

Trabajo Fin de Máster  
Máster Universitario en Ingeniería  
Aeronáutica

Análisis y diseño de un algoritmo  
de guiado de aviones no tripulados  
basado en control predictivo

Autor: Víctor Castro Moreno

Tutor: Francisco Gavilán Jiménez

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de  
Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017





Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

**Análisis y diseño de un algoritmo de  
guiado de aviones no tripulados basado  
en control predictivo**

Autor:

Víctor Castro Moreno

Tutor:

Francisco Gavilán Jiménez

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Trabajo Fin de Máster: Análisis y diseño de un algoritmo de guiado de aviones no tripulados basado en control predictivo

Autor: Víctor Castro Moreno  
Tutor: Francisco Gavilán Jiménez

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Índice

---

<i>Notación</i>	III
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo y motivación	1
1.2. Algoritmos de guiado	3
<b>2. Modelo dinámico del sistema</b>	<b>9</b>
2.1. Modelo de 6 grados de libertad	10
2.1.1. Hipótesis	10
2.1.2. Ecuaciones dinámicas	10
2.1.3. Ecuaciones cinemáticas	12
2.1.4. Modelo propulsivo	13
2.1.5. Modelo aerodinámico	13
2.2. Modelo de 3 grados de libertad	14
2.2.1. Hipótesis	14
2.2.2. Ecuaciones del movimiento en forma vectorial	15
2.2.3. Ecuaciones del movimiento en forma escalar	15
2.2.4. Ecuaciones generales	16
2.2.5. Vuelo simétrico	17
2.3. Modelo de simulación	18
2.3.1. Esquema del modelo	18
2.3.2. Datos de la aeronave simulada	19
<b>3. Formulación del algoritmo de guiado basado en control predictivo</b>	<b>21</b>
3.1. Modelo de avión	22
3.2. Predicción del estado	26
Discretización de las ecuaciones	26
Linealización del problema	28
3.3. Estimador de perturbaciones	31
3.4. Restricciones del problema	32
3.4.1. Restricciones en el control	33
3.4.2. Restricciones en el estado	35

3.5.	Factibilización del problema	37
3.6.	Función objetivo	38
3.6.1.	Función objetivo para el seguimiento de trayectorias rectas	39
3.6.2.	Función objetivo para el seguimiento de trayectorias de radio constante	44
3.6.3.	Función objetivo para el seguimiento de trayectorias generales	48
3.6.4.	Combinación de las distintas funciones objetivo	50
3.6.5.	Término para vuelo a TAS constante	51
3.7.	Cálculo de la señal de control	52
<b>4.</b>	<b>Resultados</b>	<b>59</b>
4.1.	Trayectoria de radio constante	59
4.2.	Trayectoria general	72
4.3.	Trayectoria compuesta por distintos tramos	75
4.4.	Vuelo a TAS constante	76
4.5.	Restricciones en la aceleración	77
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>81</b>
5.1.	Conclusiones	81
5.2.	Trabajos futuros	82
<b>Apéndice A.</b>	<b>Sistemas de referencia</b>	<b>85</b>
A.1.	Sistema inercial topocéntrico, $I$	85
A.2.	Sistema de ejes horizonte local, $H$	85
A.3.	Sistema de ejes viento, $W$	86
A.4.	Sistema de ejes cuerpo, $B$	88
<b>Apéndice B.</b>	<b>Expresiones de los términos de la ecuación de predicción del estado linealizada</b>	<b>91</b>
	<i>Índice de Figuras</i>	97
	<i>Bibliografía</i>	99



# Notación

---

$f$	Factor de escalado
$g$	Aceleración de la gravedad
$h$	Altura
$m$	Masa
$n$	Factor de carga
$n_u$	Número de variables de control
$p, q, r$	Componentes de la velocidad angular en ejes cuerpo
$t$	Tiempo
$u, v, w$	Componentes de la velocidad en ejes cuerpo
$x_c, y_c, z_c$	Coordenadas del centro de masas de la aeronave
$C_D$	Coefficiente de resistencia aerodinámica de la aeronave
$C_T$	Coefficiente de tracción de la hélice
$D$	Resistencia aerodinámica
$\mathbf{I}_G$	Tensor de inercia en el centro de gravedad
$I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$	Momentos y productos de inercia
$J$	Parámetro de avance de la hélice
$J_{i,k}$	Término $i$ de la función objetivo asociado al instante de predicción $k$
$L$	Sustentación aerodinámica
$L, M, N$	Componentes del vector de momentos aerodinámicos y propulsivos en ejes cuerpo
$N_c$	Horizonte de control
$N_p$	Horizonte de predicción
$Q$	Fuerza aerodinámica lateral
$R$	Radio
$T$	Empuje
$T_S$	Tiempo de muestreo
$X, Y, Z$	Componentes del vector de fuerzas aerodinámicas y propulsivas en ejes cuerpo
$\alpha$	Ángulo de ataque

$\beta$	Ángulo de resbalamiento
$\gamma$	Ángulo de trayectoria
$\delta_k$	Perturbación calculada en el instante $k$
$\delta_e, \delta_r$ y $\delta_a$	Deflexiones del timón de profundidad, del timón de dirección y de los alerones
$\varepsilon$	Ángulo de ataque del empuje
$\theta$	Ángulo de cabeceo
$\lambda$	Factor de olvido
$\mu$	Ángulo de alabeo
$\nu$	Ángulo de resbalamiento del empuje.
$\rho$	Densidad del aire
$\phi$	Ángulo de balance
$\chi$	Ángulo de rumbo
$\psi$	Ángulo de guiñada
$\omega$	Velocidad angular de giro de la hélice
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Vectores unitarios según las direcciones del sistema de referencia (este se indica como subíndice)
$\vec{r}_c$	Posición del centro de masas de la aeronave
$\vec{u}$	Vector de variables de control
$\vec{x}$	Vector de variables de estado
$\vec{F}_{A,T}$	Fuerzas aerodinámicas y propulsivas
$\vec{M}_{A,T}$	Momentos aerodinámicos y propulsivos
$\vec{V}$	Velocidad aerodinámica
$\vec{V}_g$	Velocidad respecto a tierra
$\vec{V}_w$	Velocidad del viento respecto a tierra
$\vec{\omega}$	Velocidad angular
$\mathbf{u}_S$	Vector pila de señales de control totales
$\bar{\mathbf{u}}_S$	Vector pila de señales de control de referencia
$\Delta \mathbf{u}_S$	Vector pila de incrementos en las señales de control respecto a la referencia
$\Delta \mathbf{u}_{S_{\text{red}}}$	Vector pila reducido de incrementos en las señales de control respecto a la referencia
$\mathbf{x}_k$	Vector pila de estados en el instante $t_k$
$\mathbf{I}_{m \times n}$	Matriz identidad de dimensiones $m$ por $n$
$\delta_S$	Vector pila de perturbaciones
$\mathbf{0}_m$	Vector columna nulo de $m$ componentes
$\mathbf{0}_{m \times n}$	Matriz nula de dimensiones $m$ por $n$

# 1 Introducción

---

## 1.1 Objetivo y motivación

El objetivo de este trabajo es el de profundizar en el desarrollo de algoritmos de control predictivo aplicados al guiado de aeronaves, usando como punto de partida los ya existentes e introduciendo modificaciones que conduzcan a una mejora de las prestaciones y a la inclusión de nuevas funcionalidades.

Este tipo de algoritmos, cuyos fundamentos se explican en la sección 1.2, tienen la capacidad para causar un importante impacto. En lo que se refiere a la aviación, su mayor potencial reside, esencialmente, en la aplicación a las aeronaves no tripuladas (en inglés, *Unmanned Aerial Vehicles, UAVs*). Desde sus inicios, este ha sido un sector en constante crecimiento, tanto en desarrollo tecnológico como en términos económicos.

Los primeros ejemplos de UAVs <sup>1</sup> se remontan a la década de 1930, cuando se empezó a fabricar el DeHavilland DH82B “Queen Bee” <sup>2</sup>, controlado por radiocontrol y usado como blanco para prácticas de tiro (figura 1.1). A partir de entonces las aplicaciones de las aeronaves no tripuladas no han hecho más que aumentar: de blancos de tiro a aviones de vigilancia e incluso de combate y a la infinidad de aplicaciones de uso civil de hoy en día (agricultura, construcción, búsqueda y rescate, protección de la flora y fauna, grabación de imágenes y vídeo, ocio, ...).

Cabe destacar que, aunque el origen de los UAVs estuvo en el ámbito militar y aunque aún a día de hoy este sea el sector con mayor cuota de mercado, se espera que el crecimiento

---

<sup>1</sup> Se puede entender por UAV toda aquella aeronave que no cuenta con tripulación ni pasajeros a bordo, incluyendo tanto los vehículos voladores autónomos como aquellos pilotados remotamente (también llamados RPAS, del inglés *Remotely Piloted Aerial Systems*). No obstante, el concepto actual de UAV suele añadir la característica de que los UAVs están diseñados para ser recuperados tras su uso. Se diferencian así de los misiles de crucero, que también se trasladan por el medio aéreo y son controlados sin una tripulación a bordo, pero tienen el objetivo de impactar contra un blanco

<sup>2</sup> Se dice que el apodo de esta aeronave (Abeja Reina) condujo al uso del término *drone* (zángano) para referirse a los UAVs



**Figura 1.1** Lanzamiento de un DeHavillan Queen Bee en 1941 (izquierda) y panel de control remoto del mismo (derecha). Fuente: Wikipedia.

del uso civil de este tipo de vehículos sea muy superior en un futuro cercano. La figura 1.2 indica una tasa compuesta de crecimiento anual (CAGR <sup>3</sup>) del 19% en el año 2020 para el mercado civil de drones, frente a un 5% del militar. Estos valores son superiores incluso a los que ofrecen las previsiones para la aviación tripulada a nivel mundial (4.9% entre los años 2015 y 2034 según predicciones de Boeing<sup>4</sup> o incluso un 2.5-3.7% según pronósticos de la Asociación Internacional de Transporte Aéreo, IATA<sup>5</sup>, para aviación comercial el mismo periodo).

En la actualidad, una de las principales metas que se persiguen es la de lograr la integración de los UAVs en el espacio aéreo controlado. Esto, una vez más, multiplicaría las posibilidades de uso de los UAVs y podría llevar el crecimiento del sector a unos valores aún mayores de los predichos. No obstante, puesto que la seguridad siempre es la primera prioridad en aviación, se requieren sistemas de control capaces de proporcionar las prestaciones y la fiabilidad necesarias para garantizar el funcionamiento seguro de estos aparatos bajo cualquier circunstancia.

Históricamente, la evolución en las aplicaciones de los drones ha sido siempre propiciada por el desarrollo de los sistemas que se usan para controlarlos. La utilización de sistemas de navegación puramente mecánicos (sin posibilidades de modificar la trayectoria planeada) en los primeros UAV dio paso al uso extensivo del radiocontrol y el pilotaje remoto y, posteriormente, a la incorporación de computadores embarcados cada vez más potentes y a un grado de autonomía cada vez mayor.

Es en este contexto, en el de los UAVs controlados por computadores embarcados y con el objetivo final de la integración en el espacio aéreo controlado, en el que se encuadran los algoritmos de guiado que se desarrollan en este trabajo.

<sup>3</sup> *Compound Annual Growth Rate*. La tasa compuesta de crecimiento anual mide la tasa media de crecimiento en un período variable de tiempo. Se calcula como  $CAGR = \left( \frac{\text{valor final}}{\text{valor inicial}} \right)^{\left( \frac{1}{n^{\text{o de años}}} \right)} - 1$

<sup>4</sup> *Boeing Current Market Outlook 2015*

<sup>5</sup> *IATA 20 Year Air Passenger Forecast, 2016*

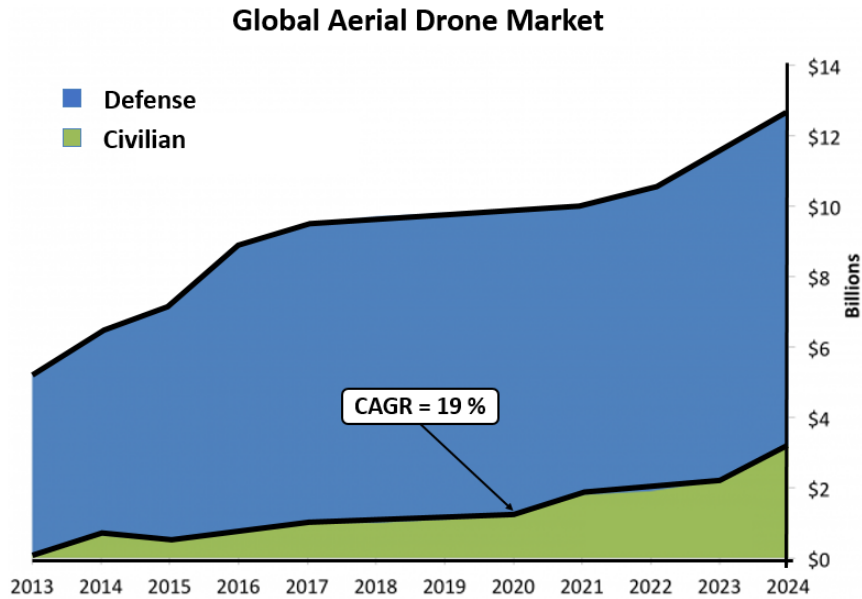


Figura 1.2 Datos históricos y predicción del crecimiento del mercado de drones. Fuente: Adaptado de BI Intelligence.

## 1.2 Algoritmos de guiado

El trabajo que aquí se presenta se centra, como se indicó en el objetivo, en el desarrollo de sistemas de guiado para aeronaves basados en control predictivo.

Habitualmente, el problema de control de vuelo, es decir, el de establecer cuál debe ser la deflexión de las superficies de control y la posición de palanca en cada momento para seguir una determinada trayectoria, se divide en dos subproblemas: el de guiado y el de control de actitud. Así pues, el guiado se encarga de calcular las consignas de control de alto nivel (típicamente el vector velocidad o aceleración u otras variables equivalentes) necesarias para seguir la trayectoria. El control de actitud se ocupa, entonces, de determinar las posiciones de las superficies de control (alерones, timón de profundidad y timón de dirección) y la posición de palanca (nivel de empuje del motor) con las que se logran las velocidades o aceleraciones obtenidas en el guiado. Un diagrama de bloques de un sistema de control de vuelo con esta división puede verse en la figura 1.3.

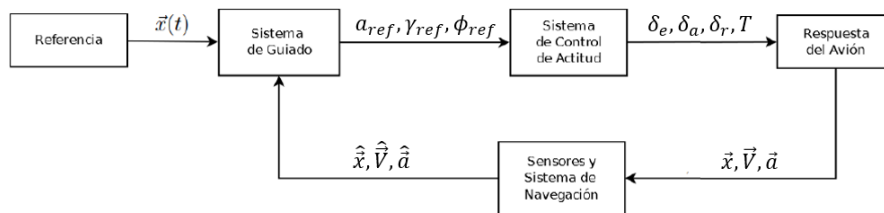
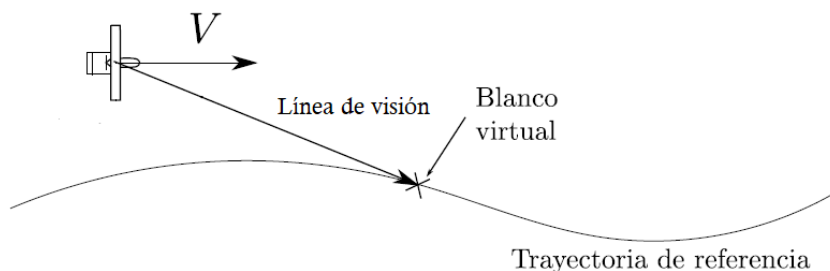


Figura 1.3 Diagrama de bloques de un sistema de control de vuelo. Fuente: Adaptado de [2].

Existen diversos enfoques para tratar el subproblema del guiado. En el contexto de este trabajo, se pueden destacar dos que son especialmente importantes. Estos son el guiado proporcional y el guiado basado en control predictivo (también referido como MPC, del inglés *Model Predictive Control*).

El guiado proporcional es el más simple de ellos. Esencialmente se basa en fijar un punto de la trayectoria como objetivo virtual en cada instante, tal y como se muestra en la figura 1.4, con lo que resulta relativamente fácil calcular la velocidad o aceleración que debe tener la aeronave para encaminarla hacia ese blanco desde su posición actual.



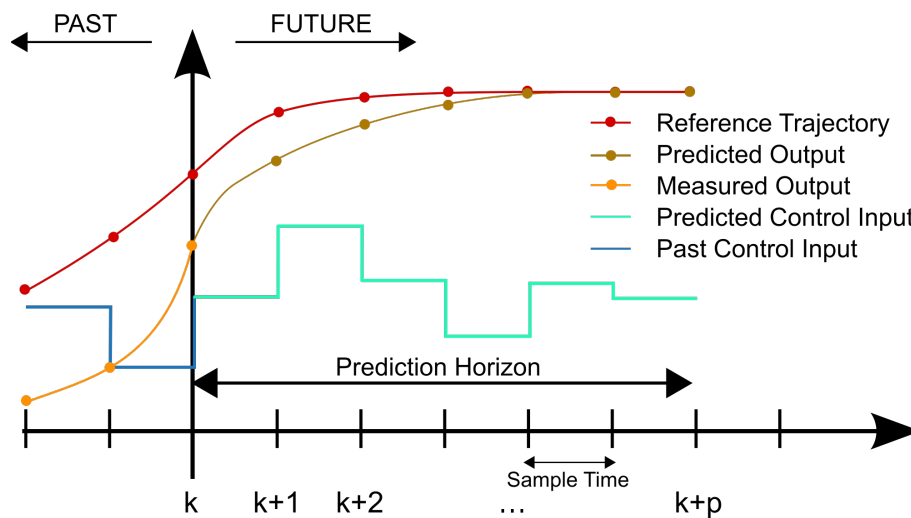
**Figura 1.4** Esquema del guiado proporcional. Fuente: [1].

La principal ventaja de este tipo de guiado es, precisamente, su sencillez, que permite una implementación fácil y con pocos requisitos de memoria y capacidad de cálculo en el computador que la ejecute. Además, se trata de una ley de guiado muy robusta y cuyo funcionamiento en la práctica ha demostrado ser fiable. Su deficiencia más importante, sin embargo, es que no emplea el conocimiento de la posición futura del blanco (usa simplemente un punto de la trayectoria en cada instante, sin tener en cuenta el resto una vez que este ha sido fijado) y no permite incluir restricciones de ningún tipo.

El control predictivo, en cambio, viene a solventar precisamente esas limitaciones. Las técnicas de control predictivo hacen uso de un modelo matemático del sistema que se quiere controlar (el UAV, en este caso) para poder estimar el estado futuro del mismo en función del estado presente y de la secuencia de señales de control que se ejecute. Por otro lado, también se define una función objetivo (p.e. distancia a la trayectoria de referencia), en términos de los estados futuros y de la secuencia de señales de control. Esta permite cuantificar cómo de buena es una solución (una secuencia de estados y controles) para cumplir el propósito que se ha fijado (p.e. minimizar las distancias a la trayectoria de referencia). Utilizando el modelo dinámico, entonces, es posible expresar la función objetivo como función únicamente del estado presente y de las señales de control futuras, de modo que se puede plantear un problema de optimización cuya resolución proporciona la secuencia de señales de control óptima, es decir, la que mejor cumple el objetivo definido.

De este modo, la principal ventaja del control predictivo es su capacidad para obtener soluciones óptimas para un objetivo prefijado, utilizando un modelo que puede incluir limitaciones tanto en los estados como en el control (las limitaciones se incluyen como restricciones en el problema de optimización). Así pues, se trata de una técnica de carácter anticipativo, que hace un uso extensivo del conocimiento previo del sistema y de la referencia para tratar de obtener los mejores resultados.

Sin embargo, el MPC también presenta algunas deficiencias, asociadas a la inexactitud del modelo y a las limitaciones prácticas en la resolución del problema de optimización. En primer lugar, se requiere que el modelo utilizado sea lo suficiente preciso, puesto que de lo contrario las predicciones que de él se obtienen carecen de realismo y la solución obtenida no es verdaderamente óptima. Puesto que el modelo nunca será perfecto, en la práctica se implementa únicamente el primer elemento de la secuencia de señales de control calculadas en la optimización, esto es, el correspondiente al instante presente. Transcurrido un tiempo (tiempo o intervalo de muestreo), se toma una medida del estado real en ese instante y se vuelve a repetir la optimización y así sucesivamente. A esta forma de proceder se le llama *horizonte deslizante*, siendo el horizonte el periodo de tiempo para el que se hace la predicción. Dado que la predicción y, por lo tanto, la secuencia óptima de señales de control dependen del estado presente y este es medido y no predicho, este procedimiento introduce un *feedback* en el control. De este modo se obtiene un cierto grado de robustez ante errores de modelado e incertidumbres<sup>6</sup>. En la figura 1.5 se representa la situación que se tiene cuando se emplea un esquema de control predictivo.



**Figura 1.5** Esquema del control predictivo. Fuente: <https://math.stackexchange.com>.

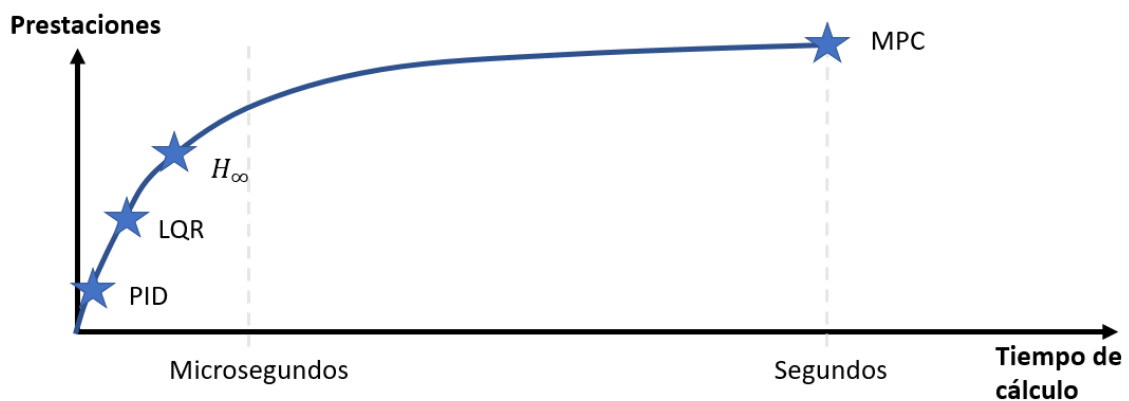
En segundo lugar, también se ha comentado que existen limitaciones asociadas a la resolución del problema de optimización. En muchos casos de interés, esta resolución se lleva a cabo de forma numérica, al carecerse de métodos para obtener soluciones analíticas. La resolución numérica obliga a limitar el horizonte de predicción y el número de tiempos de muestreo que contiene para acotar la cantidad de variables que aparecen en la optimización<sup>7</sup>. Puesto que para cada instante de muestreo se utilizan medidas del estado presente, la optimización no puede realizarse *a priori*, sino que se lleva a cabo en tiempo real (en el caso de un UAV, típicamente sería realizada por el computador embarcado). Esto hace

<sup>6</sup> Además de esto, como se verá más adelante, existen métodos para estimar las perturbaciones e incluirlas en la predicción, obteniendo una mayor robustez y precisión en el control

<sup>7</sup> En casos no excesivamente complejos, es posible tener en cuenta un horizonte de predicción infinito limitando la forma en que pueden evolucionar las señales de control en la totalidad o parte de él. Un ejemplo es el llamado *Dual Mode MPC*, donde las señales de control se consideran libres durante los primeros  $N$  instantes de predicción y se asume una ley de control proporcional ( $u = Kx$ , con  $u$  la señal de control,  $x$  el estado y  $K$  una constante) en los siguientes. Una descripción más detallada de esta técnica puede encontrarse en [3]

que la complejidad de los modelos utilizados y de las funciones objetivo planteadas deba ser tal que el problema de optimización resultante pueda resolverse en un tiempo adecuado (menor al tiempo de muestreo, pues de lo contrario la solución calculada no llegaría a implementarse).

Históricamente, la dificultad para realizar la optimización en un tiempo razonable ha limitado las aplicaciones del MPC. Este nació en la década de los 60 y tuvo un gran éxito a partir de los 80 en el área de los procesos industriales, donde los constantes aumentos en las capacidades de los recursos computacionales permitieron una mejora continua de las prestaciones. La clave del éxito del MPC en la industria de procesos (fundamentalmente químicos) está en que estos procesos tienen unos tiempos característicos muy lentos, lo cual permite que se puedan diseñar controladores con intervalos de muestreo grandes, facilitando un tiempo de cálculo suficiente para el MPC. Hoy en día, la potencia de los computadores está en un nivel sin precedentes y eso ha llevado a que el control predictivo se aplique en muchos nuevos campos, que incluyen sistemas de dinámica relativamente rápida, con el objetivo de mejorar el rendimiento que ofrecen otras estrategias de control (ver figura 1.6).



**Figura 1.6** Comparación de estrategias de control. Fuente: [9].

Una de estas nuevas áreas es, como ya se ha comentado, la de las aeronaves no tripuladas. Existen ya esquemas de guiado basados en control predictivo que se han aplicado a este campo exitosamente (por ejemplo, en [1], uno de los estudios en los que se basa este trabajo o en [4]). No obstante, aún quedan muchos puntos de mejora por explorar y numerosos progresos por realizar. En [2], el guiado eficaz y robusto con  $V, \gamma$  y  $\phi$  (velocidad aerodinámica, ángulo de trayectoria y ángulo de balance, respectivamente) como consignas de control de [1] se trató de perfeccionar sustituyendo la velocidad por la aceleración<sup>8</sup>. En este trabajo, se trata de continuar esta labor, no solo avanzando en la mejora de las prestaciones, sino también incluyendo nuevas funcionalidades.

<sup>8</sup> La premisa era que el control final sobre la velocidad de la aeronave se hace modificando el régimen de giro del motor y, con esto, el empuje proporcionado. Es decir, en realidad se está actuando sobre una fuerza (el empuje), la cual produce una aceleración y no una velocidad



Las principales innovaciones sobre los métodos similares previos sugeridas en este estudio se centran en:

- **Planteamiento de nuevas funciones objetivo.** Las funciones objetivo para guiado de aeronaves se basan en el seguimiento de trayectorias compuestas por segmentos rectos. Se espera conseguir una mejora de las capacidades del sistema con el uso de funciones objetivo formuladas específicamente para otros tipos de trayectorias. También se pretende incluir funcionalidades no presentes en los algoritmos anteriores, como la posibilidad de seguir las trayectorias con TAS (*True Aerodynamic Speed*, velocidad aerodinámica verdadera) definida, en lugar de especificando la velocidad respecto a tierra.
- **Modificación de las restricciones del problema.** Como se ha comentado, una de las variables de control en el método de guiado propuesto en [2] y también utilizado aquí es la aceleración. Aunque esta sea una variable sobre la que se puede incidir de manera más directa que sobre la velocidad, puede no presentar unos límites tan claros y constantes como aquella. En este trabajo se trata de hallar una forma realista de calcular las restricciones en aceleración, puesto que un establecimiento adecuado de las limitaciones del sistema es la única forma de obtener el máximo rendimiento de él manteniendo una operación segura.
- **Inclusión de un estimador de perturbaciones.** Las simulaciones realizadas en [2] no tenían en cuenta la existencia de perturbaciones, siempre presentes en la realidad. Aquí se incorporan y su efecto se trata de corregir utilizando las técnicas ya propuestas y testadas en [1], entre otros. Con esto se pretende aumentar la robustez del sistema y ponerlo a prueba llevando a cabo unas simulaciones más representativas de un caso real.

Además de lo anterior, se realizará una exhaustiva labor de análisis para evaluar las prestaciones del sistema de guiado basado en control predictivo en función de las distintas configuraciones (funciones objetivo) estudiadas.

Los modelos utilizados y la formulación propuesta se desarrollan en los próximos capítulos.



## 2 Modelo dinámico del sistema

---

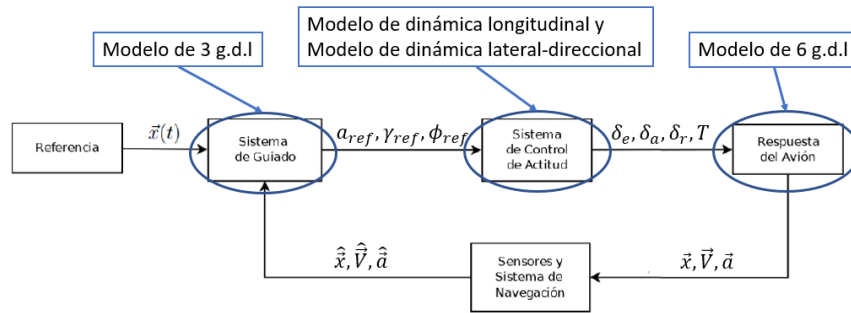
El modelo dinámico está constituido por el conjunto de ecuaciones que se utilizan para describir la evolución del estado del sistema. Desde el punto de vista del control predictivo, la función del modelo dinámico es clara: es la base de la predicción. Este modelo expresa matemáticamente la relación causa-efecto entre el estado del sistema y las acciones de control. En otras palabras, recoge el vínculo causal entre las variables de control (aquellos parámetros sobre los que se supone que es posible incidir directamente) y las variables de estado (aquellas que describen la situación del sistema y que se quieren controlar).

En este capítulo se presentan, de manera general, los dos modelos más relevantes para este trabajo: un modelo de 6 grados de libertad y un modelo de 3 grados de libertad.

El modelo de 6 grados de libertad es una representación más realista del sistema. Como tal, se usará para emular la evolución del mismo cuando se utiliza el sistema de guiado basado en control predictivo y así poder evaluar las prestaciones de este. Es decir, servirá para determinar la respuesta de la aeronave ante las señales de control dadas, en las simulaciones.

No obstante, la complejidad del modelo de 6 grados de libertad es, también, alta. Es por esto por lo que no resulta adecuado para su uso por parte del sistema de control predictivo (un modelo complejo da lugar a un problema de optimización complejo que puede no cumplir las limitaciones de tiempo que se comentaron en la sección 1.2). Por este motivo, el modelo de 3 grados de libertad será el empleado internamente por el algoritmo de control para realizar la predicción. Su aplicación al guiado se desarrolla de manera detallada en el capítulo 3.

Además de los anteriores, se requieren modelos adicionales para el sistema de control de actitud (y para los sensores y el sistema de medida, en caso de incluirlo). Dichos modelos no son objeto de estudio en este trabajo, por lo que sus descripciones no se han incluido en el mismo. Si se desea, pueden consultarse en [1].



**Figura 2.1** Diagrama de bloques de un sistema de control de vuelo y modelos utilizados.

## 2.1 Modelo de 6 grados de libertad

### 2.1.1 Hipótesis

El modelo de 6 grados de libertad se basa en las siguientes hipótesis:

- La aeronave se comporta como un sólido rígido, por lo que tiene 6 grados de libertad
- El avión es simétrico respecto al plano de simetría  $x_b z_b$ <sup>1</sup>
- Se utiliza un modelo de tierra plana:
  - Se emplea el sistema de referencia topocéntrico inercial
  - Se supone que la gravedad es constante e igual a  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- Se desprecia la contribución de la rotación de las partes móviles internas de la aeronave (motor, hélice, ...) en el momento cinético del mismo.
- Se considera que la masa y los momentos de inercia de la aeronave son constantes<sup>2</sup>.

### 2.1.2 Ecuaciones dinámicas

Las ecuaciones dinámicas relacionan las fuerzas y momentos externos que actúan sobre la aeronave con las aceleraciones que producen. Se obtienen de aplicar las leyes de la mecánica racional al movimiento de la aeronave. Se tienen, así, las ecuaciones de la cantidad de movimiento (2.1) y del momento cinético (2.2),

<sup>1</sup> Los sistemas de referencia se definen en el apéndice A.

<sup>2</sup> Muchos UAVs, y en particular aquel que se considera en este trabajo, utilizan propulsión eléctrica. Por lo tanto, no hay pérdida de masa de combustible durante el vuelo y esta hipótesis es razonable

$$m \frac{d\vec{V}_g}{dt} \Big|_I = \vec{F}_{A,T} + m\vec{g} \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{I}_G \vec{\omega}}{dt} \Big|_I = \vec{M}_{A,T} \quad (2.2)$$

siendo  $\vec{V}_g$  la velocidad del centro de gravedad del avión respecto a tierra,  $\vec{\omega}$  la velocidad angular del avión respecto a tierra,  $\vec{F}_{A,T}$  y  $\vec{M}_{A,T}$  las fuerzas y momentos aerodinámicos y propulsivos,  $m$  la masa de la aeronave,  $\vec{g}$  la aceleración de la gravedad e  $\mathbf{I}_G$  el tensor de inercia en el centro de gravedad. La notación  $|_I$  indica el sistema de referencia en el que se realizan las derivadas.

Empleando las hipótesis anteriormente presentadas, estas ecuaciones se pueden escribir también en forma escalar como

$$X - mg \sin \theta = m(\dot{u} - rv + qw) \quad (2.3)$$

$$Y + mg \cos \theta \sin \phi = m(\dot{v} - ru - pw) \quad (2.4)$$

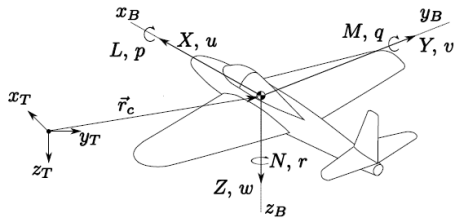
$$Z + mg \cos \theta \cos \phi = m(\dot{w} - qu + pv) \quad (2.5)$$

$$L = I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + (I_z - I_y)qr - I_{xz}pq \quad (2.6)$$

$$M = I_y \dot{q} + (I_x - I_z)pr + I_{xz}(p^2 - r^2) \quad (2.7)$$

$$N = I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + (I_y - I_x)pq + I_{xz}qr \quad (2.8)$$

donde  $\theta$  y  $\phi$  son los ángulos de cabeceo y balance, respectivamente, y donde se han utilizado la siguiente notación:



$$\begin{aligned} [\vec{V}]^B &= [u \ v \ w]^T, \\ [\vec{\omega}]^B &= [p \ q \ r]^T, \\ [\vec{F}_{A,T}]^B &= [X \ Y \ Z]^T, \\ [\vec{M}_{A,T}]^B &= [L \ M \ N]^T. \end{aligned}$$

con  $[ \ ]^B$  indicando que la magnitud entre corchetes es un vector expresado en el sistema de referencia ejes cuerpo<sup>3</sup>

Nótese que  $\vec{V}$  es la velocidad aerodinámica, cuya relación con la velocidad respecto a tierra viene dada por

$$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_w \quad (2.9)$$

donde  $\vec{V}_w$  es la velocidad del viento respecto a tierra.

<sup>3</sup> ver apéndice A.

### 2.1.3 Ecuaciones cinemáticas

Dentro de las ecuaciones cinemáticas podemos diferenciar dos conjuntos: las ecuaciones cinemáticas lineales y las ecuaciones cinemáticas angulares. Las primeras relacionan la velocidad lineal con la posición del centro de masas de la aeronave, mientras que las segundas relacionan la velocidad angular con la actitud de la aeronave.

Las ecuaciones cinemáticas lineales se obtienen directamente a partir de la definición de la velocidad como derivada temporal de la posición y son

$$[\vec{V}]^T = \left[ \frac{d\vec{r}_c}{dt} \Big|_T \right]^T = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad [\vec{r}_c]^T = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Dado que las ecuaciones dinámicas se han formulado en el sistema de referencia ejes cuerpo, es necesario expresar el vector velocidad en dicho sistema, con lo que las ecuaciones cinemáticas lineales, en forma escalar, quedan como

$$\dot{x} = u \, c\theta \, c\psi + v(s\theta \, s\phi \, c\psi - s\psi \, c\phi) + w(s\theta \, c\phi \, c\psi + s\psi \, s\phi) \quad (2.11)$$

$$\dot{y} = u \, c\theta \, s\psi + v(s\theta \, s\phi \, s\psi + c\psi \, c\phi) + w(s\theta \, c\phi \, s\psi - c\psi \, s\phi) \quad (2.12)$$

$$\dot{z} = -u \, s\theta + v \, c\theta \, s\phi + w \, c\theta \, c\phi \quad (2.13)$$

donde  $\psi$  es el ángulo de guiñada y se han usado  $c$  y  $s$  como abreviaturas de la función coseno y seno, respectivamente.

En cuanto a las ecuaciones cinemáticas angulares, utilizando los ángulos de Euler para representar la actitud y transformando adecuadamente el vector velocidad angular se llega a

$$\dot{\phi} = p + q(\sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \quad (2.14)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \quad (2.15)$$

$$\dot{\psi} = (q \sin \phi + r \cos \phi) \sec \theta \quad (2.16)$$

El conjunto de ecuaciones dinámicas (2.3)–(2.8), cinemáticas lineales (2.11)–(2.13) y cinemáticas angulares (2.14)–(2.16) constituye un sistema de doce ecuaciones diferenciales que permite calcular las doce variables de estado del modelo,

$$\vec{x} = [x \quad y \quad z \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad u \quad v \quad w \quad p \quad q \quad r] \quad (2.17)$$

Para cerrar el problema, es necesario conocer las expresiones de las fuerzas y momentos aerodinámicos y propulsivos,  $\vec{F}_{A,T}$  y  $\vec{M}_{A,T}$ .

### 2.1.4 Modelo propulsivo

Suponiendo que el sistema de propulsión es eléctrico con una hélice de paso fijo, y que la fuerza propulsiva está alineada con el eje  $x_B$  del avión, se modelan las expresiones de la fuerza y el momento propulsivo.

- Empuje proporcionado por la hélice:

$$\vec{F}_T = \rho \pi R^4 \Omega^2 C_T \vec{i}_B, \quad (2.18)$$

siendo  $\rho$  la densidad del aire,  $R$  el radio de la hélice,  $\Omega$  la velocidad angular de giro,  $C_T$  el coeficiente de tracción de la hélice e  $\vec{i}_B$  un vector unitario según la dirección del eje  $x_B$ .

- Momento propulsivo (generado por el par de reacción debido al giro de la hélice):

$$\vec{M}_T = -\rho \pi R^5 \Omega^2 C_P \vec{i}_B, \quad (2.19)$$

donde  $C_P = \frac{P}{\rho \pi R^5 \Omega^3}$  es el coeficiente de potencia de la hélice.

Los coeficientes  $C_P$  y  $C_T$  dependen únicamente del parámetro de avance  $J = \frac{u}{4\pi\Omega R}$  y son característicos de cada hélice.

Es importante decir que el controlador electrónico de velocidad del motor del avión que se considera en este trabajo posee un regulador interno de revoluciones, de manera que puede establecerse una relación lineal entre la posición de la palanca y las revoluciones conseguidas. De esta manera, se puede decir que, a todos los efectos,  $\Omega$  será la señal de control asociada al motor.

### 2.1.5 Modelo aerodinámico

Hay que tener en cuenta que la obtención de un modelo aerodinámico preciso es una tarea de gran dificultad. En general, puede decirse que estas fuerzas y momentos dependen de forma no lineal de las variables de estado y de control, lo cual puede expresarse de la siguiente forma

$$\vec{F}_A, \vec{M}_A = f(\vec{x}, \vec{u}) \quad (2.20)$$

pero no se dispone de una expresión analítica que modele esta dependencia de forma general.

El modelo que se ha usado en este trabajo es el propuesto en [1]. Se trata de un modelo de aerodinámica no lineal que se basa en los métodos de DATCOM<sup>4</sup> para estimar los coeficientes de fuerzas y momentos aerodinámicos.

<sup>4</sup> *Data Compendium* de la Fuerza Aérea Estadounidense (USAF)

Las señales de control que aparecen en las expresiones de las fuerzas y momentos aerodinámicos son  $\delta_e$ ,  $\delta_r$  y  $\delta_a$ , que son las deflexiones del timón de profundidad, del timón de dirección y de los alerones, respectivamente.

Con esto, teniendo en cuenta también el modelo propulsivo, el vector completo de señales de control sería

$$\vec{u} = [ \delta_e \quad \delta_r \quad \delta_a \quad \Omega ] \quad (2.21)$$

## 2.2 Modelo de 3 grados de libertad

### 2.2.1 Hipótesis

El modelo de 3 grados de libertad se basa en las siguientes hipótesis:

- La aeronave se considera como una masa puntual, por lo que tiene 3 grados de libertad.
- El motor está fijo respecto a la aeronave (la dirección del empuje es fija)
- Se usa un modelo de tierra plana
  - Se emplea un sistema de referencia topocéntrico inercial
  - Se supone que gravedad es constante y de valor  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- Masa constante (como ya se ha dicho, es más que razonable para una aeronave con motor eléctrico alimentado por baterías)
- Atmósfera en calma (no hay viento)

La diferencia más importante es que ya no se supone que la aeronave se comporta como un sólido rígido, sino con una masa puntual. Esto quiere decir que no se tiene en cuenta la dinámica de la actitud, de ahí la reducción en el número de grados de libertad. Se trata, por tanto, de un modelo más simple, pero adecuado para analizar la trayectoria del centro de masas de la aeronave, que es el principal interés en el caso del guiado.

La otra diferencia notable es que, para este trabajo, no se considerará la posible existencia de viento en el modelo (como se explicará en el capítulo 3, esta se tendrá en cuenta de una manera distinta).



### 2.2.2 Ecuaciones del movimiento en forma vectorial

El movimiento del centro de masas del avión bajo la acción de diversas fuerzas viene definido por su posición  $\vec{r}$  y su velocidad  $\vec{V}_I$  (recordemos que se está considerando un modelo de masa constante). En cada instante, el avión está sujeto a una fuerza total compuesta por

- fuerza gravitatoria,  $m\vec{g}$ .
- fuerza aerodinámica,  $\vec{F}_A$ .
- fuerza propulsiva,  $\vec{F}_T$ .

Así, las ecuaciones del movimiento respecto al sistema de referencia inercial topocéntrico se obtienen de la definición de velocidad (ecuación cinemática) y de la aplicación de la ley de la cantidad de movimiento (ecuación dinámica) y son, respectivamente,

$$\left. \frac{d\vec{r}_c}{dt} \right|_I = \vec{V}_I \quad (2.22)$$

$$m \left. \frac{d\vec{V}_g}{dt} \right|_I = \vec{F}_A + \vec{F}_T + m\vec{g} \quad (2.23)$$

siendo  $\vec{r}_c$  el vector de posición del centro de masas de la aeronave,  $t$  el tiempo,  $\vec{V}_g$  la velocidad respecto al sistema inercial (igual a la aerodinámica,  $\vec{V}$ , al no haber viento) y  $m$  la masa del avión ( $m = \text{const.}$ ).

### 2.2.3 Ecuaciones del movimiento en forma escalar

#### Ecuaciones cinemáticas

La forma escalar de las ecuaciones vectoriales del movimiento se obtendrá mediante la proyección adecuada de las mismas. Proyectando la ecuación cinemática vectorial (2.22) sobre los ejes del sistema de referencia topocéntrico se llega a las ecuaciones cinemáticas escalares:

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \cos \chi \quad (2.24)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \cos \gamma \sin \chi \quad (2.25)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (2.26)$$

donde  $V$  es el módulo de la velocidad,  $\gamma$  es el ángulo de trayectoria,  $\chi$  el ángulo de rumbo y  $x$ ,  $y$ ,  $h$  son las coordenadas del centro de masas del avión (hacia el norte, hacia el este y la altura<sup>5</sup>, respectivamente).

<sup>5</sup> se ha definido la altura como  $h = -z$

### Ecuaciones dinámicas

Las ecuaciones dinámicas escalares se obtienen al proyectar la ecuación dinámica vectorial (2.23) sobre los ejes viento. Con esto se llega a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m} (F_{A,T})_{x_w} - g \sin \gamma \quad (2.27)$$

$$V \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{m} \cos \mu (F_{A,T})_{y_w} - \frac{1}{m} \sin \mu (F_{A,T})_{z_w} \quad (2.28)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{m} \sin \mu (F_{A,T})_{y_w} - \frac{1}{m} \cos \mu (F_{A,T})_{z_w} - g \cos \gamma \quad (2.29)$$

donde  $\mu$  es el ángulo de alabeo y  $(F_{A,T})_{x_w}$  denota la componente del vector  $\vec{F}_{A,T}$  sobre el correspondiente eje viento.

### 2.2.4 Ecuaciones generales

La expresión de las fuerzas aerodinámicas y propulsivas en ejes viento viene dada por

$$\left[ \vec{F}_{A,T} \right]^W = \begin{bmatrix} T \cos \varepsilon \cos \nu - D \\ T \cos \varepsilon \sin \nu - Q \\ -(L + T \sin \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde  $T$  es el empuje suministrado por la hélice;  $L$ , la sustentación;  $D$ , la resistencia aerodinámica;  $Q$ , la fuerza aerodinámica lateral;  $\varepsilon$ , el ángulo de ataque del empuje y  $\nu$ , el ángulo de resbalamiento del empuje.

Introduciendo (2.30) en las ecuaciones dinámicas y añadiendo las ecuaciones cinemáticas se obtiene el conjunto de ecuaciones generales para el vuelo del avión

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \cos \chi \quad (2.31)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \cos \gamma \sin \chi \quad (2.32)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (2.33)$$

$$m \frac{dV}{dt} = T \cos \varepsilon \cos \nu - D - mg \sin \gamma \quad (2.34)$$

$$mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} = (T \cos \varepsilon \sin \nu - Q) \cos \mu + (L + T \sin \varepsilon) \sin \mu \quad (2.35)$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = -(T \cos \varepsilon \sin \nu - Q) \sin \mu + (L + T \sin \varepsilon) \cos \mu - mg \cos \gamma \quad (2.36)$$

Nótese que  $V$ ,  $\gamma$  y  $\chi$  (el módulo de la velocidad aerodinámica, el ángulo de trayectoria y el ángulo de rumbo, respectivamente) definen el vector velocidad aerodinámica  $\vec{V}$ .

### 2.2.5 Vuelo simétrico

Finalmente, resulta conveniente particularizar las ecuaciones anteriores para una condición de vuelo simétrico. Esto resulta especialmente útil para simplificar el modelo de predicción que se usará en el algoritmo de control predictivo, obteniéndose un modelo más sencillo que ahorra complejidad en el proceso de optimización y, en consecuencia, permite reducir el de tiempo de cálculo.

Así, considerando que la aeronave vuela sin ángulo de resbalamiento (esto es, la velocidad aerodinámica está contenida en el plano de simetría del avión) y que la fuerza aerodinámica lateral  $Q$  es nula, el sistema de ecuaciones (2.31)–(2.36) se transforma en

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \cos \chi \quad (2.37)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \cos \gamma \sin \chi \quad (2.38)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (2.39)$$

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - mg \sin \gamma \quad (2.40)$$

$$mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} = L \sin \phi \quad (2.41)$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L \cos \phi - mg \cos \gamma \quad (2.42)$$

donde se ha introducido la hipótesis adicional de vuelo a ángulo de ataque pequeño,  $\alpha \ll 1$ .

Nótese que una consecuencia del vuelo simétrico es que el ángulo de alabeo  $\mu$  y el de balance  $\phi$  son iguales.

También es útil considerar, como se verá posteriormente, el caso en que el ángulo de trayectoria  $\gamma$  es constante, es decir,  $\frac{d\gamma}{dt} = 0$ . Así, de las ecuaciones (2.41) y (2.42) podemos obtener la evolución del ángulo de rumbo como

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{g \tan \phi}{V} \quad (2.43)$$

El vector de estados, para este modelo, sería

$$\vec{x} = [x \quad y \quad h \quad V \quad \chi \quad \gamma] \quad (2.44)$$

y el vector de señales de control podría ser

$$\vec{u} = [T \quad \gamma \quad \phi] \quad (2.45)$$

## 2.3 Modelo de simulación

### 2.3.1 Esquema del modelo

Como ya se ha comentado anteriormente, es importante realizar simulaciones con el mayor grado de realismo posible para poder evaluar adecuadamente las prestaciones que el algoritmo de guiado podría presentar en la práctica. Para ello se ha utilizado el modelo de simulación elaborado en [1] y [2] haciendo uso del entorno MATLAB-Simulink. Un esquema de este modelo se muestra en la figura 2.2.

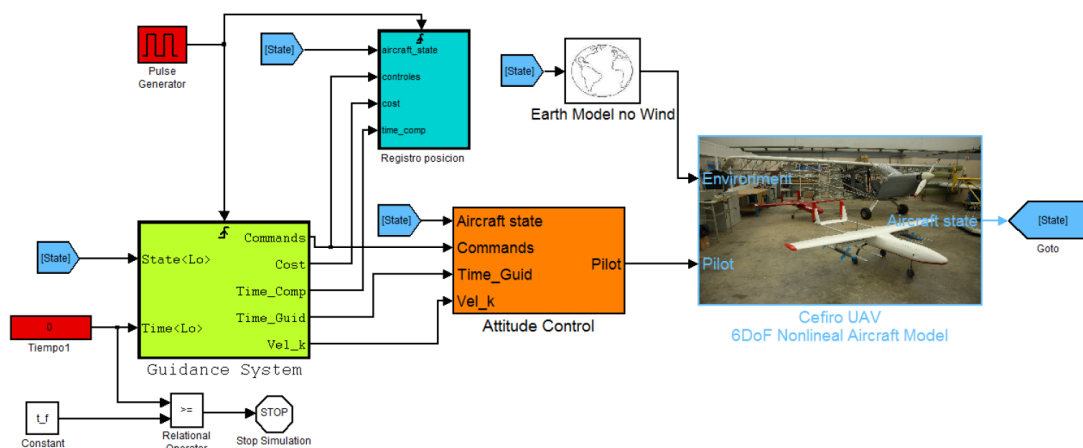


Figura 2.2 Esquema del modelo de simulación.

En este modelo destacan tres bloques:

- **Guidance System:** Es, básicamente, el sistema de guiado de alto nivel del que se ocupa este trabajo, teniendo implementadas todas las funciones que permiten el cálculo de las señales de control de alto nivel según el esquema de control predictivo, basado en el modelo de 3 grados de libertad de la aeronave cuya formulación se desarrollará en el capítulo 3.
- **Attitude Control:** Es el sistema de control de bajo nivel, encargado de cumplir las consignas que le llegan desde el sistema de guiado de un nivel superior. En su interior alberga el controlador de velocidad, el controlador de ángulo de trayectoria y el controlador de ángulo de balance (autopiloto lateral-direccional). Los detalles de estos controladores quedan fuera del alcance del trabajo y no se van a desarrollar en este documento. No obstante, hay que señalar que resultan indispensables para poder llevar a cabo las simulaciones del sistema de guiado y que la formulación completa de los mismo puede encontrarse en [1].

- **Céfiro UAV 6DoF Nonlinear Aircraft Model:** es el modelo de avión de 6 grados de libertad (6DoF o 6 *Degrees of Freedom*, en inglés). En este bloque es donde se encuentran implementadas las ecuaciones generales de la posición y la actitud de la aeronave (no lineales), junto con un modelo propulsivo y aerodinámico no lineal. Los datos concretos de la aeronave utilizada se especifican en la sección 2.3.2.

### 2.3.2 Datos de la aeronave simulada

Céfiro UAV es la aeronave no tripulada que se usa como referencia para los estudios desarrollados en este trabajo. Céfiro es un proyecto que surgió en el año 2008 en el seno del Grupo de Ingeniería Aeroespacial de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla como una herramienta educativa y de investigación. Se trata de una aeronave autónoma de ala fija. Algunos datos que permiten hacerse una idea de sus características y que han sido de utilidad en este trabajo son:

- Peso máximo: 25 *kg*.
- Peso en vacío: 15 *kg*.
- Envergadura: 3 *m*.
- Superficie alar: 1.1 *m*<sup>2</sup>.
- Potencia: 8.5 *HP*.
- Velocidad máxima del motor: 6000 *rpm*.
- Velocidad mínima del motor: 50 *rpm*.
- Velocidad de crucero: 25 *m/s*.
- Velocidad máxima: 30 *m/s*.
- Velocidad de entrada en pérdida: 13 *m/s*.



# 3 Formulación del algoritmo de guiado basado en control predictivo

---

En este capítulo se desarrolla el algoritmo de guiado basado en control predictivo propuesto. La formulación que aquí se presenta es, en varios aspectos, igual a la que se puede encontrar en [2] (guiado con  $a$ ,  $\gamma$  y  $\phi$  como variables de control), que a su vez está basada en la anterior de [1] (guiado con  $V$ ,  $\gamma$  y  $\phi$  como variables de control). Los principales cambios que se han realizado en el marco de este trabajo se concentran, como ya se detalló en la sección 1.2, en:

- Planteamiento de nuevas funciones objetivo para seguimiento de trayectorias no rectilíneas y realización de vuelo a TAS constante.
- Establecimiento más preciso de las restricciones del problema.
- Incorporación de un estimador de perturbaciones.

Por otro lado, como también se explicó en la sección 1.2, los elementos básicos del esquema de control predictivo son:

- El modelo del sistema, que sirve de base a las predicciones.
- La predicción de los estados futuros en función de la secuencia de señales de control ejecutada.
- La función objetivo de la optimización, que expresa cuál es la finalidad del sistema.
- Las restricciones del problema, que incorporan las limitaciones operacionales de la aeronave a la optimización.

- El cálculo de las señales de control a partir del problema de optimización planteado.

Estos aspectos se desarrollan de forma individualizada en cada una de las secciones del presente capítulo, de tal manera que se va construyendo, progresivamente, el algoritmo completo de guiado basado en control predictivo.

### 3.1 Modelo de avión

Como ya se ha mencionado, para el desarrollo de una estrategia de control predictivo, es necesario disponer de un modelo del sistema sobre el que calcular predicciones de las variables de estado en instantes futuros en función de las señales de control empleadas. A la hora de elegir el modelo que se va a utilizar, se deben tener en cuenta dos aspectos fundamentales. El primero de ellos es su realismo. Solo si el modelo es lo suficientemente preciso, las predicciones serán válidas y las señales de control calculadas llevarán a cumplir el objetivo deseado. El segundo aspecto es la simplicidad. Un modelo complejo complicaría el proceso de optimización implícito en la estrategia de control predictivo, pudiendo llegarse al caso de que no fuera implementable en tiempo real debido a una excesiva demanda computacional. Habitualmente, el mayor realismo se logra a costa de una mayor complejidad del modelo, por lo que se trata de dos objetivos contrapuestos y se requiere una solución de compromiso.

Puesto que lo que aquí se está desarrollando es un controlador de trayectorias, resulta bastante adecuado usar un modelo de vuelo simétrico de tres grados de libertad (ver sección 2.2.5). Así el sistema de guiado solo se ocupará de que la posición del centro de gravedad de la aeronave siga la trayectoria deseada, dejando la actitud para el sistema de control de actitud de bajo nivel. Además, para simplificar el problema, inicialmente se va a trabajar solo con las ecuaciones cinemáticas. Con ello, el modelo de avión a considerar es el siguiente

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \cos \chi \quad (3.1)$$

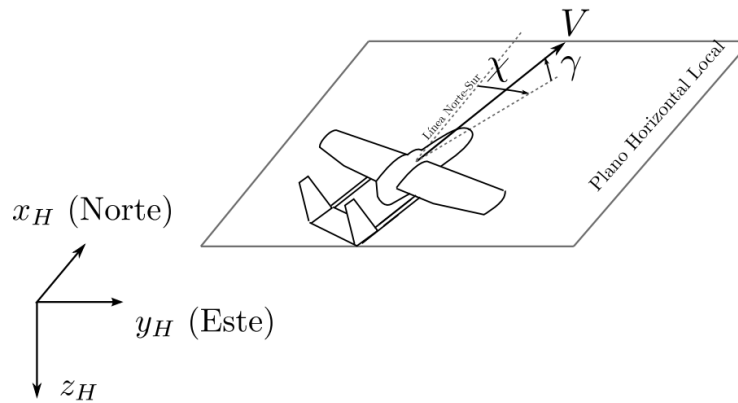
$$\frac{dy}{dt} = V \cos \gamma \sin \chi \quad (3.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -V \sin \gamma \quad (3.3)$$

donde, al igual que en la sección 2.2.5,  $x$ ,  $y$  y  $z$  representan las coordenadas del centro de gravedad del avión respecto al sistema de referencia topocéntrico,  $V$  es la velocidad aerodinámica del avión,  $\gamma$  es el ángulo de trayectoria y  $\chi$  es el ángulo de rumbo. En la figura 3.1 se puede ver un esquema con la definición de estas variables.

El modelo constituido por las expresiones (3.1)–(3.3) es un modelo de tiempo continuo, formado por ecuaciones diferenciales. Aunque este tipo de modelos se pueden emplear en control predictivo, su uso se limita típicamente a aquellos casos poco comunes en los que no se puede obtener una expresión discreta de la dinámica del sistema en términos



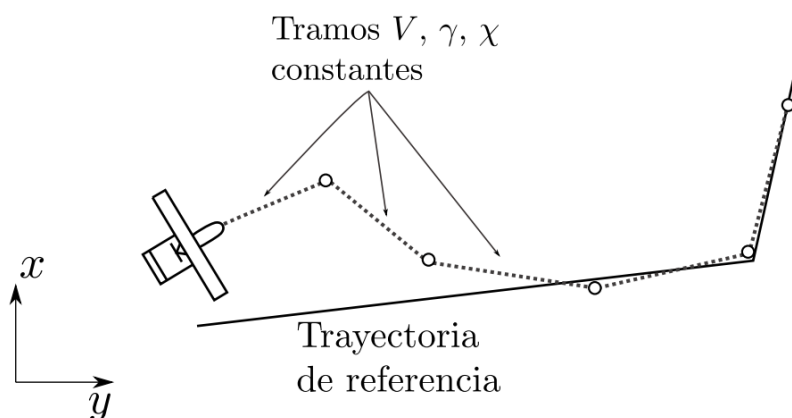


**Figura 3.1** Modelo de avión en el guiado predictivo.

de funciones matemáticas básicas. Una discretización del modelo supone una reducción drástica en la complejidad del mismo (se trabaja únicamente con el valor de los estados y las señales de control en momentos concretos del horizonte de predicción, de modo que se obtiene un problema de optimización paramétrica) sin que necesariamente se reduzca de manera significativa su precisión.

Existen numerosas formas de discretizar el problema. En esta sección se va a razonar, en términos físicos eminentemente, cuál puede ser una discretización adecuada del problema, mientras que la discretización matemática de las ecuaciones se desarrollará en la sección 3.2.

Una forma básica de discretización, muy común en la literatura, consiste en dividir la trayectoria del avión en segmentos rectilíneos, como se muestra en la figura 3.2. De este modo, se considera el ángulo de rumbo  $\chi$  como una variable de control que se mantiene constante durante cada intervalo de muestreo y que puede cambiar instantáneamente de un segmento de vuelo a otro (se supone la existencia de un controlador de rumbo de bajo nivel, que se ocupa de establecer el ángulo de rumbo oportuno).

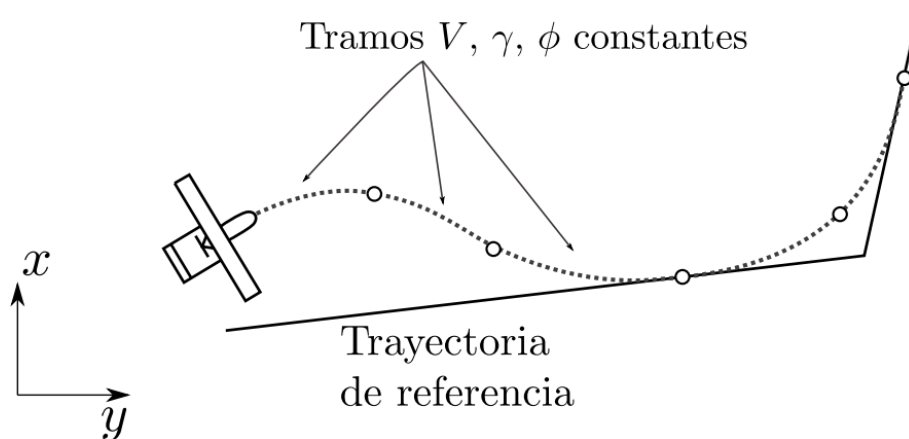


**Figura 3.2** Estrategia de control predictivo basada en tramos rectilíneos.

Estas simplificaciones permiten obtener un modelo de predicción muy simple que facilita considerablemente el proceso de optimización. Sin embargo, la asunción de cambios instantáneos de rumbo introduce imprecisiones en el modelo, ya que son físicamente irrealizables. Así, en realidad es el controlador de rumbo de bajo nivel el que se encarga de comandar el ángulo de balance necesario para iniciar un viraje que lleve al avión al nuevo rumbo deseado, sin que el esquema de guiado predictivo tenga ningún control sobre este viraje.

Para solucionar este problema, en [1], se emplea un método de guiado predictivo basado en una discretización más realista de la trayectoria de la aeronave. En lugar de discretizar el movimiento del avión mediante segmentos rectos (considerando  $V$ ,  $\gamma$  y  $\chi$  como señales de control), se define la trayectoria como una concatenación de tramos de curvatura constante, usando como señales de control la velocidad aerodinámica  $V$ , el ángulo de trayectoria  $\gamma$  y ángulo de balance  $\phi$ , como se muestran en el esquema de la figura 3.3. De este modo, se consigue modelar de una forma más precisa el comportamiento del avión al incorporar la dinámica del ángulo de rumbo en la predicción (aunque no se tenga en cuenta la dinámica del ángulo de balance, esta es más rápida que la del ángulo de rumbo, por lo que despreciarla no afecta tanto).

De esta manera, el ángulo de rumbo  $\chi$  pasa a ser una variable de estado más, por lo que se requiere una ecuación adicional que permita calcular su valor en instantes futuros. Dado que se está discretizando la trayectoria en tramos de  $\gamma$  constante, es posible utilizar la expresión simple dada por la ecuación 2.43 de la sección 2.2.5.

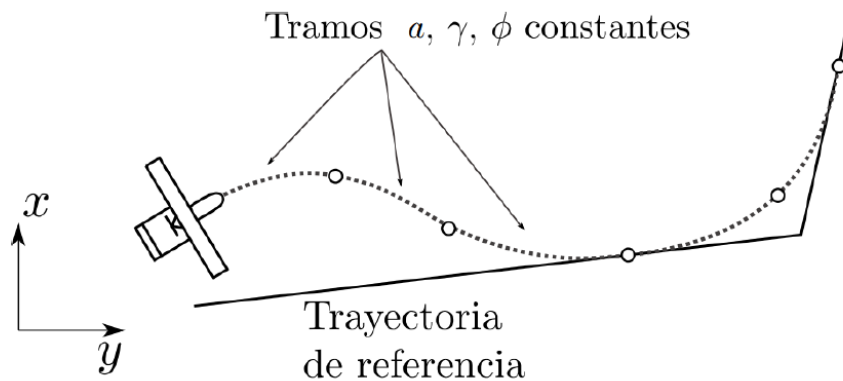


**Figura 3.3** Estrategia de control predictivo basada en tramos de curvatura constante y velocidad constante.

Aparte de la ventaja que supone desde el punto de vista de la optimización (se está mejorando el modelo de predicción), no hay que olvidar que esta estructura de control ayuda a hacer aparecer de forma explícita las restricciones operativas del avión en el esquema predictivo, ya que se puede relacionar directamente las señales de control con el factor de carga de cada segmento de vuelo ( $n = L/W$ ). Como se sabe de los tratados clásicos de ingeniería aeronáutica [5] o específicos de actuaciones de aeronaves [6, 7], el factor de

carga es un parámetro de vital importancia, ya que está estrechamente vinculado a las limitaciones estructurales y aerodinámicas de un avión (por ejemplo, mediante el diagrama V-n).

En [2] se trata de obtener un grado de realismo aún mayor discretizando la trayectoria en tramos de aceleración y curvatura fijas (con esto, la velocidad deja de ser constante en los segmentos discretizados), usando como señales de control la aceleración  $a$ , el ángulo de trayectoria  $\gamma$  y ángulo de balance  $\chi$  (ver figura 3.4). Es decir, ya no se asumen cambios instantáneos de velocidad y, además del controlador de rumbo, el controlador de velocidad también queda ahora integrado en el esquema predictivo.



**Figura 3.4** Estrategia de control predictivo basada en tramos de curvatura constante y uniformemente acelerados.

Al igual que sucedió con el ángulo de rumbo  $\chi$ , la velocidad ha pasado a ser una variable de estado más, por lo que se requiere incorporar una ecuación adicional al modelo para definir su evolución. Esta viene, simplemente, de la definición de la aceleración (ahora constante en cada tramo) como derivada de la velocidad:

$$\frac{dV}{dt} = a \quad (3.4)$$

Con estas consideraciones el modelo completo que se usará en la predicción está compuesto por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \cos \chi \quad (3.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \cos \gamma \sin \chi \quad (3.6)$$

$$\frac{dz}{dt} = -V \sin \gamma \quad (3.7)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{g \tan \phi}{V} \quad (3.8)$$

$$\frac{dV}{dt} = a \quad (3.9)$$

con lo que los vectores de estados y señales de control son, como consecuencia de la discretización elegida,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \chi \\ V \end{bmatrix} ; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ \gamma \\ \phi \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

## 3.2 Predicción del estado

### Discretización de las ecuaciones

Entrando en la predicción del estado, el primer punto que hay que abordar es la discretización matemática del sistema de ecuaciones (3.5)–(3.9). Como ya se adelantó, esta discretización de las ecuaciones se va a basar en una discretización de la trayectoria del avión en tramos de aceleración, ángulo de trayectoria y ángulo de balance constantes. Hay que tener en cuenta que el objetivo final es expresar el vector de estados en cualquier instante del horizonte de predicción como función únicamente del estado inicial y de la secuencia de señales de control ejecutadas hasta ese instante.

El primer paso será escribir cada componente del vector de estados en función del estado en el instante de predicción inmediatamente anterior y de las señales de control en el tramo que une ambos instantes. Para ello hay que recordar que las señales de control se suponen constantes en cada tramo e integrar las ecuaciones (3.5)–(3.9) entre los tiempos  $t_k$  y  $t_{k+1} = t_k + T_S$ , siendo  $T_S$  el tiempo de muestreo.

Comenzando por la velocidad, integrando la ecuación (3.9) se obtiene que, entre  $t_k$  y  $t_{k+1}$  la evolución de esta variable viene dada por

$$V(t) = a_k t + V_k \quad (3.11)$$

y particularizando para  $t_{k+1} = t_k + T_S$  queda

$$V_{k+1} = a_k T_S + V_k \quad (3.12)$$

donde los subíndices en las variables de estado y control hacen referencia al instante de tiempo al que corresponden, es decir,  $V_k = V(t_k)$ .

Continuando por el ángulo de rumbo, integrando ahora la ecuación (3.8) tras sustituir (3.11), se llega a

$$\chi(t) = \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k t + V_k}{V_k} + \chi_k \quad (3.13)$$

y particularizando para  $t_{k+1} = t_k + T_s$  resulta

$$\chi_{k+1} = \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.11) y (3.13) en (3.5)–(3.7) e integrando una vez más, se obtienen el resto de expresiones:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & \frac{\cos \gamma_k (a_k T_s + V_k)^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} \left[ g \tan \phi_k \sin \left( \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \right) \right. \\ & \left. + 2a_k \cos \left( \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \right) \right] \\ & - \frac{\cos \gamma_k V_k^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} (g \tan \phi_k \sin \chi_k + 2a_k \cos \chi_k) + x_k \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} y_{k+1} = & \frac{\cos \gamma_k (a_k T_s + V_k)^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} \left[ 2a_k \sin \left( \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \right) \right. \\ & \left. - g \tan \phi_k \cos \left( \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \right) \right] \\ & - \frac{\cos \gamma_k V_k^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} (2a_k \sin \chi_k - g \tan \phi_k \cos \chi_k) + y_k \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$z_{k+1} = -T_s \sin \gamma_k \left( \frac{1}{2} a_k T_s + V_k \right) + z_k \quad (3.17)$$

El sistema de ecuaciones formado por (3.12), (3.14), (3.15), (3.16) y (3.17) se puede escribir de manera compacta de la siguiente forma

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(a_k, \gamma_k, \phi_k, V_k, \chi_k) + \mathbf{x}_k \quad (3.18)$$

donde los términos de cada ecuación que no corresponden a  $\mathbf{x}_k$  definen el vector  $\mathbf{f}_k$ . La expresión completa de este vector puede consultarse en el apéndice B.

De manera similar, es posible escribir una ley recursiva de predicción, que exprese las variables de estado en un instante  $k + 1$  del horizonte en función de su valor en el primer instante del mismo ( $k = 0$ ) y de la secuencia de señales de control hasta ese momento. Esta ley se expresa como sigue

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^k \mathbf{f}_i(a_i, \gamma_i, \phi_i, V_i, \chi_i) + \mathbf{x}_0 \quad (3.19)$$

habiéndose definido  $\mathbf{f}_i$  en (3.18).

Por último, reescribiendo  $\chi_i$  y  $V_i$  como

$$V_i = T_s \sum_{m=0}^{i-1} a_m + V_0 \quad (3.20)$$

$$\chi_i = \sum_{m=0}^{i-1} \left[ \frac{g \tan \phi_m}{a_m} \ln \frac{a_m T_s + T_s \sum_{n=0}^{m-1} a_n + V_0}{T_s \sum_{n=0}^{m-1} a_n + V_0} \right] + \chi_0 \quad (3.21)$$

la fórmula recursiva queda de la siguiente manera

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^k \mathbf{f}_i(a_0, \dots, a_i, \gamma_i, \phi_0, \dots, \phi_i, V_0, \chi_0) + \mathbf{x}_0 \quad (3.22)$$

### Linealización del problema

Aunque se ha simplificado enormemente el modelo al realizar la discretización, este aún presenta un grado de complejidad que puede resultar excesivo, asociado a la no linealidad de las ecuaciones.

A pesar de que existen ejemplos de algoritmos de control predictivo que hacen uso de modelos no lineales del sistema, estos presentan dos importantes desventajas. La primera es que el uso de un modelo no lineal da lugar a un problema de optimización no lineal, que puede requerir un tiempo de cálculo demasiado elevado como para que sea viable su resolución en tiempo real. La segunda, y no menos relevante, es que no hay garantías de encontrar al menos una solución factible (esto es, una solución que cumpla las restricciones, aunque no sea óptima) que pudiera implementarse en caso de agotar el tiempo de cálculo.

En este trabajo se va seguir el enfoque propuesto en [1], linealizando el modelo discreto de avión en torno a una secuencia de controles de referencia inicial. El algoritmo de control predictivo se encargará, entonces, de encontrar los incrementos de las señales de control respecto de sus valores de referencia que optimicen la función objetivo. Una vez calculados los incrementos, estos se utilizarán para actualizar las señales de referencia y se realizará una nueva linealización. Entonces se repetirá la optimización, entrando en un proceso iterativo (descrito con mayor detalle en la sección 3.7). De este modo se sustituye una optimización no lineal por una secuencia de optimizaciones lineales, que se detendrá cuando se agote el tiempo de cálculo permitido o bien cuando se considere que el proceso iterativo ha convergido (típicamente, cuando no se aprecien cambios significativos en el valor de la función objetivo en el óptimo). Un aspecto reseñable de este método es que la secuencia de controles de partida, así como las soluciones obtenidas después de cada optimización exitosa, son factibles. Así, si el tiempo permitido para el cálculo se agota sin que el proceso haya convergido, se podría implementar la mejor solución que se tenga hasta el momento (la que tenga asociada un menor valor de la función objetivo).

Para linealizar el problema en torno a una secuencia de señales de control de referencia, se definen las siguientes relaciones

$$a_i = \bar{a}_i + \Delta a_i \quad (3.23)$$

$$\gamma_i = \bar{\gamma}_i + \Delta \gamma_i \quad (3.24)$$

$$\phi_i = \bar{\phi}_i + \Delta \phi_i \quad (3.25)$$

donde  $\bar{a}_i, \bar{\gamma}_i, \bar{\phi}_i$  denotan las señales de control de referencia de  $a, \gamma$  y  $\phi$  en el instante  $i$ , respectivamente; mientras que  $\Delta a_i, \Delta \gamma_i, \Delta \phi_i$  denotan el incremento de estas señales respecto de las de referencia en dicho instante. Para tener una notación más compacta, la secuencia completa de señales de control se expresa de manera unificada apilando los vectores de señales de control a lo largo del horizonte de predicción ( $N_p$ ) en los siguientes “vectores pila”

$$\mathbf{u}_S = \bar{\mathbf{u}}_S + \Delta \mathbf{u}_S \quad (3.26)$$

siendo

$$\mathbf{u}_S = \left[ \mathbf{u}_0^T \quad \mathbf{u}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{N_p-1}^T \right]^T \quad (3.27)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_S = \left[ \bar{\mathbf{u}}_0^T \quad \bar{\mathbf{u}}_1^T \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{u}}_{N_p-1}^T \right]^T \quad (3.28)$$

$$\Delta \mathbf{u}_S = \left[ \Delta \mathbf{u}_0^T \quad \Delta \mathbf{u}_1^T \quad \cdots \quad \Delta \mathbf{u}_{N_p-1}^T \right]^T \quad (3.29)$$

donde  $\mathbf{u}_i = [a_i \ \gamma_i \ \phi_i]$  es el vector de señales de control en el instante  $i$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_i$  es el vector de control de referencia en ese instante, mientras que  $\Delta \mathbf{u}_i$  es el vector de incrementos de señales de control respecto a sus referencias. Con estas definiciones, la relación (3.22), puede reescribirse como  $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{u}_S, V_0, \chi_0)$ .

Linealizando los vectores  $\mathbf{f}_i$  definidos según (3.18) en torno a  $\bar{\mathbf{u}}_S$  se tiene que

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{u}_S, V_0, \chi_0) = \mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) \Delta \mathbf{u}_S \quad (3.30)$$

y sustituyendo esto en (3.22), el modelo de predicción linealizado queda como

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^k \left( \mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) \Delta \mathbf{u}_S \right) + \mathbf{x}_0 \quad (3.31)$$

Teniendo en cuenta las dependencias funcionales concretas que aparecen en el vector  $\mathbf{f}_i$ , la matriz  $\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0)$  tiene la forma

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial a_0} \Theta_5 \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \phi_0} \mid \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial a_1} \Theta_5 \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \phi_1} \mid \cdots \mid \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial a_i} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \gamma_i} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \phi_i} \mid \Theta_{4 \times 3(N_p-1-i)} \right] \quad (3.32)$$

donde  $\Theta_m$  es un vector columna nulo de  $m$  componentes y  $\Theta_{m \times n}$  es una matriz  $m \times n$  de ceros, y donde se entiende que todas las derivadas de  $\mathbf{f}_i$  están evaluadas en  $(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0)$ . Nótese que a partir de la  $i$ -ésima submatriz de (3.32) todos sus elementos son nulos, ya

que las señales de control futuras no pueden influir en las variables de estado pasadas. Las expresiones completas de cada uno de los términos de (3.32), junto con la del vector  $\mathbf{f}_i$  aparecen detalladas en el apéndice B.

Finalmente, de manera análoga a como se hizo en (3.27)–(3.29) para el vector de control, se va a introducir el vector de estados “apilado” en el horizonte de predicción

$$\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T & \mathbf{x}_2^T & \cdots & \mathbf{x}_{N_p}^T \end{bmatrix}^T \quad (3.33)$$

Usando esta definición, la ecuación de propagación del estado (3.31) se puede escribir como

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S \quad (3.34)$$

donde  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}_u$  vienen dadas, de acuerdo con la ecuación (3.31), por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) + \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{f}_0(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) + \mathbf{f}_1(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) + \mathbf{x}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_0(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) + \cdots + \mathbf{f}_{N_p-1}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) + \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{G}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) \\ \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) + \cdots + \frac{\partial \mathbf{f}_{N_p-1}}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Se puede comprobar que las ecuaciones (3.34)–(3.36) cumplen con el objetivo inicial de expresar los estados a lo largo del horizonte de predicción (recogidos en el vector  $\mathbf{x}_S$ ) en función de la secuencia de señales de control ejecutada (en este caso en forma de incrementos sobre una referencia) y del estado inicial (que aparece en  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}_u$ ). Aunque estas ecuaciones son solo una aproximación del modelo inicial no-lineal del sistema, tiene la ventaja de ser muchos más sencillas y permitirán que el problema de optimización al que da lugar el control predictivo se resuelva rápidamente, haciendo viable la aplicación de esta técnica a un sistema de dinámica relativamente rápida como es una aeronave. En este sentido, merece la pena prestar atención al hecho de que todos los elementos de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}_u$  se pueden calcular de manera explícita (ver apéndice B) una vez conocidos el estado actual y la secuencia de señales de referencia, lo cual contribuye enormemente a la sencillez y rapidez de la técnica.

Por último, se va a introducir en el modelo anterior una perturbación aditiva, que permitirá, entre otras cosas, tener en cuenta el efecto del viento. Con esto, el modelo de predicción del estado usado en la optimización será

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S \quad (3.37)$$



donde  $\mathbf{G}_\delta$  es una matriz triangular superior compuesta por bloques de matrices identidad<sup>1</sup> de la forma  $(\mathbf{G}_\delta)_{ij} = \mathbf{I}_{4 \times 3}$  y  $\delta_\delta$  es un vector de perturbaciones apilado (definido de forma análoga a  $\mathbf{x}_\delta$ ), cuyo cálculo se aborda en la sección 3.3.

### 3.3 Estimador de perturbaciones

El objetivo, al introducir el modelo de perturbación en (3.37), es aumentar la precisión en la estimación de los estados futuros. El hecho de utilizar un horizonte de predicción deslizante introduce *feedback* en el control, haciendo que el efecto de las perturbaciones o errores de modelado no se acumule. No obstante, anticipar este efecto e incluirlo en la predicción lleva a unas mejores prestaciones y a una mayor robustez del controlador.

La lógica de funcionamiento del estimador de perturbaciones que se va a utilizar es sencilla: en cada instante de muestreo, se compara la predicción más reciente del estado para ese momento (sin tener en cuenta perturbaciones) con el valor medido de las variables<sup>2</sup> y la diferencia de ambos se considera como una perturbación y se extrapola a las predicciones futuras. De esta manera, el efecto de las perturbaciones, cualesquiera que sean, queda incorporado al modelo y las señales de control calculadas tratan de compensarlo.

Siguiendo esta idea, el vector de perturbaciones en el instante  $k$ ,  $\delta_k$ , se puede calcular como

$$\delta_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{f}_k(a_k, \gamma_k, \phi_k, V_k, \chi_k) - \hat{\mathbf{x}}_k \quad \text{para } i = 1, \dots, k-1 \quad (3.38)$$

donde el acento en  $\mathbf{x}_k$  pretende hacer énfasis en que se trata de un estado medido.

Se asumirá que las perturbaciones son variables estadísticas que siguen una distribución normal, con media  $\bar{\delta}$  y matriz de covarianza  $\Sigma$ , es decir,  $\delta \sim N_5(\bar{\delta}, \Sigma)$ . Entonces, es posible escribir la estimación de la media,  $\hat{\delta}_k$  y la covarianza,  $\hat{\Sigma}_k$  de forma recursiva, es decir, a partir de las estimaciones de estas magnitudes en los momentos anteriores y de la perturbación calculada en el instante presente. Los detalles de este procedimiento se pueden encontrar en [8] y las fórmulas son las siguientes:

$$\hat{\delta} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda(k-i)} \delta_i}{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda(k-i)}} \quad (3.39)$$

$$\hat{\Sigma}_k = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} (\delta_i - \hat{\delta}_k) (\delta_i - \hat{\delta}_k)^T}{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda(k-i)}} \quad (3.40)$$

donde  $\lambda > 0$  es un factor de olvido, cuyo valor se ha fijado en  $\lambda = 0.3$ .

<sup>1</sup> Al ser  $\mathbf{G}_\delta$  es una matriz triangular superior compuesta por bloques de matrices identidad se está teniendo en cuenta el hecho de que las perturbaciones en un instante dado afectarán a todos los posteriores, pero en ningún caso a los anteriores.

<sup>2</sup> Hay que recordar que el vector de estados estaba formado por la posición, la velocidad aerodinámica y el rumbo, todas ellas magnitudes fácilmente medibles a bordo

Por otro lado, es posible definir  $\gamma_k = \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda(k-i)} y$ , teniendo en cuenta que la expresión anterior es una suma de términos de una progresión geométrica, se puede transformar esta definición en

$$\gamma_k = \frac{e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda k})}{1 - e^{-\lambda}} \quad (3.41)$$

Entonces, tal y como se explica en [1], se puede introducir (3.41) en (3.39) y (3.40) y llegar a las siguientes fórmulas recursivas:

$$\hat{\delta}_k = \frac{e^{-\lambda}}{\gamma_k} (\gamma_{k-1} \hat{\delta}_{k-1} + \delta_{k-1}) \quad (3.42)$$

$$\hat{\Sigma}_k = \frac{e^{-\lambda}}{\gamma_k} (\gamma_{k-1} \hat{\Sigma}_{k-1} + (\delta_{k-1} - \hat{\delta}_k)(\delta_{k-1} - \hat{\delta}_k)^T) \quad (3.43)$$

siendo  $\hat{\delta}_0 = 0$  y  $\hat{\Sigma}_0 = 0$ .

Esta forma de estimar las propiedades estadísticas de las perturbaciones tiene la virtud de reducir el uso de memoria, ya que solo se requiere almacenar la última estimación de la media y la covarianza.

De este modo, el vector de de perturbaciones  $\delta_S$  se puede construir suponiendo que la perturbación en cada instante futuro será igual a la media estimada en el instante actual, es decir,

$$\delta_S = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_k & \dots & \hat{\delta}_k \end{bmatrix}^T \quad (3.44)$$

Con esto la predicción del estado queda completamente definida y se puede pasar a introducir las restricciones.

### 3.4 Restricciones del problema

Teniendo en cuenta la formulación empleada para el guiado, se pueden identificar dos tipos de restricciones:

1. **Restricciones debidas a las limitaciones operativas de la aeronave.** Están asociadas principalmente a limitaciones aerodinámicas y estructurales de la aeronave y a las capacidades de la planta propulsora.
2. **Restricciones asociadas a las linealización del modelo del sistema.** La linealización es una aproximación local y se ajustará menos al comportamiento del modelo no lineal cuanto mayor sea la diferencia respecto al punto de linealización. En este caso el punto de linealización viene dado por la secuencia de control de referencia,  $\bar{\mathbf{u}}$ , y la diferencia respecto a este es  $\Delta \mathbf{u}_S$ . Por lo tanto, aunque no es estrictamente ne-

cesario, es muy conveniente imponer unos valores máximo y mínimos de  $\Delta \mathbf{u}_S$  para garantizar que la linealización sigue teniendo validez.

Es interesante notar que el primer grupo de limitaciones afectará tanto a las variables de control como al estado (las limitaciones aerodinámicas influirán, fundamentalmente, en la velocidad, que en esta formulación es una variable de estado, mientras que las otras limitarán los valores posibles de la aceleración y los ángulo de trayectoria y balance, que son las variables de control). Puesto que los parámetros de la optimización son las diferencias respecto al control de referencia, todas las restricciones deberán expresarse finalmente en función de estas variables para poder formular el problema de optimización de manera adecuada. Además, como se explicará con más detalle más adelante (sección 3.6) conviene que las restricciones sean lineales en estas variables.

### 3.4.1 Restricciones en el control

#### Restricciones debidas a las limitaciones operativas

En primer lugar, debido a las limitaciones operativas de la aeronave, existen valores máximos y mínimos de  $\mathbf{u} = [a \ \gamma \ \phi]^T$ , por lo que se deberá garantizar en todo momento que se cumple

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{max} \quad (3.45)$$

Estas restricciones se pueden traducir a las variables de control con las que trabaja el guiado ( $\Delta \mathbf{u}$ ), usando las definiciones (3.23)–(3.25), de la siguiente manera

$$\mathbf{u}_{min} - \bar{\mathbf{u}}_k \leq \Delta \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{max} - \bar{\mathbf{u}}_k \quad (3.46)$$

El ángulo de balance determina el factor de carga,  $n$ , durante los virajes (en un viraje coordinado,  $n = 1/\cos \phi$ ). El factor de carga está íntimamente relacionado con la magnitud de las fuerzas y momentos en las alas y el fuselaje y debe mantenerse en unos valores razonables por motivos estructurales. En este trabajo se fijará

$$\phi_{min} = -45 \quad ; \quad \phi_{max} = 45 \quad (3.47)$$

Para fijar los límites de la aceleración y del ángulo de trayectoria, conviene tener en cuenta la relación existente entre estas dos variables. Para ello, se usará la ecuación (2.40), es decir, la ecuación dinámica proyectada en el eje  $x_B$  del modelo de 3 grados de libertad para una condición de vuelo simétrico, reescrita como

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{T - D}{m} - g \sin \gamma \quad (3.48)$$

La planta propulsora instalada determinará los valores máximos y mínimos del empuje,  $T$ . El valor de la resistencia aerodinámica,  $D$ , para una geometría de la aeronave fija, dependerá básicamente de la velocidad y la densidad del aire. Puesto que el rango operativo del UAV considerado en este trabajo no es especialmente amplio y no se contemplan, de momento, misiones en las que se requiera que lo sea, se va a usar un modelo muy simple para la resistencia aerodinámica. En concreto, se va a suponer un coeficiente de resistencia constante  $c_D = 0.025$ , de modo que la resistencia vendrá dada por  $D = \frac{1}{2}\rho V^2 S c_D$ . Este valor se ha estimado usando el modelo aerodinámico de [1]. No obstante, no habría ningún inconveniente en usar un modelo más complejo y preciso, como una polar parabólica o cualquier otro que se desee.

Tras estas consideraciones, la relación entre la aceleración de la aeronave y el ángulo de trayectoria expresada en la ecuación (3.48) resulta más clara. Se puede interpretar como que el ángulo de trayectoria limita los valores posibles de la aceleración. Siguiendo esta interpretación, se ha decidido restringir el ángulo de trayectoria al intervalo marcado por

$$\gamma_{min} = -15 \quad ; \quad \gamma_{max} = 15 \quad (3.49)$$

y calcular los límites de la aceleración como

$$a_{min} = \frac{T_{min} - D}{m} - g \sin \gamma \quad ; \quad a_{max} = \frac{T_{max} - D}{m} - g \sin \gamma \quad (3.50)$$

Para determinar  $T_{min}$  y  $T_{max}$  se recurrirá al modelo propulsivo. En concreto, para el UAV Céfiro, en [1] se puede encontrar un modelo propulsivo basado en medidas experimentales obtenidas de ensayos en túnel de viento. Según dicho modelo, que adimensionaliza el empuje como  $T = \rho \pi R^4 \Omega^2 C_T$ , el coeficiente de tracción de la hélice viene dado por

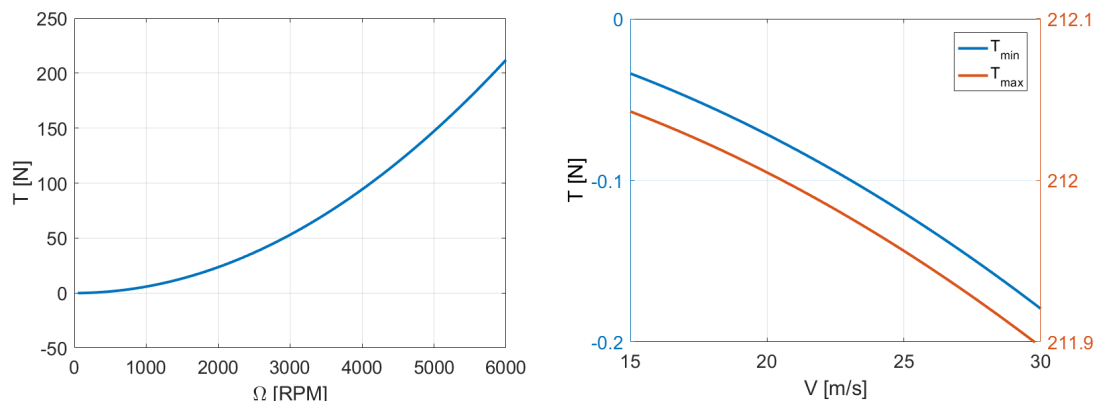
$$C_T = 0.06425 - 0.1899J^2 \quad (3.51)$$

donde  $J$  es el parámetro de avance de la hélice. Para ángulos de ataque y resbalamiento pequeños, este se puede escribir como  $J = \frac{V}{4\pi\Omega R}$ . Esto indica que el parámetro de avance y, por lo tanto, el empuje dependen de la velocidad de vuelo.

Por otro lado, el empuje se controlará mediante el régimen de giro del motor. Para el Céfiro se tiene

$$\Omega_{min} = 50 \text{ rpm} \quad ; \quad \Omega_{max} = 6000 \text{ rpm} \quad ; \quad R = 0.2159 \text{ m} \quad (3.52)$$

Usando una simplificación similar a la que se utilizó para la resistencia aerodinámica, se despreciará la dependencia funcional con la velocidad en el empuje, ya que su efecto es pequeño (ver figura 3.5). Así, se considerará una velocidad de referencia  $V = 20 \text{ m/s}$ . Al igual que antes, considerar esta dependencia no afectaría al funcionamiento del método, por lo que no habría problema en hacerlo.



(a) Variación del empuje con el régimen de giro.

(b) Variación del empuje con la velocidad.

**Figura 3.5** Dependencia del empuje con el régimen de giro y la velocidad.

### Restricciones asociadas a la linealización

Se va a limitar el valor absoluto de  $\Delta \mathbf{u}_k$  para evitar que la secuencia de control calculada,  $\mathbf{u}_S$ , se aleje excesivamente de la secuencia nominal  $\bar{\mathbf{u}}_S$ , garantizando así que la linealización siga teniendo validez. De este modo, se considera

$$-\delta \mathbf{u} \leq \Delta \mathbf{u}_k \leq \delta \mathbf{u}, \quad (3.53)$$

siendo  $\delta \mathbf{u} = [\delta a \ \delta \gamma \ \delta \phi]^T$  el vector de los máximos cambios admisibles de las señales de control en cada iteración. En este trabajo, al igual que en [2], se han considerado los valores

$$\delta a = 1.5T_s \text{ [m/s]}; \quad \delta \gamma = 3 \frac{\pi}{180} T_s \text{ [rad]}; \quad \delta \phi = 2.5 \frac{\pi}{180} T_s \text{ [rad]} \quad (3.54)$$

Resulta interesante observar que, en la expresión (3.53), lo que se está fijando es el máximo cambio de las señales de control por unidad de tiempo.

Combinando los dos tipos de restricciones en el control, las cotas superior e inferior del vector de señales de control en cada instante se pueden escribir de la siguiente manera

$$\text{máx}(\mathbf{u}_{min} - \bar{\mathbf{u}}_k, -\delta \mathbf{u}) \leq \Delta \mathbf{u}_k \leq \text{mín}(\mathbf{u}_{max} - \bar{\mathbf{u}}_k, \delta \mathbf{u}). \quad (3.55)$$

### 3.4.2 Restricciones en el estado

Las restricciones en el estado se presentarán del mismo modo que se ha hecho con las limitaciones en el control y posteriormente se transformarán en restricciones en los incrementos de las señales de control mediante la expresión de predicción del estado.

El vector de estados era  $\mathbf{x}_k = [x_k \ y_k \ z_k \ \chi_k \ V_k]^T$ . Solamente se impondrán restricciones en la velocidad, que serán del tipo

$$V_{min} \leq V_k \leq V_{max} \quad (3.56)$$

Para adaptar esta restricción a la formulación que emplea el algoritmo de optimización utilizado, se debe usar el vector de estados apilados al completo, por lo que se reescribe como

$$\mathbf{A}_V \mathbf{x}_S \leq \mathbf{b}_V \quad (3.57)$$

siendo  $\mathbf{A}_V$  y  $\mathbf{b}_V$  una matriz  $2N_p \times 5N_p$  y un vector  $2N_p \times 1$ , respectivamente, definidos de la siguiente manera

$$\mathbf{A}_V = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{V_0} & & & & \\ & \mathbf{A}_{V_0} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{A}_{V_0} & \\ -\mathbf{A}_{V_0} & & & & \\ & -\mathbf{A}_{V_0} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\mathbf{A}_{V_0} & \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_V = \begin{bmatrix} V_{max} \\ V_{max} \\ \vdots \\ V_{max} \\ -V_{min} \\ -V_{min} \\ \vdots \\ -V_{min} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

donde los elementos vacíos de  $\mathbf{A}_V$  son ceros y  $\mathbf{A}_{V_0}$  es un vector fila de cinco componentes dado por

$$\mathbf{A}_{V_0} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (3.59)$$

Usando la ecuación de predicción del estado,  $\mathbf{x}_S = \mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S$ , la expresión (3.57) se transforma en

$$\mathbf{A}_c \Delta \mathbf{u}_S \leq \mathbf{b}_c \quad (3.60)$$

siendo

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_V \mathbf{G}_u \quad (3.61)$$

$$\mathbf{b}_c = \mathbf{b}_V - \mathbf{A}_V (\mathbf{F} + \mathbf{G}_\delta \delta_S) \quad (3.62)$$

En cuanto a los valores de  $V_{min}$  y  $V_{max}$ , la velocidad mínima suele estar asociada a la entrada en pérdida, mientras que la velocidad máxima normalmente es un parámetro que define las actuaciones de la aeronave y se debe a una combinación de la aerodinámica y las prestaciones de la planta propulsiva. En este caso se van a considerar

$$V_{min} = 15 \text{ m/s} \quad ; \quad V_{max} = 30 \text{ m/s} \quad (3.63)$$

## 3.5 Factibilización del problema

Aunque las restricciones que se acaban de presentar son, en general, válidas y adecuadas, puede haber ocasiones en las que las perturbaciones que actúan sobre el sistema (cambios en el viento, cortes o excesos de potencia, errores de modelado, ...) hagan que su cumplimiento resulte imposible, al menos momentáneamente.

Por ejemplo, no se debe permitir que el avión vuele deliberadamente por encima de la velocidad máxima de diseño y se ha establecido una restricción que sirve a tal fin, pero si en un momento dado se rebasa esta velocidad (por ejemplo, debido a una ráfaga de viento), es conveniente seguir empleando un sistema de guiado que trate de devolver al avión a una velocidad aceptable. No obstante, si se implementan, tal cual, las restricciones de la sección 3.4, el optimizador podría detectar que es imposible cumplir con ellas, al estar la situación de partida fuera de estos límites. En ese caso se produciría un error en la optimización y se recurriría a la solución de guiado proporcional, que no tiene en cuenta las restricciones y podría llevar a que la aeronave se alejara aún más de la zona de operación adecuada, repitiéndose el mismo problema en la siguiente llamada al guiado y prolongándose esta situación en el tiempo.

Por ello, para tratar de ofrecer una mejor respuesta ante este tipo de circunstancias, en [2] se proponen dos medidas para intentar formular un problema de optimización factible. Estas medidas son las siguientes:

1. **Factibilización de la solución inicial.** Cada vez que se calcula la secuencia de incrementos de señales de control  $\Delta \mathbf{u}_k$  (solución de la optimización), se parte de una solución inicial o secuencia nominal  $\bar{\mathbf{u}}$ . Para asegurar la factibilidad del problema hay que partir de una solución inicial que cumpla las restricciones. Por ello, se asegura que todas las aceleraciones estén dentro de los límites,

$$a_{min} \leq \bar{a}_i \leq a_{max} \quad (3.64)$$

y, si los exceden, se aproximan al límite más cercano. Nótese que el subíndice  $i$  denota el instante de predicción.

2. **Factibilización de las restricciones en velocidad.** Tal y como se ha explicado en el ejemplo anterior, una velocidad medida,  $V_0$ , fuera de los límites puede hacer imposible cumplir con las restricciones de estado en instantes posteriores. En este caso, lo que se propone es modificar los límites en la velocidad necesarios hasta que la aeronave recupere una velocidad adecuada.

A continuación se explica el algoritmo para factibilizar las restricciones en velocidad si se detecta que  $V_0 > V_{max}$  (el algoritmo para  $V_0 < V_{min}$  es análogo):

- Calcular el tiempo de restablecimiento,  $t_{rest}$ , que es el tiempo que tarda la velocidad en regresar al máximo si se aplica la aceleración mínima

$$t_{rest} = \frac{V_0 - V_{max}}{|a_{min}|} \quad (3.65)$$

- Calcular el índice de restablecimiento,  $i_{rest}$  (comprendido entre 1 y  $N_p$ ), que es el índice del tiempo de muestreo inmediatamente posterior a  $t_{rest}$ .
- Establecer una solución inicial del vector de incrementos de señales de control,  $\Delta \mathbf{u}_{S_0}$  que haga que la solución inicial de aceleraciones sea  $a_{min}$  (antes se tenía que  $\Delta \mathbf{u}_{S_0}$  era un vector de ceros, porque se estaba linealizando en torno a la secuencia nominal  $\bar{\mathbf{u}}_S$ ). Lo que se quiere es que  $a_i = a_{min}$ , siendo  $a_i = \bar{a}_i + \Delta a_i$  para  $i = 1, \dots, i_{rest}$  las componentes de  $\mathbf{u}_S$  correspondientes a la aceleración. Entonces, el vector  $\Delta \mathbf{u}_{S_0}$  se ve modificado de la siguiente manera

$$\Delta a_{0,i} = \max(-\delta a, a_{min} - \bar{a}_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, i_{rest} \quad (3.66)$$

siendo  $\Delta a_{0,i}$  las componentes de  $\Delta \mathbf{u}_{S_0}$  correspondientes a la aceleración.

- Modificar los límites máximos de la velocidad. Para ello, llamamos  $V_{max_0}$  a la velocidad máxima de diseño (en el caso actual,  $V_{max_0} = 30 \text{ m/s}$ ) y la restricción  $V_{max}$  pasa a ser un vector de  $N_p$  componentes, que se definen como sigue

$$V_{max_i} = \begin{cases} V_0, & i = 1 \\ V_0 + a_{min} t_{s_{i-1}}, & i = 2, \dots, i_{rest} \\ V_{max_0}, & i = i_{rest} + 1, \dots, N_p \end{cases} \quad (3.67)$$

siendo  $t_s$  el tiempo transcurrido en el horizonte de predicción entre  $t = 0$  y el final del periodo de muestreo  $T_{s_i}$  (en realidad, entre  $t_k$  y  $t_{k+1}$ ),

$$t_{s_i} = \sum_{j=1}^i T_{s_j} \quad (3.68)$$

### 3.6 Función objetivo

La función objetivo es el último componente del control predictivo que falta por definir. Antes de hacerlo, conviene realizar algunas reflexiones sobre los elementos que debería incluir y sobre su forma.

Respecto a los elementos que debería incluir, se pueden señalar algunos aspectos que, como mínimo, deben tenerse en cuenta:



- **Seguimiento espacial de la trayectoria.** El objetivo último del guiado y el más importante es que la aeronave recorra el camino que se desea. Errores de seguimiento grandes repercuten en la seguridad del sistema, ya que pueden dar lugar a colisiones con otras aeronaves o con obstáculos del terreno.
- **Sincronización temporal con la referencia.** Normalmente se desea cumplir con unos tiempos de paso determinados por los puntos del recorrido. En el contexto de la aviación militar, este puede ser un requisito de la misión, mientras que, en el ámbito civil, tiene gran importancia en la planificación del tráfico.
- **Eficiencia del control.** No solo se desea que se cumplan los objetivos anteriores, sino que, además, se quiere que esto se haga con un gasto mínimo de recursos. En otras palabras, los usos excesivos del control deben penalizarse. En el caso de un UAV, una utilización racional del control conducirá a un aumento de la autonomía y el alcance.

Cuando se formulen los términos correspondientes a estos objetivos, cada uno de ellos tendrá asociado un factor de ponderación. Estos factores valoran la importancia que se le da a cada objetivo, de modo que el MPC optimizará la suma ponderada de ellos, calculando una solución de compromiso.

En cuanto a la forma, hay que recordar una vez más que, en el MPC, las señales de control se calculan como la solución de un problema de optimización y que dicho problema hay que resolverlo en tiempo real, en un periodo inferior al tiempo de muestreo. En la sección 3.1, el modelo puntual de avión presentado en el capítulo 2 se simplificó hasta obtener una relación lineal entre los estados futuros y las señales de control. Por otra parte, las restricciones formuladas en la sección 3.4 también son lineales. Siguiendo esta línea, conviene que la función objetivo sea, en todo caso, lineal o cuadrática en el control<sup>3</sup>, puesto que las señales de control en cada periodo del horizonte de predicción son, al fin y al cabo, las variables de la optimización. De esta manera, el problema de optimización tendrá la forma de un problema de programación lineal (LP, *Linear Programming*) o programación cuadrática (QP, *Quadratic Programming*). Para esta clase de problemas de optimización se dispone de métodos mucho más sencillos y rápidos que para los problemas generales de optimización no lineal.

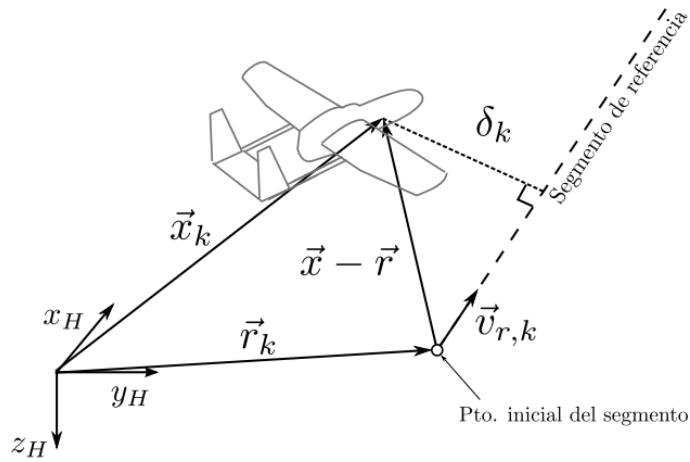
### 3.6.1 Función objetivo para el seguimiento de trayectorias rectas

La función objetivo que se utilizará para el seguimiento de trayectorias rectas es la misma que se pueden encontrar en [2]. Es importante prestar atención a la forma de cada término y a la lógica detrás de ellos, puesto que es muy similar a la de las otras funciones objetivo que se presentarán más tarde.

<sup>3</sup> Dado que, como se acaba de decir, se ha obtenido una relación lineal entre los estados y las señales de control, los términos de un cierto grado en las variables de estado podrán traducirse en términos de ese mismo grado en las variables de control.

En primer lugar, para determinar el error de seguimiento del camino, se va a calcular, para todo el horizonte de predicción, la distancia entre la aeronave y el segmento de vuelo que debe seguir. Así, como se puede ver en la figura 3.6, se va a considerar que  $\vec{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$  es el vector de posición del avión en el instante  $k$ , y que en ese instante la trayectoria de referencia es un segmento rectilíneo que comienza en el punto con vector de posición  $\vec{r}_k = (r_{x,k}, r_{y,k}, r_{z,k})$ , siendo su vector director  $\vec{v}_{r,k} = (v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k})$ . De esta forma, la distancia  $\delta_k$  entre la aeronave y el segmento de referencia en el instante  $k$  viene dada por

$$\delta_k = \frac{|\vec{v} \wedge (\vec{x}_k - \vec{r}_k)|}{|\vec{v}_{r,k}|} = \frac{1}{|\vec{v}_{r,k}|} \begin{bmatrix} 0 & -v_{z,k} & v_{y,k} \\ v_{z,k} & 0 & -v_{x,k} \\ -v_{y,k} & v_{x,k} & 0 \end{bmatrix} (\vec{x}_k - \vec{r}_k) \quad (3.69)$$



**Figura 3.6** Distancia entre el avión y el segmento de vuelo de referencia. Fuente: [1].

Además, hay que tener en cuenta que el vector director del segmento de referencia se puede determinar de manera inmediata mediante el rumbo y el ángulo de trayectoria de referencia

$$\vec{v}_{r,k} = \begin{bmatrix} \cos \chi_{r,k} \cos \gamma_{r,k} \\ \sin \chi_{r,k} \cos \gamma_{r,k} \\ -\sin \gamma_{r,k} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

siendo  $\gamma_{r,k}$  y  $\chi_{r,k}$  los ángulos de trayectoria y de rumbo de la trayectoria de referencia en el instante  $k$ .

Introduciendo ahora el vector de estados en la ecuación (3.69), se puede construir una función objetivo que penalice el cuadrado de la distancia a los segmentos de referencia a lo largo del horizonte de predicción, esto es

$$J_{1,k|recta} = \sum_{i=1}^{N_p} [\mathbf{V}_{k+i} (\mathbf{x}_{k+i|k} - \mathbf{r}_{k+i})]^T \mathbf{R}_{1,k+i} [\mathbf{V}_{k+i} (\mathbf{x}_{k+i|k} - \mathbf{r}_{k+i})] \quad (3.71)$$

donde

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} 0 & -v_{z,i} & v_{y,i} & 0 & 0 \\ v_{z,i} & 0 & -v_{x,i} & 0 & 0 \\ -v_{y,i} & v_{x,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_k = \begin{bmatrix} r_{x,k} \\ r_{y,k} \\ r_{z,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

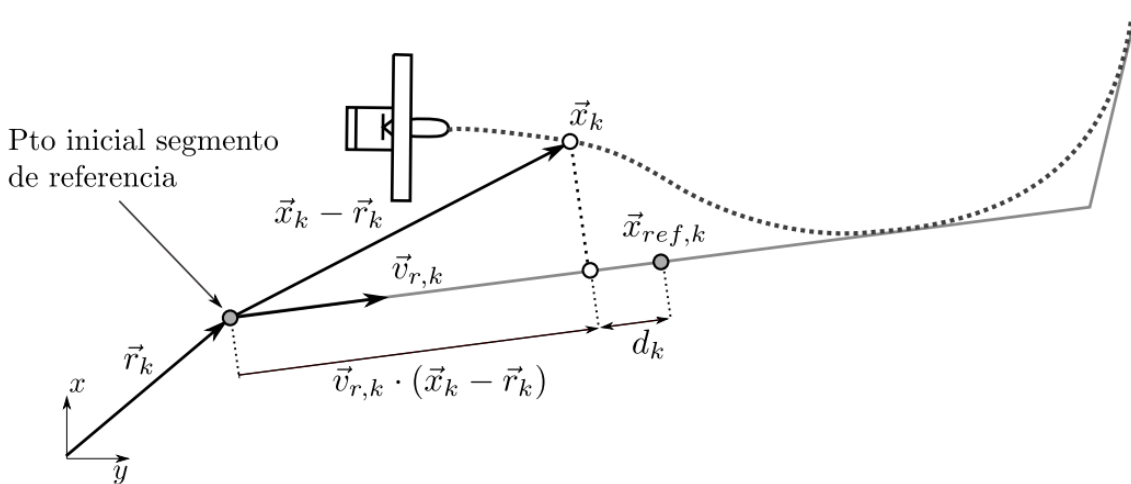
y  $\mathbf{R}_{1,k+i}$  es una matriz diagonal con la ponderación de cada componente del error en el instante  $k+i$  que se puede ver en (3.83). La notación con dos subíndices tipo  $k+i|k$  en los vectores de variables de estado y de control es muy común en los textos sobre guiado predictivo e indica que se trata del valor de la variable en el instante  $k+i$  calculado o predicho en el instante  $k$ . Por otro lado, hay que puntualizar que en (3.71) no es necesario dividir por  $|\vec{v}_{r,k}|$ , ya que, tal como se ha formulado en (3.70), este vector tiene módulo unidad.

La función objetivo (3.71) no introduce, intencionalmente, ningún tipo de control sobre la velocidad de vuelo, con lo que no se cumplirían los tiempos de paso por cada punto de la trayectoria. Teniendo esto en cuenta se va a incluir un término adicional con este fin.

Para aislar el error asociado al tiempo de paso del error de seguimiento del camino de referencia, se va a proyectar el vector de posición del avión en cada instante  $k$  sobre el segmento de referencia en ese instante (ver figura 3.7). Con ello, se puede calcular en cada instante el error de seguimiento,  $d$ , proyectado sobre la referencia de la siguiente manera

$$d_k = \vec{v}_{r,k} \cdot (\vec{x}_k - \vec{r}_k) - \vec{v}_{r,k} \cdot (\vec{x}_{ref,k} - \vec{r}_k) = \vec{v}_{r,k} \cdot (\vec{x}_k - \vec{x}_{ref,k}) \quad (3.73)$$

donde  $\vec{v}_{r,k}$  es el vector director del segmento de referencia en el instante  $k$ , como se muestra en (3.70).



**Figura 3.7** Proyección de la posición de la aeronave sobre el segmento de referencia. Fuente: [1].

De este modo, se puede penalizar el cuadrado de la distancia entre la aeronave y el punto de seguimiento, proyectada sobre el segmento de referencia, de la siguiente manera

$$J_{2,k|recta} = \sum_{i=1}^{N_p} [\mathbf{v}_{k+i} (\mathbf{x}_{k+i|k} - \mathbf{x}_{\text{ref}_{k+i}})]^T R_{2,k+i} [\mathbf{v}_{k+i} (\mathbf{x}_{k+i|k} - \mathbf{x}_{\text{ref}_{k+i}})] \quad (3.74)$$

donde  $R_{2,k+i}$  es un escalar con la ponderación de cada componente del error de sincronización en el instante  $k+i$ , mientras que  $\mathbf{v}_k$  se define como

$$\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \cos \chi_{r,k} \cos \gamma_{r,k} & \sin \chi_{r,k} \cos \gamma_{r,k} & -\sin \gamma_{r,k} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Adicionalmente, para mejorar la estabilidad, en [2] se propone considerar otro término de la función objetivo que incluye la penalización de la posición al final del horizonte de predicción,

$$J_{3,k|recta} = \left( \mathbf{x}_{k+N_p|k} - \mathbf{x}_{\text{ref}_{k+N_p}} \right)^T \mathbf{R}_3 \left( \mathbf{x}_{k+N_p|k} - \mathbf{x}_{\text{ref}_{k+N_p}} \right) \quad (3.76)$$

siendo  $\mathbf{R}_3$  una matriz diagonal con la ponderación de cada componente del error en el instante  $k+N_p$  que puede verse en (3.84).

Por último, una vez considerados el seguimiento de trayectoria y la sincronización temporal, se va a incluir en la función objetivo una penalización del control para evitar usos abusivos del mismo que den lugar a cambios bruscos en las señales de control y que reduzcan la autonomía de la aeronave. Para ello se va a incluir una función de coste de la forma

$$J_{4,k|recta} = \sum_{i=1}^{N_p-1} (\mathbf{u}_{k+i} - \mathbf{u}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_{k+i} (\mathbf{u}_{k+i} - \mathbf{u}_{k+i-1}) + (\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_k)^T \mathbf{Q}_k (\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_k) \quad (3.77)$$

donde se define  $\hat{\mathbf{u}}_k$  como la señal de control medida en el instante  $k$ , antes de ejecutar el sistema de guiado<sup>4</sup>. Estas medidas se introducen para evitar un salto brusco entre la señal de control calculada para el instante  $k$  y la que se ha medido en ese momento.

Hechas estas consideraciones, se va a definir la función objetivo del problema de optimización como la suma de las cuatro funciones de coste definidas en (3.71), (3.74), (3.77) y (3.76). Además, teniendo en cuenta la ecuación de predicción del estado (3.37), se puede

<sup>4</sup> Téngase en cuenta que aunque el vector  $\mathbf{u}$  contiene las señales de control del sistema de guiado, en realidad estas señales son variables de estado del avión que pueden ser medidas (ya que es el sistema de control de actitud el encargado de seguir las referencias fijadas por el guiado)

escribir la función objetivo de forma compacta como

$$\begin{aligned}
 J_{k|recta} &= J_{1,k|recta} + J_{2,k|recta} + J_{3,k|recta} + J_{4,k|recta} = & (3.78) \\
 &= [\mathbf{V}_S (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{r}_S)]^T \mathbf{R}_{1,S} [\mathbf{V}_S (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{r}_S)] + \\
 &+ [\mathbf{v}_S (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{ref,S})]^T \mathbf{R}_{2,S} [\mathbf{v}_S (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{ref,S})] + \\
 &+ (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{ref,S})^T \mathbf{R}_{3,S} (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{ref,S}) + \\
 &+ [\mathbf{A}_u (\Delta \mathbf{u}_S + \bar{\mathbf{u}}_S) - \mathbf{u}_{0,S}]^T \mathbf{Q}_S [\mathbf{A}_u (\Delta \mathbf{u}_S + \bar{\mathbf{u}}_S) - \mathbf{u}_{0,S}]
 \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\mathbf{V}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{V}_{k+N_p} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{v}_{k+N_p} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{R}_{1,S} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}_{1,k+N_p} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{R}_{2,S} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2,k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}_{2,k+N_p} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{R}_{3,S} = \begin{bmatrix} \Theta_{5 \times 5} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_{k+N_p} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

La matriz  $\mathbf{A}_u$  y el vector  $\mathbf{u}_{0,S}$  permiten computar las diferencias de las señales de control entre dos tiempos de muestreo consecutivos, estando definidos de la forma

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & & & & \\ -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{3N_p \times 3N_p} ; \quad \mathbf{u}_{0,S} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{3N_p \times 1} \quad (3.82)$$

siendo  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  la matriz identidad  $3 \times 3$ .

En cuanto a las matrices de sintonización, tendrán la forma

$$\mathbf{R}_{1,i} = f_{R_1} \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{R}_{2,i} = f_{R_2} \lambda \quad (3.83)$$

$$\mathbf{R}_3 = f_{R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{Q}_i = f_Q \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta a^2} & & \\ & \frac{1}{\delta \gamma^2} & \\ & & \frac{1}{\delta \kappa^2} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

donde  $\delta a$ ,  $\delta \gamma$  y  $\delta \kappa$  se definieron en la sección 3.4 y  $f_{R_1}$ ,  $f_{R_2}$ ,  $f_{R_3}$  y  $f_Q$  son los factores de sintonización de  $\mathbf{R}_{1,i}$ ,  $\mathbf{R}_{2,i}$ ,  $\mathbf{R}_3$  y  $\mathbf{Q}_i$ , respectivamente. Los valores sugeridos para ellos en [1] y [2] son

$$f_{R_1} = 10, \quad f_{R_2} = 0.1, \quad f_{R_3} = 1, \quad f_Q = 30 \quad (3.85)$$

Finalmente,  $\lambda$  es un factor introducido para no penalizar los errores del vector de estados en los primeros instantes de la predicción (ya que en esos momentos es donde se pueden tener diferencias más significativas con la trayectoria de referencia), evitando así la aparición de maniobras bruscas. Este factor se define de la siguiente manera

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq 3 \\ 1 & \text{si } i \in [4, N_p] \end{cases} \quad (3.86)$$

donde  $i$  denota el instante de predicción.

### 3.6.2 Función objetivo para el seguimiento de trayectorias de radio constante

Para el seguimiento de trayectorias que no estén formadas por segmentos rectos, sino que sean curvas de radio constante, lo ideal sería penalizar directamente el cuadrado de la diferencia entre la distancia de la aeronave al centro de la trayectoria de referencia y el radio de la misma. En ese caso, se tendrían términos de la forma

$$J_{1,k|NoQP} = \sum_{i=1}^{N_p} f_{R_1} \left( \sqrt{(x_{k+i|k} - x_C)^2 + (y_{k+i|k} - y_C)^2} - R \right)^2 \quad (3.87)$$

donde  $R$  es el radio de la trayectoria y  $x_C$  y  $y_C$  son las coordenadas de su centro en el plano horizontal (si la trayectoria no fuera horizontal, habría que añadir otros términos para la altura).

Lamentablemente, estos términos no son cuadráticos (y tampoco lo son si se emplea la distancia al centro de la trayectoria al cuadrado y el radio al cuadrado). En consecuencia, el problema de optimización resultante no sería de programación cuadrática y se tendría que resolver con técnicas de programación no lineal. Esto tiene un efecto drástico en el tiempo de computación y ocasiona que la resolución de problema, en una plataforma convencional y en un tiempo inferior a un intervalo de muestreo razonable, sea inviable (se darán algunos datos en la sección 4.1).

En vista de esto, el hecho de que una de las variables de control sea el ángulo de balance,  $\phi$ , y de que, en el caso de tener un ángulo de trayectoria  $\gamma$  constante sea precisamente  $\phi$  quien controle la tasa de cambio de ángulo de rumbo, ha llevado a pensar que es posible

obtener una función objetivo sencilla que proporcione una mejora en el seguimiento de trayectorias de radio constante (en comparación con los resultados que se tendrían discretizando la trayectoria en segmentos rectos y empleando entonces la función objetivo de la sección 3.6.1).

Para el caso de una trayectoria de radio constante y velocidad constante se tiene que

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{V}{R} \quad (3.88)$$

y combinando con (3.8) queda

$$\tan \phi_{ref} = \frac{V^2}{Rg} \quad (3.89)$$

La expresión (3.89) permite calcular el ángulo  $\phi$  de referencia que haría, según el modelo empleado, que la aeronave siguiera una trayectoria de radio constante, describiendo, en planta, un arco de circunferencia. Conviene puntualizar que, si el viraje es a derechas, se debe cambiar el signo del ángulo de balance (de acuerdo con el convenio de signos habitual, se tiene un ángulo de balance positivo cuando el ala derecha está levantada y la izquierda está bajada).

Si la trayectoria no fuera horizontal, se podría calcular también el ángulo de trayectoria de referencia, a partir, simplemente, de la geometría, como

$$\sin \gamma_{ref} = \frac{\Delta h}{2\pi R} \quad (3.90)$$

donde  $\Delta h$  es la variación de altura por vuelta.

Con esto, la función objetivo podría penalizar el cuadrado de la diferencia entre los ángulos de referencia y los reales en cada instante, esto es,

$$J_{1,k|Rcte} = \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{u}_{k+i|k} - \mathbf{u}_{ref})^T \mathbf{Q}_{ref,k+i} (\mathbf{u}_{k+i|k} - \mathbf{u}_{ref}) \quad (3.91)$$

donde

$$\mathbf{u}_{ref} = [0 \quad \gamma_{ref} \quad \phi_{ref}]^T \quad ; \quad \mathbf{Q}_{ref,k+i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{\gamma_{ref,k+i}} & 0 \\ 0 & 0 & f_{\phi_{ref,k+i}} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

siendo  $f_{\gamma_{ref,k+i}}$  y  $f_{\phi_{ref,k+i}}$  los factores de ponderación del error en el ángulo de trayectoria y balance, respectivamente.

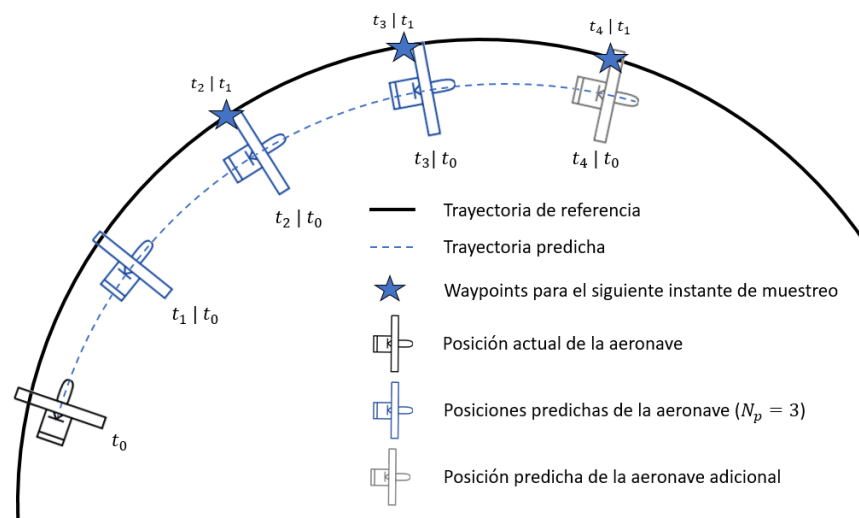
No obstante, la función objetivo anterior no aportaría ninguna información sobre la posición concreta de la trayectoria en el espacio. Por ejemplo, si la aeronave partiera de un punto inicial que no pertenece a la trayectoria objetivo, tendería a describir una curva de iguales características, pero desplazada, puesto que los errores en dirección radial o en altura no serían corregidos. Para solventar este inconveniente se van a añadir términos ba-

sados en el seguimiento de waypoints, que penalicen la distancia a los mismos, de manera similar a como se hizo en (3.74).

No obstante, si esos waypoints se calculan como las posiciones que debería ocupar la aeronave en cada instante para seguir la trayectoria a una velocidad dada, el seguimiento espacial de la referencia quedaría acoplado con la sincronización temporal. Esto impediría ponderar ambos objetivos con factores distintos y daría lugar a que, en los casos en los que no sea posible mantener la sincronización temporal, la aeronave se desvíe notablemente de la trayectoria para tratar de recuperarla.

Para prevenir este efecto, se ha estudiado un método alternativo para establecer los waypoints. Este hace uso de las propias predicciones del estado para calcular unos waypoints cuyo seguimiento sea factible. La técnica consiste, básicamente en usar como waypoint el punto de la trayectoria de referencia más cercano a la posición predicha de la aeronave en cada instante del horizonte de predicción.

Por ejemplo, suponiendo un horizonte de predicción  $N_p = 3$  (se ha elegido este valor para simplificar las figuras, pero sería muy bajo para la práctica), se dispondrá, en un instante de muestreo dado,  $t_0$ , y como parte algoritmo de guiado, de la predicción de la posición de la aeronave en 3 instantes posteriores. Entonces, se calculará, para cada uno de ellos, el punto de la trayectoria de referencia más cercano (en el caso de un viraje de radio constante, el cálculo resulta muy sencillo) y esos puntos se usarán como waypoints en la siguiente llamada al guiado. No obstante, dado que cuando se produzca la siguiente llamada, la aeronave se habrá desplazado (hasta ocupar una posición cercana a la predicha para el instante  $t_1$ ), realmente no se emplea el waypoint correspondiente a  $t_1$ . Por contra, se requiere una predicción adicional, que se puede obtener suponiendo que las señales de control se mantienen constantes durante un intervalo más o directamente añadiendo el waypoint a una distancia dada. Un esquema puede verse en la figura 3.8.



**Figura 3.8** Esquema del cálculo de los waypoints.



Durante la primera llamada al guiado, si es necesario, se puede usar la predicción dada por la ley de guiado proporcional para inicializar los waypoints con un procedimiento análogo al ya comentada, solo que sin eliminar el correspondiente al primer instante del horizonte de predicción y sin añadir un instante de predicción adicional).

La justificación de esta técnica sería que, al elegir así los waypoints, se trata de ceñir la trayectoria real a la de referencia (la función objetivo disminuirá si la predicción se acerca al waypoint correspondiente y, por tanto, se reduce la distancia a la trayectoria), retrasando o adelantando los waypoints si la aeronave no es capaz de alcanzarlos. De este modo, los waypoints se pueden calcular independientemente de la velocidad con la que se desea recorrer la trayectoria, con lo que se evita incorporar la sincronización temporal a la función objetivo.

Los términos correspondientes de la función objetivo tendrían la forma

$$J_{2,k|Rcte} = \sum_{i=1}^{N_p} [\mathbf{v}_{k+i} (\mathbf{x}_{k+i|k} - \mathbf{x}_{\text{ref}_{k+i}})]^T R_{2,k+i} [\mathbf{v}_{k+i} (\mathbf{x}_{k+i|k} - \mathbf{x}_{\text{ref}_{k+i}})] \quad (3.93)$$

con

$$\mathbf{v}_{k+i} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad ; \quad \mathbf{x}_{\text{ref}_{k+i}} = [x_{wp} \quad y_{wp} \quad z_{wp} \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.94)$$

siendo  $x_{wp}$ ,  $y_{wp}$  y  $z_{wp}$  las coordenadas de los waypoints calculados.

La expresión de la función objetivo completa, añadiendo los términos del control y de la posición final y escrita de igual manera que en (3.78), sería

$$\begin{aligned} J_{k|Rcte} &= J_{1,k|Rcte} + J_{2,k|Rcte} + J_{3,k|Rcte} + J_{4,k|Rcte} = & (3.95) \\ &= [(\Delta \mathbf{u}_S + \bar{\mathbf{u}}_S) - \mathbf{u}_{\text{ref},S}]^T \mathbf{Q}_{\text{ref},S} [(\Delta \mathbf{u}_S + \bar{\mathbf{u}}_S) - \mathbf{u}_{\text{ref},S}] + \\ &+ [\mathbf{v}_S (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{\text{ref},S})]^T \mathbf{R}_{2,S} [\mathbf{v}_S (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{\text{ref},S})] + \\ &+ (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{\text{ref},S})^T \mathbf{R}_{3,S} (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{\text{ref},S}) + \\ &+ [\mathbf{A}_u (\Delta \mathbf{u}_S + \bar{\mathbf{u}}_S) - \mathbf{u}_{0,S}]^T \mathbf{Q}_S [\mathbf{A}_u (\Delta \mathbf{u}_S + \bar{\mathbf{u}}_S) - \mathbf{u}_{0,S}] \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{u}_{\text{ref},S} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{ref}} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{\text{ref}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{Q}_{\text{ref},S} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{ref}_{k+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_{\text{ref}_{k+N_p}} \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Nótese que no se ha incluido ningún término que penalice la falta de sincronización temporal, pero que esto podría hacerse de manera sencilla. Lo que se pretende aquí es mostrar, precisamente, que la heurística presentada en este trabajo permite desacoplar el seguimiento espacial de la trayectoria de la sincronización temporal. No obstante, si se desea incluir un término adicional con este propósito (como probablemente se haría en una implementación real a bordo de una aeronave), bastaría con penalizar la distancia a unos waypoints que recorran la trayectoria con la velocidad deseada.

En este caso, los factores de ponderación que se proponen son

$$f_{Q_{ref}} = 100, \quad f_{R_2} = 5, \quad f_{R_3} = 1, \quad f_Q = 30 \quad (3.97)$$

### 3.6.3 Función objetivo para el seguimiento de trayectorias generales

La misma estrategia que se acaba de comentar para el seguimiento de trayectorias de radio constante, basada en la penalización de la distancia a unos waypoints que se calculan a partir de la posición predicha, se puede aplicar al seguimiento de una trayectoria arbitraria. La única diferencia consistiría en que el cálculo de los waypoints, es decir, del punto de la trayectoria de referencia más cercano a uno dado, resulta algo más complicado.

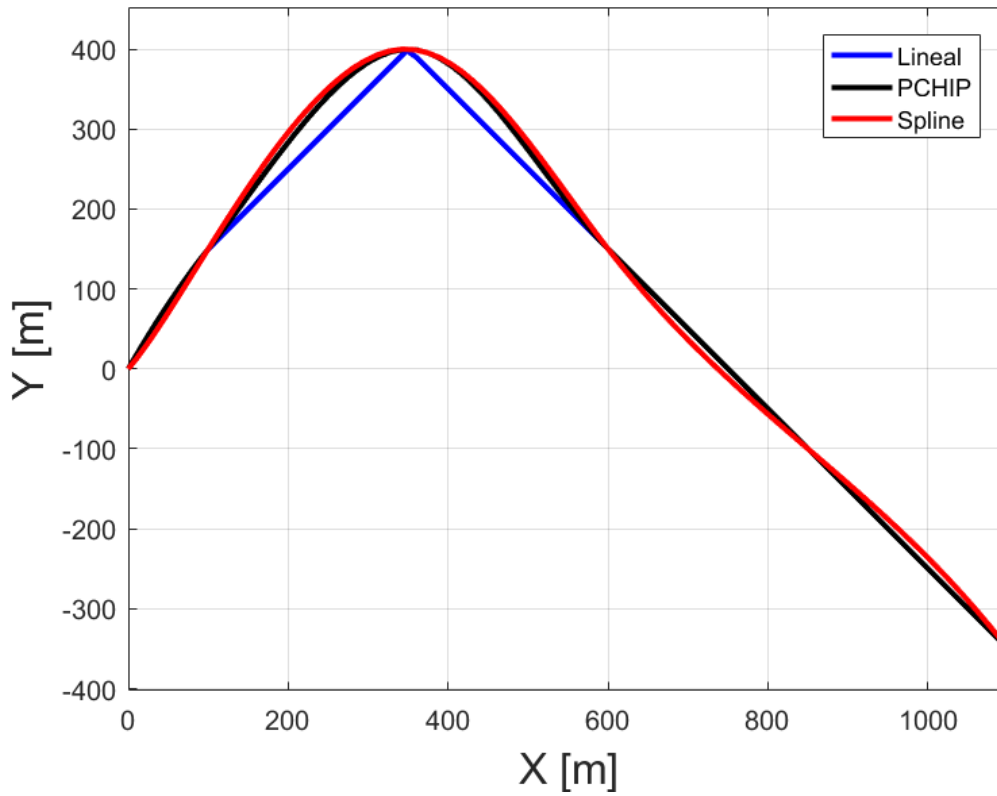
Para ello se ha utilizado la función de MATLAB *distance2curve*, elaborada por John D'Errico<sup>5</sup>. La función recibe como entrada las coordenadas de los puntos desde los que se quiere calcular la distancia, así como una serie de puntos pertenecientes a la trayectoria. Estos últimos se utilizan para aproximar la curva como una función polinómica a trozos de un cierto parámetro  $t$ , es decir, la curva  $C$  vendría dada por

$$C(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.98)$$

con  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$  y  $C_3(t)$  funciones polinómicas a trozos, estando los intervalos acotados por los puntos de entrada.

Como argumento de entrada adicional se indica la forma de la aproximación, que puede ser lineal, un spline cúbico o un interpolante cúbico de Hermite (a menudo denotado como PCHIP, *Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial*). En este trabajo se ha usado siempre, y se recomienda, una aproximación tipo PCHIP. La aproximación lineal, en general, ofrecerá una precisión insuficiente a menos que se de como entrada un número de puntos muy elevado. Frente al spline cúbico, el interpolante de Hermite tiene la ventaja de no presentar sobreoscilaciones. Este es un aspecto importante en el contexto del cálculo de los waypoints para el guiado y se puede apreciar en la figura 3.9.

<sup>5</sup> Se trata de una función que no está implementada en las librerías por defecto de MATLAB, pero que se puede descargar de manera gratuita a través de la página web de Mathworks, la compañía que comercializa este software



**Figura 3.9** Comparación de las distintas aproximaciones de la trayectoria.

La función objetivo se podría escribir, entonces, como

$$\begin{aligned}
 J_{k|general} = & [\mathbf{v}_S (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{ref,S})]^T \mathbf{R}_{2,S} [\mathbf{v}_S (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{ref,S})] + \\
 & + (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{ref,S})^T \mathbf{R}_{3,S} (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{ref,S}) + \\
 & + [\mathbf{A}_u (\Delta \mathbf{u}_S + \bar{\mathbf{u}}_S) - \mathbf{u}_{0,S}]^T \mathbf{Q}_S [\mathbf{A}_u (\Delta \mathbf{u}_S + \bar{\mathbf{u}}_S) - \mathbf{u}_{0,S}]
 \end{aligned}$$

con  $v_{k+i}$  y  $x_{ref,k+i}$  definidos como en (3.94).

Nótese nuevamente que no se ha incorporado ningún término adicional para la penalización de la falta de sincronización temporal, aunque podría hacerse de manera análoga a los casos anteriores.

Los factores de ponderación que se han usado en las simulaciones son

$$f_{R_2} = 10, \quad f_{R_3} = 1, \quad f_Q = 30 \quad (3.99)$$

### 3.6.4 Combinación de las distintas funciones objetivo

En las secciones 3.6.1, 3.6.2 y 3.6.3 se han presentados distintas expresiones de funciones objetivo, cada una de ellas especializada para el seguimiento de un tipo de trayectoria. Algunas de estas pueden realmente ser aplicadas a cualquier tipo de trayectoria, esto es, una trayectoria cualquiera puede ser aproximada mediante segmentos rectos (y usar, entonces, la función objetivo de seguimiento de trayectorias rectas) o la función para el el seguimiento de trayectorias generales puede también ser aplicada al caso particular de rectas o curvas de radio constante. En las secciones 4.1 y 4.2 pueden verse algunas comparaciones de los resultados obtenidos en estos casos. No obstante, lo más lógico sería usar cada función para el tipo de trayectoria o situación para el que ha sido ideada. Por tanto, lo usual sería definir trayectorias divididas en tramos, cada uno de los cuales se identifica bien como una recta o como una trayectoria de radio constante o como ninguna de ellas (se usaría, entonces, la función de guiado para trayectorias generales).

Surgen entonces dos nuevas cuestiones: determinar cuándo se produce el cambio de una función objetivo a otra y, dado que las funciones objetivo tienen términos asociados a cada uno de los instantes del horizonte de predicción, cuál usar cuando parte del horizonte corresponde a un tipo de tramo y otra parte corresponde a otro u otros.

En respuesta a la primera, se usará, una vez más, la propia predicción del estado. Para cada tramo se especificará una condición de final del mismo asociada a una coordenada. Cuando la predicción sobrepase por primera vez el valor de esa coordenada correspondiente al último punto del tramo, se iniciará el cambio de segmento y, por tanto, el cambio de función objetivo. Por ejemplo, en un tramo ascendente<sup>6</sup> la condición de final de tramo podría estar asociada a la coordenada  $z$ . De este modo, si las coordenadas del punto final del tramo son, por ejemplo,  $x = 0 \text{ m}$ ,  $y = 0 \text{ m}$ ,  $z = 50 \text{ m}$ , cuando la predicción supere los  $50 \text{ m}$  de altura (lo que debe suceder por primera vez en el último instante del horizonte de predicción) comenzará el cambio de segmento.

Un problema que en algunos casos aparece en sistemas de guiado con distintos modos de funcionamiento que cambian de uno a otro basándose en la posición (como la modificación de la función objetivo que aquí se ha comentado) es que la condición para el cambio puede no llegar a cumplirse. Para evitar este inconveniente, en el método propuesto se han tomado varias medidas:

- Cada segmento de la trayectoria debe ser monótonamente creciente en la coordenada especificada y se usa la aproximación PCHIP.
- En el caso de trayectorias de radio constante, solo se permite especificar como condiciones finales la coordenada  $z$  (solo si la trayectoria es ascendente o descendente) y el ángulo girado desde el inicio del tramo.

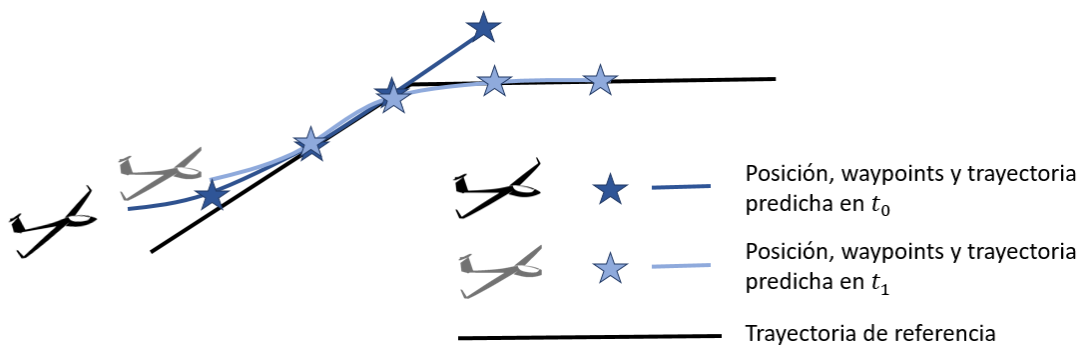
---

<sup>6</sup> Los tramos deberían definirse de tal manera que sean monótonamente crecientes en la coordenada especificada como condición final. La aproximación tipo PCHIP en trayectorias generales previene de transiciones prematuras de tramo debido a sobreoscilaciones en la propia aproximación.

- El método hace que la aeronave tienda a continuar siguiendo la prolongación del segmento definido hasta que se cumpla la condición de cambio.

La combinación de estas tres medidas debe ser suficiente para evitar el fenómeno antes comentado, siempre y cuando la trayectoria al completo sea realizable para la aeronave, teniendo en cuenta las limitaciones de la misma.

En cuanto a la segunda de las cuestiones anteriormente planteadas, una vez que el cambio ha comenzado, los términos de la función objetivo del segmento actual van siendo sustituidos por los términos de la función objetivo del nuevo segmento, comenzando por los asociados al último instante de la predicción. Así, en el instante de muestreo siguiente a aquel en el que se cumple la condición de cambio de segmento, los términos asociados a los dos últimos instantes del horizonte de predicción corresponderán a la función objetivo del nuevo segmento. En la siguiente llamada al algoritmo de guiado serán los términos asociados a los tres últimos instantes los que habrá cambiado y así sucesivamente<sup>7</sup>. Esta situación se ilustra en la figura 3.10.



**Figura 3.10** Esquema de la combinación de funciones objetivo. En el instante  $t_0$ , la última predicción supera la altura final del primer tramo, que se había definido como condición de cambio. En el instante  $t_1$ , los dos últimos términos de la función objetivo corresponden al seguimiento del siguiente tramo de trayectoria.

### 3.6.5 Término para vuelo a TAS constante

Como ya se ha explicado, los términos de las funciones objetivo presentados hasta el momento tienen en cuenta tres aspectos, que son: seguimiento espacial de la trayectoria, sincronización temporal con la referencia y eficiencia del control. En concreto, los términos asociados a la sincronización temporal penalizan la distancia a un punto de seguimiento o punto de referencia que representa la posición que ocuparía la aeronave en cada instante si la sincronización temporal fuera perfecta. Hay que señalar que este punto de seguimiento recorre la trayectoria con una velocidad respecto a tierra definida. En su cálculo no se tiene en cuenta la existencia de viento y, de hecho, no se está trabajando con una estimación

<sup>7</sup> Se están suponiendo intervalos de muestreo constantes a lo largo del horizonte de predicción.

explícita de la magnitud y dirección del viento, solo con su efecto en el estado a través del estimador de perturbaciones (que también engloba otros posibles tipos de perturbaciones). La presencia de viento, por tanto, daría lugar a que, si la sincronización temporal tal y como se ha definido fuera perfecta, la velocidad aerodinámica fuera, en general, variable.

Como alternativa de este seguimiento de la trayectoria a velocidad respecto a tierra definida, se van a añadir términos adicionales que permitan que la trayectoria se recorra con una velocidad aerodinámica constante. Puesto que la velocidad aerodinámica es una de las variables de estado ( $V$ ), este objetivo se logrará penalizando la diferencia entre las TAS predicha y la de referencia en cada instante del horizonte de predicción<sup>8</sup>. Así pues, los nuevos términos tendrán la forma

$$J_{5,k} = \sum_{i=1}^{N_p} [\mathbf{v}_{k+i} (\mathbf{x}_{k+i|k} - \mathbf{x}_{\text{ref},k+i})]^T R_{5,k+i} [\mathbf{v}_{k+i} (\mathbf{x}_{k+i|k} - \mathbf{x}_{\text{ref},k+i})] \quad (3.100)$$

donde  $R_{5,k+i}$  es un escalar con la ponderación del error en velocidad aerodinámica en el instante  $k+i$  mientras que  $\mathbf{v}_k$  y  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  se definen de la forma

$$\mathbf{v}_k = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad ; \quad \mathbf{x}_{\text{ref}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ V_{\text{ref}}]^T \quad (3.101)$$

Se puede comprobar que la forma de los términos para vuelo a TAS definida de la ecuación (3.100) es análoga a la de los términos para vuelo a velocidad respecto a tierra definida de la ecuación (3.74). Únicamente varían la definición de los vectores  $\mathbf{v}_k$  y  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  y el valor del factor de ponderación  $R$ . Por lo tanto, la definición de las matrices finales que se usan para escribir la función objetivo de forma compacta como en la ecuación (3.78) son idénticas (y de hecho todos los términos podrían combinarse en una única matriz, aunque aquí no se ha hecho por claridad). Por lo tanto, se tendría que

$$J_{5,k} = [\mathbf{v}_S (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta u_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{\text{ref},S})]^T \mathbf{R}_{5,S} [\mathbf{v}_S (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta u_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S - \mathbf{x}_{\text{ref},S})] \quad (3.102)$$

Por último, solo faltaría especificar el valor de  $R_{5,k+i}$ . Este se ajustará en el capítulo 4 en base a los resultados de las simulaciones.

### 3.7 Cálculo de la señal de control

Una vez presentados y definidos todos los elementos que componen el esquema de guiado basado en control predictivo, se va a proceder a exponer el algoritmo final mediante el cual el sistema de guiado calcula las señales de control que serán enviadas como consignas al sistema de control de actitud.

<sup>8</sup> Otra opción sería incluir la ecuación  $V_k = V_{\text{ref}}$  como una restricción en la optimización. No obstante, esto puede resultar excesivamente limitante y hacer que no se encuentren soluciones factibles al problema de optimización

La clave de este algoritmo, propuesto en [1], es que, a diferencia de otros que se pueden encontrar en la literatura, permite resolver un problema de control predictivo no lineal aplicado al guiado de aviones sin necesidad de acudir a métodos de optimización no lineales. Así, se sigue un proceso iterativo en el que, en cada iteración, el problema se linealiza en torno a una referencia obtenida de la solución de la iteración anterior y se resuelve con técnicas de programación cuadrática. En este sentido, vale la pena decir que la linealización realizada es explícita, lo que redundará en una alta eficiencia computacional.

Adicionalmente, se mantiene un algoritmo de guiado proporcional basado en fuerzas (también desarrollado en [1]) como método para inicializar el proceso iterativo y como solución de respaldo por si este falla. Esto permite mejorar las prestaciones del sistema de guiado respecto al guiado proporcional (ya que el guiado predictivo implica una optimización de una función de coste), pero manteniendo en todo momento una solución factible que pueda ser usada en caso de fallo en el proceso de optimización.

El esquema básico del algoritmo puede resumirse en los siguientes pasos:

### 1. Llamada al estimador de perturbaciones.

Se usa el procedimiento especificado en la sección 3.3 para calcular el vector de perturbaciones en el estado,  $\delta_S$ , a partir de la diferencia entre la predicción para el instante actual y el estado real medido. Si, por ser la primera llamada al sistema de guiado, no se dispone de ninguna predicción, se considera que la perturbación es nula (se inicializa  $\delta_S$  como un vector de ceros de las dimensiones adecuadas).

### 2. Obtención de una solución inicial.

La solución de partida del proceso iterativo en cada llamada al guiado se calcula, si es posible, mediante dos métodos.

- a) *Guiado Proporcional*: se usa de manera secuencial la ley de guiado proporcional en cada instante del horizonte de predicción.
  - I. A partir de la medida del estado, se calculan las señales  $a_k$ ,  $\gamma_k$  y  $\phi_k$  según la ley de guiado proporcional. La consigna de aceleración proporcionada por el guiado proporcional se considera nula, dado que este trabaja con velocidades constantes.
  - II. Usando las ecuaciones (3.12), (3.14), (3.15), (3.16) y (3.17) con  $a_k = 0$  se calculan las variables de estado estimadas en el instante  $k + 1$ . Estas ecuaciones están detalladas en (3.103) – (3.107).
  - III. A partir de estas nuevas variables de estado, se vuelve a aplicar el algoritmo de guiado proporcional para calcular las señales de control en el instante  $k + 1$ .

IV. Se sigue iterando de esta forma hasta llegar al horizonte de predicción. El resultado es una secuencia de señales de control  $\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{k+N_p-1}$ .

$$x_{k+1} = \frac{\cos \gamma_k V_k^2}{g \tan \phi_k} \left[ \sin \left( \frac{g \tan \phi_k T_s}{V_k} + \chi_k \right) - \sin \chi_k \right] + x_k \quad (3.103)$$

$$y_{k+1} = \frac{\cos \gamma_k V_k^2}{g \tan \phi_k} \left[ \cos \chi_k - \cos \left( \frac{g \tan \phi_k T_s}{V_k} + \chi_k \right) \right] + y_k \quad (3.104)$$

$$z_{k+1} = -T_s \sin \gamma_k V_k + z_k \quad (3.105)$$

$$\chi_{k+1} = \frac{g \tan \phi_k T_s}{V_k} + \chi_k \quad (3.106)$$

$$V_{k+1} = V_k \quad (3.107)$$

b) *Guiado predictivo*: si existe una solución anterior del algoritmo de guiado predictivo, se realiza un desplazamiento de la secuencia de controles anterior, de forma que  $\mathbf{u}_{k+i} = \tilde{\mathbf{u}}_{k+i+1}$  (donde  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  denota el vector de control calculado en la ejecución anterior del controlador predictivo para el instante  $i$ ). Las señales de control en el último instante del horizonte de predicción,  $\mathbf{u}_{k+N_p}$ , se calculan mediante el algoritmo de guiado proporcional.

En este caso, se puede seleccionar como solución inicial aquella que tenga un coste menor: la solución anterior de guiado predictivo, adaptada, o bien la solución de guiado proporcional expuesta anteriormente.

### 3. Linealización del problema a partir de la secuencia inicial de controles.

Usando los métodos de la sección 3.2, se linealizan las ecuaciones del movimiento del avión, llegando a la ecuación de predicción del estado apilado a lo largo de todo el horizonte de predicción (3.37),  $\mathbf{x}_S = \mathbf{F} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u}_S + \mathbf{G}_\delta \delta_S$ .

### 4. Factibilización del problema.

Se utilizan las medidas propuestas en la sección 3.5 para tratar de garantizar que el problema de optimización es factible.

### 5. Resolución del problema de optimización.

Considerando el modelo de predicción (3.37), las restricciones (3.55) y (3.60) y la función objetivo (3.78), (3.95), (3.99) o combinación de ellas, se puede establecer el siguiente problema de optimización para calcular el incremento de señales de control (respecto de la secuencia de referencia o solución inicial, para todo el horizonte de predicción)  $\Delta \mathbf{u}_S$  que minimice la función de coste

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_S} \quad & J(\mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{u}_S) & (3.108) \\ \text{s.a.} \quad & \max(\mathbf{u}_{min} - \bar{\mathbf{u}}_k, -\delta \mathbf{u}) \leq \Delta \mathbf{u}_k \leq \min(\mathbf{u}_{max} - \bar{\mathbf{u}}_k, \delta \mathbf{u}) \\ & \mathbf{A}_c \Delta \mathbf{u}_S \leq \mathbf{b}_c \end{aligned}$$



En caso de que el proceso de optimización resulte fallido, se interrumpe este algoritmo, y se implementan las señales de control asociadas a la solución de menor coste de la que se disponga hasta el momento.

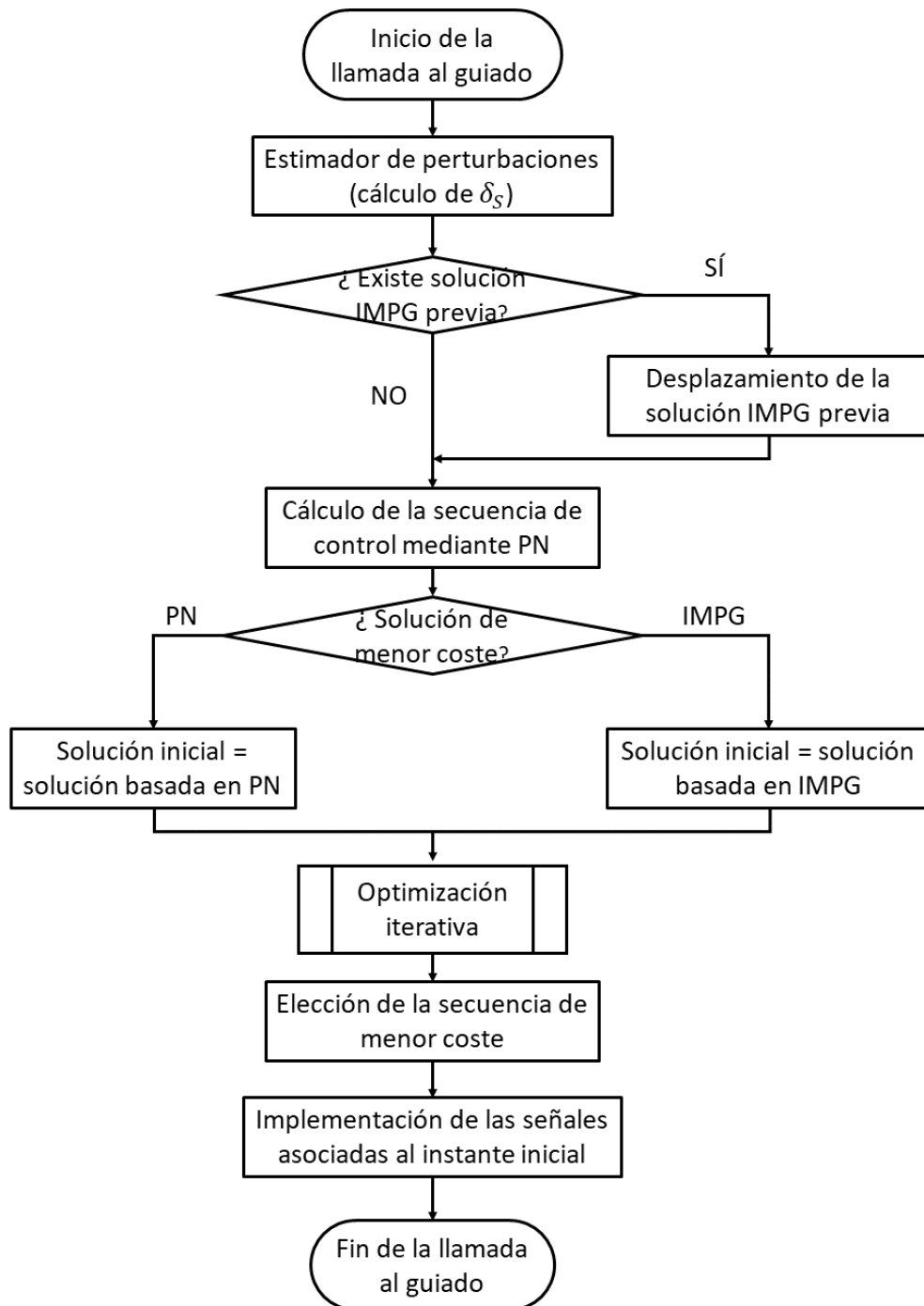
La secuencia de control final será  $\mathbf{u}_S = \bar{\mathbf{u}}_S + \Delta\mathbf{u}_S$ , donde  $\Delta\mathbf{u}_S$  es la solución del problema de optimización descrito en (3.108) y  $\bar{\mathbf{u}}_S$  es la secuencia de señales de control de referencia (la solución inicial) en torno a la cual se ha realizado la linealización.

## 6. Actualización de la condición inicial e iteración.

Se toma la solución del proceso de optimización anterior  $\mathbf{u}_S$  como secuencia inicial de señales de control (o la del guiado proporcional si tuviera un coste menor). Se vuelve al punto 2 para linealizar el problema en torno a esta nueva solución inicial y se vuelve a optimizar. Se sigue iterando hasta converger o hasta alcanzar un número máximo de iteraciones.

Al final de este proceso de optimización iterativo se seleccionará la secuencia de señales de control  $\mathbf{u}_S$  a lo largo de todo el horizonte de predicción de menor coste como solución óptima. De este vector apilado, las únicas consignas enviadas al sistema de control de actitud serán las tres primeras señales de control, es decir, la aceleración, ángulo de trayectoria y ángulo de balance iniciales que comenzarían la secuencia óptima de control. Transcurrido un cierto tiempo, este proceso se repite y se calculan unas nuevas señales de control, de acuerdo con la implementación de horizonte deslizante. El diagrama de flujo del algoritmo aparece representado en la figura 3.11 y 3.12.

Aunque estos aspectos no aparecen explícitamente en el esquema anterior, hay que puntualizar que, como los waypoints que usan las nuevas funciones objetivo y las restricciones en la aceleración dependen de la predicción, estos podrían recalcularse en cada iteración. No obstante, las simulaciones han mostrado que es preferible hacerlo solo una vez por llamada al guiado (usando la predicción correspondiente a la secuencia de controles óptima de la llamada anterior). Los cambios continuos de la función objetivo y de las restricciones pueden dificultar la convergencia y afectarían negativamente a la robustez del algoritmo, puesto que una mala predicción podría tener un efecto desestabilizante.



**Figura 3.11** Diagrama de flujo de la optimización iterativa. Las iniciales PN se refieren al método de guiado proporcional, mientras que IMPG hace referencia al método de guiado basado en control predictivo.

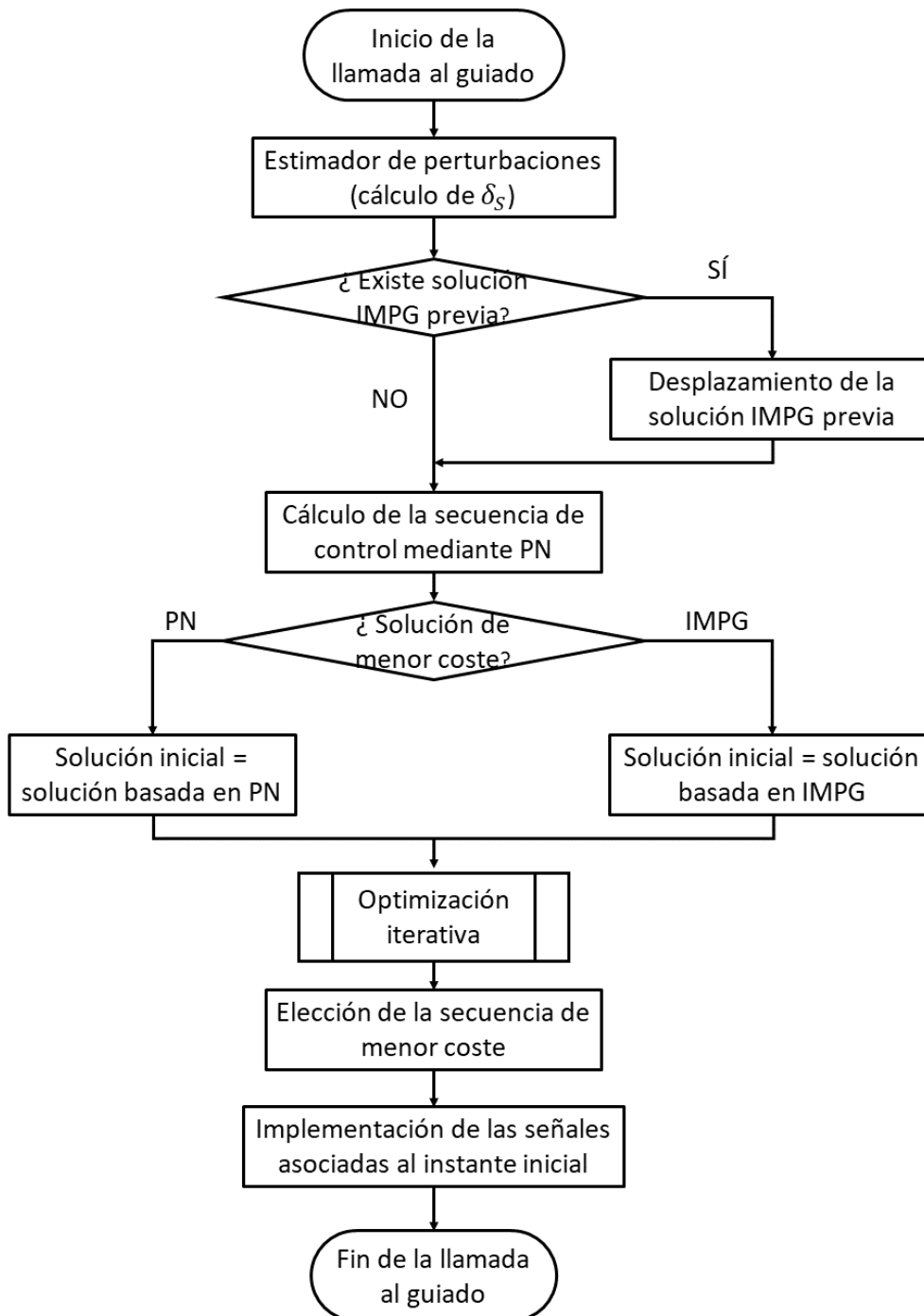


Figura 3.12 Diagrama de flujo del algoritmo de guiado predictivo.



# 4 Resultados

---

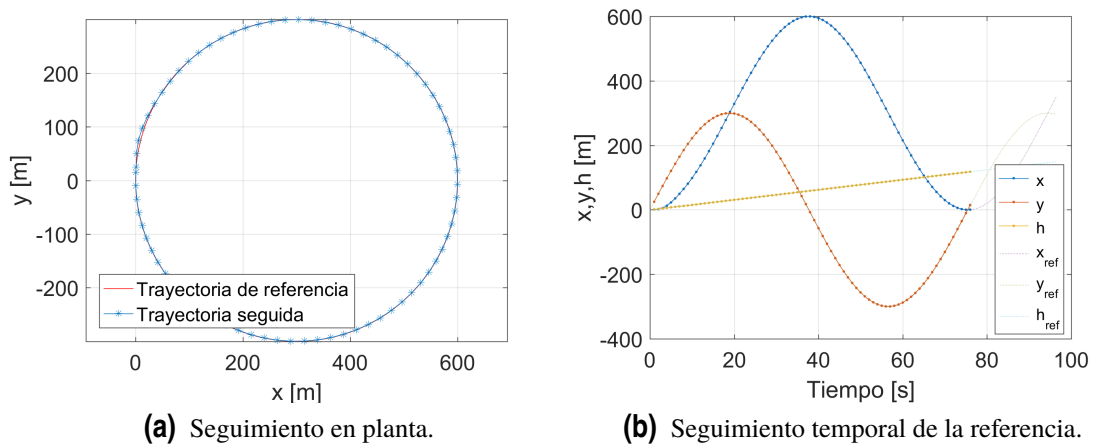
En esta sección se recogen y analizan los resultados de las simulaciones llevadas a cabo. Estas incluyen trayectorias de radio constante, trayectorias generales y trayectorias formadas por segmentos de distinto tipo. En particular, se hace especial hincapié en la comparación de las prestaciones del sistema en función de la configuración (función objetivo) empleada en cada caso. Además de esto, se realiza también una calibración y posterior evaluación de la eficacia de la nueva funcionalidad del sistema que permite el vuelo a TAS constante. Finalmente, todo esto se acompaña de una validación cuyo objetivo es comprobar la adecuación de la formulación propuesta para el cálculo de los límites en la aceleración.

Es importante señalar que todas las simulaciones emplean un modelo de avión de 6 grados de libertad con un alto nivel de realismo para simular la respuesta de la aeronave de la forma más precisa posible. Este modelo incluye aerodinámica y efectos propulsivos no lineales, saturaciones en los controles y un controlador de bajo nivel que refleja el hecho de que las señales de control del guiado (que realmente son "pseudoseñales" de control, porque no son variables sobre las que se suponga que se puede actuar de manera directa en el sistema de control de vuelo) no se implementan de manera inmediata, ya que el control de actitud tiene sus propios tiempos de respuesta. Con esto, se trata de conseguir el máximo grado de realismo posible, haciendo que los resultados obtenidos sean un buen indicativo de las prestaciones del sistema de guiado basado en control predictivo en un caso práctico.

## 4.1 Trayectoria de radio constante

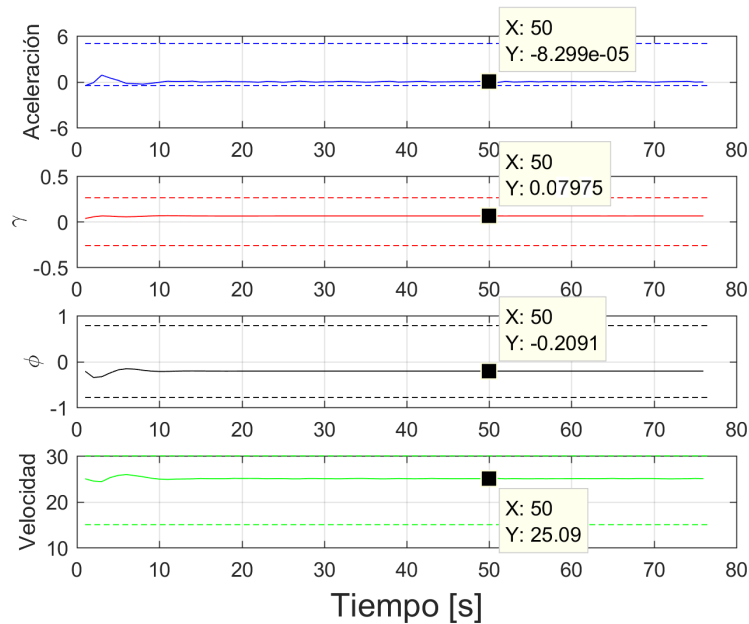
### Análisis de las prestaciones del guiado

En primer lugar se va a simular el seguimiento de una trayectoria de radio constante. Se trata de una hélice ascendente con un radio  $R = 300 \text{ m}$  y una diferencia de alturas por vuelta  $\Delta h = 150 \text{ m/rev}$ , que se desea recorrer con una velocidad respecto a tierra  $V_g = 25 \text{ m/s}$ .



**Figura 4.1** Seguimiento de la trayectoria de radio constante sin viento.

La figura 4.1 corresponde a un caso sin viento y muestra que, de manera global, el seguimiento de la trayectoria cuando se usa la función objetivo propuesta es bueno. La hélice se recorre en sentido horario (viraje a derechas), comenzando en el punto de coordenadas  $x = 0, y = 0, z = 0$ . En la proyección en planta (figura 4.1a) solo se puede ver una pequeña desviación, apenas perceptible en la imagen, al inicio de la trayectoria. Esto se debe, en este caso, a que la aeronave parte de unos ángulos de balance y trayectoria nulos y tarda un tiempo en adquirir los valores adecuados de estas variables, puesto que sus variaciones están penalizadas en la función objetivo. Como consecuencia, la trayectoria real queda por fuera de la de referencia en el inicio. En la figura 4.1b se puede ver que el seguimiento en altitud también es bueno y que se está manteniendo la sincronización temporal con la referencia.



**Figura 4.2** Variables de control y velocidad aerodinámica en un caso sin viento.

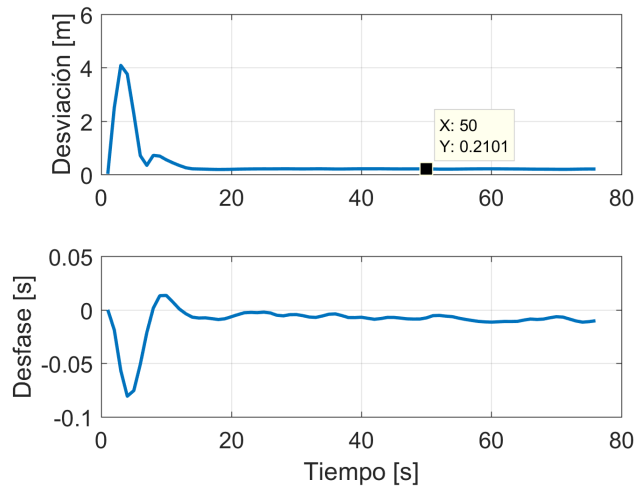


Figura 4.3 Desviación y desfase en un caso sin viento.

En la figura 4.2 se pueden observar los valores de las variables de control y de la velocidad en cada instante. Las líneas discontinuas en estas gráficas representan los límites operativos de estas magnitudes que se establecieron en la sección 3.4. La adaptación de las variables desde sus valores iniciales se realiza moderadamente, en unos 10 segundos. A partir de entonces, los valores son muy próximos a los que se podrían calcular como referencia: aceleración nula y velocidad aerodinámica constante (por serlo la velocidad respecto a tierra y no haber viento), ángulo de balance  $\phi_{ref} = -\tan^{-1}(V_g^2/Rg) = -0.2093 \text{ rad}$ , de acuerdo con la ecuación 3.89) y ángulo de trayectoria  $\gamma_{ref} = \sin^{-1}(\Delta h/2\pi R) = 0.0797 \text{ rad}$ , según la ecuación 3.90.

Por otro lado, la figura 4.3 muestra la desviación y el desfase respecto a la trayectoria de referencia en función del tiempo. La desviación se ha definido como la distancia entre la posición real de la aeronave y la trayectoria de referencia. El desfase, por su parte, se ha calculado como el tiempo que se tarda en recorrer la distancia entre la posición de deseada de la aeronave en un momento dado y el punto de la trayectoria de referencia más cercano a la posición real, a la velocidad de referencia. Un desfase positivo indica que la aeronave está adelantada respecto a la referencia temporal, mientras que un desfase negativo significa que está atrasada. Un esquema puede verse en la figura 4.4. Esta representación resulta muy útil para ver la magnitud de las desviación al inicio de la trayectoria, que llega a los 4 m y también para comprobar que el seguimiento, una vez superado este transitorio, es muy bueno, con un error de apenas 20 cm.

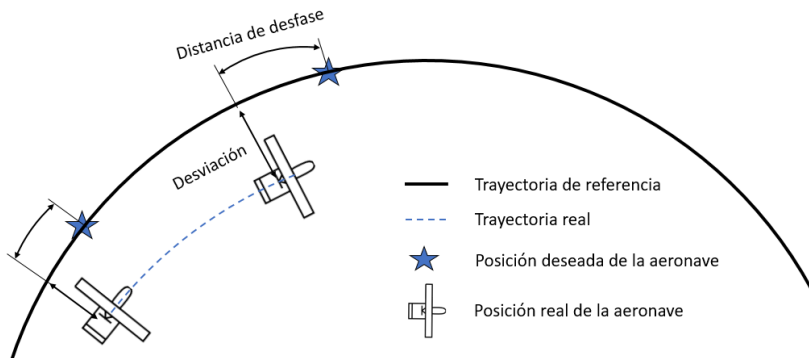
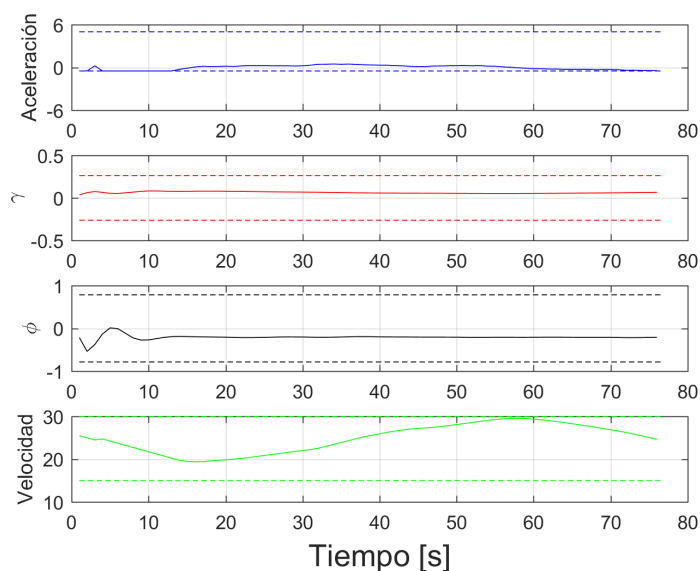
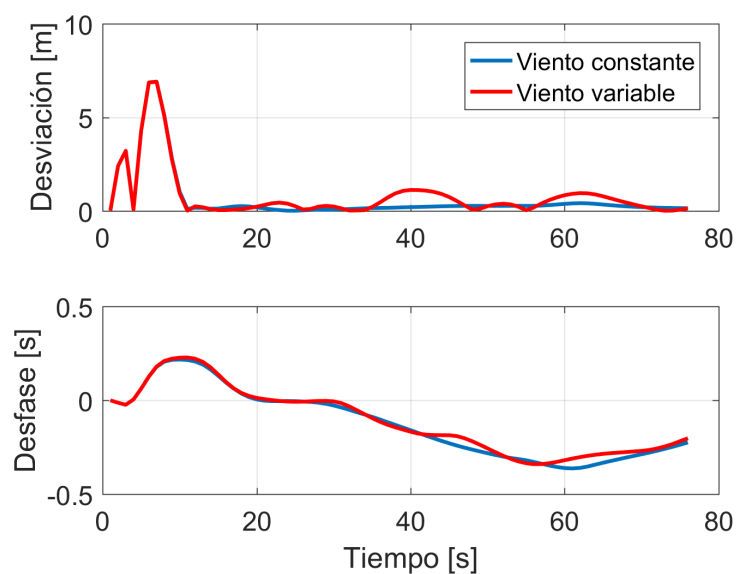


Figura 4.4 Esquema ilustrativo de la desviación y el desfase.

El seguimiento de esta misma trayectoria ha sido simulado también incluyendo dos tipos de viento horizontal: un viento constante y un viento variable. El viento constante sopla hacia la derecha y su velocidad se ha modificado de unas simulaciones a otras. El viento variable se ha obtenido sumando a cada componente del constante un ruido blanco de varianza 0.0001 multiplicado por la velocidad del viento y con una saturación de  $\pm 3 \text{ m/s}$ .



**Figura 4.5** Variables de control y velocidad aerodinámica para viento de  $5 \text{ m/s}$ .



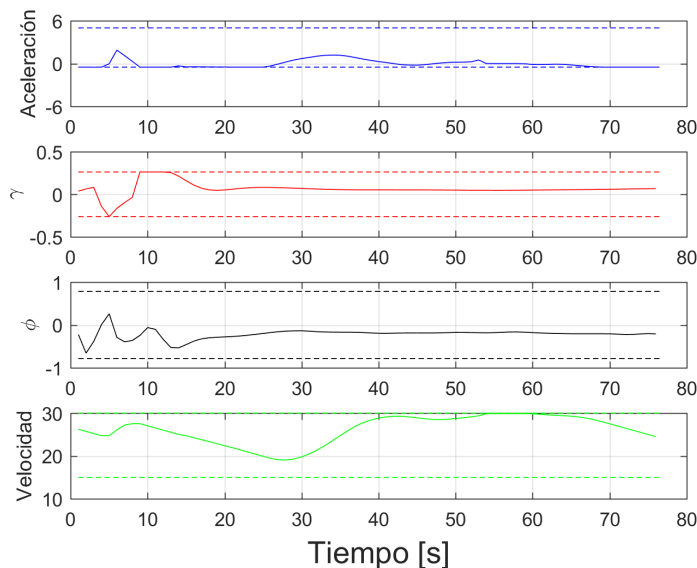
**Figura 4.6** Desviación y desfase para viento de  $5 \text{ m/s}$ .

Para una intensidad del viento constante de  $5 \text{ m/s}$  (figura 4.5), las restricciones no están activas, salvo la aceleración en los instantes iniciales. Las velocidad aerodinámica varía, puesto que, a medida que se recorre la hélice con velocidad respecto a tierra constante, la aeronave gira y la dirección relativa del viento cambia. En la gráfica de la desviación (figura 4.6) se puede ver nuevamente un periodo inicial de adaptación: además del efecto



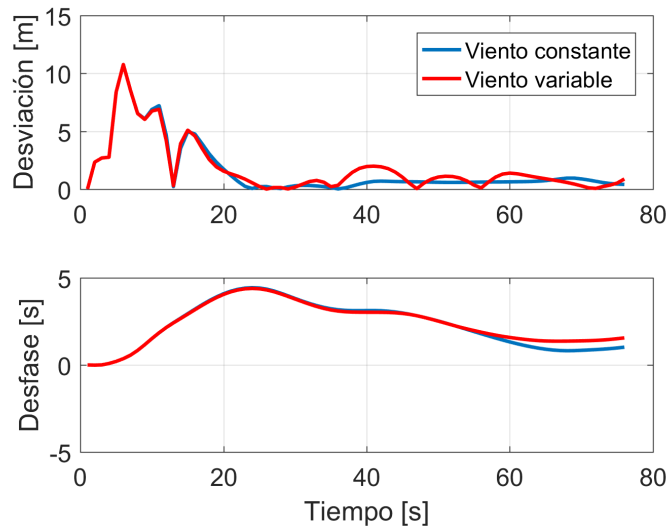
de las condiciones iniciales de la aeronave en la simulación que se comentó anteriormente, en el instante inicial no se dispone de estimaciones de las perturbaciones. Esto hace que las primera predicción sea poco acertada y, en consecuencia, que la aeronave se aleje de la referencia por un tiempo. No obstante, el seguimiento es muy bueno en el caso con viento constante y algo peor (como es lógico, dadas las condiciones), aunque aceptable en el caso con viento variable. Finalmente, se puede decir que para esta magnitud del viento y para las limitaciones operativas consideradas, es posible mantener la sincronización temporal y de hecho esto se hace con bastante precisión, tal y como muestra la gráfica del desfase.

En las figuras 4.7 y 4.8 se pueden observar los mismos resultados para una intensidad del viento constante de  $8\text{ m/s}$ . En esta ocasión sí se puede ver que las restricciones asociadas a las limitaciones operativas están activas durante una buena parte del tiempo. Este es el caso de la aceleración, al principio, y de la velocidad aerodinámica, posteriormente. En términos de la desviación, esto tiene dos consecuencias: la desviación máxima es mayor y el valor medio de la misma, una vez pasado el pico inicial, también lo es. Lógicamente, al ser el viento más intenso, el efecto de no tener estimaciones al inicio es más severo y además no es posible corregirlo tan rápidamente a causa de las limitaciones operativas.



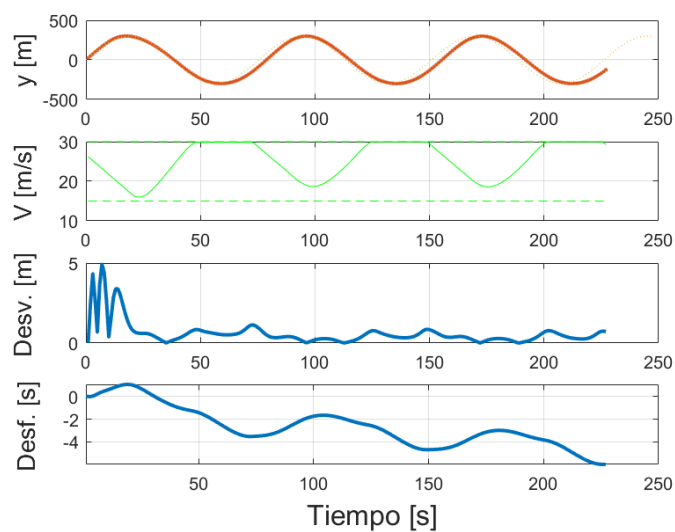
**Figura 4.7** Variables de control y velocidad aerodinámica para viento de  $8\text{ m/s}$ .

En cuanto al desfase, mantener la sincronización temporal, para una velocidad respecto a tierra de  $25\text{ m/s}$  y una velocidad del viento de  $8\text{ m/s}$  implicaría que necesariamente algunas partes de la trayectoria deberían realizarse a TAS superior a  $30\text{ m/s}$  (cuando el viento está de cara). Por lo tanto, mantener el seguimiento espacial y la sincronización temporal es imposible en este caso. La única opción que no requiere desviarse de la trayectoria es disminuir la velocidad respecto a tierra en los tramos en los que el viento de cara obligue a ello (esto es, cuando su magnitud sea tal que mantener la velocidad respecto a tierra haría que se violaran las restricciones), lo que hará que disminuya el desfase. En caso de que el viento de cola fuera lo suficientemente fuerte, habría que obrar de manera contraria.



**Figura 4.8** Desviación y desfase para viento de  $8 \text{ m/s}$ .

La figura 4.9 muestra con más detalle la relación entre la parte de la trayectoria en la que se encuentra la aeronave, la velocidad aerodinámica y el desfase, a lo largo de varias vueltas. Cuando la aeronave está en la parte inferior de la trayectoria, el viento viene de cara y el sistema de guiado se ve obligado a disminuir la velocidad respecto a tierra para mantener la velocidad aerodinámica dentro de los límites operativos, disminuyendo el desfase (es decir, haciéndose más negativo, quedando la aeronave más retrasada respecto a la referencia temporal). Por contra, en el resto de la trayectoria el desfase oscila, pero no presenta una disminución o aumento neto significativo. Independientemente del desfase, la desviación se mantiene en valores bajos, por lo que se puede concluir que la función objetivo para seguimiento de trayectorias de radio constante cumple eficazmente el objetivo de desacoplar el seguimiento espacial y la sincronización temporal.



**Figura 4.9** Coordenada  $y$ , velocidad aerodinámica, desviación y desfase para viento de  $8 \text{ m/s}$ .

## Comparación de funciones objetivo para el seguimiento de trayectorias de radio constante

Ahora se va a proceder a contrastar los resultados obtenidos utilizando distintas funciones objetivo. En este caso se simularán trayectorias horizontales de diferentes radios, todas ellas recorridas con una velocidad respecto a tierra objetivo  $V_g = 25 \text{ m/s}$ . En los casos con viento, este será constante para que no haya diferencias en los resultados debidas a su variabilidad.

Las funciones objetivo que se van a comparar son:

- Función objetivo de seguimiento de trayectorias de radio constante con  $f_{Q_{ref}} = 100$ ,  $f_{R_2} = 5$  y  $f_{R_3} = 1$ . Este caso será referido en las figuras como "Función objetivo  $\phi$ " porque penaliza principalmente la diferencia entre el ángulo de balance real y el de referencia. La función completa puede verse en la sección 3.6.2.
- Función objetivo de seguimiento de trayectorias rectas con  $f_{R_1} = 10$ ,  $f_{R_2} = 0$  y  $f_{R_3} = 1$ . Para usar esta función se discretiza la trayectoria en segmentos rectos definidos por la posición de referencia de la aeronave cada  $0.1 \text{ s}$  y se penaliza la distancia a las rectas a las que pertenecen dichos segmentos. Se nombrará este caso como "Función objetivo recta". La expresión al completo de la función se encuentra en la sección 3.6.1.
- Función objetivo de seguimiento de trayectorias de radio constante no cuadrática  $f_{Q_{ref}} = 0$ ,  $f_{R_1} = 10$  y  $f_{R_3} = 1$ . Se trata de una función objetivo cuyos términos asociados al seguimiento espacial penalizan directamente el cuadrado de la diferencia entre la distancia de la aeronave al centro de la trayectoria y el radio de la misma, según la expresión (3.87). Aparecerá señalizada en las gráficas como "Función objetivo no QP" puesto que, como ya se comentó, da lugar a un problema de optimización que no se puede resolver con técnicas de programación cuadrática. Como se demostrará más adelante, el uso de esta función objetivo en el sistema de guiado no es viable debido al excesivo tiempo de computación que requiere, por lo que se incluirá principalmente como referencia.

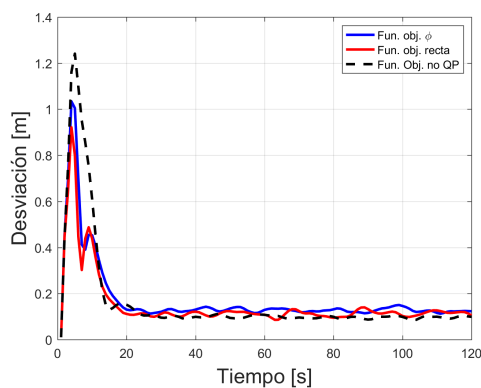
En todos los casos, el factor para la penalización del control será  $f_Q = 30$ .

Se van a tener en cuenta tres parámetros. El primero de ellos será la desviación máxima cuando se considera la simulación al completo. Como se ha mostrado anteriormente, esta desviación máxima se produce cerca del inicio de la trayectoria y está relacionada con la adaptación del guiado desde unas condiciones iniciales dadas, tanto de la aeronave como del propio algoritmo y su estimador de perturbaciones. Este parámetro se interpretará como una medida de la capacidad del sistema de guiado para hacer frente a perturbaciones.

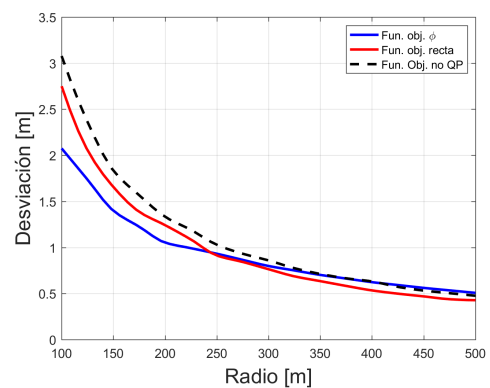
El segundo parámetro será la desviación media teniendo en cuenta solo aquella parte de la trayectoria que se realiza después de completar la primera vuelta. Con esto se pretende obviar el efecto de las condiciones iniciales y evaluar las prestaciones del sistema en régimen permanente.

Por último, el tercer parámetro será la desviación máxima después de la primera vuelta. Aún en lo que se ha denominado régimen permanente, la desviación puede variar sensiblemente de unas partes de la trayectoria a otras. Esto se debe a que, como ya se explicó anteriormente, la dirección relativa del viento cambia a medida que la aeronave va girando y esto puede influir en que las restricciones asociadas a las limitaciones operativas se activen o no.

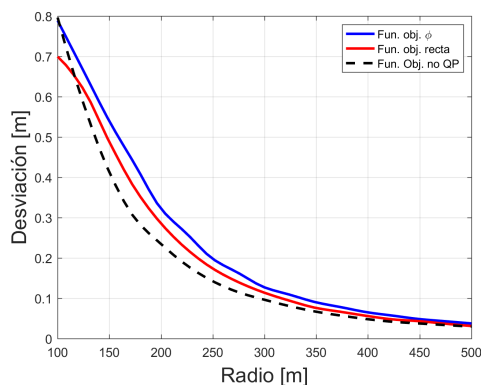
La figura 4.10 muestra la comparación de los resultados obtenidos en ausencia de viento. Todas las funciones objetivo dan lugar a un comportamiento bastante parecido y satisfactorio en la totalidad de los casos, con los tres parámetros comentados mejorando paulatinamente a medida que aumenta el radio y la trayectoria se vuelve más suave.



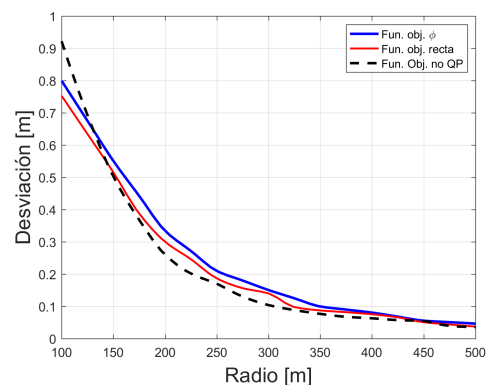
(a) Desviación en cada instante para radio  $R = 300$ .



(b) Desviación máxima.



(c) Desviación media tras la primera vuelta.



(d) Desviación máxima tras la primera vuelta.

**Figura 4.10** Comparación de funciones objetivo en un caso sin viento.

En presencia de un viento de  $5\text{ m/s}$  (figura 4.11) las diferencias entre las funciones objetivo son algo mayores, principalmente en los parámetros que miden el comportamiento tras la primera vuelta. Para radios pequeños, por debajo de los  $200\text{ m}$ , el método de discretizar la trayectoria en segmentos rectos es el que mejor resultados proporciona (obviando la función objetivo no cuadrática, que no es útil en la práctica). Para radios de viraje mayores, por contra, es la función objetivo específica para seguimiento de trayectorias de radio constante la que proporciona los mejores resultados.

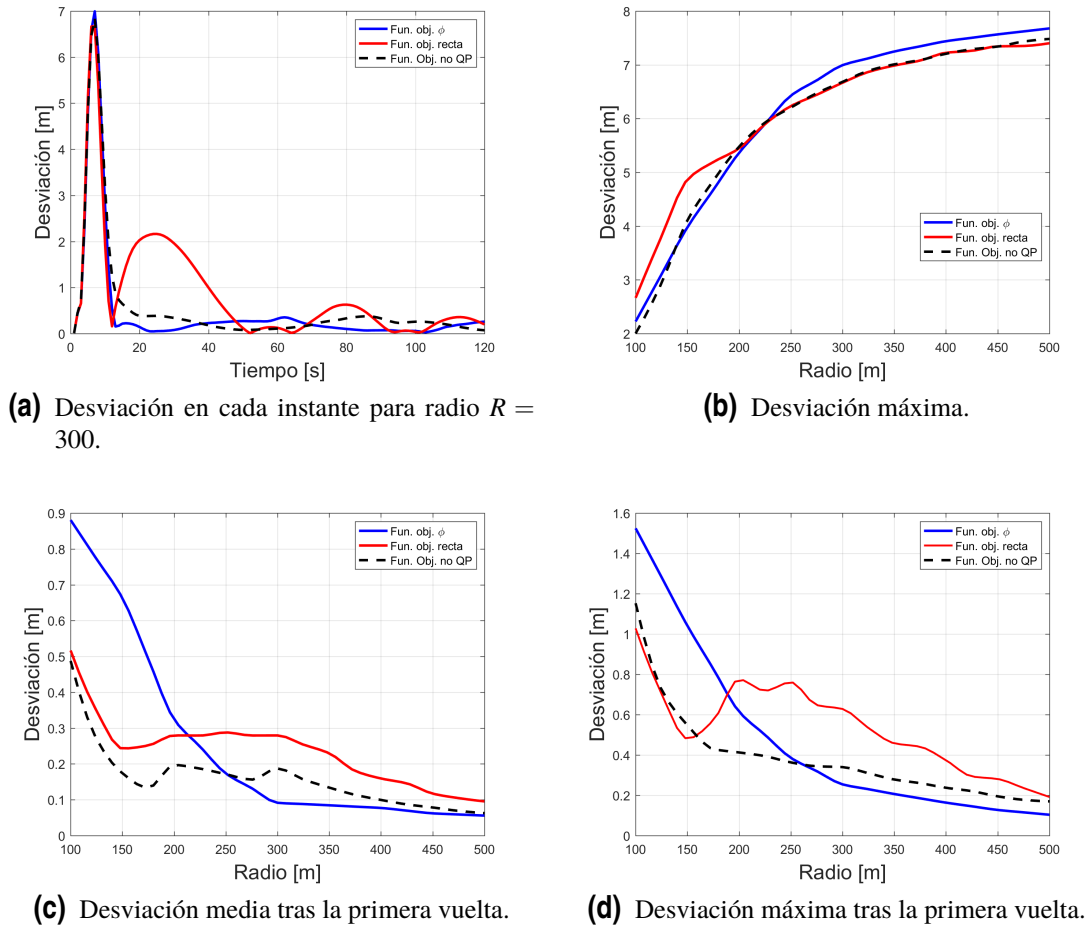


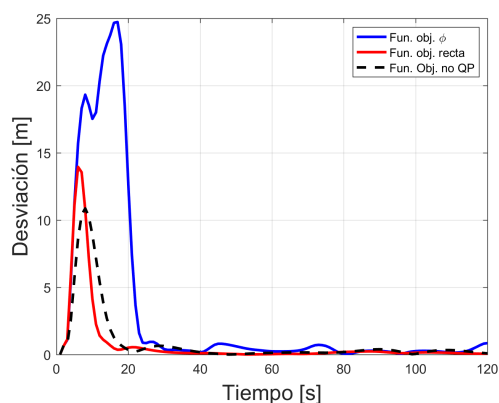
Figura 4.11 Comparación de funciones objetivo para viento de  $5\text{ m/s}$ .

La última comparación se tiene para un viento de  $10\text{ m/s}$ . Las desviaciones máximas en este caso son bastante grandes, aunque hay que tener en cuenta que se trata de un caso de viento un tanto extremo para la aeronave que se está considerando (se tiene un efecto similar al de una ráfaga lateral de  $10\text{ m/s}$ ). Por lo demás, exceptuando los casos de trayectorias con radios muy pequeños, en torno a los  $100\text{ m}$ , los resultados con la función objetivo basada en el seguimiento de segmentos rectos son buenos y muy próximos a los de la función objetivo no cuadrática. Aquí hay que mencionar que la función de seguimiento de segmentos rectos, tal y como fue implementada en [1] y [2], se basaba en el tiempo para seleccionar qué tramo recto, de aquellos en los que se divide la trayectoria, se sigue en cada instante. Esta técnica resulta inadecuada en casos como este, en los que no se

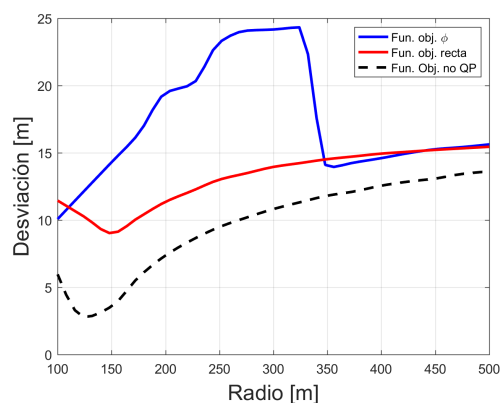
puede mantener la sincronización temporal. Por este motivo, la función ha sido modificada para elegir los segmentos basándose en la posición predicha, eligiendo el segmento más próximo en cada instante del horizonte de predicción y renovando la selección en cada iteración.

En cuanto a la función objetivo para seguimiento de trayectorias de radio constante resulta, casi siempre, más pobre que las otras, especialmente cuando se presta atención a la desviación máxima.

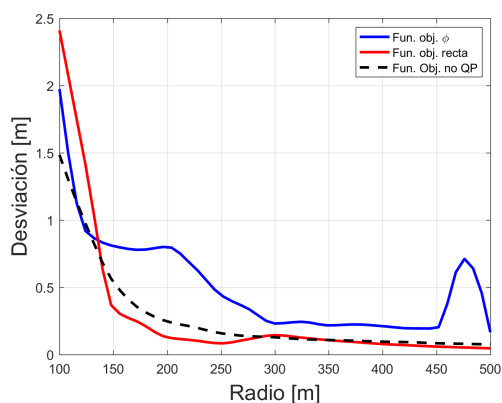
Como conclusión de esta comparación, en base a los resultados obtenidos no se puede asegurar que la función objetivo propuesta para el seguimiento de trayectorias de radio constante proporcione unas prestaciones mejores, en general. Lo que sí queda demostrado es la alta versatilidad del sistema de guiado basado en control predictivo y, en particular, de la función objetivo para seguimiento de segmentos rectos, que ha proporcionado unas prestaciones muy buenas en todas las situaciones.



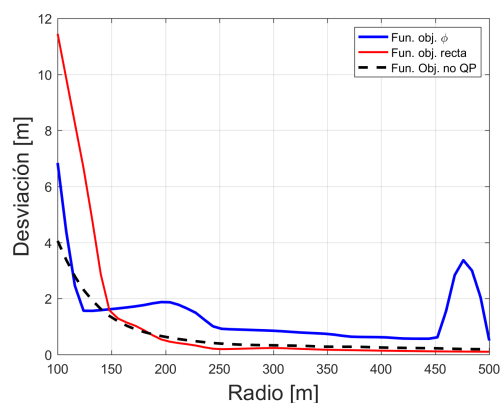
**(a)** Desviación en cada instante para radio  $R = 300$ .



**(b)** Desviación máxima.



**(c)** Desviación media tras la primera vuelta.



**(d)** Desviación máxima tras la primera vuelta.

**Figura 4.12** Comparación de funciones objetivo para viento de  $10 \text{ m/s}$ .

## Tiempo de cálculo

Anteriormente ya se puso de manifiesto la importancia del tiempo de cálculo en un esquema de control predictivo, ya que se explicó que el tiempo de computación debe ser inferior al intervalo de muestreo para que las señales de control calculadas puedan implementarse antes de comenzar el cálculo de las correspondientes al siguiente periodo. En cualquier caso, hasta que el problema de optimización asociado no haya sido resuelto, las señales de control resultantes no pueden ser enviadas como consignas al sistema de control de actitud. Esto supone que hay un retraso entre el instante para el que se han calculado las señales y el instante en el que se aplican, el cual será, como poco, igual al tiempo de cálculo del algoritmo de control predictivo. Para evaluar el efecto que este puede tener, se ha introducido un retraso constante con distintos valores en el modelo de simulación. Los resultados, en términos de la desviación, pueden verse en la figura 4.13, para una trayectoria de radio  $R = 300 \text{ m}$  y sin viento.

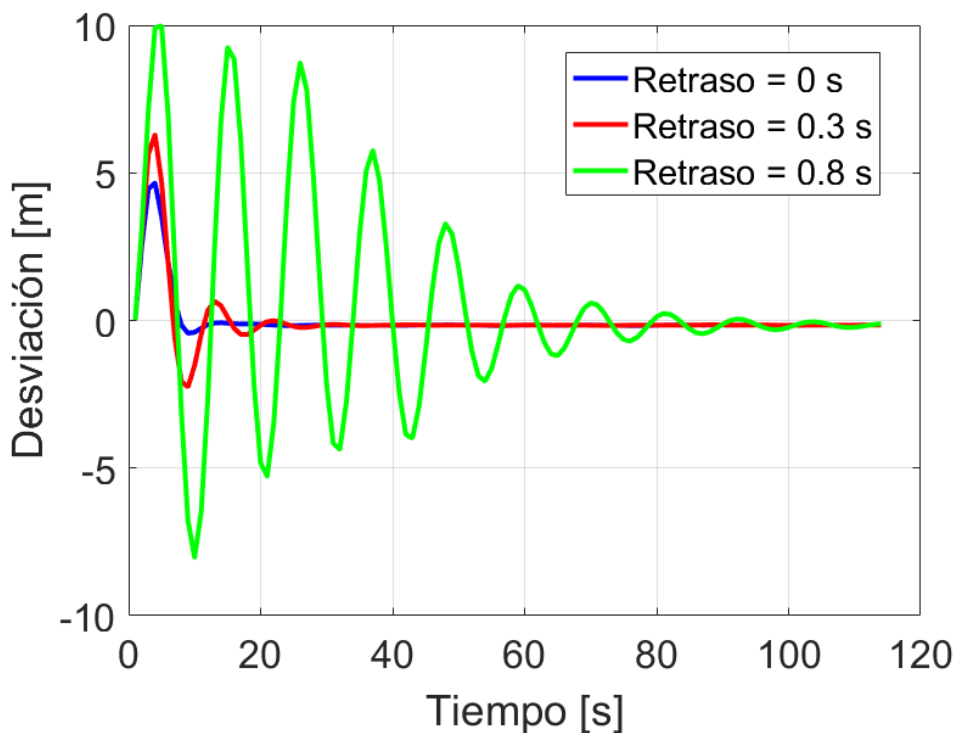


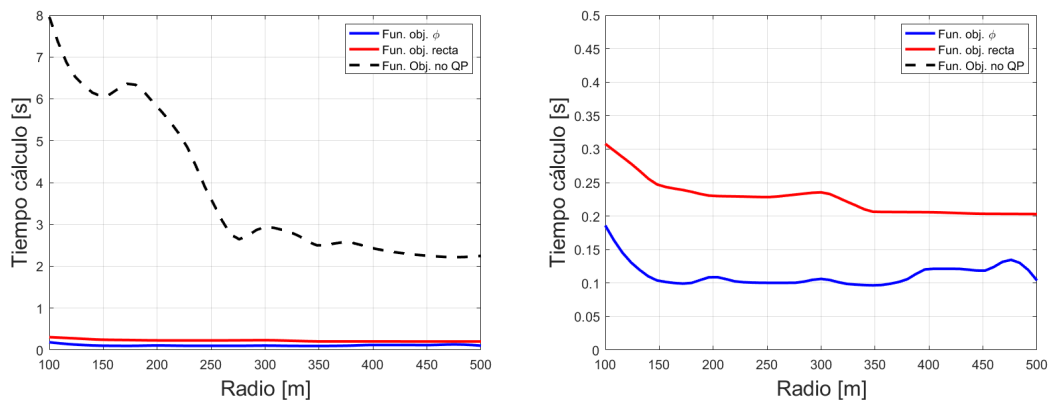
Figura 4.13 Desviación para distintos valores del tiempo de cálculo.

La disminución de las prestaciones a medida que aumenta el retraso resulta evidente. Aunque el tiempo de computación es muy sensible a la plataforma y la implementación concreta del algoritmo, el retraso de  $0.3 \text{ s}$  es el que se considera más representativo del sistema propuesto. Para retrasos superiores a  $0.8 \text{ s}$  (que, en este caso, correspondería a un 80% del tiempo de muestreo) el efecto es tan severo que el sistema termina por volverse inestable.

Para comprobar que, de acuerdo con esto, el uso de una función objetivo no cuadrática no resulta práctico, se ha realizado una comparación de los tiempos de cálculos medios por llamada al guiado para distintos valores del radio de la trayectoria. Hay que mencionar aquí que se ha empleado un ordenador portátil con procesador Intel Core i7-6700HQ de 2.6GHz y recordar que el algoritmo ha sido implementado en MATLAB.

La comparación puede verse en la figura 4.14. El tiempo de cálculo tiende a aumentar, en general, a medida que se disminuye el radio. Este efecto se debe a que la perturbación debida al viento tiene mayor importancia para radios pequeños. Al ser menor el radio, la dirección relativa del viento varía más de un instante de muestreo al siguiente. Esto hace que las predicciones sean menos acertadas y se requiera un mayor número de iteraciones para converger a una nueva solución a partir de la calculada en el instante anterior, especialmente en los casos en los que la aeronave está muy cerca de sus límites de operación.

Como se había adelantado, el tiempo de cálculo con una función no cuadrática resulta excesivo en todas las simulaciones, incluso arrancando el proceso iterativo de cálculo de las señales de control con la solución obtenida con una de las funciones cuadráticas, debido al alto tiempo de cálculo por iteración. En cambio, con las funciones cuadráticas, el tiempo de cálculo parece razonable, siendo menor para la función objetivo basada en penalizar la diferencia de ángulo de balance. De acuerdo con los resultados de la figura 4.13, cabe esperar que, si en una implementación real estos tiempos se mantienen, el impacto en las prestaciones del sistema no sea muy severo.



(a) Variación del tiempo de cálculo medio con el radio. (b) Detalle de la variación del tiempo de cálculo.

**Figura 4.14** Comparación de los tiempos de cálculos medios por llamada al guiado para viento de 10  $m/s$ .

A pesar de estos resultados, se ha tratado de reducir el tiempo de cálculo cuando se emplea la función no cuadrática disminuyendo el número de variables en la optimización. Un posible método para lograr este objetivo consistiría en simplemente reducir el horizonte de predicción. Esto supone, lógicamente, un ahorro de coste computacional, aunque el sistema de guiado pierde capacidad para adaptarse a los cambios de la trayectoria y esto puede influir negativamente en las prestaciones.



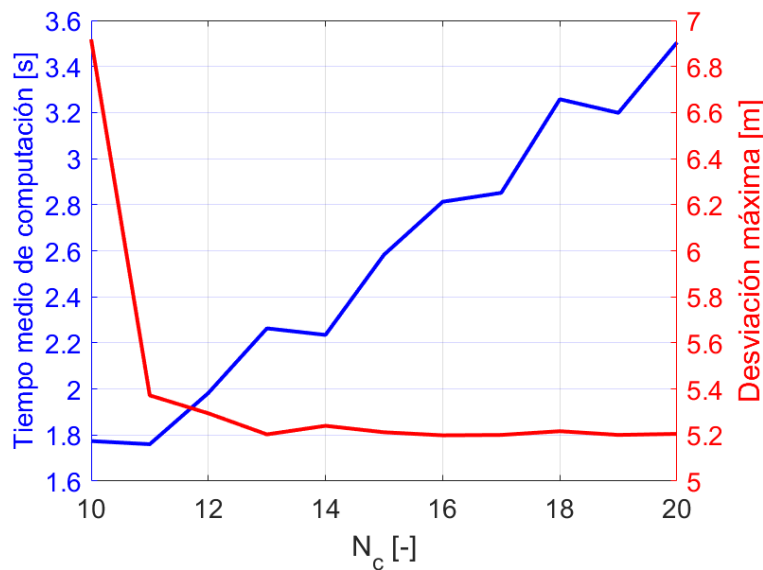
Como alternativa, se ha elegido emplear un horizonte de control,  $N_c$ , distinto al horizonte de predicción,  $N_p$ , sin cambiar el valor de este último. Esto quiere decir que se optimizará la función objetivo para exactamente los mismos instantes de predicción, pero se reducirá el número de grados de libertad en la optimización al hacer que no todas las señales de control sean independientes (típicamente, se tendrán señales de control constantes durante varios periodos de predicción). Matemáticamente, esto se consigue sustituyendo el vector apilado de variaciones en las señales de control,  $\Delta \mathbf{u}_S$  por una versión reducida del mismo,  $\Delta \mathbf{u}_{S_{\text{red}}}$ , en las ecuaciones del problema. Este vector reducido contiene únicamente las señales de control independientes y se relacionará con el vector completo linealmente:

$$\Delta \mathbf{u}_S = \mathbf{A}_{\text{red}} \Delta \mathbf{u}_{S_{\text{red}}} \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{A}_{\text{red}}$  es una matriz de dimensiones  $N_p n_u \times N_c n_u$ , siendo  $n_u$  el número de variables de control (3 en este trabajo).

Existen muchas posibilidades a la hora de elegir la matriz  $\mathbf{A}_{\text{red}}$ , esto es, de fijar la relación entre las señales de control en los distintos instantes. En este caso, se partirá de una situación con  $N_c = N_p = 20$ , en cuyo caso  $\mathbf{A}_{\text{red}}$  es la matriz identidad. A partir de ahí, se irá reduciendo  $N_c$  de modo que las variaciones de las señales de control en los instantes de predicción pares sean iguales a las correspondientes a los instantes impares, empezando por el final del horizonte de predicción. Esto se consigue tomando bloques formados por matrices identidad de dimensiones  $n_u \times n_u$  y desplazándolos  $n_u$  columnas a la izquierda.

Los resultados, para una trayectoria de radio  $R = 300 \text{ m}$  y con viento de  $5 \text{ m/s}$  se muestran en la figura 4.15. El tiempo de cálculo medio por llamada al guiado efectivamente tiende a disminuir al hacerlo el horizonte de predicción  $N_c$ , aunque en algunos casos no resulta así, puesto que puede aumentar el número de iteraciones necesarias para converger al coste óptimo. No obstante, incluso disminuyendo a la mitad el número de variables en la optimización, el tiempo de cálculo sigue siendo excesivo.

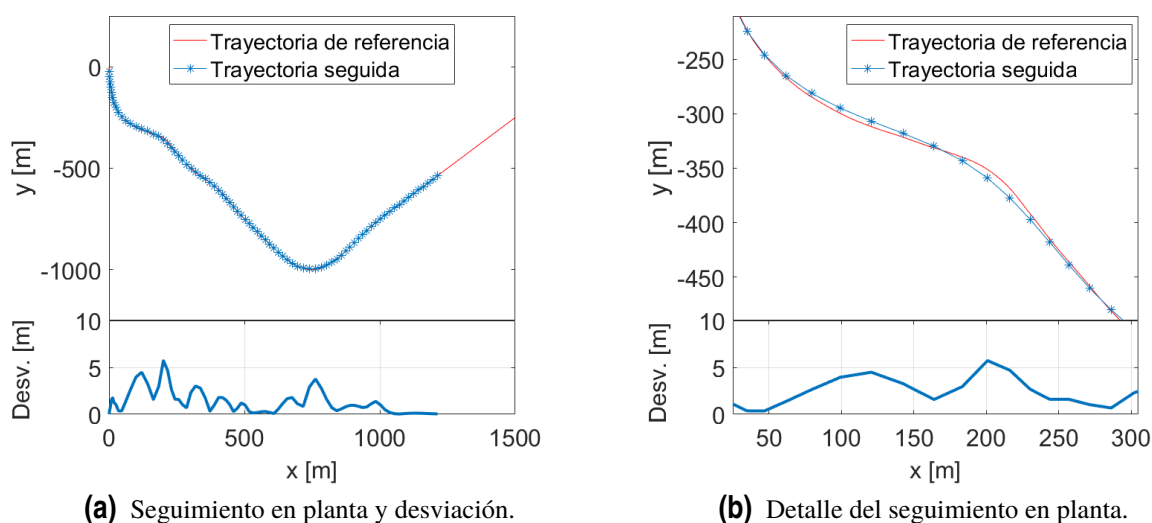


**Figura 4.15** Tiempo de cálculo medio por llamada al guiado y desviación máxima para distintos valores de  $N_c$ .

La gráfica de la desviación máxima permite ver que el impacto en las prestaciones del sistema debido a la reducción de grados de libertad puede ser apreciable. Por debajo de  $N_c = 13$ , la desviación máxima aumenta rápidamente, ya que los cambios comienzan a afectar a las señales de control más próximas al instante presente, que es típicamente cuando la aeronave se encuentra más alejada de su referencia y se requieren más acciones de control. Aunque los resultados pueden variar considerablemente con diferentes distribuciones de tiempos de muestreo y con otras relaciones entre las señales, no parece conveniente reducir en mayor medida el horizonte de control, por lo que el uso de una función objetivo no cuadrática, dentro de este esquema de guiado, sigue presentándose inviable. Los artículos sobre control predictivo que plantean un problema de optimización no lineal emplean descripciones mucho más simples de la aeronave (por ejemplo, en [4] se consideran la altura y la velocidad como constantes, por lo que queda el rumbo como única variable de decisión) y no hacen uso de una linealización explícita del modelo que deba repetirse tras cada optimización. Aunque ambos enfoques puede resultar adecuados, la combinación de modelo linealizado y función objetivo o restricciones no lineales no parece prometedora en el contexto de este trabajo, a la vista de los resultados.

## 4.2 Trayectoria general

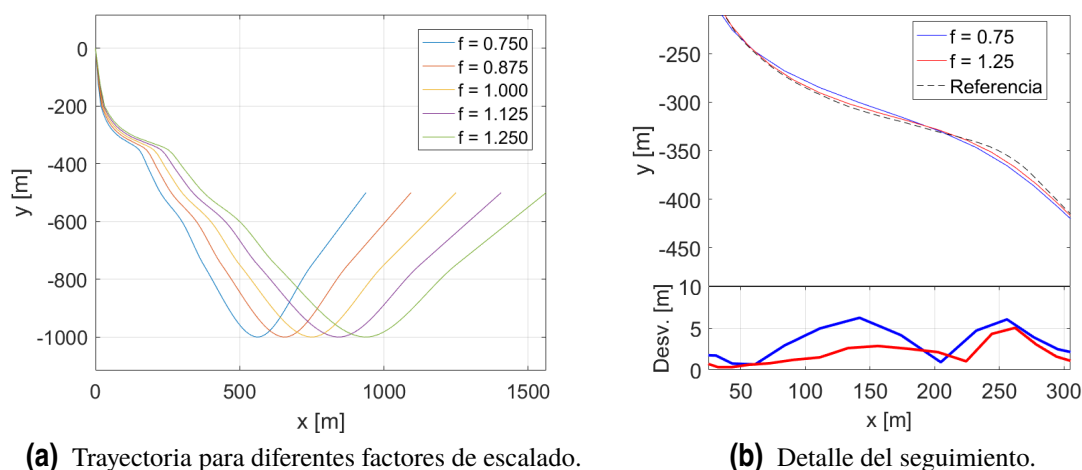
En esta sección se va a sustituir la trayectoria de radio constante anterior por una trayectoria de radio variable definida a partir de las coordenadas de algunos de sus puntos. La trayectoria se recorrerá a una velocidad respecto a tierra constante  $V_g = 25 \text{ m/s}$  y no se incluirá viento en las simulaciones. La función objetivo empleada es la descrita en la sección (3.6.3).



**Figura 4.16** Seguimiento en planta para una curva general.

Globalmente, el seguimiento es bueno (ver figura 4.16). Las mayores desviaciones de la trayectoria se producen en las partes con menor curvatura de la misma. Este efecto se debe, mayormente, a que el compromiso entre economía en el control y seguimiento preciso de la trayectoria se consigue a costa de un cierto suavizado de esta. Este efecto puede reducirse aumentando el factor de ponderación de los términos de la función objetivo asociados al seguimiento o, equivalentemente, disminuyendo el factor que penaliza el uso del control (esto es, la aceleración y las variaciones del ángulo de balance o de trayectoria).

Para analizar en mayor profundidad este aspecto del sistema de guiado, se ha utilizado una familia de curvas similares, obtenidas multiplicando la coordenada  $x$  de los puntos que definen la trayectoria por un factor de escalado  $f$ . Las curvas obtenidas para varios valores de  $f$  pueden verse en la figura 4.17a.



(a) Trayectoria para diferentes factores de escalado.

(b) Detalle del seguimiento.

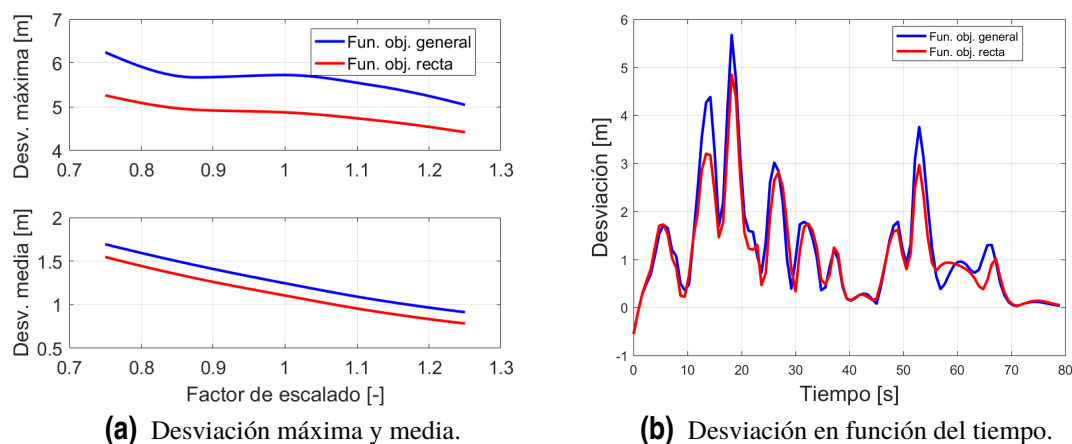
**Figura 4.17** Trayectoria para diferentes factores de escalado y detalle del seguimiento.

Para hacer comparables los resultados, el eje  $x$  se ha vuelto a escalar usando el factor inverso,  $1/f$ , tras completar la simulación. Como era de esperar, el seguimiento es considerablemente más preciso cuando la curva es más abierta (figura 4.17b).

Al igual que en la sección 4.1, se ha hecho una comparativa de las características del seguimiento cuando se utilizan distintas funciones objetivo. Los casos comparados son:

- Función objetivo para seguimiento de trayectorias generales con  $f_{R_2} = 10$ ,  $f_{R_3} = 1$  y  $f_Q = 30$ . Se trata de la función descrita en la sección 3.6.3 y se identificará en las gráficas como "Función objetivo general".
- Función objetivo de seguimiento de trayectorias rectas con  $f_{R_1} = 10$ ,  $f_{R_2} = 0$ ,  $f_{R_3} = 1$  y  $f_Q = 30$ , discretizando la trayectoria en segmentos rectos definidos por la posición de referencia de la aeronave cada 0.1 s. Se nombrará este caso como "Función objetivo recta".

En esta ocasión, el uso de una función objetivo no cuadrática da lugar a un problema de optimización cuyo tiempo de resolución resulta demasiado grande, incluso para las simulaciones. Los algoritmos numéricos de optimización realizan un elevado número de evaluaciones de la función objetivo (para unas tolerancias moderadas, habitualmente se requieren miles de evaluaciones). En este caso, la función objetivo es mucho más costosa de evaluar que la utilizada para trayectorias de radio constante, puesto que requiere calcular la distancia de  $N_p$  puntos (la posición de la aeronave en cada instante de muestreo del horizonte de predicción) a una curva general (la trayectoria) aproximada por funciones cúbicas. Un valor orientativo de cuánto tarda este cálculo podría ser 0.2 s. Este tiempo resulta razonable si lo que se desea es calcular los waypoints que se usarán en la siguiente llamada al guiado, en el contexto de la función objetivo cuadrática de la sección 3.6.3. De hecho, el cálculo podría realizarse a modo de “postproceso” una vez resuelto el problema de optimización y antes de que se realice la próxima llamada al guiado, sin tener efecto sobre las prestaciones. No obstante, para una optimización no lineal, necesitando miles de evaluaciones por optimización y realizando varias optimizaciones, de forma iterativa, por instante de muestreo, este coste de evaluación da lugar a unos tiempos de simulación muy poco prácticos cuando se considera una trayectoria completa.

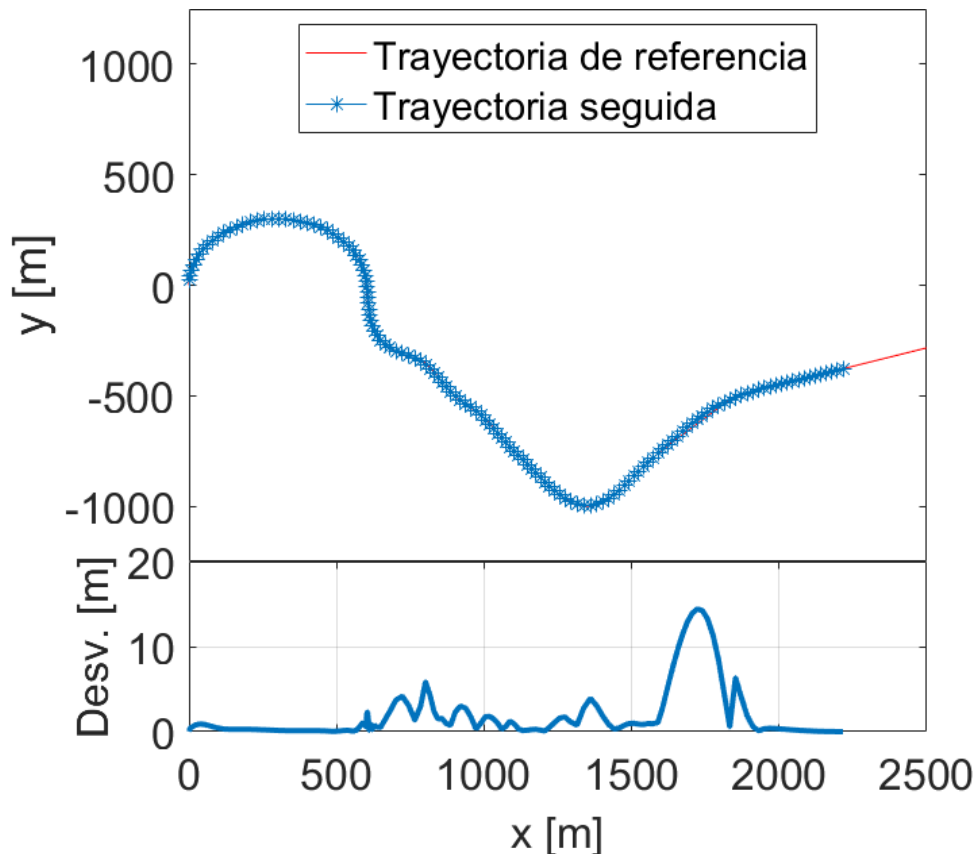


**Figura 4.18** Comparación del seguimiento para distintas funciones objetivo.

Los resultados de la comparación se recogen en la figura 4.18. La diferencia fundamental está en que el método basado en la discretización en segmentos rectos parece ajustarse mejor a la trayectoria en las zonas de mayor curvatura, lo que dan lugar a unas desviación máxima del orden de un metro menor y a pequeñas mejoras en la desviación media. También estas gráficas sirven para ver que el seguimiento es bueno en toda la familia de curvas de la figura 4.17a, demostrando una vez más la bondad y versatilidad del sistema de guiado basado en control predictivo.

### 4.3 Trayectoria compuesta por distintos tramos

Para testar el método de combinación de funciones objetivo cuando se tienen trayectorias compuestas por distintos tramos se ha utilizado una combinación de una sección en espiral (1<sup>er</sup> tramo), seguido por una curva definida por las coordenadas de varios puntos (2<sup>o</sup> tramo) que enlaza finalmente con un segmento recto (3<sup>er</sup> tramo).



**Figura 4.19** Seguimiento en planta y desviación para una trayectoria compuesta por distintos tramos.

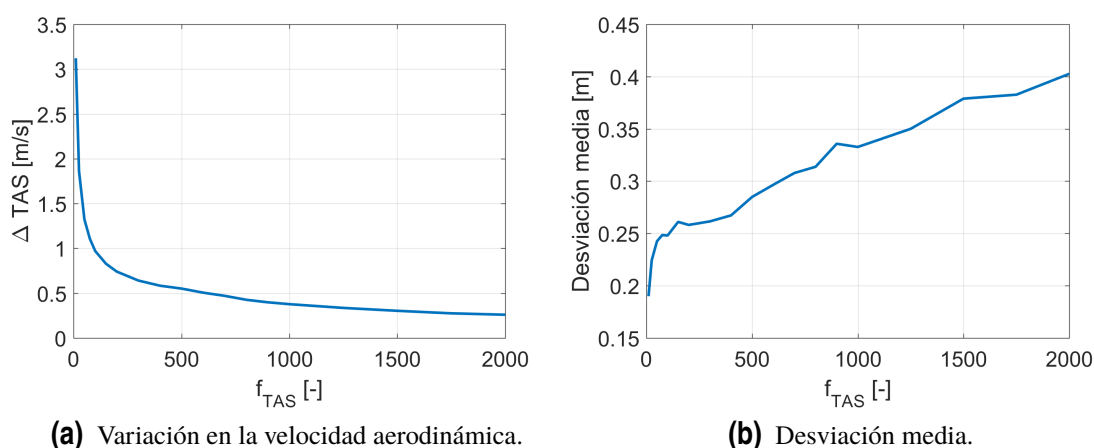
En la figura 4.19 se puede ver que, a simple vista, el seguimiento es bueno. Cuando la conexión entre segmentos es aproximadamente tangente el algoritmo es capaz de ceñirse a la trayectoria con gran precisión. Este es el caso de la transición entre el primer y segundo tramos, en los que solo habría un cambio, no excesivamente grande, en el ángulo de trayectoria (de  $\gamma = 4.5$  a  $\gamma = 0$ ). Cuando la conexión es más abrupta, dado que los cambios repentinos de dirección son físicamente irrealizables, el guiado hace que la aeronave los lleve a cabo de manera gradual, separándose de la referencia. De ahí que la máxima desviación suceda en las inmediaciones de la transición entre el segundo y el tercer tramo, donde tiene lugar un cambio de rumbo de unos 42.5

Se tienen, por tanto, unos resultados lógicos que contribuyen a validar los métodos implementados para la combinación y la transición entre funciones objetivo diferentes.

## 4.4 Vuelo a TAS constante

En primer lugar, se ha realizado un estudio paramétrico para elegir el peso de los términos de la función objetivo que penalizan la diferencia entre la velocidad aerodinámica predicha y la de referencia,  $f_{TAS}$ . Para este estudio se ha considerado una trayectoria horizontal de radio constante  $R = 300 \text{ m}$ . Se ha fijado una velocidad aerodinámica objetivo  $V = 25 \text{ m/s}$  y un viento horizontal de  $5 \text{ m/s}$  con dirección este.

Las gráficas de la velocidad aerodinámica en función del tiempo obtenidas tienen un aspecto muy similar al de la figura 4.5, con  $V$  oscilando en torno al valor objetivo a medida que cambia la dirección relativa del viento. La diferencia entre el valor máximo y mínimo de la velocidad aerodinámica ( $\Delta TAS$ ) en la segunda vuelta de la trayectoria, para cada valor de  $f_{TAS}$ , se ha representado en la figura 4.20a. En base a esto, para tener una oscilación moderada en la velocidad aerodinámica (por ejemplo, unos  $0.5 \text{ m/s}$  que sería un 10% de la velocidad del viento) se requiere un peso  $f_{TAS}$  de al menos 500.

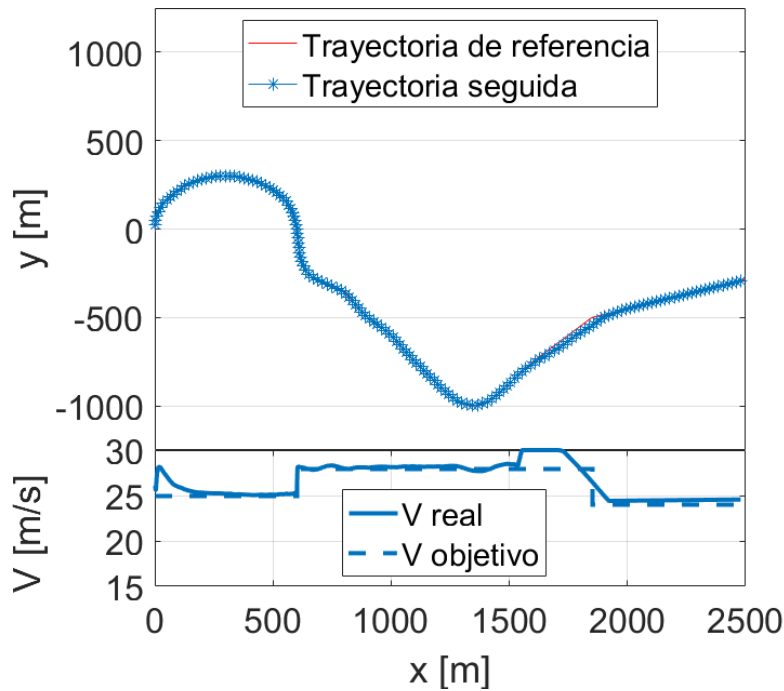


**Figura 4.20** Efecto del factor de ponderación asociado a la TAS.

Paralelamente a la disminución de las oscilaciones en  $V$  a medida que se incrementa  $f_{TAS}$ , se tiene un aumento de la desviación media respecto a la trayectoria (figura 4.20b), si bien este es bastante lento y no resulta preocupante.

Para comprobar la efectividad en una situación más general se ha usado la trayectoria de la sección 4.2, también con un viento de  $5 \text{ m/s}$  en dirección este. En esta ocasión se han fijado distintas TAS objetivo para cada segmento ( $25 \text{ m/s}$  en el primero,  $28 \text{ m/s}$  en el segundo y  $24 \text{ m/s}$  en el tramo final). Los resultados para un factor  $f_{TAS} = 500$  se muestran en la figura 4.21.

Dentro de cada tramo, la velocidad aerodinámica se mantiene muy cerca de su valor objetivo. En cuanto a los cambios de tramo, en primero la adaptación de la velocidad es muy rápida, mientras que en el segundo es más lenta y va acompañada de un aumento inicial.



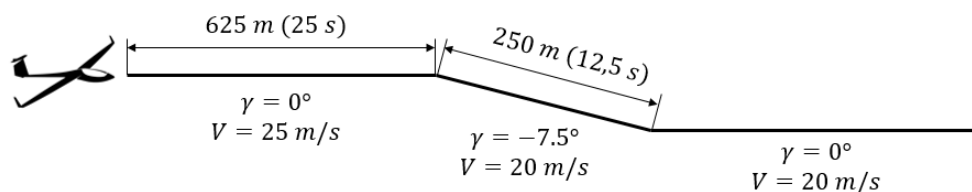
**Figura 4.21** Seguimiento en planta y velocidad aerodinámica para una trayectoria compuesta por distintos tramos.

Esto se debe, en primer lugar a que disminuir la velocidad, dados los límites operativos no simétricos en la aceleración, es más difícil que aumentarla y a que la transición en sí es más abrupta y requiere una preparación previa considerable por parte del algoritmo de guiado.

## 4.5 Restricciones en la aceleración

Para analizar la adecuación del método propuesto para calcular los límites en la aceleración y el efecto que esto puede tener sobre las actuaciones del sistema se va a usar una trayectoria compuesta por tres tramos rectos (figura 4.22). El primero se define como una recta horizontal, de una longitud de 625 m de longitud que se desea recorrer a una velocidad de 25 m/s. El segundo es una recta descendente que forma un ángulo de  $-7.5^\circ$  respecto a un plano horizontal, con una longitud de 250 m y que se desea recorrer a una velocidad de 20 m/s. El tercer y último tramo es otra recta horizontal, también con una velocidad objetivo de 20 m/s.

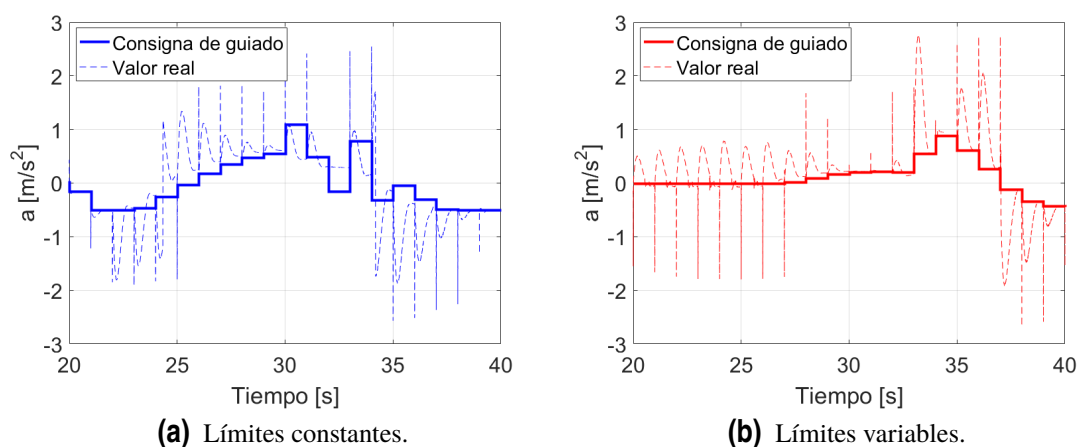
El objetivo subyacente al utilizar esta trayectoria es hacer que el sistema de guiado demande una aceleración mínima, en una situación en la que un límite fijo, que podría ser adecuado para vuelo horizontal, realmente sobrestima dicho mínimo (es decir, el límite corresponde a una aceleración de frenado que la aeronave en realidad es incapaz de alcanzar).



**Figura 4.22** Trayectoria usada para testar las restricciones en la aceleración.

Una situación análoga podría darse, en principio, también en el caso de la aceleración máxima. No obstante, para la aeronave que se está considerando en este trabajo y de acuerdo con los modelos que se tienen de la misma, el empuje máximo es muy elevado (superior al peso de la aeronave) y resulta poco probable que en la práctica se de una situación en la que se requiera hacer uso de él.

La forma más inmediata de ver si los límites impuestos son alcanzables consiste en comparar la señal de aceleración calculada por el sistema de guiado y enviada como consigna al controlador de actitud con el valor real alcanzado (figura 4.23). Es importante notar que, en cada intervalo, la aceleración real casi siempre llega a estabilizarse en un valor final, aunque este no siempre coincide con la consigna.



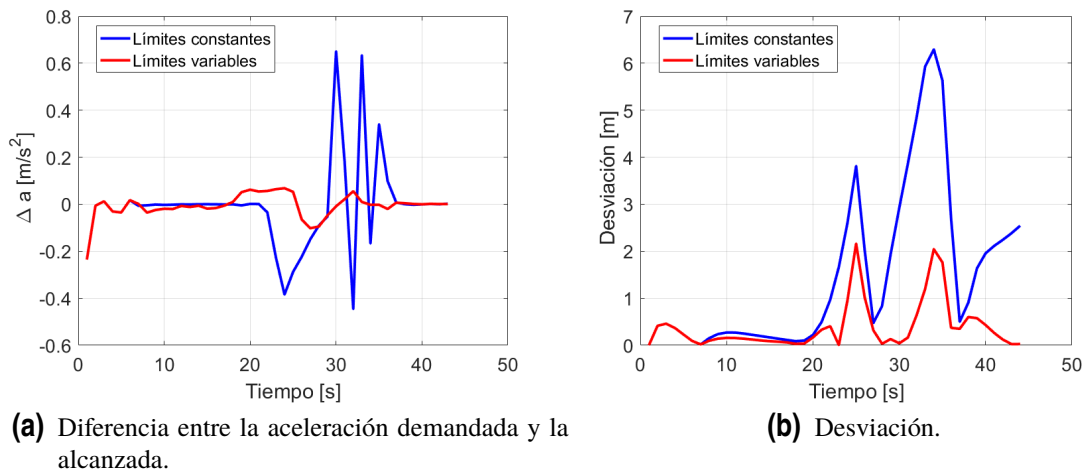
**Figura 4.23** Aceleración calculada por el guiado y real en el tramo de descenso.

Para hacer la comparación con mayor claridad, en la figura 4.24a se han representado las diferencias entre la consigna en aceleración del guiado y el valor real inmediatamente anterior al cambio de consigna. La inadecuación de los límites constantes resulta aquí evidente, puesto que las diferencias son grandes en la parte correspondiente al descenso (el tramo en torno a 25 s y 37.5 s). El modelo de límites variables propuesto, en cambio, resulta muy acertado.

El impacto el guiado resulta evidente (figura 4.23). En el caso con límites constantes, el sistema planifica un frenado durante el descenso. Al comenzar a descender, las aceleracio-



nes previstas no se alcanzan (el estimador de perturbaciones registra una gran perturbación en la velocidad), el sistema concluye que es incapaz de mantener la velocidad por debajo de los límites impuestos (el algoritmo de optimización devuelve un error al comprobar que el problema planteado no es factible) y se utiliza el guiado proporcional de emergencia, que hace que la aeronave se separe en gran medida de la trayectoria y que las limitaciones operacionales puedan violarse. Cuando los límites en la aceleración son más realistas, aunque las capacidades de la aeronave son las mismas, el sistema basado en guiado predictivo es capaz de anticiparse a la situación, prepararse antes de que se inicie el descenso y mantener las variables dentro de los umbrales marcados por las limitaciones operativas proporcionando, además, un guiado mucho más preciso de la trayectoria.



**Figura 4.24** Comparación de resultados con distintas restricciones en la aceleración.

La lección más importante que se puede extraer de estos resultados es que tener un modelo fiable es un aspecto fundamental dentro de cualquier esquema de guiado predictivo. Esta faceta puede resultar especialmente relevante en el caso de las restricciones, ya que unos límites incorrectos puede llevar a fallos en la optimización por no factibilidad del problema. El esquema de guiado utilizado cuenta con el guiado proporcional como mecanismo de *backup* para hacer frente a fallos de cualquier tipo en el control predictivo (tanto por exceso del tiempo de cálculo como por fallos en la optimización). No obstante, este no ofrece garantías de cumplir las limitaciones operativas y sus prestaciones pueden ser pobres.



# 5 Conclusiones y trabajos futuros

---

## 5.1 Conclusiones

El objetivo de este trabajo era el de contribuir al desarrollo de los algoritmos de guiado de aeronaves basados en control predictivo. Partiendo de los métodos propuestos en [1] y [2], se ha realizado un proceso de diseño mediante el cual se han introducido distintas modificaciones con la intención de mejorar las prestaciones y de habilitar nuevas funcionalidades. Con el fin de evaluar el efecto de estas modificaciones, se ha llevado a cabo un amplio número de simulaciones que cubren situaciones muy variadas, utilizando, para ello, los modelos más realistas de los que se dispone y realizando una exhaustiva labor de análisis de las prestaciones del sistema en función de la configuración en cada caso. Las principales conclusiones que se pueden extraer de los resultados obtenidos son las siguientes:

- El guiado basado en control predictivo permite obtener unas muy buenas prestaciones en el seguimiento de todo tipo de trayectorias. La función objetivo desarrollada en [1] para seguimiento de segmentos rectos ha sido aplicada exitosamente a trayectorias generales (discretizadas, previamente, mediante segmentos rectos). Modificando la forma en que se elige el segmento de vuelo de referencia, de modo que se emplee la predicción de la posición en lugar del tiempo, la función ha demostrado ser fiable incluso en casos con viento severo y en los que se pierde la sincronización temporal.
- No queda claro que las funciones objetivo específicas o alternativas para distintos tipos de trayectorias aportan, de manera global, una mejoría respecto a la discretización de la trayectoria en segmentos rectos. Las diferencias al comparar ambos métodos han resultado poco significativas en la mayoría de los casos. En el resto de casos, el método que proporciona los mejores resultados depende de los parámetros que se comparen y de la situación concreta.
- El uso de funciones objetivo, restricciones o modelos del sistema que den lugar a

problemas de optimización no lineales parece poco práctico para UAVs debido al alto coste computacional, que dificulta enormemente la resolución online en tiempo real. Los tiempos de cálculo excesivos en la optimización se han mantenido incluso al disminuir a la mitad el número de variables. El método de optimización iterativa con un problema de programación cuadrática en cada iteración, en cambio, permite utilizar tiempos de muestreo adecuados para este sistema.

- La técnica empleada para el cambio de funciones objetivo funciona correctamente. Aunque en este caso pueda no resultar necesario, ya que la función objetivo original es válida para una gran variedad de situaciones, puede ser de utilidad para desarrollos futuros.
- Penalizar las diferencias entre la velocidad aerodinámica predicha y el valor objetivo de la misma es una forma eficaz para realizar vuelo a velocidad aerodinámica definida. Este procedimiento se ha aplicado exitosamente a trayectorias de distintos tipos y con cambios en la velocidad objetivo de cada segmento.
- El modelo propuesto para calcular los límites en la aceleración es adecuado. Los resultados de las simulaciones indican que resulta efectivo a la hora de evitar que se demanden aceleraciones irrealizables al controlador de actitud y que esto contribuye a la robustez del sistema.

## 5.2 Trabajos futuros

Como líneas para continuar con el desarrollo y validación de los algoritmos de guiado basados en control predictivo tratados a lo largo de este trabajo se proponen las siguientes:

- Completar el código actual para incluir situaciones que no se contemplan en la implementación actual, como la posibilidad de que el horizonte de predicción abarque más de dos tramos en los que se usen funciones objetivo distintas.
- Estudio de formas alternativas de hacer frente a fallos en la optimización debido a la no factibilidad del problema planteado. En condiciones normales de funcionamiento del sistema, el error de seguimiento cuando se usa el guiado basado en control predictivo es razonablemente pequeño. Uno de los aspectos en los que posiblemente el algoritmo tiene que más que ganar es en robustez y respuesta a fallos. El guiado proporcional como mecanismo de *backup* puede ser insuficiente y sería útil disponer de otras opciones. Por ejemplo, se podría estudiar cómo relajar las restricciones para recuperar la factibilidad del problema sin poner en peligro la aeronave, usando el conocimiento que se tiene en el momento del fallo de las limitaciones concretas que se podrían violar y de la trayectoria de referencia.
- Implementación del algoritmo y pruebas en una aeronave real. En primer lugar, la implementación del algoritmo en un computador embarcado serviría para tener da-

tos más precisos de los tiempos de cálculo. Por otro lado, las pruebas en vuelo serían fundamentales para una validación total. Por muy completos y fidedignos que sean los modelos empleados, nunca podrán capturar en su totalidad todos los aspectos de la realidad. Los test experimentales son necesarios para evaluar los efectos de la dinámica no modelada.



# Apéndice A

## Sistemas de referencia

---

En este apéndice se van a definir cuatro sistemas de referencia, habituales en la Mecánica de Vuelo: inercial topocéntrico, horizonte local, ejes viento y ejes cuerpo. Estos sistemas serán usados para la deducción de las ecuaciones de movimiento del avión.

### A.1 Sistema inercial topocéntrico, $I$

Se trata de un sistema de referencia ligado a la superficie de la Tierra, considerada plana. Se define como sigue:

$$I(O, x, y, z) : \begin{cases} O: \text{cualquier punto de la superficie de la Tierra;} \\ x: \text{dirección norte;} \\ y: \text{dirección este;} \\ z: \text{dirección hacia abajo (triedro a derechas).} \end{cases}$$

El plano  $xy$  es el plano horizontal.

### A.2 Sistema de ejes horizonte local, $H$

$$H(O_h, x_h, y_h, z_h) : \begin{cases} O_h: \text{centro de masas del avión;} \\ x_h: \text{paralelo al eje } x \text{ del sistema inercial topocéntrico;} \\ y_h: \text{paralelo al eje } y \text{ del sistema inercial topocéntrico;} \\ z_h: \text{paralelo al eje } z \text{ del sistema inercial topocéntrico} \end{cases}$$

El plano  $x_h y_h$  es el plano horizontal local.

### Orientación de los ejes H respecto de los ejes I.

La orientación de los ejes horizonte local coincide en todo momento con los de los ejes del sistema inercia topocéntrico. Por tanto, la matriz de transformación es la matriz identidad de tamaño 3 x 3.

### A.3 Sistema de ejes viento, W

Este sistema de ejes se define en función del vector de velocidad aerodinámica  $\vec{V}$ .

$$W(O_w, x_w, y_w, z_w) : \begin{cases} O_w: \text{centro de masas del avión;} \\ x_w: \text{dirección y sentido del vector } \vec{V}; \\ z_w: \text{contenido en el plano de simetría del avión, hacia abajo;} \\ y_w: \text{según el ala derecha del avión (triedro a derechas).} \end{cases}$$

En general, la velocidad  $\vec{V}$  no está contenida en el plano de simetría del avión (salvo en vuelo simétrico), siendo el ángulo de resbalamiento  $\beta$  el formado por el vector  $\vec{V}$  y el plano de simetría.

### Orientación de los ejes W respecto de los ejes H.

- Ángulo de asiento de la velocidad o ángulo de trayectoria,  $\gamma$ : es el ángulo formado por el vector velocidad  $\vec{V}$  y el plan horizontal local;  $\gamma > 0$  cuando el avión sube.
- Ángulo de guiñada o ángulo de rumbo,  $\chi$ : es el ángulo formado por la proyección del vector velocidad  $\vec{V}$  sobre el plano horizontal y la dirección norte ( $x_h$ );  $\chi > 0$  hacia el este.
- Ángulo de balance de la velocidad o ángulo de alabeo,  $\mu$ : es el ángulo formado por el eje  $y_w$  y la recta de intersección del plano  $y_w z_w$  (el plano ortogonal a  $\vec{V}$ ) con el plano horizontal;  $\mu > 0$  cuando el avión baja el ala derecha.

La transformación  $H \rightarrow W$  se hace rotando los ejes H sobre  $z_h$  un ángulo  $\chi$  para obtener unos ejes  $X'$ , que se rotan sobre  $y'$  un ángulo  $\gamma$  para obtener unos ejes  $X''$ , que se rotan sobre  $x'' \equiv x_w$  un ángulo  $\mu$  para obtener los ejes W.

$$H \xrightarrow[z_h]{\chi} X \xrightarrow[y']{\gamma} X'' \xrightarrow[x_w]{\mu} W \quad (\text{A.1})$$



$$\begin{aligned}
 [T]^{W \leftarrow H} &= [T]^{W \leftarrow X''} [T]^{X'' \leftarrow X'} [T]^{X' \leftarrow H} & (A.2) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mu & \sin \mu \\ 0 & -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$[T]^{W \leftarrow H} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cos \gamma \sin \chi & -\sin \gamma \\ \sin \mu \cos \chi \cos \gamma - \cos \mu \sin \chi & \sin \mu \sin \chi \cos \gamma + \cos \mu \sin \chi & \sin \mu \cos \gamma \\ \cos \mu \sin \chi \cos \gamma + \sin \mu \sin \chi & \cos \mu \sin \chi \sin \gamma - \sin \mu \cos \chi & \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

**Fuerza aerodinámica en ejes viento.** El sistema de ejes viento permite orientar de forma natural la fuerza aerodinámica. Sus componentes en ejes viento son:

- Resistencia  $D$ : componente según  $-x_w$
- Fuerza lateral  $Q$ : componente según  $-y_w$
- Sustentación  $L$ : componente según  $-z_w$

Así, la fuerza aerodinámica en ejes viento viene dada por el vector velocidad  $\vec{V}$

$$[F_A]^W = \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

**Fuerza propulsiva en ejes viento.** Para orientar el empuje respecto de los ejes viento se definen

- ángulo de ataque del empuje  $\varepsilon$
- ángulo de resbalamiento del empuje,  $\nu$

Así, la fuerza propulsiva en ejes viento viene dada por el vector velocidad  $\vec{V}$

$$[F_T]^W = \begin{bmatrix} T \cos \varepsilon \cos \nu \\ T \cos \varepsilon \sin \nu \\ -T \sin \varepsilon \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

## A.4 Sistema de ejes cuerpo, $B$

Este sistema de ejes se define respecto de la geometría del avión

$$I(O_b, x_b, y_b, z_b) : \begin{cases} O_b: \text{centro de masas del avión;} \\ x_b: \text{según la línea de referencia longitudinal, hacia el morro;} \\ z_b: \text{ortogonal a } x_b, \text{ hacia abajo;} \\ y_b: \text{completa el triedro a derechas.} \end{cases}$$

Los ejes  $x_b$  y  $z_b$  están contenidos en el plano de simetría del avión, mientras que  $y_b$  es ortogonal al mismo y está dirigido según el ala derecha.

### Orientación de los ejes $B$ respecto de los ejes $W$ .

- Ángulo de resbalamiento,  $\beta$ : es el ángulo formado por el vector velocidad  $\vec{V}$  y el plano de simetría del avión;  $\beta > 0$  cuando el aire entra por la derecha
- Ángulo de ataque,  $\alpha$ : es el ángulo formado por el eje  $x_b$  y la proyección del vector velocidad  $\vec{V}$  sobre el plano de simetría;  $\alpha > 0$  cuando el aire entra por debajo.

La transformación  $W \rightarrow B$  se hace rotando los ejes  $W$  sobre  $-z_w$  un ángulo  $\beta$  para obtener unos ejes  $X'$ , que se rotan sobre  $y' \equiv y_b$  un ángulo  $\alpha$  para obtener los ejes  $B$ .

$$W \xrightarrow[-z_w]{-\beta} X' \xrightarrow[y_b]{\alpha} B \quad (\text{A.6})$$

$$[T]^{B \leftarrow W} = [T]^{B \leftarrow X'} [T]^{X' \leftarrow W} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

### Orientación de los ejes $B$ respecto de los ejes $H$ .

- Ángulo de asiento o de cabeceo,  $\theta$ : es el ángulo formado por el eje  $x_b$  y el plano horizontal local;  $\theta > 0$  hacia arriba.
- Ángulo de guiñada,  $\psi$ : es el ángulo formado por la proyección del eje  $x_b$  sobre el plano horizontal y la dirección norte ( $x_h$ );  $\psi > 0$  hacia el este.
- Ángulo de balance,  $\phi$ : es el ángulo formado por el eje  $y_b$  y la recta de intersección

del plano  $y_b z_b$  (el plano ortogonal a  $x_b$ ) con el plano horizontal;  $\phi > 0$  cuando el avión baja el ala derecha;  $\phi = 0$  cuando el avión vuela con las alas a nivel.

La transformación  $H \rightarrow B$  se hace rotando los ejes  $H$  sobre  $-z_h$  un ángulo  $\psi$  para obtener unos ejes  $X'$ , que se rotan sobre  $y'$  para obtener unos ejes  $X''$ , que se rotan sobre  $x'' \equiv x_b$  un ángulo  $\phi$  para obtener los ejes  $B$ .

$$H \xrightarrow[z_h]{\psi} X' \xrightarrow[y']{\theta} X'' \xrightarrow[x_b]{\phi} B \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} [T]^{B \leftarrow W} &= [T]^{B \leftarrow X''} [T]^{X'' \leftarrow X'} [T]^{X' \leftarrow H} & (\text{A.11}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & -\sin \psi & \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[T]^{B \leftarrow W} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$



## Apéndice B

# Expresiones de los términos de la ecuación de predicción del estado linealizada

---

La ecuación linealizada de predicción del estado deducida en la sección 3.2 era

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^k \left( \mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) \Delta \mathbf{u}_S \right) + \mathbf{x}_0 \quad (\text{B.1})$$

Se recuerda, también que el vector  $\mathbf{f}_i$  venía definido por las ecuaciones (3.12), (3.14), (3.15), (3.16) y (3.17), siendo sus componentes, las siguientes:

$$f_{i_1} = \frac{\cos \gamma_k (a_k T_s + V_k)^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} \left[ g \tan \phi_k \sin \left( \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \right) + 2a_k \cos \left( \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \right) \right] \quad (\text{B.2})$$

$$f_{i_2} = \frac{\cos \gamma_k (a_k T_s + V_k)^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} \left[ 2a_k \sin \left( \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \right) - g \tan \phi_k \cos \left( \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \right) \right] \quad (\text{B.3})$$
$$- \frac{\cos \gamma_k V_k^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} (g \tan \phi_k \sin \chi_k + 2a_k \cos \chi_k)$$
$$- \frac{\cos \gamma_k V_k^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} (2a_k \sin \chi_k - g \tan \phi_k \cos \chi_k)$$

$$f_{i_3} = -T_s \sin \gamma_k \left( \frac{1}{2} a_k T_s + V_k \right) \quad (\text{B.4})$$

$$f_{i_4} = \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} \quad (\text{B.5})$$

$$f_{i_5} = a_k T_s + V_k \quad (\text{B.6})$$

y que  $\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0)$  es una matriz de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_S}(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial a_0} \mathbf{0}_5 \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \phi_0} \mid \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial a_1} \mathbf{0}_5 \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \phi_1} \mid \dots \mid \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial a_i} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \gamma_i} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \phi_i} \mid \mathbf{0}_{4 \times 3(N_p - 1 - i)} \right] \quad (\text{B.7})$$

siendo  $\mathbf{0}_m$  un vector columna nulo de  $m$  componentes y  $\mathbf{0}_{m \times n}$ , una matriz  $m \times n$  de ceros, y estando todas las derivadas de  $\mathbf{f}_i$  evaluadas en  $(\bar{\mathbf{u}}_S, V_0, \chi_0)$ .

Antes de detallar el cálculo de cada uno de los términos de (B.7), que puede ser realizado explícitamente, se van a definir las siguientes variables intermedias para compactar las expresiones

- variables intermedias:

$$\varphi_k = \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \quad (\text{B.8})$$

$$p_k = \frac{\cos \gamma_k (a_k T_s + V_k)^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} \quad (\text{B.9})$$

$$q_k = \frac{\cos \gamma_k V_k^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} \quad (\text{B.10})$$

$$A_{1_k} = g \tan \phi_k \sin \varphi_k + 2a_k \cos \varphi_k \quad (\text{B.11})$$

$$A_{2_k} = g \tan \phi_k \sin \chi_k + 2a_k \cos \chi_k \quad (\text{B.12})$$

$$A_{3_k} = \frac{\partial A_{2_k}}{\partial \chi_k} = g \tan \phi_k \cos \chi_k - 2a_k \sin \chi_k \quad (\text{B.13})$$

$$B_{1_k} = 2a_k \sin \varphi_k - g \tan \phi_k \cos \varphi_k \quad (\text{B.14})$$

$$B_{2_k} = 2a_k \sin \chi_k - g \tan \phi_k \cos \chi_k \quad (\text{B.15})$$

$$B_{3_k} = \frac{\partial B_{2_k}}{\partial \chi_k} = 2a_k \cos \chi_k + g \tan \phi_k \sin \chi_k \quad (\text{B.16})$$

- derivadas de las variables intermedias respecto de  $a_k$ :

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial a_k} = \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \left( \frac{T_s}{a_k T_s + V_k} - \frac{1}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} \right) \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial a_k} = \cos \gamma_k (a_k T_s + V_k) \frac{2T_s(4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k) - 8a_k(a_k T_s + V_k)}{(4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k)^2} \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial a_k} = -\frac{8a_k \cos \gamma_k V_k^2}{(4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k)^2} \quad (\text{B.19})$$

- derivadas de las variables respecto de  $a_j$ ,  $j < k$ :

$$\frac{\partial V_k}{\partial a_j} = T_s \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial a_j} = \frac{g \tan \phi_j}{a_j} \left( \frac{T_s}{a_j T_s + V_j} - \frac{1}{a_j} \ln \frac{a_j T_s + V_j}{V_j} \right) + \sum_{l=j+1}^{k-1} \frac{g \tan \phi_l}{a_l} T_s \left( \frac{1}{a_l T_s + V_l} - \frac{1}{V_l} \right) \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial a_j} = \frac{g \tan \phi_k}{a_k} T_s \left( \frac{1}{a_k T_s + V_k} - \frac{1}{V_k} \right) + \frac{\partial \chi_k}{\partial a_j} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial a_j} = \frac{2T_s \cos \gamma_k (a_k T_s + V_k)}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial a_j} = \frac{2T_s \cos \gamma_k V_k}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} \quad (\text{B.24})$$

- derivadas de las variables intermedias respecto de  $\gamma_k$ :

$$\frac{\partial p_k}{\partial \gamma_k} = -\frac{\sin \gamma_k (a_k T_s + V_k)^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial \gamma_k} = -\frac{\sin \gamma_k V_k^2}{4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k} \quad (\text{B.26})$$

- derivadas de las variables intermedias respecto de  $\phi_k$ :

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \phi_k} = \frac{g}{a_k \cos^2 \phi_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial \phi_k} = -2g^2 \frac{\tan \phi_k}{\cos^2 \phi_k} \frac{\cos \gamma_k (a_k T_s + V_k)^2}{(4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k)^2} \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial \phi_k} = -2g^2 \frac{\tan \phi_k}{\cos^2 \phi_k} \frac{\cos \gamma_k V_k^2}{(4a_k^2 + g^2 \tan^2 \phi_k)^2} \quad (\text{B.29})$$

$$c_k = \frac{\partial(g \tan \phi_k)}{\partial \phi_k} = \frac{g}{\cos^2 \phi_k} \quad (\text{B.30})$$

- derivada del rumbo respecto de  $\phi_j$ ,  $j < k$ :

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial \phi_j} = \frac{g}{a_j \cos^2 \phi_j} \ln \frac{a_j T_s + V_j}{V_j} \quad (\text{B.31})$$

Adicionalmente, se introducen los términos

$$\bar{V}_k = T_s \sum_{i=0}^{k-1} \bar{a}_i + V_0 \quad (\text{B.32})$$

$$\bar{\chi}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left[ \frac{g \tan \bar{\phi}_i}{\bar{a}_i} \ln \frac{\bar{a}_i T_s + T_s \sum m = 0^{i-1} \bar{a}_m + V_0}{T_s \sum m = 0^{i-1} \bar{a}_m + V_0} \right] + \chi_0 \quad (\text{B.33})$$

Con todo esto, el cálculo de las derivadas del vector  $\mathbf{f}_k$  es como sigue

$$\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial a_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{p}k}{\partial \bar{a}_k} \bar{A}_{1k} + \bar{p}k \left( (g \tan \bar{\phi}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{a}_k} + 2) \cos \bar{\phi}_k - 2\bar{a}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{a}_k} \sin \bar{\phi}_k \right) - \frac{\partial \bar{q}k}{\partial \bar{a}_k} \bar{A}_{2k} - 2\bar{q}k \cos \bar{\chi}_k \\ \frac{\partial \bar{p}k}{\partial \bar{a}_k} \bar{B}_{1k} + \bar{p}k \left( 2\bar{a}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{a}_k} \cos \bar{\phi}_k + (g \tan \bar{\phi}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{a}_k} + 2) \sin \bar{\phi}_k \right) - \frac{\partial \bar{q}k}{\partial \bar{a}_k} \bar{B}_{2k} - 2\bar{q}k \sin \bar{\chi}_k \\ -\frac{1}{2} T_s^2 \sin \bar{\gamma}_k \\ \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{a}_k} \\ T_s \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial a_j} \Big|_{j < k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{p}k}{\partial \bar{a}_j} \bar{A}_{1k} + \bar{p}k \left( g \tan \bar{\phi}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{a}_j} \cos \bar{\phi}_k - 2\bar{a}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{a}_j} \sin \bar{\phi}_k \right) - \frac{\partial \bar{q}k}{\partial \bar{a}_j} \bar{A}_{2k} - \bar{q}k \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial \bar{a}_j} \bar{A}_{3k} \\ \frac{\partial \bar{p}k}{\partial \bar{a}_j} \bar{B}_{1k} + \bar{p}k \left( 2\bar{a}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{a}_j} \cos \bar{\phi}_k + g \tan \bar{\phi}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{a}_j} \sin \bar{\phi}_k \right) - \frac{\partial \bar{q}k}{\partial \bar{a}_j} \bar{B}_{2k} - \bar{q}k \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial \bar{a}_j} \bar{B}_{3k} \\ -T_s^2 \sin \bar{\gamma}_k \\ \frac{g \tan \bar{\phi}_k}{\bar{a}_k} T_s \left( \frac{1}{\bar{a}_k T_s + \bar{V}_k} - \frac{1}{\bar{V}_k} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \gamma_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{p}k}{\partial \bar{\gamma}_k} \bar{A}_{1k} - \frac{\partial \bar{q}k}{\partial \bar{\gamma}_k} \bar{A}_{2k} \\ \frac{\partial \bar{p}k}{\partial \bar{\gamma}_k} \bar{B}_{1k} - \frac{\partial \bar{q}k}{\partial \bar{\gamma}_k} \bar{B}_{2k} \\ -T_s \cos \bar{\gamma}_k (\bar{V}_k + \frac{1}{2} \bar{a}_k T_s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$



$$\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \phi_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial \bar{\phi}_k} \bar{A}_{1_k} + \bar{p}_k \left( g \tan \bar{\phi}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{\phi}_k} \cos \bar{\varphi}_k + (\bar{c}_k - 2\bar{a}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{\phi}_k}) \sin \bar{\varphi}_k \right) - \frac{\partial \bar{q}_k}{\partial \bar{\phi}_k} \bar{A}_{2_k} - \bar{q}_k \bar{c}_k \sin \bar{\chi}_k \\ \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial \bar{\phi}_k} \bar{B}_{1_k} + \bar{p}_k \left( (2\bar{a}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{\phi}_k} - \bar{c}_k) \cos \bar{\varphi}_k + g \tan \bar{\phi}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{\phi}_k} \sin \bar{\varphi}_k \right) - \frac{\partial \bar{q}_k}{\partial \bar{\phi}_k} \bar{B}_{2_k} + \bar{q}_k \bar{c}_k \cos \bar{\chi}_k \\ 0 \\ \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{\phi}_k} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \phi_j} \Big|_{j < k} = \begin{bmatrix} \bar{p}_k \left( g \tan \bar{\phi}_k \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial \bar{\phi}_j} \cos \bar{\varphi}_k - 2\bar{a}_k \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial \bar{\phi}_j} \sin \bar{\varphi}_k \right) - \bar{q}_k \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial \bar{\phi}_j} \bar{A}_{3_k} \\ \bar{p}_k \left( 2\bar{a}_k \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial \bar{\phi}_j} \cos \bar{\varphi}_k + g \tan \bar{\phi}_k \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial \bar{\phi}_j} \sin \bar{\varphi}_k \right) - \bar{q}_k \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial \bar{\phi}_j} \bar{B}_{3_k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.38})$$

donde  $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{\eta}}$  representa la derivada de  $\xi$  respecto de  $\eta$  evaluada en  $\bar{\mathbf{u}}_S$ .

Hay que tener en cuenta que, para un segmento de aceleración nula ( $a = 0$ ) las expresiones (B.5) y (B.34)–(B.38) no pueden ser implementadas en un ordenador debido a la división por cero. Sin embargo, esto no supone un grave inconveniente, ya que en realidad todos estos vectores son continuos y derivables, teniendo un límite finito cuando  $\bar{a} \rightarrow 0$ . Por ejemplo, el límite para  $\varphi_k$  viene dado por

$$\lim_{a_k \rightarrow 0} \varphi_k = \lim_{a_k \rightarrow 0} \left[ \frac{g \tan \phi_k}{a_k} \ln \frac{a_k T_s + V_k}{V_k} + \chi_k \right] = \frac{g \tan \phi_k T_s}{V_k} + \chi_k \quad (\text{B.39})$$

Por tanto, de cara a la implementación software, cuando se detecta que algún valor de la aceleración de referencia se acerca a cero (disminuye por debajo de una cierta tolerancia), se sustituyen las expresiones (B.5) y (B.34)–(B.38) por los límites correspondientes. Sucede algo análogo cuando  $\phi \rightarrow 0$  (tramos rectilíneos) o cuando  $a \rightarrow 0$  y  $\phi \rightarrow 0$  simultáneamente (tramos rectilíneos con aceleración nula). Las expresiones completas de los límites pueden consultarse en [2].



# Índice de Figuras

---

1.1.	Fotografías de un DeHavillan Queen Bee	2
1.2.	Datos históricos y predicción del crecimiento del mercado de drones	3
1.3.	Diagrama de bloques de un sistema de control de vuelo	3
1.4.	Esquema del guiado proporcional	4
1.5.	Esquema del control predictivo	5
1.6.	Comparación de estrategias de control	6
2.1.	Diagrama de bloques de un sistema de control de vuelo y modelos utilizados	10
2.2.	Esquema del modelo de simulación	18
3.1.	Modelo de avión en el guiado predictivo	23
3.2.	Estrategia de control predictivo basada en tramos rectilíneos	23
3.3.	Estrategia de control predictivo basada en tramos de curvatura constante y velocidad constante	24
3.4.	Estrategia de control predictivo basada en tramos de curvatura constante y uniformemente acelerados	25
3.5.	Dependencia del empuje con el régimen de giro y la velocidad	35
3.6.	Distancia entre el avión y el segmento de vuelo de referencia	40
3.7.	Proyección de la posición del avión sobre el segmento de referencia	41
3.8.	Esquema del cálculo de los waypoints	46
3.9.	Comparación de las distintas aproximaciones de la trayectoria	49
3.10.	Esquema de la combinación de funciones objetivo	51
3.11.	Diagrama de flujo de la optimización iterativa	56
3.12.	Diagrama de flujo del algoritmo de guiado predictivo	57
4.1.	Seguimiento de la trayectoria de radio constante sin viento	60
4.2.	Variables de control y velocidad aerodinámica en un caso sin viento	60
4.3.	Desviación y desfase en un caso sin viento	61
4.4.	Esquema ilustrativo de la desviación y el desfase	61
4.5.	Variables de control y velocidad aerodinámica para viento de $5\text{ m/s}$	62
4.6.	Desviación y desfase para viento de $5\text{ m/s}$	62
4.7.	Variables de control y velocidad aerodinámica para viento de $8\text{ m/s}$	63
4.8.	Desviación y desfase para viento de $8\text{ m/s}$	64

4.9.	Coordenada $y$ , velocidad aerodinámica, desviación y desfase para viento de $8 \text{ m/s}$	64
4.10.	Comparación de funciones objetivo en un caso sin viento	66
4.11.	Comparación de funciones objetivo para viento de $5 \text{ m/s}$	67
4.12.	Comparación de funciones objetivo para viento de $10 \text{ m/s}$	68
4.13.	Desviación para distintos valores del tiempo de cálculo	69
4.14.	Comparación de los tiempos de cálculos medios por llamada al guiado para viento de $10 \text{ m/s}$	70
4.15.	Tiempo de cálculo medio por llamada al guiado y desviación máxima para distintos valores de $N_c$	71
4.16.	Seguimiento en planta para una curva general	72
4.17.	Trayectoria para diferentes factores de escalado y detalle del seguimiento	73
4.18.	Comparación del seguimiento para distintas funciones objetivo	74
4.19.	Seguimiento en planta y desviación para una trayectoria compuesta por distintos tramos	75
4.20.	Efecto del factor de ponderación asociado a la TAS	76
4.21.	Seguimiento en planta y velocidad aerodinámica para una trayectoria compuesta por distintos tramos	77
4.22.	Trayectoria usada para testar las restricciones en la aceleración	78
4.23.	Aceleración calculada por el guiado y real en el tramo de descenso	78
4.24.	Comparación de resultados con distintas restricciones en la aceleración	79

# Bibliografía

---

- [1] F. Gavilán Jiménez, *Sistemas de control y guiado para vehículos aéreos no tripulados: Diseño de algoritmos y sistemas embarcados*, Tesis doctoral (Universidad de Sevilla), 2012
- [2] P. Doña Girón, *Diseño y simulación de algoritmos de guiado de aeronaves basados en control predictivo*, Trabajo fin de grado (Universidad de Sevilla), 2015
- [3] M. Cannon, *Lectures on model predictive control*, Oxford University, 2015
- [4] Y. Kang y J.K. Hendrick, *Linear tracking for a fixed-wing UAV using nonlinear model predictive control*, IEEE Transactions on control systems technology, volumen 15, número 5, pp. 1202-1210, 2009
- [5] J.D. Anderson, *Introduction to flight*, capítulo 6, *Elements of airplane performance*, McGraw-Hill, series in aeronautical and aerospace engineering, 2005
- [6] J.D. Anderson, *Aircraft performance and design*, McGraw-Hill international editions, aerospace science/technology series, 1999
- [7] D. G. Hull, *Fundamentals of airplane flight mechanics*, Springer-Verlag, 2007
- [8] F. Gavilán, R. Vazquez, E. Camacho, *Chance-constrained model predictive control for spacecraft rendezvous with disturbance estimation*, Control Engineering Practice, volumen 20, número 2, pp. 111-122
- [9] C. Jones, M. Zeilinger, *Lectures on real-time model predictive control*, Automatic Control Laboratory, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [10] S. Vaidyanathan y C. Volos, *Advances and applications in nonlinear control systems*, Springer, Studies in computational intelligence series, volumen 635, 2016

- [11] P. W. Gibbens y E. Medagoda, *Efficient model predictive control algorithm for aircraft*, Journal of guidance, control and dynamics, volumen, 34, número 6, 2011
- [12] A. Grancharova y T. A. Johansen, *Explicit nonlinear model predictive control: theory and applications*, Springer, Lecture notes in control and information sciences, 2012