

Trabajo de Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

Detección de conflictos entre aeronaves con vientos variables en el espacio y componentes correladas estadísticamente

Autor: Pedro Remesal Nogales

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Trabajo de Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

Detección de conflictos entre aeronaves con vientos variables en el espacio y componentes correladas estadísticamente

Autor:

Pedro Remesal Nogales

Tutor:

Alfonso Valenzuela Romero

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Índice	v
Índice de Tablas	vii
Índice de Figuras	ix
1 Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Sistemas de predicción por conjunto (Ensemble Prediction Systems, EPS)	2
1.3. Método de Monte Carlo	3
1.4. Objetivos	3
1.5. Estructura del documento	4
2 Formulación de la detección de conflictos	5
2.1. Definición del problema	5
2.2. Formulación con viento constante	6
2.3. Formulación con viento no constante	8
3 Análisis de hipótesis de viento constante	13
3.1. Características del tráfico aéreo considerado	13
3.2. Efecto en el cálculo de la distancia mínima entre aeronaves	14
3.2.1. Metodología para el cálculo de errores	14
3.1.2. Errores cometidos en el cálculo de la distancia mínima	15
3.3. Análisis de errores máximos y mínimos	20
3.3.1. Efecto del viento según la dirección de las trayectorias de las aeronaves	24
3.4. Reducción de errores	28
3.4.1. Formulación del método de reducción de errores	28
3.4.2. Aplicación del método de reducción de errores	29
4 Análisis de hipótesis de componentes del viento independientes	33
4.1. Coeficientes de correlación	33
4.4.1. Coeficiente de Pearson	33
4.4.2. Coeficiente de Spearman	34
4.2. Correlaciones entre componentes meridional y zonal	34
4.3. Formulación de la caracterización estadística de la distancia mínima	35
4.3.1. Modelo con componentes independientes	36
4.4.2. Modelo con componentes relacionadas linealmente	36
4.4. Análisis de diferencias en la caracterización estadística de la distancia mínima entre aeronaves	37
5 Caracterización estadística de la distancia mínima	45
5.1. Formulación de la caracterización estadística de la distancia mínima	45
5.1.1. Modelo que reduce el error respecto al caso de viento no constante	45
5.1.2. Modelo con viento no constante	46
5.2. Análisis de diferencias	47
6 Conclusiones	49
6.1. Hipótesis de viento constante	49
6.2. Hipótesis de componentes del viento estadísticamente independientes	49
6.3. Aplicaciones en herramientas STCA y MTCD	50
Anexo: Modelado del viento	51
Referencias	53

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1. Errores cometidos cuando $\ \vec{s}_1\ = 20$ NM.	16
Tabla 3.2. Errores cometidos cuando $\ \vec{s}_1\ = 50$ NM.	18
Tabla 3.3. Errores cometidos cuando $\ \vec{s}_1\ = 100$ NM.	19
Tabla 3.4. Valores de la derivada de la velocidad de avance respecto al viento cruzado.	22
Tabla 3.5. Comparación de errores reducidos y no reducidos.	30
Tabla 4.1. Rango de variación de los vientos en los puntos A y B.	42
Tabla 5.1. Valores característicos de las diferencias en la media y la desviación típica.	48

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Esquema de los EPS.	2
Figura 2.1. Escenario general considerado.	5
Figura 2.2. Triángulo de vientos.	6
Figura 3.1. Características del tráfico considerado.	14
Figura 3.2. $ d_{\text{mín}}-d_{\text{mín-cte}} $ para $\ \vec{s}_1\ = 20\text{NM}$.	16
Figura 3.3. Porcentaje de casos en los que el error cometido supera un cierto valor cuando $\ \vec{s}_1\ = 20 \text{ NM}$.	17
Figura 3.4. $ d_{\text{mín}}-d_{\text{mín-cte}} $ para $\ \vec{s}_1\ = 50\text{NM}$.	17
Figura 3.5. Porcentaje de casos en los que el error cometido supera un cierto valor cuando $\ \vec{s}_1\ = 50 \text{ NM}$.	18
Figura 3.6. $ d_{\text{mín}}-d_{\text{mín-cte}} $ para $\ \vec{s}_1\ = 100\text{NM}$.	19
Figura 3.7. Porcentaje de casos en los que el error cometido supera un cierto valor cuando $\ \vec{s}_1\ = 100 \text{ NM}$.	20
Figura 3.8. Efecto del viento cruzado.	21
Figura 3.9. Viento que afecta a las aeronaves cuando $ d_{\text{mín}}-d_{\text{mín-cte}} $ es máximo.	23
Figura 3.10. Viento que afecta a las aeronaves cuando $ d_{\text{mín}}-d_{\text{mín-cte}} $ es mínimo.	24
Figura 3.11. Diferencia entre los vientos según la dirección de las trayectorias cuando el error absoluto es máximo.	25
Figura 3.12. Diferencia entre los vientos según la dirección de las trayectorias cuando el error absoluto es mínimo.	25
Figura 3.13. Diferencia de distancias recorridas cuando el error absoluto es máximo.	26
Figura 3.14. Diferencia de distancias recorridas cuando el error absoluto es mínimo.	27
Figura 3.15. Errores en el cálculo de la distancia.	28
Figura 3.16. Porcentaje de casos en los que el error cometido es superior a una cierta distancia cuando $\ \vec{s}_1\ = 20 \text{ NM}$.	31
Figura 3.17. Porcentaje de casos en los que el error cometido es superior a una cierta distancia cuando $\ \vec{s}_1\ = 50 \text{ NM}$.	31
Figura 3.18. Porcentaje de casos en los que el error cometido es superior a una cierta distancia cuando $\ \vec{s}_1\ = 100 \text{ NM}$.	32
Figura 4.1. Ejemplos de diferentes valores del coeficiente de Pearson.	33
Figura 4.2. Comparativa entre coeficiente de Pearson y Spearman.	34
Figura 4.3. Coeficientes de correlación entre componentes meridional y zonal.	35
Figura 4.4. Coeficientes de correlación entre w_y y w .	37
Figura 4.5. Diferencias en la media.	38
Figura 4.6. Diferencias en la desviación típica.	38
Figura 4.7. Coeficiente de Pearson en función de las diferencias en la media.	39

Figura 4.8. Coeficiente de Pearson en función de las diferencias en la desviación típica.	39
Figura 4.9. Clasificación de puntos.	40
Figura 4.10. Valores de los vientos cuando la diferencia es máxima (punto A).	41
Figura 4.11. Valores de los vientos cuando el coeficiente de Pearson es máximo (punto B).	41
Figura 4.12. Relación entre el rango de variación del viento y el error en la desviación típica.	43
Figura 4.13. Relación entre el rango de variación del viento y el error en la media.	43
Figura 5.1. Diferencias en la media.	47
Figura 5.2. Diferencias en la desviación típica.	48
Figura A.1. Elemento de malla de vientos	51
Figura A.2. Proyección azimutal gnomónica	52

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

La gestión del tránsito aéreo (Air Traffic Management, ATM) es la administración dinámica e integrada del tránsito aéreo (todas las aeronaves que se encuentran en vuelo y las que circulan por el área de maniobra de un aeródromo) y del espacio aéreo [3]. Una de las prestaciones que incluye el ATM es el servicio de control de tránsito aéreo (Air Traffic Control Service, ATC) entre cuyas labores se encuentra el prevenir colisiones entre aeronaves. Para realizar esta tarea, el ATC gestiona la detección de conflictos, el cual es el problema a resolver en este documento. Se considera un conflicto cuando se predice que dos aeronaves se encontrarán en el futuro a una distancia menor que un margen mínimo.

El espacio aéreo europeo es el más congestionado del mundo, lo cual dificulta aún más la labor y coordinación del ATM en general y la detección de conflictos en particular. Estos problemas de congestión comenzaron a ser especialmente importantes en la década de 1990, por ello, la Comisión Europea lanzó en 1999 la iniciativa de Cielo Único Europeo (Single European Sky, SES). El objetivo fundamental de esta iniciativa era crear un marco legislativo común para la aviación europea y poder hacer frente así al crecimiento del tráfico aéreo que se estaba experimentando [4]. En concreto, SESAR (Single European Sky ATM Research) es el pilar tecnológico de SES. Su propósito es desarrollar una nueva generación del sistema de gestión del tránsito aéreo que asegure la fluidez y seguridad del transporte aéreo durante los próximos 30 años [5]. Entre sus líneas de investigación presenta el dirigir, modelar y analizar la incertidumbre presente en el ATM.

La incertidumbre puede ser definida como la falta de conocimiento seguro y claro de algo. Las fuentes de incertidumbre presentes en el ATM se pueden clasificar de la siguiente forma [6]:

- Incertidumbre en los datos. Este tipo de incertidumbre aparece cuando algunos datos son conocidos, pero de manera inexacta, debido a que han sido obtenidos a través de medidas o estimaciones que presentan un cierto error. Algunos ejemplos pueden ser la posición de una aeronave dada por GPS, el peso al despegue...
- Incertidumbre operacional. Este tipo de incertidumbre está asociada principalmente a la acción de los humanos. Aunque las decisiones y maniobras ejecutadas por las personas estén basadas en reglas perfectamente conocidas, son difíciles de predecir y pueden originar comportamientos inesperados. Por consiguiente, introducen un grado de incertidumbre que puede afectar, por ejemplo, a los tiempos de rodadura, de salida o de llegada.
- Incertidumbre en los equipos. Este tipo de incertidumbre se refiere a problemas en los equipos que pueden ocasionar desde pequeños fallos en su funcionamiento, hasta el fallo total de los mismos. Así pues, un sistema puede desviarse de su modo normal de operación, comportarse de forma errática o incluso dejar de funcionar, introduciendo incertidumbre.
- Incertidumbre meteorológica. Las condiciones meteorológicas son exactamente predecibles únicamente en un horizonte temporal corto, sin embargo, los planes de vuelo manejan horizontes temporales intermedios. Ese desfase temporal provoca que los planes de vuelo deban basarse en predicciones meteorológicas que a menudo están lejos de la realidad, introduciendo así incertidumbre. Ejemplos de este tipo de incertidumbre pueden ser la aparición de tormentas o nieblas inesperadas, o la imposibilidad de predecir sin margen de error los vientos que afectarán a las aeronaves.

Este documento se centra en resolver la detección de conflictos bajo el efecto de la incertidumbre meteorológica, en concreto, se considera la incertidumbre asociada a los vientos que afectan a las aeronaves. El análisis del impacto de la incertidumbre originada por el viento en la detección de conflictos podría mejorar, en parte, los niveles de seguridad y eficiencia en las actuaciones del ATM. Para realizar tal propósito, se parte del artículo [1] *Probabilistic Aircraft Conflict Detection Considering Ensemble Weather Forecast* (Eulalia Hernández, Alfonso Valenzuela and Damián Rivas).

1.2 Sistemas de predicción por conjunto (Ensemble Prediction System, EPS)

Para tener en cuenta la incertidumbre asociada al viento, definida en la sección anterior, en la detección de conflictos, a lo largo de este documento se va a hacer uso de la técnica de sistemas de predicción por conjunto (Ensemble Prediction Systems, EPS). Esta técnica, en lugar de hacer una única predicción de las condiciones atmosféricas más probables, proporciona un conjunto de predicciones que pretenden dar una indicación del rango en el que puede encontrarse el estado de la atmósfera en el futuro [7].

La incertidumbre siempre está presente en los modelos de predicción meteorológica. Concretamente, las fuentes de incertidumbre más comunes en esos modelos son principalmente dos [7]:

- Los errores introducidos al utilizar condiciones iniciales que no son perfectamente conocidas. Esos pequeños errores pueden derivar en grandes errores en las predicciones, debido a la naturaleza caótica de las ecuaciones que modelan la evolución de la atmósfera.
- Los errores asociados a la imperfección del modelo matemático utilizado para modelar la atmósfera (no es un modelo totalmente preciso).

Debido a la presencia de esas fuentes de incertidumbre, se usan los sistemas de predicción por conjunto (EPS). Estos sistemas ejecutan de manera repetitiva uno o varios modelos deterministas realizando variaciones en las condiciones iniciales, creando así un conjunto de predicciones. De esa forma, se espera que ese conjunto de predicciones englobe al estado final en el que realmente se encontrará la atmósfera. Estas ideas se esquematizan en la siguiente figura [2]:

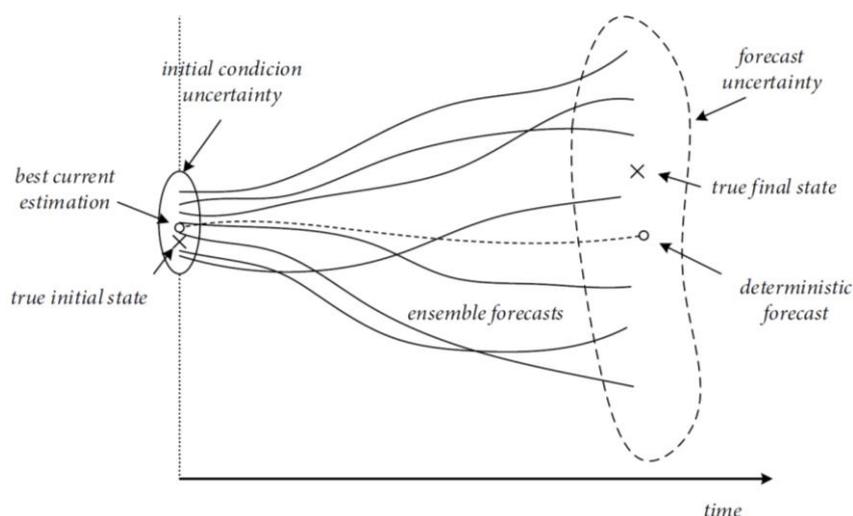


Figura 1.1. Esquema de los EPS.

Los conjuntos de predicciones están compuestos normalmente por un número que oscila entre los 10 y los 50 miembros. Algunos modelos de predicción son los siguientes: Met Office Global and Regional Ensemble Prediction System (MOGREPS), de Reino Unido, el cual está compuesto por 12 miembros, Prévision d'Ensemble Action de Recherche Petite Echelle Grande Echelle (PEARP), modelo francés compuesto por 35 miembros, y el EPS del Centro Europeo de Previsiones Meteorológicas a Plazo Medio (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, ECMWF), compuesto por 51 miembros. Estos conjuntos pueden combinarse para crear el SUPER multi-model ensemble, formado por 98 miembros.

En este estudio se va a emplear la información proporcionada por el modelo europeo (51 miembros) asociada a los vientos presentes en la atmósfera el día 6 de enero de 2017 a las 00:00 horas, para un nivel de vuelo correspondiente a 200 hPa. Se van a considerar las predicciones del viento en una serie de puntos concretos de la superficie terrestre, donde la latitud varía entre -35° y 70° , y la longitud entre -100° y 55° , con una tasa de resolución en ambos casos de 0.25° . Cada combinación latitud-longitud posible, se asocia a las coordenadas de un punto. Para cada uno de esos puntos (261441 en total), el modelo europeo proporciona 51 valores del viento meridional (Sur-Norte) y zonal (Oeste-Este).

1.3 Método de Monte Carlo

Otro de los métodos que se utilizan en el presente documento para tener en cuenta la incertidumbre, es el método de Monte Carlo. Éste es un método computacional que permite resolver problemas matemáticos en los que se ven involucradas variables que presentan un cierto grado de incertidumbre (las cuales pueden modelarse a través de variables aleatorias). Concretamente, se pretende utilizar el método de Monte Carlo para determinar cómo se comporta un modelo determinista cuando algunos de sus datos de entrada son variables que presentan incertidumbre.

Trasladando la idea al objeto de estudio de este documento, haciendo uso del método de Monte Carlo se pretende resolver el problema de la detección de conflictos cuando existe incertidumbre en los vientos que afectan a las aeronaves. Para ello, se dispone de un modelo determinista que permite resolver el problema cuando todos los datos (incluido el viento que afecta a las aeronaves) son perfectamente conocidos (la formulación de dicho modelo se realiza en el capítulo 2). Posteriormente, se modelan los vientos que afectan a las aeronaves como variables aleatorias y se hace uso del método de Monte Carlo para resolver el problema.

El método consiste en tomar un valor al azar del viento y resolver el problema de la detección de conflictos de manera determinista. Una idea importante es que ese proceso se repite tantas veces como sea necesario hasta que se tenga una muestra representativa de la solución del problema planteado (la detección de conflictos). Para determinar el número de veces que se va a repetir el proceso, se utiliza un criterio de parada. En este caso, se va a considerar como criterio de parada que la probabilidad de cometer un error mayor que una cierta tolerancia (ε) en el cálculo de la media de uno de los indicadores del problema (X_M de manera general), sea menor que un cierto valor δ , tal y como se describe en la siguiente ecuación:

$$P[|\bar{X}_M - E[X_M]| > \varepsilon] < \delta \quad (1.1)$$

Siendo:

$\bar{X}_M \equiv$ Valor de la media del indicador elegido obtenido por el método de Monte Carlo.

$E[X_M] \equiv$ Valor real de la media del indicador elegido.

Según [8], la probabilidad de la ecuación 1.1 puede estimarse de la siguiente forma:

$$P[|\bar{X}_M - E[X_M]| > \varepsilon] \approx 2 \left(1 - \Phi \left[\frac{\sqrt{N_t} \varepsilon}{\sigma_{X_M}} \right] \right) \quad (1.2)$$

Siendo:

$\Phi \equiv$ Función de distribución normal estándar acumulada.

$N_t \equiv$ Número total de veces que se repite el proceso.

$\sigma_{X_M} \equiv$ Desviación típica del indicador X_M .

A partir de la estimación 1.2, se va a establecer el criterio de parada del método de Monte Carlo en este documento.

1.4 Objetivos

Este documento se centra en analizar el conflicto entre dos aeronaves aproximándose, volando con velocidades aerodinámicas, cursos y altitudes constantes, en un escenario donde las condiciones meteorológicas (en concreto el viento) son inciertas. El artículo [1] *Probabilistic Aircraft Conflict Detection Considering Ensemble Weather Forecast* (Eulalia Hernández, Alfonso Valenzuela and Damián Rivas), que se utiliza como punto de partida del presente documento, establece dos hipótesis principales en su desarrollo del problema de la detección de conflictos:

- Considera que el viento que afecta a las aeronaves es constante en todo el espacio aéreo.
- Considera que las componentes meridional (sur-norte) y zonal (oeste-este) del viento son

estadísticamente independientes entre sí.

Los objetivos de este estudio son analizar esas hipótesis y comprobar si son realmente realistas y proporcionan una buena solución a la detección de conflictos, o si por el contrario, introducen errores inaceptables en la resolución del problema. En ese caso, se buscará el origen de esos errores y se propondrán formas de reducirlos.

1.5 Estructura del documento

Este documento consta de seis capítulos (incluyendo la introducción) y un anexo, cuyos contenidos son los siguientes:

En el capítulo 2 se realiza la formulación matemática de la detección de conflictos particularizada para dos casos diferentes. En primer lugar, se considera que el viento es constante en todo el espacio aéreo. En segundo lugar, se considera que el viento que afecta a las aeronaves depende de la ubicación en la que éstas se encuentren (viento no constante).

El capítulo 3 se centra en el primero de los objetivos del estudio. Se analizan las implicaciones que conlleva en la resolución de la detección de conflictos el suponer que el viento es constante (e igual al del punto de intersección de las rutas) en todo el espacio aéreo. Para ello, se analizan los errores introducidos por esa hipótesis, se busca el origen de éstos y se sugiere una forma de reducirlos, proponiendo otro viento constante que promedia los vientos de cara/cola que afectan a las aeronaves cuando el viento no es constante.

En el capítulo 4 se analizan las implicaciones que conlleva en la resolución de la detección de conflictos el suponer que las componentes del viento son estadísticamente independientes entre sí (segundo objetivo del documento). Para ello, se realiza la formulación del problema siguiendo dos modelos diferentes: el primero de ellos considera que las componentes del viento son estadísticamente independientes entre sí. El segundo de ellos hace uso de una variable auxiliar que sí es independiente respecto a una de las componentes del viento. Se analizan las diferencias entre los resultados obtenidos a partir de uno y otro modelo y se busca el origen de éstas.

En el capítulo 5 se utiliza el viento constante propuesto en el capítulo 3 (que reduce los errores respecto al caso de viento no constante) para caracterizar estadísticamente la detección de conflictos. De manera que se calcula la media y la desviación típica de ciertas variables utilizando ese viento constante, y se comparan con los modelos definidos en el capítulo 4.

En el capítulo 6 se exponen diferentes conclusiones extraídas de los resultados de los capítulos anteriores.

Para terminar, se incluye un anexo donde se explica cómo se ha modelado el viento cuando se plantea el problema de viento no constante (incluido en el capítulo 2).

2 FORMULACIÓN DE LA DETECCIÓN DE CONFLICTOS

El objetivo de este capítulo es realizar la definición y el planteamiento matemático de la detección de conflictos. Para ello, en primer lugar, se va a explicar de manera detallada el problema que se quiere resolver y se van a definir los parámetros que caracterizan el conflicto. En segundo lugar, se va a realizar la formulación matemática particularizada para dos situaciones diferentes: aquella en la que el viento que afecta a las aeronaves es constante en todo el espacio, y aquella en la que el viento depende de la posición en la éstas se encuentren (viento no constante).

2.1 Definición del problema

En el problema a resolver, se consideran dos aviones (A y B), como los que se representan en la siguiente figura:

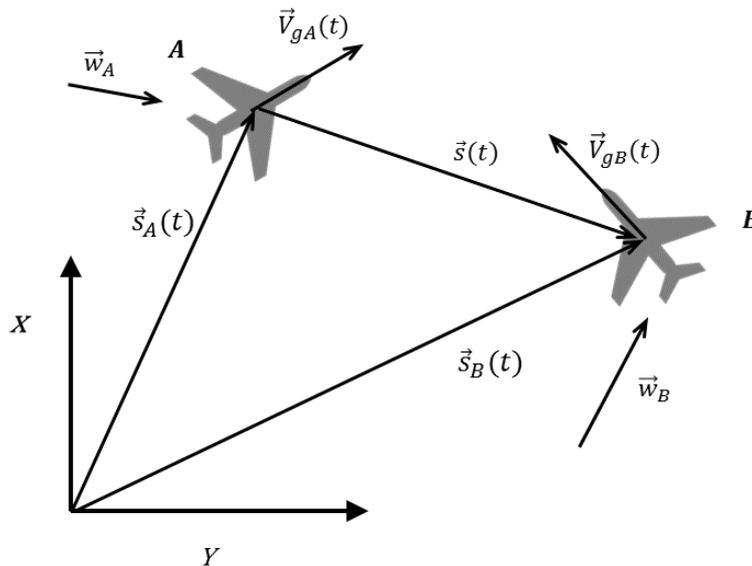


Figura 2.1. Escenario general considerado.

Para simplificar y acotar el problema, se establecen las siguientes hipótesis generales:

- Se toma como referencia el sistema $X - Y$ representado en la figura 2.1, fijo respecto a Tierra, donde el eje X apunta hacia el norte, y el eje Y apunta hacia el este.
- Ambas aeronaves vuelan con velocidades aerodinámicas constantes (V_A y V_B), cursos constantes (ψ_A y ψ_B) y a la misma altitud (también constante).
- Las posiciones iniciales de ambas aeronaves ($\vec{s}_{0,A}$ y $\vec{s}_{0,B}$), sus velocidades aerodinámicas (V_A y V_B) y sus cursos (ψ_A y ψ_B) son conocidos.
- La distancia inicial entre aeronaves es mayor que la separación horizontal mínima requerida D (considerada como 5NM).
- En el instante inicial, ambas aeronaves se están acercando.

Para caracterizar la detección de conflictos en el escenario definido, el objetivo de la formulación del problema

es calcular los siguientes indicadores:

- **Mínima distancia d_{min}** : Distancia mínima entre aeronaves a lo largo de sus trayectorias.
- **Tiempo hasta mínima distancia $t_{d_{min}}$** : Instante de tiempo en el que se alcanza la mínima distancia d_{min} . Considerando que el instante $t = 0$ es aquel en el que las aeronaves A y B se encuentran en las posiciones $\vec{s}_{0,A}$ y $\vec{s}_{0,B}$ respectivamente.

Cabe remarcar que todo este estudio va a estar enfocado al cálculo y estudio de la distancia mínima (d_{min}), indicador que permite determinar si existe o no conflicto. El tiempo hasta mínima distancia ($t_{d_{min}}$) va a tener un papel secundario a lo largo de todo el documento.

2.2 Formulación con viento constante

En esta sección se va a realizar la formulación matemática del problema definido en la sección 2.1 añadiendo una hipótesis adicional: el viento es constante en todo el espacio aéreo. Si se definen como \vec{w}_A y \vec{w}_B a los vientos que afectan a las aeronaves A y B respectivamente (en la figura 2.1 se representan esos vientos) la hipótesis anterior implica:

$$\vec{w}_A = \vec{w}_B \quad (2.1)$$

El objetivo es obtener las expresiones matemáticas que permiten calcular la distancia mínima y el tiempo hasta mínima distancia cuando el viento que afecta a las aeronaves es constante (variables que se definen como $d_{min-cte}$ y $t_{d_{min-cte}}$ respectivamente). Para conseguir tal propósito, se van a calcular las velocidades respecto a tierra de ambas aeronaves, $\vec{V}_{gA}(t)$ y $\vec{V}_{gB}(t)$, utilizando el triángulo de vientos representado en la siguiente figura:

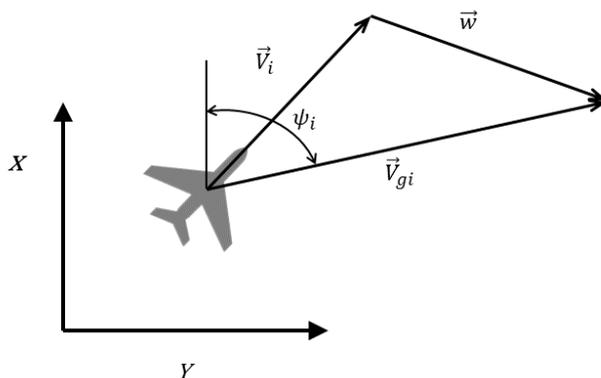


Figura 2.2. Triángulo de vientos.

La velocidad respecto a tierra de la aeronave i (donde i puede ser A o B) se define de la siguiente forma (observar figura 2.2):

$$\vec{V}_{gi} = \vec{V}_i + \vec{w} \quad (2.2)$$

El viento que afecta a las aeronaves va a estar caracterizado por su componente meridional (sur-norte) w_x y zonal (oeste-este) w_y que en este caso van a ser las mismas para ambas aeronaves:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Para determinar \vec{V}_{gi} según la ecuación 2.2, es necesario calcular la velocidad aerodinámica del avión (\vec{V}_i), la

cual se define de la siguiente forma (observar la figura 2.2):

$$\vec{V}_i = V_i \begin{bmatrix} \cos\left(\psi_i - \sin^{-1}\left(\frac{w_{c_i}}{V_i}\right)\right) \\ \sin\left(\psi_i - \sin^{-1}\left(\frac{w_{c_i}}{V_i}\right)\right) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Siendo w_{c_i} el viento cruzado que afecta a la aeronave i , el cual es positivo si sopla desde el ala izquierda (negativo si sopla desde el ala derecha):

$$w_{c_i} = w_y \cos(\psi_i) - w_x \sin(\psi_i) \quad (2.5)$$

Finalmente, las velocidades respecto a tierra de las aeronaves A y B son las siguientes:

$$\vec{V}_{gA} = V_A \begin{bmatrix} \cos\left(\psi_A - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cA}}{V_A}\right)\right) \\ \sin\left(\psi_A - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cA}}{V_A}\right)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\vec{V}_{gB} = V_B \begin{bmatrix} \cos\left(\psi_B - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cB}}{V_B}\right)\right) \\ \sin\left(\psi_B - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cB}}{V_B}\right)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$$

Por otro lado, al ser constantes con el tiempo las velocidades respecto a tierra, pueden integrarse fácilmente las expresiones 2.6 para obtener así las posiciones de ambas aeronaves en los ejes $X - Y$:

$$\vec{s}_A(t) = \vec{s}_{0,A} + \int_0^t \vec{V}_{gA} dt' = \vec{s}_{0,A} + \vec{V}_{gA} t \quad (2.7)$$

$$\vec{s}_B(t) = \vec{s}_{0,B} + \int_0^t \vec{V}_{gB} dt' = \vec{s}_{0,B} + \vec{V}_{gB} t$$

Llegados a este punto, resulta evidente que la distancia entre aeronaves es el módulo del vector $\vec{s}(t)$, representado en la figura 2.1:

$$d(t) = \|\vec{s}(t)\| \quad (2.8)$$

donde el vector $\vec{s}(t)$ se define como la posición relativa entre las aeronaves de la siguiente forma (observar figura 2.1):

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_B(t) - \vec{s}_A(t) \quad (2.9)$$

Sustituyendo las expresiones 2.7 en la ecuación 2.9 se obtiene:

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_{0,B} - \vec{s}_{0,A} + (\vec{V}_{gB} - \vec{V}_{gA})t \quad (2.10)$$

Si se definen las variables \vec{s}_0 y \vec{V}_g :

$$\vec{s}_0 = \vec{s}_{0,B} - \vec{s}_{0,A} \quad (2.11)$$

$$\vec{V}_g = \vec{V}_{gB} - \vec{V}_{gA} \quad (2.12)$$

A partir de esas definiciones, la ecuación 2.10 se reescribe:

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{V}_g t \quad (2.13)$$

Sustituyendo la ecuación 2.13 en la expresión 2.8, la distancia entre aeronaves resulta:

$$d(t) = \sqrt{s_0^2 + (\vec{V}_g t)^2 + 2\vec{s}_0 \cdot \vec{V}_g t} \quad (2.14)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación 2.14 e igualando a cero, se obtiene una única solución correspondiente con el instante de tiempo en el que la distancia entre aeronaves es mínima cuando el viento es constante:

$$t_{d_{\min-cte}} = -\frac{\vec{s}_0 \cdot \vec{V}_g}{V_g^2} \quad (2.15)$$

Sustituyendo la ecuación 2.15 en la igualdad 2.14, se obtiene la expresión de la distancia mínima entre aeronaves cuando el viento es constante:

$$d_{\min-cte} = d(t_{d_{\min-cte}}) = \sqrt{s_0^2 - \frac{(\vec{s}_0 \cdot \vec{V}_g)^2}{V_g^2}} \quad (2.16)$$

Observando las ecuaciones 2.15 y 2.16, cabe destacar que la incertidumbre cuando el viento es constante únicamente afecta a través de la velocidad relativa entre aeronaves (\vec{V}_g). Concretamente, afecta a través del viento cruzado presente en la expresión de \vec{V}_g , la cual puede obtenerse sustituyendo las ecuaciones 2.6 en la igualdad 2.12:

$$\vec{V}_g = V_B \begin{bmatrix} \cos\left(\psi_B - \sin^{-1}\left(\frac{W_{CB}}{V_B}\right)\right) \\ \sin\left(\psi_B - \sin^{-1}\left(\frac{W_{CB}}{V_B}\right)\right) \end{bmatrix} - V_A \begin{bmatrix} \cos\left(\psi_A - \sin^{-1}\left(\frac{W_{CA}}{V_A}\right)\right) \\ \sin\left(\psi_A - \sin^{-1}\left(\frac{W_{CA}}{V_A}\right)\right) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.3 Formulación con viento no constante

En este apartado se pretende resolver el problema planteado en la sección 2.1 bajo la siguiente consideración: el viento que afecta a una aeronave depende de la posición en la que ésta se encuentre. Esta formulación del problema es una aproximación más realista, ya que el viento en la atmósfera no es constante, sino que es función de la ubicación de la atmósfera que se considere. De ese modo, el viento que afecta a la aeronave i , se va a modelar de la siguiente forma (en el anexo presente al final del documento, se explica de manera detallada cómo se ha obtenido esta función):

$$\vec{w}_i(\vec{s}_i(t)) = \begin{bmatrix} w_{x_i}(\vec{s}_i(t)) \\ w_{y_i}(\vec{s}_i(t)) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

El objetivo de esta sección es obtener las expresiones matemáticas que permiten calcular la distancia mínima entre aeronaves y el tiempo hasta distancia mínima (variables que se definen como d_{\min} y $t_{d_{\min}}$ en este apartado) en este caso. Siguiendo un razonamiento similar al de la sección 2.2, el objetivo es obtener el vector $\vec{s}(t)$ para poder evaluar la ecuación 2.8 en el instante de tiempo $t_{d_{\min}}$. Sin embargo, existen dos diferencias principales respecto a la formulación de la sección anterior:

- Los vientos que afectan a las aeronaves A y B son (en general) diferentes.

- Los vientos que afectan a las aeronaves A y B dependen de las posiciones de las mismas y, por tanto, del tiempo (tal y como se representa en la ecuación 2.18).

Teniendo en cuenta esas consideraciones, las expresiones 2.6 que definen las velocidades respecto a tierra de las aeronaves A y B pueden reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\vec{V}_{gA}(\vec{s}_A(t)) &= V_A \begin{bmatrix} \cos\left(\psi_A - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cA}(\vec{s}_A(t))}{V_A}\right)\right) \\ \sin\left(\psi_A - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cA}(\vec{s}_A(t))}{V_A}\right)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{x_A}(\vec{s}_A(t)) \\ w_{y_A}(\vec{s}_A(t)) \end{bmatrix} \\ \vec{V}_{gB}(\vec{s}_B(t)) &= V_B \begin{bmatrix} \cos\left(\psi_B - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cB}(\vec{s}_B(t))}{V_B}\right)\right) \\ \sin\left(\psi_B - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cB}(\vec{s}_B(t))}{V_B}\right)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{x_B}(\vec{s}_B(t)) \\ w_{y_B}(\vec{s}_B(t)) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Sustituyendo esas igualdades en la ecuación 2.12, se obtiene la velocidad \vec{V}_g :

$$\begin{aligned}\vec{V}_g(t) &= V_B \begin{bmatrix} \cos\left(\psi_B - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cB}(\vec{s}_B(t))}{V_B}\right)\right) \\ \sin\left(\psi_B - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cB}(\vec{s}_B(t))}{V_B}\right)\right) \end{bmatrix} - V_A \begin{bmatrix} \cos\left(\psi_A - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cA}(\vec{s}_A(t))}{V_A}\right)\right) \\ \sin\left(\psi_A - \sin^{-1}\left(\frac{w_{cA}(\vec{s}_A(t))}{V_A}\right)\right) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} w_{x_B}(\vec{s}_B(t)) \\ w_{y_B}(\vec{s}_B(t)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{x_A}(\vec{s}_A(t)) \\ w_{y_A}(\vec{s}_A(t)) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.20)$$

Siendo:

$$w_{c_i}(\vec{s}_i(t)) = w_{y_i}(\vec{s}_i(t)) \cos(\psi_i) - w_{x_i}(\vec{s}_i(t)) \sin(\psi_i) \quad (2.21)$$

Ahora, al ser dependientes las velocidades respecto a tierra de las propias posiciones de las aeronaves, resulta complicado obtener las integrales que se calcularon en las ecuaciones 2.7. Por ello, para resolver el problema, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{d(\vec{s}_A(t))}{dt} &= \vec{V}_{gA}(\vec{s}_A(t)) \\ \frac{d(\vec{s}_B(t))}{dt} &= \vec{V}_{gB}(\vec{s}_B(t)) \\ \frac{d(\vec{s}(t))}{dt} &= \vec{V}_g(\vec{s}_A(t), \vec{s}_B(t))\end{aligned}\quad (2.22)$$

Donde cabe remarcar que la definición de $\vec{s}(t)$ no se ha visto modificada respecto a la sección anterior (ecuación 2.9). Por otro lado, las condiciones iniciales del sistema de ecuaciones diferenciales son las siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{s}_A(0) &= (x_{A,0}, y_{A,0}) \\ \vec{s}_B(0) &= (x_{B,0}, y_{B,0})\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\vec{s}(0) = (x_{B,0} - x_{A,0}, y_{B,0} - y_{A,0})$$

Tras resolver ese sistema de ecuaciones diferenciales, se obtienen las funciones $\vec{s}_B(t)$, $\vec{s}_A(t)$ y $\vec{s}(t)$, por lo que se puede calcular fácilmente $\vec{V}_g(t)$ a partir de la ecuación 2.20.

Una forma alternativa de resolver el problema, sería planteando el sistema de ecuaciones diferenciales 2.22, pero eliminando la ecuación correspondientes a $\vec{s}(t)$, de manera que al resolver el sistema se obtienen las funciones $\vec{s}_A(t)$ y $\vec{s}_B(t)$, y posteriormente, se calcula la función $\vec{s}(t)$ a partir de la ecuación 2.9. No obstante, se ha preferido considerar el sistema tal y como se representa en las ecuaciones 2.22, puesto que para resolverlo, se va a hacer uso de un método numérico que permite acotar directamente los errores asociados a la resolución del mismo. De esa forma, se consigue acotar los errores asociados al cálculo de $\vec{s}(t)$ de forma directa.

Al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales se obtiene la función $\vec{s}(t)$, por lo que puede evaluarse la distancia entre aeronaves en el instante de tiempo t a partir de la expresión 2.8. Sin embargo, el objetivo es obtener la distancia mínima entre aeronaves (d_{min}), por lo que es preciso determinar el instante de tiempo en el que se alcanza esa distancia mínima (t_{dmin}) para evaluar así la expresión 2.8 en ese instante de tiempo. Es decir, hay que igualar a cero la derivada respecto al tiempo de la función $d(t)$. Para ello, se va a reescribir la expresión 2.14 teniendo en cuenta que $\vec{s}(t)$ puede definirse en forma integral a partir de la siguiente relación:

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \int_0^t \vec{V}_g(t') dt' \quad (2.24)$$

Sustituyendo esa definición en la igualdad 2.8 se obtiene:

$$d(t) = \|\vec{s}(t)\| = \sqrt{s_0^2 + \left[\int_0^t \vec{V}_g(t') dt' \right]^2 + 2\vec{s}_0 \cdot \int_0^t \vec{V}_g(t') dt'} \quad (2.25)$$

Para conocer el instante de tiempo en el que la distancia es mínima (t_{dmin}), se deriva la ecuación anterior respecto al tiempo y se iguala a cero:

$$\frac{d(d(t))}{dt} = \frac{2 \int_0^t \vec{V}_g(t') dt' \cdot \vec{V}_g(t) + 2\vec{s}_0 \cdot \vec{V}_g(t)}{2d(t)} = 0 \quad (2.26)$$

Para que esa ecuación tenga solución, el numerador debe ser nulo, por tanto:

$$\left[\vec{s}_0 + \int_0^t \vec{V}_g(t') dt' \right] \cdot \vec{V}_g(t) = 0 \quad (2.27)$$

Sustituyendo la expresión 2.24 en la ecuación 2.27, se obtiene:

$$\vec{s}(t) \cdot \vec{V}_g(t) = 0 \quad (2.28)$$

Es decir, en el instante de tiempo en el que la distancia entre aeronaves es mínima, el producto escalar de la posición relativa y velocidad relativa entre aeronaves es nulo (la posición relativa y la velocidad relativa son perpendiculares). Esa ecuación puede resolverse, ya que las funciones $\vec{s}(t)$ y $\vec{V}_g(t)$ son conocidas tras la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales 2.22.

Llegados a este punto, es necesario realizar una discusión; como se ha explicado anteriormente, el objetivo es obtener el instante de tiempo en el que la distancia entre aeronaves es mínima, y también esa distancia mínima. Sin embargo, la ecuación 2.28 es el resultado de igualar a cero la derivada respecto al tiempo de la distancia entre aeronaves. A diferencia de la sección anterior, ya no se dispone de un viento constante e igual para ambas aeronaves. Por tanto, a priori, la ecuación 2.28 puede tener varias soluciones correspondientes a los valores de t para los que se alcanzan máximos relativos en la distancia, los valores t para los que se alcanzan mínimos relativos o el valor de t en el que se alcanza el mínimo absoluto (valor buscado), es decir, todos aquellos puntos en los que la derivada es nula. Debido a ese comportamiento, hay que prestar especial atención a la resolución de la ecuación 2.28, ya que se debe elegir únicamente la solución correspondiente al mínimo absoluto. En este estudio, se ha comprobado que, en todas las situaciones consideradas, la solución a la ecuación 2.28 es única, y además, es la correspondiente al mínimo absoluto buscado. Sin embargo, ese comportamiento no tiene por qué repetirse en otras circunstancias.

De esa forma, resolviendo la ecuación 2.28 y eligiendo la solución adecuada, se obtiene $t_{d_{\min}}$. Posteriormente, evaluando la ecuación 2.8 en ese instante de tiempo, se calcula la distancia mínima entre aeronaves (d_{\min}), por lo que el problema queda cerrado.

Por último, resulta interesante comparar los métodos de resolución de la detección de conflictos cuando se considera viento constante y cuando no. Por un lado, cuando el viento es constante, el problema se resuelve fácilmente evaluando directamente los indicadores que caracterizan el conflicto a partir de las posiciones iniciales de las aeronaves y sus velocidades (ecuaciones 2.15 y 2.16). Por otro lado, cuando el viento no es constante, es necesario, en primer lugar, resolver un sistema de seis ecuaciones diferenciales (sistema 2.22), y en segundo lugar, resolver la ecuación 2.28 y elegir la solución adecuada. Se tiene así un problema mucho más sencillo de resolver numéricamente cuando el viento es constante que cuando no lo es.

3 ANÁLISIS DE HIPÓTESIS DE VIENTO CONSTANTE

Uno de los objetivos del presente documento es determinar las implicaciones que origina el suponer que el viento es constante en todo el espacio aéreo (problema desarrollado en la sección 2.2). Éste va a ser el objetivo de este capítulo. Para ello, en primer lugar, se van a detallar las características del tráfico que se va a considerar a lo largo de todo el estudio. En segundo lugar, se van a cuantificar los errores que se comenten al calcular los indicadores elegidos para caracterizar la detección de conflictos cuando se supone que el viento es constante, en comparación con el caso de viento no constante (modelo más realista). Por último, se van a analizar esos errores para intentar detectar cuál es el origen de los mismos y cómo reducirlos.

En todos los casos en los que se considera que el viento no es constante, se requiere conocer la función 2.18 (siguiendo el procedimiento detallado en el anexo adjunto al final del documento). Para ello, a lo largo de todo este capítulo, se considera que los vientos existentes en los nodos de la malla son la media de los 51 valores que proporciona el modelo europeo.

3.1 Características del tráfico aéreo considerado

Antes de comenzar a dar resultados, se van a definir las características del tráfico aéreo que se va a considerar en este estudio (velocidades de las aeronaves, cursos, posiciones iniciales...) que fueron supuestos en la sección 2.1 como conocidas. Cabe matizar que esta configuración del tráfico es la considerada, no sólo en este capítulo 3, sino en todo el documento.

Se consideran dos aeronaves (A y B) cuyos cursos, velocidades aerodinámicas y posiciones iniciales van a ser los siguientes (tomando como referencia las características del tráfico aéreo utilizadas en [1]):

$$\begin{aligned}\psi_A &= 90^\circ \\ \psi_B &= 135^\circ \\ V_A &= 240 \text{ m/s} \\ V_B &= 240 \text{ m/s} \\ \vec{s}_{0,A} &= (0 \text{ m}, 0 \text{ m}) \\ \vec{s}_{0,B} &= (s_{0B}, s_{0B})\end{aligned}\tag{3.1}$$

Cabe destacar que la posición inicial de la aeronave B queda caracterizada por el término s_{0B} , el cual es un dato del problema (es conocido).

Para tener una visión más detallada del tráfico descrito, se representan en la siguiente figura las trayectorias que van a seguir ambas aeronaves:

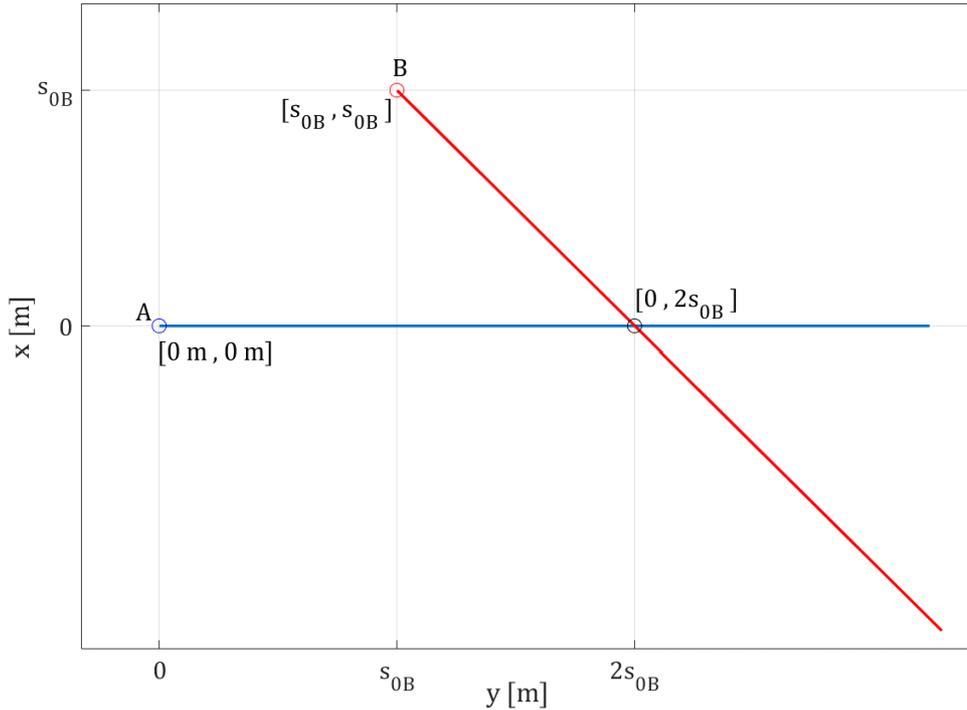


Figura 3.1. Características del tráfico considerado.

En la figura anterior, se representa también el punto de intersección de las trayectorias, cuyas coordenadas son:

$$\vec{s}_I = (x_i, y_i) = (0, 2s_{0B}) \quad (3.2)$$

Como es lógico, las coordenadas del punto de intersección dependen de la posición inicial de la aeronave B. A lo largo de este estudio se va a dar diferentes valores a s_{0B} , lo cual sería equivalente a dar diferentes valores a la variable $\|\vec{s}_I\|$, puesto que ambas están relacionadas de la siguiente forma:

$$\|\vec{s}_I\| = 2|s_{0B}| \quad (3.3)$$

Un aumento de la variable $\|\vec{s}_I\|$ provoca dos efectos; por un lado, las posiciones iniciales de las aeronaves se distancian (aumenta $|s_{0B}|$). Por otro lado, la distancia desde las posiciones iniciales de las aeronaves hasta el punto de intersección de las trayectorias, aumenta.

3.2 Efecto en el cálculo de la distancia mínima entre aeronaves

Para estudiar la validez de la hipótesis de viento constante, se van a calcular en esta sección los errores que se cometen al suponer viento constante en el cálculo de la distancia mínima (tomando como referencia la solución cuando el viento no es constante). Para ello, en primer lugar, se explica cómo se van a caracterizar y obtener esos errores y, en segundo lugar, se cuantifican para diferentes casos.

3.2.1 Metodología para el cálculo de errores

Para caracterizar los errores, se va a calcular la distancia mínima entre aeronaves suponiendo viento no constante (forma teóricamente más realista), variable definida como d_{min} en la sección 2.3. Posteriormente, se va a calcular la distancia mínima entre aeronaves suponiendo viento constante (a partir de la ecuación 2.16), variable que definida como $d_{min-cte}$ en la sección 2.2.

Para conocer los vientos que afectan a las aeronaves cuando se supone viento no constante (y calcular así

d_{min}), se asocia al punto de intersección de las rutas, una latitud y una longitud (tal y como se detalla en el anexo al final del documento). Para cumplir ese requisito y calcular los errores, el procedimiento que se va a seguir es el siguiente:

1. Se asocia al punto de intersección de las trayectorias una latitud y una longitud que coincida con un nodo de la malla de vientos.
2. Se calcula $d_{min-cte}$ suponiendo que el viento (constante a lo largo de todo el espacio aéreo) es el que existe en el punto de intersección de las trayectorias.
3. Se calcula d_{min} según lo explicado en la sección 2.3 (el viento que afecta a las aeronaves depende de la posición de las mismas).
4. Se calculan los errores según las ecuaciones 3.4 y 3.5.

Para obtener resultados más generales, ese procedimiento se va a repetir hasta que se haya asociado al punto de intersección de las trayectorias con todos los nodos pertenecientes a la malla de vientos.

El error absoluto en cada punto se define de la siguiente forma:

$$\epsilon_{abs} = |d_{min} - d_{min-cte}| \quad (3.4)$$

Mientras que el error relativo en cada punto:

$$\epsilon_{rel} = \frac{|d_{min} - d_{min-cte}|}{d_{min}} \cdot 100 \quad (3.5)$$

Por otro lado, la desviación típica de esos errores para todos los puntos se define de la siguiente forma:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N |\epsilon_i - E[\epsilon_i]|} \quad (3.6)$$

Por último, la media de los errores en todos los puntos:

$$E[\epsilon_i] = \frac{\sum_{i=1}^N \epsilon_i}{N} \quad (3.7)$$

Siendo:

$N \equiv$ Número de puntos en los que se ha calculado el error (261441 puntos).

Para terminar, también es interesante analizar cómo se comportan los errores a medida que las posiciones iniciales de las aeronaves se distancian (aumenta $\|\vec{s}_1\|$). En principio, resulta evidente que al aumentar $\|\vec{s}_1\|$, el término $|d_{min} - d_{min-cte}|$ crecerá. Eso se debe a que para calcular $d_{min-cte}$, se supone que el viento es constante e igual para las dos aeronaves a lo largo de sus trayectorias. Sin embargo, al calcular d_{min} , el viento que afecta a las aeronaves depende de las posiciones que ocupen. Así pues, al aumentar $\|\vec{s}_1\|$ (inicialmente la aeronave B se aleja más de la A), se está incrementando el intervalo de tiempo en el que las aeronaves están afectadas por vientos diferentes (cuando se calcula d_{min}) y, por tanto, el error cometido al suponer viento constante (queda representado por $|d_{min} - d_{min-cte}|$) va a aumentar. Para corroborar esta idea, se va a repetir el procedimiento anterior para tres valores diferentes de $\|\vec{s}_1\|$, asociados a 20, 50 y 100 NM.

3.2.2 Errores cometidos en el cálculo de la distancia mínima

En la siguiente figura, se representa el término $|d_{min} - d_{min-cte}|$ (equivalente al error absoluto ϵ_{abs}) para cada punto (λ, ϕ) en los que se ha colocado el punto de intersección de las trayectorias cuando el valor de $\|\vec{s}_1\|$ es 20 NM (para la configuración de tráfico descrita en 3.1):

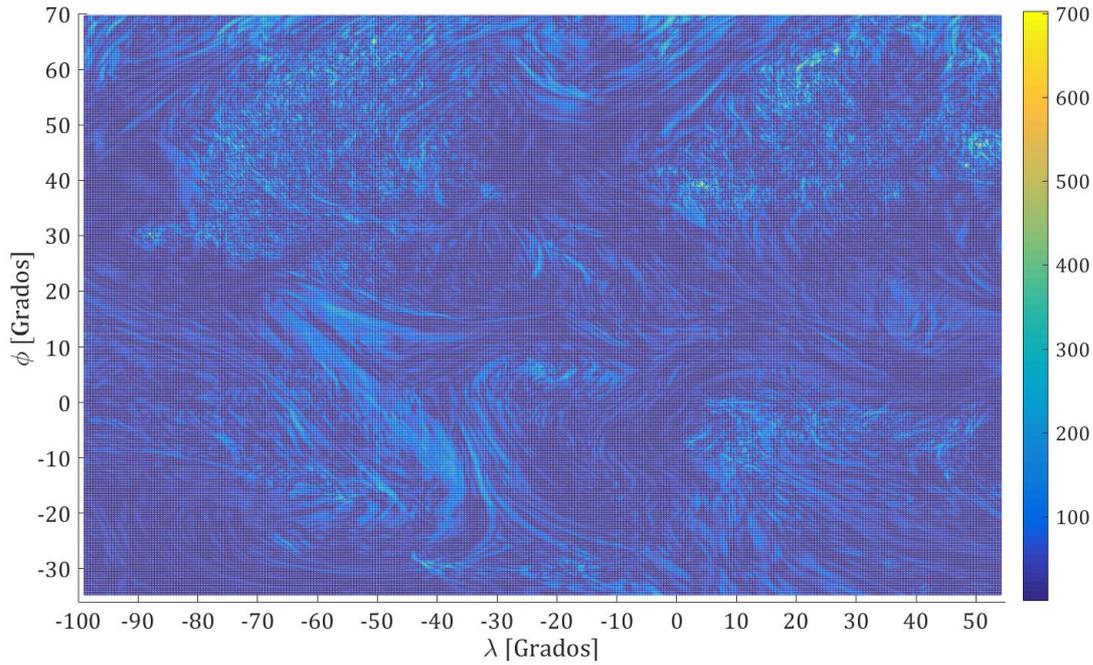


Figura 3.2. $|d_{min} - d_{min-cte}|$ para $\|\vec{s}_1\| = 20NM$.

En la siguiente tabla se muestran el error absoluto y relativo en los puntos en los que el término $|d_{min} - d_{min-cte}|$ (error absoluto) es máximo y mínimo para $\|\vec{s}_1\| = 20 NM$. También se exponen las coordenadas de los puntos en los que se alcanzan ese máximo y mínimo. Por último, se muestran la media y la desviación típica de los errores absolutos y relativos:

	ϵ_{abs}	ϵ_{rel}	λ	ϕ
Máximo ϵ_{abs}	702 m	6.40 %	4.25°	39.25°
Mínimo ϵ_{abs}	8.77e-05 m	1.03e-06 %	27.5°	30.5°
Valor medio	40.55 m	0.43 %	-	-
Desviación típica	11.70 m	0.11 %	-	-

Tabla 3.1. Errores cometidos cuando $\|\vec{s}_1\| = 20 NM$.

Para contabilizar los errores de manera más general, se representa en la siguiente imagen, en el eje de ordenadas, el porcentaje de casos en los que el error absoluto cometido es superior a un cierto valor dado en el eje de abscisas cuando el valor de $\|\vec{s}_1\|$ es de 20 millas náuticas:

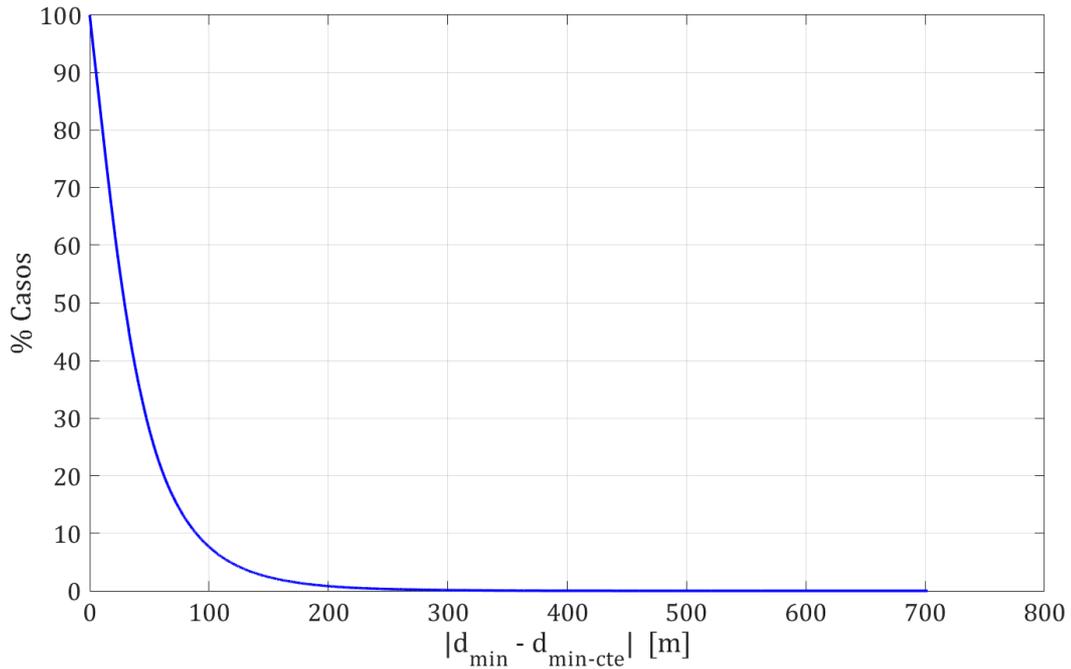


Figura 3.3. Porcentaje de casos en los que el error cometido supera un cierto valor cuando $\|\vec{s}_1\| = 20 \text{ NM}$.

Por otro lado, para comprobar el efecto que provoca en los errores el aumentar la variable $\|\vec{s}_1\|$, se representa el término $|d_{\min} - d_{\min-cte}|$ para cada punto (λ, ϕ) en los que se ha colocado el punto de intersección de las trayectorias cuando $\|\vec{s}_1\| = 50 \text{ NM}$, obteniendo el siguiente resultado:

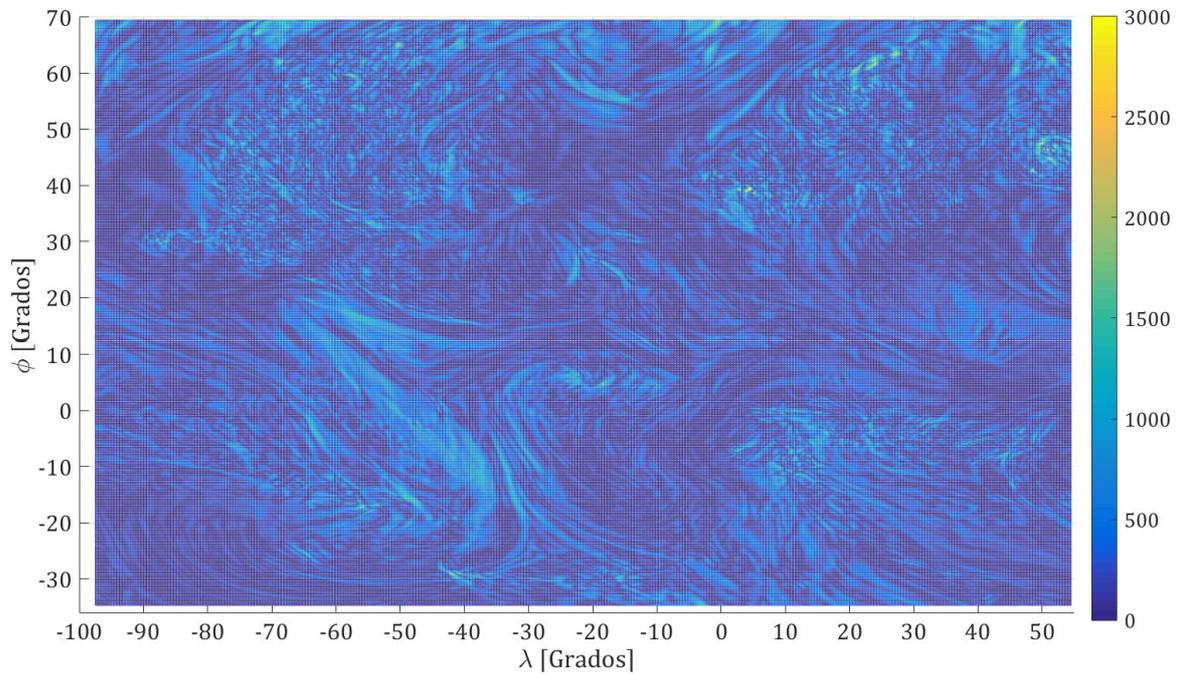


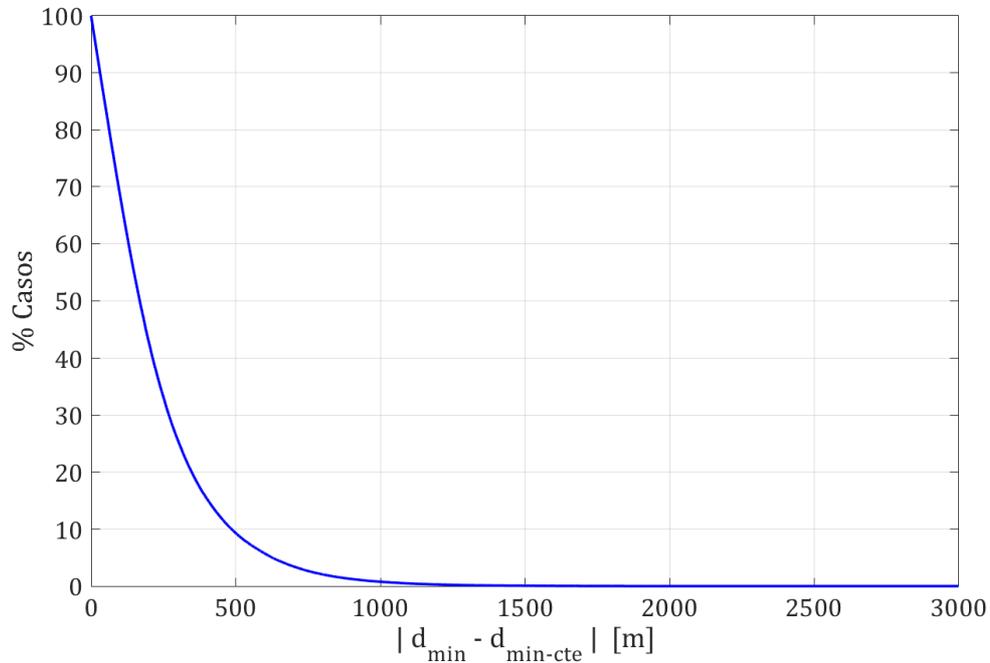
Figura 3.4. $|d_{\min} - d_{\min-cte}|$ para $\|\vec{s}_1\| = 50 \text{ NM}$.

De nuevo, se representan en la siguiente tabla el error absoluto y relativo en los puntos en los que el término $|d_{\min} - d_{\min-cte}|$ (error absoluto) es máximo y mínimo para $\|\vec{s}_1\| = 50 \text{ NM}$. También se exponen las coordenadas de los puntos en los que se alcanzan ese máximo y mínimo. Por último, se muestran la media y la desviación típica de los errores absolutos y relativos:

	ϵ_{abs}	ϵ_{rel}	λ	ϕ
Máximo ϵ_{abs}	2998.70 m	10.55 %	4.5°	39.25°
Mínimo ϵ_{abs}	0.004 m	2.03e-5%	-81.75°	-0.25°
Valor medio	223.36 m	0.972 %	-	-
Desviación típica	45.16 m	0.20 %	-	-

Tabla 3.2. Errores cometidos cuando $\|\vec{s}_I\| = 50 \text{ NM}$.

Se puede comprobar en esa tabla que, al distanciarse las aeronaves (aumenta $\|\vec{s}_I\|$) los errores crecen, tal y como se comentó en la sección 3.2.1. A continuación, se representa en el eje de ordenadas, el porcentaje de casos en los que el error absoluto cometido es superior a un cierto valor dado en el eje de abscisas cuando el valor de $\|\vec{s}_I\|$ es de 50 millas náuticas:

Figura 3.5. Porcentaje de casos en los que el error cometido supera un cierto valor cuando $\|\vec{s}_I\| = 50 \text{ NM}$.

Por último, en la siguiente figura se representa el término $|d_{\min} - d_{\min-cte}|$ para cada punto (λ, ϕ) en los que se ha colocado el punto de intersección de las trayectorias para $\|\vec{s}_I\| = 100 \text{ NM}$, obteniendo el siguiente resultado:

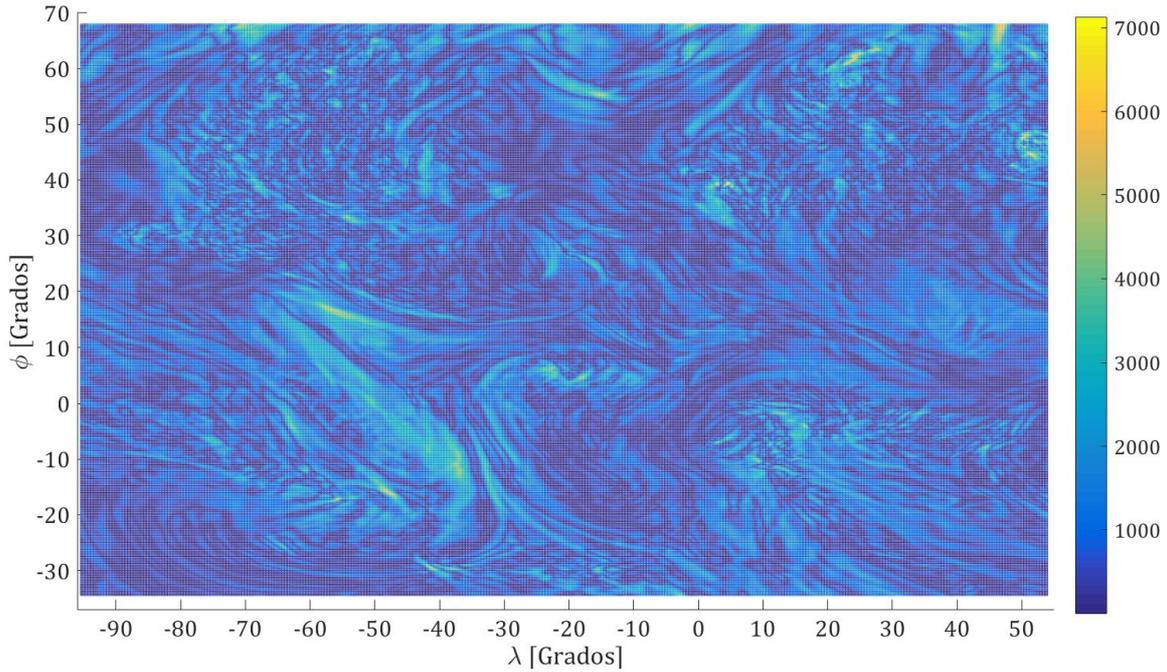


Figura 3.6. $|d_{min} - d_{min-cte}|$ para $\|\vec{s}_1\| = 100NM$.

Comparando las figuras 3.2, 3.4 y 3.6, se puede comprobar que, de manera general, se ha incrementado el término $|d_{min} - d_{min-cte}|$ a medida que las posiciones iniciales de las aeronaves se distancian.

Se representan en la siguiente tabla el error absoluto y relativo en los puntos en los que el término $|d_{min} - d_{min-cte}|$ (error absoluto) es máximo y mínimo para $\|\vec{s}_1\| = 100 NM$. También se exponen las coordenadas de los puntos en los que se alcanzan ese máximo y mínimo. Por último, se muestran la media y la desviación típica de los errores absolutos y relativos:

	ϵ_{abs}	ϵ_{rel}	λ	ϕ
Máximo ϵ_{abs}	7123.4 m	12.30 %	4.5°	38.75°
Mínimo ϵ_{abs}	0.0027 m	5.9e-06 %	-26°	66.25°
Valor medio	762.3 m	1.66 %	-	-
Desviación típica	127.26 m	0.32 %	-	-

Tabla 3.3. Errores cometidos cuando $\|\vec{s}_1\| = 100 NM$.

Para terminar, se representa en la siguiente imagen, en el eje de ordenadas, el porcentaje de casos en los que el error absoluto cometido es superior a un cierto valor dado en el eje de abscisas cuando el valor de $\|\vec{s}_1\|$ es de 100 millas náuticas:

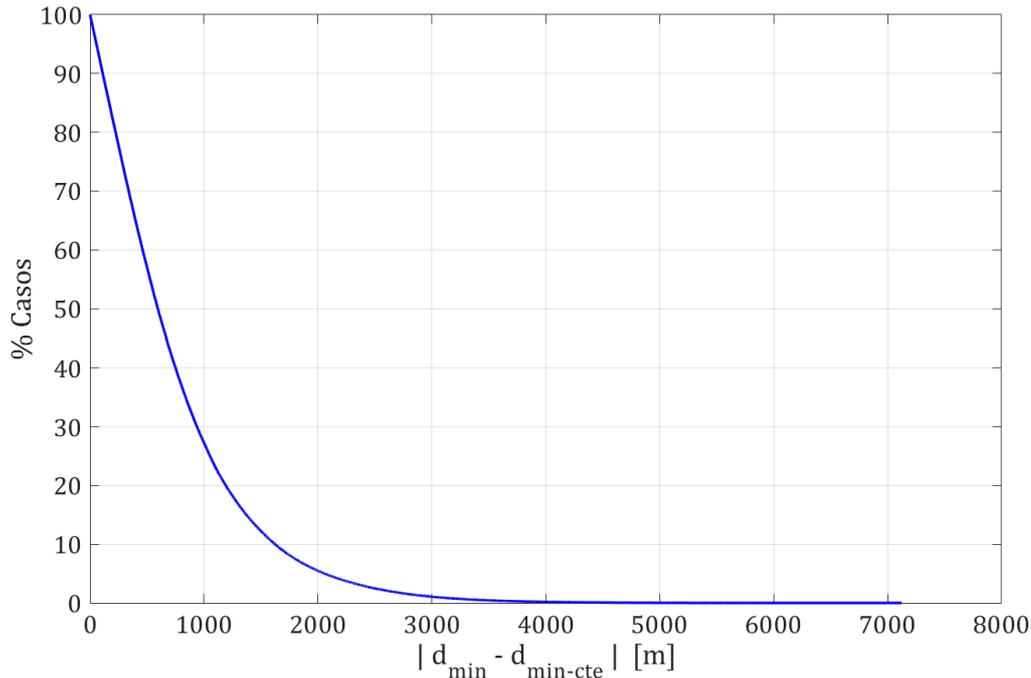


Figura 3.7. Porcentaje de casos en los que el error cometido supera un cierto valor cuando $\|\vec{s}_1\| = 100 \text{ NM}$.

A la luz de los resultados obtenidos, pueden realizarse varios comentarios:

El primero de ellos es que la hipótesis de viento constante proporciona mejores resultados cuando las aeronaves parten desde posiciones más próximas. Es decir, los errores aumentan a medida que $\|\vec{s}_1\|$ crece.

En segundo lugar, cabe destacar que los errores son muy dependientes del viento no constante que afecta a las aeronaves, es decir, considerando el caso de $\|\vec{s}_1\| = 50 \text{ NM}$, los errores absolutos máximo y mínimo difieren notablemente, lo mismo ocurre con los errores relativos.

Por último, considerando el caso de $\|\vec{s}_1\| = 50 \text{ NM}$, en términos medios el error cometido es 223.36 m (representa un 2.41 % de la separación horizontal mínima requerida, establecida en 5NM) por lo que el considerar viento constante es una aproximación del problema que podría ser válida o no, dependiendo de la precisión que se requiera. Sin embargo, habría que matizar que esa dependencia de los errores con el viento que afecta a las aeronaves puede originar que el error cometido sea de 2998.7 m (un 32.38 % de las 5 NM consideradas como separación horizontal mínima requerida), muy diferente al error medio.

3.3 Análisis de errores máximos y mínimos

Una vez se ha comprobado en la sección anterior que la hipótesis de viento constante puede originar errores muy dispares, en esta sección se pretende analizar aquellas situaciones donde los errores son máximos y mínimos (particularizando para el caso de $\|\vec{s}_1\| = 50 \text{ NM}$). En concreto, se busca relacionar las características del viento que afecta a las aeronaves en ambos casos con los errores cometidos, intentando identificar así la causa de los mismos.

Para ello, se van a comparar las expresiones 2.16 y 2.25 que permiten calcular la distancia entre aeronaves para viento constante y no constante respectivamente. La única diferencia entre ambas expresiones es que \vec{V}_g es constante respecto al tiempo en 2.16 (el viento es constante), mientras que en la ecuación 2.25 no lo es (el viento no es constante respecto al tiempo). Comparando las ecuaciones que definen \vec{V}_g en uno y otro caso (ecuaciones 2.17 y 2.20), se aprecian dos diferencias entre ambas: la primera de ellas es que el viento cruzado es constante en la ecuación 2.17, mientras que en la expresión 2.20 depende del tiempo. La segunda de ellas es que existe un término que aparece en la expresión 2.20 y no aparece en la expresión 2.17, la diferencia de vientos que afecta a una y otra aeronave:

$$\begin{bmatrix} w_{x_B}(\vec{s}_B(t)) \\ w_{y_B}(\vec{s}_B(t)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{x_A}(\vec{s}_A(t)) \\ w_{y_A}(\vec{s}_A(t)) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Llegados a este punto, resulta interesante analizar la primera de las diferencias que se han comentado, el viento cruzado. Se va a comparar el efecto que provoca el viento cruzado y el viento según la dirección de las trayectorias de las aeronaves (ambas son componentes ortogonales de la velocidad \vec{V}_{gi}) en la velocidad \vec{V}_{gi} , para comprobar así cuál es el término dominante. Para ello, se va a hacer uso de la representación de la velocidad respecto a tierra (\vec{V}_{gi}) de la siguiente figura:

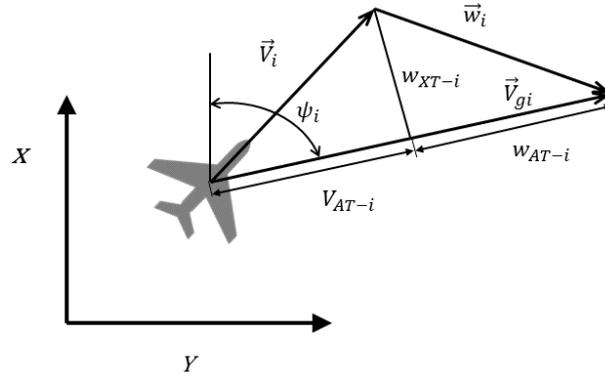


Figura 3.8. Efecto del viento cruzado.

El módulo de la velocidad respecto a tierra de la aeronave (velocidad de avance de la aeronave) puede expresarse de la siguiente forma (observar figura 3.8):

$$\|\vec{V}_{gi}\| = V_{AT-i} + w_{AT-i} \quad (3.9)$$

Siendo:

$w_{AT-i}(t) \equiv$ Viento según la dirección de la trayectoria de la aeronave i (considerando positivo al viento de cola y negativo al viento de cara).

$V_{AT-i} \equiv$ Componente de la velocidad aerodinámica a lo largo de la trayectoria de la aeronave i

Por otro lado, V_{AT-i} puede definirse de la siguiente forma (observar figura 3.8):

$$V_{AT-i} = \sqrt{V_i^2 - w_{XT-i}^2} \quad (3.10)$$

Siendo:

$w_{XT-i} \equiv$ Viento cruzado que afecta a la aeronave i .

Sustituyendo la ecuación 3.10 en la igualdad 3.9, se obtiene:

$$\|\vec{V}_{gi}\| = \sqrt{V_i^2 - w_{XT-i}^2} + w_{AT-i} \quad (3.11)$$

El viento cruzado afecta directamente a la velocidad de avance de la aeronave, $\|\vec{V}_{gi}\|$. En concreto, tal y como puede observarse en la figura 3.8, el viento cruzado modifica la dirección de la velocidad aerodinámica, reduciendo así la proyección de ésta sobre la dirección de avance de la aeronave. Por tanto, a mayor viento cruzado, menor es la proyección de la velocidad aerodinámica sobre la dirección de avance de la aeronave (vuela más lento respecto a tierra).

Así pues, mientras que el viento según la dirección de la trayectoria de la aeronave puede provocar que la velocidad de avance aumente o disminuya dependiendo de si el viento es de cola o cara respectivamente, el

viento cruzado siempre provoca una reducción del módulo de la velocidad respecto a tierra (observar ecuación 3.11). Sin embargo, aunque tanto el viento cruzado como el viento según la dirección de la trayectoria de la aeronave afectan a la velocidad de avance, se va a comprobar que el término dominante es el asociado al viento según la dirección de la trayectoria. Para ello, se realizan las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial \|\vec{V}_{gi}\|}{\partial w_{AT-i}} = 1 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \|\vec{V}_{gi}\|}{\partial w_{ci}} = \frac{-w_{XT-i}}{\sqrt{V_i^2 - w_{XT-i}^2}} \approx \frac{-w_{XT-i}}{V_i} \quad (3.13)$$

Para poder comparar la velocidad aerodinámica de la aeronave (V_i) con el viento cruzado que le afecta (w_{XT-i}), se puede concretar, por ejemplo, que una velocidad típica de crucero serían 470 knots (870.44 km/h), mientras que un valor típico de la velocidad del viento en un jet stream podrían ser unos 108 knots (200 km/h). De esa forma, si se supone una velocidad aerodinámica de 470 knots y un viento cruzado de 108 knots (éste sería un viento cruzado bastante intenso, puesto que es la velocidad del viento en un jet stream), el cociente presente en la ecuación 3.13 es el siguiente:

$$\frac{\partial \|\vec{V}_{gi}\|}{\partial w_{ci}} = \frac{w_{XT-i}}{V_i} = 0.23 < 1 \quad (3.14)$$

Es decir, considerando un caso bastante desfavorable donde la aeronave está afectada por un viento cruzado a velocidad de un jet stream, el efecto de las variaciones del viento cruzado es bastante menor que el efecto que provocan las variaciones del viento según la dirección de la trayectoria de la aeronave (la derivada de la ecuación 3.13 es menor que la derivada de la ecuación 3.12). Para realizar una comparación de manera más general y cuantificar numéricamente el efecto del viento cruzado, se representan en la siguiente tabla, la media, la desviación típica y los máximos de la derivada de la velocidad de avance de las aeronaves respecto al viento cruzado (ecuación 3.13), considerando las características del viento de todos los nodos de la malla de vientos para las aeronaves A y B:

	$\frac{w_{cA}}{\sqrt{V_A^2 - w_{cA}^2}}$	$\frac{w_{cB}}{\sqrt{V_B^2 - w_{cB}^2}}$
Máximo	0.2116	0.3367
Valor medio	0.0423	0.0655
Desviación típica	0.0118	0.0211

Tabla 3.4. Valores de la derivada de la velocidad de avance respecto al viento cruzado.

En esa tabla se puede comprobar que los valores medios de la expresión 3.13 para las aeronaves A y B son mucho menores que la unidad. Sin embargo, los valores máximos son superiores al valor medio, aunque siguen siendo menores que la unidad. Esos valores máximos se deben a vientos cruzados bastante intensos (de 176 km/h y 273 km/h para las aeronaves A y B respectivamente). Así pues, puede afirmarse que las variaciones del viento según la dirección de la trayectoria de la aeronave provocan un efecto dominante respecto a la velocidad de avance en comparación con las variaciones del viento cruzado.

Tras el análisis anterior y volviendo a las dos diferencias que se destacaron al comienzo de esta sección, pueden realizarse varios comentarios:

En primer lugar, el origen de los errores cometidos está relacionado con el hecho de que los vientos que afectan a las aeronaves A y B en cada instante de tiempo sean diferentes (ecuación 3.8), lo cual es un resultado

lógico, puesto que a medida que aumenta la discrepancia entre los vientos de las aeronaves A y B, también aumenta la debilidad de la hipótesis de viento constante (mismo viento para ambas aeronaves).

En segundo lugar, otro aspecto a analizar sería la diferencia entre el viento que afecta a las aeronaves a lo largo de sus trayectorias, y el viento que existe en el punto de intersección de las mismas (viento que se supone constante en el cálculo de $d_{\min-cte}$). Si el viento que afecta a las aeronaves a lo largo de sus trayectorias es muy diferente al viento que hay en el punto de intersección, los errores cometidos al suponer viento constante deberían aumentar. Es decir, no habría que analizar únicamente la diferencia entre los vientos afecta a ambas aeronaves, sino también la diferencia entre esos vientos, y el viento que se supone como constante.

En tercer lugar, sería interesante analizar cuál es el efecto de las variaciones del viento según la dirección de las trayectorias de las aeronaves en los errores cometidos, puesto que se ha comprobado en el análisis anterior que su efecto es dominante respecto al efecto de las variaciones del viento cruzado.

Para profundizar en estos conceptos, se reproducen en la siguiente imagen, las trayectorias que siguen las aeronaves, y se representan con vectores los vientos que éstas soportan a lo largo de sus trayectorias cuando el término $|d_{\min} - d_{\min-cte}|$ es máximo (punto de coordenadas $(\lambda, \phi) = (4.5^\circ, 39.25^\circ)$), para $\|\vec{s}_1\| = 50NM$. Para tener una referencia, el módulo del viento máximo que soporta la aeronave A a lo largo de su trayectoria es de 51.37 km/h, mientras que para la aeronave B es de 39.63 km/h. Por otro lado, se representan con circunferencias las posiciones en las que se encuentran las aeronaves cuando la distancia entre ellas es mínima.

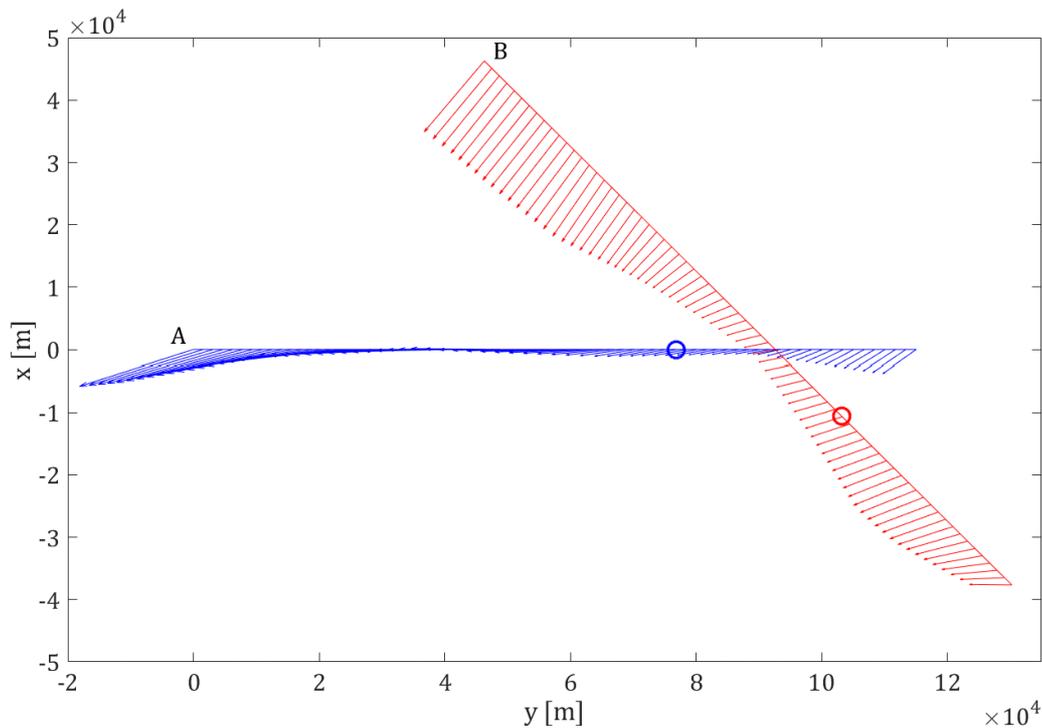


Figura 3.9. Viento que afecta a las aeronaves cuando $|d_{\min} - d_{\min-cte}|$ es máximo.

A continuación, se representa la misma figura anterior, particularizada para el caso en el que el término $|d_{\min} - d_{\min-cte}|$ es mínimo (punto de coordenadas $(\lambda, \phi) = (-81.75^\circ, -0.25^\circ)$), para $\|\vec{s}_1\| = 50NM$. En este caso, el módulo del viento máximo que soporta la aeronave A a lo largo de su trayectoria es de 191.91 km/h, mientras que para la aeronave B es de 193.93 km/h.

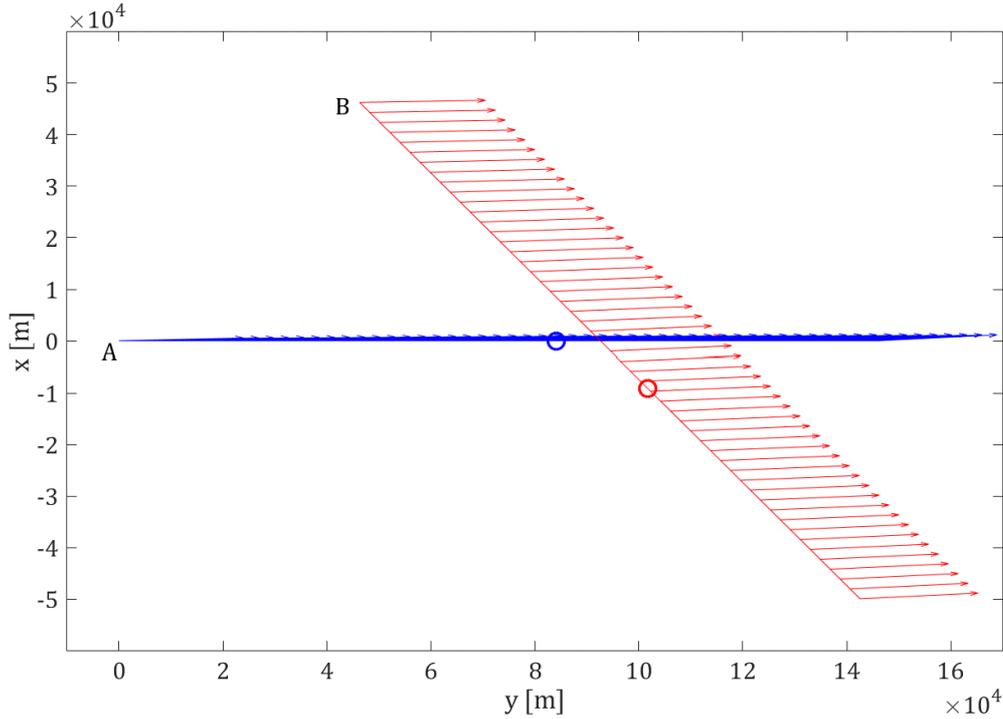


Figura 3.10. Viento que afecta a las aeronaves cuando $|d_{\text{mín}} - d_{\text{mín-cte}}|$ es mínimo.

Observando las figuras anteriores, se percibe que los vientos que afectan a las aeronaves A y B en la figura 3.9 son bastante diferentes entre sí (en módulo y dirección) a lo largo de sus trayectorias, algo que no ocurre en la figura 3.10 (los vientos que afectan a las aeronaves A y B a lo largo de sus trayectorias son prácticamente iguales).

Además, también se comprueba que en la figura 3.9, el viento en el punto de intersección es muy diferente al viento que afecta a las aeronaves a lo largo de sus trayectorias, mientras que en la figura 3.10 existe una similitud mucho mayor.

Por último, cabe destacar que en la figura 3.9, la aeronave A se ve afectada por un viento de cara muy intenso antes de llegar a la posición donde se alcanza la distancia mínima (representada por una circunferencia), ese viento de cara es bastante más intenso que el que existe en el punto de intersección de las trayectorias y puede ser el causante de los errores cometidos en ese caso. Anteriormente, se ha comprobado que el viento provoca que los errores cometidos en el cálculo de la distancia mínima varíen notablemente (sección 3.2.2), es decir, el viento y los errores están relacionados. Además, también se ha comprobado que los efectos del viento cruzado pueden despreciarse en comparación con los efectos del viento según la dirección de las trayectorias. Por tanto, debe existir una relación entre los errores cometidos y el viento según la dirección de las trayectorias, esta relación será el objeto de estudio de la siguiente sección.

3.3.1 Efecto del viento según la dirección de las trayectorias de las aeronaves

Para realizar este análisis, se va a comparar el viento según la dirección de las trayectorias de las aeronaves A y B, cuando se supone viento constante y cuando no, a partir de las siguientes funciones:

$$w_{\text{dif-AT-A}}(t) = w_{\text{nocte-AT-A}}(t) - w_{\text{cte-int-AT-A}} \quad (3.15)$$

$$w_{\text{dif-AT-B}}(t) = w_{\text{nocte-AT-B}}(t) - w_{\text{cte-int-AT-B}}$$

Siendo:

$w_{\text{nocte-AT-}i}(t) \equiv$ Viento según la dirección de la trayectoria de la aeronave i (considerando positivo al viento de cola y negativo al viento de cara) cuando el viento no es constante.

$w_{cte-int-AT-i} \equiv$ Viento según la dirección de las trayectorias de la aeronave i (considerando positivo al viento de cola y negativo al viento de cara) cuando el viento es constante e igual al viento en el punto de intersección de las rutas.

Representando las funciones 3.15 en el caso en el que el error absoluto es máximo (para $\|\vec{s}_1\| = 50NM$), se obtiene la siguiente gráfica:

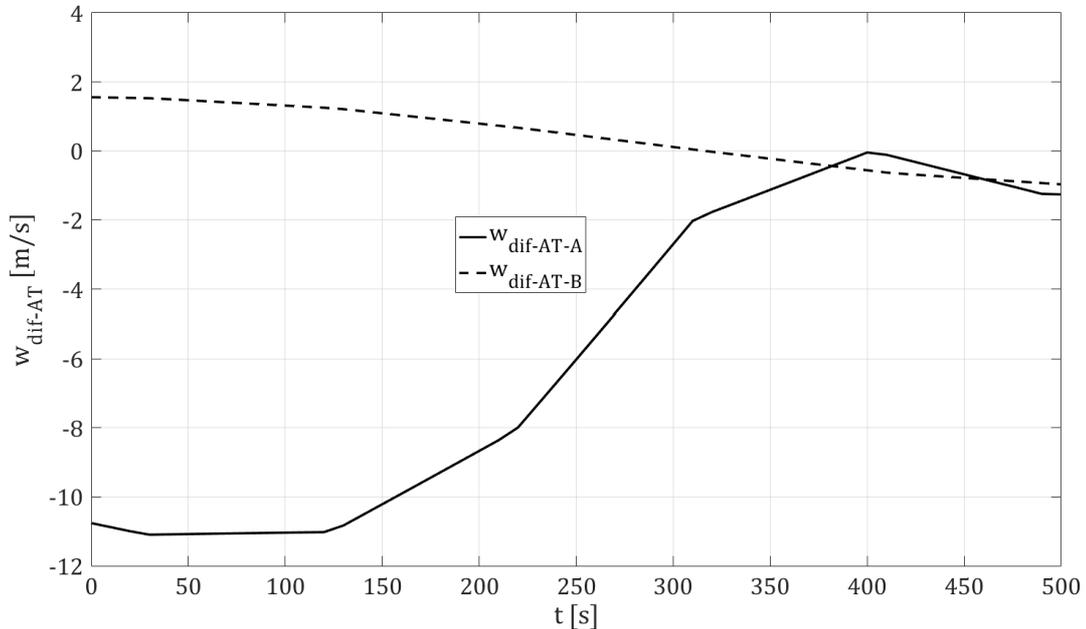


Figura 3.11. Diferencia entre los vientos según la dirección de las trayectorias cuando el error absoluto es máximo.

Por otro lado, representando las mismas funciones cuando el error absoluto es mínimo, se obtiene la siguiente figura:

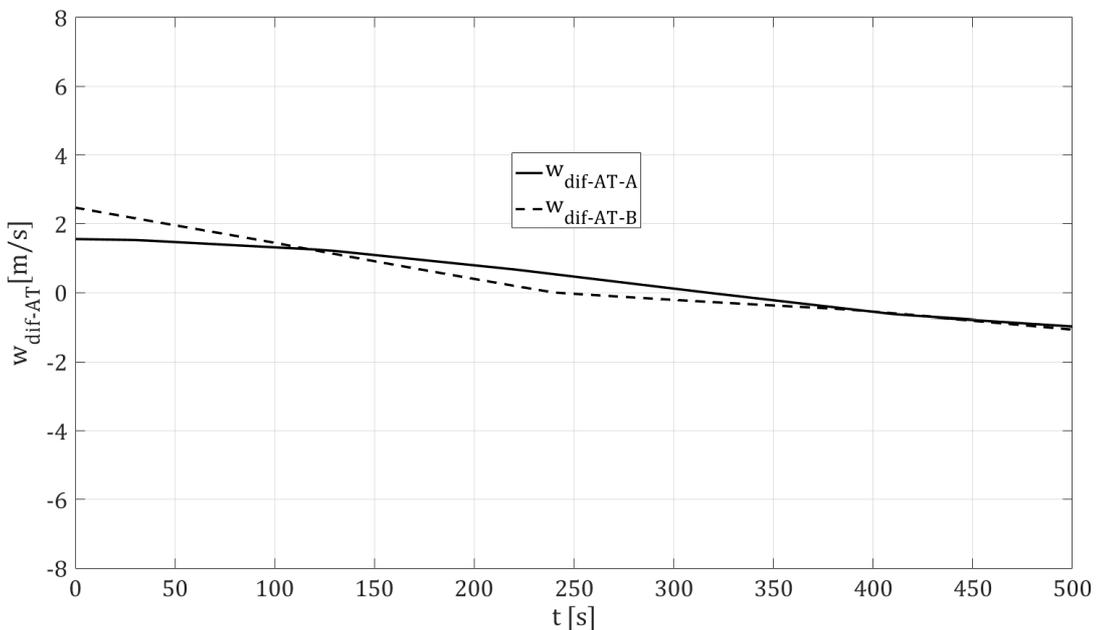


Figura 3.12. Diferencia entre los vientos según la dirección de las trayectorias cuando el error absoluto es mínimo.

Comparando ambas figuras, se puede observar que cuando el error absoluto es máximo (figura 3.11), la aeronave A se ve afectada por un viento de cara bastante más intenso que el viento de cara que aparece cuando se supone viento constante (observar además la figura 3.9), es decir, ese viento de cara va a provocar que la

aeronave A avance más lentamente en su trayectoria cuando el viento no es constante en comparación con el caso de viento constante. Mientras que la aeronave B se ve afectada por un viento de cola levemente más intenso que el existente en el punto de intersección de las trayectorias (observar figura 3.9), por lo que se va a provocar el efecto contrario, la aeronave B va a avanzar más rápidamente a lo largo de su trayectoria cuando el viento no es constante.

Cuando el error absoluto es mínimo (figura 3.12), ambas aeronaves se ven afectadas por un viento de cola más intenso que el existente en el punto de intersección de las trayectorias. Es decir, ambas aeronaves van a avanzar más rápido cuando el viento no es constante.

Tras los comentarios anteriores, puede comprobarse que el viento según la dirección de las trayectorias de las aeronaves provoca que éstas avancen más rápido o más lento cuando el viento no es constante en comparación con el caso de viento constante. Se van a representar a continuación, las diferencias entre las distancias recorridas por las aeronaves en función del tiempo cuando el viento no es constante y cuando sí lo es, es decir, las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} D_{dif-A}(t) &= D_A(t) - D_{A-cte}(t) \\ D_{dif-B}(t) &= D_B(t) - D_{B-cte}(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Siendo:

$D_i(t) \equiv$ Distancia recorrida por la aeronave i en el instante de tiempo t cuando el viento no es constante.

$D_{i-cte}(t) \equiv$ Distancia recorrida por la aeronave i en el instante de tiempo t cuando el viento es constante.

Representando esas relaciones en el caso en el que el error absoluto es máximo (para $\|\vec{s}_1\| = 50NM$), se obtiene la siguiente gráfica:

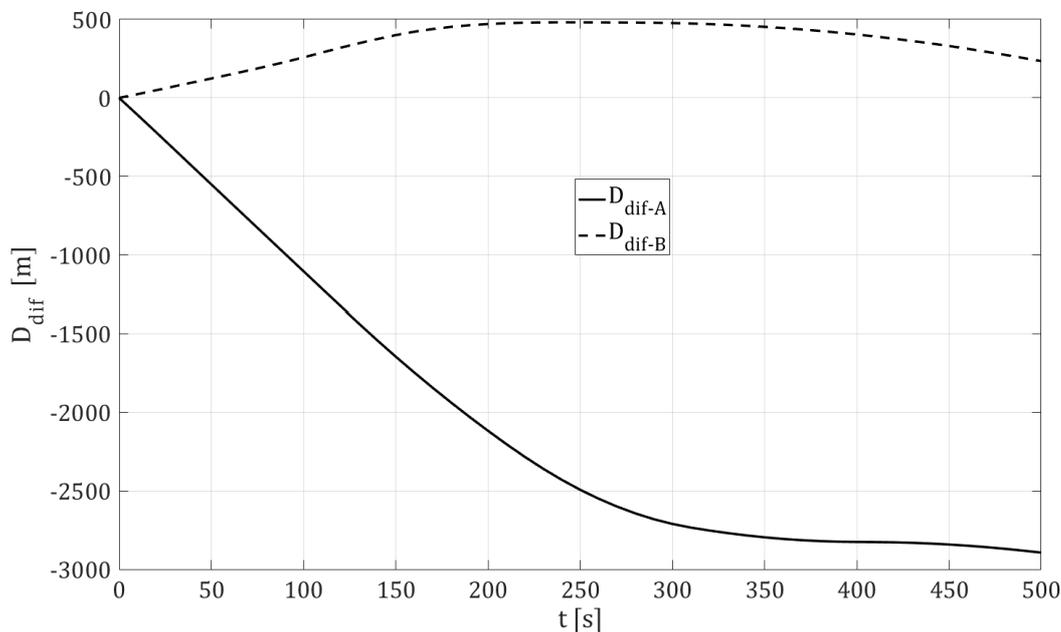


Figura 3.13. Diferencia de distancias recorridas cuando el error absoluto es máximo.

Representando las mismas funciones cuando el error absoluto es mínimo, se obtiene la siguiente figura:

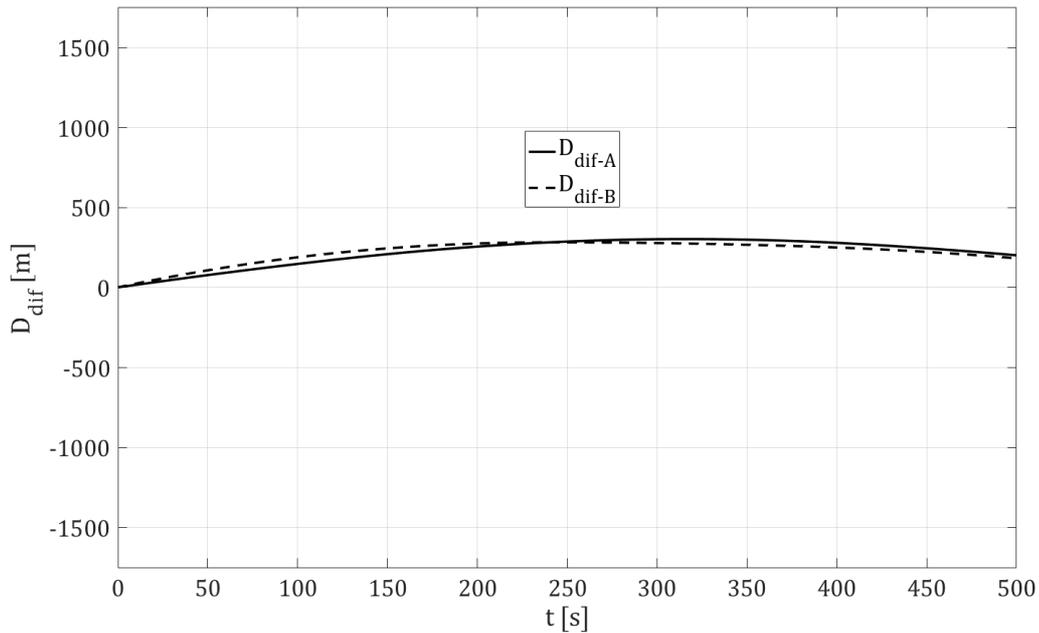


Figura 3.14. Diferencia de distancias recorridas cuando el error absoluto es mínimo.

Comparando las figuras 3.13 y 3.14 se puede apreciar lo que se ha comentado anteriormente. Se comprueba que cuando el error absoluto es máximo (figura 3.13), para un instante de tiempo dado, la aeronave A ha recorrido menos distancia y la aeronave B ha recorrido más distancia cuando el viento no es constante en comparación con el caso de viento constante. Es decir, la aeronave A se retrasa y la aeronave B se adelanta (tomando como referencia la posición en la que se encuentran en un instante de tiempo cuando el viento es constante).

Sin embargo, cuando el error absoluto es mínimo (figura 3.14), ambas aeronaves se adelantan cuando el viento no es constante, y además, se adelantan prácticamente la misma distancia (comparando con el caso de viento constante). Es decir, aunque avanzan más rápido a lo largo de su trayectoria, la distancia relativa de una respecto a otra no cambia (ambas avanzan prácticamente igual de rápido). En particular, cuando se alcanza la distancia mínima (en $t = 287.33$ s) en la figura anterior se comprueba que, tanto para la aeronave A como para la B, la distancia que se han adelantado es casi la misma.

Para terminar, en la siguiente figura se representa el término $d(t) - d_{cte}(t)$ en función del tiempo para los casos en los que los errores absolutos son máximos y mínimos. También se representa con una circunferencia el instante de tiempo $t_{d_{min}}$ en cada caso:

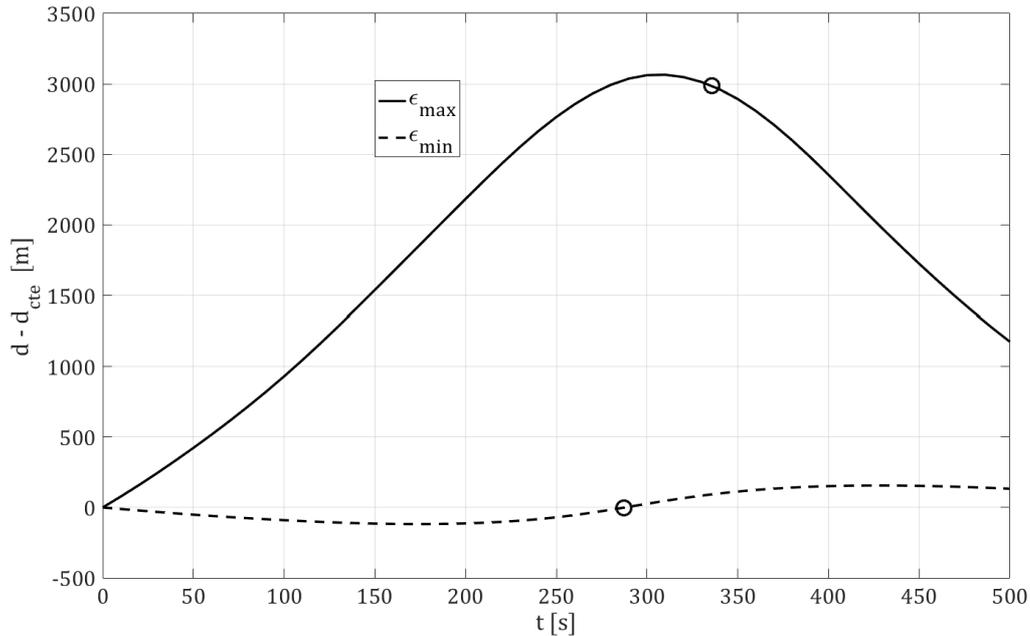


Figura 3.15. Errores en el cálculo de la distancia.

En esa figura se corroboran las ideas anteriores. En el caso de error absoluto máximo, la distancia relativa entre aeronaves cada vez aumenta más respecto al caso de viento constante, ya que, como se ha comentado, la aeronave A se retrasa y la aeronave B se adelanta (respecto a las posiciones que ocupan cuando el viento es constante). Mientras, cuando el error absoluto es mínimo, la distancia relativa se mantiene casi idéntica al caso de viento constante, y precisamente cuando se alcanza la distancia mínima, prácticamente coincide con la de viento constante.

3.4 Reducción de errores

Una vez se han analizado las causas de los errores cometidos, se propone en esta sección una forma de reducirlos. Para ello, en primer lugar, se explica de manera detallada en qué consiste el método para reducir los errores. En segundo lugar, se va a aplicar dicha propuesta en diferentes casos para corroborar que realmente reduce los errores.

3.4.1 Formulación del método de reducción de errores

Antes de comenzar con la formulación del método de reducción de errores, se cree conveniente realizar diferentes comentarios de los resultados de las secciones 3.3 y 3.3.1.

En primer lugar, el efecto del viento cruzado en los errores cometidos puede despreciarse (tal y como se detalló en la sección 3.3), por lo que en este apartado, se tendrá en cuenta únicamente el efecto del viento según la dirección de las trayectorias de las aeronaves.

En segundo lugar, los errores aumentan a medida que los vientos de cara/cola que afectan a las aeronaves a lo largo de sus trayectorias, difieren más del viento de cara/cola que existe en el punto de intersección (según se comprobó en la sección 3.3.1). Lo ideal sería suponer un viento constante que provoque un viento según las direcciones de las trayectorias de las aeronaves similar al que éstas soportan cuando el viento no es constante.

Teniendo en cuenta esos comentarios, el objetivo es obtener un viento constante de componentes w_x , w_y (incógnitas) tal que reduzca los errores cometidos. Para ello, se dispone de dos incógnitas (w_x y w_y), por lo que es posible imponer dos condiciones (en las que no se va a tener en cuenta el viento cruzado). Las dos condiciones que se van a imponer son las siguientes: la primera de ellas es que el viento medio según la dirección de la trayectoria de la aeronave A, sea el mismo en ambos problemas (cuando el viento es constante y cuando no lo es). La segunda de ellas es esa misma condición particularizada para la aeronave B. De esa

forma, se está actuando directamente en la componente del viento que más afecta a los errores cometidos (vientos de cara/cola). A continuación, se expone la formulación del método.

Si se considera un viento constante de componentes w_x , w_y , los vientos según las direcciones de las trayectorias de las aeronaves A y B son los siguientes:

$$w_{cte-AT-A} = w_y \sin(\psi_A) + w_x \cos(\psi_A) \quad (3.17)$$

$$w_{cte-AT-B} = w_y \sin(\psi_B) + w_x \cos(\psi_B) \quad (3.18)$$

Para poder determinar los vientos medios según las direcciones de las trayectorias cuando el viento no es constante, se definen las siguientes variables:

$$d_{A,I} = \|\vec{s}_I - \vec{s}_{0,A}\| \quad (3.19)$$

$$d_{B,I} = \|\vec{s}_I - \vec{s}_{0,B}\| \quad (3.20)$$

Los vientos de cara/cola medios que afectan a las aeronaves A y B cuando el viento no es constante, pueden modelarse de la siguiente forma:

$$\bar{w}_{AT-A} = \frac{\int_0^{d_{A,I}} w_{nocte-AT-A}(D_A) dD_A}{d_{A,I}} \quad (3.21)$$

$$\bar{w}_{AT-B} = \frac{\int_0^{d_{B,I}} w_{nocte-AT-B}(D_B) dD_B}{d_{B,I}} \quad (3.22)$$

Siendo:

$w_{nocte-AT-i}(D_i) \equiv$ Viento según la dirección de la trayectoria de la aeronave i cuando ésta ha recorrido una distancia D_i (suponiendo viento no constante).

$\bar{w}_{AT-i} \equiv$ Viento medio según la dirección de la trayectoria de la aeronave i cuando ésta avanza desde la posición inicial hasta que alcanza al punto de intersección de las trayectorias (suponiendo viento no constante).

Las dos condiciones que se van a imponer para reducir los errores, son las siguientes:

$$w_{cte-AT-A} = \bar{w}_{AT-A} \quad (3.23)$$

$$w_{cte-AT-B} = \bar{w}_{AT-B} \quad (3.24)$$

Sustituyendo las expresiones 3.17 y 3.18 en las ecuaciones 3.23 y 3.24 respectivamente, se obtiene un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas desde donde pueden despejarse las incógnitas w_x , w_y , resultando:

$$w_x = \frac{\bar{w}_{AT-B} \sin(\psi_A) - \bar{w}_{AT-A} \sin(\psi_B)}{\sin(\psi_A - \psi_B)} \quad (3.25)$$

$$w_y = \frac{\bar{w}_{AT-A} \cos(\psi_B) - \bar{w}_{AT-B} \cos(\psi_A)}{\sin(\psi_A - \psi_B)} \quad (3.26)$$

3.4.2 Aplicación del método de reducción de errores

Para determinar numéricamente cuál es la reducción de los errores originada por esta propuesta y comprobar que realmente funciona (reduce los errores), se va a aplicar el método descrito en la sección anterior en diferentes casos. El procedimiento que se va a seguir es el siguiente:

1. Se asocia al punto de intersección de las trayectorias una latitud y una longitud que coincida con un nodo de la malla de vientos.
2. Se calcula $d_{min-cte}$ suponiendo que el viento (constante a lo largo de todo el espacio aéreo) es el que existe en el punto de intersección de las trayectorias.
3. Se calcula $d_{min-cte-red}$ suponiendo que el viento (constante a lo largo de todo el espacio aéreo) es el que se define por las ecuaciones 3.25 y 3.26.
4. Se calcula d_{min} según lo explicado en la sección 2.3 (el viento que afecta a las aeronaves depende de la posición de las mismas).
5. Se calculan los errores absolutos y relativos según las expresiones 3.4 y 3.5.

Para obtener resultados más generales, ese procedimiento se va a repetir hasta que se haya asociado al punto de intersección de las trayectorias con todos los nodos pertenecientes a la malla de vientos. Además, siguiendo la metodología de la sección 3.2, se va a repetir el proceso para tres valores diferentes de $\|\vec{s}_1\|$, asociados a 20, 50 y 100 NM.

De esa forma, se representan en la siguiente tabla el error absoluto y relativo en los puntos en los que el propio error absoluto es máximo y mínimo, también se muestra la media y la desviación típica de los errores absolutos y relativos. Estos resultados se muestran para los tres valores de $\|\vec{s}_1\|$ que se han considerado. Cabe remarcar, que la columna correspondiente a “Error no reducido” muestra los errores cometidos suponiendo que el viento constante es el del punto de intersección de las trayectorias. Mientras, la columna correspondiente a “Error reducido” muestra los errores cometidos al suponer que el viento constante es el que se define por las ecuaciones 3.25 y 3.26. Los resultados son los siguientes:

		Error reducido		Error no reducido	
		ϵ_{abs}	ϵ_{rel}	ϵ_{abs}	ϵ_{rel}
$\ \vec{s}_1\ = 20 \text{ NM}$	Máximo ϵ_{abs}	354.42 m	3.30 %	702 m	6.40 %
	Mínimo ϵ_{abs}	1.11 e-5m	1.28e-7 %	8.77e-05 m	1.03e-6 %
	Valor medio	22.50 m	0.25 %	40.55 m	0.43 %
	Desviación típica	7.80 m	0.10 %	11.70 m	0.11 %
$\ \vec{s}_1\ = 50 \text{ NM}$	Máximo ϵ_{abs}	2193.90 m	85.32 %	2998.7 m	10.55 %
	Mínimo ϵ_{abs}	0.0004 m	1.6e-06 %	0.004 m	2.038e-5%
	Valor medio	134.59 m	0.60 %	223.36 m	0.972 %
	Desviación típica	41.45 m	0.23 %	45.16 m	0.208 %
$\ \vec{s}_1\ = 100 \text{ NM}$	Máximo ϵ_{abs}	6216.2 m	11.01%	7123.4 m	12.30 %
	Mínimo ϵ_{abs}	0.0018 m	3.57e-6%	0.0027 m	5.9e-6 %
	Valor medio	475.35 m	1.07%	762.30 m	1.66 %
	Desviación típica	128.71 m	0.40%	127.26 m	0.32 %

Tabla 3.5. Comparación de errores reducidos y no reducidos.

Observando los resultados de la tabla, se puede comprobar que los errores medios se han visto disminuidos, en concreto, esas reducciones han sido de un 44.51%, un 39.74% y un 37.64 % para valores de $\|\vec{s}_1\|$ iguales a 20,

50 y 100 millas náuticas respectivamente, sin embargo, las desviaciones típicas prácticamente no varían en uno y otro caso. Por otro lado, además de reducirse los errores medios, los errores máximos también se ven disminuidos.

Para tener una visión más general sobre cómo se han reducido los errores, se representa en la siguiente imagen, en el eje de ordenadas, el porcentaje de casos en los que el error cometido es superior a un cierto valor dado en el eje de abscisas cuando el valor de $\|\vec{s}_1\|$ es de 20 millas náuticas. Se ha considerado, por un lado, que el viento constante es el que se define en las ecuaciones 3.25 y 3.26 (los errores cometidos en este caso se han definido como errores reducidos), y por otro lado, que el viento constante es el del punto de intersección de las trayectorias (los errores cometidos en este caso se han definido como errores no reducidos):

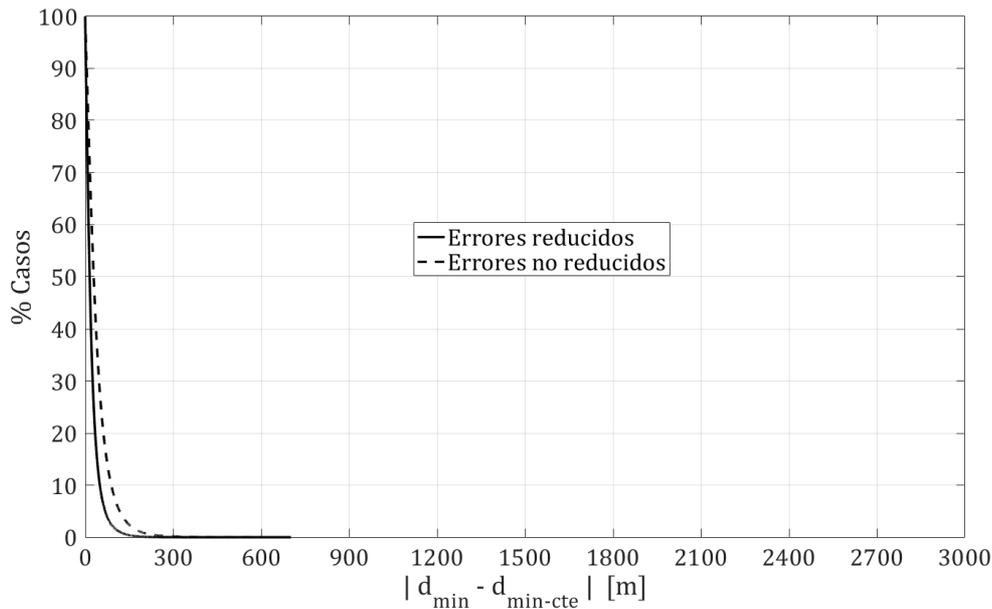


Figura 3.16. Porcentaje de casos en los que el error cometido es superior a una cierta distancia cuando $\|\vec{s}_1\| = 20 \text{ NM}$.

Representando las mismas funciones cuando $\|\vec{s}_1\|$ es 50 millas náuticas, se obtiene:

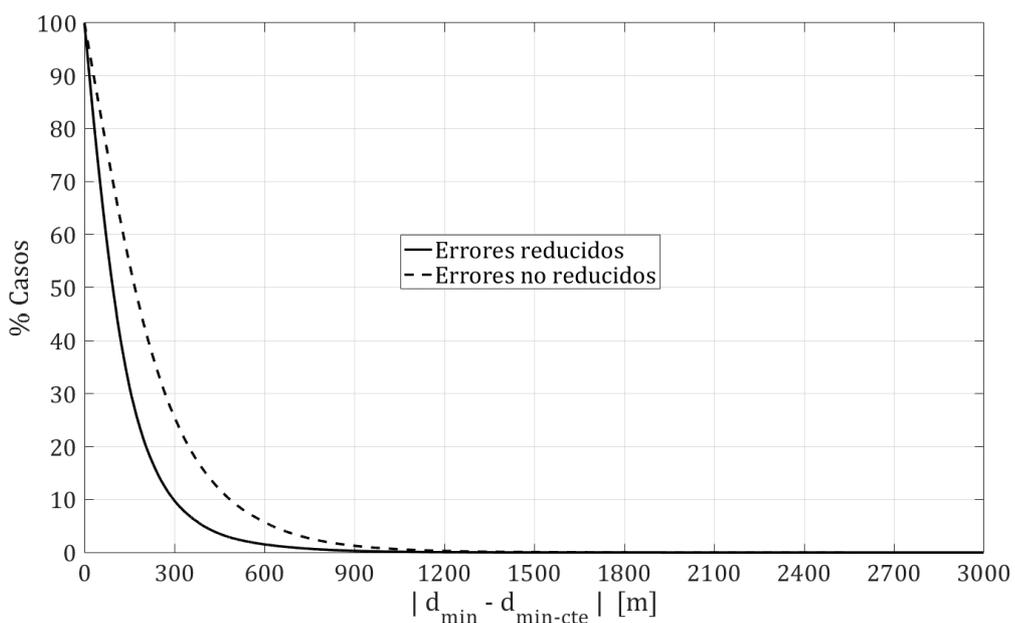


Figura 3.17. Porcentaje de casos en los que el error cometido es superior a una cierta distancia cuando $\|\vec{s}_1\| = 50 \text{ NM}$.

Por último, realizando la misma representación cuando $\|\vec{s}_1\|$ es 100 millas náuticas, se obtiene:

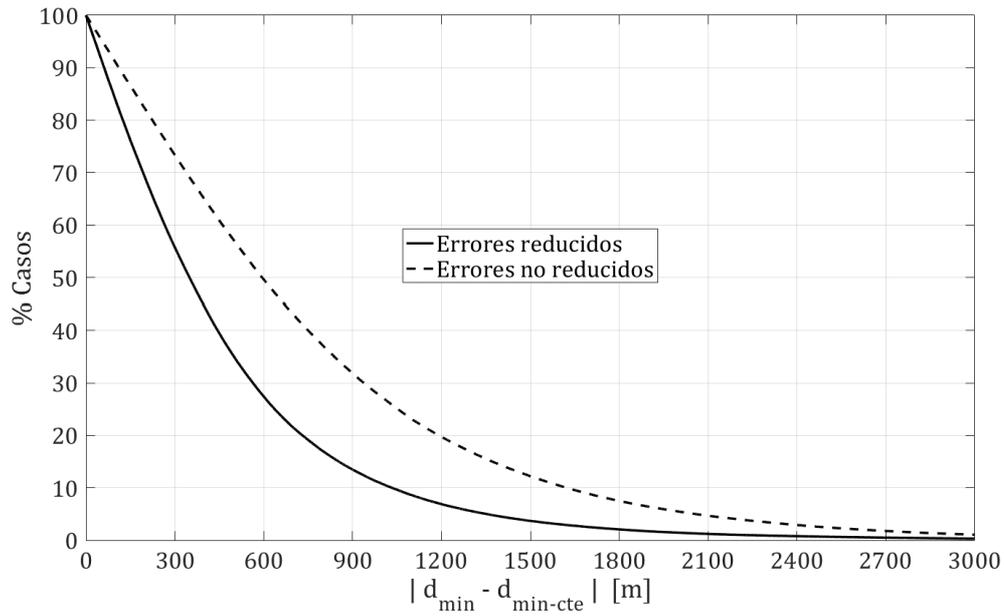


Figura 3.18. Porcentaje de casos en los que el error cometido es superior a una cierta distancia cuando $\|\vec{s}_1\| = 100 \text{ NM}$.

Atendiendo a las figuras anteriores, puede afirmarse que el método propuesto para reducir los errores es mejor que considerar como constante al viento en el punto de intersección de las rutas (consigue una reducción considerable de los errores cometidos).

4 ANÁLISIS DE HIPÓTESIS DE COMPONENTES DEL VIENTO INDEPENDIENTES

El segundo de los objetivos del presente documento es estudiar las implicaciones que origina el suponer que las componentes del viento (w_x, w_y) son independientes entre sí. Éste va a ser el propósito de este capítulo. Para ello, en primer lugar, se van a definir los coeficientes utilizados para medir las correlaciones entre las componentes del viento. En segundo lugar, se van a cuantificar los valores de esos coeficientes para comprobar si existen correlaciones entre las mismas. En tercer lugar, se van a considerar dos modelos que relacionan las componentes del viento de forma diferente: el primero de ellos supone que éstas son estadísticamente independientes entre sí. El segundo considera una relación lineal entre ellas. Por último, se van a cuantificar y analizar las diferencias al caracterizar estadísticamente la distancia mínima considerando uno u otro modelo y se tratará de identificar el origen de esas diferencias.

Cabe remarcar que todos los resultados que se muestran en este capítulo se han calculado para la configuración de tráfico detallada en la sección 3.1, particularizada para un valor de $\|\vec{s}_1\| = 50 \text{ NM}$.

4.1 Coeficientes de correlación

En esta sección se van a detallar las características de los coeficientes que se utilizarán en secciones posteriores para medir el grado de correlación entre las componentes del viento. En concreto, se van a utilizar dos coeficientes de correlación típicos: el coeficiente de Pearson y el de Spearman.

4.1.1 Coeficiente de Pearson

El coeficiente de Pearson (ρ_{pearson}) es una medida de la correlación lineal entre dos variables X e Y . Alcanza valores entre -1 y 1 , de manera que, el valor 1 es equivalente a una correlación lineal total y positiva, el valor 0 representa la ausencia total de correlación lineal entre las variables y el valor -1 es equivalente a una correlación lineal total y negativa. Estas ideas se esquematizan en la siguiente figura [10]:

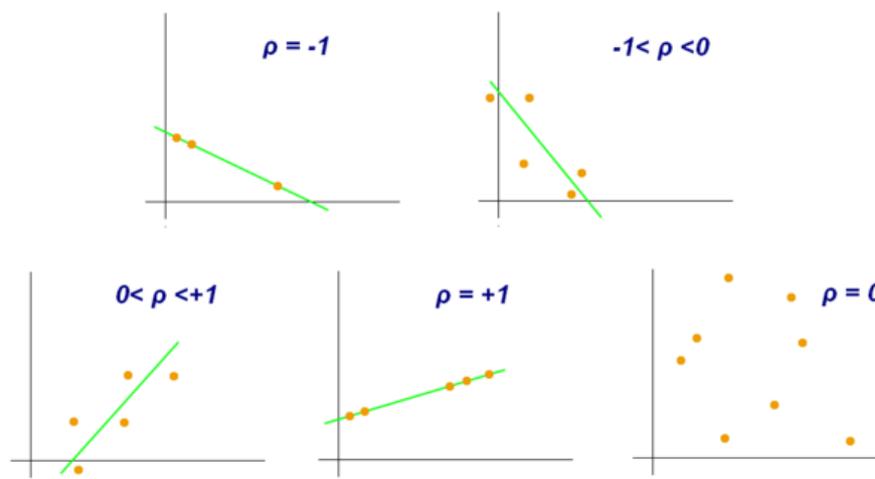


Figura 4.1. Ejemplos de diferentes valores del coeficiente de Pearson.

La definición matemática del coeficiente de Pearson es la siguiente:

$$\rho_{pearson} = \frac{E[(X - E[X])(Y - E[Y])]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.1)$$

Siendo:

$E(i) \equiv$ Esperanza de la variable i .

$\sigma_i \equiv$ Desviación típica de la variable i .

4.1.2 Coeficiente de Spearman

El coeficiente de Spearman evalúa la precisión con la que se puede describir la relación entre dos variables usando una función monótona. Es decir, mientras el coeficiente de Pearson se centra en evaluar la relación lineal entre las variables, el coeficiente de Spearman evalúa si existe una relación monótona (lineal o no lineal) entre las mismas, tal y como se esquematiza en la siguiente figura [11]:

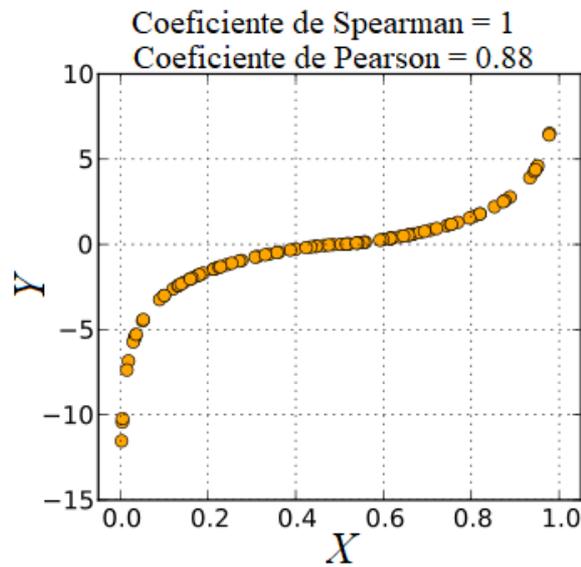


Figura 4.2. Comparativa entre coeficiente de Pearson y Spearman.

Al igual que el coeficiente de Pearson, el coeficiente de Spearman alcanza valores entre -1 y 1 , indicando respectivamente correlaciones negativas y positivas entre las variables, mientras que el valor 0 indica que no hay correlación entre las mismas.

Para calcular el coeficiente de Spearman ($\rho_{Spearman}$) entre las variables X e Y , en primer lugar, es necesario ordenar las componentes de dichas variables de menor a mayor. Posteriormente, se sustituyen los valores de las componentes que aparecen en las variables X e Y por la posición que ocupan al haber sido ordenadas. A estas nuevas variables, se les denominará rg_X y rg_Y . De ese modo, la definición del coeficiente de Spearman es la siguiente:

$$\rho_{Spearman} = \frac{E[(rg_X - E[rg_X])(rg_Y - E[rg_Y])]}{\sigma_{rg_X} \sigma_{rg_Y}} \quad (4.2)$$

4.2 Correlaciones entre componentes meridional y zonal

El primer paso lógico para analizar la hipótesis de considerar a las componentes del viento como variables estadísticamente independientes entre sí, es medir el grado de correlación entre las mismas. Si no existiera correlación alguna entre ellas, automáticamente la hipótesis sería apropiada. Por ello, se van a calcular en esta sección los coeficientes de Pearson y Spearman para las componentes meridional y zonal del viento.

En la sección 1.2, se explica que el modelo EPS del ECMWF europeo proporciona en cada nodo de la malla de vientos, 51 valores de las componentes meridional y zonal. Por tanto, en cada nodo de la malla de vientos, se han calculado los coeficientes de Pearson y Spearman asociados a esas componentes.

Se representa en la siguiente figura, en el eje de ordenadas, el porcentaje de casos en los que los valores absolutos de los coeficientes de Pearson y Spearman son superiores a un cierto valor dado en el eje de abscisas:

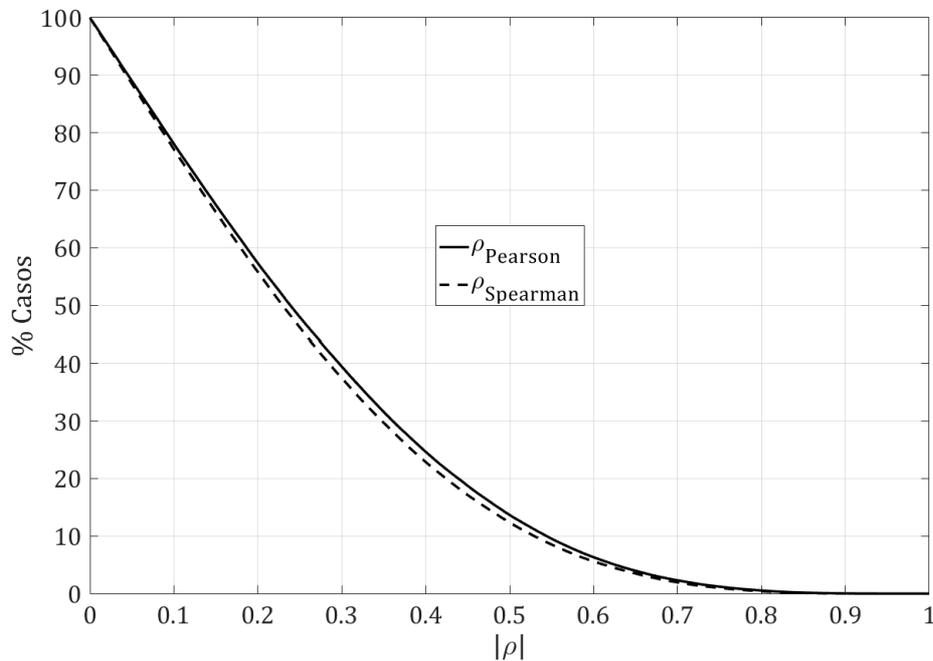


Figura 4.3. Coeficientes de correlación entre componentes meridional y zonal.

A partir de los resultados de la figura 4.3 puede afirmarse que, en la mayor parte de los puntos, las componentes meridional y zonal son independientes (valores muy bajos de los coeficientes de Pearson y Spearman). Por ejemplo, en un 86% de los casos el coeficiente de Pearson es inferior a 0.5. Por otro lado, existe un número minoritario de puntos en los que los coeficientes sí alcanzan valores elevados (aproximadamente en un 6.3% de los puntos, esos coeficientes superan el 0.6). De esa forma, para la mayoría de casos (en los que los coeficientes de correlación son pequeños), el hecho de suponer que las componentes meridional y zonal son independientes sería una hipótesis adecuada. Sin embargo, existe un conjunto de puntos en los que las correlaciones sí son importantes, y por ello, en esos puntos, esa hipótesis puede proporcionar resultados menos precisos.

4.3 Formulación de la caracterización estadística de la distancia mínima

Para analizar las consecuencias derivadas de suponer que las componentes del viento son estadísticamente independientes entre sí, se van a detallar en esta sección, dos modelos que relacionan de forma diferente esas componentes: el primero de ellos supone que éstas son estadísticamente independientes entre sí (hipótesis que se quiere analizar). El segundo de ellos considera una relación lineal entre las mismas que sea apropiada en todos los casos considerados. Es decir, pretende abarcar no sólo los casos en los que las componentes están poco correladas, sino también aquellos puntos en los que las correlaciones entre ellas son importantes (observar figura 4.3), por lo que es un modelo más realista.

El objetivo de esta sección, es realizar la formulación utilizada para caracterizar estadísticamente la distancia mínima entre aeronaves, empleando uno y otro modelo. Tal caracterización se va a efectuar aplicando el método de Monte Carlo (descrito en la sección 1.3). Para ejecutar dicho método, se va a realizar una hipótesis adicional: las componentes del viento son constantes en todo el espacio aéreo. Esta hipótesis va a permitir disponer de las variables aleatorias necesarias para la aplicación del método.

4.3.1 Modelo con componentes independientes

Para ejecutar el método de Monte Carlo, se van a definir como variables aleatorias a las variables que introducen incertidumbre en el problema. Para ello, como se detalla en la sección 1.2, el modelo EPS del ECMWF europeo proporciona, en cada nodo de la malla de vientos, 51 valores de las componentes meridional y zonal, las cuales van a ser independientes entre sí (en este apartado). Entonces, para cada nodo de la malla de vientos, se dispone de un valor máximo y mínimo de las componentes meridional (w_{xmax} y w_{xmin} respectivamente) y zonal (w_{ymax} y w_{ymin}). Se van a definir, en cada nodo de la malla de vientos, dos variables aleatorias independientes (\tilde{w}_x y \tilde{w}_y) que siguen una distribución uniforme y continua, cuyas funciones de densidad son las siguientes:

$$f_{\tilde{w}_x}(\tilde{w}_x) = \begin{cases} 1/(w_{xmax} - w_{xmin}), & \tilde{w}_x \in [w_{xmin}, w_{xmax}] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$f_{\tilde{w}_y}(\tilde{w}_y) = \begin{cases} 1/(w_{ymax} - w_{ymin}), & \tilde{w}_y \in [w_{ymin}, w_{ymax}] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.4)$$

Tomando dos valores aleatorios de las variables \tilde{w}_x y \tilde{w}_y , queda determinado el viento en el nodo de la malla de vientos asociado. Se va a suponer que el viento es constante e igual al existente en el nodo de la malla de vientos elegido, por lo que puede calcularse la distancia mínima entre aeronaves según los desarrollos de la sección 2.2.

Al ejecutar el método de Monte Carlo, se toma un valor aleatorio de las variables con incertidumbre, en este caso \tilde{w}_x y \tilde{w}_y (variables aleatorias no deterministas), y se calcula la distancia mínima a partir del modelo determinista desarrollado en la sección 2.2. Este proceso se repetirá tantas veces como sea necesario hasta tener una muestra representativa de la distancia mínima entre aeronaves. Pues bien, en este caso, dicho proceso se repetirá 2^{23} veces (8388608 veces) para cada nodo de la malla de vientos. Con ese número de repeticiones, evaluando la ecuación 1.2, la probabilidad de cometer un error en la media de la distancia mínima mayor que 0.5 m es del 0.02 %. De esa forma, en cada nodo se dispone de 2^{23} valores de la distancia mínima, por lo que puede calcularse la media y la desviación típica en cada punto, que en este apartado se denominan $\bar{d}_{min-ind}$ y σ_{ind} respectivamente.

4.3.2 Modelo con componentes relacionadas linealmente

En este apartado, se propone una relación entre las componentes que modela adecuadamente todos los casos que aparecen representados en la figura 4.3 (cuando las componentes están correladas y cuando no lo están). La relación propuesta es la siguiente:

$$w_x = K_1 w_y + K_0 + w(0, \sigma_w) \quad (4.5)$$

Los términos K_0 y K_1 se ajustan en cada uno de los nodos de la malla mediante regresión lineal a partir de los 51 valores disponibles de w_x y w_y en cada punto, por lo que son conocidos. Por otro lado, la variable w es una variable con media cero y desviación típica σ_w que tendrá en cuenta los términos que no están asociados a una relación lineal entre las componentes w_x y w_y . Es decir, cuando ambas componentes estén muy correladas linealmente, el valor de σ_w será muy pequeño, mientras que cuando las componentes sean prácticamente independientes, el valor de σ_w será mayor. La variable w tiene en cuenta, en cierta parte, los errores que se cometen al suponer una relación lineal entre w_x y w_y .

De esa forma, la variable w y la variable w_y deberían ser linealmente independientes, ya que de lo contrario no tendría sentido relacionar las componentes según la expresión 4.5. Para comprobar si realmente esas variables son linealmente independientes, se representa en la siguiente figura, en el eje de ordenadas, el porcentaje de casos en los que los valores absolutos de los coeficientes de Pearson y Spearman (asociados a las variables w_y y w) son superiores a un cierto valor dado en el eje de abscisas:

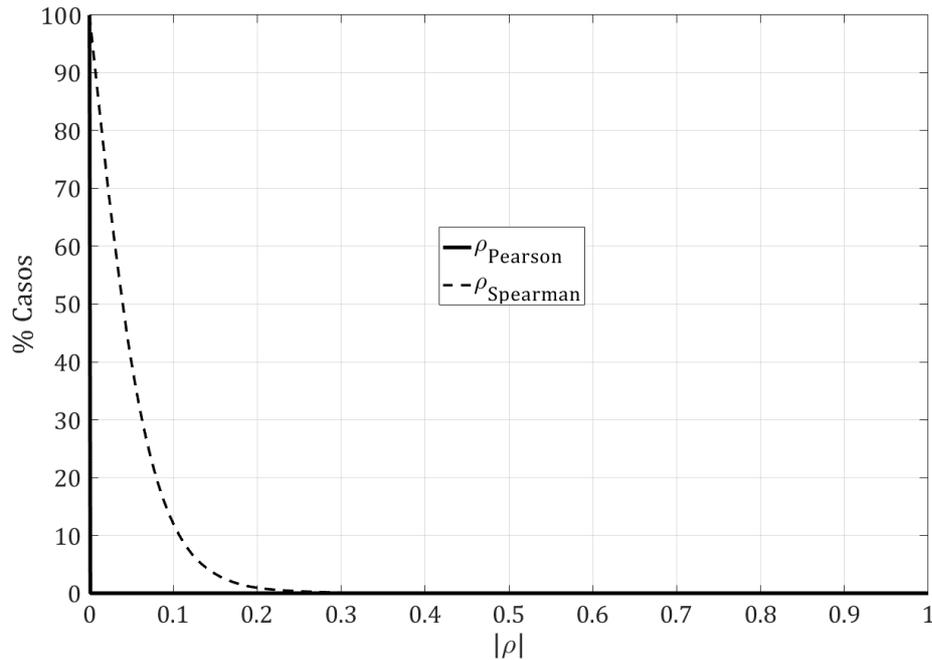


Figura 4.4. Coeficientes de correlación entre w_y y w .

Se puede comprobar en esa imagen que las variables w_y y w son linealmente independientes; el coeficiente de Pearson (mide la relación lineal entre las variables) es prácticamente cero en todos los casos y para el coeficiente de Spearman apenas hay un 1% de los casos en los que se supera el 0.2.

Una vez definida la relación propuesta entre las componentes del viento, se va a detallar cómo ejecutar el método de Monte Carlo en este caso. Para ello, se va a suponer, de nuevo, que el viento es constante en todo el espacio aéreo.

Siguiendo un procedimiento paralelo al de la sección anterior, en este caso también se dispone de dos variables independientes, como son w_y y w . Además, al igual que ocurre para w_y , en cada nodo de la malla de vientos se tiene un valor máximo y mínimo de la variable w (w_{max} y w_{min} respectivamente). Para ejecutar el método de Monte Carlo, se va a definir en cada nodo una variable independiente (\tilde{w}) que sigue una distribución uniforme y continua, cuya función de densidad es la siguiente:

$$f_{\tilde{w}}(\tilde{w}) = \begin{cases} 1/(w_{max} - w_{min}), & \tilde{w} \in [w_{min}, w_{max}] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.6)$$

Tomando dos valores aleatorios de las variables \tilde{w}_y y \tilde{w} (cuyas funciones de densidad están definidas en 4.4 y 4.6 respectivamente), puede calcularse la componente w_x evaluando la ecuación 4.5. De esa forma, el viento existente en el nodo de la malla de vientos considerado queda completamente determinado. Se va a suponer que el viento constante que afecta a las aeronaves es el existente en el nodo de la malla de vientos elegido, por lo que puede calcularse la distancia mínima entre ellas según el procedimiento detallado en la sección 2.2. Aplicando el método de Monte Carlo, dicho proceso se repetirá 2^{23} veces en cada nodo de la malla de vientos, por lo que se dispondrá de 2^{23} valores de la distancia mínima entre aeronaves en cada punto. En este apartado, la media y la desviación típica de la distancia mínima en cada nodo se denominan $\bar{d}_{min-tin}$ y σ_{tin} respectivamente.

4.4 Análisis de diferencias en la caracterización estadística de la distancia mínima entre aeronaves

En esta sección se pretenden analizar las diferencias cometidas al caracterizar estadísticamente la distancia mínima cuando se suponen que las componentes del viento son independientes entre sí (modelo detallado en la

sección 4.3.1), tomando como referencia el modelo que relaciona a las componentes de forma lineal (detallado en la sección 4.3.2), que puede considerarse más realista. Para ello, se van a cuantificar en cada nodo de la malla de vientos, las diferencias cometidas en el cálculo media y en la desviación típica de la distancia mínima entre aeronaves de la siguiente forma:

$$\Delta_{media-ind-lin} = |\bar{d}_{min-ind} - \bar{d}_{min-lin}| \quad (4.7)$$

$$\Delta_{desviación-ind-lin} = |\sigma_{ind} - \sigma_{lin}|$$

Se representa en la siguiente figura, en el eje de ordenadas, el porcentaje de puntos en los que la diferencia en la media $\Delta_{media-ind-lin}$ es superior a un cierto valor dado en el eje de abscisas:

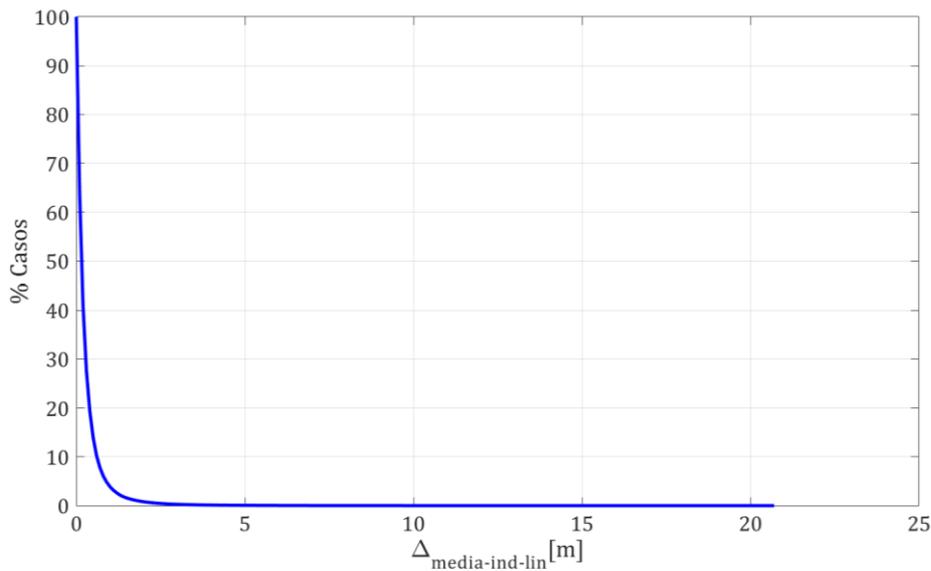


Figura 4.5. Diferencias en la media.

En la siguiente figura, se realiza la misma representación para la diferencia en la desviación típica:

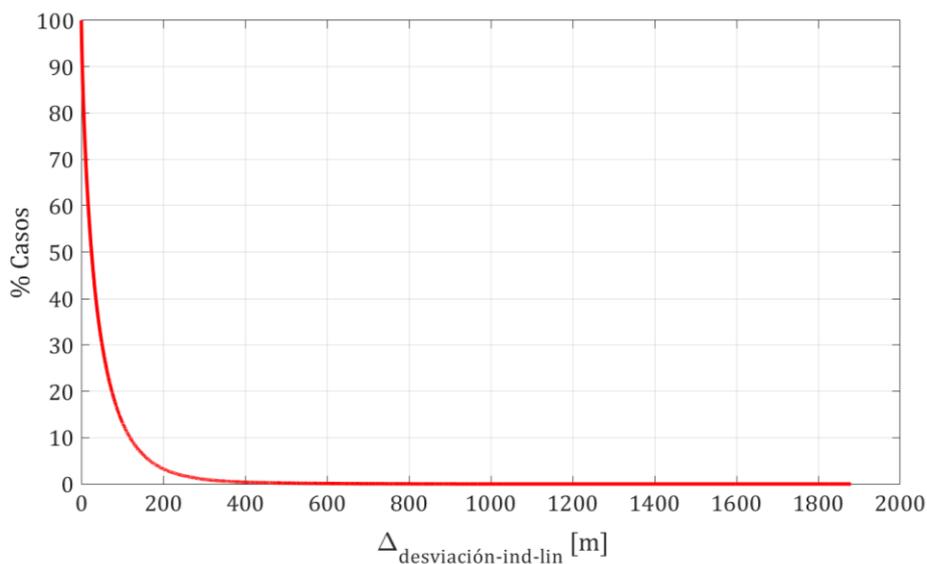


Figura 4.6. Diferencias en la desviación típica.

Según los resultados que muestran las figuras 4.5 y 4.6, puede afirmarse que las diferencias que aparecen en la

media no son importante (el valor máximo es 20.7 m). Sin embargo, las diferencias en la desviación típica sí lo son, de manera que el valor máximo llega a los 1880 m. A continuación, se va a analizar cuál es el origen de esas diferencias.

Para ello, resulta lógico pensar que los casos en los que las diferencias son mayores, serán aquellos en los que las correlaciones entre las componentes del viento son importantes (casos en los que la hipótesis de componentes del viento independientes no es adecuada). Para comprobar si esa afirmación es cierta, se representan en la siguiente imagen, el valor absoluto del coeficiente de Pearson en función de las diferencias en la media de la distancia mínima en cada nodo de la malla de vientos:

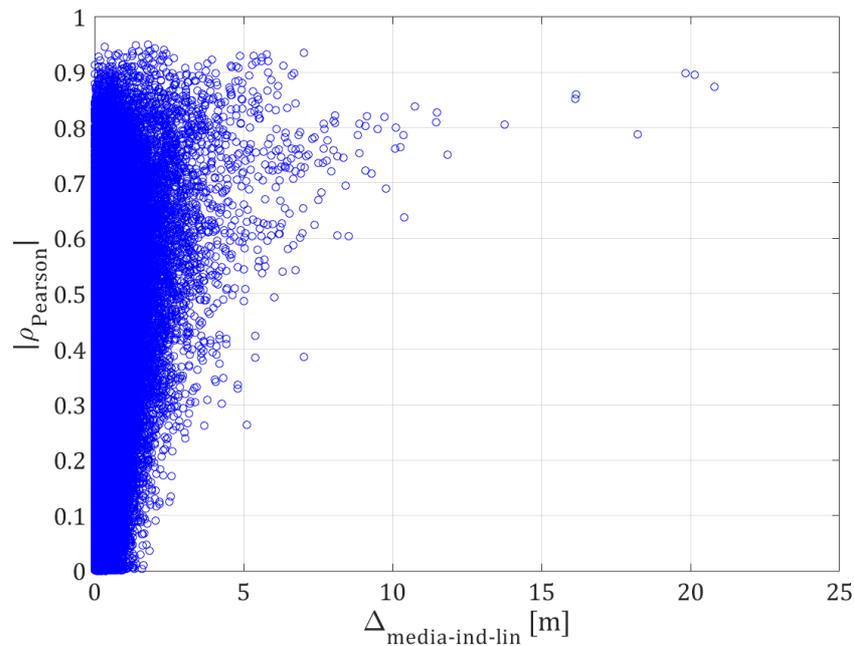


Figura 4.7. Coeficiente de Pearson en función de las diferencias en la media.

Se realiza en la siguiente figura la misma representación, asociada a las diferencias en la desviación típica:

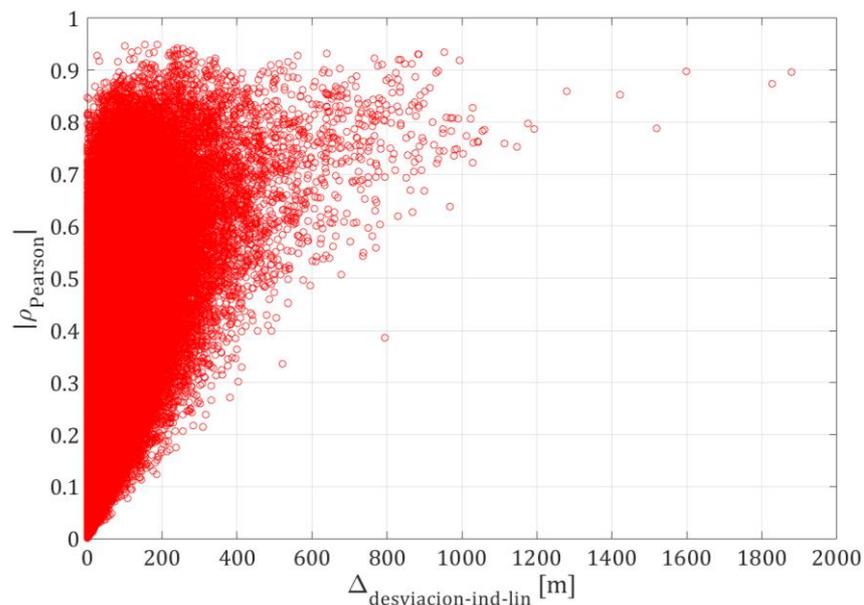


Figura 4.8. Coeficiente de Pearson en función de las diferencias en la desviación típica.

Particularizando para el caso de la desviación típica (por ser las diferencias mayores), en la figura 4.8 pueden

distinguirse tres tipos de puntos, los cuales se clasifican a continuación:

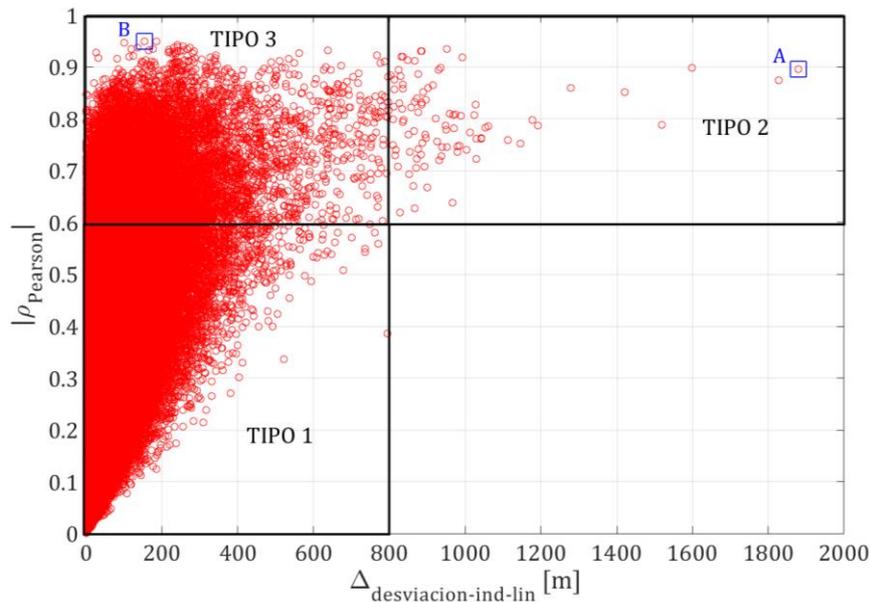


Figura 4.9. Clasificación de puntos.

Puntos de tipo 1: Son aquellos en los que las componentes del viento están poco correladas (coeficientes de Pearson menores que 0.6) y además, las diferencias que aparecen son relativamente pequeñas (menores que 800 m). El comportamiento de estos puntos es razonable, puesto que al estar las componentes poco correladas, la hipótesis de considerarlas independientes es adecuada (no hay diferencias significativas).

Puntos del tipo 2: Son aquellos en los que las componentes del viento sí están correladas (coeficientes de Pearson mayores que 0.6) y además, las diferencias son grandes (mayores que 800 m). El comportamiento de estos puntos también puede considerarse razonable, ya que al estar las componentes del viento bastante correladas, las diferencias que aparecen al suponer que éstas son independientes, son grandes. Es decir, la hipótesis de componentes independientes no recoge adecuadamente el comportamiento en estos puntos.

Puntos del tipo 3: Son aquellos en los que las componentes del viento sí están correladas (coeficientes de Pearson mayores que 0.6), pero las diferencias son relativamente pequeñas (menores que 800 m). Este caso parece resultar menos intuitivo, ya que, a pesar de que las componentes sí están correladas, la hipótesis de considerarlas independientes recoge adecuadamente el comportamiento en estos puntos.

A la luz de los resultados de la figura 4.9, pueden realizarse dos comentarios. El primero de ellos es que las mayores diferencias se dan en los casos en los que las componentes del viento están correladas (no son independientes). El segundo de ellos es que no en todos los casos en los que las componentes del viento están correladas las diferencias son grandes (como ocurre, por ejemplo, en los puntos del tipo 3). Es decir, una diferencia grande implica una correlación importante entre las componentes de los vientos, pero por el contrario, una correlación importante entre las componentes de los vientos, no implica una diferencia grande.

El siguiente paso es buscar una justificación a ese comportamiento. Se va a intentar explicar por qué existen casos en los que las diferencias son pequeñas a pesar de haber correlaciones importantes entre las componentes de los vientos. Para ello, se van a comparar dos puntos de la figura 4.9: el punto del tipo 2 en el que la diferencia en la desviación típica es máxima (se llamará a partir de ahora punto A), y el punto del tipo 3 en el que el coeficiente de Pearson es máximo (se llamará a partir de ahora punto B), ambos puntos se han destacado en la figura 4.9 con un rectángulo azul.

Esos dos puntos presentan una característica común: ambos tienen un coeficiente de correlación alto. Pero también presentan una disimilitud importante: las diferencias en la desviación típica son muy dispares en un punto y en otro. Por ello, se pretende buscar una explicación a esa semejanza entre los puntos. Para conseguir tal propósito, se representan en la siguiente figura, los 51 valores que proporciona el modelo europeo de la componente meridional del viento (w_x), en función de la componente zonal (w_y), en el nodo en

el que la diferencia en la desviación típica es máxima (punto A):

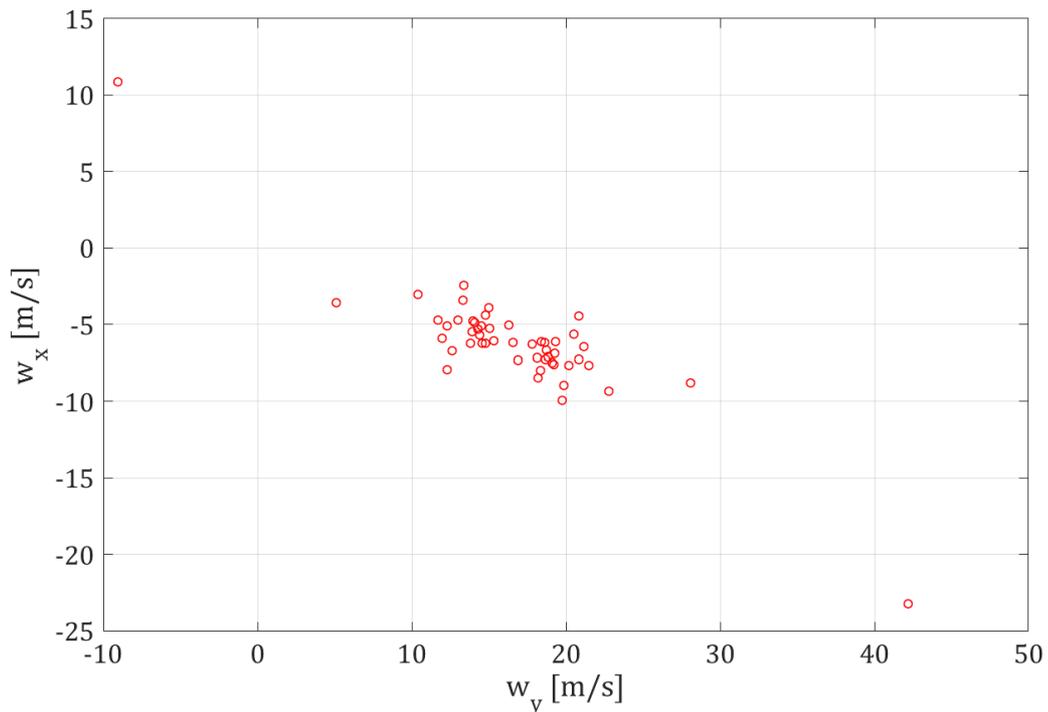


Figura 4.10. Valores de los vientos cuando la diferencia es máxima (punto A).

Igualmente, se representa la misma figura para el punto B:

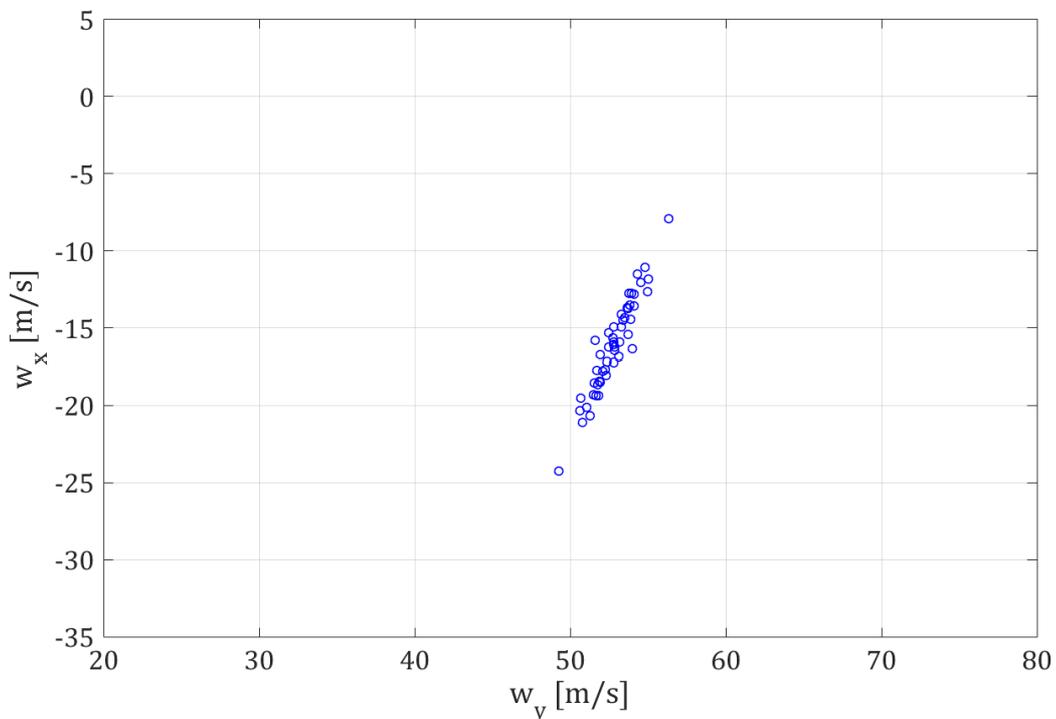


Figura 4.11. Valores de los vientos cuando el coeficiente de Pearson es máximo (punto B).

Comparando ambas imágenes, puede observarse una clara disparidad entre ellas: el rango de variación de los vientos es mucho mayor en el caso representado en la figura 4.10 que en el representado en la figura 4.11. Para relacionar ese contraste con las diferencias en la media y la desviación típica, se van a definir las siguientes

variables:

$$\Delta w_x = w_{xmax} - w_{xmin} \quad (4.8)$$

$$\Delta w_y = w_{ymax} - w_{ymin} \quad (4.9)$$

$$\Delta w_{Total} = \sqrt{\Delta w_x^2 + \Delta w_y^2} \quad (4.10)$$

Donde las variables de w_{xmax} , w_{xmin} , w_{ymax} y w_{ymin} fueron definidas en la sección 4.3.1.

Se representan en la siguiente tabla, los valores de Δw_x , Δw_y y Δw_{Total} tanto para el punto A, como para el punto B:

	Punto A	Punto B
Δw_x	34.06 m/s	16.34 m/s
Δw_y	51.23 m/s	7.04 m/s
Δw_{Total}	61.52 m/s	17.79 m/s

Tabla 4.1. Rango de variación de los vientos en los puntos A y B.

En esa tabla se observa claramente que el rango de variación de los vientos es bastante mayor en el punto A que en el punto B. Este resultado está relacionado con el contraste entre las diferencias en la desviación típica que aparecen en los puntos A y B. Para realizar el cálculo de la distancia mínima, se han tomado N_t valores (2^{23} valores en este caso) diferentes de las componentes meridional y zonal en cada nodo de la malla de vientos. Además, cada uno de esos N_t valores, se encuentran en el intervalo $[w_{xmin}, w_{xmax}]$ para la componente meridional, y en el intervalo $[w_{ymin}, w_{ymax}]$ para la componente zonal en cada nodo.

De esa forma, si los valores de Δw_x y Δw_y son pequeños en un nodo, todos los valores de vientos que se han tomado para ejecutar el método de Monte Carlo van a ser muy parecidos, por lo que las distancias mínimas que se han calculado van a ser muy similares. En este caso, el hecho de que las componentes del viento estén o no correladas no es importante, ya que el rango de variación del viento es pequeño, y por tanto, las diferencias en la media y la desviación típica de la distancia mínima en uno y otro caso también lo serán. Por otro lado, si los valores de Δw_x y Δw_y son grandes en un nodo, los valores de vientos que se toman para realizar el Monte Carlo pueden ser muy diferentes entre sí, por lo que el rango de variación de las distancias mínimas que se han calculado puede ser más amplio. En este caso, es bastante importante el que estén o no correladas las componentes del viento, ya que el rango de variación de éstas es bastante mayor y las diferencias en la media y la desviación típica de la distancia mínima al suponer o no componentes independientes, pueden aumentar.

Para clarificar esta idea, se representa en la siguiente imagen el rango de variación del viento (Δw_{total}), en función de las diferencias en la desviación típica ($\Delta_{desviación-ind-lin}$), para todos los nodos de la malla de vientos en los que sí existe correlación entre las componentes (el coeficiente de Pearson es mayor a 0.6, es decir, puntos del tipo 2 y 3):

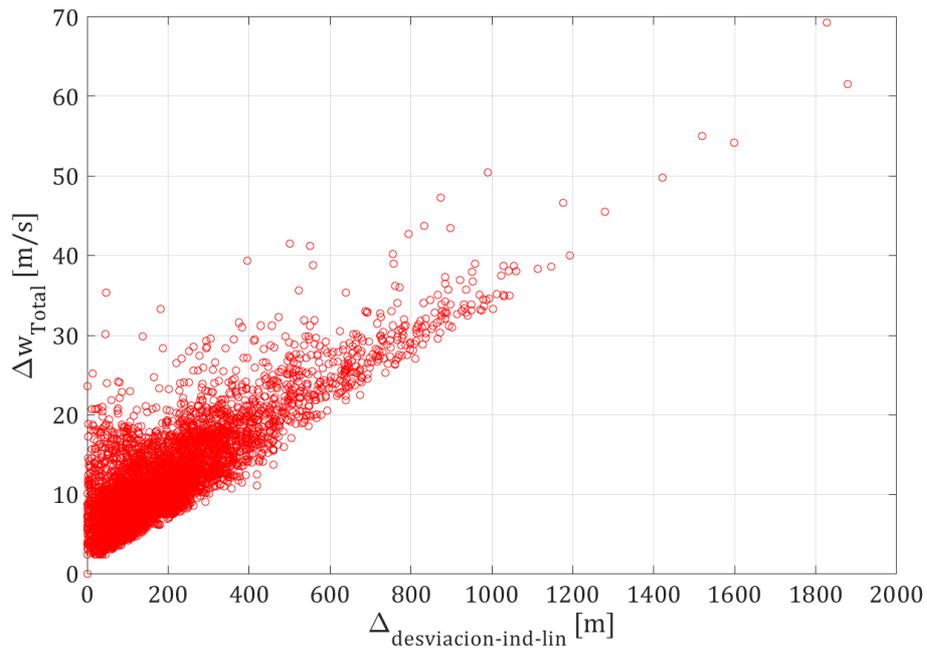


Figura 4.12. Relación entre el rango de variación del viento y el error en la desviación típica.

Mientras que, para el caso del error en la media, el comportamiento es bastante similar:

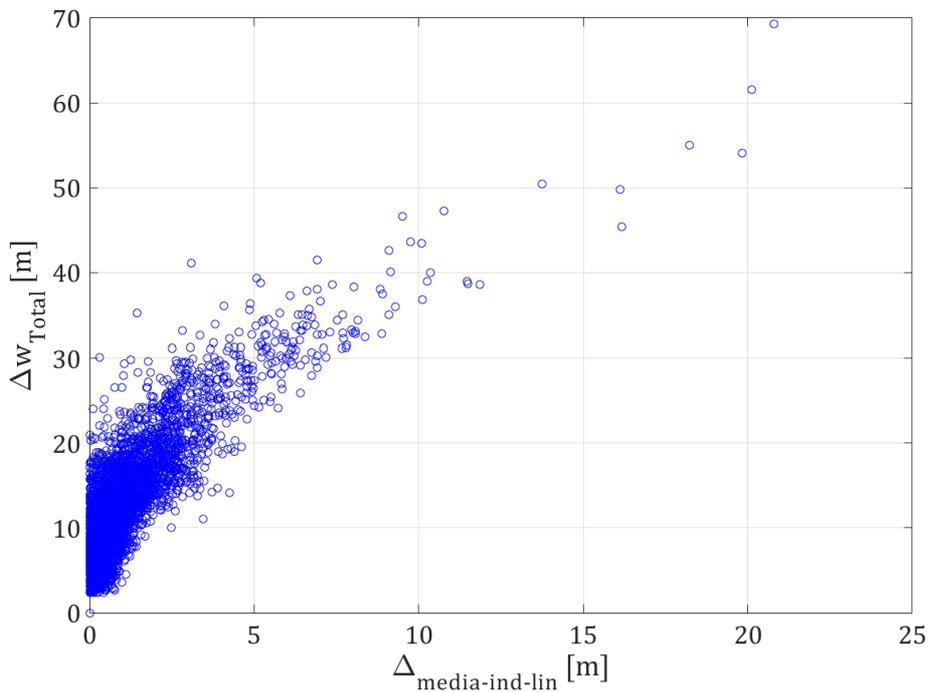


Figura 4.13. Relación entre el rango de variación del viento y el error en la media.

En las figuras 4.12 y 4.13 se observa claramente el comportamiento anteriormente explicado, es decir, a medida que el rango total de variación de los vientos aumenta, las diferencias que aparecen también se ven incrementadas.

5 CARACTERIZACIÓN ESTADÍSTICA DE LA DISTANCIA MÍNIMA

En los dos modelos desarrollados en el capítulo 4 (detallados en las secciones 4.3.1 y 4.3.2), se supone que el viento es constante en todo el espacio aéreo. Entonces, cuando se calcula la media y la desviación típica de la distancia mínima entre aeronaves, se están cometiendo errores derivados de esa suposición (errores que fueron analizados en el capítulo 3).

En este capítulo, se propone caracterizar estadísticamente la distancia mínima entre aeronaves empleando el modelo que considera como viento constante aquél que reduce los errores respecto al caso de viento no constante (detallado en la sección 3.4). Para ello, siguiendo el esquema del capítulo anterior, en primer lugar se realiza la formulación matemática de la caracterización estadística de la distancia mínima. En segundo lugar, se analizan las diferencias que aparecen en el cálculo de la media y la desviación típica de todos los modelos considerados hasta ahora.

Cabe remarcar que todos los resultados que se muestran en este capítulo se han calculado para la configuración de tráfico detallada en la sección 3.1, particularizada para un valor de $\|\vec{s}_1\| = 50 \text{ NM}$.

5.1 Formulación de la caracterización estadística de la distancia mínima

En esta sección se va a realizar la formulación de la caracterización estadística de la distancia mínima utilizando dos modelos diferentes: el primero de ellos considera como viento constante aquél que reduce los errores respecto al caso de viento no constante. El segundo de ellos considera que el viento no es constante. Éste segundo modelo (más realista), se tomará como referencia para calcular las diferencias que aparecen en el cálculo de la media y la desviación típica de todos los modelos detallados hasta ahora.

5.1.1 Modelo que reduce el error respecto al caso de viento no constante

Para calcular la media y la desviación típica de la distancia mínima, se va a emplear de nuevo, el método de Monte Carlo. Como se ha comentado anteriormente, en este apartado se supone un viento constante que reduce los errores cometidos (respecto al caso de viento no constante). Es decir, un viento cuyas componentes están definidas según las expresiones 3.25 y 3.26.

En este caso, las variables independientes ya no son w_x y w_y , sino que son los vientos medios según la dirección de las trayectorias de las aeronaves A y B cuando el viento no es constante, es decir, \bar{w}_{AT-A} y \bar{w}_{AT-B} . Cabe recordar que estas variables se calculan a partir de las integrales 3.21 y 3.22, por lo que se requiere definir las funciones $w_{nocte-AT-A}(D_A)$ y $w_{nocte-AT-B}(D_B)$, que ya no están asociadas a un nodo de la malla de vientos en concreto, sino que están asociadas a una trayectoria completa, es decir, están asociadas a una configuración de tráfico y no a un punto. Debido a esa circunstancia, para definir \bar{w}_{AT-A} y \bar{w}_{AT-B} como variables aleatorias independientes, continuas y uniformes, se va a seguir un procedimiento diferente al de las secciones 4.3.1 y 4.3.2, el cual se detalla en los siguientes puntos:

1. Se hace coincidir al punto de intersección de las trayectorias con un nodo de la malla de vientos.
2. Se considera que el viento existente en todos los nodos de la malla es el primero de los 51 valores proporcionados por el modelo europeo.
3. Se calculan las variables \bar{w}_{AT-A} y \bar{w}_{AT-B} a partir de las integrales 3.21 y 3.22.
4. Se considera que el viento existente en todos los nodos de la malla es el siguiente de los valores que

proporciona el modelo europeo, y se vuelve al punto 3. Este proceso se repite hasta que se hayan tenido en cuenta los 51 valores que proporciona el EPS europeo.

5. Se hace coincidir al punto de intersección de las rutas con otro nodo de la malla y se vuelve al punto 2. Este proceso se repite hasta que se haya asociado al punto de intersección de las trayectorias con todos los nodos de la malla de vientos.

Al finalizar el proceso anterior, asociado a cada nodo de la malla de vientos se dispone de 51 valores de las variables \bar{w}_{AT-A} y \bar{w}_{AT-B} . Entonces, en cada uno de esos nodos se tiene un valor máximo y mínimo de las variables \bar{w}_{AT-A} ($\bar{w}_{AT-A-max}$ y $\bar{w}_{AT-A-min}$ respectivamente) y \bar{w}_{AT-B} ($\bar{w}_{AT-B-max}$ y $\bar{w}_{AT-B-min}$). De esa forma, se van a definir en cada nodo de la malla de vientos, dos variables aleatorias independientes (\tilde{w}_{AT-A} y \tilde{w}_{AT-B}), con distribuciones uniformes y continuas, cuyas funciones de densidad son las siguientes:

$$f_{\tilde{w}_{AT-A}}(\tilde{w}_{AT-A}) = \begin{cases} 1/(\bar{w}_{AT-A-max} - \bar{w}_{AT-A-min}), & \tilde{w}_{AT-A} \in [\bar{w}_{AT-A-min}, \bar{w}_{AT-A-max}] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$f_{\tilde{w}_{AT-B}}(\tilde{w}_{AT-B}) = \begin{cases} 1/(\bar{w}_{AT-B-max} - \bar{w}_{AT-B-min}), & \tilde{w}_{AT-B} \in [\bar{w}_{AT-B-min}, \bar{w}_{AT-B-max}] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.2)$$

Tomando dos valores aleatorios de esas variables (cuyas funciones de densidad están definidas en 5.1 y 5.2), pueden calcularse las componentes w_x y w_y evaluando las expresiones 3.25 y 3.26. De esa forma, el viento existente en el nodo de la malla de vientos considerado queda completamente determinado. Se va a suponer que el viento constante que afecta a las aeronaves es el existente en el nodo de la malla de vientos elegido, por lo que puede calcularse la distancia mínima entre aeronaves según el procedimiento detallado en la sección 2.2.

Al igual que en el capítulo 4, se tomarán 2^{23} valores aleatorios de las variables \tilde{w}_{AT-A} y \tilde{w}_{AT-B} en cada nodo. Por lo que se dispondrá, de nuevo, de 2^{23} valores de la distancia mínima en cada punto. En este apartado, la media y la desviación típica de la distancia mínima en cada nodo se denominan $\bar{d}_{min-red}$ y σ_{red} respectivamente.

5.1.2 Modelo con viento no constante

En este apartado, el viento que afecta a las aeronaves depende de las posiciones que éstas ocupen (como se expone en la ecuación 2.18). Ahora, el viento no es constante, por lo que el procedimiento que se va a seguir para calcular la media y la desviación típica de la distancia mínima es diferente a los explicados en secciones anteriores, y es el siguiente:

1. Se hace coincidir al punto de intersección de las trayectorias con un nodo de la malla de vientos.
2. Se considera que el viento existente en todos los nodos de la malla es el primero de los 51 valores proporcionados por el modelo europeo.
3. Se calcula la distancia mínima como se detalla en la sección 2.3.
4. Se considera que el viento existente en todos los nodos de la malla es el siguiente de los valores que proporciona el modelo europeo, y se vuelve al punto 3. Este proceso se repite hasta que se hayan tenido en cuenta los 51 valores que proporciona el EPS europeo.
5. Se hace coincidir al punto de intersección de las rutas con otro nodo de la malla y se vuelve al punto 2. Este proceso se repite hasta que se haya asociado al punto de intersección de las trayectorias con todos los nodos de la malla de vientos.

Siguiendo este procedimiento, asociado a cada nodo de la malla se dispone de 51 valores de la distancia mínima entre aeronaves. Por tanto, puede calcularse la media y la desviación típica de la distancia mínima en cada nodo, que en este caso se denominarán $\bar{d}_{min-nocte}$ y σ_{nocte} respectivamente.

Cabe remarcar una clara diferencia entre este modelo y los explicados anteriormente: ahora se dispone de una muestra de distancias mínimas mucho más pequeña. En modelos anteriores (explicados en las secciones 4.3.1, 4.3.2 y 5.1.1), la muestra estaba formada por 2^{23} valores de la distancia mínima en cada nodo, mientras que

ahora, está constituida por 51 valores.

5.2 Análisis de diferencias

Para analizar las diferencias asociadas al cálculo de la media y la desviación típica de la distancia mínima entre aeronaves utilizando todos los modelos definidos hasta ahora, se toma como referencia el modelo que considera viento no constante (detallado en la sección 5.1.2), puesto que es el modelo más realista. De esa forma, esas diferencias asociadas al modelo que considera componentes independientes (detallado en la sección 4.3.1), en cada nodo, se definen de la siguiente forma:

$$\Delta_{media-ind} = |\bar{d}_{min-ind} - \bar{d}_{min-nocte}| \quad (5.3)$$

$$\Delta_{desviacion-ind} = |\sigma_{ind} - \sigma_{nocte}| \quad (5.4)$$

Igualmente, para el modelo que considera componentes relacionadas linealmente (sección 4.3.2), las diferencias en cada nodo, se definen de la siguiente forma:

$$\Delta_{media-lin} = |\bar{d}_{min-lin} - \bar{d}_{min-nocte}| \quad (5.5)$$

$$\Delta_{desviacion-lin} = |\sigma_{lin} - \sigma_{nocte}| \quad (5.6)$$

Por ultimo, para el modelo que considera como viento constante aquél que reduce los errores respecto al caso de viento no constante (sección 5.1.1):

$$\Delta_{media-red} = |\bar{d}_{min-red} - \bar{d}_{min-nocte}| \quad (5.7)$$

$$\Delta_{desviacion-red} = |\sigma_{red} - \sigma_{nocte}| \quad (5.8)$$

A continuación, se representan, en el eje de ordenadas, el porcentaje de casos en los que las diferencias en la media considerando cada uno de los modelos, son superiores a un cierto valor dado en el eje de abscisas:

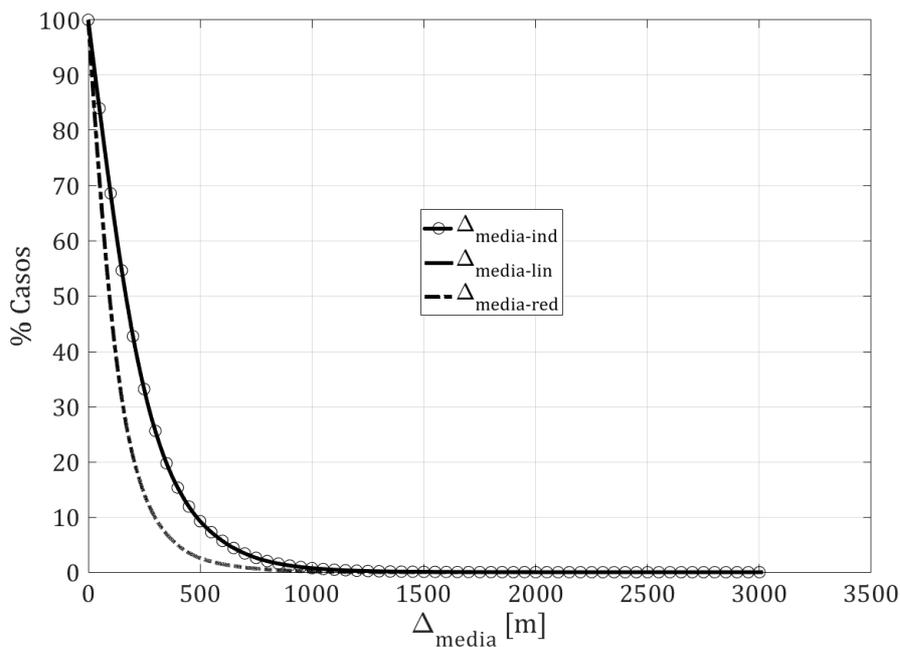


Figura 5.1. Diferencias en la media.

En la siguiente figura, se realiza la misma representación particularizada para las diferencias en la desviación típica:

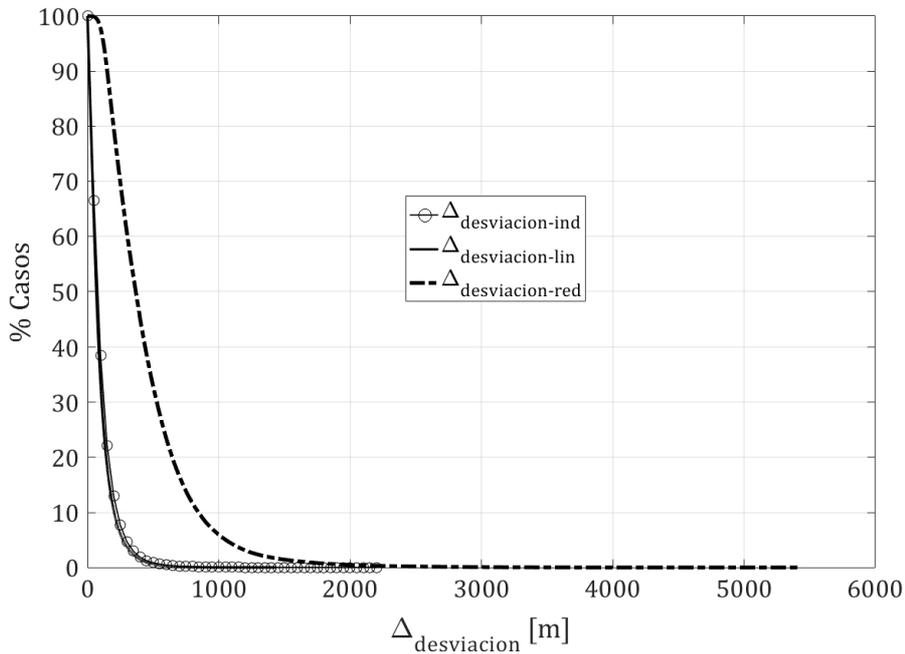


Figura 5.2. Diferencias en la desviación típica.

Observando los resultados de las figuras 5.1 y 5.2, puede comprobarse que la media de la distancia mínima queda caracterizada de forma más precisa cuando se considera el modelo que reduce los errores respecto al caso de viento no constante. Sin embargo, en la desviación típica, ocurre lo contrario. Para explicar por qué aumentan las diferencias en el caso de la desviación típica, en la siguiente tabla se representan los valores medios de las desviaciones típicas ($\bar{\sigma}$), así como de las diferencias en la media ($\overline{\Delta_{media}}$) y la desviación típica ($\overline{\Delta_{desviacion}}$) de cada uno de los modelos:

	$\bar{\sigma}$	$\overline{\Delta_{media}}$	$\overline{\Delta_{desviacion}}$
Componentes independientes	397.24 m	222.95 m	104.77 m
Componentes relacionadas linealmente	384.10 m	222.97 m	93.79 m
Reduce el error respecto a viento no constante	749.62 m	134.43 m	450.83 m
Viento no constante	298.78 m	-	-

Tabla 5.1. Valores característicos de las diferencias en la media y la desviación típica

Cuando se considera el modelo que reduce los errores respecto al caso de viento no constante, la desviación típica es mayor que en el resto de modelos. Ese comportamiento provoca que las diferencias en la desviación típica sean mayores en ese modelo que en cualquier otro. Sin embargo, es más preciso en el cálculo de la media.

6 CONCLUSIONES

6.1 Hipótesis de viento constante

Respecto a la hipótesis de viento constante, pueden realizarse las siguientes conclusiones:

El suponer viento constante proporciona grandes ventajas desde el punto de vista numérico (método mucho más eficiente), por lo que conviene realizar esta suposición siempre que sea posible. Sin embargo, también conlleva la aparición de errores en el cálculo de la distancia mínima entre aeronaves que pueden ser aceptados o no, dependiendo de la precisión con la que se quieran obtener los resultados.

A medida que las posiciones iniciales de las aeronaves se alejan, los errores se incrementan. El origen de los errores reside fundamentalmente en las variaciones de las distancias relativas entre aeronaves al considerar viento constante respecto al caso de viento no constante. Lo ideal sería suponer un viento constante que consiga que las distancias relativas entre aeronaves se mantengan similares al caso de viento no constante (cuando la aeronave A se adelanta (retrasa) respecto al caso de viento constante, la B también se adelanta (retrasa)). Para ello, se ha comprobado que, tanto el viento cruzado como el viento según la dirección de la trayectoria de la aeronave provocan cambios en la velocidad de avance de ésta, e introducen errores en el cálculo de la distancia mínima. Sin embargo, el efecto del viento según la dirección de la aeronave es dominante respecto al efecto del viento cruzado (prácticamente puede despreciarse).

Por último, para caracterizar estadísticamente la distancia mínima entre aeronaves (cálculo de media y desviación típica) suponiendo viento constante, se requiere elegir un viento constante adecuado que permita realizar esa caracterización de forma precisa. En concreto, el modelo propuesto en el capítulo 5 proporciona resultados relativamente adecuados en el cálculo de la media, sin embargo, no es tan preciso en el cálculo de la desviación típica.

6.2 Hipótesis de componentes del viento estadísticamente independientes

Respecto a la hipótesis de componentes del viento independientes, pueden realizarse las siguientes conclusiones:

El hecho de considerar independientes las componentes del viento es una hipótesis adecuada en una gran parte de los casos (donde no hay correlación entre ellas). Sin embargo, existe una minoría de situaciones en las que esa suposición no es precisa, esas situaciones se corresponden con los casos en los que las componentes del viento están bastante correladas. El considerar componentes correladas engloba un mayor número de situaciones (es una suposición más realista) que el suponer componentes estadísticamente independientes, y además, no ofrece mayores complicaciones desde el punto de vista numérico.

Analizando las diferencias en los resultados entre considerar independientes o relacionadas linealmente las componentes del viento, unas diferencias considerables están originadas por una correlación importante entre las componentes del viento, sin embargo, una correlación fuerte entre las componentes del viento, no tiene por qué originar diferencias considerables. Para que las diferencias sean significativas, deben darse dos situaciones: que las componentes del viento estén correladas, y que el rango de variación total de los vientos sea grande.

Por tanto, la hipótesis de componentes del viento independientes puede considerarse realista en los casos en los que no existe correlación (o la correlación es pequeña) entre las componentes del viento y también en los casos en los que la correlación sea importante, siempre y cuando el rango de variación de los vientos sea pequeño. Sin embargo, se recomienda considerar componentes del viento correladas, puesto que es una hipótesis más realista y además, numéricamente no ofrece complicaciones.

6.3 Aplicaciones en herramientas STCA y MTCD

Atendiendo a las conclusiones anteriores, se proponen ahora recomendaciones sobre que método es más adecuado en herramientas STCA (Short Term Conflict Alert) y MTCD (Medium Term Conflict Detection).

En herramientas STCA, se propone considerar viento constante con componentes estadísticamente correladas. Por un lado, la hipótesis de viento constante es apropiada en este caso, puesto que proporciona resultados precisos cuando se resuelven problemas de muy corto alcance (como los considerados en STCA) siempre y cuando se elija un viento constante adecuado (por ejemplo, como el definido en la sección 3.4). Además, numéricamente ofrece ventajas considerables respecto al caso de viento no constante. En segundo lugar, como se ha comentado anteriormente, se recomienda suponer componentes correladas, al ser ésta una hipótesis más general (modela adecuadamente un mayor número de casos) e igualmente eficiente desde el punto de vista numérico.

En herramientas MTCD se recomienda no suponer viento constante. En problemas de largo alcance (como los considerados en MTCD), los errores cometidos al suponer viento constante son importantes, por ello se cree conveniente considerar viento variable. Aunque cabe remarcar que la validez de esta hipótesis depende de la precisión con la que se deseen obtener en los resultados (en la sección 3.4.2 se cuantifican los errores que se cometen en cada caso).

ANEXO: MODELADO DEL VIENTO

En este anexo se pretende aclarar cómo se ha modelado la función 2.18 especificada en la sección 2.3, la cual permite conocer el viento que afecta a las aeronaves a partir de sus posiciones.

En la sección 1.2, se explica que el modelo EPS del ECMWF europeo proporciona 51 valores de las componentes meridional y zonal del viento en una serie de puntos distribuidos por la superficie terrestre. De aquí en adelante, a esos puntos se les denominará nodos y el viento será perfectamente conocido en cada uno de ellos. La forma por la que se va a definir el viento en esos nodos, va a depender de la simulación que se esté realizando. Por ejemplo, en algunos casos se considerará que el viento presente en los nodos es la media de los 51 valores proporcionados por el modelo europeo (capítulo 3) y en otros casos que es el valor enésimo de esos 51 valores (capítulo 5). Pero en todos los casos, el viento va a ser conocido en esos nodos.

De esa forma, se dispone de una malla que contiene los valores de las componentes del viento en una serie de puntos repartidos por la superficie terrestre. Los elementos de la malla son rectángulos como el que se representa en la siguiente figura:

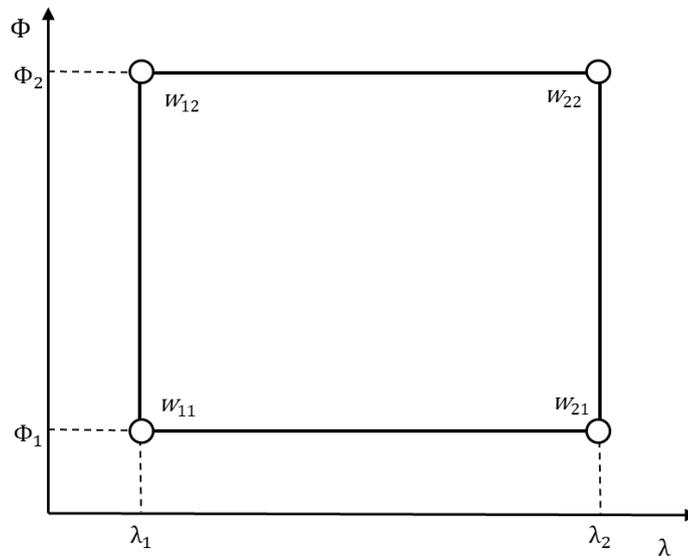


Figura A.1. Elemento de la malla de vientos.

En un punto (λ, ϕ) perteneciente al interior de ese elemento, el viento se calcula interpolando de la siguiente forma:

$$w(\lambda, \phi) = w_{11} \frac{(\lambda - \lambda_2)(\phi - \phi_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\phi_1 - \phi_2)} + w_{12} \frac{(\lambda - \lambda_2)(\phi - \phi_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\phi_2 - \phi_1)} + w_{21} \frac{(\lambda - \lambda_1)(\phi - \phi_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\phi_1 - \phi_2)} + w_{22} \frac{(\lambda - \lambda_1)(\phi - \phi_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\phi_2 - \phi_1)} \quad (\text{A.1})$$

A partir de la ecuación A.1 puede calcularse el viento que afecta a la aeronave conociendo su latitud y longitud, sin embargo, en la sección 2.1 se explica que las posiciones de las aeronaves se calculan en el sistema de coordenadas $X - Y$ representado en la figura 2.1 y no en coordenadas geográficas. Debido a esa circunstancia, para poder evaluar el viento que afecta a las aeronaves, se requiere transformar las posiciones de éstas del sistema de coordenadas $X - Y$ a una latitud y longitud, a través de una proyección. En concreto, la proyección elegida es la azimutal gnomónica. En esta proyección, la superficie sobre la que se proyecta es un

plano, y la proyección pasa por el centro de la Tierra, tal y como se representa en la siguiente figura:

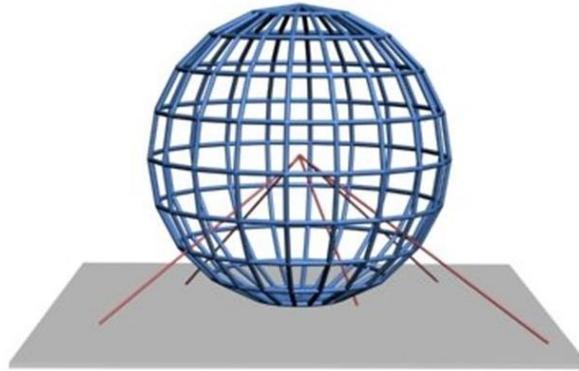


Figura A.2. Proyección azimutal gnomónica.

Una característica de esta proyección es que existe un punto de contacto entre la Tierra y el plano sobre el que se proyecta (observar figura A.2). La configuración de tráfico que se va a estudiar en este documento es la que se representa en la figura 3.1, como puede comprobarse en esa figura, existe un punto en el que ambas trayectorias se cortan. Así pues, el punto en el que se produce el contacto entre la superficie de la Tierra y el plano sobre el que se va a proyectar, es el punto de intersección de ambas trayectorias.

De esa forma, se calcula la latitud y la longitud en la que se encuentra una aeronave conociendo su posición en coordenadas (x, y) a partir de las ecuaciones que caracterizan la proyección azimutal gnomónica [9]:

$$\phi = \sin^{-1} \left(\cos(c) \sin(\phi_0) + \frac{(y - y_i) \sin(c) \cos(\phi_0)}{\rho} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\lambda = \lambda_0 + \tan^{-1} \left(\frac{(x - x_i) \sin(c)}{\rho \cos(\phi_0) \cos(c) - (y - y_i) \sin(\phi_0) \sin(c)} \right)$$

Siendo:

$$\rho = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (\text{A.3})$$

$$c = \tan^{-1} \left(\frac{\rho}{R_t} \right)$$

$R_t \equiv$ Radio de la Tierra (6371 km).

$(x_i, y_i) \equiv$ Coordenadas (x, y) del punto de intersección de las trayectorias.

$(\lambda_0, \phi_0) \equiv$ Longitud y latitud del punto de intersección de las trayectorias.

Para poder definir la proyección, se requiere asociar al punto de intersección de las trayectorias cuyas coordenadas (x, y) son conocidas, a una longitud y una latitud (λ_0, ϕ_0) . En principio, no hay restricción alguna sobre qué latitud o longitud habría que asociar a ese punto, por lo que puede fijarse en cualquier valor. De esa forma, conociendo la posición de una aeronave en coordenadas (x, y) , puede calcularse la longitud y la latitud en la que se encuentra a partir de las ecuaciones A.2 y A.3, y se obtiene de manera determinista el viento que le afecta, evaluando la expresión A.1, por lo que la función 2.18 queda definida.

REFERENCIAS

- [1] Eulalia Hernández, Alfonso Valenzuela and Damián Rivas, *Probabilistic Aircraft Conflict Detection Considering Ensemble Weather Forecast*.
- [2] Eulalia Hernández, *Master's Degree Final Project, Probabilistic Aircraft Conflict Detection Using Transformation of Random Variables*.
- [3] ICAO, *DOC 444, Procedures for Air Navigation System, Air Traffic Management. Sixteenth Edition, 2016*.
- [4] Eurocontrol, *Single European Sky* <http://www.eurocontrol.int/dossiers/single-european-sky>.
- [5] Eurocontrol, *European Air Traffic Management Master Plan. Edition 1, 30 March 2009*.
- [6] ComplexWorld Wiki, *Uncertainty in ATM* http://complexworld.eu/wiki/Uncertainty_in_ATM.
- [7] World Meteorological Organization, *Guidelines on Ensemble Prediction System and Forecasting, 2012*.
- [8] Christian Bayer, Hakon Hoel, Erik Von Schwerin and Raúl Tempone, *On Non-Asymptotic Optimal Stopping Criteria In Monte Carlo Simulations*.
- [9] John P.Snyder, *U.S Geological Survey Professional Paper 1395, Map Projections – A Working Manual. 1987*.
- [10] Wikipedia, *Pearson Correlation Coefficient*, https://en.wikipedia.org/wiki/Pearson_correlation_coefficient.
- [11] Wikipedia, *Spearman's rank Correlation Coefficient*, https://en.wikipedia.org/wiki/Spearman%27s_rank_correlation_coefficient.