FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER:

CONTROLABILIDAD DE ECUACIONES ESCALARES PARABÓLICAS: ANÁLISIS DE DIFERENTES TÉCNICAS

Aitor Sánchez Florido

Dirigido por:
Manuel González Burgos

Índice general

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que, de una forma u otra, han contribuido y lo seguirán haciendo en mi formación tanto académica como personal.

Concretamente, quiero agradecer a todos los profesores del MUM, entre ellos, a mi tutor Manuel González Burgos por haberme dedicado su tiempo durante todo este año y por enseñarme este nuevo campo de estudio. Por todo ello y para todos, ¡Muchas gracias!

Abstract

The controllability of parabolic partial differential equations has been a topic of increasing interest in the last decades that it has attracted to good part of the mathematical community dedicated to the control. This type of equations and systems arise, for example, in the study of diverse phenomena related to the Physics, the Biology or the Chemistry. In this work we try to analyze different technologies that have allowed to give positive results of controllability of parabolic equations.

The first positive results of controllability of parabolic equations were obtained in 1971 (Arch. Rational Mech. Anal. **43**, 1971) y 1974 (Quart. Appl. Math. **32**, 1974/75) por H.O. Fattorini y D.L. Russe. These proved the boundary controllability of the unidimensional heat equation by means of the method of the moments. The general results of controllability to zero of N-dimensional parabolic equations were obtained independently for G. Lebeau and L. Robbiano and for A. Fursikov in O. Imanuvilov in 1995 - 1996. The first work is valid for autonomous parabolic equations and the result obtains as consequence of a spectral inequality obtained as consequence of local inequalites Carleman's. The second work is applicable to not autonomous parabolic equations and the positive result of controllability is obtained from inequalites of Carleman for the attached operator.

In this work we analyze the different technologies developed by the authors mentioned previously to prove the controllability of parabolic equations. The analysis will begin for the method of the moments, will happen for the study of global inequality of Carleman for uniformly parabolic operators and will finish with Lebeau-Robbiano's method.

Introducción

La controlabilidad de ecuaciones en derivadas parciales parabólicas ha sido un tema de interés creciente en las últimas décadas que ha atraído a buena parte de la comunidad matemática dedicada al control. Este tipo de ecuaciones y sistemas surgen, por ejemplo, en el estudio de diversos fenómenos relacionados con la Física, la Biología o la Química. En este trabajo pretendemos analizar diferentes técnicas que han permitido dar resultados positivos de controlabilidad de ecuaciones parabólicas.

Los primeros resultados positivos de controlabilidad de ecuaciones parabólicas fueron obtenidos en 1971 (Arch. Rational Mech. Anal. **43**, 1971) y 1974 (Quart. Appl. Math. **32**, 1974/75) por H.O. Fattorini y D.L. Russel. Estos probaron la controlabilidad frontera de la ecuación unidimensional del calor mediante el método de los momentos. En 1973, Russell (Studies in Appl. Math. **52**, 1973) obtuvo un resultado de controlabilidad para la ecuación del calor N-dimensional como consecuencia de un resultado de controlabilidad exacta de la ecuación de ondas. De hecho, probó que la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas en un tiempo positivo implica la controlabilidad a cero de la ecuación del calor en cualquier tiempo positivo. Los resultados generales de controlabilidad a cero de ecuaciones parabólicas N-dimensionales fueron obtenidos independientemente por G. Lebeau y L. Robbiano y por A. Fursikov y O. Imanuvilov en 1995 - 1996. El primer trabajo es válido para ecuaciones parabólicas autónomas y obtiene el resultado como consecuencia de una desigualdad espectral obtenida como consecuencia de desigualdades locales de Carleman. El segundo trabajo es aplicable a ecuaciones parabólicas no autónomas y el resultado positivo de controlabilidad es obtenido a partir de desigualdades de Carleman para el operador adjunto.

En este trabajo analizamos las diferentes técnicas desarrolladas por los autores mencionados anteriormente para probar la controlabilidad de ecuaciones parabólicas. El análisis comenzará por el método de los momentos, pasará por el estudio de desigualdades de Carleman globales para operadores uniformemente parabólicos y acabará con el método de Lebeau-Robbiano.

Capítulo 1

Resultados previos.

En este capítulo, vamos a presentar algunos conceptos que necesitaremos en nuestro espacio de trabajo para entender las técnicas de controlabilidad de ecuaciones escalares parabólicas. Además, daremos las diferentes definiciones de controlabilidad.

1.1. Sucesiones mínimas en espacios de Banach. Sucesiones biortogonales.

Vamos a centrarnos en esta sección en la teoría de bases en espacios de Banach. En lo que sigue X, representa un espacio normado sobre $\mathbb{R}$, con norma denotada por $\|\cdot\|$. Comenzaremos generalizando el concepto de base en X para espacios que, en principio, no son finito dimensionales. Así,

Definición 1.1. ***(Base)*** *Una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ es una base en X si para cualquier $x \in X$, existen unos únicos escales $a_n(x)$ tales que*

$$x = \sum_{n\geq 1} a_n(x)x_n. \tag{1.1}$$

La serie anterior es denominada representación de x respecto a la base $\{x_n\}_{n\geq 1}$.

Algunas observaciones respecto a la definición anterior son:

Observación 1.1. (i) Si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una base, entonces, de la unicidad de la representación de cada $x \in X$ deducimos que $x_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Como consecuencia, la sucesión $\{x_n/\|x_n\|\}_{n\geq 1}$ es una base de X formada por vectores unitarios (base normalizada).

(ii) La definición de base requiere que la serie (1.1) converja en X. Podríamos considerar otros tipos de convergencia en las series como la débil o la *-débil, dando lugar a otras definiciones de bases en X. De la definición de base deducimos que $B = \{x_n\}_{n\geq 1}$ es un conjunto numerable tal que el conjunto de todas la combinaciones lineales finitas $\sum_n c_n x_n$ con $c_n \in \mathbb{Q}$ forma un subconjunto denso de X. Por tanto, la existencia de una base en X implica que X es un espacio separable.

Vamos a definir a continuación algunas bases con propiedades útiles suplementarias.

Definición 1.2. *Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una base en X. Decimos que:*

(i) $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una base incondicional en X si la serie (1.1) converge incondicionalmente para cada $x \in X$. En caso contrario, decimos que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una base condicional.

(ii) $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una base absolutamente convergente si la serie (1.1) converge absolutamente para cada $x \in X$.

(iii) $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una base acotada si existen α, $\beta > 0$ tales que $0 < \alpha \leq \|x_n\| \leq \beta$, para cualquier $n \geq 1$

(iv) $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una base normalizada si $\|x_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una base del espacio de Banach X. La condición de que la representación (1.1) sea única para cada $x \in X$ implica que los coeficientes $a_n(x)$ sean funciones lineales de x, y la sucesión $\{a_n(x)\}_{n\geq 1}$ está determinada únicamente por $\{x_n\}_{n\geq 1}$ y $x \in X$. Una cuestión que nos deberíamos preguntar sobre una base $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es si los coeficientes funcionales $a_n : x \in X \mapsto a_n(x) \in \mathbb{R}$, son continuos. Así,

Definición 1.3. ***(Base de Schauder)***. *Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una base del espacio de Banach X, y sea $\{a_n(x)\}_{n\geq 1}$ la sucesión de coeficientes funcionales asociados. Entonces, decimos que $\{x_n\}_{b\geq 1}$ es una base de Schauder para X si cada coeficiente funcional a_n es continuo.*

Si denotamos por X' al dual del espacio de Banach X, entonces una base es base de Schauder si $a_n \in X'$ para cada $n \geq 1$.

Ejemplo 1.1. Sea $\{e_n\}_{n\geq 1}$ una base ortonormal para un espacio de Hilbert separable H. La representación de $x \in H$ en esta base es:

$$x = \sum_{n\geq 1} (x, e_n)_H e_n,$$

donde los coeficientes funcionales son $a_n(x) = (x, e_n)_H$ que, evidentemente, son continuos sobre H. Cabe notar, que identificando H' con su dual H dado por el Teorema de Representación de Riesz, tenemos $a_n = e_n \in H = H'$ para cada n.

En el caso de bases de Schauder de X, utilizaremos la notación $\langle a_n, x\rangle$ en lugar de $a_n(x)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto de dualidad entre X' y X. Observamos que si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una base de Schauder y fijamos $m \in \mathbb{N}$, tenemos dos formas de expresar x_m:

$$x_m = \sum_n \langle a_n, x_m\rangle x_n \quad \text{y} \quad x_m = \sum_n \delta_{mn} x_n.$$

Por lo tanto, por la unicidad de la representación básica debemos tener $\langle a_n, x_m\rangle = \delta_{mn}$ para cada m y n.

Definición 1.4. ***(Sistema Biortogonal)***. *Dado un espacio de Banach X y dos sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ y $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset X'$, decimos que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es biortogonal a $\{x_n\}_{n\geq 1}$ si $\langle x_m, a_n\rangle = \delta_{mn}$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$.*

Vamos a ver cómo generalizar algunos conceptos que conocemos para espacios de dimensión finita, como puede ser el concepto de independencia lineal, y ver cómo se define en espacios de Banach infinito dimensionales.

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una base de Schauder para el espacio de Banach X. En particular, la sucesión de coeficientes funcionales $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset X'$ satisface la condición de biortogonalidad $\langle x_m, a_n\rangle = \delta_{mn}$ para cualquier $n, m \geq 1$, es decir, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es biortogonal a $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Sin embargo, la existencia de una sucesión biortogonal a $\{x_n\}_{n\geq 1}$ no garantiza que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ sea una base de Schauder de X. Veremos que para que esto ocurra $\{x_n\}_{n\neq 1}$ tiene que satisfacer condiciones adicionales. Así,

Definición 1.5. ***(Sucesión mínima).*** *Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en un espacio de Banach X es mínima si para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_m \notin \overline{span}\{x_n : n \neq m\}$. Por otro lado, se dice que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es completa si $X = \overline{span}\{x_n : n \geq 1\}$. Una sucesión que es mínima y completa decimos que es exacta.*

A continuación vamos a probar que el hecho de ser mínima y la existencia de una sucesión biortogonal son equivalentes. Demostrar este hecho en un espacio de Hilbert es sencillo haciendo uso del complemento ortogonal, pero nosotros vamos a probarlo en un espacio de Banach genérico para el que necesitaremos el Teorema de Hahn-Banach.

Proposición 1.6. *Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Entonces, existe $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset X'$ biortogonal a $\{x_n\}_{n\geq 1}$ si y solo si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es mínima.*

Demostración. $[\Rightarrow]$

Supongamos que $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset X'$ es biortogonal a $\{x_n\}_{n\geq 1}$ y fijemos $m \geq 1$. Si tomamos $z \in \mathrm{span}\{x_n : m \neq n\}$, entonces $z = \sum_{n=1, n\neq m}^{N} c_n x_n$ para cierto $N \geq 1$ y coeficientes $c_n \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\langle a_m, z\rangle = \sum_{n=1, n\neq m}^{N} \langle a_m, x_n\rangle = 0.$$

Por otro lado, si $z \in \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \neq m\}$, entonces $z = \lim z_k$ con $z_k \in \mathrm{span}\{x_n : n \neq m\}$. Como $a_m \in X'$ tenemos que

$$\langle a_m, z\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle a_m, z\rangle = 0.$$

Deducimos así que $\langle a_m, z\rangle = 0$ para cualquier $z \in \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \neq m\}$ y, por tanto, $x_m \notin \mathrm{span}\{x_n : n \neq m\}$. Esto prueba que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es mínima.

$[\Leftarrow]$

Supongamos ahora que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es mínima fijemos $m \geq 1$. Si definimos $E_m = \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \neq m\}$, entonces E_m es un subespacio cerrado de X que no contiene a x_m. Por tanto, por el Teorema de Hahn-Banach, existe un funcional $a_m \in X'$ tal que

$$\langle a_m, x_m\rangle = 1 \quad \text{y} \quad \langle a_m, x\rangle = 0 \qquad \text{para } x \in E_m$$

Repitiendo esto para cada $m \in \mathbb{N}$ obtenemos una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset X'$ que es biortogonal a $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$. Esto demuestra el resultado. $\square$

Terminamos esta sección dando una caracterización de bases de Schauder en espacios de Banach.

Teorema 1.7. *Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ una sucesión en el espacio de Banach X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una base de Schauder en X si y solo si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es completa y existe una sucesión biortogonal $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que la serie $\sum_{n\geq 1}\langle a_n, x\rangle x_n$ converge para cada $x \in X$.*

No incluiremos la prueba de este resultado, puede ser consultada en [16].

1.2. Existencia y unicidad de solución débil para problemas parabólicos

Sea $N \geq 1$ fijo. Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, conexo, acotado y con frontera $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^2$, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ un subconjunto abierto relativo no vacío de $\partial\Omega$. Para $T > 0$ fijo, denotaremos por $\mathcal{Q}_T = \Omega \times (0,T)$ y $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Con esta notación consideramos el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y + Ly = f \quad \text{ en } Q_T, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \quad y(\cdot,0) = y_0 \quad \text{ en } \Omega, \end{array} \right. \tag{1.2}$$

donde $f : Q_T \to \mathbb{R}$ e $y_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ están dadas, e $y(x,t)$ es desconocida. Mediante L estamos denotando un operador elíptico de segundo orden dependiente del tiempo dado por:

$$L(t)y(x,t) = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}(x,t)\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_i}(x,t) + c(x,t)y(x,t) \tag{1.3}$$

con coeficientes que satisfacen:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} \in W^{1,\infty}(Q_T), \quad b_i, c \in L^\infty(Q_T), \quad 1 \leq i,j \leq N, \\ a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t), \quad \forall (x,t) \in Q_T. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Asumiremos que la parte principal de L es uniformemente parabólico, es decir, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \forall (x,t) \in Q_T. \tag{1.5}$$

De hecho, cuando $a_{ij} = \delta_{ij}$ y $b_i = c = f = 0$ $(1 \leq i,j \leq N)$ obtenemos que $L(t) = -\Delta$. En lo que sigue vamos a comprobar que, bajo las condiciones (1.3) - (1.5), dados

$$y_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{y} \quad f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

el problema (1.2) admite una única solución débil $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Para ello, introducimos la notación

(1.6)

$$a(t;u,v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega b_i(x,t)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}v(x)\,dx + \int_\Omega c(x,t)u(x)v(x)\,dx,$$

para todas $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Gracias a las condiciones (1.3) - (1.5), es fácil comprobar que la forma bilineal $a(t;\cdot,\cdot)$

$$a(t) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

está bien definida y es continua para casi todo $t \in [0, T]$. De hecho, se tiene:

Proposición 1.8. *Bajo las condiciones (1.4) y (1.5), existen constantes positivas M y δ, solo dependientes de Ω, T y de los coeficientes de L, tales que la forma bilineal $a(t,\cdot,\cdot)$ dada en (1.6) satisface*

$$|a(t,u,v)| \leq M\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

y

$$a(t,v,v) + \delta\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.7}$$

Demostración. Sea $a(t;u,v)$ como en (1.6), entonces

$$|a(t;u,v)| = \left|\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega b_i(x,t)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}v(x)\,dx + \int_\Omega c(x,t)u(x)v(x)\,dx\right|$$
$$\leq C_1\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C_2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + C_3\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Esto prueba la primera desigualdad.

Veamos ahora (1.7). Nuevamente sea $a(t;u,v)$ como en (1.6), entonces en el peor de los casos se tiene

$$|a(t;v,v)| = \left|\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega b_i(x,t)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}v(x)\,dx + \int_\Omega c(x,t)u(x)v(x)\,dx\right|$$
$$\geq \alpha\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \text{máx}_i\,\|b_i(x,t)\|_{L^\infty(Q_T)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} - \|c\|_{L^\infty(Q_T)}\|v\|^2_{L^2(\Omega)},$$

como

$$\|\nabla v\|\|v\| = \epsilon\|\nabla v\|\frac{1}{\epsilon}\|v\| \leq \frac{\epsilon^2}{2}\|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\epsilon^2}\|v\|^2,$$

entonces tenemos que

$$|a(t;v,v)| \geq \alpha\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \text{máx}_i\,\|b_i(x,t)\|_{L^\infty(Q_T)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} - \|c\|_{L^\infty(Q_T)}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\geq \alpha\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{C}{2}\epsilon^2\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \left[\frac{C}{2}\frac{1}{\epsilon^2} + \|c\|_\infty\right]\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\geq \frac{\alpha}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \left[\frac{C^2}{2}\frac{1}{\alpha} + \|c\|_\infty\right]\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \delta\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Por tanto,

$$a(t;v,v) + \delta\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

□

Definición 1.9. *Dado $y_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, diremos que $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ con $y' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ es solución débil del problema parabólico (1.2) si satisface:*

(i). $\langle y'(t),\varphi\rangle + a(t;y(t),\varphi) = \langle f(t),\varphi\rangle$ *para cada* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *y para casi todo* $t \in [0,T]$.

(ii). $y(0) = y_0$.

Donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *es el producto de dualidad entre* $H^{-1}(\Omega)$ *y* $H_0^1(\Omega)$.

Observación 1.2. Veremos más adelante que si $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $y' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, entonces y tiene un representante en su clase de equivalencia que satisface $y \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Por tanto, la igualdad (ii) de la Definición 1.9 tiene el siguiente sentido: $y(0) = y_0$ en $L^2(\Omega)$.

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar la existencia y unicidad de soluciones débiles para un problema parabólico, pero antes vamos a definir el siguiente espacio:

$$W(0,T) = \{y:\ y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\quad y' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}.$$

Se trata de un espacio de Banach para la norma natural:

$$\|y\|^2_{W(0,T)} = \|y\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|y'\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}.$$

Se tiene:

Lema 1.10. *(i). Sea* $y \in W(0,T)$. *Entonces, existe* $\widetilde{y} \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ *tal que* y *e* $\widetilde{y}$ *son iguales c.p.d en* $[0,T]$. *Además, existe* $C > 0$, *independiente de* y, *tal que*

$$\max_{t\in[0,T]} \|\widetilde{y}(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C\|y\|_{W(0,T)}.$$

En este caso, identificamos y *con* $\widetilde{y}$ *y escribimos* $W(0,T) \hookrightarrow C^0([0,T],L^2(\Omega))$.

(ii). Dadas $u, v \in W(0,T)$, *se tiene que la función* $g(t) = (u(t),v(t))_{L^2(\Omega)}$ *es absolutamente continua en* $[0,T]$ *y*

$$\frac{d}{dt}(u(t),v(t))_{L^2(\Omega)} = \langle u'(t),v(t)\rangle + \langle v'(t),u(t)\rangle,\quad p.c.t\quad t \in [0,T]. \tag{1.8}$$

En particular, si $y \in W(0,T)$, *se satisface:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y\|^2_{L^2(\Omega)} = \langle y'(t),y(t)\rangle,\quad p.c.t\quad t \in [0,T].$$

Este último resultado no lo vamos a probar, su demostración puede verse en [28]. Se trata de una generalización de la Fórmula de Barrow en dimensión finita.

A continuación daremos y probaremos un resultado de existencia de solución débil para el problema (1.2). Se tiene:

Teorema 1.11. ***(Existencia de solución débil)*** *Supongamos que se satisfacen las condiciones* (1.3) - (1.5). *Entonces, dados* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *y* $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, *el problema* (1.2) *admite una solución débil* $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$ *con* $y' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. *Además, existe una constante* $C > 0$, *sólo dependiente de* Ω, T *y de los coeficientes del operador* L, *tal que*

$$\max_{0\le t\le T}\|y(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|y\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|y'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le C(\|f\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{1.9}$$

Demostración. La prueba del resultado es estándar y puede ser obtenida mediante el Método de Galerkin (véase, por ejemplo, [6]).

Consideremos $\{w_k\}_{k\geq 1} \subset H_0^1(\Omega)$ una base ortogonal en $H_0^1(\Omega)$ tal que $\{w_k\}_{k\geq 1}$ es ortonormal en $L^2(\Omega)$. Por ejemplo, podríamos considerar las autofunciones del operador $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet homogéneas, normalizadas en $L^2(\Omega)$.

Paso 1. Construcción de soluciones aproximadas.

Fijemos un entero positivo m. Buscamos una función $y_m : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ de la forma

$$y_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, \tag{1.10}$$

tal que

$$\begin{cases} (y_m'(t), w_k) + a(t; y_m(t), w_k) = \langle f(t), w_k\rangle, & \forall k : 1 \leq k \leq m \quad \forall t \in [0,T], \\ y_m(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} (y_0, w_k) w_k = \sum_{k=1}^{m} y_0^k w_k. & \end{cases} \tag{1.11}$$

En (1.11) y en lo que sigue estamos usando $(\cdot,\cdot)$ para denotar el producto escalar en $L^2(\Omega)$. Recordemos que la forma bilineal $a(t;\cdot,\cdot)$ está definida en (1.6).

Obsérvese que (1.11) es la formulación variacional del problema (1.2) (véase la Definición 1.9) planteada en el espacio de dimensión finita

$$V_m = \operatorname{span}\{w_k : 1 \leq k \leq m\},$$

para las soluciones aproximadas $y_m \in L^2(0,T;V_m)$. Respecto a la existencia de soluciones aproximadas, se tiene

Teorema 1.12. *Bajo las condiciones del Teorema 1.11, para cada $m \geq 1$, existe una única función $y_m \in C^0([0,T];V_m)$ solución del sistema (1.11).*

Demostración. Estamos buscando una solución $y_m \in C^0([0,T];V_m)$ del problema (1.11), y con y_m dado en (1.10). Usando la notación

$$\begin{cases} Y_m(t) = (d_m^1(t), d_m^2(t), ..., d_m^m(t)) \in C^0([0,T], \mathbb{R}^m), \\ y_0^k = (y_0, w_k), \quad f_k(t) = \langle f(t), w_k\rangle, \quad \forall k \geq 1, \end{cases}$$

es fácil comprobar que (1.11) es equivalente al siguiente problema de Cauchy para un sistema diferencial ordinario lineal:

$$\begin{cases} Y_m'(t) + A_m(t) Y_m(t) = F_m(t) \quad \text{en} \quad [0,T], \\ Y_m(0) = Y_m^0, \end{cases} \tag{1.12}$$

donde $Y_m^0 \in \mathbb{R}^m$, $A_m \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ ($\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ es el espacio de las matrices cuadradas de dimensión m) y $F_m \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ están dadas por

$$\begin{cases} Y_m^0 = (y_0^1, y_0^2, ..., y_0^m) \in \mathbb{R}^m, \quad F_m(t) = (f_1(t), ..., f_m(t)) \quad \text{y} \\ A_m(t) = (\alpha_{ij}^m(t))_{1\leq i,j\leq m} \quad \text{con } \alpha_{ij}(t) = a(t; w_i, w_j). \end{cases}$$

De las hipótesis (1.3) y (1.5) se deduce fácilmente que $A_m \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ y $F_m \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. Además, existe una constante $C_m > 0$, que sólo depende de m, Ω, T y de los coeficientes del operador L, tal que

$$\|A_m\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{L}(\mathbb{R}^m))} \leq C_m, \quad \|F_m\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \leq C, \quad \forall m \geq 1.$$

Como consecuencia de todo esto podemos deducir que el sistema diferencial ordinario (1.12) admite una única solución maximal Y_m definida en $[0,T]$ tal que $Y_m \in C^0([0,T];\mathbb{R}^m)$ e Y_m es absolutamente continua en $[0,T]$, con $Y_m' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. Deducimos de este modo el resultado. □

Paso 2. Estimaciones "a priori". Estimaciones de energía.

Del paso anterior hemos deducido la existencia de soluciones aproximadas y_m del problema (1.11). Además, $y_m \in C^0([0,T];V_m)$ e $y_m' \in L^2(0,T;V_m)$. Veamos a continuación que la sucesión $\{y_m\}_{m\geq 1}$ está uniformemente acotada en espacios apropiados. Se tiene,

Teorema 1.13. *Bajo las condiciones del Teorema 1.11, existe $C > 0$, solo dependiente de Ω, T y los coeficientes del operador L, tal que*

(1.13)
$$\max_{0\leq t\leq T} \|y_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|y_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|y_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C(\|f\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)})$$

para cualquier $m \geq 1$.

Por completitud, vamos a probar este resultado.

Demostración. Veamos que se tiene la desigualdad (1.9). De (1.11) (definición de solución aproximada), deducimos

$$(y_m'(t), y_m(t)) + a(t; y_m(t), y_m(t)) = \langle f(t), y_m(t)\rangle, \quad p.c.t \quad t \in [0,T].$$

Del Lema 1.10, deducimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a(t; y_m(t), y_m(t)) = \langle f(t), y_m(t)\rangle, \quad p.c.t \quad t \in [0,T].$$

Usando la propiedad (1.7), llegamos a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|y_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \delta\|y_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha}\|f(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{\alpha}{4}\|y_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

$p.c.t.\, t \in [0,T]$, es decir,

$$\frac{d}{dt}\|y_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|y_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\delta\|y_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\alpha}\|f(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}, \quad p.c.t \quad t \in [0,T].$$

Del Lema 1.14 (Lema de Gronwall) podemos concluir

$$\|y_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|y_m(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds \leq e^{2\delta t}\|y_{0,m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\alpha}e^{2\delta t}\int_0^t \|f(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\,ds$$
$$\leq e^{2\delta t}\|y_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha}e^{2\delta t}\int_0^t \|f(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\,ds$$

Sin más que tomar máximo en $t \in [0,T]$, se deduce (1.9). Esto finaliza el **Paso 2**. □

Paso 3. Paso al límite.

Ya estamos en condiciones de pasar al límite cuando $m \to \infty$, para construir la solución débil de nuestro problema de valores iniciales (1.2).

De acuerdo con la desigualdad (1.13), deducimos que la sucesión $\{y_m\}_{m\geq 1}$ está acotada en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, y $\{y'_m\}_{m\geq 1}$ está acotada en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Como consecuencia, existe una subsucesión $\{y_{m_k}\}_{k\geq 1} \subset \{y_m\}_{m\geq 1}$ y una función $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, con $y' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, tales que

$$y_{m_k} \rightharpoonup y \quad \text{en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad y'_{m_k} \rightharpoonup y' \quad \text{en } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{1.14}$$

Tomemos un entero $n \geq 1$ y una función $v \in C^2([0,T];H_0^1(\Omega))$ de la forma

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} d^k(t) w_k, \tag{1.15}$$

con $\{d^k\} \in C^2([0,T])$. Consideremos $m \geq n$ y multipliquemos la primera línea de (1.11) por $d^k(t)$, sumemos desde $k = 1, ..., n$ e integremos respecto a t. De este modo,

$$\int_0^T [\langle y'_m(t), v(t)\rangle + a(t;y(t),v(t))]\, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\, dt \tag{1.16}$$

En particular la igualdad anterior es cierta para $m = m_k$. De (1.14) y tomando límite deducimos

$$\int_0^T (\langle y'(t), v(t)\rangle + a(t;y(t),v(t)))\, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\, dt, \tag{1.17}$$

igualdad válida para cualquier v regular bajo la forma (1.15). Sin más que tener en cuenta que el espacio

$$\{v : v \text{ es de la forma (1.15), para } n \geq 1, \text{ con } d^k \in C^2([0,T])\},$$

es denso en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, deducimos que (1.17) es válida para cualquier $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Un razonamiento parecido al anterior también permite deducir la igualdad

$$\langle y'(t), \varphi\rangle + a(t;y(t),\varphi) = \langle f(t), \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad p.c.t \quad t \in [0,T].$$

Esto prueba el punto primero de la definición de solución débil de (1.2) (véase la Definición 1.9).

Para finalizar la prueba de existencia de solución débil del problema (1.2), veamos que se tiene que $y(0) = y_0$ en $L^2(\Omega)$. Para ello, partimos de (1.17) y aplicamos esta igualdad para $v \in C^1([0,T];H_0^1(\Omega))$ con $v(T) = 0$. Aplicando la fórmula (1.8) del Lema 1.10, deducimos

$$\int_0^T -\langle v'(t), y(t)\rangle + a(t;y(t),v(t))\, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\, dt + (y(0), v(0)) \tag{1.18}$$

Análogamente, de (1.16) deducimos que

$$\int_0^T (-\langle v'(t), y_m(t)\rangle + a(t;y_m(t),v(t)))\, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\, dt + (y_m(0), v(0))$$

Considerando $m = m_k$ y usando otra vez (1.14) tenemos

$$\int_0^T (-\langle v'(t), y(t)\rangle + a(t; y(t), v(t)))\, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\, dt + (y_0, v(0)) \tag{1.19}$$

ya que $y_{m_k}(0) \to y_0$ en $L^2(\Omega)$. Como $v(0)$ es arbitrario, si comparamos (1.18) y (1.19), concluimos que $y(0) = y_0$. Esto prueba que y es solución débil del problema (1.2).

Antes de finalizar la prueba enunciaremos el siguiente resultado, que probaremos más abajo:

Lema 1.14. ***(Lema de Gronwall)*** *Sea $g \in C^0([0,T])$, una función absolutamente continua en $[0,T]$, y $h, F \in L^1(0,T)$ tales que, para una constante $C > 0$, se tiene:*

$$g'(t) + h(t) \leq Cg(t) + F(t), \quad p.c.t \quad t \in [0,T]. \tag{1.20}$$

Entonces,

$$g(t) + \int_0^t h(s)\, ds \leq e^{Ct} g(0) + e^{Ct} \int_0^t F(s)\, ds, \quad p.c.t \quad t \in [0,T].$$

Pasemos ahora a probar el Lema 1.14:

Demostración del Lema de Gronwall. La desigualdad (1.20) puede ser escrita

$$g'(t) - Cg(t) + h(t) \leq F(t), \quad p.c.t \quad t \in [0,T].$$

Si multiplicamos esta desigualdad por e^{-Ct} deducimos,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-Ct} g(t)\right] + e^{-Ct} h(t) \leq e^{-Ct} F(t), \quad p.c.t \quad t \in [0,T].$$

Integrando en $[0,t]$ con $t \in [0,T]$, también obtenemos

$$e^{-Ct} g(t) + \int_0^t e^{-Cs} h(s)\, ds \leq g(0) + \int_0^t e^{-Cs} F(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

o de manera equivalente,

$$g(t) + \int_0^t e^{C(t-s)} h(s)\, ds \leq e^{Ct} g(0) + \int_0^t e^{C(t-s)} F(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Teniendo en cuenta que $C \geq 0$, deducimos el Lema de Gronwall. Esto finaliza la prueba. □

□

Acabamos de probar, usando el Método de Galerkin, la existencia de solución débil para el problema (1.2). Veamos ahora que dicha solución es única.

Teorema 1.15. ***(Unicidad de solución débil).*** *Bajo las condiciones del Teorema 1.11, para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$, el problema (1.2) admite, a lo sumo, una solución débil.*

Demostración. Para probar este resultado basta comprobar que la solución débil de (1.2) para $f \equiv 0$ e $y_0 \equiv 0$ es $y \equiv 0$. Para ello, basta repetir los cálculos que se hicieron en la prueba del Teorema 1.11 (con $y_0 \equiv 0$ y $f \equiv 0$) para obtener la desigualdad de energía (1.9) $\square$

Vamos a discutir ahora la regularidad de nuestra solución débil y para el problema de valor inicial (1.2) cuando los coeficientes a_{ij} (véase (1.4)) no dependen de t. Para eso, vamos a probar el siguiente Teorema.

Teorema 1.16. ***(Regularidad)*** *Sean $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Supongamos además que $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, con $y' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ la solución débil de (1.2). Entonces,*

$$y \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad y' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

y tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} &ess\sup_{0\le t\le T}\|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|y'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

la constante C depende solo de Ω, T y los coeficientes de $L(t)$.

Demostración. Fijemos $m \geq 1$ y multiplicamos la ecuación de (1.11) por $(d^k)'(t)$ y sumamos desde $k = 1, ..., m$, obtenemos

$$(y_m', y_m') + a(t; y_m, y_m') = (f, y_m')$$

para $0 \leq t \leq T$. Ahora

$$\begin{aligned} a(t;y_m,y_m') &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}\frac{\partial y_m'}{\partial x_j}\,dx \\ &+ \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i\frac{\partial y_m}{\partial x_i}y_m' + c y_m y_m' =: A + B \end{aligned}$$

Como $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = 1,...,n)$ y los coeficientes no dependen de t, vemos que $A = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}b(y_m,y_m)\right)$, para la forma bilineal simétrica

$$b(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx, \quad (u,v \in H_0^1(\Omega)).$$

Además,

$$|B| \leq \frac{C}{\epsilon}\|y_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \epsilon\|y_m'\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad |(f,y_m')| \leq \frac{C}{\epsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon\|y_m'\|^2_{L^2(\Omega)}$$

para todo $\epsilon > 0$.

Si combinamos las desigualdades anteriores, deducimos que

$$\|y_m'\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}b(y_m,y_m)\right) \leq \tfrac{C}{\epsilon}\left(\|y_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + 2\epsilon\|y_m'\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando $\epsilon = 1/4$ y teniendo en cuenta (1.5), deducimos,

$$\|y_m'\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt} b(y_m(t), y_m(t)) \leq C \left(b(y_m, y_m) + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \right), \quad \forall m \geq 1.$$

Aplicando de nuevo el Lema 1.14 (Lema de Gronwall), obtenemos

$$\int_0^T \|{y'}_m^{(s)}\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds + b(y_m(t), y_m(t)) \leq e^{Ct} b(y_m(0), y_m(0)) + e^{Ct} \int_0^T \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds, \quad p.c.t \quad t \in [0, T].$$

Tomando máximo en $t \in [0, T]$, teniendo en cuenta (1.5) junto con el hecho de que $\{w_n\}_{n\geq 1}$ es una base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ e $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, llegamos a

$$\int_0^T \|y_m'\|\, dt + \max_{t\in[0,T]} \|y_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left(\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \right), \quad \forall m \geq 1. \tag{1.21}$$

Tomando límite cuando $m \to \infty$, deducimos que $y \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $y' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. En particular, para cada t tenemos

$$(y', v) + a(t; y, v) = (f, v)$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$. Esta última igualdad la podemos reescribir como

$$b(y, v) = (h, v)$$

para

$$h := f - y' - \sum_{i=1}^N b_i(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_i}(x, t) - c(x, t) y(x, t).$$

Como $h(t) \in L^2(\Omega)$ para todo $0 \leq t \leq T$, deducimos por la regularidad elíptica (ver [6] Teorema 4, Sección 6.3.2) que $y \in H^2(\Omega)$ para todo $0 \leq t \leq T$, y tenemos la siguiente estimación

$$\|y(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|y\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|y'\|_{L^2(\Omega)} + \|y\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Integrando y usando la estimación (1.21), se tiene la prueba. □

1.3. Solución por trasposición para la ecuación del calor unidimensional no homogénea

En esta sección vamos a ver cómo se define una solución por trasposición para una ecuación parabólica unidimensional cuando el control se ejerce sobre la frontera.

Así, fijemos $T > 0$ y consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \partial_t y - \partial_{xx} y = 0 \quad \text{en} \quad Q_T = (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, \cdot) = v, \quad y(1, \cdot) = 0 \quad \text{sobre} \quad (0, T), \\ y(0) = y_0 \quad \text{en} \quad \Omega = (0, 1), \end{cases} \tag{1.22}$$

donde $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$ y $v \in L^2(0,T)$. Observemos que, para cada control $v \in L^2(0,T)$ e $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$, (1.22) admite una única solución débil, definida por trasposición, que satisface

$$y \in L^2(Q_T) \cap C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega));$$

ver el siguiente contenido.

Vamos a empezar aclarando qué es una solución por trasposición para (1.22). Para eso, consideremos el siguiente problema adjunto

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \partial_{xx}\varphi = g \quad \text{en} \quad Q_T, \\ \varphi(0,\cdot) = 0, \quad \varphi(1,\cdot) = 0 \quad \text{sobre} \quad (0,T), \\ \varphi(0,T) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.23}$$

donde $g \in L^2(Q_T)$. Cabe destacar que, gracias al Teorema 1.16, para cada $g \in L^2(Q_T)$, (1.23) posee exactamente una solución fuerte

$$\varphi \in L^2(0,T; H^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)),$$

que depende de forma continua de g, es decir, existe una constante $C(T) > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|\varphi\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} \leq C\|g\|_{L^2(Q_T)}.$$

Efectivamente, con el cambio $\tau = t - s$, (1.24) se convierte en (1.2) para $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i \equiv 0$ y $c \equiv 0$. Gracias a estas propiedades previas, podemos dar la siguiente definición:

Definición 1.17. *Sean $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$ y $v \in L^2(0,T)$ dados. Decimos que $y \in L^2(Q_T)$ es una solución por trasposición de (1.22) si, para cada $g \in L^2(Q_T)$, tenemos*

$$\iint_{Q_T} yg \, dx \, dt = \langle y_0, \varphi(\cdot,0)\rangle + \int_0^T \partial_x\varphi(0,t)v(t)\, dt \tag{1.24}$$

donde φ es la solución de (1.23) asociada a g y $\langle \cdot,\cdot \rangle$ es el producto de dualidad usual entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

Ahora podemos hablar de la existencia y unicidad de solución por trasposición de (1.22). Tenemos:

Teorema 1.18. *Sean $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$ y $v \in L^2(0,T)$ dados. Entonces (1.22) admite una única solución por trasposición y que satisface:*

$$\begin{cases} y \in L^2(Q_T) \cap C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega)), \quad \partial_t y \in L^2(0,T; D(-\Delta)'), \\ \partial_t y - \partial_{xx} y = 0 \quad \text{en} \quad L^2(0,T; D(-\Delta)'), \\ y(\cdot,0) = y_0 \quad \text{en} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{y} \\ \|y\|_{L^2(Q_T)} + \|\partial_t y\|_{L^2(D(-\Delta)')} \leq C\left(\|y_0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(0,T)}\right), \end{cases}$$

para una constante positiva C.

Demostración. En primer lugar, observemos que si $g \in L^2(Q_T)$ la solución de (1.23) satisface (Teorema 1.16)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \in L^2(0,T; D(-\Delta)) \cap C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \quad \text{ y} \\ \|\varphi\|_{L^2(D(-\Delta)')} + \|\varphi\|_{C^0(H_0^1(\Omega))} \leq C\|g\|_{L^2(Q_T)}. \end{array} \right.$$

Por esta propiedad de regularidad es inmediato que, para todo $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$ y $v \in L^2(0,T)$, existe una única solución por trasposición de (1.22). Está claro también que la solución satisface la igualdad $\partial_t y - \partial_{xx} y = 0$ en $D'(Q_T)$ y la estimación

$$\|y\|_{L^2(Q_T)} \leq C \left(\|y_0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(0,T)} \right),$$

para un constante $C > 0$.

A continuación, vamos a probar que también tenemos que $\partial_{xx} y \in L^2(0,T; D(-\Delta)')$ y

$$\|\partial_{xx} y\|_{L^2(D(-\Delta)')} \leq C \left(\|y_0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(0,T)} \right). \tag{1.25}$$

Para ello, vamos a considerar dos sucesiones $\{y_0^m\}_{m\geq 1} \subset L^2(\Omega)$ y $\{v_m\}_{m\geq 1} \subset H^1(0,T)$ tales que

$$y_0^m \to y_0 \quad \text{en} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{y} \quad v_m \to v \quad \text{en} \quad L^2(0,T).$$

No es difícil ver que el problema (1.22) con y_{0m} como dato inicial y v_m como dato frontera, tiene una única solución débil $y_m \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ que satisface

$$\iint_{Q_T} y_m g \, dx \, dt = \langle y_0^m, \varphi(\cdot, 0) \rangle + \int_0^T \partial_x \varphi(0,t) v_m(t) \, dt$$

para cada $g \in L^2(Q_T)$ y donde φ es solución de (1.23). Usando esta última igualdad y (1.24) obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \|y_m\|_{L^2(Q_T)} \leq C \left(\|y_0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(0,T)} \right), \\ y_m \to y \quad \text{en} \quad L^2(Q_T) \quad \text{y} \quad \partial_{xx} y_m \to \partial_{xx} y \quad \text{en} \quad D'(Q_T), \end{array} \right. \tag{1.26}$$

donde C es una constante positiva.

Por otro lado, tenemos

$$\int_0^T \langle \partial_{xx} y_m, \varphi \rangle = \iint_{Q_T} y_m \partial_{xx} \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \partial_x \varphi(0,t) v_m(t) \, dt,$$

para cada $\varphi \in L^2(0,T; D(-\Delta)')$. Para esta igualdad obtenemos que $\{\partial_{xx} y_m\}_{m\geq 1}$ está acotada en $L^2(0,T; D(-\Delta)')$. Esta propiedad junto con (1.26) nos da que $\partial_{xx} y \in L^2(0,T; D(-\Delta)')$ y (1.25).

Ahora, combinando la igualdad $\partial_t y = \partial_{xx} y$ y la propiedad anterior, también vemos que $\partial_t y \in L^2(0,T; D(-\Delta)')$ y

$$\|\partial_t y\|_{L^2(D(-\Delta)')} \leq C \left(\|y_0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(0,T)} \right).$$

Además, $y \in C^0([0,T]; Y)$, donde Y es el espacio de interpolación $Y = [L^2(\Omega), D(-\Delta)']_{1/2}$ (ver [23], Teorema 3.1, p. 19). Si nos fijamos $Y = [D(-\Delta)', L^2(\Omega)]'_{1/2} \equiv H^{-1}(\Omega)$ (ver [23], Teorema 6.1, p. 29). En conclusión, obtenemos

$$\|y\|_{C^0(H^{-1}(\Omega))} \leq \left(\|y_0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(0,T)} \right).$$

Finalmente, no es difícil comprobar que $y(\cdot, 0) = y_0$ en $H^{-1}(\Omega)$, se razona de forma similar a como lo hicimos en la demostración del Teorema 1.11. Esto acaba la prueba. $\square$

Capítulo 2

Controlabilidad de problemas parabólicos. Conceptos generales.

El objetivo de nuestro trabajo es el estudio de diferentes técnicas de control para ecuaciones parabólicas. En este capítulo vamos a ver las diferentes definiciones de controlabilidad.

2.1. Conceptos de controlabilidad.

Fijemos un tiempo $T > 0$ y sean H y U dos espacios de Hilbert separables con productos escalares y normas respectivas denotadas por $(\cdot,\cdot)_H$, $(\cdot,\cdot)_U$, $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_U$. Consideremos el problema de control,

$$\left\{\begin{array}{lll} y' = Ay + Bv & \text{en} & (0,T), \\ y(0) = y_0 \in H & & \end{array}\right. \tag{2.1}$$

En este sistema $y_0 \in H$ es el dato inicial y $v \in L^2(0,T;U)$ es el control que se ejerce sobre el sistema a través del operador B. Asumimos que los operadores A y B son no acotados definidos en $D(A) \subset H$ y $D(B) \subset U$, respectivamente. Asumimos que el problema está bien planteado, es decir, existe una única solución débil $y \in C^0([0,T];H)$ de (2.1).

Denotaremos por $y(t;y_0,v) \in H$ la solución de (2.1) en el tiempo $t \in [0,T]$ correspondiente a $(y_0,v) \in H \times L^2(0,T;U)$. Con estas notaciones, vamos a dar las siguientes definiciones de controlabilidad:

Definición 2.1. *(i) El sistema (2.1) es exactamente controlable en un tiempo T si, para todo $(y_0,y_1) \in H \times H$, existe $v \in L^2(0,T;U)$ tal que la solución y de (2.1) verifica*

$$y(T;y_0,v) = y_1.$$

(ii) El sistema (2.1) es controlable a trayectorias en un tiempo T si, para cada $(y_0,\widehat{y_0}) \in H \times H$ y $\widehat{v} \in L^2(0,T;U)$, existe $v \in L^2(0,T;H)$ tal que la correspondiente solución débil de (2.1) cumple

$$y(T;y_0,v) = y(T;\widehat{y_0},\widehat{v})$$

(iii) *El sistema* (2.1) *es controlable a cero o exactamente controlable a cero en un tiempo* T *si, para cada* $y_0 \in H$ *existe* $v \in L^2(0,T;H)$ *tal que la correspondiente solución débil de* (2.1) *cumple*

$$y(T; y_0, v) = 0.$$

(iv) *El sistema* (2.1) *es aproximadamente controlable en un tiempo* T *si, para cualquier* $(y_0, y_1) \in H \times H$, *y cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe* $v \in L^2(0,T;U)$ *tal que la correspondiente solución débil de* (2.1) *verifica*

$$\|y(T; y_0, v) - y_1\|_{H_1} \leq \varepsilon$$

Como hemos comentado, el objetivo general de esta memoria es analizar los conceptos de controlabilidad de sistemas parabólicos usando diferentes técnicas. Para ello, volvemos a considerar el problema parabólico (1.2) planteado en la Sección 1.2, es decir, supondremos que Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 1$, con frontera $\partial\Omega \in C^2$. Sean ω un subconjunto abierto no vacío de Ω y $T > 0$. Consideremos el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y + L(t)y = v1_\omega \quad \text{en} \quad Q_T = \Omega \times (0,T), \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \quad y(\cdot, 0) = y_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

donde 1_ω es la función característica del conjunto ω, $v \in L^2(Q_T)$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$ está dado. Recordemos que L es el operador uniformemente parabólico dado por

$$L(t)y(x,t) = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}(x,t)\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_i}(x,t) + c(x,t)y(x,t)$$

y con coeficientes que satisfacen

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} \in W^{1,\infty}(Q_T), \quad b_i, c \in L^\infty(Q_T), \quad 1 \leq i,j \leq N, \\ a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t), \quad \forall (x,t) \in Q_T. \end{array} \right.$$

y

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \forall (x,t) \in Q_T.$$

Como consecuencia de los Teoremas 1.11 y 1.15, podemos dar una resultado de existencia y unicidad de solución débil. Se tiene:

Teorema 2.2. *Supongamos que* $v \in L^2(Q_T)$ *e* $y_0 \in L^2(\Omega)$. *Entonces el problema* (2.2) *admite una única solución débil* $y_v \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$. *Además,* y_v *depende de forma continua de* v *e* y_0, *es decir, existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|y_v\|_{C([0,T],L^2(\Omega))} + \|y_v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C(\|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(Q_T)}).$$

Gracias a este resultado, podemos llamar $R(T, y_0)$ al subconjunto de $L^2(\Omega)$ definido como:

$$R(T, y_0) = \left\{ y_v(T) : y_v \text{ solución de (2.2) con } v \in L^2(Q_T) \right\}$$

llamado conjunto de controles alcanzables. Con esta notación podemos redefinir los diferentes conceptos de controlabilidad:

Definición 2.3. *(i) Decimos que el sistema (2.2) es exactamente controlable en $L^2(\Omega)$ en el instante de tiempo T si para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$*

$$R(T, y_0) \equiv L^2(\Omega),$$

es decir, si para cada y_0, y_d en $L^2(\Omega)$, existe un control $v \in L^2(Q_T)$ tal que la solución de (2.2) cumple $y_v(T) = y_d$.

(ii) Se dice que (2.2) es exactamente controlable a trayectorias en el instante $T > 0$ si para todo $y_0, \widehat{y}_0 \in L^2(\Omega)$ y $L^2(Q_T)$ se tiene

$$y(T; \widehat{y}_0, \widehat{v}) \in R(T, y_0).$$

(iii) Se dice que (2.2) es controlable a cero en el instante de tiempo T si para cualquier $y_0 \in L^2(\Omega)$ se tiene

$$0 \in R(T, y_0),$$

es decir, si para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$ existe un control $v \in L^2(Q_T)$ tal que la solución (2.2) verifica $y_v(T) = 0$.

(iv) Se dice que el sistema (2.2) es aproximadamente controlable en $L^2(\Omega)$ en el instante de tiempo T si $R(T, y_0)$ es denso en $L^2(\Omega)$ para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$. Es decir, si para cualquiera $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in L^2(Q_T)$ tal que la solución de (2.2) verifica

$$\|y_v(T) - y_d\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Observación 2.1. (i) Es evidente que el primer concepto de controlabilidad implica el resto de conceptos de controlabilidad para el sistema (2.2). Por otro lado, gracias a la linealidad del problema (2.2), es fácil comprobar que el concepto de controlabilidad exacta a trayectorias equivale al concepto de controlabilidad exacta a cero.

(ii) Dado el efecto regularizante del problema (2.2), no tiene sentido el concepto de controlabilidad exacta en el marco parabólico cuando $\Omega \backslash \overline{\omega} \neq \emptyset$. Para comprobarlo consideremos el caso particular $L(t) = -\Delta$. Es conocido (véase [19]) que el operador del calor $\partial_t - \Delta$ satisface la siguiente propiedad de regularidad: "Si $y \in \mathcal{D}'(\mathcal{O} \times (0, T))$ (con $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un abierto) verifica

$$\partial_t y - \Delta y = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathcal{O} \times (0, T)),$$

entonces, la función $y(\cdot, t)$ es analítica en $\mathcal{O}$ para cualquier $t \in [0, T]$". Aplicando esta propiedad al abierto $\mathcal{O} = \Omega \setminus \overline{\omega}$, deducimos que $y_v(\cdot, t)$ es analítica en $\mathcal{O}$, independientemente de N, v e y_0. Por tanto, el sistema no puede ser controlable en $L^2(\Omega)$ en el instante $T > 0$. Por tanto, solo nos planteamos los conceptos de controlabilidad a cero (equivalente a la controlabilidad a trayectorias) y de controlabilidad aproximada para el problema (2.2).

(iii) Veremos también que para el problema (2.2) el concepto de controlabilidad exacta a cero implica el de controlabilidad aproximada.

(iv) Debido a la linealidad del problema, es fácil comprobar que la controlabilidad aproximada equivale $R(T,0) = L^2(\Omega)$, es decir, podemos suponer que en (2.2) $y_0 \equiv 0$ en Ω. Efectivamente, es fácil comprobar que la variedad afín

$$R(T,y_0) = \widetilde{y}(T) + R(T,0)$$

donde $\widetilde{y}$ es la solución de (2.2) asociada a $v = 0$. De esta igualdad, deducimos que el sistema (2.2) es aproximadamente controlable en $L^2(\Omega)$ en el instante T si y solo si

$$\overline{R(T,0)} = L^2(\Omega).$$

2.2. Controlabilidad aproximada. Continuación única.

Vamos a comenzar estudiando la propiedad de controlabilidad aproximada en el instante $T > 0$ del sistema (2.2). Empezaremos comprobando que esta propiedad equivale a una propiedad cualitativa del llamado problema adjunto. Para ello, consideramos el problema (problema adjunto):

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi + L(t)\varphi = 0 \quad \text{en} \quad Q_T, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T, \quad \varphi(\cdot,T) = \varphi_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ y $L^*(\cdot)$ es el operador adjunto de $L(\cdot)$ (véase (1.3)), es decir, $L^*(\cdot)$ es el operador dado por:

$$L^*(t)\varphi(x,t) = -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x,t)\right) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x,t)\varphi(x,t)) + c(x,t)\varphi(x,t),$$

$(x,t) \in Q_T$. Como hemos dicho anteriormente, se trata de un problema retrógrado que se convierte en un problema de valores iniciales sin más que hacer el cambio $\tau = T - t$. Respecto a la existencia y unicidad de solución débil, se tiene:

Teorema 2.4. *Consideremos el operador $L(\cdot)$ dado por (1.3), con coeficientes satisfaciendo (1.4) y (1.5). Entonces, dado $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, existe una única solución débil*

$$\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega)), \qquad \textit{con} \qquad \varphi' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Además, existe $C > 0$, solo dependiente de Ω, T y de los coeficientes de $L(\cdot)$, tal que

$$\max_{0\le t\le T} \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\varphi'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le C\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}$$

La demostración de este resultado sigue los mismos argumentos de la prueba de los Teoremas 1.11 y 1.15 y, por tanto, será omitida.

Observemos que el problema (2.3) está bien planteado y la solución depende de forma continua de φ_T, i.e., existe una constante C tal que para cada $\varphi_T \in L^2(\Omega)$ el sistema (2.3) tiene una única solución $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$ y satisface

$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\varphi\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \le C\|\varphi_T\|_{L^2(\Omega)}.$$

La solución del sistema (2.3) está relacionada con la solución del problema (2.2) por el siguiente resultado:

Teorema 2.5. *Consideremos los problemas* (2.2) *y* (2.3) *con* $L(\cdot)$ *dado por* (1.3) *y satisfaciendo* (1.4) *y* (1.5). *Entonces, para todo* $y_0, \varphi_T \in L^2(\Omega)$, *se tiene*

$$\iint_{Q_T} \varphi 1_\omega v \, dx \, dt = \int_\Omega y(\cdot, T)\varphi_T \, dx - \int_\Omega y_0 \varphi(\cdot, 0) \, dx, \tag{2.4}$$

donde $y, \varphi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ *son, respectivamente, las soluciones de* (1.2) *y* (2.3) *asociadas a* y_0 *y* φ_T.

Demostración. La demostración de este resultado es consecuencia de las propiedades de regularidad de las soluciones y y φ de (2.2) y (2.3). De hecho, multiplicando (2.2) por φ e integrando por partes en Q_T obtenemos (2.4). □

La controlabilidad nula y la controlabilidad aproximada del sistema (2.2) las podemos caracterizar en términos del problema adjunto (2.3). Tenemos:

Teorema 2.6. *Consideremos* $L(t)$ *dado en* (1.3) *y satisfaciendo* (1.4) *y* (1.5). *Entonces, el sistema* (2.2) *es aproximadamente controlable en un tiempo* $T > 0$ *si y solo si se satisface la llamada propiedad de continuación única para el problema adjunto* (2.3)*: "Si* $\varphi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ *es solución débil de* (2.3) *asociada a* $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ *y satisface que* $\varphi = 0$ *en* $\omega \times (0,T)$, *entonces* $\varphi = 0$ *en* Q_T*".*

Demostración. Hay varias formas de probar el teorema. La más sencilla es una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach. Consideramos el conjunto de estados accesibles en un tiempo $T > 0$ para el sistema (2.2)

$$\mathcal{R}(T; y_0) = \{y_v = y(T; y_0, v) : v \in L^2(Q_T)\}.$$

Así, el sistema (2.2) es aproximadamente controlable en un tiempo $T > 0$ si y solo si $\mathcal{R}(T; y_0)$ es denso en $L^2(\Omega)$ para todo $y_0 \in L^2(\Omega)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{R}(T; y_0) = Y(\cdot, T) + \mathcal{R}(T; 0)$, donde $Y \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ es la solución de (2.2) asociada a $v \equiv 0$ e y_0, la controlabilidad aproximada es equivalente a probar la densidad del espacio $\mathcal{R}(T; 0)$. Por el Teorema de Hahn-Banach, esto es equivalente a que $\mathcal{R}(T; 0)^\perp = \{0\}$. Así que, tomamos $\widehat{\varphi}_T \in \mathcal{R}(T; 0)^\perp$, es decir, tomamos $\widehat{\varphi}_T \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \widehat{\varphi}_T y(T; v, 0) \, dx = 0, \quad \forall v \in L^2(Q_T).$$

Si consideramos $\widehat{\varphi}$ la correspondiente solución de (2.3), de (2.4) y de la igualdad anterior deducimos

$$0 = \iint_{Q_T} \widehat{\varphi} 1_\omega v \, dx \, dt, \quad \forall v \in L^2(Q_T),$$

es decir, $\widehat{\varphi} = 0$ en ω_T. En conclusión, la propiedad $R(T, 0)^\perp = \{0\}$ equivale a la propiedad de continuación única del problema adjunto (2.3). Esto termina la prueba. □

2.3. Controlabilidad Nula. Desigualdad de observabilidad

El objetivo de esta sección es caracterizar la controlabilidad nula de (2.2) usando la siguiente propiedad del problema adjunto (2.3):

Teorema 2.7. *Bajo las condiciones del Teorema 2.6, el sistema (2.2) es controlable a cero en un tiempo $T > 0$ si y solo si existe una constante positiva C tal que*

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint_{\omega_T} |\varphi|^2 \, dx \, dt, \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega), \tag{2.5}$$

donde φ es la solución de (2.3) asociada a φ_T.

Demostración. Sea $y(\cdot; y_0, v)$ la solución de (2.2) correspondiente al dato inicial $y_0 \in L^2(\Omega)$ y al control $v \in L^2(Q_T)$. Una forma sencilla de probar este resultado es usando el siguiente argumento de análisis funcional: Sea $H = L^2(\Omega)$ y sean G y P los siguientes operadores lineales y continuos:

$$P : v \in L^2(Q_T) \mapsto Pv = y(T; 0, v) \in H, \quad G : y_0 \in H \mapsto G(y_0) = y(T; y_0, 0) \in H.$$

Entonces, a controlabilidad nula del sistema (2.2) es equivalente a la condición $R(G) \subset R(P)$.

Ambos operadores, G y P, son lineales y acotados con valores en H. Entonces, la propiedad anterior se tiene si y solo si (ver [30], Teorema 2.2, p.208) existe $C > 0$ tal que

$$\|G^*(\varphi_T)\|_H \leq C\|P^*(\varphi_T)\|_{L^2(Q_T)}, \quad \forall \varphi_T \in H. \tag{2.6}$$

De (2.4), no es difícil ver que $G^* \in \mathcal{L}(H)$ y $P^* \in \mathcal{L}(H; L^2(Q_T))$ están dados por

$$G^*(\varphi_T) = \varphi(\cdot, 0) \quad \text{y} \quad P^*(\varphi_T) = \varphi 1_\omega,$$

donde φ es la solución de el problema adjunto (2.3) asociada a φ_T y (2.6) es precisamente (2.5). Esto termina la prueba. □

La demostración anterior es breve y directa, pero no es útil cuando se usa con problemas no lineales. Vamos a proponer una prueba alternativa que es constructiva. Así,

Teorema 2.8. *Bajo las condiciones del Teorema 2.6, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe una constante $C > 0$ tal que para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$, existe $v \in L^2(Q_T)$ satisfaciendo

$$\|v\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C\|y_0\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.7}$$

y tal que $y(T; y_0, v) = 0$ en Ω.

(ii) Existe una constante $C > 0$ tal que la desigualdad de observabilidad (2.5) se tiene para las soluciones φ del sistema (2.3).

Demostración. Vamos a empezar viendo que *(i)* implica *(ii)*. Consideremos $\varphi_T, y_0 \in L^2(\Omega)$ y consideremos $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, la solución de (2.3) asociada a φ_T, y $v \in L^2(Q_T)$, el control asociado a y_0 dado en *(i)*. De (2.4) y (2.7), tenemos

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T} \varphi(\cdot,0)y_0\,dx = -\iint_{Q_T} \varphi 1_\omega v\,dx\,dt \leq \|\varphi 1_\omega v\|_{L^2(Q_T)}\|v\|_{L^2(Q_T)}\\ &\leq \sqrt{C}\|\varphi 1_\omega v\|_{L^2(Q_T)}\|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall y_0 \in L^2(\Omega).\end{aligned}$$

Tomando $\sup_{\|y_0\|_{L^2(\Omega)}\leq 1}$ en la desigualdad anterior, deducimos la desigualdad de observabilidad (2.5) para la constante C.

Para probar la otra implicación, usaremos la llamada técnica de penalización. Para esto, vamos a minimizar el siguiente funcional. Dado $\epsilon > 0$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, encontrar un control $v \in L^2(Q_T)$ que minimice el siguiente funcional

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2}\iint_{Q_T} |v|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2\epsilon}\|Pv\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}(Pv, y(T;y_0,0)) + \frac{1}{2\epsilon}\|y(T;y_0,0)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

donde $Pv = y(T;0,v)$. El problema penalizado tiene una única solución v_ϵ y esta está caracterizada por $v_\epsilon \in L^2(Q_T)$ y

$$\iint_{Q_T} v_\epsilon\, v\,dx\,dt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega Pv_\epsilon\, Pv\,dx + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega Pv\, y(T;y_0,0)\,dx = 0, \quad \forall v \in L^2(Q_T),$$

es decir,

$$\iint_{Q_T} v_\epsilon\, v\,dx\,dt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega Pv\, y(T;v_\epsilon,y_0)\,dx = 0, \quad \forall v \in L^2(Q_T).$$

En definitiva,

$$\iint_{Q_T} v_\epsilon\, v\,dx\,dt = -\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega y(T;0,v)\, y(T;v_\epsilon,y_0)\,dx, \quad \forall v \in L^2(Q_T). \tag{2.8}$$

Aplicando la fórmula (2.4) para $y_0 = 0$, para $v \in L^2(Q_T)$ y para $\varphi_T = -\dfrac{1}{\epsilon}y(T;y_0,v_\epsilon)$, la fórmula (5.5) se transforma en

$$\iint_{Q_T} v_\epsilon\, v\,dx\,dt = \iint_{Q_T} \varphi_\epsilon 1_\omega\, v\,dx\,dt, \quad \forall v \in L^2(Q_T).$$

Luego el mínimo está caracterizado por $v_\epsilon = \varphi_\epsilon 1_\omega$, donde φ_ϵ es la solución de (2.3) asociada a

$$\varphi_\epsilon = -\frac{1}{\epsilon}y(T;y_0,v_\epsilon).$$

Usando una vez más (2.4) y teniendo en cuenta las expresiones de φ_ϵ y v_ϵ, fácilmente obtenemos

$$\begin{aligned}&\iint_{\omega_T} \|\varphi_\epsilon\|^2\,dx\,dt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |y_{v_\epsilon}|^2\,dx = -\int_\Omega y_0\varphi_\epsilon(\cdot,0)\,dx\\ &\leq \frac{C}{2}\|y_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2C}\|\varphi_\epsilon(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de observabilidad (2.6) satisfecha, en particular, por φ_ϵ, deducimos:

$$\iint_{\omega_T} |\varphi_\epsilon|^2 \, dx \, dt + \frac{2}{\epsilon} \int_\Omega |y_{v_\epsilon}|^2 \, dx \leq C \|y_0\|^2_{L^2(\Omega)},$$

esto es equivalente a ($v_\epsilon = \varphi_\epsilon 1_\omega$)

$$\|v_\epsilon\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{2}{\epsilon} \|y_{v_\epsilon}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \|y_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

de donde deducimos que las sucesiones $\{v_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ y $\{\epsilon^{-1/2} y_{v_\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ están acotadas en $L^2(Q_T)$ y $L^2(\Omega)$, respectivamente. Podemos extraer una subsucesión débilmente convergente en $L^2(Q_T)$ a algún $v \in L^2(Q_T)$ tales que $\operatorname{Ssup} v \subset \overline{\omega}_T$,

$$\|v\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C \|y_0\|^2_{L^2(\Omega)},$$

e $y_v = 0$ en Ω. Esto finaliza la prueba. □

Observación 2.2. El Teorema 2.8 y la desigualdad (2.5) nos proporcionan una estimación del coste del control para el problema (2.2) que conduce al sistema de un dato inicial $y_0 \in L^2(\Omega)$ a cero en un tiempo $T > 0$. Para ser precisos, si (2.5) se tiene para $T > 0$, entonces el conjunto

$$\mathcal{Z}_T = \{v \in L^2(Q_T) : y(T; y_0, v) = 0\},$$

es no vacío para cualquier $y_0 \in L^2(\Omega)$. Podemos definir el coste del control para el sistema (2.2) en un tiempo T como

$$\mathcal{K}(T) = \sup_{\|y_0\|_{L^2(\Omega)}=1} \left(\inf_{v \in \mathcal{Z}_T(y_0)} \|v\|_{L^2(Q_T)} \right), \quad \forall T > 0,$$

y, por el Teorema 2.8, deducimos que $\mathcal{K}(T) \leq \sqrt{C_T}$. Por otro lado, supongamos que $\mathcal{Z}_T(y_0) \neq \emptyset$ para cualquier $y_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces, la desigualdad de observabilidad (2.5) para el problema adjunto (2.3) se cumple con $C_T = \mathcal{K}(T)^2$. Está entonces claro que

$$\mathcal{K}(T) = \inf \left\{ \sqrt{C_T} : C_T > 0 \text{ tal que (2.5) se cumple} \right\}.$$

Para la demostración de las propiedades anteriores, ver por ejemplo [30], [29] o [3].

La desigualdad (2.5) del sistema (2.3) recibe el nombre de desigualdad de observabilidad.

2.4. Controlabilidad frontera de problemas parabólicos.

En esta sección trataremos de manera somera el problema de controlabilidad frontera par un problema escalar parabólico. Para ello, consideremos el siguiente problema parabólico escalar:

$$(2.9) \qquad \begin{cases} \partial_t y + L(t) y = 0 & \text{en} \quad Q_T, \\ y = v 1_\Gamma \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T, & y(\cdot, 0) = y_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases}$$

donde $L(t)$ está dado por (1.3), satisfaciendo (1.4) y (1.5), $y_0 \in L^2(\Omega)$ y v es el control frontera. Recordemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado regular ($\Omega \in C^2$) y que $\Gamma \subset \partial\Omega$ es un abierto relativo de la frontera.

Hasta ahora sólo hemos visto problemas parabólicos en los que el control se ejerce sobre el segundo miembro de la ecuación (control distribuido), pero también hay problemas como (2.9) donde el control se ejerce sobre una parte de la frontera (control frontera). Para este segundo no hemos visto nada hasta ahora. Vamos a ver algunas características sobre este tipo de problemas.

El operador $L(t)$ es demasiado general y v solo está en $L^2(\Sigma_T)$, luego no es sencillo dar un marco funcional para y_0 y para v que garantice la existencia, la unicidad y la dependencia continua respecto de los datos de la solución de (2.9).

En el caso en el que los coeficientes a_{ij} no dependen de t (caso autónomo) y los coeficientes $b_i = 0$ para cualquier i, se pude aplicar el método de trasposición (véase Teorema 1.18 de la Sección 1.3) y demostrar:

Teorema 2.9. *Consideremos el problema (2.9) con $L(\cdot)$ dado por (1.3), con $b_i = 0$ en Q_T para todo $1 \leq i \leq N$, y satisfaciendo (1.4) y (1.5). Entonces, dado $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$ y $v \in L^2(\Sigma_T)$, el sistema (2.9) tiene una única solución $y \in L^2(Q_T) \cap C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$, la cual depende continuamente de los datos, es decir, existe una constante positiva C, que solo depende de Ω, T y los coeficientes de $L(\cdot)$, tal que*

$$\|y\|_{L^2(Q_T)} + \|y\|_{C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))} \leq C \left(\|y_0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma_T)} \right).$$

Demostración. No vamos a probar este resultado ya que se sale del objetivo de nuestra memoria, como hemos dicho anteriormente es posible probarlo usando el método de trasposición (ver [4]). □

En realidad vamos a deducir el resultado de controlabilidad exacta a cero frontera para el problema (2.9) a partir del problema de la controlabilidad a cero del problema (1.2). Se tiene:

Teorema 2.10. *Supongamos que para cualquier $\widetilde{\Omega}$ dominio acotado regular de $\mathbb{R}^N$, para cualquier operador $\widetilde{L}(t)$ dado por (1.3) y satisfaciendo (1.4) y (1.5), y para cualquier $\widetilde{\omega} \subset \widetilde{\Omega}$ abierto no vacío, el problema*

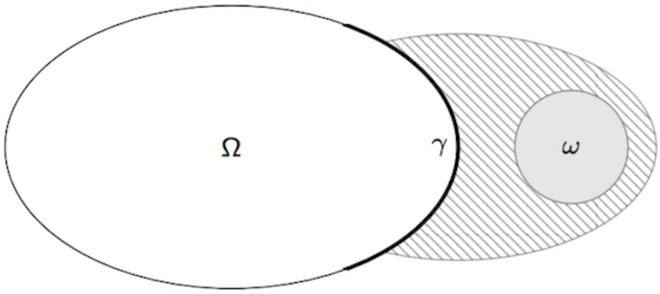
$$\begin{cases} \partial_t y + \widetilde{L}(t) y = f & \text{en } \widetilde{Q}_T, \\ y = 0 \text{ sobre } \widetilde{\Sigma}_T, \quad y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \widetilde{\Omega}, \end{cases}$$

es exactamente controlable a cero. Entonces para cualquier $y_0 \in L^2(\Omega)$, existe $v \in L^2(\Sigma_T)$ tal que (2.9) admite una única solución $y \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ y esta satisface

$$y(\cdot, T) = 0 \quad \text{en} \quad L^2(\Omega).$$

Demostración. Consideremos $L(t)$ en Ω como en (1.3), $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ y $c(x,t)$ también en Ω satisfaciendo (1.4) y sea $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ un abierto relativo de la frontera.

Tomemos $\widetilde{\Omega}$ como en el siguiente esquema



Ampliamos los coeficientes $a_{ij}(x,t)$ a $\widetilde{\Omega}$ satisfaciendo (1.4) y (1.5) en $\widetilde{\Omega}$ y tomamos $b_i(x,t) = 0$ y $c(x,t) = 0$ fuera de Ω. Sea $\widetilde{\omega} \subset \widetilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$.

Entonces existe $\widetilde{v}$ con $\operatorname{Supp} \widetilde{v} \subset \overline{\widetilde{\omega}} \times [0,T]$ tal que

$$y = \widetilde{y}\,|_{\Omega} \qquad \text{y} \qquad v = \widetilde{y}\,|_{\partial\Omega}\,.$$

Luego el problema (2.9) admite una única solución satisfaciendo las condiciones del teorema. Esto termina la prueba. $\square$

Observación 2.3. El truco empleado en la demostración anterior solo es válido en el caso escalar.

Capítulo 3

Método de los Momentos

En este capítulo comenzaremos a estudiar el problema de controlabilidad exacta a cero del problema parabólico (1.2). Llevaremos a cabo ese estudio en el caso unidimensional y cuando el operador $L(t)$ (véase (1.3)) es el operador del calor $L(t) = -\Delta$. Para ello, usaremos el conocido método de los momentos (ver [9] y [8]).

3.1. Método de los momentos.

Consideremos el problema

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \partial_t y - \partial_{xx} y = 0 \quad \text{en} \quad Q_T = (0,\pi) \times (0,T), \\ y(0,\cdot) = v \quad y(\pi,\cdot) = 0 \quad \text{sobre} \quad (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 \quad \text{en} \quad (0,\pi), \end{cases}$$

donde $v \in L^2(0,T)$ es el control e $y_0 \in H^{-1}((0,\pi))$. Como hemos comentado, nuestro objetivo es el estudio de la controlabilidad exacta a cero del problema (3.1). Recordemos que como consecuencia del Teorema 1.18, el problema (3.1) está bien planteado. De hecho, se tiene:

Teorema 3.1. *Para cada $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$ y $v \in L^2(0,T)$ el problema (3.1) admite una única solución por trasposición $y \in L^2(Q_T) \cap C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$. Además, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|y\|_{L^2(Q_T)} + \|y\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \leq C(\|y_0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(0,T)}).$$

Este resultado es el Teorema 1.18 del Capítulo 1. Tiene sentido, por tanto, el problema de la controlabilidad exacta a cero. De hecho, en este capítulo, Secciones 3.2 y 3.3 probaremos el Teorema principal (ver Teorema 3.4) que nos da la controlabilidad exacta a cero de (3.1).

Pasamos ya a describir el método de los momentos. Este método ha sido usado con éxito para probar la controlabilidad frontera a cero para ecuaciones parabólicas escalares en dimensión uno con coeficientes independientes de t (ver [9] y [8]). Veamos este método para la ecuación del calor.

Hay que decir que el operador $L = -\partial_{xx}$ en $(0,\pi)$ con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas admite una sucesión de autovalores y autofunciones normalizadas dadas por

$$\lambda_k = k^2, \quad \phi_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx), \quad k \geq 1, \quad x \in (0,\pi) \tag{3.2}$$

formando una base de Hilbert en $L^2(0,\pi)$.

Para describir el método de los momentos, vamos a considerar el problema (3.1), problema que coincide con (2.9) cuando $N = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $\Gamma_0 = \{0\}$ y $L(t) = -\partial_{xx}$ (ver (2.9)): Las soluciones y de (3.1) están relacionadas con las soluciones del problema adjunto a (3.1):

$$\begin{cases} -\partial_t\varphi - \partial_{xx}\varphi = 0 & \text{en} \quad Q_T, \\ \varphi(0,\cdot) = \varphi(\pi,\cdot) = 0 & \text{en} \quad (0,T), \\ \varphi(\cdot,T) = \varphi_T & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

Recordemos que; en virtud del Teorema 1.15, para cada $\varphi_T \in H_0^1(\Omega)$, el problema (3.3) admite una única solución fuerte $\varphi \in L^2(0,T;H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi))$ que depende de manera continua de φ_T. De este modo, se tiene:

Teorema 3.2. *Consideremos los problemas* (3.1) *y* (3.3)*. Entonces, para cada* $y_0 \in H^{-1}((0,\pi))$*,* $v \in L^2(0,T)$ *y* $\varphi_T \in H_0^1((0,\pi))$*, tenemos*

$$\int_0^T \partial_x\varphi(0,t)v(t)\,dt = \langle y(\cdot,T),\varphi_T\rangle - \langle y_0,\varphi(\cdot,0)\rangle, \tag{3.4}$$

donde $y \in L^2(Q_T) \cap C^0([0,T];H^{-1}((0,\pi)))$ *y*

$$\varphi \in L^2(0,T;H^2((0,\pi)) \cap H_0^1((0,\pi))) \cap C^0([0,T];H_0^1((0,\pi)))$$

son, respectivamente, las soluciones de (3.1) *y* (3.3) *asociadas a* y_0 *y* v*, y* φ_T*, y* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *es el producto de dualidad entre* $H^{-1}((0,\pi))$ *y* $H_0^1((0,\pi))$*.*

La fórmula (3.4) se puede deducir con facilidad cuando los datos y_0, v y φ_T son regulares. En el caso general, la prueba se puede obtener usando argumentos de regularidad (para más detalles, ver [11]).

Vamos a estudiar la controlabilidad nula del problema (3.1). De la fórmula (3.4), deducimos que, dado $y_0 \in H^{-1}((0,\pi))$, existe un control $v \in L^2(0,T)$ tal que la solución y de (3.1) satisface $y(\cdot,T) = 0$ en $(0,\pi)$ si y solo si existe un control $v \in L^2(0,T)$ satisfaciendo

$$\int_0^T \partial_x\varphi(0,t)v(t)\,dt = -\langle y_0,\varphi(\cdot,0)\rangle, \quad \forall\varphi_T \in H_0^1((0,\pi)),$$

($\varphi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\cap C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ es la solución de (3.3) asociada a φ_T). Usando que $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ (ver (3.2)) es una base ortonormal de $L^2((0,\pi))$ y ortogonal de $H_0^1((0,\pi))$, la propiedad anterior la podemos escribir como

$$\int_0^T v(t)\partial_x\Phi_k(0,t)\,dt = -\langle y_0,\Phi_k(\cdot,0)\rangle, \quad \forall k \geq 1.$$

siendo Φ_k la solución de (3.4) asociada a $\varphi_T = \Phi_k$. Evidentemente, se tiene que $\Phi_k(x,t) = e^{-\lambda_k(T-t)}\phi_k(x)$ para $(x,t) \in Q_T$. Así, la propiedad de controlabilidad nula de (3.1) equivale a hallar $v \in L^2(0,T)$ tal que

$$\int_0^T v(t)e^{-\lambda_k(T-t)}\partial_x\phi_k(0)\,dt = -\langle y_0, e^{-\lambda_k T}\phi_k\rangle, \quad \forall k \geq 1. \tag{3.5}$$

En la igualdad (3.5), λ_k y ϕ_k están dados en (3.2). Ahora, usando la descomposición de Fourier de y_0,

$$y_0 = \sum_{k\geq 1} y_{0,k}\phi_k,$$

podemos concluir que existe un control $v \in L^2(0,T)$ tal que la solución y de (3.1) verifica que $y(\cdot,T) = 0$ en $(0,\pi)$ si y solo si existe $v \in L^2(0,T)$ tal que

$$k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T e^{-\lambda_k(T-t)}v(t)\,dt = -e^{-\lambda_k T}y_{0,k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Introduciendo la nueva función $u(t) = v(T-t)$, $t \in (0,T)$, la igualdad previa puede ser escrita como

$$\int_0^T e^{-k^2 t}u(t)\,dt = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda_k T}y_{0,k}, \quad \forall k \geq 1.$$

A modo de resumen, hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *(Problema de momentos) Dado $y_0 \in H^{-1}(0,\pi)$, existe $v \in L^2(0,\pi)$ tal que la solución $y \in L^2(Q_T) \cap C^0([0,T];H^1(0,\pi))$ satisface que $y(\cdot,T) = 0$ en $(0,\pi)$, si y solo si $v \in L^2(0,T)$ satisface*

$$\int_0^T e^{-k^2 t}u(t)\,dt = m_k \quad \forall k \geq 1, \tag{3.6}$$

donde m_k está dado por

$$m_k = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-k^2 T}.$$

En conclusión, hemos reformulado el problema de controlabilidad nula para la ecuación del calor (3.1) como un problema de momentos el cual depende de la familia de exponenciales reales $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k\geq 1}$. Nuestro próximo objetivo será resolver este problema. Veamos de manera esquemática como podemos resolver (3.6) mediante un control $v \in L^2(0,T)$, con $T > 0$:

Usando que la serie

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\lambda_k} < \infty,$$

por el Teorema de Müntz (ver [27]), podemos concluir que la familia de exponenciales $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k\geq 1}$ es mínima y no completa en $L^2(0,T)$ (véase la Definición 1.5). Esta última propiedad caracteriza la existencia de, al menos, una familia biortogonal $\{q_k\}_{k\geq 1}$ de $\{e^{-k^2 t}\}_{k\geq 1}$ en $L^2(0,T)$ (ver Lema 5.4 de [15] y la Proposición 1.6), es decir, una familia $\{q_k\}_{k\geq 1} \subset L^2(0,T)$ tal que

$$\int_0^T q_k(t)e^{-\lambda_j t}\,dt = \delta_{kj}, \quad k, j \in \mathbb{N}.$$

Esta propiedad nos proporciona una solución formal del problema de momentos (3.6):

$$u(t) = v(T-t) = \sum_{k\geq 1} m_k q_k(t). \tag{3.7}$$

La cuestión ahora es si el control construido está en $L^2(0,T)$. De hecho, esto depende de la familia $\{q_k\}_{k\geq 1}$. Para probar que el control u dado por (3.7) está en $L^2(0,T)$ necesitaremos estimaciones óptimas de la norma de los elementos q_k de la familia biortogonal. Estas estimaciones dependen fuertemente de la sucesión $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$. En el caso que nos ocupa $\lambda_k = k^2$, para $k \geq 1$. Así, en [9] y [8], los autores demuestran que es posible encontrar una familia biortogonal $\{q_k\}_{k\geq 1}$ de $\{e^{-k^2 t}\}_{k\geq 1}$ que satisface la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C(\varepsilon, T) > 0$ tal que

$$\|q_k\|_{L^2(0,T)} \leq C(\varepsilon, T) e^{\varepsilon \lambda_k}, \quad \forall k \geq 1. \tag{3.8}$$

Teniendo en cuenta la acotación de $\{q_k\}_{k\geq 1}$ dada en (3.8) y asumiendo que $y_0 \in H^{-1}((0,\pi))$, para cada $\varepsilon > 0$, podemos escribir

$$|m_k| \|q_k\|_{L^2(0,T)} \leq \widetilde{C}(\varepsilon, T) e^{-(T-\epsilon)\lambda_k}, \quad \forall k \geq 1,$$

para $m_k = -\dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{-\lambda_k T} y_{0,k}$ y una nueva constante $\widetilde{C}(\varepsilon, T) > 0$. Si tomamos, por ejemplo, $\varepsilon = \dfrac{T}{2}$, la acotación anterior nos garantiza la convergencia absoluta de (3.7) en $L^2(0,T)$. Así, $u, v \in L^2(0,T)$.

Observación 3.1. Como hemos dicho anteriormente, la resolución del problema (3.7) pasa por demostrar la existencia de una familia biortogonal de la sucesión $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k\geq 1}$ en $L^2(0,T)$, con $\lambda_k = k^2$, que satisfaga estimaciones óptimas de $\|q_k\|_{L^2(0,T)}$. De hecho probaremos que existe una familia biortogonal que satisface la desigualdad (3.8) para una sucesiones reales o complejas $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ con suposiciones más generales. Para ser más preciso, supongamos que la sucesión $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{C}$ satisface

$$\begin{cases} \Re\Lambda_k \geq \delta|\Lambda_k|, \quad |\Lambda_k - \Lambda_n| \geq \rho|k-n| \quad \forall k, n \geq 1, \\ \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{|\Lambda_k|} < \infty, \end{cases} \tag{3.9}$$

para $\rho, \delta > 0$ contantes positivas. Entonces, existe una familia biortogonal $\{q_k\}_{k\geq 1}$ de $\{e^{-\Lambda_k t}\}_{k\geq 1}$ para la que se verifica la desigualdad (3.8).

En las siguientes secciones, vamos a probar bajo las hipótesis (3.9), la existencia de una familia biortogonal a $\{e^{-\Lambda_k t}\}_{k\geq 1}$ en $L^2(0,T)$ que satisfacen (3.8). En primer lugar lo probaremos en $L^2(0,\infty)$ y, posteriormente (ver Sección 3.3), en $L^2(0,T)$, con $T > 0$.

3.2. Construcción y estimaciones de la familia biortogonal en $L^2(0,\infty)$

Anteriormente hemos dicho que vamos a resolver el problema de los momentos probando la existencia de una familia biortogonal en $L^2(0,\infty)$ que cumple una condición de acotación apropiada.En concreto, probaremos:

Teorema 3.4. *Consideremos* $\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$ *una sucesión de números complejos que verifica*

$$\left\{\begin{array}{l} \Re\Lambda_k \geq \delta|\Lambda_k|, \quad |\Lambda_k-\Lambda_n| \geq \rho|k-n| \quad \forall k,n\geq 1, \\ \displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{|\Lambda_k|} < \infty, \end{array}\right. \tag{3.10}$$

para δ *y* ρ *dos constantes positivas. Entonces, existe una familia* $\{q_k\}_{k\geq 1}\subset L^2(0,\infty)$ *biortogonal a* $\{e_k\}$ *tal que para cada* $\epsilon>0$, *existe un constante positiva* $C(\epsilon,T)$ *para la cual*

$$\|q_k\|_{L^2(0,\infty)} \leq C(\epsilon,T)e^{\epsilon\Re\Lambda_k}, \quad \forall k\geq 1 \tag{3.11}$$

Para demostrar el teorema anterior nos centraremos en una estrategia basada en la Transformada de Laplace la cual construye explícitamente la familia biortogonal para una sucesión de números complejos fija. Esta estrategia ha sido usada de hecho en [27],[8],[9], [15],[10], [2] para construir una familia biortogonal del conjunto $\{e^{-\Lambda_k t}\}$, donde $\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión de números complejos que satisface (3.10).

Denotaremos por $\Lambda=\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}\subset\mathbb{C}_+=\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathcal{R}\lambda>0\}$ una sucesión de números complejos que verifica

$$\Lambda_k\neq\Lambda_j, \quad \forall k,j\in\mathbb{N} \text{ con } k\neq j \tag{3.12}$$

Para demostrar el Teorema 3.4 razonaremos como sigue:

1. Usando la condición de convergencia de la serie en (3.10), probaremos la existencia de una familia biortogonal $\{q_k\}_{k\geq 1}\subset L^2(0,\infty)$ a $\{e^{-\Lambda_k t}\}_{k\geq 1}$.

2. En segundo lugar, usando el resto de condiciones de (3.10) del Teorema 3.4, probaremos la estimación (3.11).

Para $T\in(0,\infty)$, definimos el conjunto $A(\Lambda,T)$ como el espacio dado por

$$A(\Lambda,T)=\overline{\operatorname{span}\{e^{-\Lambda_k t}:k\geq 1\}}^{L^2(0,T;\mathbb{C})}.$$

Evidentemente, es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(0,T;\mathbb{C})$. Por otro lado, usaremos la notación

$$e_k(t)=e^{-\Lambda_k t}, \quad t\geq 0, \quad \forall k\geq 1$$

Obtendremos la demostración del Teorema 3.4 mediante varios resultados previos. Empezaremos con la siguiente proposición:

Proposición 3.5. *Supongamos que* $\Lambda=\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}\subset\mathbb{C}_+$ *satisface* (3.12) *y*

$$\sum_{k\geq 1}\frac{\Re\Lambda_k}{(1+\Re\Lambda_k)^2+(\Im\Lambda_k)^2}<\infty. \tag{3.13}$$

Entonces, existe una familia biortogonal $\{q_k\}_{k\geq 1}\subset A(\Lambda,\infty)$ *a* $\{e_k\}_{k\geq 1}$ *tal que*

$$\|q_k\|_{L^2(0,\infty)} \leq \mathcal{C}\left[1+\frac{1}{\Re\Lambda_k}\right](\Re\Lambda_k)|1+\Lambda_k|^2\mathcal{P}_k \tag{3.14}$$

donde $\mathcal{C}$ *es una constante positiva, y* $\mathcal{P}_k$, *producto de Blaschke, está dado por*

$$\mathcal{P}_k:=\prod_{j\geq 1,\ j\neq k}\left|\frac{1+\Lambda_k/\Lambda_j^*}{1-\Lambda_k/\Lambda_j}\right|, \quad \forall k\geq 1.$$

Para demostrar este resultado necesitaremos algunos lemas previos.

Lema 3.6. *Bajo las hipótesis de la Proposición 3.5, consideremos el producto de Blaschke asociado a* Λ, $W : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$, *definido por*

$$\begin{cases} W(\lambda) = W(\lambda, \Lambda) = \prod_{k\geq 1} \delta_k \dfrac{1-\lambda/\Lambda_k}{1+\lambda/\Lambda_k^*}, & \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ \delta_k = \dfrac{\Lambda_k}{\Lambda_k^*} \dfrac{|\Lambda_k - 1|}{|\Lambda_k + 1|} \dfrac{\Lambda_k^* + 1}{\Lambda_k^* - 1} & (\delta_k = 1 \text{ si } \Lambda_k = 1). \end{cases}$$

Entonces, $W \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, *el espacio de funciones acotadas y holomorfas definidas sobre* $\mathbb{C}_+$, *está definida en casi todo sobre* $i\mathbb{R}$ *y verifica* $|W(\lambda)| < 1$ *para* $\Re\lambda > 0$, $|W(i\tau)| = 1$ *para casi todo* $\tau \in \mathbb{R}$ *y*

$$W(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \Lambda_k, \quad \text{con } k \geq 1.$$

Además, Λ_k *es raíz simple de* W, *para cualquier* $k \geq 1$.

Demostración. Sea B la bola unidad en $\mathbb{C}$ y consideremos una sucesión $\{\alpha_k\}_{k\geq 1} \subset B$ tal que

$$\sum_{k\geq 1} (1 - |\alpha_k|) < \infty.$$

Entonces, se tiene (ver [25]) que la siguiente función:

$$G(z) = \prod_{k\geq 1} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \frac{\alpha_k - z}{1 - \alpha_k^* z}, \quad \text{con } z \in B,$$

está bien definida en B, en casi todos los puntos de ∂B y cumple $G \in H^\infty(B)$ y $|G(e^{i\theta})| = 1$ para casi todo $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Obtendremos la prueba del lema por las propiedades previas de la función G. En efecto, no es difícil comprobar que la función

$$h : z \in B \mapsto h(z) = \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{C}_+$$

es biyectiva. Además, h es holomorfa en B y $W(\lambda) = G(h^{-1}(\lambda))$ para $\alpha_k = h^{-1}(\Lambda_k)$.

Observemos que

$$(1 - |\alpha_k|) = 1 - \left(1 - \frac{4\Re\Lambda_k}{(1+\Re\Lambda_k)^2 + (\Im\Lambda_k)^2}\right)^{1/2}$$

y

$$\sum_{k\geq 1} (1 - |\alpha_k|) < \infty$$

si y sólo si se tiene (3.13). Combinando las propiedades previas concluimos que $W \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ si (3.13) se cumple.

Finalmente, se puede comprobar fácilmente que $|W(\lambda)| < 1$ para $R\lambda > 0$, $|W(i\tau)| = 1$ para casi todo $\tau \in \mathbb{R}$. Esto finaliza la prueba. $\square$

Una consecuencia directa del lema anterior es el siguiente corolario:

Corolario 3.7. *Bajo las hipótesis de la Proposición 3.5, tenemos que* $A(\Lambda,\infty)$ *es un subespacio propio cerrado de* $L^2(0,\infty)$*, es decir, la familia* $\{e^{-\Lambda_k t}\}_{k\geq 1}$ *no es completa en* $L^2(0,\infty)$*.*

Demostración. Ya que las condiciones (3.12) y (3.13) las suponemos ciertas, se sigue que $W \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, dado por el Lema 3.6, se tiene que $W \not\equiv 0$. Consideremos

$$\Phi(\lambda) = \frac{W(\lambda)}{(1+\lambda)^2} \tag{3.15}$$

Es muy simple comprobar que $\Phi \in H^2(\mathbb{C}_+)$, el espacio de las funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}_+$ tales que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\sigma+i\tau)|^2 \, d\tau < \infty, \quad \forall \sigma > 0,$$

con norma

$$\|\Phi\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(i\tau)|^2 \, d\tau\right)^{1/2}.$$

Usando las propiedades de la función W, podemos comprobar que, para una constante positiva C, tenemos

$$\|\Phi\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} \leq C.$$

Recordemos que la transformada de Laplace es un homeomorfismo de $L^2(0,\infty)$ en $H^2(\mathbb{C}_+)$ (para el espacio $H^2(\mathbb{C}_+)$ y las propiedades de la Transformada de Laplace, ver por ejemplo [27], pp.19-20). Por lo tanto, existe una función no trivial $\varphi \in L^2(0,\infty)$ tal que

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi^*(t) \, dt, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Observemos que, gracias al Lema 3.6, $\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$ son los ceros de Φ y tienen multiplicidad uno. En particular, $\Phi(\Lambda_k) = 0$ para cada $k \geq 1$. Así,

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda_k t}\varphi^*(t) \, dt = (e_k, \varphi)_{L^2(0,\infty)} = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Hemos probado entonces que existe $\varphi \in L^2(0,\infty)$, con $\varphi \not\equiv 0$, tal que $\varphi \in A(\Lambda,\infty)^\perp$. Así, $A(\Lambda,\infty)^\perp \neq \emptyset$ y, por tanto, $A(\Lambda,\infty) \not\equiv L^2(0,\infty)$. Esto finaliza la prueba. □

A partir de la función Φ definida en (3.15), nos gustaría construir una familia de funciones biortogonales $\{\Phi_k\} \subset H^2(\mathbb{C}_+)$ cumpliendo algunas condiciones adicionales. Las damos en el siguiente resultado:

Lema 3.8. *Supongamos que la sucesión* $\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$ *satisface las condiciones* (3.12) *y* (3.13)*. Entonces, existe una familia* $\{\Phi_k\}_{k\geq 1} \subset H^2(\mathbb{C}_+)$ *tal que*

$$\Phi_k(\Lambda_j) = \delta_{kj}, \quad \forall k,j \geq 1 \tag{3.16}$$

y

$$\|\Phi_k\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} \leq C\frac{H(\Lambda_k)}{\Phi(\Lambda_k)}, \quad \forall k \geq 1 \tag{3.17}$$

donde C es una constante positiva, y Φ y $H(\Lambda_k)$ vienen dadas respectivamente por (3.15) *y*

$$H(\Lambda_k) = 1 + \left(\frac{1}{\Re\Lambda_k}\right)$$

Antes de probar este lema vamos a probar la Proposición 3.5.

Demostración de la Proposición 3.5. Por el Lema 3.8 deducimos que $\Phi_k \in H^2(\mathbb{C}_+)$ para cada $k \geq 1$. Así, usando otra vez la transformada de Laplace, para todo $k \geq 1$, existe una función no trivial $\widehat{\varphi}_k \in L^2(0,\infty)$ tal que

$$\Phi_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\widehat{\varphi^*}(t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

y $\|\widehat{\varphi}_k\|_{L^2(0,\infty)} \leq C\|\Phi_k\|_{H^2(\mathbb{C}_+)}$ para una constante positiva C.

Consideremos la proyección $\Pi_\Lambda : L^2(0,\infty) \to A(\Lambda,\infty)$. Tenemos

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda_k t}\Pi_\Lambda\varphi^*(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\Lambda_k t}\varphi^*(t)\,dt, \quad \forall k \geq 1, \quad \forall \varphi \in L^2(0,\infty).$$

Teniendo en cuenta (3.16) y las dos igualdades previas, deducimos que el conjunto $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ con $\varphi_k = \frac{1}{2\pi}(\Pi_\Lambda\widehat{\varphi_k})$ es una familia biortogonal asociada a $\{e^{-\Lambda_k}\}_{k\geq 1}$ y

$$\|\varphi_k\|_{L^2(0,\infty)} \leq C\|\Phi_k\|_{H^2(\mathbb{C}_+)}$$

para una constante positiva C.

A partir de (3.17) y para probar (3.14), vamos a calcular $|\Phi'(\Lambda_k)|$. En primer lugar, la función Φ puede ser escrita como $\Phi(\lambda) = f(\lambda)$ con f una función holomorfa en $\mathbb{C}_+$. Como Λ_k es un cero simple de f, obtenemos $\Phi'(\Lambda_k) = f'(\Lambda_k)$, es decir,

$$\Phi'(\Lambda_k) = \frac{W'(\Lambda_k)}{(1+\Lambda_k)^2}$$

donde W está dada en el Lema 3.6. Por otra parte, un calculo simple nos da

$$W'(\Lambda_k) = -\delta_k\frac{-\Lambda_k^*}{2\Lambda_k\Re\Lambda_k}\prod_{j\geq 1, j\neq k}\delta_j\frac{1-\Lambda_k/\Lambda_j}{1+\Lambda_k/\Lambda_j^*}$$

y por lo tanto

$$|\Phi'(\Lambda_k)| = \frac{1}{2|1+\Lambda_k|^2\Re\Lambda_k}\prod\left|\frac{1-\Lambda_k/\Lambda_j}{1+\Lambda_k/\Lambda_j^*}\right|.$$

Finalmente, de (3.15) obtenemos (3.14). Esto termina la prueba. □

En la Proposición 3.5 hemos probado que, bajo las hipótesis (3.12) y (3.13) sobre la sucesión $\Lambda = \{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$, existe una familia biortogonal $\{q_k\}_{k\geq 1} \subset A(\Lambda,\infty)$ del conjunto $\{e^{-\Lambda_k t}\}_{k\geq 1}$ ($\eta = 1$ fijo) el cual satisface (3.17). Ahora veremos que si hacemos unas suposiciones un poco más fuertes sobre la sucesión Λ podemos estimar el producto infinito $\mathcal{P}_k$.

Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.9. *Sea* $\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$ *una sucesión de números complejos que verifica* (3.10). *Entonces, para cada* $\epsilon > 0$ *existe una constante* $C(\epsilon) > 0$ *tal que*

$$\mathcal{P}_k := \prod_{j\geq 1,\, j\neq k} \left| \frac{1+\Lambda_k/\Lambda_j^*}{1-\Lambda_k/\Lambda_j} \right| \leq C(\epsilon) e^{\epsilon \Re \Lambda_k}, \quad \forall k \geq 1$$

La demostración de este resultado la podemos ver en [24, 9, 11]. En [15], podemos ver la demostración de una desigualdad más fuerte bajo ciertas suposiciones para la sucesión $\Lambda = \{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$.

Demostración del Teorema 3.4. La prueba es una consecuencia de las Proposiciones 3.5 y 3.9. Efectivamente, si $\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$ verifica (3.10), entonces tenemos (3.12) y

$$\frac{\Re \Lambda_k}{(1+\Re \Lambda_k)^2 + (\Im \Lambda_k)^2} \leq \frac{1}{\Re \Lambda_k} \leq \frac{1}{\delta} \frac{1}{|\Lambda_k|}$$

Por lo tanto (3.13) se cumple y podemos aplicar la Proposición 3.5 a la sucesión $\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$ deduciendo la existencia de una familia $\{q_k\}_{k\geq 1} \subset A(\Lambda, \infty)$ biortogonal a $\{e^{-\Lambda_k t}\}_{k\geq 1}$ satisfaciendo (3.14).

En segundo lugar, tomando $\epsilon > 0$ y usando el hecho que $\Re \Lambda_k \to \infty$, inferimos que para una constante positiva $C(\epsilon)$ tenemos

$$\left(1 + \frac{1}{\Re \Lambda_k}\right) (\Re \Lambda_k) |1+\Lambda_k|^2 \leq C(\epsilon) e^{\epsilon \Re \Lambda_k / 2}$$

para todo k con $k \geq 1$.

Finalmente, aplicando la Proposición 3.9 con $\epsilon/2$, y teniendo en cuenta la desigualdad previa y (3.14) obtenemos (3.11). Esto finaliza la prueba para el caso $T = \infty$. $\square$

3.3. Construcción y estimaciones de la familia biortogonal en $L^2(0,T)$

El objetivo de esta sección es probar un resultado análogo al Teorema 3.4 en el caso de $L^2(0,T)$, con $T \in (0,\infty)$. En concreto, probaremos:

Teorema 3.10. *Sea* $T \in (0,\infty]$. *Consideremos* $\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$ *una sucesión de números complejos que verifica*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Re \Lambda_k \geq \delta |\Lambda_k|, \quad |\Lambda_k - \Lambda_n| \geq \rho |k-n| \quad \forall k,n \geq 1, \\ \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{|\Lambda_k|} < \infty, \end{array} \right. \tag{3.18}$$

para δ *y* ρ *dos constantes positivas. Entonces, existe una familia* $\{q_k\}_{k\geq 1} \subset A(\Lambda, T)$ *biortogonal a* $\{e^{-\Lambda_k t}\}_{k\geq 1}$ *en* $L^2(0,T)$ *tal que para cada* $\epsilon > 0$, *existe una constante positiva* $C(\epsilon, T)$ *para la cual*

$$\|q_k\|_{L^2(0,T)} \leq C(\epsilon, T) e^{\epsilon \Re \Lambda_k}, \quad \forall k \geq 1. \tag{3.19}$$

La demostración de este Teorema es consecuencia del Teorema 3.4 y del siguiente resultado:

Corolario 3.11. *Asumamos la hipótesis del Teorema 3.10. Entonces, para cualquier* $T \in (0,\infty)$ *el operador* $R_T : A(\Lambda,\infty) \to A(\Lambda,T)$ *definido por*

$$R_T\varphi = \varphi|_{(0,T)}, \quad \forall \varphi \in A(\Lambda,\infty)$$

es un isomorfismo. En particular, existe una constante $K(T) > 0$ *tal que*

$$\|\varphi\|_{L^2(0,\infty)} \leq K(T)\|R_T\varphi\|_{L^2(0,T)}, \quad \forall \varphi \in A(\Lambda,\infty).$$

Este resultado puede ser probado siguiendo las ideas que podemos encontrar en [9], [11] o [15]. Vamos a demostrarlo.

Demostración. Vamos a seguir los argumentos de ([11] ver la prueba del Lema 3.2, p. 1739). Fijemos $T \in (0,\infty)$ y consideremos los espacios

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\infty \left\{ \varphi : \varphi(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\Lambda_k t} \quad \forall t \in (0,\infty), \text{ con } N \in \mathbb{N} \text{ y } a_k \in \mathbb{C} \right\}, \\ \mathcal{D}_T \left\{ \varphi : \varphi(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\Lambda_k t} \quad \forall t \in (0,T), \text{ con } N \in \mathbb{N} \text{ y } a_k \in \mathbb{C} \right\}. \end{cases}$$

Es evidente que, $\mathcal{D}_\infty$ y $\mathcal{D}_T$ son, respectivamente, densos en $A(\Lambda,\infty)$ y $A(\Lambda,T)$ y el operador $R_T : \mathcal{D}_\infty \to \mathcal{D}_T$ es biyectivo. Así, la prueba de este resultado la podemos obtener fácilmente sin más que probar la existencia de una constante positiva $C(T)$ tal que

$$\|\varphi\|_{L^2(0,\infty)} \leq C(T)\|R_T\varphi\|_{L^2(0,T)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_\infty.$$

La idea principal es usar el Teorema 3.4 cuando $T = \infty$.

Por reducción al absurdo, supongamos que para todo $m \geq 1$ existe $\varphi_m \in \mathcal{D}_\infty$ tal que

$$\|\varphi_m\|_{L^2(0,\infty)} = 1 \quad \text{y} \quad \|R_T\varphi_m\|_{L^2(0,T)} < \frac{1}{m}, \quad \forall m \geq 1. \tag{3.20}$$

Observemos que

$$\varphi_m(t) = \sum_{k=1}^{N(m)} a_k^{(m)} e^{-\Lambda_k t}$$

en $(0,\infty)$, para algún $N(m) \in \mathbb{N}$ y $a_k^{(m)} \in \mathbb{C}$. Usando las propiedades de la familia biortogonal $\{q_k\}_{k\geq 1}$ de $\{e_k\}_{k\geq 1}$ en $L^2(0,\infty)$ (ver (3.11)), deducimos que para todo $\epsilon > 0$ existe una constante $C(\epsilon) > 0$ tal que

$$|a_k^{(m)}| = |(\varphi_m, q_k)_{L^2(0,\infty)}| \leq \|\varphi_m\|_{L^2(0,\infty)}\|q_k\|_{L^2(0,\infty)} \leq C(\epsilon)e^{\epsilon \Re \Lambda_k},$$

para todo $1 \leq k \leq N(m)$.

Tomemos $\epsilon \in (0, T/3)$ y definamos

$$U_\epsilon = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re z > 3\epsilon, \quad |\Im z| < (\delta^{-2} - 1)^{-1/2}\epsilon \right\},$$

con $\delta > 0$ dado en (3.10). Observemos que gracias a (3.10) tenemos que $\Im\Lambda_k \le (\delta^{-2} - 1)^{1/2}\Re\Lambda_k$ y, si $z \in U_\epsilon$, podemos dar la siguiente cota

$$|e^{-\Lambda_k z}| = e^{\Im\Lambda_k \Im z - \Re\lambda_k \Re z} \le e^{-(\Re z - \epsilon)\Re\Lambda_k}, \quad \forall k \ge 1.$$

Usaremos las estimaciones previas para acotar φ_m en el conjunto U_ϵ. Así, para $z \in U_\epsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_m(z)| &\le \sum_{k=1}^{N(m)} |a_k^{(m)}| e^{-(\Re z - \epsilon)\Re\Lambda_k} \le C(\epsilon) \sum_{k=1}^{N(m)} e^{-(\Re z - 2\epsilon)\Re\Lambda_k} \\ &\le C(\epsilon) e^{-m_1(\Re z - 2\epsilon)} \sum_{k=1}^{N(m)} e^{-\epsilon[\Re\Lambda_k - m_1]} \le \widetilde{C}(\epsilon) e^{-m_1(\Re z - 2\epsilon)}, \end{aligned}$$

donde $m_1 = \min_{k \ge 1} \Re\Lambda_k > 0$.

De la última desigualdad, deducimos que la función holomorfa φ_m está uniformemente acotada en U_ϵ y, por tanto, tiene una subsucesión convergente (que denotaremos también por φ_m) que converge uniformemente en los compactos de U_ϵ a φ, una función holomorfa en U_ϵ. En particular, $\varphi_m(t) \to \varphi(t)$, para cada $t \in (3\epsilon, \infty)$, y

$$|\varphi_m(t)| \le \widetilde{C}(\epsilon) e^{-m_1(t - 2\epsilon)}, \quad \forall t \in (3\epsilon, \infty).$$

Aplicando el Teorema de Lebesgue, deducimos que $\varphi_m \to \varphi$ en $L^2(3\epsilon, \infty)$. De (3.20) tenemos que φ satisface que $\varphi(t) = 0$ para todo $t \in (3\epsilon, T)$. Además, como φ es holomorfa en U_ϵ, deducimos que $\varphi \equiv 0$ en U_ϵ. En resumen, hemos probado que $\varphi_m \to 0$ en $L^2(3\epsilon, \infty)$ para todo $\epsilon \in (0, T/3)$ y $\|\varphi_m\|_{L^2(0,\infty)} = 1$ para cada $m \in \mathbb{N}$, lo cual es absurdo. Esto termina la prueba. □

Estamos ya en condiciones de probar el Teorema 3.10 cuando $T \in (0, \infty)$.

Demostración del Teorema 3.10. Vamos a asumir que $T \in (0, \infty)$. Si aplicamos el Teorema 3.4, deducimos que existe una familia $\{\widetilde{q}_k\}_{k \ge 1} \subset A(\Lambda, \infty)$ biortogonal a $\{e^{-\Lambda_k t}\}_{k \ge 1}$ en $L^2(0, \infty)$ verificando (3.11).

Definimos

$$q_k = (R_T^{-1})^* \widetilde{q}_k \in A(\Lambda, T), \quad \forall k \ge 1,$$

donde R_T es la aplicación definida en el Corolario 3.11. Por este corolario y las propiedades de la familia $\{\widetilde{q}_k\}_{k \ge 1}$, está claro que q_k satisface (3.11) para todo k.

Por otra parte, con la notación $e_k = e^{-\Lambda_k t}$, podemos escribir

$$\begin{cases} \delta_{kj} = (e_k, \widetilde{q}_j)_{L^2(0,\infty)} = (R_T^{-1} R_T e_k, \widetilde{q}_j)_{L^2(0,\infty)} \\ (R_T e_k, (R_T^{-1})^* \widetilde{q}_j)_{L^2(0,T)} = (e_k, q_j)_{L^2(0,T)}, \quad \forall k, j \ge 1, \end{cases}$$

es decir, $\{q_k\}_{k \ge 1} \subset A(\Lambda, T)$ es una familia biortogonal a $\{e_k\}$ en $L^2(0, T)$ la cual satisface la estimación (3.11). Y esto prueba el Teorema 3.4. □

3.4. Controlabilidad exacta a cero de la ecuación del calor unidimensional.

Recordemos que teníamos como objetivo probar un resultado de controlabilidad exacta a cero del problema (3.1). Recordemos también que, gracias al Teorema 3.3, esta propiedad equivale a la resolución del problema de momentos (3.6). Resolveremos el problema de momentos como consecuencia del Teorema 3.10. En este caso, aplicamos este resultado para la sucesión $\Lambda = \{k^2\}_{k\geq 1}$ que, evidentemente, satisface la condición (3.18). Deducimos, por tanto, la existencia de $\{q_k\}_{k\geq 1}$ una familia biortogonal en $L^2(0,T)$ a $\{e^{-k^2 t}\}_{k\geq 1}$ que satisface (3.19). Como vimos, una solución de (3.6) es la función v dada en (3.7):

$$v(t) = \sum_{k\geq 1} m_k q_k(T-t) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}} y_{0,k} e^{-k^2 t} q_k(T-t), \quad \forall t \in [0,T].$$

Usando que $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$ y la estimación (3.19) para $\epsilon = T/2$, no es difícil comprobar que la anterior serie es absolutamente convergente en $L^2(0,T)$. En resumen, hemos probado:

Teorema 3.12. *El problema (3.1) es exactametne controlable en $H^{-1}(\Omega)$ en el instante $T > 0$, es decir, para cualquier $y_0 \in H^{-1}(0,\pi)$, existe $v \in L^2(0,T)$ tal que la correspondiente solución $y \in L^2(Q_T) \cap C^0([0,T]; H^{-1}(0,\pi))$ satisface $y(\cdot,T) = 0$ en $(0,\pi)$.*

Observación 3.2. Hemos querido describir el método de los momentos en el caso de la ecuación del calor unidimensional. Sin embargo, los argumentos en este capítulo siguen siendo válidos en el caso unidimensional si consideramos operadores elípticos autónomos más generales. En concreto, consideremos el operador elíptico autónomo y autoadjunto

$$L_0 y = -(p(x)y')' + q(x)y, \quad x \in [0,\pi],$$

con $p \in C^1([0,\pi])$, $p > 0$ en $[0,\pi]$ y $q \in C^0([0,\pi])$. Consideremos también el problema de controlabilidad

$$\begin{cases} \partial_t y + L_0 y = 0 & \text{en} \quad Q_T = (0,\pi)\times(0,T), \\ y(0,\cdot) = v, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre} \quad (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en} \quad (0,\pi), \end{cases} \tag{3.21}$$

con $y_0 \in H^{-1}(0,\pi)$. Entonces, es posible aplicar el método de momentos a (3.21) y demostrar la controlabilidad nula de (3.21) en $H^{-1}(0,\pi)$ en el instante $T > 0$. Para detalles adicionales, véase [9] y [8].

Capítulo 4

Desigualdad global de Carleman. Desigualdad de Observabilidad

4.1. Introducción

Dedicaremos este capítulo a demostrar que el problema parabólico (2.2) es exactamente controlable a cero en cualquier instante $T > 0$. Para ello usaremos una nueva técnica que pasa por probar desigualdades (desigualdades globales de Carleman) para el problema adjunto (2.3) que nos permitirá probar la desigualdad de observabilidad (2.5), con una estimación explícita de la constante $C > 0$. Como consecuencia del Teorema 2.6, obtendremos el referido resultado de controlabilidad para el problema (2.2).

Debido a la dificultad técnica de la prueba de las desigualdades de Carleman, en este capítulo supondremos que en el operador $L(t)$ definido en (1.3) los coeficientes a_{ij} están dados por $a_{ij}(x,t) = \delta_{ij}$, para cualquier (x,t). Recordemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) es un dominio acotado no vacío con frontera $\partial\Omega \in C^2$, $\omega \subset \Omega$ es un subconjunto abierto no vacío y $T > 0$. A lo largo del capítulo consideraremos el problema parabólico escalar (2.2) con $a_{ij} \equiv \delta_{ij}$ en $Q_T = \Omega \times (0,T)$ $(1 \leq i,j \leq N)$, es decir,

$$
(4.1) \qquad \begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \displaystyle\sum_{i=1}^N b_i(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_i} + c(x,t)y = v1_\omega & \text{en} \quad Q_T, \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \quad y(\cdot,0) = y_0 & \text{en} \quad \Omega, \end{cases}
$$

donde 1_ω es la función característica en ω, $v \in L^2(Q_T)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ y $b_i, c \in L^\infty(Q_T)$, $\forall i : 1 \leq i \leq N$. Gracias al Teorema 2.2 (ver también los Teoremas 1.11 y 1.15) sabemos que el problema (4.1) está bien planteado para datos iniciales $y_0 \in L^2(\Omega)$ y controles $v \in L^2(Q_T)$.

Consideremos también el problema adjunto (2.3) que con la hipótesis sobre los coeficientes a_{ij} tiene la forma:

$$
(4.2) \qquad \begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta\varphi - \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x,t)\varphi) + c(x,t)\varphi = 0 & \text{en} \quad Q_T, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \quad \varphi(\cdot,T) = \varphi_0 & \text{en} \quad \Omega, \end{cases}
$$

Del Teorema 2.4, deducimos que (4.2) está bien planteado para $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$. Nuestro objetivo será probar la llamada desigualdad global de Carleman para el problema adjunto (4.2). Para ellos procederemos como sigue:

1. Probaremos una primera desigualdad para un problema como (4.2) con segundo miembro en $L^2(Q_T)$, cuando $b_i \equiv 0$, $1 \leq i \leq N$, y $c \equiv 0$. Como consecuencia, obtendremos una desigualdad análoga para (4.2) cuando los coeficientes b_i son nulos.

2. Como consecuencia de las desigualdades previas, deduciremos una nueva desigualdad para la ecuación del calor retrógrada con segundo miembro en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. También como consecuencia obtendremos la deseada desigualdad de Carleman para (4.2).

3. Usaremos la desigualdad de Carleman para el problema adjunto (4.2) para deducir la desigualdad de observabilidad (2.5) para (4.2) con una estimación de la constante C respecto a T y a los coeficientes b_i y c.

4.2. Desigualdad global de Carleman con segundo miembro en $L^2(Q_T)$

Comenzaremos enunciando un resultado que será crucial en este capítulo

Lema 4.1. *Sea $\omega \subset\subset \Omega$ un subconjunto abierto no vacío. Entonces existe $\eta_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\eta_0 > 0$ en Ω, $\eta_0 \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, y $|\nabla\eta_0| > 0$ en $\overline{\Omega \setminus \omega}$.*

Una prueba de este Lema la podemos encontrar en [14]. Consideremos ahora ω_0 un abierto no vacío tal que $\omega_0 \subset\subset \Omega$ y consideremos la función η_0 proporcionada por el Lema 4.1 asociado a ω_0. Sean

$$\alpha(x,t) := \frac{e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))} - e^{2\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t(T-t)}, \tag{4.3}$$

$$\xi(x,t) := \frac{e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)} \tag{4.4}$$

para $(x,t) \in Q_T$, $\lambda > 0$, $m > 1$ y η_0 dada por el Lema 4.1. Estas funciones peso fueron introducidas por primera vez por Imanuvilov. En [14] se puede ver un uso sistemático de estas funciones. A continuación vamos a ver el resultado más importante de este capítulo que nos ayudará a demostrar la desigualdad de observabilidad, para el problema adjunto (4.2). Se tiene:

Teorema 4.2. *En las condiciones anteriores existen constantes positivas $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega,\omega)$, $\sigma_1 = \sigma_1(\Omega,\omega)$ y $C_1 = C_1(\Omega,\omega)$ tales que, para cualquier $\lambda \geq \lambda_1$ y $s \geq s_1 = \sigma(T+T^2)$ se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\begin{aligned} &\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^{-1}(|q_t|^2 + |\Delta q|^2)\,dx\,dt + \lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)|\nabla q|^2\,dx\,dt \\ &+\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|q|^2\,dx\,dt \leq C_1\left(\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}|q_t + \Delta q|^2\,dx\,dt \right. \\ &\left. +\lambda^4 \iint_{\omega_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|q|^2\,dx\,dt\right); \end{aligned} \tag{4.5}$$

para toda $q \in C^2(\overline{Q}_T)$ *con* $q = 0$ *sobre* Σ_T *y siendo* $\omega_T = \omega \times (0, T)$.

En lo que sigue, $C(\Omega, \omega)$ denotará una constante genérica C que depende sólo de Ω y ω y cuyo valor puede cambiar de una línea a la siguiente.

Demostración. La demostración de este teorema sigue la prueba del Lema 1.3 de [10] y la vamos a dividir en tres partes. En la primera parte vamos a obtener la ecuación diferencial que satisface la función q, en términos de una nueva función ψ. Así, introducimos las nuevas funciones $\psi = e^{-s\alpha}q$ y $g = e^{-s\alpha}f$, donde $q \in C^2(\overline{Q}_T)$, $q = 0$ sobre $Sigma_T$, $f = q_t + \Delta q$ y α está dada en (4.3). Operando, obtenemos que

$$M_1\psi + M_2\psi = g_{s,\lambda} \tag{4.6}$$

donde

$$\begin{cases} M_1\psi = -2s\lambda^2|\nabla\eta_0|^2\xi\psi - 2s\lambda\xi\nabla\eta_0 \cdot \nabla\psi + \psi_t, \\ M_2\psi = s^2\lambda^2|\nabla\eta_0|^2\xi^2\psi + \Delta\psi + s\alpha_t\psi, \end{cases} \tag{4.7}$$

$$g_{s,\lambda} = g + s\lambda\Delta\eta_0\xi\psi - s\lambda^2|\nabla\eta_0|^2\xi\psi, \tag{4.8}$$

y ξ está dada en (4.4).

Vamos a denotar por $(M_i\psi)_j$ para $1 \leq i \leq 2$ y $1 \leq j \leq 3$, el j-ésimo término de la expresión $M_i\psi$ dado por (4.7). Con esta notación, tenemos de (4.6)

$$\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + 2\sum_{i,j=1}^{3}((M_1\psi)_i, (M_2\psi)_j)_{L^2(Q_T)} = \|g_{s,\lambda}\|^2_{L^2(Q_T)}. \tag{4.9}$$

A continuación, veremos que la definición que hemos dado para α (ver (4.4)) hace que $2(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q_T)}$ nos dé términos positivos que pueden ser controlados siempre que hagamos una buena elección de los parámetros s y λ.

Es más, vamos a desarrollar ese doble producto escalar. Esto nos dará una desigualdad con dos términos globales de $|\psi|^2$ y $|\nabla\psi|^2$ a la izquierda, mientras que nos dará dos términos locales de $|\psi|^2$ y $|\nabla\psi|^2$ que aparecerán a la derecha. Finalmente, añadiremos dos términos que involucrarán a ψ_t y $\Delta\psi$ a la izquierda, con el objetivo de eliminar el término local que contiene a $\nabla\psi$ que aparece a la derecha y que nos proporcionará una desigualdad de Carleman para la función ψ. Además volveremos a la función original q y deduciremos la desigualdad (4.5).

En esta segunda parte de la demostración desarrollaremos los nueve términos que aparecen en $(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q_T)}$. Para ello, vamos a integrar por partes varias veces con respecto al espacio y al tiempo. Además, vamos a derivar las funciones pesos ($\alpha(x,t)$ y $\xi(x,t)$) y, usaremos las siguientes estimaciones

$$\begin{cases} \partial_i\alpha = -\partial_i\xi = -\lambda\partial_i\eta_0\xi \leq C\lambda\xi, \\ \alpha_t = -(T-2t)\dfrac{e^{2\lambda m\|\eta_0\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\eta_0\|_\infty + \eta_0(x))}}{t^2(T-t)^2} \leq CT\xi^2. \end{cases} \tag{4.10}$$

Esta última desigualdad se sigue de la desigualdad

$$e^{2\lambda m\|\eta_0\|_\infty} \leq e^{2\lambda(m\|\eta_0\|_\infty+\eta_0(x))} \quad \text{en} \quad \Omega$$

válida para cualquier $\lambda \geq 0$. Antes de comenzar con la prueba propiamente dicha, mostraremos una desigualdad fundamental que será usada a lo largo de la demostración. En concreto, existe $C > 0$ tal que para cualquier $m, l \geq 1$ con $m \leq l$, se tiene

$$(s\xi)^m \leq (s\xi)^l \quad \text{en} \quad Q_T, \quad \forall s \geq CT^2. \tag{4.11}$$

Efectivamente, basta demostrar que $(s\xi) \geq 1$ en Q_T siempre que $s \geq CT^2$. De (4.4),

$$s\xi \geq \frac{s}{t(T-t)} \geq \frac{4s}{T^2} \geq 1 \quad \text{si} \quad s \geq \frac{1}{4}T^2.$$

Esto prueba (4.11).

Comencemos ya a tratar los diferentes sumandos de (4.5). En primer lugar, tenemos

$$((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_1)_{L^2(Q_T)} = -2\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\nabla\eta_0|^4 |\psi|^2 \, dx \, dt = A.$$

Entonces,[1]

$$((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_1)_{L^2(Q_T)} = -2\lambda^3 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\nabla\eta_0|^2 (\nabla\eta_0 \cdot \nabla\psi)\psi \, dx \, dt$$

$$= 3\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\nabla\eta_0|^4 |\psi|^2 \, dx \, dt + \lambda^3 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 \Delta\eta_0 |\nabla\eta_0|^2 |\psi|^2 \, dx \, dt$$

$$+2\lambda^3 \sum_{i,j=1}^{N} \iint_{Q_T} (s\xi)^3 \partial_i\eta_0 \partial_{ij}\eta_0 \partial_j\eta_0 |\psi|^2 \, dx \, dt$$

$$= B_1 + B_2 + B_3.$$

Veamos quién es $A + B_1$:

$$A + B_1 = -2\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\nabla\eta_0|^4 |\psi|^2 \, dx \, dt + 3\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\nabla\eta_0|^4 |\psi|^2 \, dx \, dt$$

$$= \lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\nabla\eta_0|^4 |\psi|^2 \geq \underbrace{C\lambda^4 \iint_{\Omega_T} (s\xi)^3 \ |\psi|^2 \, dx \, dt}_{\text{término positivo}} - C\lambda^4 \iint_{\omega_0\times(0,T)} (s\xi)^3 |\psi|^2 \, dx \, dt = \widetilde{A} + \widetilde{B}.$$

[1] Los términos B_1, B_2 y B_3 se obtienen haciendo integraciones por partes y considerando que

$$(\nabla\eta_0 \cdot \nabla\psi)\psi = \frac{1}{2}\nabla\eta_0 \cdot \nabla(|\psi|^2)$$

En esta última desigualdad hemos usado que $\eta_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ y $|\nabla\eta_0| > 0$ en $\overline{\Omega} \setminus \omega_0$ Luego vemos claramente que $A + B_1$ es un término positivo y además los términos B_2 y B_3 pueden ser absorbidos por el término $\widetilde{A}$ tomando $\lambda \geq C$. Efectivamente, obsérvese que

$$\widetilde{A} + B_2 \geq C\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\nabla\eta_0|^4 |\psi|^2 \, dx\, dt - \widetilde{C}\lambda^3 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\nabla\eta_0|^4 |\psi|^2 \, dx\, dt$$

$$\geq \frac{C}{2}\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\nabla\eta_0|^4 |\psi|^2 \, dx\, dt,$$

si tomamos $\lambda \geq \dfrac{2\widetilde{C}}{C} \equiv C(\Omega, \omega)$.

Además tenemos[2],

$$((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_1)_{L^2(Q_T)} = \lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)^2 |\nabla\eta_0|^2 \psi_t \psi \, dx\, dt$$

$$= -\lambda^2 \iint_{Q_T} |\nabla\eta_0|^2 \xi\xi_t |\psi|^2 \, dx\, dt \geq -C\lambda^2 s^2 T \iint_{Q_T} \xi^2 |\psi|^2 \, dx\, dt.$$

En esta última desigualdad hemos utilizado (4.10). De nuevo este término puede ser absorbido si tomamos $\lambda \geq C$ y $s \geq CT$. Veamos cómo hacerlo:

$$\widetilde{A} + C\lambda^2 s^2 T \iint_{Q_T} \xi^3 |\psi|^2 \, dx\, dt \geq C\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\psi|^2 - \lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\psi|^2 \, dx\, dt$$

$$\geq \frac{C}{2}\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\psi|^2,$$

siempre que, por ejemplo, $s \geq CT$ y $\lambda \geq \sqrt{2/C}$.

En consecuencia, hemos probado la existencia de una constante positiva C tal que

$$(M_1\psi, (M_2\psi)_1)_{L^2(Q_T)} \geq C\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\psi|^2 \quad dx\, dt - C\lambda^4 \iint_{\omega_0 \times (0,T)} (s\xi)^3 |\psi|^2 \, dx\, dt \tag{4.12}$$

para cualquier $\lambda \geq C$ y $s \geq CT$.

Por otro lado, tenemos que[3]

[2]Tendremos en cuenta que: $\psi_t \psi = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi|^2$

[3]Para calcular la siguiente integral tendremos en cuenta que $\Delta\psi = \nabla \cdot (\nabla\psi)$

$$((M_1\psi)_1,(M_2\psi)_2)_{L^2(Q_T)} = -2\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)|\nabla\eta_0|^2\Delta\psi\psi\,dx\,dt$$

$$= -2\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)|\nabla\eta_0|^2(\nabla\cdot(\nabla\psi))\psi\,dx\,dt = 2\lambda^2 \iint_{Q_T} \nabla(|\nabla\eta_0|^2 s\xi\psi)\cdot\nabla\psi\,dx\,dt$$

$$= 2\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)|\nabla\eta_0|^2|\nabla\psi|^2\,dx\,dt + 4\lambda^2\sum_{i,j=1}^{N}\iint_{Q_T}(s\xi)\partial_i\eta_0\partial_{ij}\eta_0\partial_j\psi\psi\,dx\,dt$$

$$+2\lambda^3\iint_{Q_T}(s\xi)|\nabla\eta_0|^2(\nabla\eta_0\cdot\nabla\psi)\psi\,dx\,dt.$$

$$= C_1 + C_2 + C_3.$$

Mantendremos a C_1 a la izquierda puesto que genera un término positivo. Mientras que para C_2 y C_3, tenemos que

$$C_2 = 4\lambda^2\sum_{i,j=1}^{N}\iint_{Q_T}(s\xi)\partial_i\eta_0\partial_{ij}\eta_0\partial_j\psi\psi\,dx\,dt$$

$$\leq C\lambda^4\iint_{Q_T}(s\xi)|\psi|^2\,dx\,dt + C\iint_{Q_T}(s\xi)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt$$

y

$$C_3 = 2\lambda^3\iint_{Q_T}(s\xi)|\nabla\eta_0|^2(\nabla\eta_0\cdot\nabla\psi)\psi\,dx\,dt$$

$$\leq C\lambda^4\iint_{Q_T}(s\xi)^2|\psi|^2\,dx\,dt + C\lambda^2\iint_{Q_T}|\nabla\psi|^2\,dx\,dt.$$

En esta última desigualdad hemos utilizado

$$\lambda^3 s\xi = \lambda^2 s\xi\lambda \leq \frac{1}{2}\lambda^4(s\xi)^2 + \frac{1}{2}\lambda^2.$$

Por lo tanto, tomando $s \geq CT^2$ y teniendo en cuenta (4.11) tenemos que

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &\geq 2\lambda^2\iint_{Q_T}(s\xi)|\nabla\eta_0|^2|\nabla\psi|^2\,dx\,dt \\ &-C\lambda^4\iint_{Q_T}(s\xi)^2|\psi|^2\quad dx\,dt - C\iint_{Q_T}(s\xi+\lambda^2)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt. \end{aligned} \tag{4.13}$$

También tenemos

$$((M_1\psi)_2,(M_2\psi)_2)_{L^2(Q_T)} = -2\lambda \iint_{Q_T} (s\xi)(\nabla\eta_0\cdot\nabla\psi)\Delta\psi\,dx\,dt$$

(4.14)

$$= -2\lambda \iint_{\Sigma_T} \frac{\partial\eta_0}{\partial n}(s\xi)\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 d\sigma\,dt + 2\lambda\sum_{i,j=1}^{N}\iint_{Q_T}(s\xi)\partial_{ij}\eta_0\partial_i\psi\partial_j\psi\,dx\,dt$$

$$+2\lambda^2\iint_{Q_T}(s\xi)|\nabla\eta_0\cdot\nabla\psi|^2\,dx\,dt + \lambda\iint_{Q_T}(s\xi)\nabla\eta_0\cdot\nabla|\nabla\psi|^2\,dx\,dt = D_1+D_2+D_3+D_4.$$

Para obtener el sumando frontera D_1 hemos tenido en cuenta que $\psi=0$ sobre Σ_T. Efectivamente, como $\psi=0$ sobre Σ_T, deducimos que todas las derivadas tangenciales son también nulas sobre Σ_T. Así,

$$\nabla\psi = (\nabla\psi\cdot n)n + (\nabla\psi\cdot\tau)\tau = \frac{\partial\psi}{\partial n}n \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T$$

De aquí se puede obtener la expresión de D_1.

Observemos que D_3 es siempre positivo. Por lo tanto,

$$D_2 \le C\lambda\iint_{Q_T}(s\xi)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt. \tag{4.15}$$

Si nos fijamos en D_4 y hacemos algunos cálculos, teniendo en cuenta que $\nabla\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial n}n$ sobre Σ_T, vemos que

$$D_4 = \lambda\iint_{Q_T}(s\xi)\nabla\eta_0\cdot\nabla|\nabla\psi|^2\,dx\,dt = \lambda\iint_{\Sigma_T}(s\xi)\frac{\partial\eta_0}{\partial n}\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 d\sigma\,dt$$

(4.16)

$$-\lambda^2\iint_{Q_T}(s\xi)|\nabla\eta_0|^2|\nabla\psi|^2 \quad dx\,dt - \lambda\iint_{Q_T}(s\xi)\Delta\eta_0|\nabla\psi|^2\,dx\,dt$$

$$= D_{41}+D_{42}+D_{43}.$$

Observemos que, del Lema 4.1, la función η_0 satisface que $\eta_0=0$ sobre $\partial\Omega$ y $|\nabla\eta_0|>0$ en $\overline{\Omega}\backslash\omega$. Así, también se tiene que $\dfrac{\partial\eta_0}{\partial n}\le 0$ sobre $\partial\Omega$. Por tanto, podemos decir que $D_1+D_{41}\ge 0$. Por otro lado, el término D_{43} puede ser acotado de la misma forma que D_2. En conclusión, obtenemos

$$D_1+D_2+D_3+D_4 \ge -\lambda^2\iint_{Q_T}(s\xi)|\nabla\eta_0|^2|\nabla\psi|^2\,dx\,dt - C\lambda\iint_{Q_T}(s\xi)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt \tag{4.17}$$

Además, nos encontramos con que

(4.18)

$$((M_1\psi)_3,(M_2\psi)_2)_{L^2(Q_T)} = \iint_{Q_T}\psi_t\Delta\psi\,dx\,dt = -\iint_{Q_T}\nabla\psi_t\nabla\psi\,dx\,dt + \iint_{\Sigma_T}\psi_t\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dx\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_{Q_T}\frac{d}{dt}|\nabla\psi|^2\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int_\Omega\left[|\nabla\psi(\cdot,T)|^2-|\nabla\psi(\cdot,0)|^2\right]\,dx = 0.$$

En esta última igualdad hemos tenido en cuenta que, como $\psi = 0$ sobre Σ_T, entonces $\psi_t = 0$ sobre Σ_T.

De (4.13)-(4.18), deducimos que

$$(M_1\psi, (M_2\psi)_2)_{L^2(Q_T)} \geq \lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)|\nabla\eta_0|^2|\nabla\psi|^2\,dx\,dt$$

$$-C\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^2|\psi|^2\,dx\,dt - C\iint_{Q_T} (s\lambda\xi + \lambda^2)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt$$

para $\lambda \geq 1$ y $s \geq CT^2$. Por tanto, para $\lambda \geq C$ y $s \geq CT^2$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}(M_1\psi, (M_2\psi)_2)_{L^2(Q_T)} &\geq C\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)|\nabla\eta_0|^2|\nabla\psi|^2\,dx\,dt\\ &-C\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^2|\psi|^2\,dx\,dt - C\lambda^2\iint_{Q_T} (s\xi)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt\end{aligned} \tag{4.19}$$

Consideremos ahora el producto escalar

$$\begin{aligned}((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q_T)} &= -2s^2\lambda^2 \iint_{Q_T} \xi|\nabla\eta_0|^2\alpha_t|\psi|^2\,dx\,dt\\ &\leq Cs^2\lambda^2 T\iint_{Q_T} \xi^3|\psi|^2\,dx\,dt\end{aligned} \tag{4.20}$$

Claramente este término puede ser absorbido por $\widetilde{A}$ si tomamos un $\lambda \geq C$ y $s \geq CT$.

Además,

$$\begin{aligned}((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q_T)} &= -2s^2\lambda \iint_{Q_T} \xi\alpha_t(\nabla\eta_0\cdot\nabla\psi)\psi\,dx\,dt\\ &= s^2\lambda^2 \iint_{Q_T} \xi\alpha_t|\nabla\eta_0|^2|\psi|^2\,dx\,dt + s^2\lambda\iint_{Q_T} \nabla\alpha_t\cdot\nabla\eta_0\xi|\psi|^2\,dx\,dt\\ &+s^2\lambda\iint_{Q_T} \alpha_t\Delta\eta_0\xi|\psi|^2\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{4.21}$$

De (4.10) y, si $\lambda \geq 1$, podemos comprobar que los tres términos de la desigualdad anterior los podemos acotar por

$$Cs^2\lambda^2 T\iint_{Q_T} \xi^3|\psi|^2\,dx\,dt. \tag{4.22}$$

Así, tenemos que

$$((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q_T)} \geq -Cs^2\lambda^2 T\iint_{Q_T} \xi^3|\psi|^2\,dx\,dt. \tag{4.23}$$

Por último, tenemos

$$
\begin{aligned}
((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q_T)} &= s \iint_{Q_T} \alpha_t \psi_t \psi \, dx\, dt = -\frac{1}{2} s \iint_{Q_T} \alpha_{tt} |\psi|^2 \, dx\, dt \\
&\leq C s T^2 \iint_{Q_T} \xi^3 |\psi|^2 \, dx\, dt,
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

ya que $\alpha_{tt} \leq C\xi^2(1+T^2\xi) \leq CT^2\xi^3$.

De (4.20)-(4.24), podemos deducir para $\lambda \geq C$ y $s \geq CT$ que

$$
(M_1\psi, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q_T)} \geq -C\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 |\psi|^2 \, dx\, dt. \tag{4.25}
$$

Teniendo en cuenta (4.12), (4.2) y (4.25), tenemos

$$
\begin{aligned}
(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q_T)} \geq{}& C \iint_{Q_T} (s\xi\lambda^2 |\nabla\psi|^2 + (s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2) \, dx\, dt \\
&- C \iint_{\omega_0 \times (0,T)} (s\xi\lambda^2 |\nabla\psi|^2 + (s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2) \, dx\, dt,
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

para algún $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T+T^2)$. Usando (4.9), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \iint_{Q_T} (s\xi\lambda^2 |\nabla\psi|^2 + (s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2) \, dx\, dt \\
&\leq C \left(\|g_{s,\lambda}\|^2_{L^2(Q_T)} + \iint_{\omega_0 \times (0,T)} (s\xi\lambda^2 |\nabla\psi|^2 + (s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2) \, dx\, dt \right) \\
&\leq C \left(\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} |f|^2 \, dx\, dt + \lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^2 |\psi|^2 \, dx\, dt \right. \\
&\left. + \lambda^2 \iint_{\omega_0 \times (0,T)} s\xi |\nabla\psi|^2 \, dx\, dt + \lambda^4 \iint_{\omega_0 \times (0,T)} (s\xi)^3 |\psi|^2 \, dx\, dt \right).
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

Así, llegamos a que

$$
\begin{aligned}
&\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \iint_{Q_T} (s\xi\lambda^2 |\nabla\psi|^2 + (s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2) \, dx\, dt \\
&\leq C \left(\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} |f|^2 \, dx\, dt + \lambda^2 \iint_{\omega_0 \times (0,T)} s\xi |\nabla\psi|^2 \, dx\, dt + \lambda^4 \iint_{\omega_0 \times (0,T)} (s\xi)^3 |\psi|^2 \, dx\, dt \right).
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

para $\lambda \geq C(\Omega, \omega)$ y $s \geq C(\Omega, \omega)(T+T^2)$.

En tercer lugar, vamos a añadir a la izquierda términos locales en ψ_t y $\Delta\psi$. Para ello podemos usar las expresiones que conocemos de $M_1\psi$ y $M_2\psi$, respectivamente. En efecto, sabemos que[4]

$$\iint_{Q_T} (s\xi)^{-1}|\psi_t|^2\,dx\,dt \leq 2\iint_{Q_T} (s\xi)^{-1}|M_1\psi|^2\,dx\,dt$$

$$+8\iint_{Q_T} (s\xi)\lambda^2|\nabla\eta_0|^2\cdot|\nabla\psi|^2\,dx\,dt + 8\iint_{Q_T} (s\xi)\lambda^4|\nabla\eta_0|^4|\psi|^2$$

$$\leq C\left(\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \lambda^2\iint_{Q_T} (s\xi)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt\right.$$

$$\left.+\lambda^4\iint_{Q_T} (s\xi)|\psi|^2\,dx\,dt\right)$$

y[5]

$$\iint_{Q_T} (s\xi)^{-1}|\nabla\psi|^2\,dx\,dt \leq C\left(\|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \lambda^4\iint_{Q_T} (s\xi)^3|\psi|^2\,dx\,dt\right.$$

$$\left.+sT^2\iint_{Q_T} \xi^3|\psi|^2\,dx\,dt\right)$$

para $s \geq CT^2$. En consecuencia, deducimos de (4.28) que

$$\iint_{Q_T} \left[(s\xi)^{-1}(|\psi_t|^2 + |\nabla\psi|^2) + (s\xi)\lambda^2|\nabla\psi|^2 + (s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2\right]\,dx\,dt$$

$$\leq C\left(\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}|f|^2\,dx\,dt + \lambda^2\iint_{\omega_0\times(0,T)} (s\xi)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt\right. \tag{4.29}$$

$$\left.+\lambda^4\iint_{\omega_0\times(0,T)} (s\xi)^3|\psi|^2\,dx\,dt\right)$$

para algún $\lambda \geq C$ y para $s \geq C(T+T^2)$.

Recordemos que uno de nuestros objetivos era eliminar el término local $\nabla\psi$. Si nos fijamos en la última desigualdad, vamos a eliminar la segunda integral de la derecha que es donde aparece el término que nos interesa.

---

[4]Si despejamos ψ_t de $M_1\psi$ tenemos que

$$\psi_t = M_1\psi + 2s\lambda^2|\nabla\eta_0|^2\xi\psi + 2s\lambda\xi\nabla\eta_0\cdot\nabla\psi$$

[5]Si despejamos $\Delta\psi$ de $M_2\psi$ tenemos que

$$\Delta\psi = M_2\psi - s^2\lambda^2|\nabla\eta_0|^2\xi^2\psi - s\alpha_t\psi$$

Para eliminarlo, introducimos una función que llamaremos $\theta = \theta(x)$, con

$$\theta \in C_c^2(\omega), \quad \theta \equiv 1 \quad \text{en} \quad \omega_0, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

hagamos los cálculos.

$$\lambda^2 \iint_{\omega_0\times(0,T)} (s\xi)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt \leq \lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} (s\xi)\theta|\nabla\psi|^2\,dx\,dt$$

$$= \lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} (s\xi)\theta\nabla\psi\cdot\nabla\psi\,dx\,dt = -\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} (s\xi)\theta\Delta\psi\psi\,dx\,dt$$

$$-\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} (s\xi)(\nabla\theta\cdot\nabla\psi)\psi\,dx\,dt - \lambda^3 \iint_{\omega\times(0,T)} (s\psi)\theta(\nabla\eta_0\cdot\nabla\psi)\psi\,dx\,dt$$

$$\leq \varepsilon \iint_{\omega\times(0,T)} \theta(s\xi)^{-1}|\Delta\psi|^2\,dx\,dt + \frac{C}{\varepsilon}\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} (s\xi)^3|\psi|^2\,dx\,dt + C\lambda^3 \iint_{\omega\times(0,T)} \theta(s\xi)|\nabla\psi||\psi|$$

siendo ε una constante suficientemente pequeña tal que $\varepsilon = \varepsilon(\Omega,\omega) > 0$ y además hemos usado el hecho de que $\lambda > 1$. La última integral de la desigualdad también puede ser absorbida tomando $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T+T^2)$. Efectivamente,

$$C\lambda^3 \iint_{\omega\times(0,T)} \theta(s\xi)|\nabla\psi||\psi| \leq C\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} \theta|\nabla\psi|^2 + C\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} (s\xi)^2|\psi|^2.$$

Por tanto,

$$\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt \leq \varepsilon \iint_{\omega\times(0,T)} \theta(s\xi)^{-1}|\Delta\psi|^2\,dx\,dt + C_\varepsilon\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} (s\xi)^3|\psi|^2\,dx\,dt.$$

Así, hemos eliminado la integral que contenía al término $|\nabla\psi|^2$, pero hemos pagado un precio por ello y es que ahora tenemos $|\psi|^2$ en ω_T. Teniendo en cuenta esta observación y de (4.29), deducimos que

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T} \left[(s\xi)^{-1}(|\psi_t|^2 + |\nabla\psi|^2) + \lambda^2(s\xi)|\nabla\psi|^2 + \lambda^4(s\xi)^3|\psi|^2\right]\,dx\,dt \\ &\leq C\left(\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}|f|^2\,dx\,dt + \lambda^4 \iint_{\omega_T} (s\xi)^3|\psi|^2\,dx\,dt\right)\end{aligned} \tag{4.30}$$

para $\lambda \geq C$ y $s \geq C(T+T^2)$.

Para ir acabando la demostración, vamos a expresar cada una de las integrales que hemos obtenido con la función original, $q = e^{s\alpha}\psi$. Por ahora, tenemos

$$\iint_{Q_T} \left[(s\xi)^{-1}(|\psi_t|^2 + |\nabla\psi|^2) + \lambda^2(s\xi)|\nabla\psi|^2 + e^{-2s\alpha}\lambda^4(s\xi)^3|q|^2\right]\,dx\,dt$$

$$\leq C\left(\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}|f|^2\,dx\,dt + \lambda^4 \iint_{\omega_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|q|^2\,dx\,dt\right)$$

Usando que

$$\nabla q = e^{s\alpha}(\nabla\psi - s\lambda\nabla\eta_0\xi\psi),$$

tenemos que

$$\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)|\nabla q|^2\,dx\,dt \leq C\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)|\nabla\psi|^2\,dx\,dt + C\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 e^{-2s\alpha}|q|^2\,dx\,dt$$

Por tanto, podemos añadir el término $|\nabla q|^2$ en la parte izquierda:

$$\iint_{Q_T} \left[(s\xi)^{-1}(|\psi_t|^2 + |\nabla\psi|^2) + \lambda^2(s\xi)|\nabla q|^2 + e^{-2s\alpha}\lambda^4(s\xi)^3|q|^2\right]\,dx\,dt$$

$$\leq C\left(\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}|f|^2\,dx\,dt + \lambda^4 \iint_{\omega_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|q|^2\,dx\,dt\right)$$

Para Δq, usando la igualdad

$$\Delta q = e^{s\alpha}\left[\Delta\psi - s\lambda\Delta\eta_0\xi q - s\lambda^2|\nabla\eta_0|^2\xi q - 2s\lambda\xi\nabla\eta_0\cdot\nabla q - s^2\lambda^2|\nabla\eta_0|^2\xi^2 q\right]$$

obtenemos que

$$\iint_{Q_T} (s\xi)^{-1}e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2\,dx\,dt \leq C\left(\iint_{Q_T} (s\xi)^{-1}|\Delta\psi|^2\,dx\,dt\right.$$

$$\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)e^{-2s\alpha}|q|^2\,dx\,dt + \lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)e^{-2s\alpha}|q|^2\,dx\,dt$$

$$\left.+\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)e^{-2s\alpha}|\nabla q|^2,\,dx\,dt + \lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 e^{-2s\alpha}|q|^2\,dx\,dt\right)$$

Finalmente, para $q_t = e^{s\alpha}(\psi_t + s\alpha_t\psi)$ conseguimos

$$\iint_{Q_T} (s\xi)^{-1}e^{-2s\alpha}|q_t|^2\,dx\,dt \leq C\left(\iint_{Q_T} (s\xi)^{-1}|\psi_t|^2\,dx\,dt\right.$$

$$\left.+sT^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dx\,dt\right).$$

Por lo tanto, tomando $\lambda \geq 1$ y $s \geq C(\Omega,\omega)(T+T^2)$, hemos sido capaces de colocar a la izquierda de la desigualdad los términos que involucran a $|\Delta q|^2$ y $|q_t|^2$, luego obtenemos la desigualdad general de Carleman. Esto finaliza la prueba. □

4.3. Desigualdad de Observabilidad para la ecuación del calor con términos de orden cero

Esta sección la dedicaremos a probar la desigualdad de observabilidad para el problema adjunto a (4.1) con $b_i \equiv 0$, $1 \leq i \leq N$, es decir, para

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + c(x,t)y = v1_\omega \quad \text{en} \quad Q_T, \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T, \quad y(\cdot,0) = \varphi_0(x) \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{4.31}$$

Asumimos que $\omega \subset\subset \Omega$ es un subconjunto abierto no vacío, 1_ω es la función característica del conjunto ω, $v \in L^2(Q_T)$ es el control e y_0 y c están dados, con

$$y_0 \in L^2(\Omega) \quad y \quad c \in L^\infty(Q_T).$$

Bajo estas hipótesis (ver Teorema 2.2), el sistema (4.31) tiene una única solución débil y tal que

$$y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$$

Antes de centrarnos en controlabilidad nula de (4.31), vamos a recordar algunos resultados sobre la controlabilidad aproximada de este sistema. Por el Teorema 2.6 tenemos que la controlabilidad aproximada en $L^2(\Omega)$ en el instante T del problema (4.31) equivale a probar el siguiente resultado de continuación única: Sea $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ y sea φ la solución del problema adjunto

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_t\varphi - \Delta\varphi + c(x,t)\varphi = 0 \quad \text{en} \quad Q_T, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T, \quad \varphi(\cdot,T) = \varphi_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{4.32}$$

Si $\varphi = 0$ en $\omega \times (0,T)$, entonces $\varphi_0 = 0$, y así $\varphi = 0$ en Q_T.

Se trata, por lo tanto, de probar la propiedad de continuación única para el problema (4.32). Por otro lado, la controlabilidad exacta a cero de (4.31) en el instante T equivale a la desigualdad de observabilidad (2.5) para el sistema (4.32) (véanse los Teoremas 2.7 y 2.8). Para ello, estableceremos una nueva desigualdad de Carleman para (4.31). Se tiene:

Proposición 4.3. *Existen constantes positivas $\lambda_2 = \lambda_2(\Omega,\omega)$, $\sigma_2 = \sigma_2(\Omega,\omega)$ y $C_2 = C_2(\Omega,\omega)$ tales que, para cualquiera $\lambda \geq \lambda_2$ y $s \geq s_2(T + T^2 + T^2\|c\|_\infty^{2/3})$ se tiene*

$$\begin{aligned} &\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^{-1}(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2)\,dx\,dt + \lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt \\ &+\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt \leq C_2\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt, \end{aligned} \tag{4.33}$$

para cualquier $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, siendo φ la solución débil de (4.32).

Demostración. Sea $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ y consideremos $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega)))$ la correspondiente solución de (4.32). De la desigualdad de Carleman tenemos que,

$$\begin{aligned} &\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^{-1}(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2)\,dx\,dt + \lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt \\ &+\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt \leq C_1 \left(\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt \right. \\ &\left. + \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}|c\varphi|^2\,dx\,dt \right) \leq C\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt \\ &+C_1\lambda^4\|c\|_\infty^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}|\varphi|^2\,dx\,dt, \end{aligned}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_1$ y $s \geq s_1 = \sigma_1(T + T^2)$. Además podemos absorber el último término:

$$C_1\|c\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2}(s\xi)^3 \Leftrightarrow (s\xi)^3 \geq 2C_1\|c\|_\infty^2,$$

pero,

$$(s\xi)^3 \geq s^3\left(\frac{1}{T^2/4}\right)^3 = \frac{4^3}{T^6}s^3 \geq 2C_1\|c\|_\infty^2 \Leftrightarrow s \geq CT^2\|c\|_\infty^{2/3}.$$

Podemos concluir que si $\lambda \geq \lambda_1$ y $s \geq \sigma_2(\Omega,\omega)(T + T^2 + T^2\|c\|_\infty^{2/3})$ se tiene (4.33). Esto finaliza la prueba. □

Como consecuencia de la Proposición obtendremos el resultado de controlabilidad aproximada y exacta a cero del problema (4.31) en cualquier instante $T > 0$. Se tiene:

Teorema 4.4. *El sistema* (4.31) *es aproximadamente controlable en cualquier instante* $T > 0$.

Demostración. Como hemos comentado, la propiedad de controlabilidad aproximada de (4.31) en el instante $T > 0$ equivale a la propiedad de continuación única para el problema adjunto (4.32). Evidentemente esta propiedad es consecuencia directa de la desigualdad (4.33). Tenemos así la prueba. □

También, se tiene:

Teorema 4.5. *Sea* $T > 0$. *Entonces, existe una constante* $C = C(\Omega,\omega) > 0$ *tal que*
(4.34)

$$\|\varphi(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq exp\left[C\left(1 + \frac{1}{T} + \|c\|_\infty^{2/3} + T\|c\|_\infty\right)\right]\iint_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2\,dx\,dt, \quad \forall\varphi_0 \in L^2(\Omega),$$

donde φ *es la solución de* (4.32) *asociada a* φ_0.

Demostración. Consideremos la desigualdad para $\lambda = \lambda_2$ y $s = s_2 = \sigma_2(\Omega,\omega)(T + T^2 + T^2\|c\|_\infty^{2/3})$. En particular,

$$\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt \leq C\iint_{\omega_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt$$

Cambiando esta desigualdad con las desigualdades,

$$\begin{cases} e^{-2s\alpha}\xi^3 \geq \dfrac{C}{T^6}\quad e^{-\dfrac{Cs}{T^2}}, & \text{en}\quad \Omega\times(T/4,3T/4) \\[2em] e^{-2s\alpha}\xi^3 \leq \dfrac{C}{T^6}\quad e^{-\dfrac{Cs}{T^2}}, & \text{en}\quad Q_T \end{cases}$$

llegamos a que

$$\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\,dx\,dt \leq C\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\,dx\,dt$$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)}|\varphi|^2\,dx\,dt \leq Ce^{\dfrac{Cs}{T^2}}\iint_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2\,dx\,dt$$

Sustituyendo $s = C_1(\Omega, \omega)(T + T^2 + T^2\|c\|_\infty^{2/3})$ en la desigualdad anterior tenemos

$$\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2\,dx\,dt \le \exp\left[C\left(1+\frac{1}{T}+\|c\|_\infty^{2/3}\right)\right]\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\,dx\,dt. \tag{4.35}$$

Por otro lado, la desigualdad de energía de las soluciones del problema adjunto tenemos los siguiente:

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\,dt + \int_\Omega c(x,t)|\varphi|^2\,dx\,dt = 0, \quad p.c.t.\, t\in[0,T],$$

entonces,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\,dt \le \|c\|_\infty \int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt + 2\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\,dt - 2\|c\|_\infty\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt \le 0 \left[\text{multiplicamos por } e^{2t\|c\|_\infty}\right]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\left[e^{2t\|c\|_\infty}\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt\right] + 2e^{2t\|c\|_\infty}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\,dt \le 0, \quad p.c.t.\, t\in[0,T]$$

Como $\frac{d}{dt}\left[e^{2t\|c\|_\infty}\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt\right] \ge 0$ en $[0,T]$, deducimos,

$$e^{2s\|c\|_\infty}\int_\Omega |\varphi(x,s)|^2\,dx \le e^{2t\|c\|_\infty}\int_\Omega |\varphi(x,t)|^2\,dx, \quad \text{si} \quad s\le t, \quad s,t\in[0,T].$$

En particular, para todo $t\in[T/4,3T/4]$ se tiene,

$$e^{2\|c\|_\infty\frac{T}{4}}\int_\Omega |\varphi(\cdot,\frac{T}{4})|^2\,dx \le e^{2t\|c\|_\infty}\int_\Omega |\varphi(x,t)|^2\,dx.$$

Ahora, si integramos llegamos a

$$\frac{T}{2}e^{\|c\|_\infty\frac{T}{2}}\|\varphi(\cdot,\frac{T}{4})\|^2 \le e^{\frac{3T}{2}\|c\|_\infty}\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi(x,t)|^2\,dx\,dt.$$

Por lo que podemos concluir que

$$\begin{aligned}\|\varphi(\cdot,0)\|^2 &\le e^{\|c\|_\infty\frac{T}{2}}\|\varphi(\cdot,T/4)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{2}{T}e^{\frac{3T}{2}\|c\|_\infty}\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)}|\varphi|^2\,dx\,dt\\ &\le \frac{2}{T}\exp\left[C\left(1+\frac{1}{T}+\|c\|_\infty^{2/3}+T\|c\|_\infty\right)\right]\iint_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Con lo que tenemos la desigualdad de observabilidad (4.34). □

Como conclusión final a esta sección podemos dar el siguiente teorema:

Teorema 4.6. *El sistema (4.31) es controlable a cero con control $v \in L^2(Q_T)$ que verifica*

$$\|v\|_{L^2(Q_T)} \leq C\|y_0\|_{L^2(\Omega)}$$

donde la constante C es de la forma $\exp\left[C\left(1+\frac{1}{T}+\|c\|_\infty^{2/3}+T\|c\|_\infty\right)\right]$.

Evidentemente, este resultado es consecuencia de los Teoremas 2.8 y 4.5.

Observación 4.1. Es interesante destacar que las propiedades de controlabilidad aproximada y exacta a cero del problema parabólico escalar (4.31) son válidas para cualquiera $\omega \subset \Omega$ y $T > 0$.

Por otro lado, el Teorema 4.6 también proporciona una estimación explícita respecto de T y de $\|c\|_\infty$ del coste de la controlabilidad nula del problema (4.31). Este tipo de estimaciones son fundamentales para estudiar la controlabilidad de versiones no lineales del problema (4.31).

4.4. Controlabilidad nula para problemas parabólicos más generales

En esta sección vamos a probar la controlabilidad nula, con control distribuido, para la ecuación del calor con términos de orden cero y términos de orden uno y coeficientes en $L^\infty(Q_T)$, es decir, para el problema (4.1), que escribiremos como:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t y - \Delta y + b(x,t)\cdot\nabla y + c(x,t)y = v1_\omega \quad \text{en} \quad Q_T, \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T, \quad y(\cdot,0) = y_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{4.37}$$

con $y_0 \in L^2(\Omega)$, $a \in L^\infty(Q_T)$ y $b = (b_i)_{1\leq i\leq N} \in L^\infty(Q_T)^N$. Para comprobar esto, primero probaremos la desigualdad de observabilidad para el problema adjunto (4.2), es decir, para

$$\left\{\begin{array}{c} -\partial_t\varphi - \Delta\varphi - \nabla\cdot(\varphi\, b(x,t)) + c(x,t)\varphi = 0 \quad \text{en} \quad Q_T, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T, \quad \varphi(\cdot,T) = \varphi_0 \quad \text{en} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{4.38}$$

Concretamente, probaremos que

$$\|\varphi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\iint_{\omega_T} |\varphi|^2\,dx\,dt \tag{4.39}$$

para toda $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ y para alguna $C = C(\Omega,\omega,T,a,b)$. Para demostrar esto último demostraremos una desigualdad de Carleman apropiada (véase [17]).

Lema 4.7. *Existe $\lambda_3 = C(\Omega,\omega)$, $s_3 = C(\Omega,\omega)(T+T^2)$ y $C_3(\Omega,\omega) > 0$ tales que, para cualquier $\lambda \geq \lambda_3$ y $s \geq s_3$, tenemos*

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)|\nabla q|^2\,dx\,dt + \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|q|^2\,dx\,dt \\
&\leq C_2\left(\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|q|^2\,dx\,dt + \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}|F_0|^2\,dx\,dt\right. \\
&\left.+\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^2|F|^2\,dx\,dt\right), \quad \forall q_0 \in L^2(\Omega),
\end{aligned} \tag{4.40}$$

con $q \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ la solución débil de asociada a $q_0 \in L^2(\Omega)$. Aquí, α y ξ son las funciones (4.3) y (4.4) respectivamente.

Siguiendo [17], vamos ha demostrar la desigualdad de Carleman (4.40).

Demostración. Sea $q = q(x,t)$ la solución débil de asociada a $q_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces q se puede ver como una solución definida por trasposición. En concreto, q satisface la igualdad:

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q = F_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} F & \text{en} \quad Q_T, \\ q = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T, \quad q(\cdot,T) = q_0 & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{4.41}$$

donde $q_0 \in L^2(\Omega)$ y $F_i \in L^2(Q_T)$ para cualquier i: $0 \leq i \leq N$. Se tiene:

$$\int_0^T \langle G(t), q(t)\rangle\,dt = -\int_0^T \langle F_0 + \nabla\cdot F(t); z(t)\rangle\,dt + (q_0, z(T))_{L^2}, \tag{4.42}$$

para todo $G \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, donde z es solución del siguiente problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t z_t - \Delta z = G, \\ z = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T, \quad z(\cdot,T) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.43}$$

Aquí, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto de dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

Nuestro objetivo es, dada $f \in L^2(Q_T)$, hallar $u \in L^2(Q_T)$ tal que la solución z del problema asociada a $G = \lambda^4 e^{-2s\alpha}(s\xi)^3 f + u1_\omega$ (4.43) satisfaga: $z(\cdot,T) = 0$ en Ω y además,

$$\lambda^{-4} \iint_{Q_T} e^{2s\alpha}(s\xi)^{-3}|u|^2 + \iint_{Q_T} e^{2s\alpha}|z|^2 \leq C\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|f|^2\,dx\,dt. \tag{4.44}$$

Para ellos consideremos el siguiente problema de cuarto orden:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(e^{2s\alpha}\mathcal{L}^*p) - \lambda^4(s\xi)^3 e^{-2s\alpha} f = -\lambda^4(s\xi)^3 e^{-2s\alpha} p 1_\omega \quad \text{en} \quad Q_T, \\ p = 0, \quad e^{2s\alpha}\mathcal{L}^*p = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T, \\ (e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p)(\cdot,0) = (e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p)(\cdot,T) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{4.45}$$

siendo $\mathcal{L}$ el operador $\mathcal{L}z = \partial_t z - \Delta z$. Consideremos

$$P_0 = \{z \in C^2(Q_T) : \; z = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T\},$$

y sea $\varphi \in P_0$. Vamos a multiplicar la ecuación en (4.45) por dicha función y haciendo integraciones por partes, obtenemos:

$$\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \mathcal{L}^* p \mathcal{L}^* \varphi + \lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 e^{-2s\alpha} p \varphi 1_\omega = \lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 \, e^{-2s\alpha} f \varphi, \quad \forall \varphi \in P_0.$$

Consideremos la forma bilineal en P_0

$$\kappa(p,\varphi)_P = \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \mathcal{L}^* p \mathcal{L}^* \varphi + \lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 e^{-2s\alpha} p \varphi, \quad \forall p, \varphi \in P_0.$$

Es fácil comprobar que $\kappa(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en P_0.

Sea $P = \overline{P_0}^{\|\cdot\|_P}$ para la norma $\|\cdot\|_P = k(\cdot,\cdot)^{1/2}$. Luego podemos decir que P es un espacio de Hilbert para el producto escalar y, en virtud de la desigualdad de Carleman (**??**) la forma lineal

$$L : \varphi \in \; P_0 \to \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \, (s\xi)^3 \, f \varphi \in \mathbb{R}$$

es continua respecto de la norma $\|\cdot\|_F$:

$$|L\varphi| \leq \left(\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \, (s\xi)^3 \, |f|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \, (s\xi)^3 \, |\varphi|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq C \left(\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \, (s\xi)^3 \, |f|^2 \right)^{1/2} \|\varphi\|_P.$$

Luego (4.45) es equivalente a: Hallar $p \in P$ tal que $(p,\varphi)_P = \langle L, \varphi \rangle$, para todo $p \in P$ y por Lax-Milgram (4.45) tiene una única solución $p \in P$ y además tomando $p = \varphi$:

$$\|p\|_P^2 = \langle L, p \rangle \leq \|L\|_{P'} \cdot \|p\|_P \leq C \left(\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \, (s\xi)^3 \, |f|^2 \right)^{1/2} \|p\|_P$$

entonces

$$\|p\|_P \leq C \left(\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \, (s\xi)^3 \, |f|^2 \right)^{1/2}. \tag{4.46}$$

De hecho, el espacio P y la función $p \in P$ dependen de la elección de s y λ.

Tomemos ahora $q \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, la única solución de (4.41) asociada a $q_0 \in L^2(\Omega)$. Consideremos también la solución $p \in P$ de (4.45) asociada a $f = q$. En particular, se tiene (4.46) y $z = e^{-2s\alpha} \mathcal{L}^* p$ y $u = -\lambda^4 \, (s\xi)^3 \, e^{-2s\alpha} \, p \, 1_\omega$, satisfacen (4.44) para $f = q$ y son solución de (4.43) asociada a $G = \lambda^4 e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 q + u 1_\omega$, es decir,

$$\begin{cases} \partial_t z - \Delta z = \lambda^4 \, (s\xi)^3 \, e^{-2s\alpha} \, q + u 1_\omega \;\text{ en }\; Q_T, \\ z = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma_T; \quad z(0) = z(T) = 0 \;\text{ en }\; \Omega. \end{cases} \tag{4.47}$$

Como z es solución de (4.47) y q es solución de (4.41) y ambas están relacionadas por (4.42) con $G = -\lambda^4\,(s\xi)^3\,e^{-2s\alpha}\,q + u1_\omega$, deducimos

$$\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 e^{-2s\alpha}|q|^2 + \iint_{\omega_T} uq = -\int_0^T \langle F_0 + \nabla\cdot F, z(t)\rangle + \underbrace{(q_0, z(T))_{L^2}}_{=0}. \tag{4.48}$$

Ahora vamos a multiplicar (4.47) por $\lambda^{-2}\,(s\xi)^{-2}\,e^{2s\alpha}\,z$ y posteriormente vamos a integrar por partes:

$$\lambda^{-2}\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}(s\xi)^{-2} z\partial_t z - \lambda^{-2}\iint_{Q_T}(s\xi)^{-2}\,e^{2s\alpha}\,z\Delta z = \lambda^2\iint_{Q_T}(s\xi)z\,q$$

$$+\lambda^{-2}\iint_{\omega_T}(s\xi)^{-2}\,e^{2s\alpha}\,z\,u$$

Vamos a desarrollar ahora el segundo término de la izquierda:

$$-\lambda^{-2}\iint_{Q_T}(s\xi)^{-2}\,e^{2s\alpha}\,z\Delta z = \lambda^{-2}\sum_{i=1}^N\iint_{Q_T}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{2s\alpha}(s\xi)^{-2}z) =$$

$$= \lambda^{-2}\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}\,(s\xi)^{-2}|\nabla z|^2 + \lambda^{-2}\sum_{i=1}^N\iint_{Q_T}\frac{\partial z}{\partial x_i}z\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{2s\alpha}(s\xi)^{-2})$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}&\lambda^{-2}\iint_{Q_T}(s\xi)^{-2}e^{2s\alpha}z\partial_t z + \lambda^{-2}\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}\,(s\xi)^{-2}\,|\nabla z|^2\\ &-2\lambda^{-1}\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}\,(s\xi)^{-1}\,\nabla\eta_0\cdot\nabla z\,z - 2\lambda^{-1}\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}\,(s\xi)^{-2}\,\nabla\eta_0\cdot\nabla z\,z\\ &= \lambda^2\iint_{Q_T}(s\xi)z\,q + \lambda^{-2}\iint_{\omega_T}(s\xi)^{-2}\,e^{2s\alpha}z\,u\end{aligned} \tag{4.49}$$

Consideremos el primer término e integremos por partes:

$$\lambda^{-2}\iint_{Q_T}(s\xi)^{-2}e^{2s\alpha}z\partial_t z = \lambda^{-2}\iint_{Q_T}(s\xi)^{-2}e^{2s\alpha}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z|^2\right) = -\frac{1}{2}\lambda^{-2}\iint_{Q_T}\left((s\xi)^{-2}e^{2s\alpha}\right)_t|z|^2$$

$$\le Cs^{-1}\lambda^{-2}T\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}|z|^2 \le C\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}|z|^2,$$

si $s \le C(\Omega,\omega)T$ y $\lambda \ge 1$.

Usando la desigualdad de Young para algunos términos de la igualdad (4.49) obtenemos:

$$-2\lambda^{-1}\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}\,(s\xi)^{-1}\,\nabla\eta_0\cdot\nabla z\,z - 2\lambda^{-1}\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}\,(s\xi)^{-2}\,\nabla\eta_0\cdot\nabla z\,z$$

$$\le C\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}|z|^2 + \frac{1}{2}\lambda^{-2}\iint_{Q_T} e^{2s\alpha}\,(s\xi)^{-2}\,|\nabla z|^2,$$

$$\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi) z\, q \leq C \left(\iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |z|^2 + \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 |q|^2 \right)$$

y

$$\lambda^{-2} \iint_{\omega_T} e^{2s\alpha} (s\xi)^{-2} u\, z \leq C \left(\iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |z|^2 + \lambda^{-4} \iint_{\omega_T} e^{2s\alpha} (s\xi)^{-3} |u|^2 \right)$$

para $s \geq CT^2$. Como conclusión, hemos probado que existen constantes positivas $\sigma_0(\Omega, \omega)$ y $\lambda_0(\Omega, \omega)$ tales que

$$\lambda^{-2} \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} (s\xi)^{-2} |\nabla z|^2 \leq C \left(\lambda^{-4} \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} (s\xi)^{-3} |u^2| + \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |z|^2 + \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 |\varphi|^2 \right),$$

para cualquier $s \geq \sigma_0(T + T^2)$ y $\lambda \geq \lambda_0$. Combinando esta desigualdad con la desigualdad (4.44) con $f = q$, deducimos que la solución z de (4.47) satisface

$$\begin{aligned} \lambda^{-4} \iint_{Q_T} (s\xi)^{-3} e^{2s\alpha} |u|^2 + \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |z|^2 + \lambda^{-2} \iint_{Q_T} (s\xi)^{-2} e^{2s\alpha} |\nabla z|^2 \\ \leq C\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 e^{-2s\alpha} |q|^2, \end{aligned} \tag{4.50}$$

para $s \geq \sigma_0(T + T^2)$ y $\lambda \geq \lambda_0$. De (4.48) tenemos:

$$\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 e^{-2s\alpha} |q|^2 \leq$$

$$\leq \left(\iint_{\omega \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\iint_{\omega \times (0,T)} e^{2s\alpha} \xi^{-3} |u|^2 \right)^{1/2}$$

$$+ \left(\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} |F_0|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |z|^2 \right)^{1/2}$$

$$+ \left(\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^2 |F|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\iint_{\omega \times (0,T)} e^{2s\alpha} \xi^{-2} |\nabla z|^2 \right)^{1/2}.$$

Usando (4.50),

$$\begin{aligned} \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 |q|^2 \leq C \Bigg(\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 |q|^2 + \\ + \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} |F_0|^2 + \lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} (s\xi)^2 |F|^2 \Bigg). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Para terminar, añadiremos un término en gradiente a (4.51). Para ello, vamos a multiplicar la ecuación satisfecha por q por $\lambda^2 e^{-2s\alpha} (s\xi) q$ e integramos en espacio y tiempo. Esto nos da,

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)|\nabla q|^2 + \frac{1}{2}(s\lambda)^2 \iint_{Q_T} \left[(e^{-2s\alpha}\xi)_t - \Delta(e^{-2s\alpha}\xi)\right] |q|^2 \\
&= \lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)e^{-2s\alpha}(F_0 q - F\cdot\nabla q) - \lambda^2 \iint_{Q_T} sF\cdot\nabla(e^{-2s\alpha}\xi)q
\end{aligned} \tag{4.52}
$$

y usando las estimaciones

$$
|(e^{-2s\alpha}\xi)_t| \leq Ce^{-2s\alpha}(s\xi^3 T + \xi^2 T) \leq C\, e^{-2s\alpha}\, s^2\xi^3
$$

$$
|\Delta(e^{-2s\alpha}\xi)| \leq C\,(s\lambda)^2\, e^{-2s\alpha}\,\xi^3, \qquad \text{para } \; s \geq C(T+T^2),
$$

llegamos a:

$$
\lambda \left| \iint_{Q_T} (s\xi)e^{-2s\alpha}F_0\, q \right| \leq C\left[\lambda^4 \iint_{Q_T} (s\xi)^3 e^{-2s\alpha}\,|q|^2 + \iint_{Q_T} (s\xi)^{-1}e^{-2s\alpha}\,|F_0|^2\right]
$$

$$
\lambda \left| \iint_{Q_T} (s\xi)e^{-2s\alpha}F\cdot\nabla q \right| \leq C\left[\lambda^{-2} \iint_{Q_T} (s\xi)^{-1}e^{-2s\alpha}|F|^2 + \frac{\lambda^2}{2} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)|\nabla q|^2\right]
$$

y

$$
s\lambda^2 \left| \iint_{Q_T} F\cdot\nabla(e^{-2s\alpha}\xi)q \right| \leq C\left[\lambda^2 \iint_{Q_T} (s\xi)e^{-2s\alpha}\,|F|^2 + \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|q|^2\right].
$$

Volviendo a (4.52), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha}(s\xi)|\nabla q|^2 \leq C\Bigg[&\lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|q|^2 + \iint_{Q_T} e^{2s\alpha}|F_0|^2 \\
&+\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)|F|^2\Bigg],
\end{aligned}
$$

para $s \geq C(T+T^2)$. Esto junto con (4.51) nos da la desigualdad que queremos (4.40). Esto finaliza la prueba. □

Estamos ya en condiciones de probar la controlabilidad aproximada y exacta a cero del problema parabólico (4.37). Para ello, vamos a deducir una desigualdad global de Carleman para el problema adjunto (4.38). Se tiene:

Proposición 4.8. *Existen constantes positivas $\lambda_4 = \lambda_4(\Omega,\omega)$, $\sigma_4 = \sigma_4(\Omega,\omega)$ y $C_4 = C_4(\Omega,\omega)$ tales que, para cualesquiera $\lambda \geq \lambda_4$ y $s \geq s_4 = s_4(\Omega,\omega)(T+T^2+T^2\|c\|_\infty^{2/3}+T^2\|b\|_\infty^2)$ se tiene:*

$$
\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)|\nabla\varphi|^2 + \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2 \leq C_4\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt, \tag{4.53}
$$

para cualquier $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, siendo φ la solución débil de (4.38).

Demostración. Sea $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ y consideremos $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$ la correspondiente solución de (4.38) asociada. Obsérvese que podemos aplicar la desigualdad (4.40) en φ con $F_0 = -c\varphi$ y $F = b\varphi$. Así,

$$\begin{aligned}\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)|\nabla\varphi|^2 + \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2 \le C_3 \left(\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt \right.\\ \left. + \|c\|_\infty^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}|\varphi|^2\,dx\,dt + \lambda^2\|b\|_\infty^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^2|\varphi|^2\,dx\,dt \right),\end{aligned}$$

para cualquier $\lambda \ge \lambda_3$ y $s \ge s_3 = s_3(\Omega,\omega)(T+T^2)$. De nuevo,

$$\begin{cases} \lambda^4(s\xi)^3 \ge s^3(4/T^2)^3 \ge 4C_3\|c\|_\infty^2 \Leftrightarrow s \ge CT^2\|c\|_\infty^{2/3}, \\ \lambda^4(s\xi)^3 \ge (s\xi)^2 4s/T^2 \ge 4C_3(s\xi)^2\|b\|_\infty^2 \Leftrightarrow s \ge CT^2\|b\|_\infty^2. \end{cases}$$

Combinando las desigualdades anteriores deducimos (4.53). Esto termina la prueba. □

De la proposición es fácil obtener la propiedad de continuación única para las soluciones de (4.38) y

Teorema 4.9. *El problema* (4.37) *es aproximadamente controlable en cualquier instante* $T > 0$.

Demostración. La demostración de este resultado sigue el mismo razonamiento que el Teorema 4.5. □

Como consecuencia de la Proposición también obtenemos:

Teorema 4.10. *Sea* $T > 0$. *Entonces, existe una constante* $C = C(\Omega,\omega) > 0$ *tal que*

$$\|\varphi(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \exp\left[CH(T,\|c\|_\infty,\|b\|_\infty)\right] \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\,dx\,dt, \quad \forall \varphi_0 \in L^2(\Omega), \tag{4.54}$$

donde φ *es la solución de* (4.38) *asociada a* φ_0 *y* H *está dada por*

$$H(T,\|c\|_\infty,\|b\|_\infty) = 1 + \frac{1}{T} + \|c\|_\infty^{2/3} + T\|c\|_\infty^2 + (1+T)\|b\|_\infty^2.$$

Demostración. La demostración sigue los pasos del Teorema 4.5. Sea $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ y sea φ la solución correspondiente de (4.38). Si aplicamos la desigualdad (4.53) para $\lambda = \lambda_4$ y $s = s_4$ deducimos

$$\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt \le C \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt \quad (s = s_4).$$

Igual que en la prueba del Teorema 4.4 también deducimos

$$\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2\,dx\,dt \le \exp\left[C\left(1 + \frac{1}{T} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|b\|_\infty^2\right)\right] \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\,dx\,dt.$$

Combinamos esta desigualdad con la siguiente desigualdad, consecuencia de la desigualdad de energía satisfecha por φ (ver prueba del Teorema 4.5):

$$\frac{d}{dt}\left[e^{(\|b\|_\infty^2+2\|c\|_\infty)t}\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right]\geq 0, \quad p.c.t.\, t\in[0,T].$$

Razonando como en la prueba del Teorema 4.5 se deduce (4.54). Esto finaliza la prueba del resultado. $\square$

Como resultado final de esta sección enunciaremos el resultado de controlabilidad nula del problema (4.37):

Teorema 4.11. *Dados $T>0$ y $\omega\subset\Omega$ subconjunto abierto no vacío, el sistema (4.37) es exactamente controlable a cero con controles $v\in L^2(\Omega)$ que satisfacen*

$$\|v\|_{L^2(Q_T)}\leq \exp\left[CH(T,\|c\|_\infty,\|b\|_\infty)\right]\|y_0\|,$$

con $C=C(\Omega,\omega)$ una constante positiva y $H(T,\|c\|_\infty,\|b\|_\infty)$ la función dada en el Teorema 4.10.

De nuevo, este resultado es consecuencia de los Teoremas 2.8 y 4.10.

Observación 4.2. De nuevo, hemos visto que las propiedades de controlabilidad aproximada y exacta a cero del problema parabólico escalar (4.37) son válidos para cualesquiera abiertos $\omega\subset\Omega$ y tiempo $T>0$.

También el Teorema 4.11 proporciona una estimación explícita, respecto de T y de la norma $L^\infty(Q_T)$ de los coeficientes de la ecuación, del coste de la controlabilidad exacta a cero del problema (4.37). De nuevo, estas estimaciones son fundamentales en el estudio de versiones no lineales del problema (4.37).

4.5. Algunos comentarios sobre controlabilidad

4.5.1. Controlabilidad de problemas no lineales

Dedicaremos esta sección a comentar, de manera muy breve, algunos resultados de controlabilidad para versiones no lineales de las EDP presentadas en las secciones anteriores.

La ecuación del calor semilineal.

Muchos han sido los resultados de controlabilidad demostrados para

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t y-\Delta y+f(y)=v1_\omega \quad \text{en} \quad Q_T,\\ y=0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T, \quad y(\cdot,0)=y_0 \quad \text{en} \quad \Omega,\end{array}\right. \tag{4.55}$$

con f una función localmente lipschitziana. La controlabilidad aproximada fue demostrada en [7] cuando f es una función globalmente lipschitziana. En [18] fue demostrada la controlabilidad nula de (4.55) cuando f es globalmente lipschitziana y verifica $f(0)=0$. La demostración se obtiene como consecuencia de desigualdades globales de Carleman para el problema linealizado de (4.55) (véase el Teorema 4.2). Por último, cabe destacar el trabajo de [13] donde se prueba la controlabilidad aproximada y nula de (4.55) cuando $f(s)$ decrece por debajo de $|s|\log^{3/2}(1+|s|)$ cuando $|s| \to \infty$. También se prueba en este artículo resultados de no controlabilidad nula o aproximada de (4.55) para ciertas funciones f que crecen en el infinito como $|s|\log^{p}(1+|s|)$ con $p > 2$. Finalmente, en [5] se demuestran resultados análogos a los probados en [13] cuando en (4.55) aparecen no linealidades de la forma $f(y, \nabla y)$. Para probar la controlabilidad nula, la técnica utilizada en estos dos trabajos pasa por demostrar una desigualdad de observabilidad para el problema adjunto asociado a un problema linealizado de (4.55). La controlabilidad aproximada de (4.55) es consecuencia del resultado de controlabilidad nula.

Capítulo 5

Método de Lebeau-Robianno

En este capítulo vamos a desarrollar el método de Lebeau-Robianno que proporciona una nueva prueba de la controlabilidad nula de ecuaciones escalares parabólicas autónomas con control distribuido (ver [20]). Para ello, consideramos, como ejemplo modelo, la ecuación del calor

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = v 1_\omega & \text{en} \quad Q_T, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, & y(\cdot, 0) = y_0 \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $y_0 \in L^2(\Omega)$ y $v \in L^2(Q_T)$. Sabemos (ver Teorema 4.11) que el sistema (5.1) es controlable a cero en cualquier tiempo $T > 0$:

Teorema 5.1. *Sea $T > 0$. Entonces, para cualquier $y_0 \in L^2(\Omega)$, existe un control $v \in L^2(Q_T)$ tal que la correspondiente solución de* (5.1) *verifica que $y(\cdot, T) = 0$ en Ω.*

Nuestro objetivo es probar el Teorema 5.1 usando una nueva técnica.

Consideremos el operador $L_0(t) = -\Delta$ en $L^2(\Omega)$, con dominio $D(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Sabemos que este operador tiene una sucesión de autovalores $\{\lambda_k\}_{k \geq 1} \subset (0, \infty)$ y de autofunciones unitarias asociadas $\{\phi_k\}_{k \geq 1} \subset L^2(\Omega)$. Esto es,

$$-\Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k \text{ en } \Omega; \quad \phi_k = 0 \text{ sobre } \partial\Omega; \quad \|\phi_k\|_{L^2(\Omega)} = 1,$$

con $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \cdots$. Es bueno saber que el conjunto $\{\phi_k\}_{k \geq 1}$ es una base ortonormal de $L^2(\Omega)$. En este capítulo, C_1, C_2,... denotarán constantes genéricas cuyos valores pueden cambiar de una línea a otra.

Para cada entero $j \geq 0$, sea

$$E_j = \operatorname{span}\{\phi_k : k \leq 2^j\}.$$

En lo que sigue , denotaremos por Π_{E_j} a la proyección ortogonal sobre el espacio finito dimensional E_j de $L^2(\Omega)$:

$$\Pi_{E_j} : L^2(\Omega) \to E_j.$$

Para $p \in (0, 1/N)$, sea el conjunto $T_j = K\sigma_j^{-p}$, con $\sigma_j = 2^j$, para todo entero $j \geq 0$. La constante K se toma tal que

$$2 \sum_{j=0}^{\infty} T_j = T.$$

Por otro lado, tomamos $a_0 = 0$ y $a_{j+1} = a_j + 2T_j$ para $j \geq 0$. Observemos que con esta elección de los parámetros, podemos descomponer el intervalo $[0, T)$ como sigue

$$[0, T) = \bigcup_{j \geq 0} [a_j, a_{j+1}].$$

Entonces, lo primero que hay que hacer para probar el Teorema 5.1 es probar que para todo $j \geq 0$ la siguiente propiedad se tiene:

Propiedad (P_j)**:**

Para cualquier $j \geq 0$ y cualquier $y_j \in L^2(\Omega)$, existe un control $u_j \in L^2(\Omega \times (a_j, a_j + T_j))$ tal que la solución y de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y - \Delta y = u_j 1_\omega \text{ en } \Omega \times (a_j, a_j + T_j), \\ y = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (a_j, a_j + T_j), \quad y(\cdot, a_j) = y_j \text{ en } \Omega, \end{array} \right. \tag{5.2}$$

verificando que $\Pi_{E_j} y(\cdot, a_j + T_j) = 0$.

Es posible probar que esta propiedad (P_j) equivale a una la desigualdad de observabilidad para la solución correspondiente de un problema adjunto. Más precisamente, tenemos:

Teorema 5.2. *La* ***Propiedad*** (P_j) *se tiene si y sólo si existe una constante positiva* C_{T_j} *tal que, para todo* $\varphi_0 \in E_j$*, la solución* $\varphi \in \mathcal{C}([a_j, a_j + T_j]; E_j)$ *del problema adjunto*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi = 0 \text{ en } \Omega \times (a_j, a_j + T_j), \\ \varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (a_j, a_j + T_j), \quad \varphi(\cdot, a_j + T_j) = \varphi_0 \text{ en } \Omega, \end{array} \right. \tag{5.3}$$

verificando

$$\|\varphi(\cdot, a_j)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C^2_{T_j} \iint_{\omega \times (a_j, a_j + T_j)} |\varphi|^2 \tag{5.4}$$

Además, si (5.4) *se cumple, entonces la Propiedad* (P_j) *se tiene para un control* $u_j \in L^2(\Omega \times (a_j, a_j + T_j))$ *que depende linealmente y continuamente de* y_j *y cumple*

$$\|u_j\|_{L^2(\Omega \times (a_j, a_j + T_j))} \leq C_{T_j} \|\Pi_{E_j} y_j\|_{E_j} \leq C_{T_j} \|y_j\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. $[\Rightarrow]$

Consideremos $\varphi_0 \in E$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ y consideremos $\varphi \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$, la solución de (2.3) asociada a φ_0, y $v \in L^2(\omega \times (T_0, T_1))$, el control tal que $\Pi_E y(\cdot, T_1) = 0$. De (2.4) y (2.7) y sabiendo que $\varphi_0 = \Pi_E \varphi_0$, obtenemos que

$$\int_\Omega y(\cdot, T_1) \varphi_0 \, dx = \int_\Omega y(\cdot, T_1) \Pi_E \varphi_0 = \int_\Omega \Pi_E y(\cdot, T_1) \varphi_0 = 0,$$

tenemos pues de (2.4) y (2.7) que:

$$\begin{aligned} &\iint_{\omega \times (T_0, T_1)} \varphi(\cdot, T_0) y_0 \, dx = -\iint_{\Omega \times (T_0, T_1)} \varphi 1_\omega v \, dx \, dt \leq \|\varphi 1_\omega v\|_{L^2(Q_T)} \|v\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq \sqrt{C} \|\varphi 1_\omega v\|_{L^2(\Omega \times (T_0, T_1))} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall y_0 \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Tomando $\sup_{\|y_0\|_{L^2(\Omega)}\leq 1}$ en la desigualdad anterior, deducimos la desigualdad de observabilidad (5.4) para la constante C.

[$\Leftarrow$]

Para probar la otra implicación, usaremos la llamada técnica de penalización. Para esto, vamos a minimizar el siguiente funcional. Dado $\epsilon > 0$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, encontrar un control $v \in L^2(\Omega \times (T_0, T_1))$ que minimice el siguiente funcional

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(T_0,T_1)} |v|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2\epsilon}\|\Pi_E y(T_1; y_0, v)\|^2,$$

donde $\Pi_E y(T_1; y_0, v) = \Pi_E(Pv + y(T_1; y_0, 0))$. El problema penalizado tiene una única solución v_ϵ y esta está caracterizada por $v_\epsilon \in L^2(\Omega \times (T_0, T_1))$ y

$$\iint_{\Omega\times(T_0,T_1)} v_\epsilon\, v\,dx\,dt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega Pv_\epsilon\,\Pi_E Pv\,dx + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega Pv\,\Pi_E y(T; y_0, 0)\,dx = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega\times(T_0,T_1)),$$

es decir,

$$\iint_{\Omega\times(T_0,T_1)} v_\epsilon\, v\,dx\,dt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega \Pi_E(Pv\, y(T_1; v_\epsilon, y_0))\,dx = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega \times (T_0, T_1)).$$

En definitiva,

(5.5)
$$\iint_{\Omega\times(T_0,T_1)} v_\epsilon\, v\,dx\,dt = -\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega \Pi_E y(T_1; 0, v)\,\Pi_E y(T_1; v_\epsilon, y_0)\,dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega \times (T_0, T_1)).$$

Aplicando la fórmula (2.4) para $y_0 = 0$, para $v \in L^2(\Omega\times(T_0, T_1))$ y para $\varphi_0 = -\frac{1}{\epsilon}\Pi_E y(T_1; y_0, v_\epsilon)$, la fórmula (5.5) se transforma en

$$\iint_{\Omega\times(T_0,T_1)} v_\epsilon\, v\,dx\,dt = \iint_{\Omega\times(T_0,T_1)} \varphi_\epsilon 1_\omega\, v\,dx\,dt, \quad \forall v \in L^2(\Omega \times (T_0, T_1)).$$

Luego el mínimo está caracterizado por $v_\epsilon = \varphi_\epsilon 1_\omega$, donde φ_ϵ es la solución de (2.3) asociada a

$$\varphi_\epsilon = -\frac{1}{\epsilon}\Pi_E y(T_1; y_0, v_\epsilon).$$

Usando una vez más (2.4) y teniendo en cuenta las expresiones de φ_ϵ y v_ϵ, fácilmente obtenemos

$$\iint_{\omega\times(T_0,T_1)} \|\varphi_\epsilon\|^2\,dx\,dt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |\Pi_E y_{v_\epsilon}(T_1; y_0, v_\epsilon)|^2\,dx = -\int_\Omega y_0\varphi_\epsilon(\cdot, T_0)\,dx$$
$$\leq \frac{C}{2}\|y_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2C}\|\varphi_\epsilon(\cdot, T_0)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de observabilidad (2.6) satisfecha, en particular, por φ_ϵ, deducimos:

$$\iint_{\omega\times(T_0,T_1)} |\varphi_\epsilon|^2\,dx\,dt + \frac{2}{\epsilon}\int_\Omega |\Pi_E y_{v_\epsilon}(T_1; y_0, v_\epsilon)|^2\,dx \leq C\|y_0\|^2_{L^2(\Omega)},$$

esto es equivalente a ($v_\epsilon = \varphi_\epsilon 1_\omega$)

$$\|v_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega\times(T_0,T_1))} + \frac{2}{\epsilon}\|\Pi_E y_{v_\epsilon}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|y_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

de donde deducimos que las sucesiones $\{v_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ y $\{\epsilon^{-1/2}y_{v_\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ están acotadas en $L^2(\Omega \times (T_0,T_1))$ y $L^2(\Omega)$, respectivamente. Podemos extraer una subsucesión débilmente convergente en $L^2(\Omega \times (T_0,T_1))$ a algún $v \in L^2(\Omega \times (T_0,T_1))$ tales que $\operatorname{Ssup} v \subset \overline{\Omega \times (T_0,T_1)}$,

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega\times(T_0,T_1))} \leq C\|y_0\|^2_{L^2(\Omega)},$$

y $\Pi_E y_v = 0$ en Ω. Esto finaliza la prueba. $\square$

El siguiente resultado va a establecer una desigualdad fundamental que usaremos para probar la desigualdad (5.4) y la Propiedad (P_j). Se tiene:

Teorema 5.3. *Existe una constante positiva $C = C(\Omega,\omega) > 0$ tal que para todo entero $n \geq 1$, se tiene:*

$$\sum_{k\leq n} |b_k|^2 \leq Ce^{C\sqrt{\lambda_n}} \int_\omega \left|\sum_{k\leq n} b_k\phi_k(x)\right|^2, \quad \forall (b_1,...,b_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{5.6}$$

La prueba de esta desigualdad es bastante compleja y excede los objetivos de este trabajo. Por tanto, no será incluida. Esta se puede encontrar en [20]. Sí nos gustaría comentar que, en un cierto sentido, (5.6) mide la perdida de ortogonalidad de las autofunciones de $-\Delta$ en $L^2(\omega)$.

Como consecuencia del Teorema 5.3, se tiene:

Teorema 5.4. *Para cualquier $j \geq 1$, se satisface la Propiedad (P_j) con un control $u_j \in L^2(\Omega \times (a_j, a_j + T_j))$ que depende lineal y continuamente de $y_j \in L^2(\Omega)$ y que, además, verifica*

$$\|u_j\|^2_{L^2(\Omega\times(a_j,a_j+T_j))} \leq \frac{C}{T_j} e^{C\sqrt{\lambda_{\sigma_j}}} \|y_j\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{5.7}$$

donde $C = C(\Omega,\omega) > 0$ la constante de (5.6) proporcionada por el Teorema 5.3.

Demostración. En vista del Teorema 5.2, obtendremos la prueba del resultado simplemente probando la desigualdad (5.4) para las soluciones φ del problema adjunto (5.3), con una estimación explícita de la constante C_{T_j}. Para ello, sea $\varphi \in C([a_j, a_j + T_j]; E_j)$ la solución de (5.3) asociada a $\varphi_0 \in E_j$. En primer lugar, es fácil comprobar ($\varphi_0 \in E_j$) que la solución φ de (5.3) puede ser escrita:

$$\varphi(x,t) = \sum_{k\leq\sigma_j} \varphi_k(t)\phi_k(x), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [a_j, a_j + T_j],$$

para ciertas funciones $\varphi_k \in C^0([a_j, a_j + T_j])$. En segundo lugar, si tomamos $n = \sigma_j = 2^j$ y usamos $\varphi_k(t)$ en lugar de b_k en (5.6), deducimos que

$$\sum_{k\leq\sigma_j} |\varphi_k(t)|^2 \leq Ce^{C\sqrt{\lambda_{\sigma_j}}} \int_\omega \left|\sum_{k\leq\sigma_j} \varphi_k(t)\phi_k(x)\right|^2 = Ce^{C\sqrt{\lambda_{\sigma_j}}} \int_\omega |\varphi(x,t)|^2.$$

Finalmente, por la desigualdad de energía verificada por las soluciones de la ecuación del calor (ver la prueba del Teorema 4.10), tenemos

$$\|\varphi(\cdot,a_j)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{T_j}\int_{a_j}^{a_j+T_j}\int_\Omega |\varphi(x,t)|^2 = \frac{1}{T_j}\int_{a_j}^{a_j+T_j}\sum_{k\leq\sigma_j}|\varphi_k(t)|^2.$$

Si combinamos estas dos últimas desigualdades deducimos (5.4) para $C^2_{T_j} = \dfrac{C}{T_j}e^{C\sqrt{\lambda_{\sigma_j}}}$.

Aplicando el Teorema 5.2, la Propiedad (P_j) se cumple para controles que satisfacen (5.7). Esto acaba la prueba. □

Nuestro siguiente objetivo es probar el Teorema 5.1. Obtendremos la prueba del mismo usando la Propiedad (P_j) y la desigualdad (5.7) de forma conveniente.

Demostración del Teorema 5.1. Para la demostración del teorema usaremos la Propiedad (P_j). Para este fin y siguiendo el método de [20], construiremos un control u en el intervalo $(0,T)$ por inducción, como una sucesión de controles active/vanishing.

Para cualesquiera $j\geq 0$ e $y_j\in L^2(\Omega)$, denotamos por $U_j(y_j)\in L^2(\Omega\times(a_j,a_j+T_j))$ el control proporcionado por el Teorema 5.4. En particular $U_j(y_j)$ depende linealmente y continuamente de y_j y satisface la desigualdad (5.7) para una constante positiva $C=C(\Omega,\omega)$.

Con esta notación, por inducción, tomamos $(y(\cdot,0):=y_0)$

$$u(x,t)=\begin{cases} U_j(y(\cdot,a_j))(x,t) & \text{si} \quad t\in(a_j,a_j+T_j],\\ 0 & \text{si} \quad t\in(a_j+T_j,a_{j+1}],\end{cases}$$

con

$$y(\cdot,t)=\begin{cases} S(t-a_j)y(\cdot,a_j)+\displaystyle\int_{a_j}^t S(t-s)u(\cdot,s)ds & \text{si} \quad t\in(a_j,a_j+T_j],\\ S(t-a_j-T_j)y(\cdot,a_j+T_j) & \text{si} \quad t\in(a_j+T_j,a_{j+1}],\end{cases}$$

($S(\cdot)$ es el semigrupo de C^0 de contracciones generadas por el operador $(A,D(A))$). La elección del control u en el intervalo $t\in(a_j,a_j+T_j]$ y la desigualdad (5.7) implican

$$\|y(\cdot,a_j+T_j)\|_{L^2(\Omega)}\leq\left(1+Ce^{C\sqrt{\lambda_{\sigma_j}}}\right)\|y(\cdot,a_j)\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{y} \quad \Pi_{E_j}y(\cdot,a_j+T_j)=0.$$

En segundo lugar, durante una actuación pasiva del control, amortigua de forma natural la ecuación parabólica en el intervalo $(a_j,a_j+T_j]$. Así,

$$\|y(\cdot,a_{j+1})\|_{L^2(\Omega)}\leq e^{-\lambda_{\sigma_{j+1}}T_j}\|y(\cdot,a_j+T_j)\|_{L^2(\Omega)}\leq Ce^{\left[C\sqrt{\lambda_{\sigma_j}}-\lambda_{\sigma_j}T_j\right]}\|y(\cdot,a_j)\|_{L^2(\Omega)}$$

lo cual nos da

$$\|y(\cdot,a_j)\|_{L^2(\Omega)}\leq\exp\left[\sum_{k=0}^{j}(C\sqrt{\lambda_{\sigma_k}}-\lambda_{\sigma_k}T_k)\right]\|y_0\|_{L^2(\Omega)},\quad \forall j\geq 0.$$

Recordemos que $T_k = K\sigma_k^{-p}$ con $p \in (0, 1/N)$ y $\sigma_k = 2^k$. Así, por la fórmula de Weyl (ver [1] Teorema 14.6)($\lambda_k \sim Ck^{2/N}$), de donde deducimos que $\lambda_{\sigma_k} T_k \sim C\sigma_k^{\frac{2}{N}-p}$ y

$$\|y(\cdot, a_{j+1})\|_{L^2(\Omega)} \leq C \exp\left[\sum_{k=0}^{j} \left(C_1\sigma_k^{1/N} - C_2\sigma_k^{\frac{2}{N}-p}\right)\right] \|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall j \geq 0, \tag{5.8}$$

para nuevas constantes positivas C_1 y C_2. Teniendo en cuenta que $p \in (0, 1/N)$, deducimos que $2/N - p > 1/N$. Además, existe un $k_0 \geq 0$ tal que

$$C_1\sigma_k^{1/N} - C_2\sigma_k^{\frac{2}{N}-p} \leq -\frac{C_2}{2}\sigma_k^{\frac{2}{N}-p}, \quad \forall k \geq k_0. \tag{5.9}$$

Entonces, para $j \geq k_0$, tenemos

$$\sum_{k=0}^{j} \left(C_1\sigma_k^{1/N} - C_2\sigma_k^{\frac{2}{N}-p}\right) \leq C_3 - \frac{C_2}{2}\sum_{k=k_0}^{j} \sigma_k^{\frac{2}{N}-p} \leq C_3 - \frac{C_2}{2}\sigma_j^{\frac{2}{N}-p}.$$

Volviendo a (5.8), deducimos la existencia de una constante C tal que

$$\|y(\cdot, a_{j+1})\|_{L^2(\Omega)} \leq C \exp\left(-C\sigma_j^{\frac{2}{N}-p}\right) \|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall j \geq 0. \tag{5.10}$$

Supongamos que hemos probado que $u \in L^2(Q_T)$. Entonces, la solución y del problema (5.2) verifica que $y \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$. De (5.10), se sigue que $\lim_{j\to\infty} \|y(\cdot, a_j)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ y, por lo tanto $y(\cdot, T) = 0$.

Para finalizar vamos a comprobar ahora que el control construido, u, está en $L^2(Q_T)$. Usando que $T_j = K\sigma_j^{-p}$, (5.7), la fórmula de Weyl, (5.10) y (5.9), deducimos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(Q_T)}\| &= \sum_{j\geq 0} \|U_j(y(\cdot, a_j))\|_{L^2(\Omega\times(a_j, a_j+T_j))} \leq \sum_{j\geq 0} \frac{C}{T_j} e^{C\sqrt{\lambda_{\sigma_j}}} \|y(\cdot, a_j)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\left(\sum_{j\geq 0} e^{C_1\sigma_j^{1/N} - C_2\sigma_j^{\frac{2}{N}-p}}\right) \|y_0\|_{L^2(\Omega)} \equiv C\|y_0\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del Teorema 5.1

$\square$

Bibliografía

[1] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary values problems*, Van Nostrand (1965).

[2] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, M. Gónzalez-Burgos, L. de Teresa, *The Kalman condition for the boundary controllability of coupled systems. Bound on biorthogonal families to complex matrix exponentials*, J. Math. Pures Appl. 96 (2011) 555-590.

[3] J.M. Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, **136**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[4] R. Dautray, J.L. Lions , *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.5: Evolutions Problems I*, Springer-Verlag, 1992.

[5] A. Doubova, E. Fernandez-Cara, M. Gónzalez-Burgos, *On the approximate and null controllability of parabolic systems with a nonlinear term of the form $f(y, \nabla y)$*, SIAM J. Control Optim. **41** (2002), no. 3, pp. 798-819.

[6] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, **19**, American Mathematical Society, 1997.

[7] C. Fabre, J.P. Puel, E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **125A** (1995), 31– 61.

[8] H.O. Fattorini, D.L. Russell, *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rational Mech. Anal., **43** (1971), 272–292.

[9] H.O. Fattorini, D.L. Russell, *Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations* , Quart. Appl. Math. **32** (1974/75) 45-69.

[10] E. Fernández-Cara, S. Guerrero, *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, SIAM J. Control Optim. **45** (2006), no. 4, 1395–1446.

[11] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, L. de Teresa, *Boundary controllability of parabolic coupled equations*, J. Funct. Anal. **259** (7) (2010) 1720–1758.

[12] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, L. de Teresa, *Controlllability of linear and semilinear non-diagonalizable parabolic systems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **21** (2015), no. 4, 1178–1204.

[13] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 2000.

[14] A.V. Fursikov and O.Yu. Imanuvilov, *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Note Series 34, Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Seoul, 1996.

[15] S. Hansen, *Bounds on functions biortogonal to sets of complex exponentials; control of damped elastic systems*, J. Math. Anal. Appl. **158** (1991) 487–508.

[16] C. Heil, *Expanded edition, Applied and Numerical Harmonic Analysis*, Birkhäuser/Springer, New York, 2011.

[17] O.Yu. Imanuvilov and M. Yamamoto, *Carleman estimate for a parabolic equation in a Sobolev space of negative order and its applications*, in Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **218**, Marcel Dekker, New York, 2001, pp. 113–137.

[18] O.Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations*, Mat. Sb. **186**, N. 6, (1995), 102–132.

[19] F. John, *Partial Differential Equations*, Fourth Editions, Springer-Verlag, New York, 1982.

[20] G. Lebeau and L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. Partial Differential Equations, **20** (1995), 335–356.

[21] G. Lebeau and E. Zuazua, *Null-controllability of a system of linear thermoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **41** (1998), 297–329.

[22] J.L. Lions, *Remarques préliminaires sur le côntrole des systèmes à données incomplètes*, in "Actas del Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (CEDYA)", Universidad de Málaga, (1989), 43–54.

[23] J.L. Lions and E. Magenes, *Non-homogeneus Boundary Values Problems and Applications*, vol. I, Grundlehren Math. Wiss., vol. 181, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1972.

[24] W.A.J. Luxemburg, J. Korevaar, *Entire functions and Müntz-Szäsz type approximation, Trans.* Amer. Math. Soc. **157** (1971), 23 – 37.

[25] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, third ed., McGrawn-Hill Book Co., New York, 1987.

[26] D.L. Russel, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equation: Recent progress and open questions*, SIAM Rev., **20** (1978), 639–739.

[27] L. Schwartz, *Étude des sommes d'exponentielles*, 2ième éd., Publ. Inst. Math. Univ. Strasburg, V. Actualités Sci. Ind., Hermann, Paris, 1959.

[28] R. Temam, *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, Reprint of the 1984 edition, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001.

[29] R. Tiggiani, *Extensions of rank conditions for controllability and observability to Banach spaces and unbounded operators*, SIAM J. Control Optimization, **14** (1976), 313-338.

[30] G. Wang, *L^∞-null controllability for the heat equation and its consequences for the time optimal control problem*, SIAM J. Control Optim. 47(4) (2008) 1701-1720.