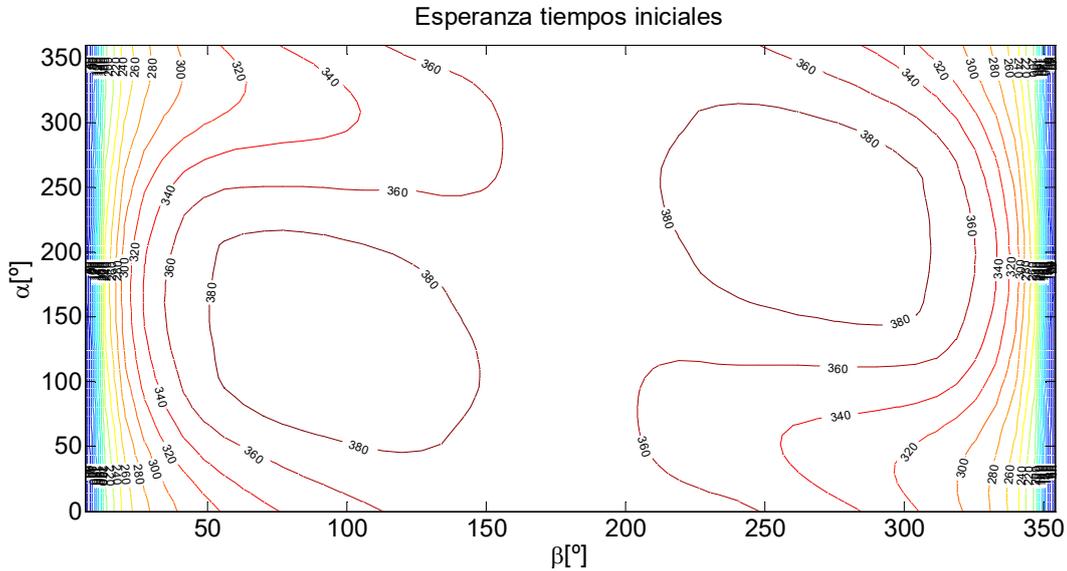
$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} h_{A,0} = 10000 \text{ m} \\ V_A = 240 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \frac{dh_A}{dt} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} h_{B,0} = 10000 \text{ m} \\ V_B = 240 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \frac{dh_B}{dt} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

Basado nuevamente en el método de Monte Carlo se busca un equilibrio entre la precisión y el coste operacional. Para conseguir un error de aproximación de los tiempos inferior a un 1% se emplean  $N = 30000$  vientos.

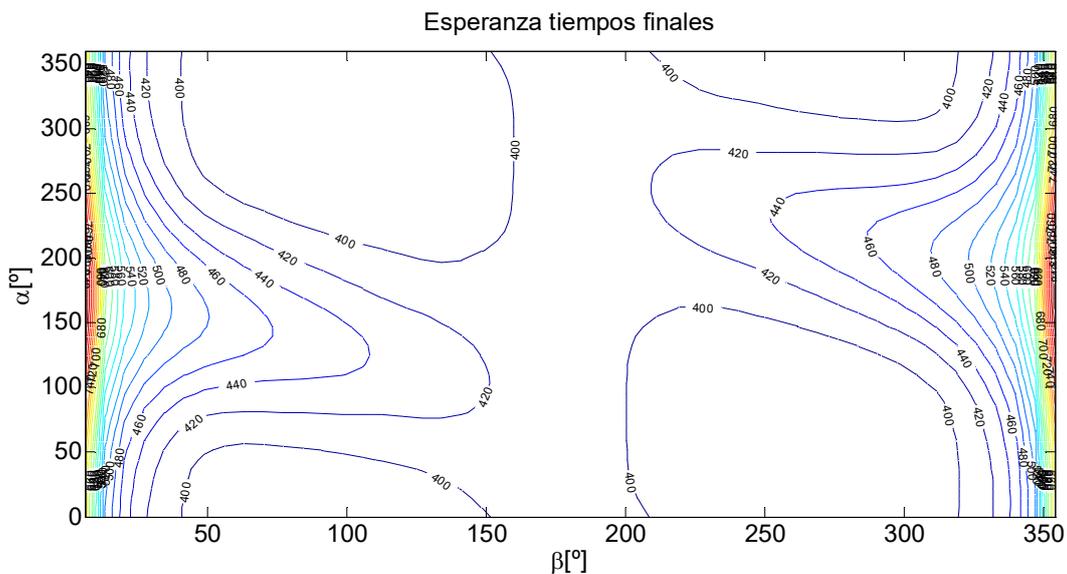
La representación de las esperanzas de los tiempos característicos del conflicto, de las desviaciones típicas de éstos y la probabilidad de conflicto se realizan mediante curvas de nivel. Las curvas de nivel se construyen a partir de la función *contour* del programa *Matlab*.

En la figura 5-2 se muestran las curvas de nivel relativas a la esperanza de los tiempos de inicio del conflicto. Los valores más elevados de la esperanza de los tiempos iniciales se alcanzan para aquellos valores de  $\beta$  comprendidos entre  $50^\circ$  y  $310^\circ$ .



**Figura 5-2.** Curvas de nivel esperanza tiempos iniciales del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^H$

En cuanto a los valores de la esperanza de los tiempos finales representados en la figura 5-3, destaca la posición de los valores más elevados que se obtienen en los extremos del intervalo de  $\beta$ , es decir, para valores de  $\beta$  menores que  $10^\circ$  y mayores que  $345^\circ$ .



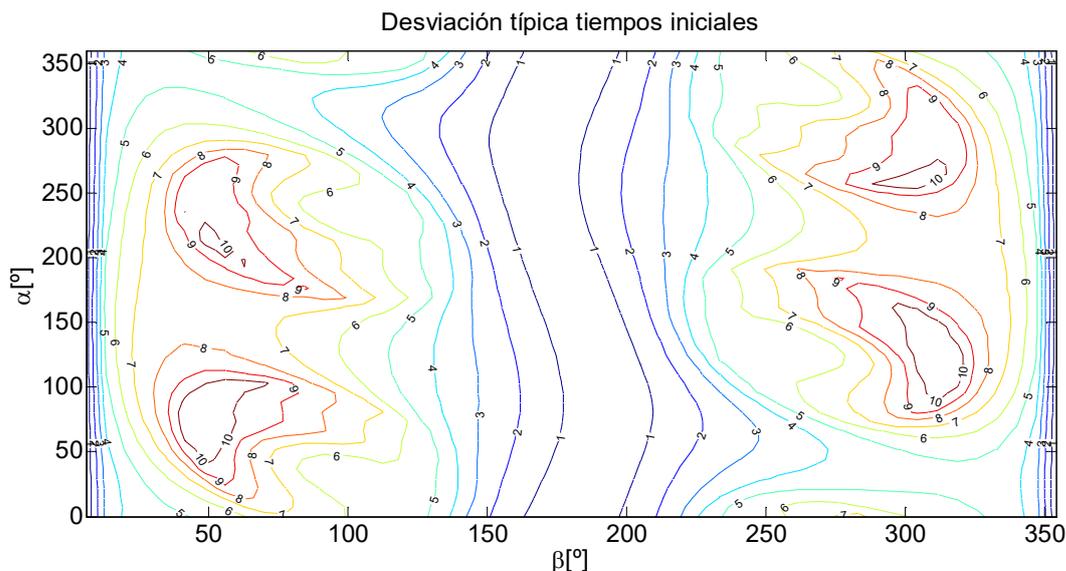
**Figura 5-3.** Curvas de nivel esperanza tiempos finales del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^H$



**Figura 5-4.** Curvas de nivel esperanza duración del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^H$

Las curvas de nivel de la esperanza de la duración del conflicto presentan sus valores más elevados en los extremos del intervalo de  $\beta$ . Para valores de  $\beta$  menores que  $50^\circ$  y mayores que  $300^\circ$  el valor de la esperanza de la duración del conflicto permanece constante.

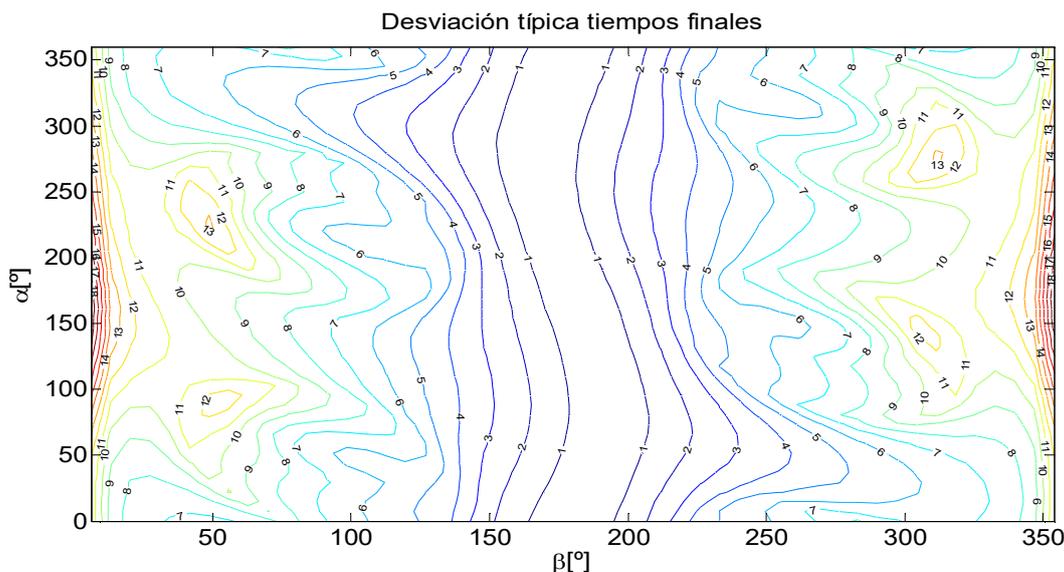
Los instantes de tiempo en los que comienza y finaliza el conflicto dependen del viento que afecte a las aeronaves, ya que se encuentran determinados por  $t_-^H$  y  $t_+^H$ . Estas variaciones producen que las desviaciones típicas de dichos instantes sean distintas de cero como pueden verse en las figuras 5-5 y 5-6.



**Figura 5-5.** Curvas de nivel desviación típica de los tiempos iniciales para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^H$

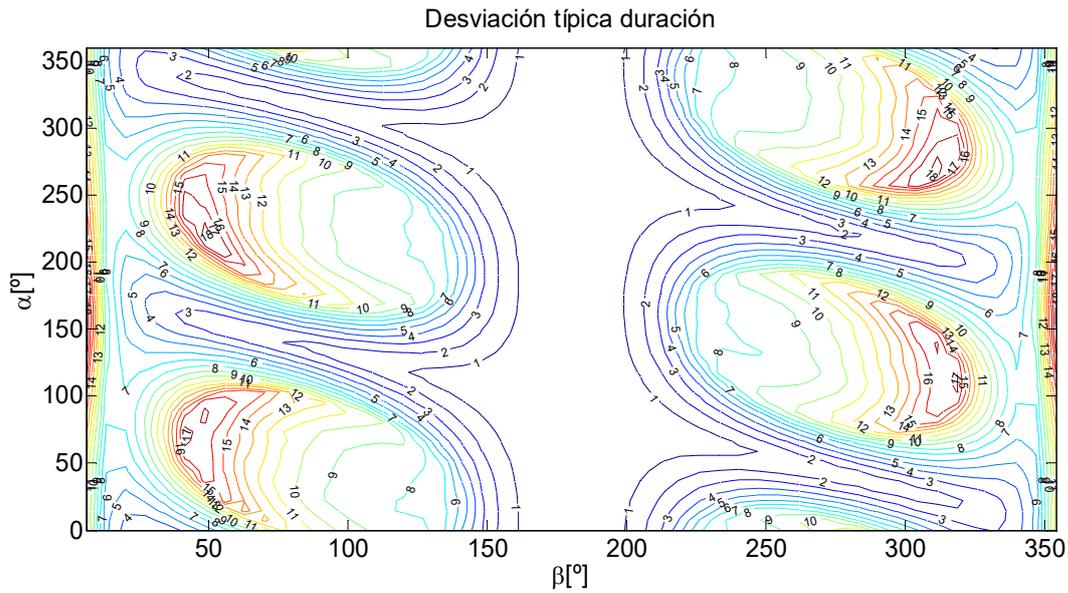
Los valores más elevados de la desviación típica de los tiempos iniciales representados en la figura 5-5 se encuentran alrededor de  $\beta = 50^\circ$  y  $\beta = 310^\circ$ . La desviación típica es prácticamente nula en el entorno de  $\beta = 175^\circ$  y para aquellos valores más próximos a los extremos del intervalo, es decir, para  $\beta$  menores que  $10^\circ$  y mayores que  $340^\circ$ .

En la figura 5-6 se han representado las curvas de nivel de la desviación típica de los tiempos finales. En el entorno de  $\beta = 175^\circ$  se obtiene un valor prácticamente nulo, mientras que los valores más elevados se encuentran en los extremos del intervalo analizado, es decir, para  $\beta < 10^\circ$  y  $\beta > 345^\circ$ .



**Figura 5-6.** Curvas de nivel desviación típica de los tiempos finales para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^H$

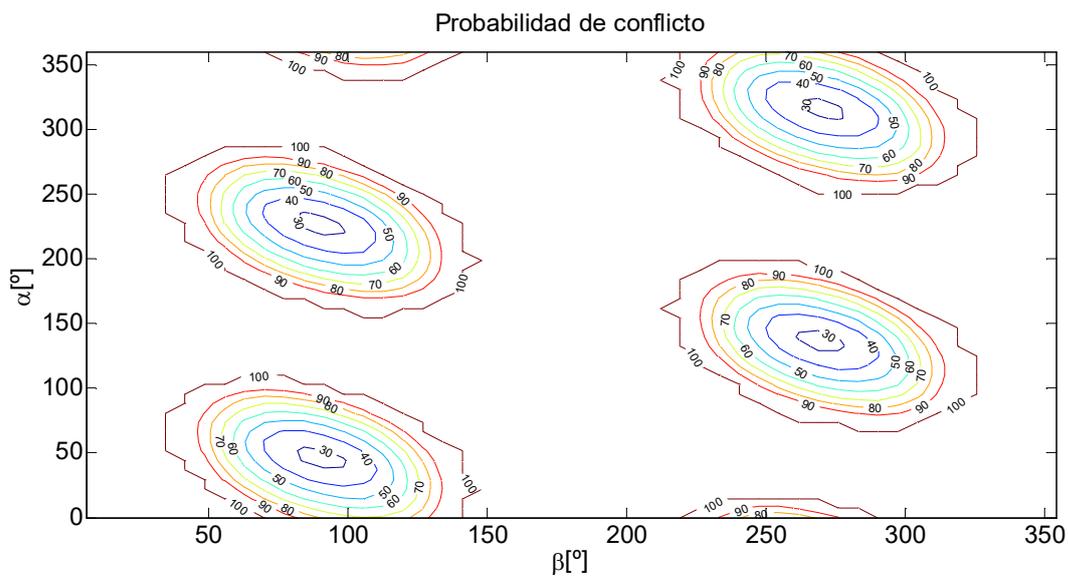
A continuación, en la figura 5-7 se han representado las curvas de nivel de la desviación típica de la duración del conflicto. Al ser los tiempos en los que comienza y finaliza el conflicto variables en función del viento que afecte a las aeronaves, la duración del mismo también lo es. Los valores máximos de la desviación de la duración del conflicto se encuentran en torno a  $\beta = 50^\circ$  y  $\beta = 310^\circ$ , y para aquellos valores de  $\beta$  menores que  $10^\circ$  y mayores que  $345^\circ$ . Estos valores de  $\beta$  coinciden con los valores más elevados de la desviación típica del tiempo de inicio y de finalización del conflicto respectivamente.



**Figura 5-7.** Curvas de nivel desviación típica de la duración del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^H$

La zona en torno a  $\beta = 175^\circ$  destaca por el valor mínimo de las desviaciones típicas de los tiempos iniciales, finales y de duración del conflicto, es decir, son prácticamente independientes de la incertidumbre del viento.

Finalmente, en la figura 5.8 se muestran las curvas de nivel que representan la probabilidad de la existencia de conflicto. Analizando las combinaciones de las parejas  $\alpha$  y  $\beta$  se puede estimar si se producirá o no conflicto. La probabilidad de conflicto se distribuye en forma de anillos, siendo las combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$  con menor probabilidad de conflicto las que se encuentran en el interior de los mismos. Las parejas que poseen una probabilidad del 100% de albergar conflicto son las que se encuentran en el exterior de los anillos. Destaca el mayor número de combinaciones posibles entre  $\alpha$  y  $\beta$  con una probabilidad de conflicto elevada.



**Figura 5-8.** Curvas de nivel probabilidad de conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^H$

## 5.4 Incertidumbre tiempo inicial del conflicto

El instante en el que finaliza el conflicto está definido por el tiempo en el que concluye la pérdida de separación mínima en el plano vertical ( $t_+ = t_+^V$ ), mientras que el tiempo de inicio del conflicto viene determinado por el comienzo de la pérdida de separación mínima en el plano horizontal ( $t_- = t_-^H$ ).

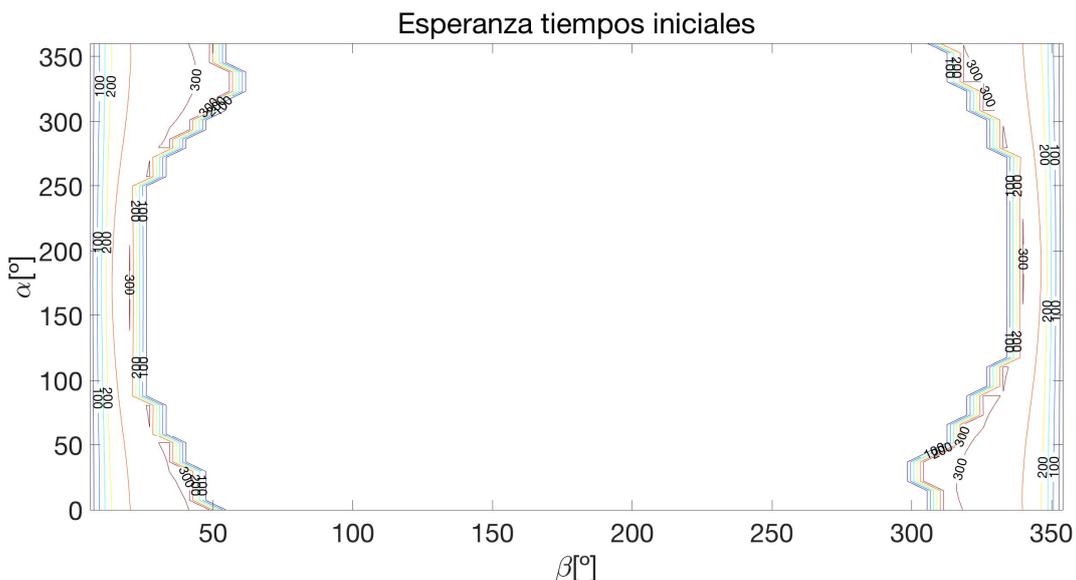
A continuación, se realiza un análisis de la esperanza de los tiempos característicos del conflicto, así como de las desviaciones típicas y de la probabilidad de la existencia de conflicto existente entre dos aeronaves de las que se conoce su altura de vuelo inicial, su velocidad aerodinámica verdadera y su velocidad de ascenso/descenso. El radio de la circunferencia sobre la que se encuentran situadas inicialmente es  $d = 50$  NM.

$$\text{Aeronave A} \rightarrow \begin{cases} h_{A,0} = 10000 \text{ m} \\ V_A = 240 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \frac{dh_A}{dt} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$\text{Aeronave B} \rightarrow \begin{cases} h_{B,0} = 10000 \text{ m} \\ V_B = 240 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \frac{dh_B}{dt} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

El análisis se lleva a cabo mediante el método de Monte Carlo. El número de vientos que hay que simular para conseguir un error en la aproximación de los tiempos característicos inferior a un 1% es  $N = 30000$  vientos.

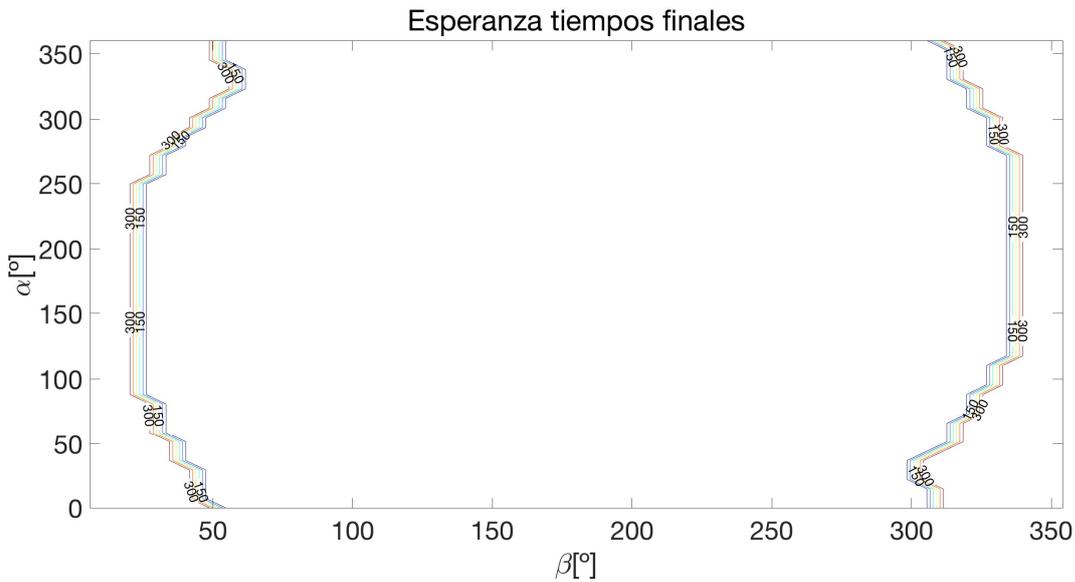
En primer lugar, se analiza la esperanza de los tiempos iniciales del conflicto para cada pareja de  $\alpha$  y  $\beta$ . Para valores de  $\beta$  comprendidos aproximadamente entre  $50^\circ$  y  $300^\circ$  la esperanza no presenta variaciones. Las parejas de  $\alpha$  y  $\beta$  que poseen mayor esperanza son aquellas que implican valores de  $\beta$  en torno a  $20^\circ$  y  $330^\circ$ , como muestra la figura 5-9.



**Figura 5-9.** Curvas de nivel de la esperanza de los tiempos iniciales para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^V$

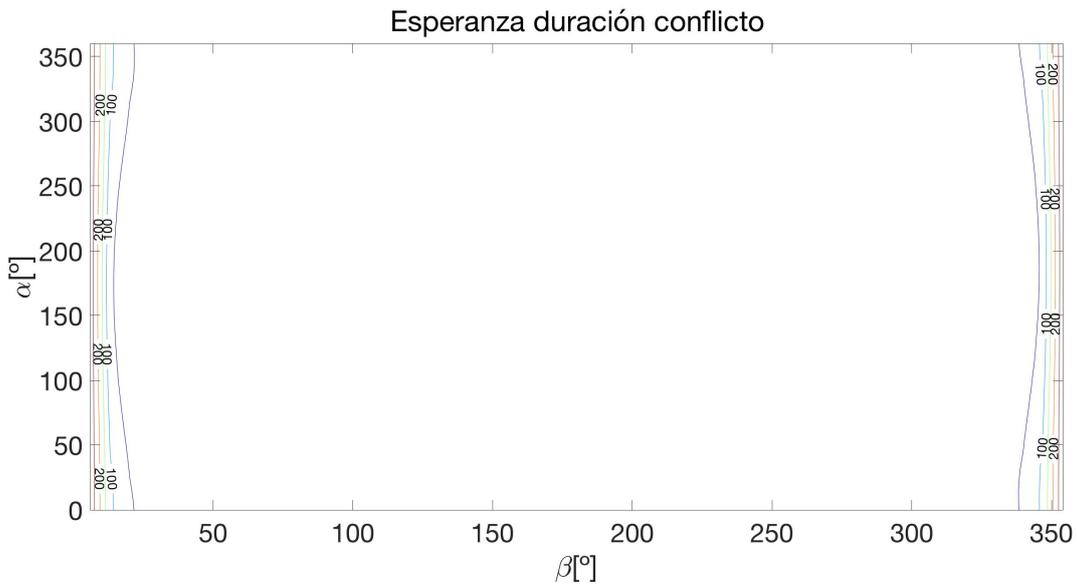
Al introducir una pequeña velocidad de ascenso a la aeronave A ( $\frac{dh_A}{dt} = 1 \frac{m}{s}$ ), las curvas de nivel que representan la esperanza de los tiempos iniciales sufren un gran cambio con respecto a las obtenidas en la sección 5.3. Además, se observa que las curvas de nivel se han desplazado hacia los extremos del intervalo de  $\beta$ .

De la misma forma que sucede con la esperanza de los tiempos iniciales, al incorporar al análisis dicha velocidad de ascenso para la aeronave A, las curvas de nivel de la esperanza de los tiempos finales se desplazan hacia los extremos del intervalo de  $\beta$  y desaparecen las formas curvas. Los valores más bajos de la esperanza de los tiempos finales se encuentran en la zona central del intervalo, para valores de  $\beta$  mayores que  $50^\circ$  y menores que  $300^\circ$  aproximadamente, como puede verse en la figura 5-10.



**Figura 5-10.** Curvas de nivel de la esperanza de los tiempos finales para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^V$

Las curvas de nivel de la esperanza de la duración del conflicto se muestran en la figura 5-11, en ella se observa que los valores más elevados se encuentran en los extremos del intervalo.



**Figura 5-11.** Curvas de nivel esperanza de la duración del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^V$

Los valores más elevados de la desviación típica de los tiempos iniciales se encuentran alrededor de  $\beta = 15^\circ$  y  $\beta = 340^\circ$ , mientras que los valores menores de la desviación típica se encuentran en los extremos del intervalo de  $\beta$  y para valores de  $\beta \in [50, 300]$  aproximadamente, como se puede observar en la figura 5-12.



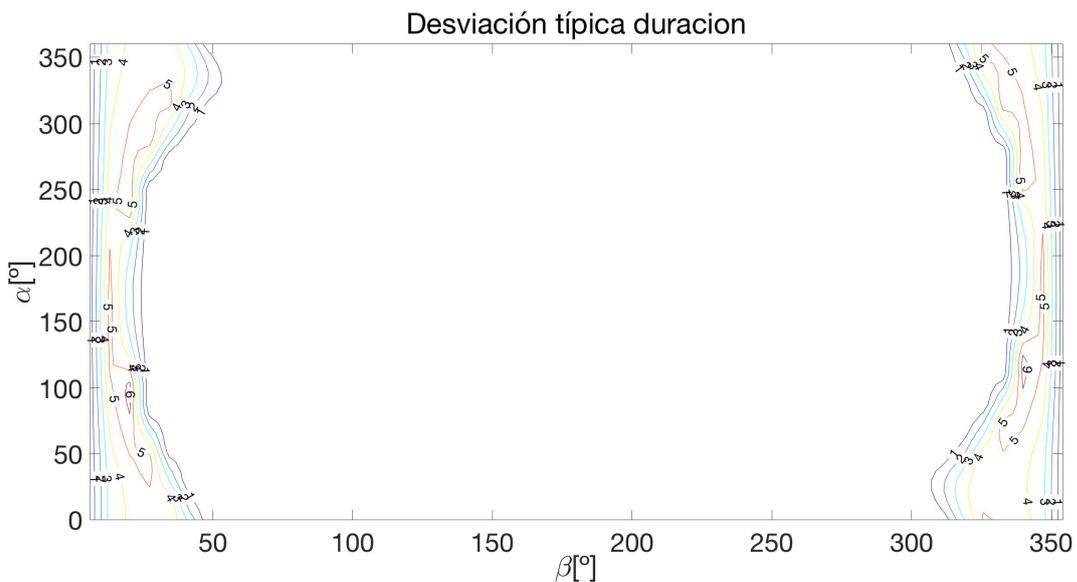
**Figura 5-12.** Curvas de nivel desviación típica de los tiempos iniciales para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^V$

La desviación típica de los tiempos finales es nula para cualquier pareja de  $\alpha$  y  $\beta$  que se considere, como puede verse en la figura 5-13. Esto se debe a que el tiempo final del conflicto viene determinado por el instante en el que finaliza la pérdida de separación en el plano vertical ( $t_+ = t_+^V$ ), cuyo valor es independiente del viento.



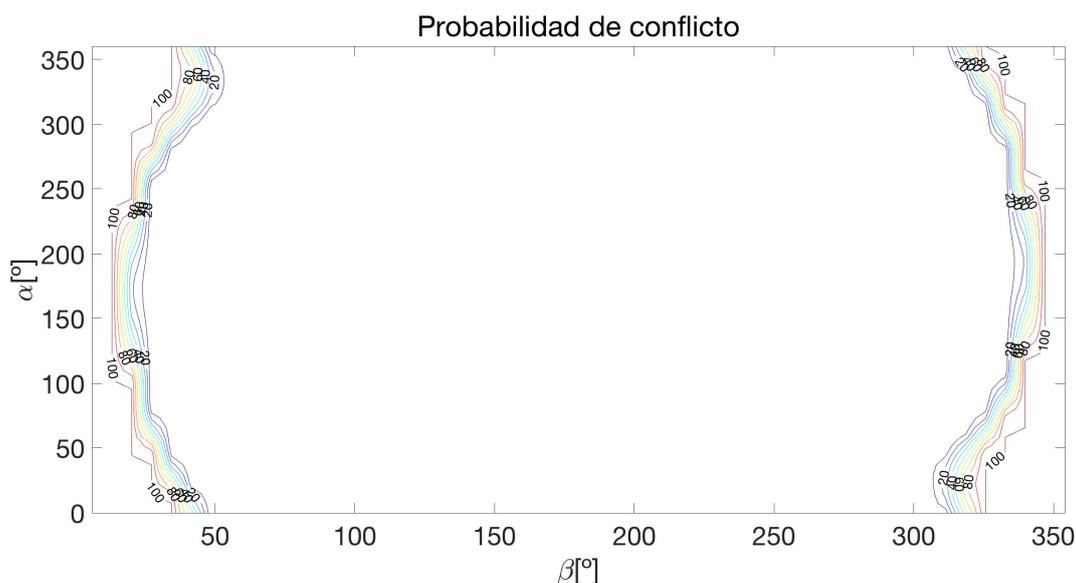
**Figura 5-13.** Curvas de nivel desviación típica de los tiempos finales para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^V$

La figura 5-14 muestra las curvas de nivel de la desviación típica de la duración del conflicto. Si se analizan dichas curvas se observa que son idénticas a las obtenidas para la desviación típica de los tiempos iniciales. Ambas curvas de nivel son iguales al ser la desviación típica de los tiempos finales es nula.



**Figura 5-14.** Curvas de nivel desviación típica de la duración del conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^V$

Las curvas de nivel de la probabilidad de conflicto en esta ocasión son muy diferentes a las obtenidas en la sección 5.3. Al tener la aeronave A una pequeña velocidad de ascenso, las curvas de nivel ya no se distribuyen en forma de anillos como puede verse en la figura 5-15. Analizando las parejas de  $\alpha$  y  $\beta$  se puede estimar si se producirá o no conflicto, los valores de  $\beta$  que poseen una probabilidad del 100% de albergar conflicto se encuentran en los extremos del intervalo, mientras aquellas parejas de  $\alpha$  y  $\beta$  que poseen menor probabilidad de conflicto son las que implican valores de  $\beta$  mayores que  $50^\circ$  y menores que  $300^\circ$  aproximadamente. En este caso, las combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$  que poseen escasa probabilidad de albergar conflicto son mucho mayores que aquellas que poseen una probabilidad del 100%, de forma opuesta a lo observado en la figura 5-8.



**Figura 5-15.** Curvas de nivel probabilidad de conflicto para 30000 vientos aleatorios en función de  $\alpha$  y  $\beta$  siendo  $t_- = t_-^H$  y  $t_+ = t_+^V$

La variación más significativa de las curvas de nivel que se produce al incorporar una pequeña velocidad de ascenso a una de las aeronaves se encuentra en las curvas de nivel que representan la probabilidad de la existencia de conflicto, donde desaparecen las nubes de anillos y se tiene un mayor número de combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$  con escasa probabilidad de conflicto. Además, destacan los valores de las esperanzas, las desviaciones típicas y la probabilidad de conflicto en los valores centrales del intervalo de  $\beta$ , puesto que no sufren variaciones.

Si se analizase la situación opuesta, es decir, aquella en la cual el tiempo de inicio del conflicto estuviese dominado por la pérdida de separación mínima en el plano vertical ( $t_- = t_-^V$ ) y el tiempo de finalización estuviese marcado por el fin de la pérdida de separación mínima en el plano horizontal ( $t_+ = t_+^H$ ), la desviación típica del tiempo de comienzo del conflicto valdría cero, al no depender  $t_-$  de los vientos que afecten a las aeronaves, por el contrario, el tiempo de finalización del conflicto sí se vería afectado por los diferentes vientos al depender de  $t_+^H$ , de modo que la desviación típica de los tiempos finales del conflicto tomaría valores distintos de cero. La representación de la desviación típica de la duración del conflicto coincidiría con la de la desviación típica de los tiempos finales.



## 6 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

---

**P**ara finalizar se recopilan los resultados obtenidos y aquellos aspectos destacados que se desprenden del estudio realizado. En este Trabajo Fin de Grado se han analizado las trayectorias rectilíneas de ascenso/descenso de dos aeronaves en presencia de vientos horizontales inciertos para estudiar la existencia de conflicto.

En primer lugar, se han desarrollado dos métodos para la detección de la pérdida de separación entre las aeronaves, el método numérico y el método analítico. El método numérico se basa en una discretización del tiempo de duración del estudio y calcula para cada instante de tiempo específico la posición de cada aeronave dando lugar a una trayectoria formada por dichos puntos, destaca por su facilidad de implementación, aunque los resultados que proporciona no son exactos. El método analítico proporciona los resultados exactos obtenidos de la resolución de las ecuaciones de la mecánica del vuelo aplicando las hipótesis particulares del problema, aunque su implementación es más compleja. El desarrollo de ambos métodos permite comprobar la fiabilidad de los resultados obtenidos, así como la correcta implementación de ambos. Se observa que al emplear un valor adecuado del paso en el método numérico se obtienen resultados de gran fiabilidad, sin embargo, dicho aumento del paso provoca un incremento del coste operacional. Debido a la exactitud de los resultados, el método que se va a emplear a lo largo del proyecto es el método analítico.

Destaca la influencia del viento en la pérdida de separación entre las aeronaves. Pueden darse diversas situaciones dependiendo de si los tiempos característicos que definen el conflicto coinciden con los instantes que delimitan la pérdida de separación mínima en el plano vertical o no. Si los tiempos en los que comienza o finaliza el conflicto vienen determinados por aquellos que delimitan la pérdida de separación vertical, éstos toman un valor constante, con independencia de los vientos que afecten a las aeronaves. En cambio, si el conflicto viene dominado por los instantes que determinan la pérdida de separación mínima en el plano horizontal se comprueba que dichos valores varían en función de los vientos que afecten a las aeronaves.

Para extender el análisis a vientos aleatorios se emplea el método de Monte Carlo. Para  $N$  vientos aleatorios se analiza la probabilidad de la existencia de conflicto en cada punto de la trayectoria de las aeronaves y se observa que aquellos puntos que poseen una probabilidad más elevada se encuentran siempre confinados entre otros con menor probabilidad.

Además, se han analizado los tiempos medios de inicio, fin y duración de los conflictos con sus correspondientes varianzas. A partir de los valores obtenidos de las varianzas se verifica la influencia nula del viento en aquellos tiempos en los que el inicio o el final del conflicto coincide con los instantes que determinan la pérdida de separación mínima en el plano vertical. La varianza de los tiempos representativos del conflicto toma valores distintos de cero en aquellos casos en los que coincide con el inicio o final de la pérdida de separación en el plano horizontal. Los resultados obtenidos para  $N$  vientos aleatorios son coherentes con los obtenidos anteriormente para vientos concretos y se han representado mediante histogramas.

Mediante la representación de los histogramas, se observa cómo afecta la incertidumbre del viento a los tiempos característicos del conflicto. Si estos tiempos coinciden con los que dominan la pérdida de separación mínima en el plano vertical presentan un valor constante, sin embargo, si los tiempos característicos del conflicto coinciden con los que dominan la pérdida de separación en el plano horizontal se obtendrá un conjunto de valores próximos al valor medio obtenido. Además, se ha comprobado el efecto que produce la proximidad entre los instantes que determinan la pérdida de separación en el plano vertical y horizontal. Al ser estos instantes muy próximos entre sí, los tiempos característicos del conflicto vendrán en algunas ocasiones dominados por el plano vertical y en otras por el plano horizontal dependiendo del viento que afecte a las aeronaves. En estos casos,

destaca un valor concreto para el cual la frecuencia es mucho más elevada que para el resto de valores. Este incremento de frecuencia es fruto del valor constante que obtienen los tiempos que delimitan el conflicto cuando coinciden con los tiempos característicos de la pérdida de separación del plano vertical. En cambio, cuando éstos coinciden con los instantes que determinan la pérdida de separación en el plano horizontal los valores obtenidos serán diferentes en función del viento, provocando un conjunto de valores con una frecuencia mucho menor.

La intensidad de los conflictos, es decir, la distancia mínima entre las aeronaves en el plano horizontal durante el conflicto depende, en general, del viento por el que se ven afectas. Es necesario resaltar que aunque el viento sea incierto es posible que algunas propiedades del conflicto no lo sean.

Por último, se generaliza el estudio para diferentes posiciones relativas entre las aeronaves analizando un conjunto de trayectorias fruto de la combinación del curso relativo de las aeronaves ( $\beta$ ) y de la dirección relativa del viento ( $\alpha$ ). El estudio se realiza aplicando nuevamente el método de Monte Carlo, pero en esta ocasión los resultados obtenidos se representan mediante curvas de nivel, se calculan las curvas de nivel correspondientes a las esperanzas y las desviaciones típicas de los tiempos característicos del conflicto, así como las de la probabilidad de la existencia de conflicto. Se parte de un caso concreto en el que las aeronaves presentan una velocidad de ascenso/descenso nula y, los tiempos de inicio y finalización del conflicto dependen de los tiempos característicos de la pérdida de separación en el plano horizontal, es decir, varían en función del viento. Las curvas de nivel obtenidas para la probabilidad de conflicto se distribuyen formando nubes de anillos, mediante el análisis de las parejas de  $\alpha$  y  $\beta$  se puede prever si se producirá o no conflicto, destaca el mayor número de combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$  que poseen una probabilidad elevada de conflicto. Además se ha estudiado otro caso particular en el cual una de las aeronaves presenta una pequeña velocidad de ascenso. Los resultados obtenidos se alejan notablemente de los obtenidos cuando ambas aeronaves tenían velocidad de ascenso/descenso nula. Las curvas de nivel que representan, por ejemplo, la probabilidad de conflicto ya no se distribuyen en forma de nubes de anillos, y se tiene un mayor número de combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$  con escasa probabilidad de conflicto. La desviación típica de los tiempos finales es nula para todas las combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$  debido al dominio del plano vertical en el instante de finalización del conflicto. Por tanto, las curvas de nivel que ilustran la desviación típica de los tiempos de inicio del conflicto coinciden con aquellas que muestran la duración del mismo. Si se analizase un caso en el que el tiempo de inicio del conflicto se encontrara dominado por la pérdida de separación en el plano vertical, las curvas de nivel de la desviación típica del tiempo inicial valdrían cero, al ser el tiempo de inicio invariable con el viento.

Existen varias líneas de desarrollo en cuanto a posibles ampliaciones futuras o nuevos estudios:

En primer lugar, se podría ampliar el estudio realizado analizando la existencia de conflictos en trayectorias de ascenso/descenso de dos aeronaves que realizan virajes en presencia de vientos inciertos horizontales.

Por otro lado, también se podría incorporar al proyecto el análisis de la existencia de conflictos en presencia de vientos horizontales inciertos para dos aeronaves que se encuentran en fase de despegue y/o aterrizaje.

Finalmente, sería de gran interés realizar un estudio que determinase la existencia de conflictos en las trayectorias de ascenso/descenso de dos aeronaves en presencia de vientos inciertos con componente vertical. La componente vertical del viento no ha sido considerada en este proyecto y, en caso de introducirla, las conclusiones obtenidas se verían modificadas.





## REFERENCIAS

---

- [1] A. Valenzuela, Gestión del Tráfico Aéreo, 2016.
- [2] D. Rivas, Mecánica del Vuelo y Operaciones de Vuelo.
- [3] C. Bayer, H. Hoel, E. von Schwerin, and R. Tempone, "On Nonasymptotic Optimal Stopping Criteria in Monte Carlo Simulations", SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 36, No.2, pp. A869-A885, 2014.
- [4] E. Hernández, A. Valenzuela, and D. Rivas, "Probabilistic Aircraft Conflict Detection Considering Wind Forecast Uncertainty", Sevilla, En preparación.