

APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PLACAS CON CONDICIONES DE APOYO ESPECIALES

S. de León y F. París

E.T.S. Ingenieros Industriales. Sevilla

Resumen. - En este artículo se presenta la aplicación del M.E.C. a placas con ciertas condiciones de apoyo que no se tratan habitualmente en los textos clásicos, pero que se encuentran con mucha frecuencia en la ingeniería mecánica y civil. Después de la formulación integral del problema, basada en la descomposición de la ecuación de campo en dos ecuaciones armónicas y la aplicación de un teorema de reciprocidad, se estudiará, en primer lugar, la presencia de apoyos rígidos o elásticos situados en el interior del dominio, y en segundo lugar, la existencia de rigidizadores en el contorno de la placa. Se analizarán dos ejemplos para ilustrar la eficiencia del método.

1. INTRODUCCION

La aplicación generalizada del Método de los Elementos de Contorno a problemas de flexión de placas delgadas se inicia con los trabajos de Bezzine [1] y Stern [2]. Para evitar los problemas de singularidades que se plantean en la obtención de una ecuación integral, mediante la derivada direccional de la que resulta de aplicar un teorema de reciprocidad, Katayama et al. [3] proponen un planteamiento alternativo usando la analogía existente entre el problema de flexión de placas y un problema de elasticidad plana, después de la introducción de dos "funciones momento", que relacionan los momentos flectores y torsores y el cortante sobre la placa. Con este planteamiento se pueden resolver placas de bordes empotrados y libres.

Una formulación alternativa para abordar el problema, basada en la descomposición de la ecuación biarmónica en dos ecuaciones armónicas, ha sido desarrollada por París y León [4] para el caso de placas simplemente apoyadas y extendida posteriormente [5] y [6] a otras condiciones de borde. De esta forma se evitan problemas de singularidades, puesto que las dos ecuaciones integrales se obtienen directamente de la aplicación de un teorema de reciprocidad.

El estudio de ciertos problemas no clásicos, como placas con apoyos en el interior del dominio, ha sido abordado por Bezzine [7], que propone una formulación mixta de contorno y de dominio. Este planteamiento parece adecuado si el número de elementos de contorno es pequeño en comparación con el número de apoyos internos, o bien cuando se tengan que resolver numerosos

problemas con las mismas condiciones de contorno, resultando muy costoso en otros casos, debido a la necesidad de discretizar el dominio, por un lado y a la inversión de una matriz de tamaño considerable, por otro.

En este artículo, se analizan dos tipos de condiciones de apoyo especiales, como son los apoyos internos y la presencia de rigidizadores en el contorno de la placa. La formulación sigue la línea de los trabajos anteriores de los mismos autores, descomponiendo la ecuación de campo en dos ecuaciones armónicas y expresando las condiciones de contorno en términos de las variables intermedias introducidas. El primer problema, se resolverá añadiendo un número de ecuaciones suplementarias igual al número de condiciones en el interior del dominio y el segundo, buscando una relación entre las condiciones de contorno naturales (M_n y V_n) y las esenciales (w y $\frac{\partial w}{\partial n}$), sobre el borde rigidizado, que se aplican luego de la forma desarrollada en [5] para los bordes libres.

2. FORMULACION INTEGRAL DEL PROBLEMA DE FLEXION DE PLACAS

La ecuación de campo que define el problema de flexión de placas delgadas, con las hipótesis de Kirchhoff, es

$$Dw_{,\alpha\alpha\beta\beta} = p \quad (1)$$

donde D es la rigidez a flexión, w la flecha en dirección transversal y p la carga que actúa sobre la placa.

Esta ecuación se puede formular, alternativamente, de la siguiente manera:

$$M_{,\alpha\alpha} = -p \quad (2)$$

$$Dw_{,\beta\beta} = -M \quad (3)$$

con

$$M = \frac{1}{1+\nu} (M_n + M_t) \quad (4)$$

Las ecuaciones (2) y (3), admiten la representación integral,

$$\begin{aligned} C(P) M(P) + \int_{\Gamma} M(Q) \frac{\partial \psi}{\partial n} (P, Q) ds(Q) - \\ - \int_{\Gamma} \frac{\partial M}{\partial n} (Q) \psi(P, Q) ds(Q) = \\ = -\alpha_j |C(P) \phi_j(P) + \\ + \int_{\Gamma} \phi_j(Q) \frac{\partial \psi}{\partial n} (P, Q) ds(Q) - \\ - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} (Q) \psi(P, Q) ds(Q) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C(P) w(P) + \int_{\Gamma} w(Q) \frac{\partial \psi}{\partial n} (P, Q) ds(Q) - \\ - \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} (Q) \psi(P, Q) ds(Q) = \\ = -\beta_j |C(P) \phi_j(P) + \\ + \int_{\Gamma} \phi_j(Q) \frac{\partial \psi}{\partial n} (P, Q) ds(Q) - \\ - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} (Q) \psi(P, Q) ds(Q) \end{aligned} \quad (6)$$

Si se sustituye el contorno continuo por -- uno discreto de N elementos, y se aproximan, de forma congruente, las variables definidas sobre el mismo, se obtiene

$$|H|\{M\} - |G|\{q^M\} = - |R|\{\alpha\} \quad (7)$$

$$|H|\{w\} - |G|\{q^W\} = - |R|\{\beta\} \quad (8)$$

con

$$|R| = |H|\{\phi\} - |G|\{q^{\phi}\} \quad (9)$$

Para una definición apropiada de los coeficientes $\{\beta\}$ se debe aplicar, en general, la ecuación (5) en una serie de puntos internos, -- con lo que se tiene:

$$\{M^I\} + |H^I|\{M\} - |G^I|\{q^M\} = - |R^I|\{\alpha\} \quad (10)$$

con

$$|R^I| = |H^I|\{\phi\} - |G^I|\{q^{\phi}\} \quad (11)$$

Para mayores detalles sobre la obtención de esta formulación integral y matricial, puede consultarse [5] y [6].

La aplicación de las condiciones de contorno habituales, sobre las ecuaciones (7), (8) y (10), permite establecer un sistema de ecuaciones lineales de cuya resolución se obtienen desplazamientos y esfuerzos en el contorno, en un problema clásico de flexión de placas.

Los desplazamientos en el interior del dominio se obtendrán aplicando la ecuación (6) con $C(P) = 1$, y los correspondientes esfuerzos, mediante derivación de las ecuaciones (5) o (6) -- en el punto fuente, como puede verse con detalle en [4].

3. PLACAS CON APOYOS EN EL INTERIOR DEL DOMINIO

Para una placa que tenga NA apoyos, situados en el interior del dominio, la ecuación diferencial de la deformada es

$$Dw_{,\alpha\alpha\beta\beta} = p - \sum_{\ell=1}^{NA} X_{\ell} \quad (12)$$

donde X_{ℓ} es la reacción, por unidad de superficie, en el apoyo ℓ .

Las ecuaciones matriciales que definen este problema, después de la formulación integral de las dos ecuaciones armónicas alternativas y de su discretización, son:

$$|H|\{M\} - |G|\{q^M\} = - |R|\{\alpha\} - |Q|\{X\} \quad (13)$$

$$|H|\{w\} - |G|\{q^W\} = - |R|\{\beta\} \quad (14)$$

$$\{M^I\} + |H^I|\{M\} - |G^I|\{q^M\} = - |R^I|\{\alpha\} - |Q^I|\{X\} \quad (15)$$

Un término genérico $Q_{I\ell}$, de la matriz $|Q|$, representa integraciones desde el punto I (Nodo del contorno o punto interno usado en la aproximación de la integral de dominio de M), sobre la superficie del apoyo ℓ . Es decir:

$$Q_{I\ell} = \int_{\Omega_{\ell}} \psi(I, \ell) d\Omega_{\ell} \quad (16)$$

Si la superficie del apoyo es pequeña en -- comparación con las dimensiones características de la placa, se puede hacer

$$Q_{I\ell} = \psi(I, \ell) \Omega_{\ell} \quad (17)$$

En otros casos, la expresión (16) se evalúa numérica o analíticamente.

La aplicación de las condiciones de contorno sobre las ecuaciones (13), (14) y (15) conduce a un sistema de ecuaciones lineales con más incógnitas que ecuaciones (las reacciones en -- los NA apoyos internos). Se necesitan por tanto NA ecuaciones adicionales, que se obtienen aplicando (6) en cada apoyo, e imponiendo la condición de flecha nula.

Si se trata de un apoyo elástico de rigidez K_{ℓ} , la reacción vendrá dada por

$$X_{\ell} = k_{\ell} w_{\ell} \quad (18)$$

y la incógnita será la flecha. De nuevo, se obtiene un sistema de igual número de ecuaciones que incógnitas, aplicando (6) en los NA apoyos.

4. PLACAS CON RIGIDIZADORES EN EL CONTORNO

Si un borde de una placa está rigidizado -- por una viga de rigidez a flexión EI, la primera condición de contorno se obtiene planteando el equilibrio de fuerzas en dirección transversal sobre la viga y teniendo en cuenta que la flecha de la placa en el borde es igual a la de la viga, como puede verse en [8].

El resultado final es:

$$V_n = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \quad (19)$$

Integrando la ecuación diferencial (19), y aplicando condiciones de contorno en los extremos de la viga, se obtiene una relación entre el -- cortante de Kirchoff y la flecha a lo largo del borde rigidizado (APENDICE I). Es decir:

$$V_n = B w \quad (20)$$

Si la viga tiene rigidez a torsión GJ y la placa gira solidariamente unida a ella, la segunda condición de contorno se obtiene planteando el equilibrio de momentos torsores sobre la viga -- [8].

De esta forma, resulta:

$$M_n = -GJ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \quad (21)$$

Integrando la ecuación (21) y aplicando condiciones de contorno en giro, en los extremos de la viga, se obtiene una relación entre el momento flector y el giro a lo largo del borde (APENDICE II).

Es decir:

$$M_n = C \frac{\partial w}{\partial n} \quad (22)$$

Si la rigidez a torsión de la viga es nula, o si la unión viga-placa no impide el giro libre, la segunda condición de contorno será:

$$M_n = 0$$

Las relaciones (20) y (22) permiten aplicar

las condiciones de contorno sobre el borde rigidizado:

$$M = C \frac{\partial w}{\partial n} - D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (23)$$

$$q^M = \frac{\partial M}{\partial n} = B w + D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \quad (24)$$

Para la obtención de las relaciones equivalentes a (23) y (24), en el caso de un borde libre, puede consultarse [5].

5. RESULTADOS

Se van a analizar dos ejemplos para corroborar la validez de la formulación propuesta, comparándose con la solución analítica cuando se disponga de ella o con los resultados numéricos de otros autores.

Ejemplo 1.

Se trata de estudiar una placa cuadrada empotrada en todo el contorno y con cuatro apoyos rígidos situados en el interior del dominio, sometida a una carga puntual en el centro, como se indica en la Fig. 1.

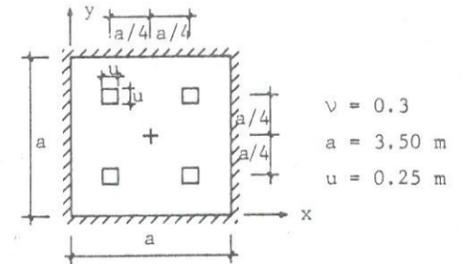


Fig. 1.- Placa cuadrada empotrada, con cuatro apoyos internos. Carga puntual en el centro.

Los resultados obtenidos usando dos discretizaciones de 32 y 64 elementos lineales, combinados con 49 puntos internos aproximantes, se comparan con los obtenidos por Bezzine [7], con una formulación mixta de contorno y de dominio, discretizando la superficie de un cuadrante de placa en 49 celdas cuadradas y una discretización de contorno de 12 elementos constantes en cada medio lado, haciendo uso de la simetría. -- Con este planteamiento se debe invertir una matriz de dimensión (96x96) y resolver un sistema de ecuaciones de dimensión (49x49). Con nuestra formulación se debe invertir una matriz (81x81) y resolver un sistema de ecuaciones (117x117), aunque con submatrices de gran tamaño nulas, en el caso de 32 elementos.

En las Figs. 2 y 3 se representan el momento flector (M_n) y el cortante (Q_n) sobre un medio lado, estando los resultados bastante de acuerdo, especialmente cuando usamos 64 elementos.

Los resultados obtenidos para la flecha so-

bre la línea media y sobre la diagonal se representan en la Fig. 4, que están bastante de acuerdo, ya en el caso de 32 elementos.

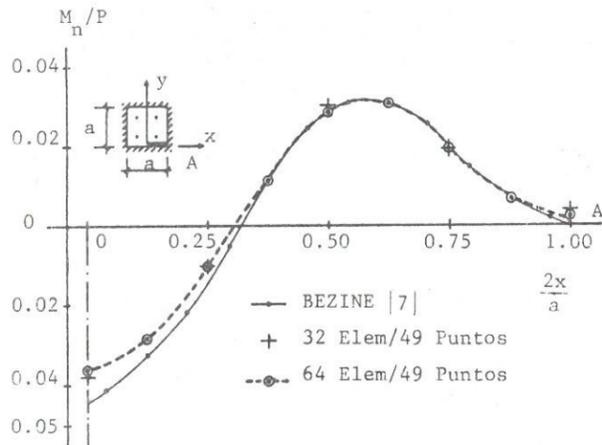


Fig. 2.- Momento flector (M_n) sobre el borde.

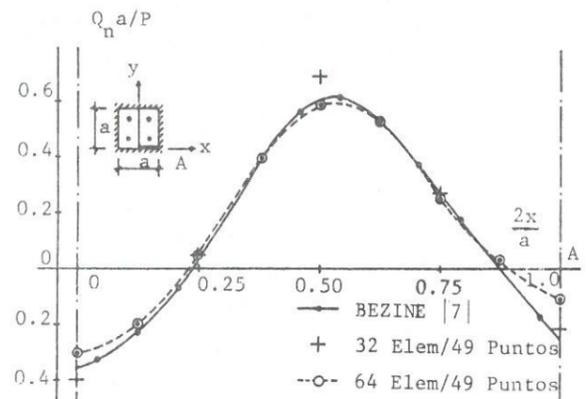


Fig. 3.- Esfuerzo cortante (Q_n) sobre el borde.

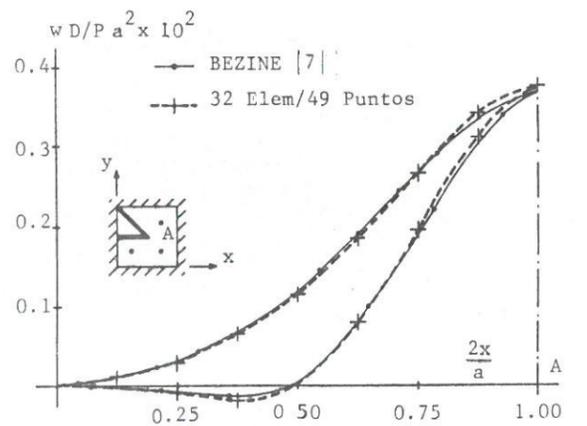


Fig. 4.- Flecha (w) sobre la línea media y sobre la diagonal.

Ejemplo 2

Se estudia una placa cuadrada simplemente apoyada en dos bordes opuestos y los otros dos rigidizados por dos vigas elásticas de igual rigidez a flexión (EI) y de rigidez a torsión nula, cargada uniformemente (Fig. 5).

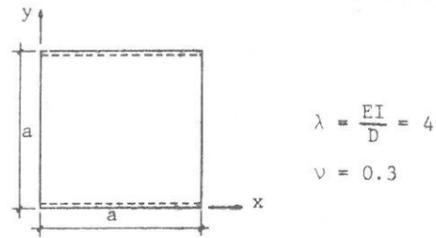


Fig. 5.- Placa cuadrada con dos bordes opuestos simplemente apoyados y los otros dos rigidizados. Carga uniforme.

Se presentan los resultados obtenidos con dos discretizaciones de contorno de 16 y 32 elementos, combinados con dos conjuntos de 9 y 49 puntos internos aproximantes, uniformemente distribuidos. La solución analítica, con que se compara, puede encontrarse en [9].

En la Fig. 6 se representa la flecha en el borde rigidizado, siendo los errores menores de un 6% en el caso de 32 elementos.

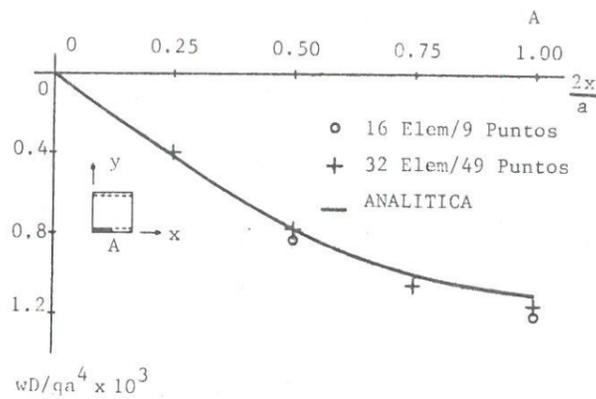


Fig. 6.- Flecha (w) a lo largo del borde rigidizado.

En las Figs. 7 y 8 se representan la flecha y los momentos flectores, a lo largo del eje de simetría perpendicular al rigidizador, siendo los resultados de una excelente precisión, ya en el caso de 16 elementos.

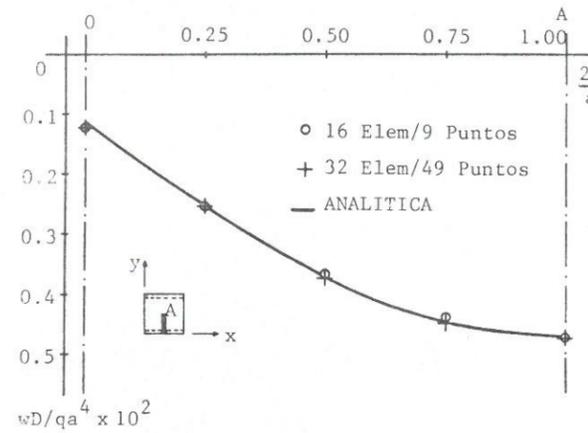


Fig. 7.- Flecha (w) a lo largo de la línea media.

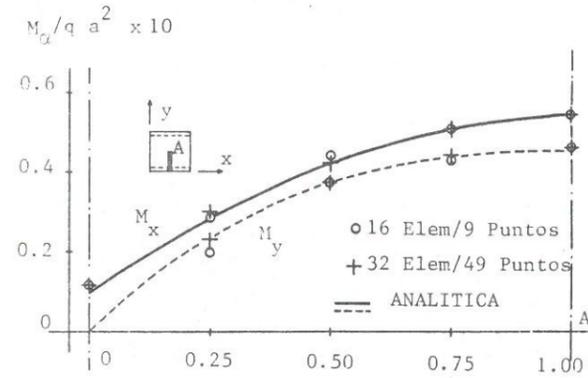


Fig. 8.- Momentos flectores (M_x y M_y) a lo largo de la línea media.

Finalmente, en la tabla 1 se dan los valores numéricos de la flecha y los flectores máximos en el centro de la placa, en el caso de 32 elementos.

Tabla 1.- Valores máximos de flecha y flectores en el centro de la placa.

	$w = \alpha \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_1 qa^2$	$M_y = \beta_2 qa^2$
	α	β_1	β_2
ANALITICA	0.00472	0.0528	0.0447
32 Element.	0.00475	0.0538	0.0463
ERROR %	0.64	1.89	3.58

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado la aplicación del Método de los Elementos de Contorno al análisis de placas delgadas con ciertas condiciones de apoyo especiales, como son la presencia de apoyos situados en el interior del dominio y de rigidiza-

dores en el contorno.

Los resultados numéricos obtenidos avalan la validez de la formulación, que permite analizar un gran número de problemas de la ingeniería mecánica y civil, como pueden ser el caso de cimentaciones de máquinas que se apoyan elásticamente, o el caso de forjados que se apoyan sobre columnas y/o vigas elásticas.

Respecto a las formulaciones integrales propuestas por otros autores para tratar el problema de apoyos internos (no se conocen trabajos previos orientados a estudiar placas con rigidizadores), el planteamiento propuesto presenta un coste numérico equivalente, para problemas de la naturaleza del ejemplo analizado, pese a no haber hecho uso de la simetría. La principal ventaja de la formulación propuesta es que se evita la discretización del dominio, lo que resalta eficacia a los planteamientos anteriores.

APENDICE I. RELACION CORTANTE-FLECHA SOBRE UN BORDE RIGIDIZADO

Mediante integraciones sucesivas de la ecuación (19), se obtiene:

$$V_n = -EI \frac{1}{\frac{t^4}{24} + D_1 \frac{t^3}{6} + D_2 \frac{t^2}{2} + D_3 t + D_4} w$$

Las constantes D_i ($i=1,4$), se determinarán aplicando condiciones de contorno en los extremos de la viga,

a) Viga doblemente apoyada.

Las condiciones de contorno serán:

$$\begin{aligned} z & \text{ eje vertical} \\ t & \text{ eje horizontal} \\ t=0 & \rightarrow w=0 \\ t=t_0 & \rightarrow w=0 \\ t=0 & \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ t=t_0 & \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

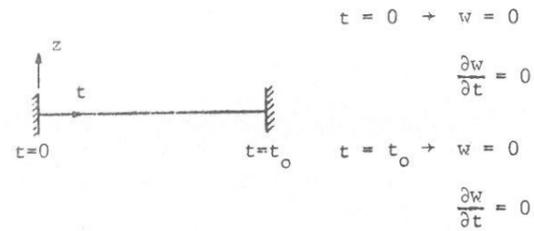
En este caso, se obtiene:

$$D_1 = -\frac{1}{2} t_0 \quad D_3 = \frac{t_0^3}{24}$$

$$D_2 = 0 \quad D_4 = 0$$

b) Viga doblemente empotrada.

Las condiciones de contorno serán:



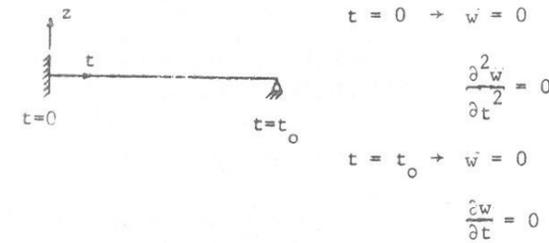
con esto se obtiene:

$$D_1 = \frac{-1}{2} t_0 \quad D_3 = 0$$

$$D_2 = \frac{t_0^3}{12} \quad D_4 = 0$$

c) Viga empotrada-apoyada,

Las condiciones de contorno serán:



El resultado que se obtiene es:

$$D_1 = \frac{-3}{8} t_0 \quad D_3 = \frac{t_0^3}{48}$$

$$D_2 = 0 \quad D_4 = 0$$

APENDICE II, RELACION MOMENTO FLECTOR-GIRO SOBRE UN BORDE RIGIDIZADO

Mediante integraciones sucesivas de la ecuación (21), se obtiene:

$$M_n = -GJ \frac{1}{\frac{t}{2} + D'_1 t + D'_2} \frac{\partial w}{\partial n}$$

Si admitimos que los extremos de la viga -- tienen impedido el giro, podemos determinar las constantes D'_1 y D'_2 , obteniéndose

$$D'_1 = \frac{-1}{2} t_0$$

$$D'_2 = 0$$

REFERENCIAS

1. Bezine, G.P. "Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary conditions". Mech. Res. comm, Vol. 5 (4) 197-206, 1978.

2. Stern, M. "A general boundary integral - formulation for the numerical solution - of plate bending problems", Int. J. Solids Structures, 15, pp. 769-782, 1979.

3. Katayama, T., Sekita, T. and Tai, H. "Bending Analysis of Perforated Plates - with Unsupported or Clamped Edges by B. E.M.", 5th International Conference on - B.E.M. Hiroshima, 1983.

4. París, F. and León, S. "Simply Supported Plates by B.I.E.M.", Int. J. for Num. - Meth. in Engng. (De próxima aparición).

5. París, F. y León, S. "Aplicación del Método de los Elementos de Contorno a placas con condiciones de contorno arbitrarias", Anales de Ingeniería Mecánica. - Año 2. N° 1, Diciembre, 1984.

6. París, F. and León, S. "An Alternative - Analysis of Thin Elastic Plates with any Boundary Conditions, using B.E.M.", VII International Conference on Boundary -- Element Methoda, Italy, 1985.

7. Bezine, G. "A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain". Int. J. Num. Meth. Engng. 17, 1647-1657, 1981.

8. Vinson, J.R. "Structural Mechanics the - Behavior of Plates and Shells". Wiley.

9. Timoshenko, S. y Woinowsky-Kriger, S. "Teoría de Placas y Láminas", Urmo, 1959.