UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

MODELOS HOMOLÓGICOS PEQUEÑOS DE DGA-ÁLGEBRAS CONMUTATIVAS

Memoria presentada por
Beatriz Silva Gallardo
para optar al grado de
Doctora en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

Vº Bº
del Director,

Fdo. Pedro Real Jurado

Sevilla, Septiembre de 1998

86 21

21 SET. 1998

El Jefe del Negociado de ...

a Cristóbal, mi padre, siempre presente en mi memoria.

Agradecimientos

Quiero destacar en esta sección a algunas personas sin cuya ayuda, en distintos aspectos, me hubiese sido imposible la realización de esta memoria.

Siempre estaré agradecida al profesor Pedro Real, director de esta tesis, por haber aceptado iniciarme y dirigirme en una rama de las matemáticas completamente desconocida para mí hasta entonces, por su entusiasmo y amor a su trabajo que contagia a todos los que trabajamos con él. Hago extensible este agradecimiento a mis compañeros y amigos del Departamento de Matemática Aplicada I destacando a su director Felipe Mateos con quien siempre he podido contar, así como a los restantes miembros de mi grupo de investigación, especialmente al profesor Andrés Armario con quien empecé mis andaduras por el Álgebra Homológica.

En otra línea totalmente distinta, pero no menos importante, quiero agradecer profundamente a mi madre su fortaleza, apoyo y confianza en mí.

Finalmente, no sólo agradecer, quiero pedir disculpas a mi marido, Blas, por el tiempo que no le he dedicado, volcándome en este trabajo, y a mis pequeños hijos, Javier y Carlos, por cambiar sus cálidas sonrisas por las frías teclas de un ordenador.

Resumen

En esta memoria proponemos un método para calcular la n-homología de una DGA-álgebra conmutativa, basado esencialmente en la maquinaria de perturbación homológica. En una primera etapa, establecemos un método de cálculo n-homológico en el caso conexo y libre, analizamos aspectos relacionados con la eficiencia de este algoritmo y en casos particulares realizamos cálculos explícitos. Posteriormente, planteamos y dicutimos el caso general.

Finalmente, usando nuevamente técnicas de perturbación, se derivan sendos métodos de cálculo de la homología de Hochschild y cíclica de DG-álgebras conmutativas conexas y libres.

Introducción

Indagando en la historia del Álgebra Homológica, que es donde se enmarca esta memoria, nos remontamos a los años cuarenta, donde encontramos los ya clásicos trabajos de Eilenberg y Mac Lane, Faddeev y Baer, entre otros.

De la mano de los dos primeros eminentes matemáticos puede decirse que nace el Álgebra Homológica, en sus artículos [13] y [14], fuentes de aún hoy frecuente consulta. Sin embargo, el modus operandi que se muestra en estos trabajos (esencialmente, trabajar con equivalencias de homotopía explícitas) fue relegado hacia finales de los años cincuenta, dado que de esa forma no se había podido diseñar métodos efectivos de cálculo de grupos de homología de unos espacios de extrema importancia en teoría de homotopía como son los espacios de Eilenberg-MacLane

$K(\pi, n)$, que dependen de un grupo abeliano π y de un entero positivo n. Estos espacios pueden considerarse espacios "primos" y cualquier espacio puede ser factorizado como producto cartesiano "torcido" de espacios de Eilenberg-MacLane.

Gracias al pujante impulso de Cartan, Serre y la escuela de Grothendieck, la comunidad matemática abandonó las técnicas hasta entonces desarrolladas y se consideraron métodos innovadores como las resoluciones, las sucesiones espectrales (por ejemplo, *sucesiones espectrales de Serre*) y las filtraciones. La transición es fácilmente apreciable en la monografía que escribieran Eilenberg y Cartan en 1956 ([12]), que podemos interpretar sin duda como la cesión del testigo en la carrera hacia el desarrollo fructífero del Álgebra Homológica.

A partir de ahí y hasta finales de la década pasada, destaca el uso frecuente de categorías trianguladas y derivadas, que permiten una aproximación a campos como la teoría de D-módulos y la teoría de representación.

Gracias a la aparición, o quizás sea más correcto decir recopilación, de la Teoría de Perturbación Homológica ([47], [10], [19], [21], [22], [27]), el problema de la computabilidad en el Álgebra Homológica ha cobrado un protagonismo principal. Gugenheim, Lambe y Stasheff en [21] y [22] (reexaminando el problema de perturbación homológica ya descritos por Wheisu Shih y Ronald Brown) han elaborado una teoría que complementa y enriquece los estudios hasta ahora realizados, reconociendo y otorgando una merecida importancia a los estudios llevados a cabo por Eilenberg y Mac Lane en el primer periodo. La mejora en las técnicas se consigue con la aparición de nuevos métodos (perturbaciones), y un estudio más detallado de los morfismos que intervienen en las equivalencias de homotopía definidas con anterioridad por estos matemáticos.

Una vez hecho estos comentarios de carácter histórico, introducimos de manera informal los elementos básicos propios del Álgebra Homológica Diferencial.

Los datos con los que trata el Álgebra Homológica Diferencial son, fundamentalmente, módulos graduados y un operador diferencial en ellos que preserva la suma y el producto por escalares, es decir, que es un morfismo de módulos, que disminuye el grado en una unidad y que verifica una condición de nilpotencia. Se llamarán DG-módulos.

En el caso de poseer dichos DG-módulos de una estructura multiplicativa, es decir estar dotados de un producto compatible con el grado y la diferencial, estaremos tratando con DG-álgebras (éstas nos interesarán particularmente). Las DG-álgebras que trataremos en esta memoria serán siempre DG-álgebras conmutativas y nos interesa el estudio de un invariante algebraico característico de estos objetos: su homología, como principal discriminante para su tipo de homotopía.

Debido a la condición de nilpotencia que verifica la diferencial de un DG-módulo, podemos hablar de su homología siguiendo su definición original, considerando los cocientes entre núcleos e imágenes de la diferencial en los grados correspondientes, pero a efectos de cálculo, la situación ideal sería que que el DG-módulo fuese libre y de tipo finito, pues en tal caso el operador diferencial admite una representación matricial y la homología del DG-módulo se calcularía de manera sencilla utilizando un clásico algoritmo matricial (descrito ya en los años treinta por Veblen [50]).

Ahora bien, ¿qué ocurre cuando no tengamos un DG-módulo de tipo finito? Es decir, cuando necesitemos calcular la homología de un DG-módulo que no tiene un número finito de generadores en cada grado, ¿cómo calculamos su homología?

Para solucionar este problema, hacemos uso de la Teoría de Perturbación Homológica, en la que el concepto fundamental es el de *contracción*, unos tipos de equivalencias de homotopía que se establecen entre un DG-módulo y otro "menor" (con menor número de elementos), de manera que la homología de ambos coincide. La técnica básica dentro de esta Teoría consiste en perturbar el DG-módulo mayor de una contracción (es decir, crear pequeñas alteraciones en la estructura diferencial de dicho DG-módulo) y establecer una nueva contracción para el DG-módulo perturbado.

Como ya habíamos adelantado, nos vamos a centrar en el estudio del caso concreto correspondiente a las DGA-álgebras conmutativas. Una DGA-álgebra A es una DG-álgebra dotada de una aumentación y coaumentación lo que, hablando grosso modo, no es más que establecer una "incrustación" adecuada del anillo de base en A_0. Nosotros hemos considerado aquí DGA-álgebras en vez de simples DG-álgebras porque nuestro trabajo se encuentra influenciado de manera implícita por la Topología Algebraica Simplicial, donde los conjuntos simpliciales que se manipulan son frecuentemente punteados, es decir, con un elemento distinguido en grado cero. Este elemento particular hace que cuando nos traslademos al Algebra dispongamos de una aumentación natural. Ahora bien, el estudio que hemos hecho aquí es válido para simples DG-álgebras. Una herramienta estándar para el cálculo homológico de estos objetos es la *construcción Bar*. La homología de una DGA-álgebra debe comprenderse en dos etapas (véase [36]): la primera es la 0-homología, donde consideramos la DGA-álgebra como un simple DGA-módulo y realizamos el cálculo de la homología de este; la segunda, la 1-homología, que no es más que la correspondiente homología de la construcción Bar asociada al álgebra: el producto del álgebra, que no intervenía en la homología del álgebra como DG-módulo, sí desempeña un papel fundamental en la diferencial de la construcción Bar y, por tanto, en la homología asociada a ésta. La propiedad de la conmutatividad lleva asociada dos particularidades importantes: la primera, es que la construcción bar de una DGA-álgebra conmutativa A es, a su vez, una DGA-álgebra conmutativa conexa; la segunda, y que se deriva de la primera, es que podemos hablar pués de la n-homología de A (siendo $n \geq 1$) como de la homología de la construcción bar iterada $\bar{B}^n(A)$.

Ahora bien, el número desorbitado de generadores que presenta la construcción Bar al aumentar paulatinamente la dimensión considerada, hace imposible un tratamiento de bajo coste computacional a la hora del cálculo de la 1-homología.

Para salvar estas deficiencias entra en juego la *Teoría de Perturbación Homológica*, en la que, como hemos dicho anteriormente, se establecen innovadores tratamientos para manipular contracciones.
Gracias a estas nuevas técnicas, es posible trabajar de manera muy simple en la computación de la homología de ciertas DGA-álgebras. Nos interesaremos por una clase de contracciones que presentan un buen comportamiento con respecto a las operaciones producto tensorial, composición y perturbación de contracciones. Estas contracciones son llamadas contracciones semicompletas y han sido estudiadas con detalle en [42].

En esta memoria trabajaremos en primer lugar con DGA-álgebras conmutativas libres y conexas, que llamaremos más abreviadamente *DGC-álgebras*, para después discutir el caso general.

Un primer resultado es la obtención de una contracción de álgebras semicompleta que va de la construcción Bar de una DGC-álgebra A de tipo finito (con un número finito de generadores en cada grado) a una DGC-álgebra de tipo finito con obstensiblemente, menor número de generadores que la primera (modelo homológico "pequeño" de A). Gracias a este resultado, la homología de DGC-álgebras de tipo finito se leen directamente de la de las DGC-algebras pequeñas. En otras palabras, hemos dado una solución positiva al problema de la computabilidad de la 1-homología de una DGC-álgebra, haciendo uso de la maquinaria de perturbación de [42]. Sin embargo, no es viable una implementación práctica del algoritmo, debido a la muy elevada complejidad que presenta en general. No obstante, en el caso de tratar una clase particular de DGA-álgebras podemos refinar este proceso algorítmico y reducir el cálculo homológico a la evaluación de simples "fórmulas" numéricas. Esto permitió una sencilla implementación en máquina informática para estos casos ([6]), lo que supuso un proyecto de fin de carrera (véase [7]) del cual fui codirectora.

A continuación, atacamos el cálculo de la n-homología de DGC-álgebras para $n > 1$, apoyandonos nuevamente en los resultados de [42]. Haciendo uso de argumentos de cambio de bases, podemos "controlar" el comportamiento n-homológico de estas DG-álgebras y dar un método de cálculo. Un caso concreto es tratado para dar una idea de la complejidad de este tema. A partir de los resultados obtenidos, se construyen por perturbación resoluciones pequeñas asociadas a las n-homologías de una DGC-álgebra con $n \geq 1$.

Comentamos posteriormente el caso general de DGA-álgebras conmutativas, sin imponer las hipótesis adicionales de ser libre ni ser conexa. Finalmente, planteamos una serie de cuestiones y problemas abiertos sobre el tema.

Finalmente, en este trabajo estudiamos otras homologías como son la homología de Hochschild y la homología cíclica de una DGC-álgebra de tipo finito.

El cálculo de la homología de Hochschild fue estudiado por Guccione y Guccione que establecieron en [18] fórmulas recursivas para determinar la diferencial de un modelo homológico pequeño para una DG-álgebra conmutativa. Damos aquí un aproximación alternativa en el marco de la Teoría de Perturbación Homológica. El hecho de que esta Teoría proporcione una solución algorítmica para la homología de Hochschild fue ya tratado por Lambe en [31], pero no se consideró la preservación de estructuras de álgebras. Aquí utilizamos de nuevo las técnicas de perturbación de álgebras de [42] para describir un método general que calcule dicha homología. Hay una diferencia básica entre el método propuesto aquí y el dado por Guccione-Guccione: aquí obtenemos más información homológica, es decir, damos explícitamente una equivalencia de homotopía; y esto nos permite usar inmediatamente nuestros resultados en este caso como punto de partida para obtener la homología cíclica, vía perturbación.

El desarrollo de la homología cíclica es relativamente reciente, siendo Loday uno de sus principales impulsores. Es en los últimos años cuando están apareciendo los textos relacionados con esta materia (véase [34], [35]). Los principales aspectos que pueden destacarse de la homología cíclica son los siguientes: En primer lugar, posee fuertes lazos de unión con la homología de Hochschild y con la cohomología de Rham. En segundo lugar, permite la computación de la homología de álgebras de Lie de matrices. Además, la homología cíclica puede ser vista como una "K-teoría algebraica aditiva". Por último, algunos problemas en Física Cuántica pueden ser formulados en términos de (co)homología cíclica.

A diferencia de la homología de Hochschild, el método de cálculo para la homología cíclica será extremadamente complicado ya que no podremos utilizar resultados de preservación de las estructuras multiplicativas. En esta memoria presentamos un caso particular de interés donde esta

Un posible camino para abordar el tan complicado caso general de la homología cíclica, es el uso de las λ-operaciones descritas por Loday en [35].

Mencionemos que todos los temas que aquí se tratan han sido ya anteriormente presentados en foros especializados en forma de comunicaciones en congresos tanto nacionales ([44], [5], [6] y [2]), como internacionales ([4], [1]). La comunicación [4] ha dado lugar al artículo [3] que se publicará en Contemporary Mathematics. Estos trabajos fueron motivados por el problema de la computabilidad de la homología de DGA-álgebras conmutativas, pues obtener resultados positivos en forma de algoritmos eficientes sobre esta problemática repercutiría no sólo en las áreas matemáticas afines al Álgebra Homológica y a la Topología Algebraica, sino también en campos dispares tales como la Física Cohomológica [49],la Cuantización de Sistemas Gauges ([25]) y el Cálculo Secundario ([51]).

Pasamos a describir el contenido por capítulos de la presente memoria.

En el primer capítulo, exponemos los conceptos básicos de los que haremos uso a lo largo de este trabajo. Destacamos conceptos claves como son el de DGA-álgebra y el de la construcción Bar de una dicha DG-álgebra.

El segundo capítulo está enteramente dedicado a la Teoría de Perturbación Homológica, pieza clave en el diseño de métodos de cálculo homológico. En primer lugar, se estudia en detalle el concepto de contracción para después, analizar la maquinaria de perturbación homológica, haciendo hincapié en las técnicas especializadas para DG-álgebras.

En el capítulo segundo, trabajando con DGC-álgebras, damos explícitamente una cadena de contracciones que permite calcular, en principio, la homología de cualquier DGA-álgebra de este tipo. Es decir, damos un método para la obtención de un modelo homológico pequeño para una DGC-álgebra de tipo finito. Asimismo, mostramos como caso particular una clase de DGC-álgebras para la cual obtenemos un algoritmo de cálculo de homología razonable. Subyace en todo este estudio la conocida "factorización" de toda DG-álgebra conmutativa en productos tensoriales torcidos de álgebras exteriores y polinomiales.

Por otra parte, garantizamos la existencia de un modelo homológico p-local (es decir, trabajando con el anillo de base $\mathbf{Z}$ localizado en un primo p) pequeño para la construcción Bar iterada de una DGC-álgebra de tipo finito. Obtenemos aquí un resultado muy técnico: controlamos la homología p-local de un producto tensorial torcido (PTT) de ℓ álgebras exteriores y polinomiales modificadas, garantizando la existencia de un modelo homológico que es un producto tensorial de PTTs de k álgebras exteriores y polinomiales modificadas, con $k \leq \ell$. También mostramos una familia de ejemplos donde la complejidad del proceso disminuye ostensiblemente.

Estos resultados permiten aventurar que podrían encontrarse refinamientos similares para el caso general de una DGA-álgebra conmutativa cualquiera. Esta es la línea de investigación que se nos presenta en un futuro inmediato.

Para finalizar, en el tercer capítulo, partiendo de los resultados obtenidos en el capítulo segundo, damos métodos de cálculo para la homología de Hochschild y cíclica de DGC-álgebras, quedando así dividido en dos partes fundamentales:

- La primera parte consta de dos secciones en las que se define el complejo de Hochschild para pasar después a describir nuestro método de cálculo para la homología correspondiente.

  Como resultado fundamental,podemos concluir que en el contexto conmutativo, la homología de Hochschild no aporta nada nuevo sin la comparamos con nuestra primera definición de 1-homología de una DGA-álgebra. A pesar de esto, nuestro método produce una contracción del complejo de Hochschild de una DG-álgebra conmutativa y un modelo homológico relativamente pequeño, que ser nuestro dato de partida para poder atacar, vía perturbación, el problema de la homología cíclica.

- La segunda parte está comprendida por tres secciones. En la primera describimos el concepto de complejo cíclico. En la segunda exponemos nuestro método para el cálculo de la homología cíclica en el que destacamos la dificultad con respecto al caso de la homología de Hochschild. En la última sección del capítulo establecemos un caso especial en el que se puede simplificar considerablemente la dificultad que se plantea en el caso general.

Contenido

1 Preliminares **13**

2 La maquinaria de perturbación homológica **37**

2.1 El concepto de contracción 39

2.2 Teoría de Perturbación Homológica. 45

3 Álgebra de n-homología de una DGA-álgebra conmutativa **51**

3.1 Preliminares. 54

3.2 Contracciones básicas 59

3.3 Computabilidad de la 1-homología de DGC-álgebras. 63

3.3.1 Un Caso concreto: la 1-homología de las DGC-álgebras $A^{s,(r_1,r_2,\dots,r_{n-1})}_{e_1,e_2,\dots,e_n}$ 69

3.4 Algoritmo de cálculo de la n-homología p-local de DGC-álgebras . . 75

3.4.1 Álgebra de n-homología p-local de una DGC-álgebra 76

3.4.2 Un caso concreto. Homología p-local de las álgebras $D^{s,(r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,e_2,\ldots,e_n}$ 88

3.5 El caso general 90

3.6 Cuestiones y problemas abiertos 91

4 Homología de Hochschild y cíclica de DGC-álgebras 93

4.1 Homología de Hochschild de DGC-álgebras. 96

4.1.1 Método de cálculo para la homología de Hochschild de una DGC-álgebra. 98

4.2 Homología cíclica de DGA-álgebras conmutativas. 102

4.2.1 Método de cálculo para la homología cíclica de DGC-álgebras. 103

4.2.2 Un caso especial. 105

Capítulo 1.

Preliminares

Capítulo 1.

Preliminares

A lo largo de esta sección vamos a recopilar definiciones y enunciados que nos permitan adentrarnos en el estudio de las contracciones y perturbaciones homológicas. Necesariamente, hemos de comenzar recordando nociones de la teoría algebraica de módulos; a fin de amenizar el contenido de este trabajo, obviaremos detallar algunos conceptos y demostraciones, ya clásicas y comúnmente conocidas. Todos estos resultados se pueden encontrar en los textos [12], [36], [29] y [52], entre otros.

En la teoría de módulos es indispensable fijar un anillo base; suele ser costumbre trabajar con un anillo conmutativo con elemento unidad distinto del elemento neutro (es decir, con $1 \neq 0$). En el desarrollo de nuestra memoria, asumimos este hecho y notamos por Λ a un tal anillo conmutativo con elemento unidad no nulo. En la práctica, este anillo será $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}$ localizado en un primo p.

El morfismo identidad de un módulo M se denotará por 1_M. Si $f : M \to M$ es un morfismo de módulos y n un entero positivo, la composición $f \circ \overset{n}{\cdots} \circ f$ será denotada por f^n.

Asimismo, a la hora de aligerar la notación, si f y g son dos morfismos que admiten ser compuestos, notaremos tal composición simplemente por fg.

Un Λ-*módulo libre* es un módulo constituido por cualquier suma directa de copias isomorfas del módulo Λ. Más aún: dado un conjunto C, se define el *módulo libre de base* C (que notamos por $\Lambda[C]$), como el módulo que está formado por todas las combinaciones lineales finitas de elementos de C, con coeficientes en Λ.

Dados dos módulos M y N, se denota por $M \otimes N$ al módulo *producto tensorial*, que consiste en tomar clases por D en el módulo libre de base $M \times N$; donde D es el submódulo generado por los elementos de la forma:

$$(m+m',n)-(m,n)-(m',n), \quad (m,n+n')-(m,n)-(m,n'),$$

$$(\lambda m,n)-\lambda(m,n), \quad (m,\lambda n)-\lambda(m,n),$$

con $\lambda \in \Lambda$, $m,m' \in M$ y $n,n' \in N$. La clase de (m,n) se denota por $m \otimes n$.

El producto tensorial es asociativo y conmuta con sumas directas, es decir,

$$(\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes M \simeq \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes M),$$

según la identificación $(\oplus_{i\in I} m_i) \otimes m = \oplus_{i\in I}(m_i \otimes m)$.

Si dotamos a un módulo de una cierta estructura multiplicativa obtenemos un álgebra. Más concretamente, un álgebra A es un módulo dotado de dos morfismos de módulos,

$$\mu : A \otimes A \to A \qquad \text{y} \qquad \eta : \Lambda \to A;$$

verificándose las siguientes igualdades:

a) $\mu(\mu \otimes 1_A) = \mu(1_A \otimes \mu)$ (denominada *propiedad asociativa*);

b) $\mu(\eta \otimes 1_A) = 1_A = \mu(1_A \otimes \eta)$ (η es una *unidad bilateral* para μ).

Análogamente, queda definido el concepto de *coálgebra*: una coálgebra A es un módulo dotado de los siguientes dos morfismos de módulos:

$$\Delta : A \to A \otimes A \qquad \text{y} \qquad \xi : A \to \Lambda;$$

verificándose las igualdades:

a) $(\Delta \otimes 1_A)\Delta = (1_A \otimes \Delta)\Delta$ (llamada *propiedad asociativa*);

b) $(\xi \otimes 1_A)\Delta = 1_A = (1_A \otimes \xi)\Delta$ (ξ es una *unidad bilateral* para Δ).

Intuitivamente, queda claro que un álgebra y una coálgebra no son más que módulos a los que se dota de una cierta estructura multiplicativa. De hecho, las aplicaciones μ y Δ se suelen denominar, en el campo de la teoría homológica, aplicaciones *producto* y *coproducto*, respectivamente, como veremos con posterioridad. Es obvio que un álgebra adquiere por sí misma, una estructura de anillo, con elemento unidad dado por $\theta = \eta(1)$, $1 \in \Lambda$.

A continuación, vamos a introducir las nociones y estructuras algebraicas básicas en las que se fundamentan los objetos de nuestro estudio (contracciones y perturbaciones homológicas). Enunciamos los conceptos de módulos y sus diferenciales, aumentaciones y coaumentaciones; para acabar definiendo los DGA-módulos, las DGA-álgebras y las DGA-coálgebras.

Un *módulo graduado* es un módulo M que admite una representación como suma directa, con índices en los enteros, de una familia de submódulos suyos, $\{M_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$; esto es:

$$\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} M_n = M.$$

Para denotar que M es un módulo graduado seguiremos una notación que haga referencia a la familia de submódulos que lo caracterizan: $M = \{M_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$.

Un elemento x de M se dice *homogéneo de grado* n cuando $x \in M_n$; en tal caso, escribiremos $|x| = n$.

Todos los módulos graduados que aparecen en esta memoria son nulos en grados negativos; es decir, $M_n = 0$ si $n < 0$.

Es obvio que el anillo Λ constituye, en sí mismo, un módulo graduado, siendo $\Lambda = \{\Lambda_n\}_{n\geq 0}$, con $\Lambda_0 = \Lambda$ y $\Lambda_n = 0$ para $n > 0$.

Un *morfismo de módulos graduados de grado* p es un morfismo $f : M \longrightarrow N$ entre módulos graduados de modo que $f(M_n) \subseteq N_{n+p}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$. Se denota como $|f| = p$.

Un módulo graduado M se dice *conexo* cuando $M_0 = \Lambda$; se dice *simplemente conexo* cuando es conexo y $M_1=0$.

Dado un módulo graduado conexo, podemos definir el módulo graduado $\bar{M}$, con $\bar{M}_n = M_n$ para $n > 1$ y $\bar{M}_0 = 0$.

Además, dado $f : M \longrightarrow N$ morfismo de módulos graduados conexos, se tiene un morfismo $\bar{f} : \bar{M} \longrightarrow \bar{N}$ naturalmente asociado a f, según la relación $\bar{f}(a) = f(a)$.

Dados M y N sendos módulos graduados, queda definido un nuevo módulo graduado, que notamos $M \otimes N$, estableciendo:

$$(M \otimes N)_n = \bigoplus_{p+q=n} (M_p \otimes N_q).$$

Dado un módulo graduado M, se tienen las identificaciones canónicas siguientes:

$$M \otimes \Lambda \cong M, \qquad \text{y} \qquad \Lambda \otimes M \cong M.$$

En adelante, entenderemos que $M^0 = \Lambda$ y $M^n = M \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes M$.

A lo largo de esta memoria, adoptaremos la *convención de Koszul* que define el producto tensorial de dos morfismos de módulos graduados de la forma natural, salvo un signo a determinar:

Convención de Koszul: Sean $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ dos morfismos de módulos graduados; definimos el morfismo de módulos graduados producto,

$$f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N',$$

siendo:

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y).$$

En particular, se tiene la siguiente fórmula de composición de productos tensoriales de morfismos:

$$(f \otimes g)(h \otimes k) = (-1)^{|g||h|}(fh \otimes gk).$$

Por tanto, si uno de los dos morfismos es de grado par, el signo desaparece.

A continuación, veamos una nota que ilustra el porqué de adoptar la convención de Koszul.

En adelante, asumiremos las notaciones siguientes: dado $f : M \to N$ morfismo de módulos graduados, notamos $f^{\otimes n}$ para $f \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes f$. Y si $f : M^i \to M$ es un morfismo de módulos graduados y n es un entero positivo, notamos por $f^{[n]}$ al morfismo

$$f^{[n]} = \sum_{j=0}^{n-i} 1_M^{\otimes j} \otimes f \otimes 1_M^{\otimes n-i-j}, \tag{1.1}$$

donde el morfismo 1_M^0 debe ser comprendido como 1_Λ. Asimismo, definimos el morfismo $f^{[]} : \bigoplus_{j\geq i} M^j \to \bigoplus_{k\geq 1} M^k$ como aquel que en grado n coincide con $f^{[n]}$:

$$f^{[]}|_{M_n} = f^{[n]}.$$

Nos introducimos, ahora, en el ámbito del Álgebra Diferencial.

Sea M un módulo graduado y $d_M : M \to M$ un morfismo de módulos graduados. Se dice que d_M es una *diferencial* de M cuando $|d_M| = -1$ y $d_M d_M = d_M^2 = 0$. En estas condiciones, M se denomina *DG-módulo* y se nota por (M, d_M).

Cuando, dado un DG-módulo (M, d_M), nos queramos referir sólo a la estructura de módulo graduado subyacente, nos serviremos de la notación $M^\#$.

En adelante, de no haber lugar a confusión, escribiremos d en lugar de d_M, y escribiremos d_n en lugar de $d|_{M_n}$.

Es claro que exigir la nilpotencia de orden 2 en la diferencial equivale a exigir que $\operatorname{Im} d_{n+1} \subset \operatorname{Ker} d_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; por tanto, tiene sentido plantear el siguiente concepto.

Sea (M, d) un DG-módulo. La *homología* de M, que se nota $H_*(M)$, queda definida como el módulo graduado $\{H_n(M)\}_{n\geq 1}$, donde:

$$H_n(M) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}.$$

Sea M un módulo graduado. Se define la *suspensión* (resp., *desuspensión*) de M

como el módulo graduado dado por:

$$S(M)_n = M_{n-1}$$

$$(\text{resp.,} \quad S^{-1}(M)_n = M_{n+1}).$$

Además, si M es un DG-módulo, entonces $S(M)$ y $S^{-1}(M)$ adquieren ambos la estructura de DG-módulos de forma natural, siendo sus diferenciales $-d_M$ en ambos casos. Dado $f : M \rightarrow N$ morfismo de módulos graduados, existe un morfismo de módulos graduados $S(f) : S(M) \rightarrow S(N)$, dado por $S(f)(a) = (-1)^{|a|} f(a)$.

Se dice que un morfismo $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ de módulos graduados de grado p es un *morfismo de DG-módulos de grado* p cuando se verifica que:

$$d_N f = (-1)^p f d_M.$$

Sea M un DG-módulo. Una *aumentación* (resp., *coaumentación*), es un morfismo de DG-módulos de grado cero:

$$\xi_M : M \longrightarrow \Lambda$$

$$(\text{resp.,} \ \eta_M : \Lambda \longrightarrow M).$$

Es decir, una aumentación no es más que un morfismo de módulos graduados de modo que $\xi_M(M_n) = 0$ cuando n es distinto de cero (debido a la graduación considerada en Λ); y, además, $\xi_M d_1 = 0$, siendo $d_1 : M_1 \rightarrow M_0$ la diferencial de M en grado 1. De forma análoga, queda caracterizada una coaumentación.

Un *DGA-módulo* (M, d_M, ξ_M, η_M) es un DG-módulo (M, d_M) dotado de una aumentación ξ_M y de una coaumentación η_M, de modo que se verifica que $\xi_M \eta_M = 1_\Lambda$. En definitiva, se trata de un DG-módulo en el cual se "incrusta de manera natural" el anillo base (vía ξ y η, respetando la estructura diferencial existente). Un

DGA-módulo M se dice que es *conexo* si como módulo graduado es conexo y su aumentación y coaumentación son ambas la identidad del anillo base Λ.

Con el propósito de facilitar la notación, nos referiremos a un DGA-módulo (M, d_M, ξ_M, η_M) dando simplemente su módulo graduado subyacente, M.

Dados dos DGA-módulos M y N, definimos el *DGA-módulo producto tensorial*, $M \otimes N$, como el DGA-módulo establecido por los datos:

$$d_{M\otimes N} = d_M \otimes 1_N + 1_M \otimes d_N,$$

$$\xi_{M\otimes N} = \xi_M \otimes \xi_N,$$

$$\eta_{M\otimes N} = \eta_M \otimes \eta_N.$$

Observamos que, para $M = N$, la convención de Koszul permite escribir la diferencial del producto tensorial como $d_{M\otimes M} = d_M^{[2]}$.

Sean M y N dos DGA-módulos. Se dice que un morfismo de DG-módulos $f : M \to N$ es un *morfismo de DGA-módulos* cuando se verifican las igualdades:

$$\xi_N f = \xi_M, \quad f\eta_M = \eta_N.$$

Cabe destacar por su importancia (ya que lo usaremos en posteriores definiciones), el morfismo de DGA-módulos que intercambia las componentes de un producto tensorial,

$$t : M \otimes N \to N \otimes M,$$

denotado a veces por $t_{M\otimes N}$, dado por:

$$t(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x.$$

En particular, dados dos morfismos $f : M \longrightarrow M$ y $g : N \longrightarrow N$ se tiene que

$$t(f \otimes g) = (-1)^{|f||g|}(g \otimes f)t$$

Por tanto, si f ó g es de grado cero, el signo desaparece.

Una *DGA-álgebra* (A, μ_A) (resp., *DGA-coálgebra* (C, Δ_C)), es un DGA-módulo A (resp., C), dotado de un morfismo de DGA-módulos de grado cero,

$$\mu_A : A \otimes A \longrightarrow A \quad \text{(producto)}$$

$$\text{(resp.,} \quad \Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C \quad \text{(coproducto)),}$$

verificando la *propiedad asociativa*:

$$\mu_A(1_A \otimes \mu_A) = \mu_A(\mu_A \otimes 1_A)$$

$$\text{(resp.,} \quad (\Delta_C \otimes 1_C)\Delta_C = (1_C \otimes \Delta_C)\Delta_C);$$

y para el cual, el morfismo η_A es *unidad bilateral*:

$$\mu_A(\eta_A \otimes 1_A) = \mu_A(1_A \otimes \eta_A) = 1_A$$

(resp., ξ_C es *unidad bilateral*:

$$(1_C \otimes \xi_C)\Delta_C = (\xi_C \otimes 1_C)\Delta_C = 1_C).$$

Se dice que es *conmutativa* (resp., *coconmutativa*), cuando:

$$\mu_A t = \mu_A$$

$$\text{(resp.,} \quad t\Delta_C = \Delta_C).$$

En definitiva, una DGA-álgebra (resp., DGA-coálgebra) consiste en un DGA-módulo que tiene, además, estructura de álgebra (resp., coálgebra). A partir de ahora, de no haber posibilidad de confusión, notaremos las DGA-álgebras y DGA-coálgebras por (A, μ_A) ó (C, Δ_C), respectivamente; o bien, por A ó C.

Sean (A, μ_A) y $(A', \mu_{A'})$ dos DGA-álgebras (resp., (C, Δ_C) y $(C', \Delta_{C'})$ dos DGA-coálgebras). Queda definida la DGA-álgebra producto tensorial $A \otimes A'$ (resp., la DGA-coálgebra producto tensorial $C \otimes C'$), añadiendo a la estructura de DGA-módulo del producto tensorial de ambas el morfismo de grado cero siguiente:

$$\mu_{A\otimes A'} = (\mu_A \otimes \mu_{A'})(1_A \otimes t \otimes 1_{A'})$$

$$(\text{resp., } \quad \Delta_{C\otimes C'} = (1_C \otimes t \otimes 1_{C'})(\Delta_C \otimes \Delta_{C'})).$$

Veamos un ejemplo concreto: el DGA-módulo tensorial.

Dado un DG-módulo graduado (M, d_M) podemos construir el DGA-módulo tensorial de M, que se nota $T(M)$, de la siguiente manera:

$$T(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M^n;$$

donde hemos de entender que $M^0 = \Lambda$ y $M^n = M\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes M$. Un elemento del tipo $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ se dice homogéneo cuando cada a_i es un elemento homogéneo de M. La *graduación tensorial de* $T(M)$, $|\ |_t$, viene dada por la expresión:

$$|a_1 \otimes \cdots \otimes a_n|_t = \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

La *diferencial tensorial*, $d_t : T(M) \longrightarrow T(M)$, viene dada, actuando sobre elementos homogéneos, por el morfismo $d^{[\,]}$ (definido en la página 20), siendo

$$(d_t)_n(a_1\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|[a_1|\cdots|a_{i-1}]|_t} a_1 \otimes \cdots \otimes d_M a_i \otimes \cdots \otimes a_n,$$

siguiendo la convención de Koszul.

La aumentación $\xi_{T(M)}$ y la coaumentación $\eta_{T(M)}$ son, respectivamente, la "proyección a" e "inclusión de" $M^0 = \Lambda$; así, abusando del lenguaje, se puede decir que ambos morfismos coinciden con 1_Λ.

En estas circunstancias, sobre $T(M)$ se pueden definir un producto y un coproducto, notados $\mu_{T(M)}$ y $\Delta_{T(M)}$, respectivamente.

1. El producto de $T(M)$ actúa por yuxtaposición sobre elementos homogéneos y se extiende por linealidad:

$$\mu_{T(M)}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes (a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+p})) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+p}.$$

2. El coproducto viene dado por la expresión:

$$\Delta_{T(M)}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n).$$

El producto y el coproducto son ambos morfismos de DGA-módulos asociativos y admiten por unidad a $\eta_{T(M)}$ y por counidad a $\xi_{T(M)}$, respectivamente; por lo que tenemos definidas en $T(M)$ sendas estructuras de DGA-álgebra y DGA-coálgebra. En este sentido, escribiremos $T^a(M)$ cuando consideremos el módulo tensorial como DGA-álgebra; y escribiremos $T^c(M)$ cuando lo consideremos como DGA-coálgebra.

Lema 1.0.1 *Todo morfismo de DG-módulos $f : M \to N$ induce un morfismo de DGA-módulos $T(f) : T(M) \to T(N)$, que actúa sobre elementos homogéneos del siguiente modo:*

$$T(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = f^{\otimes n}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n).$$

Se dice que $f : (A, \mu_A) \to (A', \mu_{A'})$ constituye un *morfismo de DGA-álgebras* (resp., $f : (C, \Delta_C) \to (C', \Delta_{C'})$ *morfismo de DGA-coálgebras*), cuando se trata de un morfismo de DGA-módulos verificando:

$$\mu_{A'}(f \otimes f) = f\mu_A \qquad (\text{resp.,} \quad (f \otimes f)\Delta_C = \Delta_{C'} f).$$

Definamos ahora lo que es una *derivación*.

Definición 1.0.2 Sean (A, μ_A) una DGA-álgebra (resp., (A, Δ_A) una DGA-coálgebra), y $\delta : A \to A$ un morfismo de módulos graduados de grado -1. Se dice que el morfismo δ es una *derivación* (resp., una *coderivación*), cuando verifica las condiciones siguientes:

$$\delta\mu_A = \mu_A(1 \otimes \delta + \delta \otimes 1), \qquad \xi_A\delta = 0$$

$$(\text{resp.,} \quad \Delta_A\delta = (1 \otimes \delta + \delta \otimes 1)\Delta_A, \qquad \xi_A\delta = 0).$$

De ser posible alguna confusión, especificaremos el producto (resp., coproducto), con respecto al cual es δ una derivación (resp., coderivación).

Existe una noción que aúna las estructuras de DGA-álgebra y DGA-coálgebra: es la denominada *DGA-álgebra de Hopf*. Este hecho tan singular permite definir este concepto desde tres puntos de vista:

1. Una DGA-álgebra de Hopf (A, μ_A, Δ_A) es una DGA-álgebra (A, μ_A) dotada de un homomorfismo de DGA-álgebras $\Delta_A : A \longrightarrow A \otimes A$, que la convierte en DGA-coálgebra.

2. Recíprocamente, una DGA-álgebra de Hopf es una DGA-coálgebra (A, Δ_A) provista de un homomorfismo de DGA-coálgebras $\mu_A : A \otimes A \longrightarrow A$, que la dota de estructura de DGA-álgebra.

3. A su vez, se puede definir como DGA-álgebra de Hopf a todo DG-módulo que tenga las estructuras de álgebra y coálgebra y cuyos morfismos producto y coproducto verifiquen la relación de compatibilidad siguiente:

$$\Delta_A \mu_A = (\mu_A \otimes \mu_A)(1 \otimes t \otimes 1)(\Delta_A \otimes \Delta_A). \qquad (1.2)$$

El DGA-módulo tensorial no es álgebra de Hopf, ya que

$$\Delta_{T(M)}\, \mu_{T(M)} \neq (\mu_{T(M)} \otimes \mu_{T(M)})(1 \otimes t \otimes 1)(\Delta_{T(M)} \otimes \Delta_{T(M)}).$$

Dependiendo del morfismo que asociemos al DGA-módulo $T(M)$, obtendremos el *álgebra* o la *coálgebra tensorial* de M, que notamos por $T^a(M)$ ó $T^c(M)$, respectivamente.

Ahora, vamos a introducir un nuevo concepto: *la construcción Bar asociada a una DGA-álgebra* dada. Veamos en qué consiste tal construcción.

Dada una DGA-álgebra A, se puede construir una DGA-coálgebra concreta asociada a A: la construcción Bar de A, que notaremos por $\bar{B}_*(A)$.

Esta construcción constituye una de las herramientas algebraicas estándares para definir coherentemente la homología de una DGA-álgebra (ver [36]): la homología natural de una DGA-álgebra considerada como DG-módulo se llama la 0-*homología* de A (ésta no se sirve de la estructura multiplicativa subyacente); en cambio, el producto de A interviene de forma explícita en la diferencial propia de $\bar{B}_*(A)$. En este sentido, la 1-*homología* de una DGA-álgebra es la homología propia de la construcción Bar asociada.

Nos acercaremos a la definición de la construcción Bar gradualmente, comprobando que se verifican las condiciones necesarias para construir una coálgebra. Al final del presente desarrollo, comprobaremos que esta coálgebra admite una estructura de álgebra e, incluso, álgebra de Hopf, bajo ciertas condiciones a especificar.

Debemos concretar, antes de proseguir, que una construcción dual, la *construcción Cobar*, se define para DG-coálgebras. Nosotros nos centraremos en el estudio de la construcción Bar, dado que esta memoria discurre en el campo de las DGA-álgebras; un desarrollo análogo al que se describirá aquí para la construcción Bar, se puede establecer con la construcción Cobar.

El *módulo graduado subyacente en la construcción Bar de A* viene dado por:

$$\bar{B}_\star(A)^\# = \Lambda \oplus S(\bar{A}) \oplus (S(\bar{A}) \otimes S(\bar{A})) \oplus \cdots \oplus (S(\bar{A}) \otimes \cdots \otimes S(\bar{A})) \oplus \cdots = (T(S(\bar{A})))^\#.$$

Un elemento $\bar{a} = Sa_1 \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes Sa_n$ del producto tensorial $S(A) \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes S(A)$ lo escribiremos de la forma $\bar{a} = [a_1|\cdots|a_n]$. Un tal elemento se dice homogéneo cuando a_i es un elemento homogéneo de A, para todo $1 \leq i \leq n$. Notaremos $[\,] = 1 \in \Lambda$. Es obvio que todo elemento de $\bar{B}_\star(A)^\#$ puede descomponerse como sumas de elementos homogéneos.

Aparte de la graduación tensorial existente en $\bar{B}_\star(A)^\#$ debemos considerar aquí la *graduación simplicial* $|\ |_s$, que se define como:

$$|\bar{a}|_s = |[a_1|\cdots|a_n]\,|_s = n.$$

El grado total de $\bar{a}$ viene dado por $|\bar{a}|_B = |\bar{a}|_t + |\bar{a}|_s$.

La *diferencial simplicial* viene dada por la fórmula:

$$d_s([a_1|\cdots|a_n]) \;=\; \xi_A(a_1)[a_2|\cdots|a_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{e_i}[a_1|\cdots|\mu_A(a_i,a_{i+1})|\cdots|a_n]+$$

$$+(-1)^{e_n}[a_1|\cdots|a_{n-1}]\xi_A(a_n);$$

donde $e_i = i + |a_1| + \cdots + |a_i|$. Entonces, el morfismo $d_B = d_t + d_s$ actuando sobre el módulo graduado $\bar{B}_*(A)^{\#}$ constituye una diferencial, por lo que $\bar{B}_*(A)^{\#}$ adquiere la estructura de DG-módulo.

Lema 1.0.3 *La aplicación $\Delta_B : \bar{B}_*(A) \to \bar{B}_*(A) \otimes \bar{B}_*(A)$ dada por*

$$\Delta_B([a_1|\cdots|a_n]) = \sum_{i=0}^{n}[a_1|\cdots|a_i] \otimes [a_{i+1}|\cdots|a_n],$$

constituye un coproducto en $\bar{B}_*(A)$.

Lema 1.0.4 *La aplicación $\xi_B : \bar{B}_*(A) \to \Lambda$ dada por*

$$\xi_B(\lambda) = \lambda,\ \ \lambda \in \Lambda; \qquad \xi_B(u) = 0,\ \ |u|_B > 0; \tag{1.3}$$

constituye una aumentación en $\bar{B}_*(A)$.

Teorema 1.0.5 *El módulo $\bar{B}_*(A)$ con las propiedades anteriores constituye una DGA-coálgebra con counidad ξ_B; se le denomina* construcción Bar asociada a la DGA-álgebra *A. Además, se verifican las relaciones siguientes:*

$$(d_t \otimes 1 + 1 \otimes d_t)\Delta_B = \Delta_B\, d_t; \quad (d_s \otimes 1 + 1 \otimes d_s)\Delta_B = \Delta_B\, d_s;$$

$$d_s\, d_t + d_t\, d_s = 0; \quad d_t\, d_t = 0; \quad d_s\, d_s = 0.$$

Es decir, en definitiva es $(\bar{B}_*(A), d_B - d_s) = (T^c(S(\bar{A})), d_t)$.

Dada una DGA-álgebra A, definimos la *construcción Bar normalizada de A*, que denotamos $\bar{B}_N(A)$, como el cociente

$$\bar{B}_N(A) = \frac{\bar{B}_\star(A)}{s(\bar{B}_\star(A))},$$

donde $s(\bar{B}_\star(A))$ expresa el conjunto de elementos de $\bar{B}_\star(A)$ que son *degenerados* (i.e., de la forma $[a_1|a_i|\theta_A|a_{i+1}|\cdots|a_n]$, donde θ_A es el elemento unidad del álgebra).

Teorema 1.0.6 *$\bar{B}_N(A)$, es una DGA-coálgebra con graduación, diferencial y coproducto inducidos por $|\ |_B$, d_B y Δ_B; respectivamente. Su aumentación viene dada por ξ_B.*

Sabemos que la construcción Bar asociada a una DGA-álgebra se define a partir de un módulo tensorial. Es lógico intentar ligar a la construcción Bar normalizada de una DGA-álgebra, otra estructura de módulo tensorial.

En esta línea, la construcción Bar normalizada asociada a un DGA-álgebra, admite una reinterpretación en términos de módulos tensoriales, según los resultados que agrupamos en la nota siguiente.

Nota 1.0.7 Destacamos los siguientes hechos:

- $\bar{B}_N(A)$ coincide como DGA-módulo con el módulo tensorial $T(S(\text{Ker } \xi_A))$, cuando prescindimos de la diferencial simplicial, d_s, en su diferencial total. Nótese que Ker ξ_A coincide con el DG-módulo $\bar{A}$, por ser A una DGA-álgebra conexa.
- $\bar{B}_N(A)$ constituye una DGA-coálgebra con la graduación $|\ |_B$, la diferencial d_t y el coproducto Δ_B. Coincide con la coálgebra tensorial $T^c(S(\text{Ker } \xi_A))$.

- $\bar{B}_N(A)$ constituye una DGA-álgebra con la graduación $|\ |_B$, la diferencial d_t y el producto tensorial yuxtaposición. Así, coincide como DGA-álgebra con el álgebra tensorial dada por $T^a(S(\mathrm{Ker}\ \xi_A))$.

Con objeto de simplificar la notación del trabajo, y debido a que sólo consideraremos construcciones Bar normalizadas, asumimos que el término $\bar{B}(A)$ hace referencia a la construcción Bar normalizada de una DGA-álgebra dada.

Hemos llevado a cabo la definición de construcción Bar siguiendo las convenciones actuales, que la caracterizan como DGA-coálgebra. Originariamente, Eilenberg y Mac Lane establecieron este concepto para grupos con determinadas propiedades; considerando, además, estructuras multiplicativas, en vez de comultiplicativas. El hecho de que trabajaran con grupos y no con módulos obedeció a que la teoría de módulos no estaba aún desarrollada: fue el concepto de módulo una generalización obligada de las nociones de grupo y espacio vectorial. Y la razón fundamental de considerar en la actualidad un soporte comultiplicativo en vez de multiplicativo reside en que aquél viene dado de forma natural con la construcción; mientras que la estructura multiplicativa necesita de la conmutatividad de la DGA-álgebra dada. Veamos esta cuestión con más detenimiento.

Dados dos enteros $p, q \geq 0$ no simultáneamente nulos, definimos un (p,q)-*shuffle* como una partición del conjunto de los primeros[1] $p+q$ enteros; de modo que resulten dos subconjuntos ordenados y disjuntos, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ y $\beta_1 < \cdots < \beta_q$ de p y q enteros, respectivamente. En definitiva, se trata de una permutación π del conjunto de los $p+q$ primeros enteros de modo que $\pi(i) < \pi(j)$ cuando, bien $i < j \leq p-1$; bien, $p \leq i < j$. De este modo, quedan determinadas dos sucesiones de enteros:

$$\alpha_i = \pi(i-1), \quad i = 1, \ldots, p; \qquad \beta_j = \pi(p+j-1), \quad j = 1, \ldots, q,$$

[1] Se entiende, pues, que se trata del conjunto $\{0, \ldots, p+q-1\}$.

que se corresponden con los subconjuntos de la definición primigenia. Notaremos cada (p,q)-shuffle por un par (α,β), en referencia a las sucesiones α_i y β_j.

Definimos la *signatura de un shuffle* (α,β) como el entero $sg(\alpha,\beta)$ dado por la suma:

$$sg(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i-(i-1)).$$

Sea una DGA-álgebra conmutativa A. Sabemos que $\bar{B}(A)$ tiene estructura de DGA-coálgebra. Vamos a ver que se puede definir sobre $\bar{B}(A)$ un soporte multiplicativo. Para ello, basta aplicar los resultados enunciados por Eilenberg y Mac Lane en [14]. Así, definimos el *producto shuffle* $\star:\bar{B}(A)\otimes\bar{B}(A)\longrightarrow\bar{B}(A)$, dado por:

$$[a_1|\cdots|a_p]\star[b_1|\cdots|b_q]=\sum_{(\alpha,\beta)}(-1)^{\varepsilon(\pi,a,b)}[c_{\pi(1)}|\cdots|c_{\pi(p+q)}];$$

donde (α,β) recorren los (p,q)-shuffles, π es la permutación que los determina, $(c_1,\ldots,c_{p+q})=(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots b_q)$, y el exponente

$$\varepsilon(\pi,a,b)=\sum_{\pi(i)>\pi(p+j)}|a_i|_B|b_j|_B.$$

Teniendo en cuenta esta definición, se concluye que el producto $\star$ hace de $\bar{B}(A)$ una DGA-álgebra conmutativa con respecto a la graduación $|\ |_B$ y la diferencial d_B.

Pero, además, se verifica que, en este caso, las estructuras de álgebra y coálgebra son compatibles, por lo que $\bar{B}(A)$ adquiere una estructura de DGA-álgebra de Hopf.

Por tanto, si A es una DGA-álgebra conmutativa y $m\in\mathbb{N}$, definimos la *m-homología* de A como la homología de la n-ésima construcción Bar iterada $\bar{B}^m(A)$.

Damos ahora varios ejemplos más de DGA-álgebras que utilizaremos con posterioridad a lo largo de esta memoria. Todas ellas serán conexas, conmutativas y con diferencial trivial.

- La *DGA-álgebra polinomial* $P(u, 2n)$, donde n es un entero positivo y u es un generador de grado $2n$. La aumentación y la coaumentación coinciden con la identidad en el anillo base. El producto de esta DGA-álgebra se define según la regla $u^i u^j = u^{i+j}$.

- La *DGA-álgebra polinomial truncada* $Q_{(p)}(u, 2n)$, que es el cociente de la DGA-álgebra polinomial $P(u, 2n)$ por el ideal (u^p), donde u es de grado n y p es un número primo.

- La *DGA-álgebra exterior* $E(u, 2n+1)$, $n \geq 0$, que consiste en la DGA-álgebra libre con generadores 1 y u; con u de grado $2n+1$, $u^2 = 0$. La aumentación y la coaumentación vienen dadas por la identidad en el anillo base. Además, el morfismo

$$\Delta_E : E(u, 2n+1) \longrightarrow E(u, 2n+1) \otimes E(u, 2n+1)$$

definido por

$$\Delta_E(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u,$$

convierte a $E(u, 2n+1)$ en una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa.

- La *DGA-álgebra polinomial dividida* $\Gamma(u, 2n)$, $n \geq 1$, que es la DGA-álgebra libre con generadores

$$\gamma_0(u) = 1, \gamma_1(u) = u, \gamma_2(u), \ldots, \gamma_k(u), \ldots, \quad \text{con} \quad |\gamma_k(u)| = 2n.$$

El producto viene definido por la expresión:

$$\gamma_k(u)\gamma_h(u) = \frac{(k+h)!}{k!h!}\gamma_{k+h}(u);$$

el elemento $\gamma_1(u) = u$ se conoce como el generador del álgebra polinomial modificada. La aumentación y la coaumentación son la identidad en el anillo base. Además, el morfismo

$$\Delta_\Gamma : \Gamma(u, 2n) \longrightarrow \Gamma(u, 2n) \otimes \Gamma(u, 2n),$$

definido por

$$\Delta_\Gamma(\gamma_k(u)) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(u) \otimes \gamma_j(u),$$

convierte a $\Gamma(u, 2n)$ en una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa.

Definiremos ahora el concepto de resolución libre.

Definición 1.0.8 Una *resolución libre* de Λ sobre una DGA-álgebra A consiste en un DG-módulo X, el cual es libre como A-módulo (es decir, es una suma directa de copias isomorfas a A) y la homología de X es cero excepto en grado cero, donde coincide con Λ

Un ejemplo de resolución libre de Λ sobre una DGA-álgebra A es *la resolución Bar*, que denotaremos por $B(A)$. Más concretamente, $B(A)$ es el DG-módulo $(A \otimes \bar{B}(A), d_{B(A)})$, donde su diferencial $d_{B(A)} : B_*(A) \to B_{*-1}(A)$ viene definida por

$$d_{B(A)}(a \otimes [a_1|\cdots|a_n]) = d_A(a) \otimes [a_1|\cdots|a_n] + a \otimes d_B([a_1|\cdots|a_n]) + \mu_{scstA}(a, a_1)|[a_2|\cdots|a_n].$$

En el caso de ser A una DGA-álgebra conmutativa, $B(A)$ tiene una estructura de DGA-álgebra conmutativa con producto

$$\mu_{B(A)} = (\mu_A \otimes \star)(1 \otimes t \otimes 1)$$

donde recordemos que $\star$ es el producto shuffle de $\bar{B}(A)$.

Finalmente, tengamos en cuenta que la resolución Bar se diferencia del producto tensorial $A \otimes \bar{B}(A)$ en su estructura diferencial:

$$\theta = d_{B(A)} - (d_A \otimes 1_{B(A)} + 1_A \otimes d_B) = \mu_A(a, a_1)|[a_2| \cdots |a_n] \tag{1.4}$$

Capítulo 2.

La maquinaria de perturbación homológica

Capítulo 2.

La maquinaria de perturbación homológica

2.1 El concepto de contracción

Dedicaremos esta sección a describir el concepto de contracción entre dos DG-módulos, que es un tipo particular de equivalencia de homotopía.

Trabajando ya con DG-álgebras, también explicitamos la noción de contracción de álgebra semicompleta, concepto fundamental en el desarrollo teórico que realizamos en esta memoria.

Aunque no sea trata de un concepto reciente, sólo desde principios de esta década y gracias al auge que ha tenido la Teoría de Perturbación Homológica, se le ha reconocido a las contracciones su indiscutible valía y relevancia en el Álgebra Homológica.

Una contracción entre dos DG-módulos es una herramienta muy útil en el cálculo de la homología ya que permite relacionar un DG-módulo con otro de menor número de generadores en cada grado, de modo que se preserva la homología. Constituye pues, una importante técnica algebraica que reduce el problema del cálculo homológico.

En el caso de las contracciones entre DGA-álgebras, nos interesarán aquéllas en las que se preserven las estructuras multiplicativas, por lo que habrá unos tipos de contracciones más "convenientes" (en este sentido) que otros.

Definición 2.1.1 Una *contracción de DGA-módulos* (abreviadamente, *contracción*), $c : \{N, M, f, g, \phi\}$ consiste en una colección de cinco datos verificando ciertas propiedades:

- Los datos: dos DGA-módulos, M y N, y sendos morfismos de DGA-módulos de grado cero, $f : N \to M$ y $g : M \to N$, que denominamos *proyección* e *inyección* de la contracción c, respectivamente; y un endomorfismo $\phi : N \to N$ de módulos graduados, con $|\phi| = +1$, llamado *operador de homotopía.*
- Las propiedades:

$$\begin{array}{ll} \textbf{(c1)} & fg = 1_M, \\ \textbf{(c2)} & f\phi = 0, \\ \textbf{(c3)} & \phi g = 0, \\ \textbf{(c4)} & \phi d + d\phi + gf = 1_N, \\ \textbf{(c5)} & \phi\phi = 0. \end{array}$$

A veces notaremos una tal contracción por $N \overset{c}{\Rightarrow} M$, (f, g, ϕ) o simplemente por c.

En esta definición hemos seguido la terminología de Eilenberg y Mac Lane en [13] y [14]; en la literatura podemos encontrar otros nombres: "retracción de deformación fuerte" o SDR (en [33], [21], [24], etc) "dato Eilenberg-Zilber" (en [23]), "extensión trivial" (en [37]) o reducción (en [46]).

Hemos de hacer notar los puntos siguientes:

1. Por ser f y g morfismos de DGA-módulos, de las propiedades **(c2)** y **(c3)** concluimos que ϕ verifica las identidades $\xi_N \phi = 0 = \phi \eta_N$.
2. La notación de ϕ como operador de homotopía está claramente fundamentada; en el sentido estricto del término, establece una ***homotopía*** clásica entre los morfismos f y g: basta atender a las propiedades **(c1)** y **(c4)**. Además, es obvio que los morfismos f y g son, respectivamente, suprayectivo e inyectivo.
3. Dada una contracción c con la notación superior, resulta posible descomponer N como suma directa de M y un DGA-módulo acíclico (i.e., de homología nula), por lo que las homologías de N y M coinciden. Este es el objetivo principal de una contracción: obtener un DGA-módulo con menor cantidad de generadores que el primero y con idénticos grupos de homología. Parece lógico, pues, denominar a N y M como DGA-módulos mayor y menor de c, respectivamente.

Exponemos a continuación varios ejemplos simples de contracciones:

- La *contracción trivial* de un DGA-módulo N, a saber:
$$1_N : \{N,\ N,\ 1_N,\ 1_N,\ 0\}.$$
- La *iso-contracción*, contracción que proviene de un isomorfismo de DGA-módulos dado, $f : N \rightarrow M$:
$$c_f : \{N,\ M,\ f,\ f^{-1},\ 0\}.$$

- Dada una DGA-álgebra A, existe una contracción para la resolución Bar standar $B(A)$:

  $$C_{B(A)} : \{B(A),\ \Lambda,\ 1_\Lambda,\ 1_\Lambda, s\},$$

  donde el operador de homotopía $s : B(A)_* \rightarrow B(A)_{*+1}$ viene dado por la fórmula

  $$s(a \otimes [a_1|\cdots|a_n]) = 1 \otimes [a|a_1|\cdots|a_n].$$

Pasamos ahora a exponer algunos resultados concernientes al comportamiento de las contracciones con respecto a algunas operaciones elementales del Álgebra Homológica:

Lema 2.1.2 *Dada una contracción de DGA-módulos $c : \{N,\ M,\ f,\ g,\ \phi\}$, podemos construir las siguientes contracciones de DG-módulos:*

1. *La contracción $\bar{c} : \{\mathrm{Ker}\,\xi_N,\ \mathrm{Ker}\,\xi_M,\ f,\ g,\ \phi\}$; donde, abusando de la notación, f, g y ϕ representan las restricciones de los morfismos correspondientes.*
2. *La contracción suspensión de c, $S(c)$, que consiste en tomar los DGA-módulos suspensión de los dados:*

   $$S(c) : \{S(N),\ S(M),\ S(f),\ S(g),\ -\phi\},$$

   siendo, respectivamente, $S(f)$ y $S(g)$ los morfismos f y g en un grado menor.
3. *La contracción módulo tensorial, $T(c)$, obtenida al considerar los módulos tensoriales de M y N y los morfismos inducidos por f y g:*

   $$T(c) : \{T(N), T(M), T(f), T(g), T(\phi)\};$$

viniendo el operador de homotopía definido por la expresión:

$$T(\phi)|_{N^n} = \phi^{[\otimes n]} = \phi \otimes (gf)^{\otimes n-1} + 1 \otimes \phi \otimes (gf)^{\otimes n-2} + \cdots + 1^{\otimes n-1} \otimes \phi, \quad k \geq 1.$$

Lema 2.1.3 *Dadas dos contracciones de DG-módulos, notémoslas*

$$c_i : \{N_i,\ M_i,\ f_i,\ g_i,\ \phi_i\} \quad i = 1, 2;$$

se pueden construir las siguientes contracciones:

1. *La* contracción producto tensorial*:*

   $$c_1 \otimes c_2 : \{N_1 \otimes N_2,\ M_1 \otimes M_2, f_1 \otimes f_2,\ g_1 \otimes g_2,\ \phi_1 \otimes g_2 f_2 + 1_N \otimes \phi_2\}.$$

   Un caso muy particular de contracción de este tipo resulta ser:

   $$c^{\otimes n} : \{N^n, M^n, f^{\otimes n}, g^{\otimes n}, \phi^{[\otimes n]};$$

   donde, si notamos $\phi_i^{[\otimes n]} = 1_N^{\otimes i} \otimes \phi \otimes (gf)^{\otimes (n-i-1)}$*, es*

   $$\phi^{[\otimes n]} = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i^{[\otimes n]}. \qquad (2.1)$$

2. *De ser* $N_2 = M_1$*, la* contracción composición de ambas*, dada por:*

   $$c_2 \circ c_1 : \{N_1,\ M_2,\ f_2 f_1,\ g_1 g_2,\ \phi_1 + g_1 \phi_2 f_1\}.$$

En esta memoria, estamos interesados en un tipo especial de resoluciones:

Definición 2.1.4 *[32]* Una resolución libre K de Λ sobre la DGA-álgebra A se dice que *proviene de la resolución bar standar* si existe una contracción (llamada *reducción*) de $B(A)$ a K.

Definición 2.1.5 *([21])*

Sean A y A' dos DGA-álgebras (resp., dos DGA-coálgebras) y c,

$$c : \{A, A', f, g, \phi\},$$

una contracción de DGA-módulos. Se dice que el morfismo ϕ es una *homotopía de álgebras* (resp., *homotopía de coálgebras*), cuando verifica la identidad siguiente:

$$\phi\mu_A = \mu_A\phi^{[\otimes 2]}$$

$$(\text{resp., } \Delta_A\phi = \phi^{[\otimes 2]}\Delta_A);$$

donde recordamos que $\phi^{[\otimes 2]} = 1 \otimes \phi + \phi \otimes gf$.

Definición 2.1.6 *[42]* Sean A y A' dos DGA-álgebras y $c : \{A, A', f, g, \phi\}$ una contracción.

La proyección f es una *quasi-proyección de álgebras* si se dan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} f\mu_A(\phi \otimes \phi) &= 0, \\ f\mu_A(\phi \otimes g) &= 0, \\ f\mu_A(g \otimes \phi) &= 0; \end{aligned}$$

El operador de homotopía ϕ es una *quasi-homotopía de álgebras* si se dan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \phi\mu_A(\phi \otimes \phi) &= 0, \\ \phi\mu_A(\phi \otimes g) &= 0, \\ \phi\mu_A(g \otimes \phi) &= 0. \end{aligned}$$

Definición 2.1.7 *[42]* Sean A y A' dos DGA-álgebras y $c : \{A, A', f, g, \phi\}$ una contracción. Diremos que c es

- *una contracción de álgebras semi-completa* si f es una quasi-proyección de álgebras, g es un morfismo de DGA-álgebras y ϕ es una quasi-homotopía de álgebras.
- *una contracción de álgebras casi-completa* si f y g son morfismo de DGA-álgebras y ϕ es una quasi-homotopía de álgebras.
- *una contracción de álgebras completa* si f y g son morfismos de DGA-álgebras y ϕ es una homotopía de álgebras.

Obviamente, las contracciones de álgebras completas y casi-completas son, en particular, semi-completas. No es dificil probar que los conjuntos de contracciones de álgebras semi-completas y casi-completas son cerrados por composición y producto tensorial de contracciones.

Un ejemplo de contracción de álgebras casi-completa nos lo proporciona la contracción $C_{B(A)}$ de la resolución bar standar $B(A)$ de una DGA-álgebra conmutativa A. Más ejemplos de contracciones de álgebras serán descritos en el capítulo siguiente.

2.2 Teoría de Perturbación Homológica.

La Teoría de Perturbación Homológica está constituida por un conjunto de técnicas basadas esencialmente en los conceptos de contracción y perturbación. El Lema

Básico de Perturbación constituye la piedra angular de esta Teoría: Se trata de un verdadero algoritmo en el que el dato de entrada es una contracción entre dos DG-módulos junto con una perturbación y el de salida es una nueva contracción. Ya moviendonos en la categoría ADGC, nos interesará saber qué clases de contracciones de álgebras se preservan por perturbación y, de éstas, cuáles transfieren "adecuadamente" la estructura producto de las DGA-álgebras mayores. Amplia información sobre la Teoría de Perturbación Homológica puede ser encontrada en [47], [9], [19], [33], [21], [22], [26], [27], [28], ...

Describimos, en primer lugar, el concepto de perturbación. Enunciaremos después el Lema Básico de Perturbación y, por último, recordamos los tipos de contracciones que se preservan por perturbación.

Sean N un DG-módulo y $f : N \rightarrow N$ un morfismo de módulos graduados. Se dice que f es un morfismo *puntualmente nilpotente* cuando para todo elemento no nulo $x \in N$ existe un entero positivo n (dependiendo de x, en general), de modo que $f^n(x) = 0$.

Una *perturbación de un DGA-módulo N* consiste en un morfismo de módulos graduados $\delta : N \rightarrow N$ de grado -1, de modo que $(d_N + \delta)^2 = 0$ y $\xi_N \delta = 0$. Es decir, una perturbación δ de un DGA-módulo N verifica que $|\delta| = -1$, $d_N\delta + \delta d_N + \delta^2 = 0$ y que la aumentación $\xi_N : (N, d_N + \delta) \rightarrow \Lambda$ sigue siendo un morfismo de DG-módulos.

Una *perturbación* o *dato de perturbación* de una contracción $c : \{N, M, f, g, \phi\}$ es una perturbación δ del DGA-módulo N que verifica que la composición $\phi\,\delta$ es puntualmente nilpotente.

Sean A y A' dos DGA-álgebras y sea $c : \{A, A', f, g, \phi\}$ una contracción. Una *perturbación de álgebras δ de la contracción c* consiste en una perturbación de c que es, a su vez, derivación.

Teorema 2.2.1 (**Lema Básico de Perturbación**) *[9][47]. Sean* $c : \{N, M, f, g, \phi\}$ *una contracción y* $\delta : N \to N$ *una perturbación de dicha contracción. Entonces, queda definida una nueva contracción,*

$$c_\delta : \{(N, d_N + \delta, \xi_N, \eta_N),\ (M, d_M + d_\delta, \xi_M, \eta_M),\ \ f_\delta,\ g_\delta,\ \phi_\delta\},$$

siendo:

$$\begin{aligned} d_\delta &= f\,\delta\,(1 + \phi\delta)^{-1}\,g, \\ f_\delta &= f\,(1 - \delta\,(1 + \phi\delta)^{-1}\,\phi), \\ g_\delta &= (1 + \phi\delta)^{-1}\,g, \\ \phi_\delta &= (1 + \phi\delta)^{-1}\,\phi; \end{aligned}$$

con $\quad (1 + \phi\delta)^{-1} = \sum_{i \geq 0}(-1)^i\,(\phi\,\delta)^i = 1 - \phi\,\delta + \phi\,\delta\,\phi\,\delta - \cdots + (-1)^i(\phi\,\delta)^i + \cdots.$

Es evidente que, debido a la nilpotencia puntual de $\phi\delta$, la suma $(1 + \phi\delta)^{-1}(x)$ es finita, para cada $x \in N$. Por otra parte, resulta obvio que el morfismo d_δ constituye una perturbación del DGA-módulo (M, d_M, ξ_M, η_M).

El lema básico de perturbación es esencialmente un teorema de función implícita [8]. Una contracción es un conjuntos de relaciones fijas entre varios morfismos; si la perturbación diferencial es suficientemente pequeña (condición de nilpotencia), entonces existe una única forma de modificar el otro dato para mantener las hipótesis de contracción. Es importante notar que los módulos graduados N y M no son alterados en el proceso; sólo los *morfismos* son modificados conforme a unas fórmulas explícitas.

Podemos atrevernos a decir que este resultado puede calificarse como **el teorema fundamental del Algebra Homológica Computacional.** Los resultados obtenidos de esta memoria puede considerarse como un pequeño ejemplo de la potencia y alcance de este método.

En [22] y [28] se demuestra que, dadas una contracción de álgebras completa c y una perturbación de álgebras δ de c, la contracción perturbada c_δ es una contracción de álgebras completa. En [42], se prueba que la semi-completitud en contracciones de álgebras es una "propiedad hereditaria" por perturbaci'on homológica.

Más precisamente, toda perturbación de una contracción de áálgebras completa es una contracción de áálgebras completa. Ahora bien, toda perturbación de una contracción de áálgebras casi-completa o semi-completa es, en el peor caso, una nueva contracción de áálgebras semi-completa.

Notemos que:

- Las contracciones de áálgebras completas se preservan por perturbación, pero la composición y el producto tensorial de este tipo de contracciones degenera en general hacia la semi-completitud.
- Las contracciones casi-completas se preservan por composición y por producto tensorial. No obstante, la perturbación de esta clase de contracciones degenera en general hacia semi-completitud.
- Las contracciones semicompletas se preservan por composición, producto tensorial y perturbación. Obsérvese que los anteriores tipos de contracciones de álgebras considerados son, en particular, contracciones semicompletas. Además, cualquiera de ellas deriva en el peor de los casos, por composición, producto tensorial o perturbación, al tipo semicompleto.

Por otra parte, si tenemos una contracción semicompleta entre dos DGA-álgebras se tiene que $\mu_{A'} = f\mu_{A'}g$.

Finalmente, incidamos en el hecho de que en este trabajo nos moveremos siempre en el contexto de las contracciones de álgebras semicompletas.

Capítulo 3.

Álgebra de n-homología de una DGA-álgebra conmutativa

Capítulo 3.

Álgebra de n-homología de una DGA-álgebra conmutativa

En este capítulo nos centraremos en el diseño de un método de cálculo de la n-homología de DGA-álgebras conmutativas ($\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), basado esencialmente en la maquinaria de perturbación homológica para álgebras que hemos visto en el capítulo anterior. Trataremos primero la homología de DG-álgebras conmutativas conexas y libres que, más abreviadamente llamaremos **DGC-álgebras**, para en última estancia comentar el caso general.

Comenzaremos este capítulo con una sección de preliminares algebraicos, que nos ayudarán a comprender las ideas algorítmicas que subyacen en este proceso de cálculo de homología. A continuación, se dará una solución positiva al problema de la computabilidad de la 1-homología de una DGC-álgebra de tipo finito, haciendo uso de la maquinaria de perturbación de [42]. Esta computabilidad en principio no nos permite, sin embargo, hacer viable una implementación práctica del algoritmo (sin tener en cuenta ninguna limitación de memoria y de tiempo); debido a la elevada complejidad que presenta en general. No obstante, en el caso de tratar una clase particular de DGA-álgebras podemos refinar este proceso algorítmico y reducir el cálculo homológico a la evaluación de simples "fórmulas" numéricas.

A continuación extendemos esta técnica al cálculo de la n-homología de DGC-álgebras para $n > 1$, apoyandonos en los resultados obtenidos en [42]. Haciendo uso de argumentos de cambio de bases, podemos "controlar" el comportamiento homológico de estas DG-álgebras. Un caso concreto es tratado para dar una idea de la complejidad de este tema. A partir de los resultados obtenidos, se construyen por perturbación resoluciones pequeñas asociadas a las n-homologías de una DGC-álgebra.

Comentamos posteriormente el caso general de DGA-álgebras conmutativas, sin imponer las hipótesis adicionales de ser libre ni ser conexa. Finalmente, planteamos una serie de cuestiones y problemas abiertos sobre el tema.

Las ideas y resultados de este capítulo han sido ya contemplados en los artículos [3] (el cuál ha sido el resultado final de lo expuesto en [4]) y [1].

3.1 Preliminares.

Introduzcamos una noción fundamental en lo que sigue: el *producto tensorial torcido de DGA-álgebras.*

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de DGA-álgebras conmutativas y sea ρ una derivación en la DGA-álgebra $\otimes_{i\in I}A_i$. Un *producto tensorial torcido* $\tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in I}A_i$ (abreviadamente, *PTT*) es una DGA-álgebra conmutativa verificando las siguientes condiciones:

- Como DGA-álgebra graduada, $\tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in I}A_i$ coincide con el producto tensorial ordinario $\otimes_{i\in I}A_i$.
- Su diferencial es la suma de las diferenciales del producto tensorial ordinario y la derivación ρ.

Entonces, un *PTT* de DGA-álgebras conmutativas es una DGA-álgebra perturbada, donde la "perturbación" afecta a su diferencial (y no a su producto). Nótese que esta noción muestra unas pequeñas diferencias estructurales con respecto a la de *construcción multiplicativa principal* de Cartan [11].

Un ejemplo de PTT nos lo proporciona la siguiente DGA-álgebra general:

$$\begin{array}{l} E(x,2s+1)\tilde{\otimes}^{\rho_1}P(y_1,2s+2)\tilde{\otimes}^{\rho_2}P(y_2,(2s+2)(r_1+1))\tilde{\otimes}^{\rho_3} \\ \tilde{\otimes}^{\rho_3}\ \cdots\ \tilde{\otimes}^{\rho_n}P(y_n,(2s+2)(r_1+1)\cdots(r_{n-1}+1)), \end{array}$$

cuya diferencial viene dada por

$$\rho_i(y_i) = e_i\ x\otimes y_1^{r_1}\otimes y_2^{r_2}\otimes\cdots\otimes y_{i-1}^{r_{i-1}},\quad \forall 1\leq i\leq n.$$

En lo que sigue, denotaremos la DGA-álgebra anterior como $A^{s,(r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,e_2,\ldots,e_n}$.

Si en esta DGA-álgebra cambiamos las álgebras polinomiales

$$P(y_i,(2s+2)(r_1+1)\cdots(r_{i-1}+1))$$

por álgebras polinomiales divididas

$$\Gamma(y_i,(2s+2)(r_1+1)\cdots(r_{i-1}+1)),$$

considerando el mismo comportamiento para las diferenciales ρ_i; obtenemos otra clase de PTT, que denotaremos por $D^{s,(r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}}$.

Las técnicas algorítmicas de las que hacemos uso aquí han sido ya utilizadas con exito en numerosos trabajos anteriores. Citemos como ejemplos representativos los artículos [33], [30] y [46]. Una idea fundamental en este contexto consiste en, a partir de un DG-módulo N del cuál queremos obtener su homología, determinar una serie de contracciones:

$$N \stackrel{c_1}{\Rightarrow} N^1 \stackrel{c_2}{\Rightarrow} N^2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow N^{s-1} \stackrel{c_s}{\Rightarrow} N^s,$$

de modo que el DG-módulo N^s sea libre de tipo finito y, por tanto, podamos calcular su homología de manera sencilla. Si, por ejemplo, suponemos que el anillo de base es $\mathbb{Z}$, la computación de la homología en complejos libres de tipo finito se reduce esencialmente al uso sistemático del algoritmo de diagonalización a forma normal de Smith de las matrices enteras que definen al operador diferencial en cada grado (véase [50] o [38] para una detallada descripción de este método). Sobra comentar que, en estas circunstancias, es $H_\star(N) = H_\star(N^s)$. Es decir, trabajando de esta forma y tomando como dato de entrada una DGA-álgebra $N = A$, obtenemos un verdadero proceso de cálculo de la homología de A.

Ahora bien, para establecer contracciones, bien las creamos directamente; bien "perturbamos" alguna ya determinada para obtener otra diferente (ver [22]). Nosotros vamos a manejar aquí perturbaciones de contracciones de álgebras semicompletas (ver [42]). Ya comentabamos en los capítulos anteriores que el conjunto de contracciones semicompletas de DGA-álgebras es cerrado para la composición, para el producto tensorial y por perturbación.

Resaltamos que, en esta memoria, hacemos uso de la terminología *método de cálculo o método computacional* y no de *algoritmo*. Evidentemente, si hubieramos realizado en este trabajo una detallada descripción (especificación) de los pasos del método y un estudio minucioso de la complejidad del mismo, estaríamos hablando ahora de algoritmos. Debido a que nuestros procesos de cálculo son una reiterada y sistemática utilización del lema de perturbación básico, la simple y sencilla especificación de este algoritmo habría permitido solventar el primer escollo. No obstante, el problema de la complejidad del método requiere un estudio extremadamente técnico, que no hemos hecho aquí y que nos ha impuesto que sólo podamos enunciar en este sentido resultados muy vagos. Además, la infinitud en el número de elementos que se presenta en los DG-módulos que manejamos, hace que surga problemas de manipulación simbólica y de codificación funcional a la hora de la implementación del método.

De cara al cálculo de la homología, definimos ahora el concepto de modelo homológico como alternativa computacional a la construcción Bar. Distinguiremos dos definiciones según qué anillo de base hayamos escogido.

Definición 3.1.1 Sea $\mathbb{Z}$ nuestro anillo de base. Un *modelo homológico* de una DGA-álgebra conmutativa A es una pareja $\{c, HBA\}$ donde HBA es una DGA-álgebra libre de tipo finito y c es una contracción de álgebras semicompleta de $\bar{B}(A)$ a HBA. Así, se tiene que$H_*(\bar{B}(A)) = H_*(HBA)$.

Si el anillo base que consideramos es $\mathbb{Z}$ localizado en un primo p,

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{r}{s}, \quad \text{tal que} \quad m.c.d.(p, s) = 1\}$$

establecemos la siguiente definición. Sea M un DGA-módulo. Decimos que un morfismo de DG-módulos $h : M \to M$ es un *morfismo minimal* cuando $h(M) \subseteq pM$. Decimos que un DGA-módulo M es *DGA-módulo minimal* cuando es libre, de tipo finito como módulo graduado sobre $\mathbb{Z}_{(p)}$ (es decir, finito en cada grado) y su diferencial d_M es minimal. Se sabe que una contracción entre dos DGA-módulos minimales es un isomorfismo de DGA-módulos. Por último, decimos que la pareja $\{c, H\}$ es un *modelo homológico minimal* de una DGA-álgebra conmutativa A, si

H es una DGA-álgebra conmutativa minimal y existe una contracción de álgebras semi-completa de la construcción $\bar{B}(A)$ a H.

Por abuso del lenguaje, muchas veces confundiremos el modelo homológico $\{c, H\}$ de una DGA-álgebra conmutativa con la DGA-álgebra pequeña H.

Definamos ahora dos morfismos que van a ser extremadamente útiles en este capítulo.

Definición 3.1.2 *[11]* Sea A una DGA-álgebra. Definimos los siguientes morfismos de módulos graduados de grado cero:

- La *suspensión*, $\sigma : A \to \bar{B}(A)$; definido por $\sigma(a) = [a]$, donde $a \in A$.
- La *p-transpotencia* (donde p es un número primo), $\varphi_p : A \to \bar{B}(A)$; definido por $\varphi_p(a) = [a|a^{p-1}]$, con $a \in A$.

Finalmente, introducimos una noción íntimamente relacionada con el concepto de producto tensorial torcido, como es la de n-indescomponibilidad.

Definición 3.1.3 Un producto tensorial torcido $PTT = \tilde{\otimes}t^{\rho}_{i\in I}A_i$ se dice que es *descomponible* si existe una partición no trivial $I = I_1 \cup I_2$ de I, tal que PTT se descompone en un producto tensorial de dos productos tensoriales torcidos $PTT_1 = \tilde{\otimes}^{\rho_1}_{i\in I_1}A_i$ y $PTT_2 = \tilde{\otimes}^{\rho_2}_{i\in I_2}A_i$ con $\rho_m = \rho|_{PTT_m}$ para $m = 1, 2$. En caso contrario, PTT se dice que es *indescomponible de longitud ℓ* (o *ℓ-indescomponible*, donde ℓ es el cardinal del conjunto de índices I.

El siguiente resultado clásico será nuestro punto de partida a la hora del cálculo n-homológico de una DGA-álgebra conmutativa libre (véase, por ejemplo, [18]).

Teorema 3.1.4 *Toda DGA-álgebra conmutativa libre es isomorfa a un producto tensorial torcido de álgebras exteriores con generadores en grado impar y álgebras polinomiales con generadores en grado par*

3.2 Contracciones básicas

Estableceremos aquí las contracciones explícitas a partir de las cuales vamos a desarrollar nuestros métodos de cálculo homológico. La aplicación de las apropiadas técnicas de perturbación a productos tensoriales y composiciones de estas contracciones básicas nos permitirá abordar no sólo el problema de la n-homología de una DGC-álgebras, sino también la homología de Hochschild y cíclica.

En primer lugar, describamos la siguiente iso-contracción de álgebras completa.

Sea n un número natural. Se puede construir el siguiente isomorfismo de DGA-álgebras de Hopf entre la construcción Bar de un álgebra exterior, es decir, $\bar{B}(E(u, 2n-1))$ y el álgebra polinomial modificada $\Gamma(\sigma(u), 2n)$. Se puede notar por $\sigma(u) = [u]$ el generador del álgebra polinomial modificada, con el fin de hacer notar que se puede obtener este generador a partir del generador u del álgebra exterior, por medio de la operación suspensión. Como un isomorfismo puede verse como una contracción, se puede escribir como sigue:

$$C_{BE} : \{\bar{B}(E(u, 2n+1)), \Gamma(\sigma(u), 2n+2), f_{BE}, g_{BE}, 0\},$$

siendo el morfismo proyección de la contracción:

$$f_{BE}([u|\dots|u]) = \gamma_k(\sigma(u));$$

y el morfismo inyección:

$$g_{BE}(\gamma_k(\sigma(u))) = [u|u\dots|u].$$

Determinamos ahora una contracción de algebras casi-completa para la construcción Bar de un álgebra polinomial.

Sea n un número natural. Se puede construir una contracción de DGA-álgebras, llamada C_{BP} de tipo casi-completo de $\bar{B}(P(u,2n))$ a $E(\sigma(u),2n)$ de la siguiente forma:

$$C_{BP} : \{\bar{B}(P(u,2n))\ ,\ E(\sigma(u),2n+1)\ ,\ f_{BP}\ ,\ g_{BP}, \phi_{BP}\}. \tag{3.1}$$

Denotemos a un elemento de $\bar{B}(P(u,2n))$ de la forma $[u^{r_1}|\dots|u^{r_m}]$ por $[r_1|\dots|r_m]$. Los morfismos explícitos de la contracción son:

$$f_{BP}[r] = \begin{cases} 0, & \text{si } r \neq 1 \\ \sigma(u), & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

$$f_{BP}[r_1|r_2|\dots|r_m] = 0.$$

El morfismo g_{BP} se define como

$$g(\sigma(u)) = [u].$$

La homotopía viene definida por:

$$\phi_{BP}[r_1|\dots|r_m] = [1|r_1-1|r_2|r_m].$$

Finalmente, una contracción de álgebra casi-completa que será fundamental en todos nuestros algoritmos es la siguiente.

Sean A y A' dos DGC-álgebras. Entonces, existe una contracción de álgebras de la forma:

$$C_{B\otimes} : \{\bar{B}(A \otimes A'), \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A'), f_{B\otimes}, g_{B\otimes}, \phi_{B\otimes}\}; \tag{3.2}$$

donde $\bar{B}(A)$, $\bar{B}(A')$ y $\bar{B}(A \otimes A')$ representan la construcción Bar asociada a las DGC-álgebras A, A' y $A \otimes A'$ respectivamente.

La aplicación $f_{B\otimes}$ anterior queda caracterizada por su actuación sobre elementos homogéneos $[x_1 \otimes y_1 | \cdots | x_n \otimes y_n]$ de $\bar{B}(A \otimes A')$, con cada $x_i \in A$ e $y_i \in A'$ homogéneos:

$$f_{B\otimes}[x_1 \otimes y_1 | \cdots | x_n \otimes y_n] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \xi_{B(A)}(x_1 \cdots x_i) \xi_{B(A')}(y_{i+1} \cdots y_n) [x_1 | \cdots | x_i] \otimes [y_{i+1} | \cdots | y_n],$$

donde para $i = 0$ el término $[x_1 | \cdots | x_i] = 1 \in \bar{B}(A)$; y análogamente, para $i = n$, $[y_{i+1} | \cdots | y_n] = 1 \in \bar{B}(A')$.

Teniendo en cuenta las propiedades del producto tensorial, resulta que $\bar{B}(A)$ y $\bar{B}(A')$ quedan identificadas como subálgebras de $\bar{B}(A \otimes A')$, siendo:

$$[x_1 | \cdots | x_n] = [x_1 \otimes \theta' | \cdots | x_n \otimes \theta'], \qquad [y_1 | \cdots | y_n] = [\theta \otimes y_1 | \cdots | \theta \otimes y_n].$$

De este modo, la aplicación $g_{B\otimes}$ queda definida por la fórmula:

$$g_{B\otimes}(u \otimes v) = u \star v, \qquad u \in \bar{B}(A), v \in \bar{B}(A').$$

Por último, el operador de homotopía viene dado por

$$\phi_{B\otimes} = \lambda^{-1} SHI_{B(A),B(A')} \lambda,$$

donde el isomorfismo de DG-módulos λ actúa del siguiente modo:

$$\lambda : \bar{B}(A \otimes A') \to \bar{B}(A) \times \bar{B}(A'),$$

$$\lambda[a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_m \otimes a'_m] = (-1)^{\sum_{j>k} |a_j||a'_k|}[a_1 | \cdots | a_m] \times [a'_1 | \cdots | a'_m],$$

con a_i y a'_i elementos homogéneos de A y A', respectivamente. Y el operador SHI viene dado por la fórmula:

$$\begin{aligned} SHI(a_n \times b_n) &= -\sum(-1)^{m+sg(\alpha,\beta)}(s_{\beta_q+m} \cdots s_{\beta_1+m} s_{m-1} \partial_{n-q+1} \cdots \partial_n a_n \times \\ &\qquad \times s_{\alpha_{p+1}+m} \cdots s_{\alpha_1+m} \partial_m \cdots \partial_{m+p-1} b_n); \end{aligned}$$

donde $m = n - p - q$, $sg(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i - (i-1))$, y la última suma se realiza sobre los índices $0 \leq q \leq n-1$, $0 \leq p \leq n-q-1$, con $(\alpha, \beta) \in \{(p+1, q)\text{-shuffles}\}$. Los operadores de cara y de degeneración se definen del siguiente modo:

$$\partial_0[a_1 | \cdots | a_q] = \xi(a_1)[a_2 | \cdots | a_q];$$

$$\partial_i[a_1 | \cdots | a_q] = (-1)^{(|[a_1|\cdots|a_i]|_t)}[a_1 | \cdots | a_i a_{i+1} | \cdots | a_q], \quad 0 < i < q;$$

$$\partial_q[a_1 | \cdots | a_q] = (-1)^{(|[a_1|\cdots|a_q]|_t)}[a_1 | \cdots | a_{q-1}]\xi(a_q),$$

$$s_0[\,] = [\theta], \qquad \text{donde } \theta \text{ es la identidad de } A;$$

$$s_i[a_1 | \cdots | a_q] = (-1)^{(|[a_1|\cdots|a_i]|_t)}[a_1 | \cdots | a_i | \theta | a_{i+1} | \cdots | a_q].$$

Eilenberg y MacLane establecieron en [14] que $f_{B\otimes}$ y $g_{B\otimes}$ eran morfismos de DGA-álgebras. En el artículo [42] se prueba que ϕ es una casi-homotopía de álgebras y, por tanto, que $C_{B\otimes}$ es una contracción de álgebras casi-completa.

Cabe destacar una propiedad que concierne al operador de homotopía $\phi_{b\otimes}$ de esta contracción:

$$\phi_{b\otimes}([a_1 \otimes a'_1 | a_2 | \cdots | a_m]) = -[a'_1 | a_1 | a_2 | \cdots | a_m], \tag{3.3}$$

donde $a_i \in A$, $\forall\ 1 \leq i \leq m$ y $a'_1 \in A'$.

Sea $\otimes_{i\in I} A_i$ un producto tensorial de DGC-álgebras. Usando la contracción $C_{B\otimes}$ y haciendo producto tensorial y composición de contracciones, podemos determinar una contracción de $\bar{B}(\otimes_{i\in I} A_i)$ a $\otimes_{i\in I}\bar{B}(A_i)$. Por simplicidad en la notación, tambien denotaremos esta última contracción por $C_{B\otimes}$.

3.3 Computabilidad de la 1-homología de DGC-álgebras.

En esta sección, construimos modelos homológicos de DGC-álgebras de tipo finito. Recordemos que una DGC-álgebra es una DGA-álgebra conmutativa conexa y libre y un modelo homológico se presenta como una alternativa a la computación directa de la 1-homología de una DGC-álgebra A. Téngase en cuenta que la construcción Bar de una DGA-álgebra presenta en general un número desorbitadamente grande de elementos en cada grado, que hace que el cálculo homológico directo sea un proceso prohibitivo, computacionalmente hablando. Consideremos también el hecho de que la construcción y la resolución Bar de una DGC-álgebra son ambas DGC-álgebras.

El que tomemos en principio DG-álgebras libres viene motivado por el resultado que ya hemos descrito en la sección anterior de que toda DGC-álgebra puede expresarse como producto tensorial de álgebras exteriores y polinomiales dotado de una diferencial que es, a su vez, derivación. La conexión se revelará una propiedad fundamental para garantizar la finitud del proceso de perturbación en la obtención de resoluciones pequeñas.

Partimos pués de una DGC-álgebra E, expresada ya en forma "factorizada" como un PTT de álgebras exteriores y álgebras polinomiales. Nos restringiremos al caso en que la DGC-álgebra es *finitamente generada como álgebra*; es decir, se trata de un producto tensorial torcido de un número finito de álgebras de la forma $\tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in I} A_i$, donde I denota un conjunto **finito** de índices, ρ es una diferencial-derivación y A_i es, o bien un álgebra exterior o bien un álgebra polinomial, para todo $i \in I$. El considerar un álgebra finitamente generada y no una una DGC-álgebra de tipo finito (es decir, con un número finito de generadores en cada grado) es simplemente para aligerar un poco la notación y facilitar la lectura, ya que el método de cálculo homológico para este último caso será el mismo que planteamos aquí.

Teniendo en cuenta las ideas expresadas en la secciones anteriores, nuestro objetivo aquí es obtener un encadenamiento de contracciones que parta de la construcción Bar de A y desemboque en un DGA-módulo libre de tipo finito.

Con este fin, hacemos uso de las tres contracciones de álgebras semicompletas ya explicitadas en la sección anterior, a saber, las contracciones C_{BE}, C_{BP} y $C_{B\otimes}$.

Gracias a estas contracciones, podemos formar la siguiente contracción semicompleta de DGC-álgebras, que notaremos por c:

$$\bar{B}(\otimes_{i\in I} A_i) \Rightarrow \otimes_{i\in I} \bar{B}(A_i) \Rightarrow \otimes_{i\in I} HBA_i,$$

donde HBA_i representa un álgebra exterior o un álgebra polinomial dividida, según sea A_i un álgebra polinomial o un álgebra exterior, respectivamente.

Denotamos por $\bar{f}$, $\bar{g}$ y $\bar{\phi}$, respectivamente, a la proyección, inclusión y operador de homotopía de c.

El paso siguiente es, obviamente, perturbar c. El morfismo ρ produce una perturbación-derivación δ en la diferencial tensorial de la construcción $\bar{B}(\otimes_{i\in I}A_i)$, viniendo garantizada la nilpotencia puntual de la composición $\bar{\phi}\delta$ por los siguientes hechos:

- El operador de homotopía ϕ incrementa en uno la dimensión simplicial de $\bar{B}(\otimes_{i\in I}A_i)$.
- La perturbación δ no afecta a la dimensión simplicial. De hecho, δ actúa disminuyendo en uno la dimensión tensorial.

Así, aplicando el LBP, obtenemos la siguiente contracción perturbada:

$$\bar{B}(\tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in I}A_i) \overset{c_{\bar{\delta}}}{\Rightarrow} (\otimes_{i\in I}HBA_i, \bar{d}),$$

donde $\bar{d} = d_{\delta}$ es la diferencial determinada por el proceso de perturbación.

Teniendo en cuenta que las contracciones anteriormente consideradas son todas ellas semicompletas, resulta que $c_{\bar{\delta}}$ constituye asimismo una contracción de DGA-álgebras semicompleta. Por tanto, $(\otimes_{i\in I}HBA_i, d)$ es un **modelo homológico** para la DGA-álgebra conmutativa $\tilde{\otimes}_{i\in I}A_i$.

Para determinar completamente este modelo basta con saber como actúa la diferencial d.

En conclusión, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1 *Dado un PTT finito A de álgebras exteriores y polinomiales, existe una contracción de álgebras semi-completa de la construcción $\bar{B}(A)$ a una DGC-álgebra H finitamente generada. Esto es, existe un modelo homológico para A. Además, H es un PTT de álgebras exteriores y polinomiales modificadas tal que, a nivel de álgebra graduada, se tiene:*

- *cada factor del tipo $E(u, 2n-1)$ en A contribuye con un factor $\Gamma(\sigma(u), 2n)$ en H.*
- *cada factor del tipo $P(u, 2n)$ en A contribuye con un factor $E(\sigma(u), 2n+1)$ en H.*

Aunque el hecho de usar el verbo "existe" en este teorema podría dar lugar a considerar el mismo desde una óptica no-algorítmica, recalquemos que su demostración es completamente constructiva. De hecho, en ella se describe un algoritmo general de cálculo de la 1-homología de DGC-álgebras. Esta aclaración será asimismo válida para los restantes teoremas fundamentales que vamos a enunciar en esta memoria.

Con el fin de poder hablar de manera precisa de los problemas de complejidad que plantea el cálculo de la diferencial sobre un elemento cualquiera del modelo, establecemos las siguientes definiciones.

Sea $h : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Se dice que un morfismo de DG-módulos $f : M \to M'$ es $O(h)$ en tiempo si para todo número natural n y para todo elemento z de M_n, se tiene que el número de operaciones elementales para realizar $f(z)$ está acotado por $h(n)$.

Sean $h_i : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, con $i = 1, 2, 3$. Se dice que una contracción $c : \{N, M, f, g, \phi\}$ es $(O(h_1), O(h_2), O(h_3))$ cuando f es $O(h_1)$, g es $O(h_2)$ y ϕ es $O(h_3)$.

Desde este punto de vista, la contracción $C_{B\otimes}$ resulta ser $(O(n)), O(2^n), O(2^n))$. Esto da idea de la elevada complejidad que presentan los morfismos componentes de una contracción perturbada en la que la contracción inicial es una composición de otras, entre las cuáles figura $C_{B\otimes}$.

Por otra parte, C_{BE} es $(O(n), O(n), O(1))$ y C_{BP} es $(O(1), O(1), O(1))$.

La fórmula de la diferencial $\bar{d}$ que nos aporta la teoría de perturbación homológica es

$$\bar{d} = \bar{f} \circ \bar{\delta} \circ (1 - \bar{\phi} \circ \bar{\delta} + \bar{\phi} \circ \bar{\delta} \circ \bar{\phi} \circ \bar{\delta} - \cdots) \circ \bar{g}. \tag{3.4}$$

Se tiene que $\bar{d}$ es una derivación y, por tanto, un morfismo compatible con el producto existente en el modelo homológico. Esto quiere decir, en particular, que sólo es necesario conocer el valor de $\bar{d}$ sobre los generadores del modelo (habrá tantos como indique el cardinal del conjunto de índices I), lo cual supone un enorme ahorro a la hora de determinar completamente $\bar{d}$.

Según lo comentado previamente sobre la eficiencia en la evaluación de los morfismos componentes de las contracciones que entran en juego, y a la vista de la fórmula 3.4, una primera impresión es que la evaluación de $\bar{d}$ sobre un generador cualquiera se revela, en general, un proceso esencialmente exponencial. En la sección siguiente, veremos cómo restringiéndonos a una clase especial de DGC-álgebras y haciendo uso de una propiedad algebraica que verifica en este caso particular la proyección $\bar{f}$ de la contracción c, podemos reducir el cálculo homológico a la simple evaluación de fórmulas numéricas. Estos alentadores resultados nos hacen estar expectantes ante la posibilidad de poder mejorar la eficiencia del método en el caso general.

Por último, la información que nos proporciona el teorema anterior puede ser usado para establecer la generación de resoluciones pequeñas sobre $DGC-algebras$.

Teorema 3.3.2 *Sea A una DGC-álgebra. Dada una contracción de álgebras semi-completa de la construcción $\bar{B}(A)$ a una DGC-álgebra H de tipo finito , en la que su operador de homotopía hace crecer en uno el grado simplicial, existe una resolución libre K que proviene de la resolución Bar. Más concretamente, K es un PTT de las DGC-álgebras A y H y la reducción asociada es una contracción de álgebras semi-completa.*

Demostración.

En primer lugar, dada la contracción de álgebras semicompleta c : $\{\bar{B}(A), H, f, g, \phi\}$ determinada por el teorema anterior, podemos construir la contracción producto tensorial siguiente:

$$1 \otimes c : \{A \otimes \bar{B}(A), A \otimes H, 1_A \otimes f, 1_A \otimes g, 1_A \otimes \phi\}$$

Esta última contracción es una contracción de álgebras semi-completa, considerando tanto en $A \otimes \bar{B}(A)$ como en $A \otimes H$ los productos naturales inducidos.

Ahora la cuestión se reduce aplicar el lema de perturbación de álgebras semi-completas, tomando el morfismo θ (véase 1.4) como perturbación de álgebras. Obviamente, θ es una derivación-perturbación de $A \otimes \bar{B}(A)$; queda probar la nilpotencia puntual de la composición $(1_A \otimes \phi)\theta$. La DGA-álgebra $A \otimes \bar{B}(A)$ posee una filtración determinada por el grado tensorial de la construcción Bar $\bar{B}(A)$. Debido a que A es conexa, θ hace disminuir de, al menos, uno el grado de filtración. Por otra parte, como $1_A \otimes \phi$ hace crecer el grado simplicial de la construcción Bar en uno, este operador de homotopía preserva el grado de la filtración. Entonces, $(1_A \otimes \phi)\theta$ hace disminuir el grado de filtración de, al menos, uno. Esto significa que esta composición es puntualmente nilpotente y completa la demostración.

□

A la vista del teorema previo, es posible establecer el siguiente resultado donde se obtiene una "pequeña" resolución libre sobre una DGC-álgebra.

Teorema 3.3.3 *Dado un TTP finito de álgebras exteriores y polinomiales, existe una resolución libre $A\tilde{\otimes}^{\rho} H$ que proviene de la resolución bar. Más concretamente, la reducción es una contracción de álgebras semi-completa y el complejo reducido H viene determinado por el Teorema 3.3.1.*

3.3.1 Un Caso concreto: la 1-homología de las DGC-álgebras $A^{s,(r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,e_2,\ldots,e_n}$

Las DGC-álgebras $A^{s,(r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,e_2,\ldots,e_n}$ han sido previamente definidas en la sección 1 de este capítulo. En principio, seguimos aquí el procedimiento general descrito anteriormente, para después, aprovechar un matiz técnico que permite mejorar enormemente el proceso de cálculo homológico.

En el caso que nos ocupa, la contracción c de la que partimos viene dada por:

$$\begin{gathered}
\bar{B}(E(x,2s+1)\otimes P(y_1,2s+2)\otimes\cdots\otimes P(y_n,(2s+2)(r_1+1)\cdots(r_{n-1}+1)))\\
\stackrel{C_{\bar{B}\otimes}}{\Rightarrow}\\
\bar{B}(E(x,2s+1))\otimes\bar{B}(P(y_1,2s+2))\otimes\cdots\otimes\bar{B}(P(y_n,(2s+2)(r_1+1)\cdots(r_{n-1}+1)))\\
\stackrel{C_{\bar{B}E}\otimes C_{\bar{B}P}\otimes\cdots}{\Rightarrow}\\
\Gamma(\sigma(x),2s+2)\otimes E(\sigma(y_1),2s+3)\otimes\cdots\otimes E(\sigma(y_n),(2s+2)(r_1+1)\cdots(r_{n-1}+1)+1)).
\end{gathered}$$

Las diferenciales ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n producen una perturbación-derivación $\bar{\delta}$ en la construcción

$$\begin{gathered}
\bar{B}(E(x,2s+1)\otimes P(y_1,2s+2)\otimes\\
\otimes\cdots\otimes P(y_n,(2s+2)(r_1+1)\cdots(r_{n-1}+1))).
\end{gathered}$$

Por perturbación, obtenemos la siguiente contracción semicompleta:

$$\begin{gathered}
\bar{B}(A^{s,(r_1,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,\ldots,e_n})\\
\stackrel{C_{\bar{\delta}}}{\Rightarrow}\\
(\Gamma(\sigma(x),2s+2)\otimes E(\sigma(y_1),2s+3)\otimes\\
\otimes\cdots\otimes E(\sigma(y_n),(2s+2)(r_1+1)\cdots(r_{n-1}+1)+1)),\bar{d}),
\end{gathered}$$

donde $\bar{d}$ es la diferencial determinada por el proceso de perturbación.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
H\bar{B}A^{s,(r_1,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,\ldots,e_n} &= (\Gamma(\sigma(x),2s+2)\otimes E(\sigma(y_1),2s+3)\otimes\\
&\otimes\cdots\otimes E(\sigma(y_n),(2s+2)(r_1+1)\cdots(r_{n-1}+1)+1)),\bar{d})
\end{aligned}$$

es **un modelo homológico** para este tipo de DGA-álgebras.

En este caso, sólo necesitamos evaluar la diferencial sobre los generadores $\sigma(y_1)$, $\sigma(y_2)$, ..., $\sigma(y_n)$.

En el cálculo concreto de la homología de $A_{e_1}^{s,()}$, vemos que la fórmula (3.4) se reduce a $\bar{f} \circ \bar{\delta} \circ \bar{g}$, ya que $\bar{\phi} \circ \bar{\delta} \circ \bar{g} = 0$.

Progresemos ahora en el cálculo de la imagen de la diferencial sobre cada generador del modelo.

En primer lugar, $\bar{d}(\sigma(y_1)) = -e_1 \cdot \sigma(x)$.

Para $\sigma(y_2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{d}(\sigma(y_2)) &= \bar{f}_{\bar{\delta}} \circ \bar{\delta} \circ \bar{g}(\sigma(y_2)) \\ &= -e_2 \cdot \bar{f}_{\bar{\delta}}([x \otimes {y_1}^{r_1}]). \end{aligned}$$

Nos hemos de remitir, pues, al estudio de la evaluación de la proyección perturbada sobre el elemento $[x \otimes {y_1}^{r_1}]$. Ahora bien, $\bar{f}_{\bar{\delta}}([x \otimes {y_1}^{r_1}])$ es 0, si $r_1 \geq 1$; y es $\bar{x}$, si $r_1 = 0$. Teniendo en cuenta (3.3), sabemos que $\bar{\phi}([x \otimes {y_1}^{r_1}]) = -[{y_1}^{r_1}|x]$. Pero $\bar{\delta}$ sobre este elemento resultante nos da $r_1 \cdot e_1[x \otimes {y_1}^{r_1-1}|x]$. Si seguimos aplicando alternativamente los morfismos $\bar{\phi}$ y $\bar{\delta}$ a este último elemento, obtendremos al cabo de r_1 iteraciones el elemento $r_1! \cdot {e_1}^{r_1}[x| \overset{r_1+1 \text{ veces}}{\cdots} |x]$. La única posibilidad no nula de aplicación a este elemento es $\bar{f}$, que nos proporciona finalmente la fórmula siguiente:

$$\bar{f}_{\bar{\delta}}([x \otimes {y_1}^{r_1}]) = r_1! \cdot {e_1}^{r_1} \cdot \sigma(x)^{(r_1+1)}.$$

Concluyendo, tenemos que la diferencial $\bar{d}$ aplicada sobre $\sigma(y_2)$ es

$$\bar{d}(\sigma(y_2)) = -r_1! \cdot e_1{}^{r_1} \cdot e_2 \cdot \sigma(x)^{(r_1+1)}.$$

Calculemos ahora la imagen por $\bar{f}_{\bar{\delta}}$ de un elemento de la forma $[x \otimes y_1{}^{r_1}| \overset{m \text{ veces}}{\cdots} |x \otimes y_1{}^{r_1}]$. Es claro que el grado $|[x \otimes y_1{}^{r_1}]|$ es, evidentemente, par.

En primer lugar, demostremos que se tiene la siguiente igualdad:

$$\bar{f}_{\bar{\delta}}([x \otimes y_1{}^{r_1}] \star \overset{m \text{ veces}}{\cdots} \star [x \otimes y_1{}^{r_1}]) = \bar{f}_{\bar{\delta}}([x \otimes y_1{}^{r_1}]) \cdot \overset{m \text{ veces}}{\cdots} \cdot \bar{f}_{\bar{\delta}}([x \otimes y_1{}^{r_1}]), \qquad (3.5)$$

donde $\star$ denota el producto de la construcción Bar y $\cdot$ denota el producto en el modelo homológico. En lo que sigue, consideraremos $\star(a \otimes b) = a \star b$.

Pretendemos probar que la proyección $\bar{f}_{\bar{\delta}}$ preserva potencias de elementos de la forma $[x \otimes y_1{}^{r_1}]$.

Observamos que, teniendo en cuenta la definición del producto shuffle,

$$\bar{f}_{\bar{\delta}}([x \otimes y_1{}^{r_1}] \star \overset{m \text{ veces}}{\cdots} \star [x \otimes y_1{}^{r_1}]) = m! \, \bar{f}_{\bar{\delta}}([x \otimes y_1{}^{r_1}] | \overset{m \text{ veces}}{\cdots} | [x \otimes y_1{}^{r_1}]),$$

por ser $|[x \otimes y_1^{r_1}]|$ par.

Según esta expresión, bastará probar la fórmula (3.5) para el caso en que tengamos un elemento de la forma $[x \otimes y_1^{r_1}] \otimes [x \otimes y_1^{r_1}]$.

Como hay que probar que $\bar{f}_{\bar{\delta}}$ es multiplicativa sobre este elemento, consideramos la contracción producto tensorial de $c_{\bar{\delta}}$ por sí misma, $c_{\bar{\delta}} \otimes c_{\bar{\delta}}$, de modo que se verifica la identidad:

$$1^{\otimes 2} - \bar{g}_{\bar{\delta}}^{\otimes 2} \bar{f}_{\bar{\delta}}^{\otimes 2} = \bar{d}^{[2]} \bar{\phi}_{\bar{\delta}}^{[\otimes 2]} + \bar{\phi}_{\bar{\delta}}^{[\otimes 2]} \bar{d}^{[2]}. \qquad (3.6)$$

Aplicando $\bar{f}_{\bar{\delta}}(\star)$ a izquierda de la fórmula anterior y teniendo en cuenta la relación entre los productos de las DGA-álgebras de la contracción,

$$\cdot = \bar{f}_{\bar{\delta}}(\star)(\bar{g}_{\bar{\delta}} \otimes \bar{g}_{\bar{\delta}}) = \bar{f}_{\delta}(\bar{g}_{\bar{\delta}} \star \bar{g}_{\delta});$$

resulta que (3.6) se transforma en

$$\bar{f}_{\bar{\delta}}(\star) - \bar{f}_{\bar{\delta}}(\star)\bar{g}_{\bar{\delta}}^{\otimes 2}\bar{f}_{\bar{\delta}}^{\otimes 2} = \bar{f}_{\bar{\delta}}(\star)d^{[2]}\bar{\phi}_{\bar{\delta}}^{[\otimes 2]} + \bar{f}_{\bar{\delta}}(\star)\bar{\phi}_{\bar{\delta}}^{[\otimes 2]}\bar{d}^{[2]}. \tag{3.7}$$

De ser nulo el resultado de aplicar el segundo miembro de (3.7) a nuestro elemento en cuestión, habríamos terminado la prueba. Veamos ahora que, en efecto, esta circunstancia se verifica.

Las diferenciales tensorial y simplicial de la construcción Bar actuando sobre nuestro elemento son ambas nulas, por definición; en consecuencia, la composición $\bar{f}_{\bar{\delta}}(\star)(1 \otimes \bar{\phi}_{\bar{\delta}} + \bar{\phi}_{\bar{\delta}} \otimes \bar{g}_{\bar{\delta}}\bar{f}_{\bar{\delta}})(1 \otimes d + d \otimes 1)$ es cero sobre este elemento.

Por otro lado, como la diferencial de la construcción Bar es compatible con $\bar{f}_{\bar{\delta}}$ y con el producto shuffle, se tiene que

$$\bar{f}_{\bar{\delta}}(\star)(1 \otimes d + d \otimes 1)(1 \otimes \bar{\phi}_{\bar{\delta}} + \bar{\phi}_{\bar{\delta}} \otimes \bar{g}_{\bar{\delta}}\bar{f}_{\bar{\delta}}) = d\bar{f}_{\bar{\delta}}(\star)(1 \otimes \bar{\phi}_{\bar{\delta}} + \bar{\phi}_{\bar{\delta}} \otimes \bar{g}_{\bar{\delta}}\bar{f}_{\bar{\delta}}).$$

El segundo sumando de la igualdad anterior es claramente nulo, por ser la contracción dada semicompleta. Estudiemos cómo actúa el primer sumando sobre un elemento del tipo dado, $[x \otimes y_1^{r_1}] \otimes [x \otimes y_1^{r_1}]$.

Según la fórmula (3.3), al aplicar $\bar{\phi}$ obtenemos una inversión, a saber: $-[y_1^{r_1}|x]$. Un seguimiento de la actuación de los morfismos $\bar{\phi}_{\bar{\delta}}$ y $\bar{f}_{\bar{\delta}}$ determina que la imagen que obtenemos finalmente es de la forma $[x|\cdots|x]$. Por último, el aplicar d sobre este elemento nos conduce directamente al elemento nulo.

Concluimos de este modo que $\bar{f}_{\bar{\delta}}$ preserva productos de la forma

$$[x \otimes y_1^{r_1}] \star \cdots \star [x \otimes y_1^{r_1}].$$

Ahora, podemos deducir sin mucho esfuerzo que:

$$\bar{f}_{\bar{\delta}}([x \otimes {y_1}^{r_1}| \overset{m \text{ veces}}{\cdots} |x \otimes {y_1}^{r_1}]) = \frac{(mr_1 + m)!}{m!(r_1+1)^m} \cdot {e_1}^{mr_1} \cdot \bar{x}^{mr_1+m}. \tag{3.8}$$

Este último resultado es fundamental para mejorar ostensiblemente la eficiencia del proceso de cálculo de la diferencial $\bar{d}$.

Estamos en condiciones de evaluar $\bar{d}$ sobre el generador $\bar{y}_3$:

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\sigma(y_3)) &= [y_3], \\
\bar{\delta}([y_3]) &= -e_3 \cdot [x \otimes {y_1}^{r_1} \otimes {y_2}^{r_2}], \\
\bar{f}([x \otimes {y_1}^{r_1} \otimes {y_2}^{r_2}]) &= 0, \\
\bar{\phi}([x \otimes {y_1}^{r_1} \otimes {y_2}^{r_2}]) &= -[{y_2}^{r_2}|x \otimes {y_1}^{r_1}], \\
\bar{\delta}([{y_2}^{r_2}|x \otimes {y_1}^{r_1}]) &= r_2 \cdot e_2 \cdot [x \otimes {y_1}^{r_1} \otimes {y_2}^{r_2-1}|x \otimes {y_1}^{r_1}], \\
(\bar{\delta} \circ \bar{\phi})^{r_2}([x \otimes {y_1}^{r_1} \otimes {y_2}^{r_2}]) &= r_2! \cdot {e_2}^{r_2} \cdot [x \otimes {y_1}^{r_1}| \overset{r_2+1 \text{ veces}}{\cdots} |x \otimes {y_1}^{r_1}].
\end{aligned}$$

Haciendo uso de estos resultados y de (3.8), tenemos que:

$$\bar{d}(\sigma(y_3)) = -r_2! \cdot \frac{[(r_2+1)(r_1+1)]!}{(r_2+1)!(r_1+1)^{r_2+1}} \cdot e_3 \cdot {e_2}^{r-2} \cdot {e_1}^{r_1(r_2+1)} \cdot \sigma(x)^{(r_2+1)(r_1+1))}.$$

Trabajando de esta forma, podremos explicitar todas las diferenciales de los generadores $\sigma(y_i)$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\bar{d}(\sigma(y_i)) &= -r_{i-1}! \cdot \frac{[\prod_{k=1}^{i-1}(r_k+1)]!}{(r_{i-1}+1)! \prod_{k=1}^{i-2}(r_k+1)^{\prod_{j=k+1}^{i-1}(r_j+1)}} \cdot e_i \cdot {e_{i-1}}^{r_{i-1}} \cdot \\
&\quad \cdot \prod_{k=i-2}^{1} {e_k}^{r_k \prod_{j=k+1}^{i-1}(r_j+1)} \cdot \sigma(x)^{\left(\prod_{k=1}^{i-1}(r_k+1)\right)},
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Esto completa el estudio del cálculo de la 1-homología de $A_{e_1,\ldots,e_n}^{s,(r_1,\ldots,r_{n-1})}$.

El complicado coeficiente que aparece en (3.9) puede dar una idea de la complejidad del cálculo homológico que puede presentarse en el caso general. El localizar la homología en un primo p, es decir, considerando $\mathbf{Z}_{(p)}$ como anillo de base, palia en enorme medida este problema de números muy grandes.

El algoritmo que finalmente se obtiene para esta clase particular de DGC-álgebras ha sido ya implementado en máquina informática por David Artigas Campos ([7], [6]), usando el paquete de programas Mathematica.

3.4 Algoritmo de cálculo de la n-homología p-local de DGC-álgebras

Nos preocupamos aquí de construir un modelo homológico para una construcción bar iterada $\bar{B}^n(A)$ de un PTT A de álgebras exteriores y polinomiales. Este modelo nos permitirá determinar la n-homología de A.

3.4.1 Álgebra de n-homología p-local de una DGC-álgebra

Como hemos visto en el capítulo anterior, la construcción bar de una DGC-álgebra A es otra DGC-álgebra. Podemos, pues, pensar en iterar el proceso e intentar calcular un modelo homológico pequeño para $\bar{B}(A)$, para $\bar{B}^2(A)$, y así sucesivamente. Es decir, estudiemos la computabilidad de la n-homología de una DGC-álgebra finitamente generada.

A continuación damos una idea, de manera informal, de los problemas que entraña dicho cometido y a los cuales se dará solución a lo largo de la sección.

Consideremos la contracción de álgebras semicompleta, explicitada ya anteriormente, y que proporciona un modelo homológico para un álgebra polinomial:

$$\bar{B}(P) \overset{sc}{\Rightarrow} E$$

Si consideramos las construcciones Bar correspondientes, se obtiene también una nueva contracción entre ellas. Pretendemos, entonces, calcular un modelo homológico pequeño para $\bar{B}(P)$. El primer inconveniente que surge es el siguiente: dada una contracción de álgebras semi-completa $A \Rightarrow A'$, ¿podemos construir una contracción de $\bar{B}(A)$ a $\bar{B}(A')$? En caso afirmativo, un segundo problema que aparece es determinar si la contracción obtenida es una contracción de álgebras semicompleta (es decir, si lo que tenemos es realmente un modelo homológico para $\bar{B}(P)$):

$$\bar{B}^2(P) \overset{?}{\Rightarrow} \bar{B}(E) \cong \Gamma$$

Ahora bien si iteramos por segunda vez el proceso, emerge un segundo problema consistente en encontrar un modelo homológico pequeño para un álgebra polinomial dividida Γ (y con ello un modelo para $\bar{B}^2(P)$),tal que podamos seguir iterando las veces que queramos:

$$\bar{B}^3(P) \Rightarrow \bar{B}^2(E) \cong \bar{B}(\Gamma) \Rightarrow ?$$

Veremos que esto será posible si nos restringimos al anillo $\mathbf{Z}$ localizado en un primo p.

Especificaremos ahora un método de cálculo de un modelo homológico para $\bar{B}^{m-1}(A)$ (o un modelo n-homologico para A), donde A es un DGC-álgebra. Para ello enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 3.4.1 *Sea $\mathbf{Z}_{(p)}$ nuestro anillo base. Sea A un PTT de n álgebras exteriores y polinomiales divididas y sea m un número natural. Existe una contracción de álgebras semicompleta de la construcción bar iterada $\bar{B}^m(A)$ a un producto tensorial de PTTs k-indescomponibles de álgebras exteriores y polinomiales modificadas con $k \leq n$.*

De hecho nuestro punto de partida aquí es la contracción de álgebras semicompleta (determinada en el Teorema 3.3.1) de $\bar{B}(A)$ en un PTT de n álgebras exteriores y polinomiales modificadas.

El contenido de esta sección que a continuación exponemos, constituye la demostración del Teorema anterior.

Debemos referirnos en primer lugar a un teorema probado por Gugenheim, Lambe y Stasheff en el cual, tomando como dato una contracción c de una DG-álgebra A en un DG-modulo M, se construye una nueva contracción $\bar{B}(c)$ de la construcción Bar de A en la construcción Bar tilde de Stacheff de M (véase [48]). Daremos la demostración de este Teorema, con el fin de convencer al lector del carácter constructivo del mismo.

Teorema 3.4.2 *[22]*

Sean A y M una DG-álgebra conexa y un DG-módulo conexo respectivamente, y $c : \{A, M, f, g, \phi\}$ una contracción. Se puede establecer la siguiente contracción de coálgebras completa:

$$\bar{B}(c) : \{\bar{B}(A), \tilde{B}(M), \bar{B}(f), \bar{B}(g), \bar{B}(\phi)\} \tag{3.10}$$

donde d_s^A es la diferencial simplicial de $\bar{B}(A)$ y el DG-módulo $\tilde{B}(M)$ es la construcción bar tilde de Stasheff.

Demostración.

A partir de la contracción c, podemos construir (usando el Lema 2.1.2) la siguiente contracción

$$T(S(\bar{c})) : \{T(S(\bar{A})), T(S(\bar{M})), T(S(f)), T(S(g)), T(S(\phi))\},$$

que es una contracción de coálgebras completa (ver [24],[21]). Ahora bien, la diferencial simplicial d_s^A de la construcción $\bar{B}(A)$ es una perturbación de coálgebras para esta contracción. Es muy fácil ver que se tiene la nilpotencia puntual para la composición $T(S(\phi))d_s^A$. Usando el lema de perturbación de coálgebras para contracciones completas (completamente análogo al de álgebras), obtenemos pués la contracción que buscábamos:

$$\bar{B}(c) : \{\bar{B}(A), \tilde{B}(M), \bar{B}(f), \bar{B}(g), \bar{B}(\phi)\}.$$

□

Si $M = A'$ es una DG-álgebra y c es una contracción de álgebras semicompleta, entonces la contracción $\bar{B}(c)$ "conecta" dos construcciones bar (véase [22]). Por ser g un morfismo de DG-álgebras, $\bar{B}(c)$ es una contracción de $\bar{B}(A)$ a $\bar{B}(A')$ y $\bar{B}(g)$ coincide con $T(S(g))$. Como este morfismo preserva los productos shuffle, $\bar{B}(c)$ es una contracción de álgebras con la inclusión multiplicativa. Sin hacer uso de ninguna suposición se prueba en [42] que $\bar{B}(g)$ siempre preserva los productos shuffle. En otras palabras, el teorema anterior queda refinado al poderse determinar el comportamiento de la contracción $\bar{B}(c)$ con respecto a la estructura de álgebra determinada por los productos shuffle en $\bar{B}(A)$ y en $\tilde{B}(M)$.

Teorema 3.4.3 *[42]*

Sea $c : \{A,\ M,\ f,\ g,\ \phi\}$ una contracción donde A es una DGC-álgebra y M es un DG-módulo conexo. Entonces

$$\bar{B}(c) : \{\bar{B}(A),\ \tilde{B}(M),\ \bar{B}(f),\ \bar{B}(g),\ \bar{B}(\phi)\}$$

es una contracción de álgebras semicompleta.

Con este teorema tenemos un resultado más general aún del que buscábamos. En el caso particular de dos DGC-álgebras se tiene que la contracción correspondiente entre las construcciones Bar es semicompleta. Queda así resuelta la primera cuestión planteada al comienzo de este capítulo. Pasamos a estudiar la segunda de ellas. La contracción que buscamos partiendo de la construcción Bar de un álgebra polinomial modificada con un generador de grado par, se puede conseguir trabajando en $\mathbf{Z}_{(p)}$, siendo p un número primo.

Teorema 3.4.4 *[42] Sea n un número natural y p un primo impar. Existe una contracción de DGA-álgebras, que denotamos por $C_{B\Gamma}$, de tipo $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ de $\bar{B}(\Gamma(u, 2n))$ a la DGA-álgebra*

$$E(\sigma(u), 2n+1) \otimes (\otimes_{i\geq 1}(E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i+1)\tilde{\otimes}^{\chi_p}\Gamma(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u), 2np^i+2))),$$

donde la diferencial χ_p viene definida por la fórmula

$$\chi_p(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u)) = p\sigma\gamma_{p^i}(u), \quad i \geq 1$$

Recordamos que, como ya vimos en la Sección 1, los generadores del álgebra polinomial modificada venían dados por

$$\gamma_0(u) = 1, \gamma_1(u) = u, \gamma_2(u), \dots, \gamma_k(u), \dots, \quad \text{con} \quad |\gamma_k(u)| = 2n;$$

y el producto venía definido por la expresión:

$$\gamma_k(u)\gamma_h(u) = \frac{(k+h)!}{k!h!}\gamma_{k+h}(u).$$

Nótese que los generadores del modelo homológico minimal de la DGA-álgebra $\Gamma(u, 2n)$ vienen expresados en función de las operaciones suspensión, p-transpotencia y potencia modificada (véase [42]). Esto es para ver las "clases" de homología que se obtienen a partir de un generador inicial.

El teorema anterior tiene también una muy fuerte influencia en Topología Algebraica. El trabajo realizado en [13] y [14] por Eilenberg y Mac Lane basado en contracciones explícitas tenía por motivación principal el cálculo de la homología de unos espacios muy importantes teoría de homotopía (actualmente, estos espacios son llamados *espacios de Eilenberg-MacLane*). No pudieron llegar a este fin ya que un paso que no pudieron franquear fue precisamente el obtener una contracción explícita para la construcción $\bar{B}(\Gamma(u,2n))$. Posteriormente, Henri Cartan en [11] dio una solución al problema de la homología de los espacios de Eilenberg-MacLane sin tener que trabajar con contracciones, sino manejando un tipo especial de resoluciones y morfismos que inducían isomorfismo en homología (llamados también quasi-isomorfismos). La aparición de la técnica de perturbación homológica ha permitido que el trabajo de Eilenberg-MacLane sobre este tema pueda retomarse de nuevo. En [42] se realiza una translación del trabajo de Henri Cartan [11] al contexto de contracciones, siguiendo las pautas que ya habían establecido Eilenberg y Mac Lane.

Por supuesto, otra linea de actuación plausible para el cálculo de la 1-homología de $\Gamma(u,2n)$ podría haber consistido en factorizar este álgebra como PTT de álgebras exteriores y polinomiales y, posteriormente, aplicar el algoritmo del Teorema 3.3.1. No obstante, hemos optado por reutilizar los resultados de [42] por varias razones: una, por poner en evidencia la estrechas relaciones y vínculos que mantienen siempre las áreas de la Topología Algebraica y el Algebra Homológica. La segunda razón y quizás la más importante, es la belleza intrínseca que presenta esos resultados.

Ahora, exponemos un teorema crucial en el que se establece un resultado de preservación homológica (o no degeneración) de la ℓ-indescomponibilidad de PTTs de álgebras exteriores y polinomiales modificadas.

Teorema 3.4.5 *Sea $\mathbf{Z}_{(p)}$ nuestro anillo base. Existe un contracción de álgebras semi-completa de la construcción Bar de un producto tensorial torcido ℓ-indescomponible (con $\ell \geq 2$) minimal A de álgebras exteriores y polinomiales mod-*

ificadas a un producto tensorial H de productos tensoriales torcidos k-singulares (con $k \leq \ell$) minimales de álgebras exteriores y polinomiales modificadas (dotadas de su producto natural). Es decir, H es un modelo homológico minimal de A.

Más aún, a nivel de álgebra graduada tenemos que

- *cada factor $E(u, 2n-1)$ en A contribuye con un factor $\Gamma(\sigma(u), 2n)$ en H.*
- *cada factor $\Gamma(u, 2n)$ en A contribuye con factores $E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i + 1)$ (con $i \geq 0$) y $\Gamma(\varphi_p\gamma_{p^i-1}(u), 2np^i + 2)$ (con $i \geq 1$) en H.*

Demostración.

Usando contracciones ya descritas aquí y perturbando, se puede establecer el proceso de construcción de una contracción de álgebra explícita para la construcción Bar reducida de cualquier producto tensorial torcido $A = \tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in\{1,\dots,\ell\}} A_i$, donde $A_i = E(u_i, n_i)$ (con n_i impar) o $A_i = \Gamma(u_i, n_i)$ (con n_i par) y $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_\ell$. Precisando, se usarán las contracciones $C_{B\otimes}$, C_{BE}, $C_{B\Gamma}$ para construir una contracción de álgebra semicompleta C de $\bar{B}(\otimes^{\ell}_{i=1} A_i)$ (excluyendo ρ) a un producto tensorial $(H, d_H) = \otimes^{\ell}_{i=1} H_i$, donde $H_i = \Gamma(\sigma(u), 2n)$ si $A_i = E(u, 2n-1)$ y

$$H_i = E(\sigma(u), 2n+1) \otimes \otimes_{i\geq 1} [E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i + 1) \tilde{\otimes}^{\rho_p} \Gamma(\varphi_p\gamma_{p^i-1}(u), 2np^i + 2)]$$

si $A_i = \Gamma(u, 2n)$. De ahora en adelante se omitirá el grado del generador en la descripción de las álgebras. La derivación p-minimal ρ produce un dato de perturbación de álgebra δ para C. Más concretamente, ρ induce un dato de perturbación en la diferencial tensorial de $\bar{B}(\otimes_{i\in I} A_i)$. Es claro que δ es una derivación p-minimal Se denota por f, g y ϕ la proyección, la inclusión y el operador de homotopía de C. Se deduce la nilpotencia puntual de la composición $\phi\delta$ de los siguientes hechos:

- ϕ aumenta el grado simplicial en $\bar{B}(\otimes_{i\in I} A_i)$ en 1.
- δ no cambia el grado simplicial. De hecho, este morfismo disminuye el grado tensorial en 1.

Este es el momento de aplicar el Lema de perturbación de álgebras para contracciones semicompletas, obteniendo, de esta forma, una contracción de álgebra semicompleta C_δ de $\bar{B}(A)$ en $(H,\ d_H + d_\delta)$. Teniendo en cuenta que δ es p-minimal, está claro que la DGC-álgebra pequeña $(H, d_H + d_\delta)$ de C_δ es un modelo homológico p-minimal de A. El hecho de que la inclusión de C_δ sea un morfismo de DG-álgebras mejora sensiblemente los cálculos para la determinación de la diferencial perturbada en H. La presencia de una estructura de DGA-álgebra en el modelo homológica p-minimal limita enormemente el modo en que la diferencial $d_\delta = f\delta\Sigma_r^\delta g$ actúa. De hecho, sólo es necesario computar este morfismo en los generadores de la DGC-álgebra.

Por tanto, queda determinada la estructura de álgebra graduada del modelo homológico p-minimal. A continuación se analiza en más detalle su estructura diferencial. Se probará por inducción directa sobre el número de DGC-álgebras que un modelo homológico p-minimal de A es un producto tensorial de PTTs k-indescomponibles, con $k \leq \ell$. Aquí se aplica la técnica de perturbación de una forma diferente: no se perturba sólo una vez la contracción C usando δ sino que se aplica la maquinaria de perturbación $\ell - 1$ veces a C usando las derivaciones $\delta|_{\otimes_{i=1}^k A_i}$, $2 \leq k \leq \ell$. Se controlará el comportamiento de la diferencial perturbada en el modelo homológico p-minimal usando argumentos de cambios de bases.

En primer lugar, se establece un resultado que es la clave para la preservación homológica (o más bien para la no degeneración) de la ℓ-indecomponibilidad del PTT A.

Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de álgebras de la forma $E(u)\tilde{\otimes}^{\rho_{\pm p}}\Gamma(v)$ con operador diferencial definido por $\rho_{\pm p}(v) = \pm\, p\, u$. Si consideramos la DGC-álgebra

$$C = \otimes_{i\in I}\, C_i, \tag{3.11}$$

se puede probar la siguiente propiedad:

$$p \operatorname{Ker} d_C \;=\; \operatorname{Im} d_C.$$

Es más, si B es un PTT p-minimal de álgebras exteriores y polinomiales modificadas y se denota la diferencial de $B \otimes \overline{C}$ por d_{BC}, se tiene:

$$p \operatorname{Ker} d_{BC} \;=\; \operatorname{Im} d_{BC}. \tag{3.12}$$

Después de estos preliminares, se aplica la inducción en el número de DG-álgebras. Para $\ell = 2$, se ha probado ya todo.

La DG-álgebra $A = \tilde{\otimes}^{\rho}_{i\in\{1,\ldots,\ell\}} A_i$ puede ser expresada de la forma

$$A = \tilde{\otimes}^{\rho'_{\ell-1}}_{i\in\{1,\ldots,\ell-1\}} A_i \;\tilde{\otimes}^{\rho_\ell} A_\ell,$$

donde $\rho'_{\ell-1} = \rho|_{\otimes_{i=1}^{\ell-1} A_i}$ y $\rho_\ell = \rho|_{A_\ell}$. Está claro que $\tilde{\otimes}^{\rho'_{\ell-1}}_{i\in\{1,\ldots,\ell-1\}} A_i$ es un PTT p-minimal de $\ell-1$ álgebras. La hipótesis de inducción es que existe una contracción de álgebra semicompleta, denotada por $C_{\ell-1}$, de la construcción Bar reducida de esta última álgebra en un producto tensorial $(H'_{\ell-1}, d')$ de dos DG-álgebras $(H'_{\ell-1,1}, d'_1)$ y $(H'_{\ell-1,2}, d'_2)$. La primera DG-álgebra $(H'_{\ell-1,1}, d'_1)$ es un producto tensorial de PTTs ℓ_r-indescomponibles p-minimales, con $r \in \{1,\ldots,s\}$ y $\sum_{r=1}^{s} \ell_r = \ell - 1$. Las álgebras exteriores y polinomiales modificadas que constituyen este producto tensorial son las álgebras $E(\sigma(\widehat{u_i}))$ y $\Gamma(\sigma(\widehat{u_i}))$ del modelo homológico p-minimal de $\otimes_{i=1}^{\ell-1} A_i$. La notación $\hat{u}$ hace referencia a que el generador u puede haber sido modificado por un cambio de base.

Por otra parte, $(H'_{\ell-1,2}, d'_2)$ es una DG-álgebra de la forma (3.11), compuesta por los pares

$$E(\widehat{\sigma\gamma_{p^j}(u_i)})\,\tilde{\otimes}^{\rho_p}\,\Gamma(\varphi_p\gamma_{p^{j-1}}(u_i)),$$

(donde u_i es de grado par) del modelo homológico p-minimal de $\otimes_{i=1}^{\ell-1} A_i$.

Usando las contracciones $C_{\ell-1}$, $C_{B\otimes}$, C_{BE} y $C_{B\Gamma}$, se construye una contracción de álgebras semicompleta, denotada por C_ℓ, de $\bar{B}(\tilde{\otimes}_{i\in\{1,\ldots,\ell-1\}}^{\rho'_{\ell-1}} A_i \otimes A_\ell)$ en $(H'_{\ell-1}, d')\otimes H_\ell$. Tomando como dato de perturbación la derivación δ_ℓ producida por ρ_ℓ en la diferencial tensorial de $\bar{B}(\tilde{\otimes}_{i=1,\ldots,\ell-1}^{\rho'_{\ell-1}} A_i \otimes A_\ell)$, queda perturbada la contracción C_ℓ y se obtiene una nueva contracción de álgebra semicompleta $(C_\ell)_{\delta_\ell}$ de $\bar{B}(A)$ al PTT $(H'_{\ell-1}, d')\tilde{\otimes}^{d_{\delta_\ell}} H_\ell$. Esta última DG-álgebra también es denotada por (H, d). La diferencial d_{δ_ℓ} está determinada por su acción sobre los generadores de la DG-álgebra H_ℓ. Si $A_\ell = E(u_\ell)$, entonces $H_\ell = \Gamma(\sigma(u_\ell))$. En este caso sólo es necesario computar la diferencial en el generador $\sigma(u_\ell)$. Supongamos que

$$d_{\delta_\ell}(\sigma(u_\ell)) \;=\; p^a v \,+\, p^b w,$$

donde $a, b \in \mathbf{N}$, $v \in H'_{\ell-1,1}$ y $w \in H'_{\ell-1,1}\otimes \overline{H'_{\ell-1,2}}$. Como $d'\, d_{\delta_\ell}(\sigma(u_\ell)) = 0$, entonces

$$p^a d'_1(v) + p^b d'(w) = 0.$$

A partir de los hechos $d'_1(v) \in H'_{\ell-1,1}$ y $d'(w) \in H'_{\ell-1,1}\otimes\overline{H'_{\ell-1,2}}$, se deduce que $d'_1(v) = 0$ y $d'(w) = 0$. Por la propiedad (3.12), existe un elemento $\underline{w} \in H'_{\ell-1,1}\otimes\overline{H'_{\ell-1,2}}$, tal que $d'(\underline{w}) = pw$.

Cambiando el generador $\sigma(u_\ell)$ por el generador $\widetilde{\sigma(u_\ell)} = \sigma(u_\ell) - p^{b-1}w$, se tiene $d(\widetilde{\sigma(u_\ell)}) = d_{\delta_\ell}(\widetilde{\sigma(u_\ell)}) = p^a\, v$, y, por tanto, se tiene que un modelo homológico p-minimal de A es un producto tensorial de PTTs k-indescomponibles (con $k \leq \ell$) p-minimales de álgebras exteriores y polinomiales modificadas.

Si $A_\ell = \Gamma(u_\ell)$ entonces

$$H_\ell = E(\sigma(u_\ell)) \otimes \ (\otimes_{i=1}^{\infty}[E(\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell))\,\tilde{\otimes}^{\rho_p}\,\Gamma(\varphi_p\gamma_{p^i-1}(u_\ell))]),$$

y por tanto hay que determinar la diferencial d_{δ_ℓ} sobre los generadores $\sigma(u_\ell)$, $\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell))$ y $\varphi_p\gamma_{p^i-1}(u_\ell)$, para todo $i = 1, 2, \ldots$. El proceso descrito en el caso anterior para el generador $\sigma(u_\ell)$ puede también realizarse aquí y se obtiene que la diferencial d_{δ_ℓ} sobre este generador (salvo cambio de base) recae en $H'^{1}_{\ell-1}$.

Ahora hay que controlar el comportamiento de d_{δ_ℓ} en las parejas de generadores $\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell)$ y $\varphi_p\gamma_{p^i-1}(u_\ell)$, para $i \geq 1$.

Supongamos que

$$\begin{aligned} d_{\delta_\ell}(\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell)) &= p^a\, v_i, \\ d_{\delta_\ell}(\varphi_p\gamma_{p^i-1}(u_\ell)) &= p^b\, w_i, \end{aligned}$$

con $a, b \in \mathbb{N}$ y $v_i, w_i \in H$, $\forall i \geq 1$.

Por otra parte se tiene

$$\begin{aligned} d(\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell)) &= d_{\delta_\ell}(\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell)), \\ \rho_p(\varphi_p\gamma_{p^i-1}(u_\ell)) &= p\,\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell) \end{aligned}$$

y

$$d(\varphi_p\gamma_{p^i-1}(u_\ell)) = (\rho_p + d_{\delta_\ell})(\varphi_p\gamma_{p^i-1}(u_\ell)).$$

Si se cambia el generador $\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell)$ por el elemento $\widetilde{\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell)} = \sigma\gamma_{p^i}(u_\ell) + p^{b-1}\, z_i$, se tiene que $d(\widetilde{\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell)} = 0$ y $d(\varphi_p\gamma_{p^i-1}(u_\ell)) = p\,\widetilde{\sigma\gamma_{p^i}(u_\ell)}$. Es decir, después de todos estos cambios de base, el modelo homológico p-minimal de A es un producto tensorial de PTTs k-indescomponibles (con $k \leq \ell$) p-minimales de álgebras exteriores y polinomiales modificadas.

Esto completa la demostración del teorema. □

Ahora, el teorema siguiente se deduce de manera natural.

Tomando como punto de partida el resultado del Teorema 3.3.1 y combinando apropiadamente los Teoremas 3.4.3 y 3.4.5, podemos diseñar un método de cálculo de la m-homología de una DGC-álgebra:

Teorema 3.4.6 *Sea $\mathbb{Z}_{(p)}$ el anillo de base. Sea A un PTT de ℓ álgebras exteriores y polinomiales y sea m un número natural. Existe una contracción de álgebras semi-completa de la construcción Bar iterada $\bar{B}^m(A)$ a un producto tensorial H de PTTs k-indescomponibles de álgebras exteriores y polinomiales modificadas, con $k \leq \ell$.*

Por último, el Teorema 3.4.6 admite una inmediata traducción al lenguaje de resoluciones libres, via el Teorema 3.3.2.

Teorema 3.4.7 *Sea A un PTT de ℓ álgebras exteriores y polinomiales y sea m un número natural. Existe una resolución libre $\bar{B}^{m-1}(A)\tilde{\otimes}^{\rho}H$ que proviene de la resolución bar. Más precisamente, la reducción asociada a esta resolución es una contracción de álgebras semi-completa y el complejo reducido H viene determinado por el Teorema 3.4.6.*

3.4.2 Un caso concreto. Homología p-local de las álgebras $D^{s,(r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,e_2,\ldots,e_n}$

Recordamos que las DG-álgebras $D^{s,(r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,e_2,\ldots,e_n}$ vienen definidas por

$$E(x,2s+1)\tilde{\otimes}^{\rho_1}\Gamma(y_1,2s+2)\tilde{\otimes}^{\rho_2}\Gamma(y_2,(2s+2)(r_1+1))\tilde{\otimes}^{\rho_3}$$
$$\tilde{\otimes}^{\rho_3}\cdots\tilde{\otimes}_{\rho_n}\Gamma(y_n,(2s+2)(r_1+1)\cdots(r_{n-1}+1)),$$

con diferencial dada por

$$\rho_i(y_i)=e_i\, x\otimes y_1^{(r_1)}\otimes y_2^{(r_2)}\otimes\cdots\otimes y_{i-1}^{(r_{i-1})},\quad \forall 1\leq i\leq n.$$

Recordemos, asímismo, que las potencias del "generador" del álgebra polinomial modificada $\Gamma(u,2n)$ se denotan indistintamente por $\gamma_i(u)$ ó $u^{(i)}$.

Se considera el anillo de base $\mathbb{Z}$ localizado en un primo impar p. En el caso $p=2$, se deducen resultados esencialmente análogos a los obtenidos para p impar.

Además de las contracciones $C_{B\otimes}$ y C_{BE}, para la construcción $\bar{B}(\Gamma(u,2n))$ se hace uso de la contracción explicitada en el teorema 3.4.4

Dado que se trabaja en $\mathbb{Z}$ localizado en p, hay que precisar que la perturbación $\bar{\delta}$ ha de ser minimal, con el fin de obtener un modelo homológico minimal. Por ello hay que restringirse a la subclase de $D^{s,(r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,e_2,\ldots,e_n}$ donde las e_i son potencias de p. Además, hay que reducirse a DG-álgebras verificando que $e_1>\ldots>e_n$, debido a que la clase $D^{\bullet}_{\bullet}$ presenta $n+1$-indescomponibilidad sólo en ese caso (en caso contrario, podríamos realizar cambios de base sobre la DG-álgebra que harían que esta propiedad se perdiera).

En estas condiciones, el modelo homológico minimal que presenta $D^{s,(r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,e_2,\ldots,e_n}$ viene dado por:

$$\begin{aligned} H\bar{B}D^{s,(r_1,\ldots,r_{n-1})}_{e_1,\ldots,e_n} &= (\Gamma(\sigma(x)) \otimes E(\sigma(y_1)) \otimes [\otimes_{i\geq 1} E(\sigma\gamma_{p^i}(y_1))\tilde{\otimes}^{\chi_p}\Gamma(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(y_1))] \otimes \\ &\quad \cdots \otimes E(\sigma(y_n)) \otimes [\otimes_{i\geq 1} E(\sigma\gamma_{p^i}(y_1))\tilde{\otimes}^{\chi_p}\Gamma(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(y_n))], \bar{d}), \end{aligned}$$

donde se omite el grado de los generadores para facilitar la escritura y la lectura.

Téngase en cuenta que este modelo tiene un número infinito de generadores. No obstante, se puede controlar el comportamiento de la diferencial $\bar{d}$. Expliquemos esto con más detalle.

En primer lugar, la evaluación de $\bar{d}$ sobre los generadores $\sigma(y_i)$ $(i = 1,\ldots n)$ resulta ser:

$$\begin{aligned} \bar{d}(\sigma(y_i)) &= -\frac{[\prod_{k=1}^{i-1}(r_k+1)]!}{(r_{i-1}+1)!\prod_{k=1}^{i-2}[(r_k+1)!]^{\prod_{j=k+1}^{i-1}(r_j+1)}} \cdot e_i \cdot {e_{i-1}}^{r_{i-1}} \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{k=i-2}^{1} {e_k}^{r_k \prod_{j=k+1}^{i-1}(r_j+1)} \cdot \sigma(x)^{\left(\prod_{k=1}^{i-1}(r_k+1)\right)}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $i = 1,2,\ldots,n$. Se tiene, por tanto, un bloque $n+1$-indescomponible constituido por el PTT siguiente:

$$\Gamma(\sigma(x)) \otimes E(\sigma(y_1)) \cdots \otimes E(\sigma(y_n))$$

y donde la diferencial queda controlada.

Ahora bien, la dificultad del proceso estriba en poder controlar la diferencial $\bar{d}$ sobre los generadores de los infinitos PTTs $E(\sigma\gamma_{p^j}(y_i))\tilde{\otimes}^{\chi_p}\Gamma(\varphi_p\gamma_{p^{j-1}}(y_i))$. Como ya hemos visto anteriormente, este escollo se solventa utilizando argumentos de cambio de bases por los que se llega a la 2-indescomponibilidad de dichos PTTs y por tanto al control de la diferencial sobre los mismos.

Como un cambio de base puede interpretarse como una iso-contracción de álgebras (por tanto, completa) concluimos que un modelo homológico minimal para esta clase de DGC-álgebras es

$$\begin{aligned} \tilde{H}\bar{B}D^{s,(r_1,\dots,r_{n-1})}_{e_1,\dots,e_n} &= (\Gamma(\sigma(x)) \otimes E(\sigma(y_1)) \otimes \cdots E(\sigma(y_n)), \bar{d})\otimes \\ &\otimes(\otimes_{i\geq 1}[\otimes_{j\geq 1} E(\bar{u}_{i,j})\tilde{\otimes}^{\chi_p}\Gamma(v_{i,j})]). \end{aligned}$$

Es decir, nos reducimos a un modelo que es un producto tensorial de un PTT $n+1$-indescomponible y un número infinito de PTTs 2-indescomponibles. De esta forma, hemos simplificado enormemente el cálculo de la homología de estas álgebras.

3.5 El caso general

En esta sección, comentaremos los problemas que surgen al intentar aplicar los métodos de cálculo homológicos anteriores al caso general de trabajar con simples DGA-álgebras conmutativas. En primer lugar, el método en el que se basa el cálculo n-homológico de DGC-álgebras sería completamente válido para el caso general si "modelizaramos" el dato de entrada: es decir, expresaramos una DGA-álgebra conmutativa A como PTT de álgebras exteriores y polinomiales. El siguiente resultado nos ayuda en este sentido:

Teorema 3.5.1 *[18] Dada una DGA-álgebra conmutativa A, existe una DGA-álgebra conmutativa libre A' y un cuasi-isomorfismo (es decir, un morfismo que induce isomorfismo en homología) $\phi : A \longrightarrow A'$.*

Ahora bien, el proceso de construcción de A' se basa en la "construcción" en cada grado de morfismos que deben cumplir unas propiedades. No estudiaremos aquí si el resultado anterior es verdaderamente "algoritmizable" o no, si no que sólo incidiremos en el hecho de que el caso general puede trabajarse de *manera teórica* usando nuestro modus operandi.

La conexión era una propiedad fundamental para garantizar la finitud del proceso de perturbación en la obtención de una resolución pequeña sobre una DGC-álgebra. Para una DGA-álgebra conmutativa cualquiera, no podremos garantizar que este proceso pare en general sino que será necesario estudiar cada caso.

3.6 Cuestiones y problemas abiertos

Terminamos este capítulo planteando los siguientes problemas:

- **Dada una DGC-álgebra cualquiera, refinar el método general de cálculo de homología anterior y diseñar un proceso de complejidad razonable** (como ha sido el caso de las DGC-álgebras $A_\bullet^\bullet$ y $D_\bullet^\bullet$, que abren un camino esperanzador).

- **El cálculo de la cohomología de DGA-álgebras conmutativas.** Dado el "buen comportamiento" del funtor $Hom(\ ,\Lambda)$ con respecto a contracciones y el detallado estudio combinatorial realizado en [43] y [17] sobre operaciones cohomológicas (más concretamente, sobre cuadrados de Steenrod), todo indica que parece posible el obtener un método "dual" coherente al realizado para la homología.

- Dada una DGA-álgebra A cualquiera, la resolución $B(A)$ siempre presenta una estructura de producto tensorial torcido de álgebra y coálgebra medido por una cocadena de Brown (ver [9]). Esta estructura no ha sido considerada en el desarrollo algorítmico realizado en esta memoria. El estudio tanto de la propagación de esta estructura por medio de contracciones como de su grado de preservación en el proceso de perturbación podría dar lugar a una mejora sustancial de la eficiencia del método de obtención de resoluciones pequeñas sobre DGA-álgebras conmutativas conexas.

Capítulo 4.

Homología de Hochschild y cíclica de DGC-álgebras

Capítulo 4.

Homología de Hochschild y cíclica de DGC-álgebras

Guccione y Guccione estudiaron en [18] la homología de Hochschild de DGA-álgebras conmutativas y establecieron fórmulas recursivas para determinar la diferencial de un modelo homológico pequeño para tales DGA-álgebras. Teniendo en cuenta la alta recursividad del método, es claro que este proceso esconde unos costes computacionales muy altos. Aquí damos una aproximación alternativa dentro del marco de la Teoría de Perturbación Homológica. Aunque este nuevo enfoque fue ya tratado por Larry Lambe en [31], no se consideró la preservación de estructuras de álgebras con lo que obtenemos mucha más información homológica. Nos restringimos aquí al manejo DGC-álgebras ya que nuestros métodos, basados en el uso reiterado del lema de perturbación básico, puede no ser finitos en el caso de considerar DGA-álgebras conmutativas no necesariamente conexas.

Los resultados obtenidos en el caso de la homología de Hochschild servirán de cimientos para obtener la homología cíclica, vía perturbación. El caso de la homología cíclica será más complicado en tanto en cuanto no tendremos resultados de preservación de las estructuras multiplicativas. Veremos en qué medida se reducen los cálculos en un caso concreto.

Este capítulo queda dividido en dos secciones: en la primera de ellas se define el complejo de Hochschild de una DGA-álgebra y describimos el método para el cálculo de dicha homología. En la segunda sección, se procede de manera análoga para con la homología cíclica. Para finalizar, en una última subsección, se realizan cálculos explícitos en un caso de especial interés.

Los resultados de este capítulo han sido ya contemplados en [1].

4.1 Homología de Hochschild de DGC-álgebras.

Recordamos que el anillo base Λ es un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. La notación $(A, d_A, *_A)$ significa que A es una DGA-álgebra con una diferencial d_A y un producto asociativo $*_A$.

Empecemos dando la definición del complejo de Hochschild de una DGA-álgebra tomada de [16].

Definición 4.1.1 El complejo de Hochschild de una DGA-álgebra conmutativa es otra DGA-álgebra conmutativa que, a nivel de álgebra graduada, viene dada por:

$$HC_*(A) = A \otimes \bar{B}(A),$$

con su producto natural $\circ = (*_A \otimes \star)(1 \otimes t \otimes 1)$, donde $\star$ es el producto shuffle de la construcción Bar de A.

Dicha álgebra graduada se dota de estrucura diferencial mediante la diferencial $b = b_0 + b_1$; donde la fórmula para el operador b_0 es la siguiente:

$$\begin{aligned} b_0(a_0 \otimes [a_1|\cdots|a_n]) &= da_0 \otimes [a_1|\cdots|a_n] \\ &\quad -\textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\epsilon_{i-1}} a_0 \otimes [a_1|\cdots|a_{i-1}|da_i|a_{i+1}|\cdots|a_n], \end{aligned}$$

donde

$$\epsilon_i = i + \sum_{k=0}^{i} |a_k|, \tag{4.1}$$

y la fórmula para el operador b_1 es

$$\begin{aligned} b_1(a_0 \otimes [a_1|\cdots|a_n]) &= a_0 a_1 \otimes [a_2|\cdots|a_n] \\ &\quad +\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{\epsilon_i} a_0 \otimes [a_1|\cdots|a_{i-1}|a_i a_{i+1}|a_{i+2}|\cdots|a_n] \\ &\quad -(-1)^{(|a_n|+1)\epsilon_{n-1}} a_n a_0[a_1|\cdots|a_{n-1}]. \end{aligned}$$

Observemos que b_0 depende de la diferencial de la DGA-álgebra A y b_1 del producto en A.

Se tienen las siguientes identidades:

$$b_0 b_0 = 0, \qquad b_1 b_1 = 0, \qquad b_0 b_1 + b_1 b_0 = 0.$$

que garantizan la nilpotencia de orden 2 de la diferencial b.

Si calculamos explícitamente la diferencial del producto tensorial banal $A \otimes \bar{B}(A)$, $d_{A\otimes\bar{B}(A)}$, podemos observar que la diferencia con la del complejo de Hochschild radica sólo en el operador b_1 y en concreto en los sumandos primero y último de dicho operador, los cuales no aparecen en la diferencial del producto tensorial. En definitiva, el complejo de Hochschild de una DGA-álgebra conmutativa es un PTT de A y $\bar{B}(A)$. Como veremos ahora, esta propiedad será clave para el desarrollo del método de cálculo.

4.1.1 Método de cálculo para la homología de Hochschild de una DGC-álgebra.

Dada una DGC-álgebra A, sabemos por el capítulo segundo que contamos con una contracción de álgebras semicompleta de $\bar{B}(A)$ en un producto tensorial torcido H de álgebras exteriores y polinomiales divididas. La idea para determinar la homología de Hochschild es extremadamente sencilla: usamos la contracción anterior como punto de partida y construimos, mediante la maquinaria de perturbación, una nueva contracción de álgebras semicompleta del complejo de Hochschild $HC_*(A)$ a una DGA-algebra libre "pequeña". Por tanto, en el caso de tener una DGC-álgebra de tipo finito, tenemos un verdadero algoritmo que computa su homología de Hochschild. Este resultado se puede enunciar en el siguiente teorema:

Teorema 4.1.2 *Dada una DGC-álgebra A de tipo finito, existe una contracción de álgebras semicompleta del complejo de Hochschild $HC_*(A)$ en una DGC-álgebra de tipo finito.*

Demostración. Pasamos a describir el mencionado método para el cálculo de la homología de Hochschild de A, lo cual constituye la demostración del Teorema anterior. Veremos, sin embargo que dicho método no nos aporta información homológica sustancialmente nueva, por lo que su importancia residirá en que constituye un eslabón indispensable en el proceso de cálculo de la homología cíclica de dicha DG-álgebra.

Como ya hemos indicado, nuestro punto de partida sigue siendo la contracción C_1 de álgebras semicompleta:

$$(f_1, g_1, \phi_1) : (\bar{B}(A), d_B, \star) \overset{C_1}{\Rrightarrow} (H, d_H, *_H),$$

donde H es una DGC-álgebra de tipo finito (de hecho, es un PTT de álgebras exteriores y polinomiales divididas siendo $*_H$ su producto natural).

Es inmediato construir la contracción producto tensorial $1_A \otimes C_1 = (1 \otimes f_1, 1 \otimes g_1, 1 \otimes \phi_1)$:

$$A \otimes \bar{B}(A) \overset{1_A \otimes C_1}{\Rrightarrow} A \otimes H$$

.

Es sabido que $1_A \otimes C_1$ es una contracción de álgebras semicompleta.

Nótese que la diferencial de la DGA-álgebra $A \otimes \bar{B}(A)$ es $b_0 + b_1 - \delta_h$, donde el morfismo δ_h viene dado por la fórmula

$$\begin{aligned}\delta_h(a_0 \otimes [a_1 | \cdots a_n]) = \; & (-1)^{|a_0|} a_0 a_1 \otimes [a_2 | \cdots | a_n] \\ & -(-1)^{(|a_n|+1)\epsilon_{n-1}} a_n a_0 [a_1 | \cdots | a_{n-1}].\end{aligned}$$

Es fácil probar que δ_h es una perturbación para la DGA-álgebra $A \otimes \bar{B}(A)$ (recordamos que $d_{A \otimes \bar{B}(A)} + \delta_h = b$) y además se tiene la nilpotencia puntual de $(1_A \otimes \phi_1)\delta_h$ debido a los siguientes hechos:

ϕ_1 aumenta en una unidad el grado simplicial (y, por tanto, no "afecta" al grado tensorial) de los elementos a los que se le aplique mientras que δ_h no varía el grado tensorial. En definitiva, cada vez que se vuelve a aplicar $\phi_1\delta_h$ a los elementos de $\bar{B}(A)$, va disminuyendo, de al menos uno, el grado tensorial y así se tiene garantizada la nilpotencia puntual.

Luego, en definitiva, lo que tenemos es un dato de perturbación para la contracción $1_A \otimes C_1$; es más, δ_h es una derivación con respecto al producto shuffle. Entonces, usando el lema básico de perturbación, deducimos que la contracción perturbada $C_2 = (1_A \otimes C_1)_{\delta_h}$ es una contracción de álgebras semicompleta:

$$(f_2, g_2, \phi_2) : (HC(A), b, \circ) \stackrel{C_2}{\Rightarrow} (A \otimes H, d_{A\otimes H} + d_{\delta_h}, *_{A\otimes H}),$$

donde recordemos que $*_{A\otimes H}$ es el producto natural del producto tensorial $(*_A \otimes *_H)(1 \otimes t \otimes 1)$.

Por tanto, hemos obtenido un "modelo homológico" para el complejo de Hochschild de cualquier DGC-álgebra de tipo finito. $\square$

Analicemos con más detalle la diferencial perturbada d_{δ_h}. Como este morfismo es una derivación, sólo necesitamos evaluarlo actuando sobre los generadores (como álgebra) de $A \otimes H$ (un PTT de álgebras exteriores, polinomiales, y polinomiales divididas). Ahora bien, habrá dos tipos de generadores en $A \otimes H$ que serán de la forma $a \otimes 1$ con a generador de A, y $1 \otimes z$, con z generador de H. Al aplicar d_{δ_h} a estos generadores, siguiendo la fórmula dada por el LBP, obtenemos que

$$\delta_h(1_A \otimes g_1)(a \otimes 1) = \delta_h(a \otimes [\,]) = 0$$

$$\delta_h(1_A \otimes g_1)(1 \otimes z) = \delta_h(1 \otimes [\bar{z}]) =$$

$$\bar{z} \otimes [\,] - \bar{z} \otimes [\,] = 0$$

Por tanto concluimos que $d_{\delta_h} = 0$.
Análogamente, como $g_2 = (1_A \otimes g_1)_{\delta_h}$ es un morfismo de DGA-álgebras, también podemos determinar completamente dicha inyección conociendo las imágenes de los generadores de $A \otimes H$. Ahora bien, si aplicamos g_2 a un generador de $A \otimes H$, siguiendo de nuevo la fórmula dada por el LBP, volvemos a tener $\delta_h(1_A \otimes g_1)$ que aplicado sobre los generadores da cero. Obtenemos, por tanto, que

$$g_2(z) = (1_A \otimes g_1)_{\delta_h}(z) = (1_A \otimes g_1)(z).$$

Es decir, la maquinaria de perturbación no produce ningún cambio en la inyección de la contracción. Sin embargo, la proyección f_2 y el operador de homotopía ϕ_2 son, en general, diferentes de los morfismos $1_A \otimes f_1$ y $1_A \otimes \phi_1$, respectivamente.

La DG-álgebra pequeña de la contracción C_2 es libre y conexa y de tipo finito por que A y H ambos lo son.

Como conclusión podemos decir que el complejo de Hochschild no nos proporciona información homológica sustancialmente diferente a la aportada por la 1-homología. Sin embargo, esta última contracción de álgebras semicompleta es esencial para el cálculo de la homología cíclica ya que constituye el punto de partida del método que describimos en la próxima sección.

4.2 Homología cíclica de DGA-álgebras conmutativas.

Las principales referencias de estas dos secciones son [52], [16] y [45].

Empecemos definendo el complejo cíclico de una DGA-álgebra A.

El complejo cíclico de A es el módulo graduado

$$CC_*(A) \;=\; P(u,2)\otimes HC_*(A),$$

dotado de la siguiente diferencial:

$$d_c(u^i\otimes w)=\begin{cases} u^i\otimes b(w)+u^{i-1}\otimes B(w) & \text{si } i>0\\ 1\otimes b(w) & \text{si } i=0\end{cases}$$

donde el morfismo B depende de una permutación cíclica como se aprecia en su fórmula:

$$B(a_0\otimes[a_1|\cdots|a_n]) \;=\; \textstyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{(\epsilon_{i-1}+1)(\epsilon_n-\epsilon_{i-1})}1\otimes[a_i|\cdots|a_n|a_0|a_1|\cdots|a_{i-1}].$$

Nótese que los exponentes ϵ_i vienen determinados por la fórmula 4.1.

El producto (que no es el natural) del complejo cíclico de una DGA-álgebra A se define como:

$$(u^i \otimes w_1)\diamond(u^j \otimes w_2) = \begin{cases} u^i \otimes (w_1 *_{HC} B(w_2)) & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tienen las siguientes igualdades:

$$b(x\diamond y) = b(x)\diamond y + (-1)^{|x|+1} x\diamond b(y);$$

$$d_c(x\diamond y) = d_c(x)\diamond y + (-1)^{|x|+1} x\diamond d_c(y);$$

con las que se tiene una cierta "compatibilidad" de $1_P \otimes b$ y de d_c con el producto definido en el complejo cíclico. Nótese que el producto natural del complejo cíclico (como producto tensorial de DG-álgebras) no es compatible con su estructura diferencial. Por ello, el complejo cíclico de una DGA-álgebra conmutativa no es un producto tensorial torcido de álgebras.

4.2.1 Método de cálculo para la homología cíclica de DGC-álgebras.

La maquinaria de perturbación nos proporciona, de una forma sencilla, un método de cálculo de la homología cíclica de DGC-álgebras de tipo finito.

Más explícitamente, podemos enunciar el siguiente Teorema cuya demostración ocupará prácticamente toda la sección:

Teorema 4.2.1 *Dada una DGC-álgebra de tipo finito A, existe una contracción de DG-módulos del complejo cíclico, $CC_*(A)$, a un DG-módulo libre de tipo finito.*

Demostración. La demostración consta de los siguientes pasos:

Nuestro punto de arranque es la contracción de álgebras semicompleta

$$(f_2, g_2, \phi_2) : (HC(A), b, \circ) \overset{C_2}{\Rrightarrow} (A \otimes H, \bar{d}, *_{A\otimes H}),$$

que determina la homología de Hochschild de una DGC-álgebra de tipo finito A. Por $\bar{d}$ notamos la diferencial $d_{A\otimes H} + d_{\delta_h}$.

El siguiente paso es construir la contracción $(1_P \otimes f_2, 1_P \otimes g_2, 1 \otimes \phi_2)$ a nivel de DG-módulos:

$$(CC(A), 1 \otimes b) \overset{1_{P(u,2)}\otimes C_2}{\Rrightarrow} (P(u,2) \otimes (A \otimes H), 1_P \otimes \bar{d}). \tag{4.2}$$

Consideremos ahora el morfismo

$$\delta_c(u^i \otimes w) = \begin{cases} u^{i-1} \otimes B(w) & \text{si } i > 0 \\ 0 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Observemos que $d_c = 1_P \otimes b + \delta_c$. Es fácil probar que δ_c es una perturbación del DG-módulo $P(u,2) \otimes HC_*(A)$ (téngase en cuenta que, tanto $1 \otimes b$ como d_c son diferenciales). En cuanto a la nilpotencia puntual de $(1 \otimes \phi_2) \circ \delta_c$, sólo hay que fijarse en que el grado del elemento en la polinomial va decreciendo en cada aplicación de δ_c. Así, δ_c es un dato de perturbación para la contracción (4.2). Aplicando el LBP, obtenemos la contracción perturbada $((1_P \otimes f_2)_{\delta_c}, (1_P \otimes g_2)_{\delta_c}, (1_P \otimes \phi_2)_{\delta_c})$:

$$[1_P \otimes C_2]_{\delta_c} : (CC_*(A), d_c) \overset{C_3}{\Rrightarrow} (P(u,2) \otimes (A \otimes H), 1_P \otimes \bar{d} + d_{\delta_c}).$$

A efectos de aligerar la notación, notaremos por C_3 la contracción anterior.

Denotamos el DG-módulo pequeño de esta última contracción por CBA. Así, tenemos una contracción partiendo del complejo cíclico hacia un DG-módulo CBA libre y de tipo finito, lo que prueba el Teorema. □

Queremos enfatizar que la contracción anterior está determinada a nivel de DG-módulo, y por tanto, nuestras técnicas de perturbación de álgebras no pueden ser aplicadas en esta situación (ni para el producto $\diamond$, ni para el producto natural subyacente del complejo cíclico). No podemos, pues, usar la preservación de la estructura de álgebra en las contracciones que aparecen en el proceso anterior. Este hecho hace que la computación de la homología cíclica sea extremadamente difícil. Remediaremos esta situación en un caso especial.

4.2.2 Un caso especial.

Podemos aliviar esta difícil situación en un caso particular: cuando consideramos productos tensoriales banales de álgebras polinomiales y exteriores. Tenemos así, el siguiente teorema en este caso concreto:

Sea A un producto tensorial $E(x_1,\ldots,x_m)\otimes P(y_1,\ldots,y_n)$.

En este caso, la contracción de la que partimos es

$$(f_1,g_1,\phi_1):(\bar{B}(A),d_B,\star)\overset{C_1}{\Rightarrow}(\Gamma(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m)\otimes E(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n),0,*_H),$$

donde $*_H$ denota el producto natural en el álgebra pequeña, la cual denotaremos a partir de ahora como H.

C_1 es una contracción producto tensorial de contracciones completas y casicompletas, por lo que resulta ser una contracción de álgebras casicompleta.

Perturbando $1_A \otimes C_1$ como ya explicitamos anteriormente, obtenemos de nuevo la contracción

$$(f_2, g_2, \phi_2) = (1_A \otimes C_1)_{\delta_h} : (HC_*(A), b, *_{HC}) \overset{C_2}{\Rightarrow} (A \otimes H, d_{A\otimes H}, *_{A\otimes H})$$

Siguiendo el método descrito anteriormente, llegamos de nuevo a la contracción ya denotada por C_3:

$$[1_P \otimes C_2]_{\delta_c} : (CC_*(A), d_c) \overset{C_3}{\Rightarrow} (P(u,2) \otimes (A \otimes H), 1_P \otimes d_{A\otimes H} + d_{\delta_c}).$$

Estudiamos ahora el comportamiento de d_{δ_c}.

Comenzamos ahora por la siguiente composición:

$$\begin{aligned}
&(1_P \otimes g_2)(u^i \otimes (w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes (\bar{z}_1 *_H \cdots *_H \bar{z}_s) = \\
&\quad u^i \otimes g_2((w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes (\bar{z}_1 *_H \cdots *_H \bar{z}_s)) = \\
&\quad u^i \otimes (w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes g_1(\bar{z}_1 *_H \cdots *_H \bar{z}_s) = \\
&\quad u^i \otimes (w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes g_2(1 \otimes \bar{z}_1) \circ \cdots \circ g_2(1 \otimes \bar{z}_s) = \\
&\quad u^i \otimes (w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes (1 \otimes [z_1]) \circ \cdots \circ (1 \otimes [z_s]) = \\
&\quad u^i \otimes (w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes B(z_1 \otimes [\,]) \circ \cdots \circ B(z_s \otimes [\,]).
\end{aligned}$$

Entonces aplicando ahora δ_c, como indica la fórmula dada en el LBP y teniendo en cuenta cómo actua el morfismo B sobre elementos de la forma $w \otimes []$, con $w \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}&\delta_c(1_P \otimes g_2)(u^i \otimes (w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes (\bar{z}_1 *_H \cdots *_H \bar{z}_s)) = \\ &\delta_c(u^i \otimes (w_1 \cdots w_r) \otimes B(z_1 \otimes [\,]) \circ \cdots \circ B(z_{k_s} \otimes [\,]))\end{aligned}$$

Utilizamos ahora la siguiente propiedad general dada por Loday en [35]:

$$B(x * B(y)) = B(x) * B(y), \tag{4.3}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}&\delta_c(u^i \otimes (w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes B(z_1 \otimes [\,] \circ B(\cdots \circ B(z_{s-1} \otimes [\,] \circ B(z_s \otimes [\,]))\cdots)) = \\ &u^{i-1} \otimes B[(w_1 *_A \cdots *_A w_r) \circ B(z_1 \otimes [\,] \circ B(\cdots \circ B(z_{s-1} \otimes [\,] \circ B(z_s \otimes [\,]))\cdots)].\end{aligned}$$

Volviendo a aplicar la anterior propiedad, pero en sentido inverso, llegamos a la expresión

$$u^{i-1} \otimes [B((w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes [\,]) \circ B(z_1 \otimes [\,]) \circ \cdots \circ B(z_s \otimes [\,])].$$

Siguiendo la fórmula de d_{δ_c}, aplicamos ahora $1_P \otimes \phi_2$ a lo anterior

$$\begin{aligned}&[(1 \otimes \phi_2)\delta_c(1 \otimes g_2)](u^i \otimes (w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes (\bar{z}_1 *_H \cdots *_H \bar{z}_s)) = \\ &(1 \otimes \phi_2)(u^{i-1} \otimes B((w_1 *_A \cdots w_r) \otimes [\,]) \circ B(z_1 \otimes [\,]) \circ \cdots \circ B(z_s \otimes [\,])) = \\ &(1 \otimes \phi_2)(u^{i-1} \otimes B((w_1 \cdots w_r) \otimes [\,]) \circ g_2(1 \otimes \bar{z}_1 *_H \cdots *_H \bar{z}_s).\end{aligned}$$

En esta última igualdad, hemos hecho uso de que g_2 es un morfismo multiplicativo y de la relación $g_2(1 \otimes \bar{z}) = B(z \otimes [])$, con $z \in A$.

A continuación, enunciamos una proposición de [42] que será fundamental en lo que sigue

Proposición 4.2.2 *[42] Sea* $c : \{(A, d_A, *_A), (A', d_{A'}, *_{A'}), f, g, \phi\}$ *una contracción de álgebras semi-completa. Si* u *o* v *son elementos de* $\operatorname{Im} g$*, entonces tenemos que:*

$$f(u *_A v) \;=\; f(u) *_{A'} f(v), \tag{4.4}$$

y

$$\phi(u *_A v) \;=\; u *_A \phi(v) + \phi(u) *_A gf(v) \;=\; *_A\phi^{[2]}(u \otimes v). \tag{4.5}$$

Si aplicamos la igualdad (4.4) al caso concreto de la contracción C_2 y a un elemento que sea imagen del morfismo $B \otimes g_2$, tenemos:

$$\phi_2(B \circ g_2) = \phi_2 B \circ g_2$$

Por tanto,

$$\begin{array}{l} [(1_P \otimes \phi_2)\delta_c(1_P \otimes g_2)](u^i \otimes (w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes (\bar{z}_1 *_H \cdots *_H \bar{z}_s)) = \\ u^{i-1} \otimes \phi_2 B((w_1 *_A \cdots *_A w_r) \otimes [\,]) \circ g_2(1 \otimes (\bar{z}_1 *_H \cdots *_H \bar{z}_s)). \end{array}$$

En lo que sigue, denotaremos, para abreviar, $(w_1 *_A \cdots *_A w_r)$ simplemente por w y $(\bar{z}_1 *_H \cdots *_H \bar{z}_s)$ por $\bar{z}$.

Si queremos seguir aplicando $(1_P \otimes \phi_2)\delta_c$ volvemos a operar del mismo modo (nuevamente, haciendo uso de la propiedad de Loday (4.3)):

$$\begin{array}{l}[((1_P \otimes \phi_2)\delta_c)^2(1_P \otimes g_2)](u^i \otimes w \otimes \bar{z}) = \\ u^{i-2} \otimes \phi_2 B \phi_2 B(w \otimes [\,]) \circ g_2(1 \otimes \bar{z}).\end{array}$$

En general tendremos que al aplicar $[(1_P \otimes \phi_2)\delta_c]^k$

$$\begin{array}{l}[((1_P \otimes \phi_2)\delta_c)^k(1_P \otimes g_2)](u^i \otimes z \otimes \bar{z}) = \\ u^{i-k} \otimes (\phi_2 B)^k(w \otimes [\,]) \circ g_2(1 \otimes \bar{z}).\end{array}$$

Continuando con la fórmula dada en el LBP,

$$\begin{array}{l}\delta_c(u^{i-k} \otimes (\phi_2 B)^k(w \otimes [\,]) \circ g_2(1 \otimes \bar{z}) = \\ u^{i-k-1} \otimes B(\phi_2 B)^k(w \otimes [\,]) \circ g_2(1 \otimes \bar{z})\end{array}$$

Por último queda aplicar $(1_P \otimes f_2)$. Basándonos en (4.5 aplicado a un elemento imagen por $B \otimes g_2$, podemos afirmar que

$$(f_2(B(c) \circ g_2(c')) = f_2 B(c) *_{A \otimes H} c')$$

Finalmente, la fórmula de d_{δ_c} queda como sigue:

$$d_{\delta_c}(u^i \otimes w \otimes \bar{z}) = \sum_{k=0}^{m} (u^{i-k-1} \otimes f_2 B(\phi_2 B)^k(w \otimes [\,]) *_{A \otimes H} \bar{z})$$

Es decir, el cálculo de d_{δ_c} sobre cualquier generador del álgebra pequeña se reduce al cálculo sobre elementos del tipo $u^i \otimes w \otimes 1$.

$$d_{\delta_c}(u^i \otimes w \otimes \bar{z}) = d_{\delta_c}(u^i \otimes w \otimes [\,]) *_{A \otimes H} \bar{z}.$$

Por tanto, hemos reducido considerablemente el volumen de cálculo para la obtención de la homología cíclica en este caso especial.

Bibliografía

[1] Álvarez V., Armario J.A., Real P. y Silva B.: HPT and computability of the homology of commutative DGA-algebras, *Conference in Secondary Calculus and Cohomological Physics*, Moscú, (Agosto, 1997).

[2] Álvarez V., Armario J.A., Real P. y Silva B.: Obtención de resoluciones pequeñas sobre DG-álgebras conmutativas libres y conexas. *Proc. del cuarto Encuentro de Algebra Computacional y Aplicaciones, EACA98*, Univ. de Alcalá de Henares, Siguenza, (1998).

[3] Armario J. A., Real P. y Silva B.: On p-minimal homological models of twisted tensor products of elementary complexes localised over a prime. Aparecerá en *Contemporary Mathematics.*

[4] Armario J. A., Real P. y Silva B.: A generalization of a result of J. C. Moore about Cartan's little constructions. *Conference about Higher Homotopy Structures in Topology and Mathematical Physics*, Vassar college, New York, (Junio 1996).

[5] Armario J.A., Real P. y Silva B.: Associativity as hereditary property in homological perturbation theory. *Proc. del Segundo Encuentro de Algebra Computacional y Aplicaciones* , Fac. de Matemática, Univ. de Sevilla, (1996).

[6] Artigas D., Real P. and Silva B.: Un algoritmo de cálculo de homología de DGA-álgebras conmutativas. *Proc. del Tercer Encuentro de Algebra Computacional y Aplicaciones*, Fac. de Ciencias, Univ. de Granada, (1997).

[7] Artigas, D.: Software para el cálculo de la homología de ciertos tipos de DG-álgebras conmutativas, *Proyecto fin de carrera, Diplomatura de Informática*, (Junio, 1997).

[8] Barnes D. y Lambe L.: A fixed point approach to homological perturbation theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, (**vol. 112**), (n. 3), pp. 881-892, (1991).

[9] Brown E.H.: Twisted tensor products, I, *Annals of Math.*, (**vol. 69**), pp. 223-246, (1959).

[10] Brown R.: The twisted Eilenberg-Zilber theorem, Celebrazioni Archimedee del secolo XX, Simposio di topologia, (1967), pp. 34-37.

[11] H. Cartan. *Algèbres d'Eilenberg-Mac Lane.* Séminaire H. Cartan 1954/55, (exposé 2 à 11), E. Normale Superiere, Paris, 1.956.

[12] Cartan H. y Eilenberg S.: Homological Algebra, Princeton Univ. Press, Princeton (New Jersey, 1956).

[13] Eilenberg S. y MacLane S.: On the groups $H(\pi, n)$, I, *Annals of Math.*, (**vol. 58**), pp. 55-139, (1953).

[14] Eilenberg S. y MacLane S.: On the groups $H(\pi, n)$, II, *Annals of Math.*, (**vol. 60**), pp. 49-139, (1954).

[15] Eilenberg S. and Zilber J.A.: On products of complexes, Am. J. Math. , **n. 75**, 200-204, (1959).

[16] Getzler E., Jones J. D. S. and Petrack S.: Differential forms on loop spaces and the cyclic bar complex, *Topology*, vol. 30, n. 3, 339-371 (1991).

[17] González-Díaz R. y Real P.: A combinatorial approach for computing Steenrod squares. Aparecerá en J. Pure Appl. Algebra.

[18] Guccione J.A. and Guccione J. J.: Hochschild homology of commutative algebras in positive characteristic. *Communications in algebra*, 22 (15), 6037-6046 (1994).

[19] Gugenheim V.K.A.M.: On the chain complex of a fibration, *Illinois J. Math.*, (**vol. 3**), pp. 398-414, (1972).

[20] V.K.A.M. Gugenheim and J. P. May. *On the theory and applications of differentials torsion products.* Memoirs of A.M.S., **n. 142**, (1974).

[21] Gugenheim V.K.A.M. y Lambe L.: Perturbation theory in Differential Homological Algebra, I, *Illinois J. Math.*, (**vol. 33**), pp. 556-582, (1989).

[22] Gugenheim V.K.A. M., Lambe L. y Stasheff J. D.: Perturbation theory in differential homological algebra, II. *Illinois J. Math.*, vol. 35, n. 3, 357-373, (1991).

[23] Gugenheim V.K.A.M. y Munkholm H.J.: On the extended functoriality of Tor and Cotor. *J. Pure and Appl. Alg.*, n. 4, 9-29, (1974).

[24] Gugenheim V.K.A.M. y Stasheff J.D.: On perturbations and A_∞-structures, *Bull. Soc. Math. Belg.*, (**vol. 38**), pp. 237-246, (1986).

[25] Henneaux M. y Teitelboim C.: Generalitation of gauges systems, *Princenton Univ. Press*, (1992).

[26] Huebschmann J.: The homotopy type of $F\Phi^q$. The complex and symplectic cases. In: Applications of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory, Part II. *Proceedings, Boulder*, Colorado, 1983, *Cont. Math.*, **55**, pp. 487-518, (1986).

[27] Huebschmann J.: Perturbation theory and free resolutions for nilpotent groups of class 2, *J. Algebra*, **126**, pp. 348-399, (1989).

[28] Huebschmann J. y Kadeishvili T.: Small models for chain algebras, *Math. Z.*, (**vol. 207**), pp. 245-280 (1991).

[29] Husemoller D., Moore J. y Stasheff J.D.: Differential homological algebra and homogeneous spaces, *J. Pure Appl. Alg.*, (n. 5), pp. 113-185, (1974).

[30] Lambe L.: Resolutions via homological perturbation. J. Symbolic Comp., **12**, 71-87, (1991).

[31] Lambe L.: Homological perturbation theory, Hochschild homology and formal groups, *Contemp. Math.*, **134**, pp. 183-218, (1992).

[32] Lambe L.: Resolutions which slit off of the bar construction. *J. Pure Appl. Alg*, n. 84, 311-329, (1993).

[33] Lambe L. y Stasheff J.D.: Applications of perturbation theory to iterated fibrations, *Manuscripta Math.*, (**vol. 58**), pp. 363-376, (1987).

[34] Loday J-L. and Quillen D.: Cyclic homology and the Lie algebra of matrices. *Comment. Math. Helv.*, 59, 565-591 (1984).

[35] Loday J-L.: Opérations sur l'homologie cyclique des álgebres commutatives, *Invent. Math.*, 96, 205-230 (1989).

[36] MacLane S.: Homology, Academic Press, New York, (1963).

[37] Munkholm H.J.: The Eilenberg-Moore spectral sequence and strongly homotopy multiplicative maps. *J. Pure Appl. Alg.*, n. 9, 1-50, (1976).

[38] Munkres J.R.: Elements of Algebraic Topology. *Addison-Wesley*, 1984.

[39] Prouté. A.: Algèbres Différentielles Fortement Homotopiquement Associatives, *Thèse de Math. de l'Université Paris VII*, (1984).

[40] Real P.: An algorithm for calculating homotopy groups. Proceeding of the International IMACS Symposium on Symbolic Computation. Junio, 1.993, Lille (Francia).

[41] Real P.: Sur le calcul de groupes d'homotopie. C. R. de l'Acad. Sci. Paris., **t. 319**, Série I, 475-478 (1994).

[42] Real P.: Homological Perturbation Theory and associativity. Prepublicación: MA1-05-96I.

[43] Real P.: On the computability of Steenrod squares. *Ann. Univ. Ferrara*, Sez. VII, Sc. Mat, **vol. XLII**, 57-63, (1996).

[44] Real P. y Silva B.: Homología efectiva p-primaria de DGA-álgebras de Cartan. *Proc. del primer Encuentro de Algebra Computacional y Aplicaciones, EACA95*, Univ. de Cantabria, (1995).

[45] Seibt P. : Cyclic homology of algebras. World Scientific Publishing, Singapore, 1987.

[46] Sergeraert F.: The computability problem in algebraic topology, *Adv. Math.*, (**vol. 104**), **1**, pp. 1-29, (1994).

[47] Shih W.: Homologie des espaces fibrés, *Inst. Hautes Etudes Sci.*, (**vol. 13**), pp. 93-176, (1962).

[48] Stasheff J. D.: Homotopy associativity of H-spaces, II. *Transactions of A.M.S.*, vol 108, 293-312 (1963).

[49] Stasheff J. D.: Cohomological physics. *Lect. Notes in Math.*, Ed. Y Felix, Algebraic Topology and Rational Homotopy, **1318**, 228-237 (1986).

[50] Veblen O.: Analysis Situs, *A.M.S. Publications*, (**vol. 5**), (1931).

[51] Kasil'shchik I.S., Lychagin V.V. y Vinogradov A.M.: Geometry of Jets Spaces and Nonlinear Differential Equations, *Gordon and Breach*, New York-London, (1986)

[52] Weibel Ch. A.: An introduction to homological algebra, *Cambridge studies in advanced mathematics,* 38, Cambridge University Press, 1994.

a Beatriz SILVA GALLARDO

Modelos homológicos pequeños de DGA-álgebras conmutativas

SOBRESALIENTE

CUM LAUDE (por unanimidad)

14 Diciembre 98

G. Tomasini

B. Silva