

23730122

Consulta

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral  
al folio 019 número 300 del libro  
correspondiente.

Sevilla. 10-07-06.

El Jefe del Negociado de Tesis

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Tesis  
88

# Cálculo Simbólico y Técnicas de Control de $A_\infty$ -estructuras

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA - BIBLIOTECA -
N.º ORDEN GENERAL <u>011494839</u>
OBRA N.º ..... TOMO.....
SIGNATURA.....
N.º EN ESPECIALIDAD.....
EJEMPLAR NUMERO <u>R.14.766</u>

Vº Bº Directores,

Pedro Real  
Francis Sergeraert

Memoria presentada por  
**Ainhoa Berciano Alcaraz**  
para optar al grado de Doctora  
por la Universidad de Sevilla.

Julio de 2006



*A mis padres*





UNIVERSIDAD DE SEVILLA REGISTRO GENERAL AUXILIAR PABELLON DE BRASIL	SALIDA	Nº. 200600400020010 13/11/2006 13:15:21
---	--------	--

Sevilla, 13 de Noviembre de 2006  
N/Ref.: Negociado de Tesis EL/CAR  
Asunto: Enviando Tesis Doctoral Leída

ILMO. SR. DIRECTOR DE LA BIBLIOTECA  
DE LA E.T.S. DE INGENIERÍA  
INFORMÁTICA  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Escuela, a fin de que pasen a formar parte de los fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESIS LEÍDAS

- BERCIANO ALCARAZ, AINHOA
- RIVA MORENO, YOLANDA DE LA



LA JEFA DEL NEGOCIADO DE TESIS

Fdo.: ELENA LAFFITTE ALAMINOS.

# Agradecimientos

No podía faltar en esta memoria una pequeña mención a todas aquellas personas e instituciones que han dado lugar a que esta tesis se lleve a cabo, pero con el fin de no dejarme a nadie en el tintero no las nombraré explícitamente.

Por tanto, como “es de bien nacido ser agradecido”, gracias a todas las que habéis estado ahí apoyándome en este tiempo, tanto moral como económicamente, y muy en especial gracias a todas las que habéis estado desde el principio.

Igualmente, como “todo lo que no te mata, te hace más fuerte”, gracias también a todas aquellas que no han creído en mí y me han intentado desalentar por el camino, sin ellas es probable que esta memoria no hubiera resultado tan satisfactoria.

Por último, sólo me queda decir

**BIHOTZ-BIHOTZEZ,**

**ESKERRIK ASKO GUZTIOI!**



# Resumen

Mostramos aquí diversos aspectos importantes relacionados con el estudio de las  $A_\infty$ -estructuras, las cuales juegan un papel importante en la Topología Algebraica tal y como se aborda hoy en día.

En particular centramos nuestro estudio en el comportamiento de dichas estructuras frente a productos tensoriales, a pequeñas modificaciones en los datos originales dando lugar a perturbaciones de alguna de las diferenciales, etc.

De hecho, podemos dividir la memoria en tres secciones bien diferenciadas:

- En la primera, que engloba al capítulo dos y cuatro, demostramos sendos teoremas que confirman que las  $A_\infty$ -estructuras forman en sí mismas una categoría y no deben ser consideradas exclusivamente como una categoría derivada.

Además en la misma sección dualizamos para conjuntos cosimpliciales un extenso trabajo realizado por S. Eilenberg y S. Mac Lane acerca del Teorema de Eilenberg-Zilber, que dio lugar a un avance enorme en los años cincuenta en el área de la Topología Algebraica.

Dicho teorema, nos sirve para probar la existencia de una contracción entre la construcción cobar del producto tensorial de dos coálgebras y el producto tensorial de las construcciones cobar respectivas, teorema que dualiza totalmente el trabajo realizado acerca de la construcción bar por S. Eilenberg y S. Mac Lane.

Como aplicación de algunas de estas herramientas, calculamos en el capítulo cuarto la  $A_\infty$ -estructura de la homología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane con coeficientes en el anillo  $\mathbb{Z}_p$ .

- La segunda sección, correspondiente al capítulo tres, se basa en la búsqueda de una noción robusta de  $A_\infty$ -álgebra de Hopf por perturbación.

Para ello, definimos un dg-módulo asociado a una álgebra de Hopf, y demostramos que dada una álgebra de Hopf y una contracción, ésta induce sobre el dg-módulo



menor una  $A_\infty$ -álgebra de Hopf, en donde determinamos cuáles deben ser las operaciones integrantes de dicha estructura y las relaciones que deben verificar.

En particular, mostramos una noción dual a la dada por R. Umble y S. Sanedlidze acerca de las  $A_\infty$ -álgebras de Hopf.

- La última parte de la memoria, que corresponde al capítulo cinco, está dedicada a la traslación computacional de las  $A_\infty$ -estructuras, con la creación e implementación de algoritmos que sean capaces de calcular (a bajo nivel) las operaciones integrantes de una  $A_\infty$ -estructura, con el fin de poder testar algunos ejemplos y de obtener experimentalmente resultados hasta ahora no conocidos.

El capítulo consta de tres secciones, en la primera se tratan diversos problemas teóricos de traslación de conceptos matemáticos, en la segunda planteamos las soluciones a los mismos y ya en la tercera sección mostramos ejemplos de computación con pseudo-código. Además, hemos añadido un apéndice con los archivos creados con su correspondiente aplicación para poder hacer uso del programa.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Fundamentos básicos de Álgebra Homológica . . . . .	1
1.2. Nociones de Topología Simplicial . . . . .	14
<b>2. Estudio y control de <math>A_\infty</math>-estructuras</b>	<b>21</b>
2.1. Propiedades principales . . . . .	22
2.2. Contracciones que preservan las estructuras . . . . .	25
2.2.1. Estudio multiplicativo de la “contracción Bar” . . . . .	25
2.2.2. Estudio multiplicativo de la “contracción Cobar” . . . . .	27
2.3. Técnicas de Transferencia . . . . .	41
2.4. Técnicas de Control de $A_\infty$ -estructuras . . . . .	48
2.5. Problemas abiertos . . . . .	50
<b>3. <math>A_\infty</math>-Álgebras de Hopf</b>	<b>51</b>
3.1. Representación Matricial . . . . .	52
3.1.1. La estructura diferencial de $BC(H)$ . . . . .	53
La diferencial tensorial de $BC(H)$ . . . . .	53
La diferencial simplicial de $BC(H)$ . . . . .	55
La diferencial cosimplicial de $BC(H)$ . . . . .	59
Propiedades de compatibilidad . . . . .	61
3.1.2. La estructura multiplicativa de $BC(H)$ . . . . .	66
La estructura de álgebra en las filas de $BC(H)$ . . . . .	66
La estructura de coálgebra en las columnas de $BC(H)$ . . . . .	68
La estructura multiplicativa global de $BC(H)$ . . . . .	71
3.2. $A_\infty$ -álgebras de Hopf por Perturbación . . . . .	75
3.2.1. La estructura de $A_\infty$ -coálgebra . . . . .	76
3.2.2. La estructura de $A_\infty$ -álgebra . . . . .	78
3.2.3. Los operadores de homotopía . . . . .	80



3.3. Problemas abiertos . . . . .	84
<b>4. Espacios de Eilenberg-Mac Lane</b>	<b>85</b>
4.1. Propiedades principales . . . . .	86
4.2. Cálculo y Estudio de la Homología . . . . .	90
4.3. Caso $K(\mathbb{Z}, n)$ . . . . .	92
4.3.1. $K(\mathbb{Z}, n)$ , donde $n \leq 2$ . . . . .	92
4.3.2. $K(\mathbb{Z}, n)$ , donde $n = 3$ . . . . .	92
La contracción $\bar{B} \rightarrow E \otimes \Gamma$ . . . . .	94
Teoría de Inversiones . . . . .	96
4.3.3. $K(\mathbb{Z}, n)$ , donde $n = 4$ . . . . .	107
4.3.4. $K(\mathbb{Z}, n)$ , donde $n > 4$ . . . . .	107
4.4. Caso $K(\mathbb{Z}^r, n)$ . . . . .	107
4.4.1. $K(\mathbb{Z}^r, n)$ , donde $n \leq 2$ . . . . .	108
4.4.2. $K(\mathbb{Z}^r, n)$ , donde $n \geq 3$ . . . . .	108
4.5. Caso $K(\mathbb{Z}_{p^r}, n)$ . . . . .	108
4.5.1. $K(\mathbb{Z}_{p^r}, n)$ , donde $n < 2$ . . . . .	108
4.5.2. $K(\mathbb{Z}_{p^r}, n)$ , donde $n = 2$ . . . . .	110
4.5.3. $K(\mathbb{Z}_{p^r}, n)$ , donde $n > 2$ . . . . .	110
4.6. Aplicación computacional de la Teoría de Inversiones. . . . .	110
4.7. Problemas abiertos . . . . .	113
<b>5. Cálculo simbólico de <math>A_\infty</math>-estructuras</b>	<b>115</b>
5.1. Aspectos básicos . . . . .	116
5.2. Aspectos técnicos . . . . .	120
5.2.1. Problemas . . . . .	120
5.2.2. Soluciones . . . . .	122
5.3. Esbozo del código fuente . . . . .	128
5.3.1. Módulo combinatorio sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_p$ . . . . .	128
5.3.2. Álgebras polinomiales, exteriores . . . . .	129
5.3.3. Módulos ARAIA y CRAIC . . . . .	133
Ejemplos didácticos . . . . .	134
5.4. Aplicaciones . . . . .	137
5.4.1. Cálculo de $A_\infty$ -estructuras en productos tensoriales . . . . .	137
5.5. Optimizaciones y posibles mejoras . . . . .	140
<b>Apéndice</b>	<b>141</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>145</b>



# Introducción

Desde principios del siglo XX, en que H. Poincaré definiera ocho esferas homológicamente equivalentes a la esfera usual, pero con distintos grupos de homotopía, la búsqueda de invariantes más finos que la homología ha sido uno de los incentivos para el auge y desarrollo de la Topología Algebraica.

A mediados de los años cincuenta, surge la *Topología Simplicial*, que proporciona un enfoque combinatorio a la Topología. De hecho, los conjuntos simpliciales, originalmente llamados complejos semi-simpliciales completos aparecen en 1950 en un artículo de S. Eilenberg y J.A. Zilber [EZ50]. El enfoque combinatorio dado por el acercamiento simplicial permite por otro lado formalizar cuestiones de tipo topológico y crear algoritmos que intenten solucionarlos de manera computacional. Otro aspecto importante son los fibrados que simplifican enormemente su estructura y pueden verse globalmente como un *producto cartesiano torcido*  $F \times_{\tau} B$  de dos conjuntos simpliciales (la fibra  $F$  y la base  $B$ ).

La pieza fundamental para reducir la homología de un producto cartesiano torcido como en el caso anterior a la de un producto tensorial torcido (*Teorema de Eilenberg-Zilber torcido*), es un tipo especial de equivalencia de homotopía, llamada *contracción*. Es bien conocido que todo conjunto simplicial puede describirse como un producto cartesiano torcido de espacios “primos” (en homotopía), o espacios de Eilenberg-Mac Lane  $K(\pi, n)$  que dependen de un grupo abeliano finitamente generado  $\pi$  y de un entero positivo  $n$ .

La herramienta clave en nuestro contexto, las *contracciones* [EM53] y la teoría que las estudia, la *Teoría de Perturbación Homológica*, sugiere nuevas perspectivas y acercamientos a problemas clásicos de la Topología Algebraica y Álgebra Homológica.

Desde finales de la década de los ochenta dicha teoría va tomando fuerza sobre todo a la hora de abordar el cálculo en Álgebra Homológica [Shi62, Bro67, GL89, Ser87, HK91, Rea00].

Trabajos fundamentalmente de V.K.A.M. Gugenheim, L. Lambe y J.D. Stasheff [GL89, GLS91], formalizando trabajos ya clásicos de W. Shih [Shi62] y R. Brown [Bro67], sien-



tan las bases de la Teoría de Perturbación Homológica tal como la conocemos hoy.

El **Lema de Perturbación Básico** [Shi62, GS86, GL89] garantiza que al perturbar la diferencial del módulo de partida (bajo ciertas hipótesis de nilpotencia), se puede definir una nueva contracción donde los módulos graduados subyacentes no han sufrido variaciones y sólo se modifican las diferenciales y los morfismos integrantes en la contracción. Es importante reseñar que dicho resultado proporciona las fórmulas explícitas de los nuevos morfismos, dando lugar a un proceso constructivo y algorítmico para la obtención de los nuevos datos.

Posteriormente, esta técnica permite reenunciar los teoremas de E.H. Brown [Bro67] y Eilenberg-Zilber torcido [EM54] en función de perturbaciones de las estructuras diferenciales [Alv97], redescubrir las  $A_\infty$ -estructuras como procesos de perturbación de módulos tensoriales [GLS91], interpretar estos procesos como construcciones de  $A_\infty$ -cocadenas, etc.

A mediados de los años sesenta, las nociones de  $A_\infty$ -espacio y  $A_\infty$ -álgebra son introducidas por J.D. Stasheff [Sta63], donde esta última es la generalización de una estructura multiplicativa salvo homotopía. El ejemplo fundamental que le inspira es el complejo de cadenas asociado al espacio de lazos de un espacio topológico. A pesar de que el espacio de lazos posee estructura de álgebra al pasar al complejo de cadenas, el morfismo candidato a ser el producto no verifica la condición de asociatividad, pero sí la verifica salvo homotopía.

En las dos décadas siguientes, se encuentran aplicaciones de las  $A_\infty$ -estructuras relacionadas con la teoría de la homotopía [Ada78, BV73, May72]; donde su único uso queda principalmente confinado a esta área. Este hecho cambia drásticamente a comienzos de los años 90 donde la relevancia de las  $A_\infty$ -estructuras en álgebra, geometría y física matemática comienza a ser más y más importante [GJ90, Sta92]. Una influencia destacable es la charla de M. Kontsevich [Kon94] en un Congreso Internacional en 1994, el cual inspirado en un preprint de K. Fukaya [Fuk93], da una interpretación (a modo de conjetura) acerca de la posible equivalencia entre dos categorías trianguladas asociadas a  $A_\infty$ -categorías.

Desde entonces, han sido muchos los enfoques que se han tomado para estudiar dichas estructuras, a destacar la Teoría de Operads [Mar92, HK91], la teoría basada en Permutahedras desarrollada principalmente por S. Sanedlidze y R. Umble [SU1, SU2, SU3, SU4], junto con la ya mencionada Teoría de Perturbación Homológica [Kad82, Kad87, JR01, Jim03]. La importancia de esta última es que presenta una simplicidad en el tratamiento de las  $A_\infty$ -estructuras: dada una  $A_\infty$ -(co)álgebra, existe una (co)álgebra y una contracción

que inducen la estructura original de partida, y viceversa, dada una contracción entre una (co)álgebra y un dg-módulo, éste hereda de modo natural una estructura de  $A_\infty$ -(co)álgebra.

Nuestro trabajo está inspirado en éste último punto de vista, el tratamiento de  $A_\infty$ -estructuras haciendo uso de la Teoría de Perturbación Homológica aplicada en particular a la categoría de álgebras y de coálgebras [Rea00].

Uno de los aspectos importantes a tratar es ver qué pasa cuando el complejo de cadenas del espacio topológico de partida tiene estructura de álgebra de Hopf. Si tenemos una contracción hacia un módulo, una pregunta que surge inmediatamente es ver cuál es la estructura que hereda, dando lugar a la definición de  $A_\infty$ -álgebra de Hopf.

Estas estructuras aparecen naturalmente en la Topología Algebraica, como ejemplo, dado un grupo simplicial conmutativo, se tiene que el complejo de cadenas asociado tiene estructura de álgebra de Hopf. Al estudiar la homología del mismo y establecer una cadena de contracciones entre el complejo de cadenas de partida y diversos complejos de cadenas “más simples”, en líneas generales, dicha estructura se pierde, dando lugar a que el módulo menor herede una estructura de  $A_\infty$ -álgebra de Hopf.

El primer ejemplo que encontramos en la literatura a este respecto, es el estudio realizado por H. Cartan [Car56] acerca de la estructura algebraica de la homología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane, donde concluye que dicha homología tiene estructura de álgebra.

Teniendo en cuenta que el complejo de cadenas asociado a dichos espacios primos tiene estructura de álgebra de Hopf, al establecer una contracción a un módulo menor, resulta interesante preguntarse cuales son las operaciones que determinan la estructura inducida en él.

Es desde esta perspectiva en que en este trabajo nos planteamos el estudio de tres aspectos importantes de las  $A_\infty$ -estructuras: la herencia por producto tensorial, la definición de  $A_\infty$ -álgebra de Hopf, y la implementación de un programa que determine las operaciones en baja dimensión de una  $A_\infty$ -estructura definida por una contracción.

El capítulo dos, está enteramente dedicado al análisis de la  $A_\infty$ -estructura del producto tensorial de dos dadas. En dicho capítulo, comenzamos estableciendo bajo qué condiciones, dada una  $A_\infty$ -estructura truncada (es decir, con un número finito de operaciones distintas de cero) al perturbar la diferencial del módulo mayor del cual proviene, el carácter de la misma sigue invariante, es decir, no aumenta ni disminuye el número de operaciones involucradas.

Seguidamente, analizamos las operaciones integrantes en el producto tensorial de dos  $A_\infty$ - (co)álgebras, concluyendo que dichas operaciones están exclusivamente determinadas por las operaciones de cada factor del producto tensorial.

En el capítulo tercero, desarrollamos la noción de  $A_\infty$ -álgebra de Hopf desde el punto de vista perturbativo. Para ello primero definimos un módulo tensorial asociado a una álgebra de Hopf,  $BC(H)$ , el cual vía perturbación, induce en el módulo menor una estructura de  $A_\infty$ -álgebra, una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra, junto con operadores de homotopía de orden superior.

Finalizamos el capítulo, definiendo una  $A_\infty$ -álgebra de Hopf como un módulo diferencial graduado  $H$ , con una familia de operaciones  $\{h^{i,j}\} : H^i \rightarrow H^j$ , de grado  $i + j - 3$ , de modo que  $\{h^{i,1}\} : H^i \rightarrow H$  define una estructura de  $A_\infty$ -álgebra,  $\{h^{1,j}\} : H \rightarrow H^j$  define una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra y la extensión lineal de  $\{h^{i,j}\}$  al módulo tensorial  $BC(H)$  define una diferencial.

Siguiendo con el estudio exhaustivo de la  $A_\infty$ -álgebras de Hopf, el capítulo cuarto de esta memoria está dedicado exclusivamente a la extensión del trabajo realizado por H. Cartan, con el fin de determinar completamente la estructura algebraica de la homología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane. De hecho, al restringir nuestro estudio al anillo base  $\mathbb{Z}_p$  (con  $p$  un número primo), se obtiene que dicha homología tiene una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra, dando lugar al primer ejemplo topológico de una  $A_\infty$ -álgebra de Hopf, cuya familia de operaciones componentes está estrechamente ligada con el número primo  $p$ .

Por último, gracias a trabajos sobre Topología Simplicial como los de S. Eilenberg junto con S. Mac Lane, a mediados de los años cincuenta del siglo pasado, con demostraciones constructivas nos sugieren que la creación de una Topología Algebraica Efectiva es posible.

Por otro lado, la Teoría de Perturbación Homológica garantiza algoritmos finitos a la hora de calcular los morfismos integrantes en una contracción definida por perturbación, por lo que teóricamente, las fórmulas explícitas de los morfismos de la mayoría de los resultados teóricos, se pueden obtener vía el mundo computacional.

En este sentido, son varios los programas que intentan formalizar una plataforma informática básica para el cálculo en álgebra Homológica, de los cuales Kenzo proviene directamente de la Teoría de Perturbación Homológica. Este programa surge de la colaboración F. Sergeraert-J. Rubio [Ser87, RS88, Ser94] a finales de los 80 y principios de los 90, y tiene como piezas claves la codificación explícita del operador de homotopía SHI de

la contracción clásica Eilenberg-Zilber y las cocadenas de torsión asociadas en el sentido de Brown; y la reutilización continua de los datos que genera como salida, por medio de una conveniente programación funcional que explota las propiedades del lenguaje Lisp, particularmente versátil en el tratamiento de listas.

Como aplicación inmediata y muestra de la capacidad de cálculo del lema de perturbación básico, el quinto capítulo está dedicado a la implementación de un módulo de programación añadido a Kenzo que calcula  $A_\infty$ -estructuras, con los métodos ARAIA (Algebra Reduction A-Infinity Algebra) y CRAIC (Coalgebra Reduction A-Infinity Coalgebra) [BS05], que consta de aproximadamente 2000 líneas de código.

En dicho capítulo, también se muestran aspectos técnicos del módulo de programación; a destacar problemas de traslación de objetos matemáticos al mundo computacional, para posteriormente ilustrar las soluciones teóricas adoptadas [Ber06b]. Finalmente, se describen mediante ejemplos didácticos las fórmulas obtenidas experimentalmente de las operaciones componentes en la estructura de  $A_\infty$ -(co)álgebra inducida por contracción en baja dimensión.



# Capítulo 1

## Preliminares sobre Álgebra Homológica y Topología Simplicial

En lo que sigue, trataremos los conceptos básicos necesarios para poder adentrarnos en los resultados de la memoria de esta tesis.

La primera parte del capítulo está dedicada al álgebra homológica con textos de referencia como [Mac95], [Mun74] y [Wei94].

En la segunda parte daremos algunas definiciones y resultados de la Topología Simplicial; a destacar entre las referencias [May67], [GJ99].

### 1.1. Fundamentos básicos de Álgebra Homológica

Supongamos que  $\Lambda$  es un anillo conmutativo con elemento unidad no nulo. En capítulos posteriores restringiremos nuestro estudio al caso en que dicho anillo es  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  con  $p$  primo (que a partir de ahora denotaremos por  $\mathbb{Z}_p$ ) ó  $\mathbb{Z}$  localizado en  $p$ ,  $\mathbb{Z}_{(p)}$ .

**Definición 1.1.** Un *módulo (a izquierda)*  $M$  sobre el anillo  $\Lambda$  es un grupo abeliano con una operación  $\sigma : \Lambda \times M \rightarrow M$  con  $\sigma(\lambda, m) = \lambda m$ , tal que

$$\begin{aligned}(\lambda + \lambda')m &= \lambda m + \lambda' m \\ \lambda(m + m') &= \lambda m + \lambda m'.\end{aligned}$$

con  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$  y  $m, m' \in M$ .



De manera similar, se define un módulo a derecha. Salvo que pueda llevar a error no especificaremos si el módulo es a izquierda o a derecha.

**Definición 1.2.** Dado  $f : M \rightarrow M$  un morfismo de módulos, denotaremos la composición de  $f$  consigo mismo  $n$ -veces como  $f^n$ . El morfismo identidad de  $M$  se denotará por 1.

**Definición 1.3.** Una *álgebra*  $A$  es un módulo dotado de dos morfismos, un producto asociativo  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  y una unidad bilateral  $\eta : \Lambda \rightarrow A$ , también llamada coaumentación, es decir, los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes A \otimes A & \\
 \mu \otimes 1 \swarrow & \circ & \searrow 1 \otimes \mu \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \xleftarrow{\mu} A \otimes A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & \Lambda \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & A \otimes A & \xleftarrow{1 \otimes \eta} & A \otimes \Lambda \\
 & \searrow \cong & & \downarrow \mu & & \swarrow \cong \\
 & & & A & & 
 \end{array}$$

**Definición 1.4.** Análogamente, una *coálgebra*  $C$  es un módulo dotado de dos morfismos, un coproducto asociativo  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  y una counidad bilateral  $\xi : C \rightarrow \Lambda$ , que también se llama aumentación (con los diagramas conmutativos análogos).

**Definición 1.5.** Dado  $M$  un módulo, es un *módulo graduado* si  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ , donde  $M_n$  son submódulos de  $M$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

En particular, se dice que  $M$  es *conexo* si  $M_0 = \Lambda$ .

**Definición 1.6.** Dado  $m \in M$ , se dice que  $m$  es un *elemento homogéneo de grado  $n$*  cuando  $m \in M_n$ , y en tal caso, denotaremos el grado como  $|m| = n$ .

**Definición 1.7.** Dados  $M, N$  dos módulos graduados,  $f : M \rightarrow N$  es un *morfismo de módulos graduados de grado  $d$*  si  $f$  es una familia de morfismos de módulos  $f = \{f_n\}_{n \geq 0}$ , donde  $f_n : M_n \rightarrow N_{n+d}$ .

**Definición 1.8.** Si  $M$  y  $N$  son dos módulos graduados, el *producto tensorial*  $M \otimes N$  adquiere estructura de módulo graduado donde

$$(M \otimes N)_n = \sum_{p+q=n} (M_p \otimes N_q).$$

Denotaremos el módulo  $M \otimes \binom{n}{\cdot} \otimes M$  por  $M^{\otimes n}$ , considerando  $M^{\otimes 0} = \Lambda$ .

**Definición 1.9.** Si  $f : M \rightarrow M'$  y  $g : N \rightarrow N'$  son morfismos de módulos graduados, el producto tensorial  $f \otimes g$ , adoptando la *convención de Koszul*, viene definido por:

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y).$$

En particular, se tiene que

$$(f \otimes g)(h \otimes k) = (-1)^{|g||h|} (fh \otimes gk).$$

Además, si  $f : M^{\otimes i} \rightarrow M$  es un morfismo de módulos graduados y  $n$  es un entero positivo, se define el morfismo

$$f^{[n]} = \sum_{j=0}^{n-i} 1_M^{\otimes j} \otimes f \otimes 1_M^{\otimes n-i-j}, \quad \text{donde } 1_M^{\otimes 0} = 1_M.$$

Y en general, se puede definir el morfismo  $f^{[1]} : \bigoplus_{j \geq i} M^{\otimes j} \rightarrow \bigoplus_{k \geq 1} M^{\otimes k}$ , de modo que en grado  $n$  coincida con  $f^{[n]}$ , es decir,  $f^{[1]}|_{M_n} = f^{[n]}$ .

**Definición 1.10.** Dado  $M$  un módulo graduado y  $d : M \rightarrow M$  un morfismo de módulos graduados, se dice que  $d$  es una *diferencial* (resp. *codiferencial*) si  $|d| = -1$  (resp.  $|d| = +1$ ) y  $d^2 = 0$ . En particular,  $(M, d)$  se denomina *dg-módulo* (resp. *dg-comódulo*). Escribiremos  $d_n$  en vez de  $d|_{M_n}$ .

**Definición 1.11.** Un morfismo  $f : M \rightarrow N$  es *morfismo de dg-módulos* de grado  $i$ , si verifica que  $d_N f = (-1)^i f d_M$ .

Gracias a la segunda condición impuesta en la definición de diferencial (resp. codiferencial),  $d^2 = 0$ , tenemos que  $\text{Im} d_{n+1} \subset \text{Ker} d_n$  (resp.  $\text{Im} d_n \subset \text{Ker} d_{n+1}$ ) para  $n \geq 1$ , y por tanto, podemos hablar del concepto de homología (resp. cohomología).

**Definición 1.12.** Sea  $(M, d)$  un dg-módulo, la *homología* de  $M$  se define como el módulo graduado  $H_*(M)$ , donde  $H_n(M) = \text{Ker} d_n / \text{Im} d_{n+1}$ .

**Definición 1.13.** Sea  $M$  un dg-módulo. La *suspensión* de  $M$ , denotada por  $sM$ , es el dg-módulo definido por  $sM_{n+1} = M_n$ , junto con la diferencial  $d_{sM} = -d_M$ . Análogamente, se define la *desuspensión* de  $M$  como el dg-módulo,  $s^{-1}M$  dado por  $s^{-1}M_n = M_{n+1}$ , cuya diferencial,  $d_{s^{-1}M}$  también es  $-d_M$ .

Si  $f : M \rightarrow N$  es un morfismo de dg-módulos de grado  $i$ , se define el morfismo  $sf$  entre los dg-módulos  $sM$  y  $sN$  como  $sf = (-1)^i f$ . Análogamente, se define el morfismo adecuado para la desuspensión.



**Definición 1.14.** Sea  $M$  un dg-módulo. Una *aumentación* (resp. *coaumentación*), es un morfismo de dg-módulos de grado cero:

$$\xi_M : M \rightarrow \Lambda$$

$$\text{(resp. } \eta_M : \Lambda \rightarrow M \text{)}.$$

En el caso de álgebras y coálgebras, coincidirán con la counidad y unidad respectivamente.

**Definición 1.15.** Un *módulo diferencial graduado aumentado*  $(M, d_M, \xi_M, \eta_M)$  (*dga-módulo*) es un dg-módulo dotado de una aumentación  $\xi_M$  y de una coaumentación  $\eta_M$  de modo que  $\xi_M \circ \eta_M = 1_\Lambda$ . Se dice *conexo* si como módulo graduado es conexo y su aumentación y coaumentación son ambas la identidad del anillo base  $\Lambda$ .

**Definición 1.16.** Dados dos dga-módulos  $M$  y  $N$ , se define el *dga-módulo producto tensorial*,  $M \otimes N$ , como el dg-módulo producto tensorial junto con los morfismos:

$$d_{M \otimes N} = d_M \otimes 1_N + 1_M \otimes d_N,$$

$$\xi_{M \otimes N} = \xi_M \otimes \xi_N,$$

$$\eta_{M \otimes N} = \eta_M \otimes \eta_N.$$

Si  $M = N$ , podemos describir la diferencial del producto tensorial  $d_{M \otimes M} = d_M^{[2]}$ .

**Definición 1.17.** Sean  $M$  y  $N$  dga-módulos. Se dice que  $f : M \rightarrow N$  es un *morfismo de dga-módulos* si se verifican las identidades:

$$\xi_N f = \xi_M, \quad f \eta_M = \eta_N.$$

Podemos considerar el morfismo de dga-módulos que intercambia el orden en el producto tensorial:

$$T : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$$

$$x \otimes y \rightarrow (-1)^{|x||y|} y \otimes x.$$

En particular, dados dos morfismos  $f : M \rightarrow M$  y  $g : N \rightarrow N$  se tiene que

$$T(f \otimes g) = (-1)^{|f||g|} (g \otimes f)T.$$

**Definición 1.18.** Una *álgebra diferencial graduada aumentada* o *dga-álgebra*,  $(A, \mu)$ , es un dga-módulo  $A$ , que junto con el producto  $\mu$  tiene estructura de álgebra. Se dice *conmutativa* cuando  $\mu T = \mu$ .

**Definición 1.19.** Sean  $(A, \mu)$  una dga-álgebra y  $\delta : A \rightarrow A$  un morfismo de módulos graduados de grado  $-1$ . Se dice que  $\delta$  es una *derivación* si  $\delta\mu = \mu(1 \otimes \delta + \delta \otimes 1)$  y  $\xi\delta = 0$ .

**Definición 1.20.** Análogamente, una *coálgebra diferencial graduada aumentada* o *dga-coálgebra*,  $(C, \Delta)$ , es un dga-módulo  $C$ , que junto con el coproducto  $\Delta$  tiene estructura de coálgebra. Se dice coconmutativa cuando  $T\Delta = \Delta$ .

**Definición 1.21.** Sean  $(C, \Delta)$  una dga-coálgebra y  $\delta : C \rightarrow C$  un morfismo de módulos graduados de grado  $-1$ . Se dice que  $\delta$  es una *coderivación* si  $\Delta\delta = (1 \otimes \delta + \delta \otimes 1)\Delta$  y  $\xi\delta = 0$ .

**Definición 1.22.** Dadas  $(A, \mu_A)$  y  $(A', \mu_{A'})$  dos dga-álgebras (resp.  $(C, \Delta_C)$  y  $(C', \Delta_{C'})$  dga-coálgebras), se define la *dga-álgebra producto tensorial*  $A \otimes A'$  como el dga-módulo subyacente junto con el morfismo de grado cero

$$\begin{aligned}\mu_{A \otimes A'} &= (\mu_A \otimes \mu_{A'})(1_A \otimes T \otimes 1_{A'}) \\ (\text{resp. } \Delta_{C \otimes C'}) &= (1_C \otimes T \otimes 1_{C'})(\Delta_C \otimes \Delta_{C'}).\end{aligned}$$

Una noción que aúna las definiciones de álgebra y de coálgebra es la de *álgebra de Hopf*.

**Definición 1.23.**  $A$  es una *álgebra de Hopf diferencial graduada aumentada* o *dga-álgebra de Hopf* si tiene estructura de dga-álgebra, de dga-coálgebra y verifica la *condición de Hopf*,

$$\Delta\mu = (\mu \otimes \mu)(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta \otimes \Delta).$$

Con esta noción, se trata de imponer que, si consideramos  $A$  como dga-álgebra, el coproducto  $\Delta$  sea un morfismo de dga-álgebras, y recíprocamente, si consideramos  $A$  como dga-coálgebra,  $\mu$  sea un morfismo de dga-coálgebras.

Como ejemplos a destacar, tenemos cuatro tipos de álgebras de Hopf, las cuales van a tener una importancia relevante a lo largo de los demás capítulos:

- El *álgebra exterior*  $E(u, 2n+1)$ : es la dga-álgebra libre generada por  $1$  de grado  $0$  y  $u$  de grado  $2n+1$ , con  $u^2 = 0$ , y diferencial nula. El coproducto viene dado por:

$$\begin{aligned}\Delta : E(u, 2n+1) &\rightarrow E(u, 2n+1) \otimes E(u, 2n+1) \\ u &\rightarrow u \otimes 1 + 1 \otimes u.\end{aligned}$$

- El *álgebra polinomial*  $P(u, n)$ , es el álgebra libre generada por  $u$ , también denotada por  $\Lambda[u]$ , donde  $u$  tiene grado  $n$ , la diferencial nula y el producto  $u^i u^j = u^{i+j}$ .



- El *álgebra polinomial modificada*  $\Gamma(u, 2n)$ : es la dga-álgebra libre generada por  $1 = \gamma_0(u), u = \gamma_1(u), \dots, \gamma_k(u) \dots$ , con  $|\gamma_k(u)| = 2kn$ , diferencial nula y producto dado por

$$\gamma_k(u)\gamma_h(u) = \frac{(k+h)!}{k!h!}\gamma_{k+h}(u).$$

El coproducto se define como

$$\begin{aligned}\Delta : \Gamma(u, 2n) &\rightarrow \Gamma(u, 2n) \otimes \Gamma(u, 2n) \\ \gamma_k(u) &\rightarrow \sum_{i+j=k} \gamma_i(u) \otimes \gamma_j(u).\end{aligned}$$

- Si denotamos por  $P(u, 2n)$  el álgebra polinomial generada por el elemento  $u$  de grado  $2n$ , se define la *dga-álgebra truncada*  $Q_p(u, 2n)$  como el cociente de  $P(u, 2n)$  por el ideal  $(u^p)$ , donde la diferencial es nula.

Otro ejemplo de álgebra o coálgebra nos lo da el módulo tensorial, que se define a continuación.

**Definición 1.24.** Dado  $M$  un dg-módulo, podemos construir el *dga-módulo tensorial* de  $M$ ,  $T(M)$ , como:

$$T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M^{\otimes n} = \Lambda \oplus M \oplus (M \otimes M) \oplus (M \otimes M \otimes M) \oplus \dots$$

Un elemento del tipo  $a_1 \otimes \dots \otimes a_n$  se dice *homogéneo* si cada  $a_i$  es un elemento homogéneo de  $M$ .

La *graduación tensorial* de  $T(M)$ ,  $|\cdot|_t$ , está definida por la expresión:

$$|a_1 \otimes \dots \otimes a_n|_t = \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

La *diferencial tensorial*,  $d_t : T(M) \rightarrow T(M)$  viene dada sobre elementos homogéneos por el morfismo  $d^{[1]}$ , de modo que en grado  $n$

$$(d_t)_n(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{|a_1| + \dots + |a_{i-1}|} a_1 \otimes \dots \otimes d(a_i) \otimes \dots \otimes a_n.$$

La *aumentación* y la *coaumentación* son la proyección e inclusión de  $\Lambda$  en  $T(M)$  respectivamente.

Es más, se puede definir sobre  $T(M)$  un *producto*  $\mu$  y un *coproducto*  $\Delta$ , de modo que:

- El producto de  $T(M)$  actúa por yuxtaposición sobre elementos homogéneos:

$$\mu((a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes (a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+p})) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+p}$$

que se extiende por linealidad. En general, no es conmutativo.

- El coproducto de  $T(M)$  viene dado por:

$$\Delta(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^n (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n).$$

Tanto el producto como el coproducto son morfismos de dga-módulos asociativos que admiten por unidad a  $\eta$  y por counidad a  $\xi$  respectivamente, por lo que tenemos en el módulo tensorial estructuras de dga-álgebra y de dga-coálgebra. Ninguna de las dos estructuras verifica la condición de Hopf, por lo que nos referiremos a ellos por  $T^a(M)$  y  $T^c(M)$  respectivamente.

Todo morfismo de dg-módulos  $f : M \rightarrow N$  induce un morfismo  $T(f) : T(M) \rightarrow T(N)$  de dga-módulos que actúa sobre elementos homogéneos como

$$T(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = f^{\otimes n}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n).$$

Introduzcamos ahora la noción de *construcción bar* de una dga-álgebra dada  $A$ , denotada por  $\bar{B}(A)$ .

**Definición 1.25.** Dada  $A$  una dga-álgebra, se define la *construcción bar* de  $A$  como la dga-coálgebra que procede del módulo tensorial de  $T^c(s(A))$ ,

$$(\bar{B}(A), d_{\bar{B}}, \Delta_{\bar{B}}, \xi_{\bar{B}}, \eta_{\bar{B}}) = (T^c(s(A)), d_t + d_s, \Delta_T, \xi_T, \eta_T).$$

Dado un elemento  $s(a_1) \otimes \cdots \otimes s(a_n) \in \bar{B}(A)$ , lo denotaremos por  $[a_1 | \cdots | a_n]$ . Se dirá homogéneo si para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i$  es homogéneo. Denotaremos por  $[ ] = 1 \in \Lambda$ .

La diferencial total  $d_{\bar{B}}$  es la suma de las diferenciales *simplicial*

$$d_s[a_1 | \cdots | a_n] = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{e_i} [a_1 | \cdots | \mu_A(a_i, a_{i+1}) | \cdots | a_n] + \xi(a_1)[a_2 | \cdots | a_n] + (-1)^{e_n} \xi(a_n)[a_1 | \cdots | a_{n-1}]$$

y *tensorial*

$$d_t[a_1 | \cdots | a_n] = - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{e_i-1} [a_1 | \cdots | d(a_i) | \cdots | a_n]$$



donde  $e_i = i + |a_1| + \cdots + |a_i|$ .

El *grado simplicial* de un elemento se define como

$$|[a_1 | \dots | a_n]|_s = n,$$

y el *grado* de un elemento

$$|[a_1 | \dots | a_n]| = |[a_1 | \dots | a_n]|_t + n.$$

El coproducto es el del módulo tensorial

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{B}} : \bar{B}(A) &\rightarrow \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A) \\ [a_1 | \dots | a_n] &\rightarrow \sum_{i=0}^n [a_1 | \dots | a_i] \otimes [a_{i+1} | \dots | a_n]. \end{aligned}$$

En particular, ambas diferenciales son coderivaciones con respecto al coproducto.

**Definición 1.26.** Dados  $p$  y  $q$  no negativos y no nulos a la vez, un  $(p, q)$ -*shuffle* es una permutación  $\pi$  de los  $p + q - 1$  primeros enteros,  $\{0, 1, \dots, p + q - 1\}$ , de modo que

$$\pi(i) < \pi(j), \quad \text{si } i < j \leq p - 1 \text{ ó } p \leq i < j \leq p + q - 1.$$

Si definimos por

$$\alpha_i = \pi(i - 1), \quad i = 1, \dots, p; \quad \beta_j = \pi(p + j - 1), \quad j = 1, \dots, q,$$

denotaremos cada  $(p, q)$ -*shuffle* por un par  $(\alpha, \beta)$ , en referencia a las sucesiones  $\{\alpha_i\}_i$  y  $\{\beta_j\}_j$ . La *signatura* del shuffle  $(\alpha, \beta)$  es

$$sg(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^p (\alpha_i - (i - 1)).$$

Así pues, en caso de que  $A$  sea una dga-álgebra conmutativa,  $\bar{B}(A)$  hereda la estructura de dga-álgebra de Hopf gracias al *producto shuffle*  $* : \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A) \rightarrow \bar{B}(A)$ , definido por

$$[a_1 | \dots | a_m] * [b_1 | \dots | b_n] = \sum_{\pi} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} [c_{\pi_1} | \dots | c_{\pi_{m+n}}],$$

donde la suma está definida para todos los  $\pi \in \{(m, n) - \text{shuffles}\}$ .

La homología de una dga-álgebra  $A$  considerada como dg-módulo se conoce como 0-*homología* de  $A$ , la cual no tiene en cuenta la estructura multiplicativa subyacente de  $A$ . Así pues, dado que el producto de  $A$  interviene en la diferencial de la construcción bar  $\bar{B}(A)$ , se define la 1-*homología de*  $A$  como la homología de la construcción bar asociada.

**Definición 1.27.** Dada  $\bar{B}(A)$  la construcción bar de  $A$ , definimos la *construcción bar normalizada*  $\bar{B}_N(A)$  como el cociente

$$\bar{B}_N(A) = \frac{\bar{B}(A)}{s(\bar{B}(A))}$$

donde  $s(\bar{B}(A))$  es el subconjunto de elementos de  $\bar{B}(A)$  degenerados, es decir, aquellos de la forma  $[a_1 | \cdots | a_i | 1 | \cdots | a_n]$  con 1 la unidad del álgebra.

En particular,  $\bar{B}_N(A)$  es una dga-coálgebra cuyas graduación, diferencial y coproducto son las inducidas por las de la construcción bar.

Como veremos más en detalle en el siguiente capítulo, existe una construcción dual, la *construcción cobar*  $\bar{\Omega}(C)$ , la cual dada  $C$  una dga-coálgebra le asocia una dga-álgebra.

Pasemos ahora a la Teoría de la Perturbación Homológica. La herramienta clave de esta teoría es la *contracción* entre dg-módulos, la cual nos permite relacionar un dg-módulo con otro de menor número de generadores en cada grado, es decir, “menor”, de modo que se preserve su homología.

Más adelante, veremos bajo qué condiciones, si tenemos dga-álgebras en vez de dga-módulos, podemos preservar la estructura multiplicativa dada vía contracciones.

**Definición 1.28.** Dados  $N$  y  $M$  dga-módulos, una *contracción*  $r$  es una 5-tupla  $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ , donde  $f : N \rightarrow M$  (*proyección*) y  $g : M \rightarrow N$  (*inclusión*) son morfismos de dga-módulos de grado cero,  $\phi : N \rightarrow N$  es un morfismo de grado +1 (*operador de homotopía*) verificándose las relaciones:

$$fg = 1, \quad \phi d + d\phi + gf = 1, \quad \phi g = 0, \quad f\phi = 0, \quad \phi\phi = 0.$$

$N$  se suele llamar dg-módulo mayor y  $M$  dg-módulo menor. En particular,  $N$  se puede descomponer como una suma directa  $N = M \oplus D$ , donde  $D$  es acíclico, por lo que las homologías de  $N$  y  $M$  coinciden. A veces denotaremos dicha contracción por  $N \Rightarrow M$ .

A continuación, presentamos varios ejemplos simples de contracciones

- La *contracción trivial* de un dga-módulo  $N$ ,  $r : \{N, N, 1_N, 1_N, 0\}$ .
- La *iso-contracción*, que se define a partir de un isomorfismo de dga-módulos,  $f : N \rightarrow M$ ,  $r : \{N, M, f, f^{-1}, 0\}$ .

Además, con respecto a las operaciones básicas del álgebra homológica, dadas dos contracciones  $r_1 : \{N_1, M_1, f_1, g_1, \phi_1\}$  y  $r_2 : \{N_2, M_2, f_2, g_2, \phi_2\}$ , se puede definir de modo natural

- la *contracción suspensión*  $s(r_1) : \{s(N_1), s(M_1), s(f_1), s(g_1), s(\phi_1)\}$ ;
- la *contracción*  $\xi_1 : \{\ker \xi_{N_1}, \ker \xi_{M_1}, f_1, g_1, \phi_1\}$ ; donde, abusando de la notación,  $f_1, g_1$  y  $\phi_1$  representan las restricciones de los morfismos correspondientes;
- en caso de que  $M_1 = N_2$ , la *contracción composición*

$$r_2 r_1 : \{N_1, M_2, f_2 f_1, g_1 g_2, \phi_1 + g_1 \phi_2 f_1\};$$

- la *contracción producto tensorial*,

$$r_1 \otimes r_2 : \{N_1 \otimes N_2, M_1 \otimes M_2, f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2, \phi_1 \otimes g_2 f_2 + 1_{N_1} \otimes \phi_2\};$$

- la *generalización de la contracción producto tensorial*,

$$r^{\otimes n} : \{N^{\otimes n}, M^{\otimes n}, f^{\otimes n}, g^{\otimes n}, \phi^{[r,n]}\},$$

donde el operador de homotopía  $\phi^{[r,n]}$  está definido como:

$$\begin{aligned} \phi^{[r,n]} &= \sum_{i=0}^{n-1} \phi^{[r,n,i]}, \\ \phi^{[r,n,i]} &= 1_N^{\otimes i} \otimes \phi \otimes (gf)^{\otimes(n-i-1)}. \end{aligned}$$

En el caso  $i = 0$ , se entiende que  $1_N^{\otimes 0} = 1_\Lambda$ , e igualmente, si  $i = n - 1$ ,  $(gf)^{\otimes(n-i-1)} = (gf)^{\otimes 0} = 1_\Lambda$ .

Estudiamos ahora el caso de contracciones de dga-álgebras, clasificándolas dependiendo de la compatibilidad con las estructuras multiplicativas subyacentes (ver [Rea00]).

**Definición 1.29.** Sean  $A, A'$  dga-álgebras (resp. dga-coálgebras) y  $r$  una contracción de dga-módulos. El operador de homotopía  $\phi$  es una *homotopía de álgebras*

$$\mu_A \phi^{[\otimes 2]} = \phi \mu_{A'} \quad (\text{resp. } \Delta_A \phi = \phi^{[\otimes 2]} \Delta_{A'}),$$

donde  $\phi^{[\otimes 2]} = 1 \otimes \phi + \phi \otimes gf$ .

Un modo sencillo de ver que un operador de homotopía no es una homotopía de álgebras es el siguiente lema:

**Lema 1.1.** [Rea00] Dada  $r : \{A, A', f, g, \phi\}$  una contracción de álgebras, si la composición

$$\phi\mu_A\phi^{[r,2]} \neq 0,$$

entonces  $\phi$  no es una homotopía de álgebras.

**Definición 1.30.** Sean  $A, A'$  dga-álgebras y  $r$  una contracción de dga-módulos.

- El operador de homotopía  $\phi$  es una *cuasi-homotopía de álgebras* si verifica las relaciones

$$\phi\mu_A(\phi \otimes_\Lambda \phi) = 0, \quad \phi\mu_A(g \otimes_\Lambda \phi) = 0, \quad \phi\mu_A(\phi \otimes_\Lambda g) = 0.$$

- La proyección  $f$  es una *cuasi-proyección de álgebras* si verifica las relaciones

$$f\mu_A(\phi \otimes_\Lambda \phi) = 0, \quad f\mu_A(g \otimes_\Lambda \phi) = 0, \quad f\mu_A(\phi \otimes_\Lambda g) = 0.$$

**Nota:** Observar que el producto de  $A'$  no interviene en las definiciones anteriores.

**Definición 1.31.** Se dice que  $r$  es:

- una *contracción de álgebras completa* si  $f$  y  $g$  son morfismos de dga-álgebras y  $\phi$  es una homotopía de álgebras;
- una *contracción de álgebras casi-completa* si  $f$  y  $g$  son morfismos de dga-álgebras y  $\phi$  es una cuasi-homotopía de álgebras;
- una *contracción de álgebras semi-completa* si  $f$  es una cuasi-proyección de álgebras,  $g$  es un morfismo de dga-álgebras y  $\phi$  es una cuasi-homotopía de álgebras.

De hecho, se tiene que contracción de álgebras

$$\boxed{\text{completa} \Rightarrow \text{casi-completa} \Rightarrow \text{semi-completa.}}$$

En general, los recíprocos no son ciertos, para ver ejemplos de contracciones semi-completas que no son casi-completas y contracciones casi-completas que no son completas ver [GLS91], [EM54] y [Rea00].

Análogamente, se puede hablar de contracciones de dga-coálgebras dependiendo de la compatibilidad entre la contracción y las estructuras comultiplicativas subyacentes.



**Definición 1.32.** Sean  $C, C'$  dga-coálgebras y  $r$  una contracción de dga-módulos.

- El operador de homotopía  $\phi$  es una *cuasi-homotopía de coálgebras* si verifica las relaciones

$$(f \otimes \phi)\Delta_C \phi = 0; \quad (\phi \otimes \phi)\Delta_C \phi = 0; \quad (\phi \otimes f)\Delta_C \phi = 0.$$

- La inyección  $g$  es una *cuasi-inyección de coálgebras* si verifica las relaciones

$$(f \otimes \phi)\Delta_C g = 0; \quad (\phi \otimes \phi)\Delta_C g = 0; \quad (\phi \otimes f)\Delta_C g = 0.$$

**Nota:** Observar que el coproducto de  $C'$  no interviene en las definiciones anteriores.

**Definición 1.33.** Se dice que  $r$  es:

- una *contracción de coálgebras completa* si  $f$  y  $g$  son morfismos de dga-coálgebras y  $\phi$  es una homotopía de coálgebras;
- una *contracción de coálgebras casi-completa* si  $f$  y  $g$  son morfismos de dga-coálgebras y  $\phi$  es una cuasi-homotopía de coálgebras;
- una *contracción de coálgebras semi-completa* si  $g$  es una cuasi-inyección de coálgebras,  $f$  es un morfismo de dga-coálgebras y  $\phi$  es una cuasi-homotopía de coálgebras.

Introduzcamos ahora el concepto de perturbación, para posteriormente enunciar el resultado principal de esta teoría: el Lema de Perturbación Básico. Una vez introducido dicho lema, veremos qué tipos de contracciones se preservan por perturbación y cuáles transfieren las estructuras multiplicativas de la dga-álgebra mayor adecuadamente.

**Definición 1.34.** Dado  $N$  un dga-módulo, una *perturbación* de  $N$  es un morfismo de módulos graduados  $\delta : N \rightarrow N$  de grado  $-1$ , tal que  $(d + \delta)^2 = 0$  y  $\xi\delta = 0$ .

**Definición 1.35.** Dado  $N$  un dga-módulo y  $f : N \rightarrow N$  un morfismo, se dice que  $f$  es *puntualmente nilpotente* si para todo  $x \in N$ , existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{n_x}(x) = 0$ .

**Definición 1.36.** Un *dato de perturbación* de la contracción  $r : \{N, M, f, g, \phi\}$  es una perturbación del dga-módulo  $N$ , tal que  $\phi\delta$  es puntualmente nilpotente.

**Teorema 1.2.** [Bro67][Lema de Perturbación Básico. BPL] Sean  $r : \{N, M, f, g, \phi\}$  una contracción y  $\delta : N \rightarrow N$  un dato de perturbación de  $r$ . Entonces, se puede definir una nueva contracción

$$r_\delta : \{(N, d_N + \delta), (M, d_M + d_\delta), f_\delta, g_\delta, \phi_\delta\}$$

donde:

$$d_\delta = f\delta \sum_r^\delta g, \quad f_\delta = f(1 - \delta \sum_r^\delta \phi), \quad g_\delta = \sum_r^\delta g, \quad \phi_\delta = \sum_r^\delta \phi,$$

$$y \sum_r^\delta = \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\phi\delta)^i = 1 - \phi\delta + \phi\delta\phi\delta - \dots + (-1)^i (\phi\delta)^i + \dots$$

**Corolario 1.3.** En las condiciones del teorema anterior:

- Si  $f$  verifica que  $f\delta\phi = 0$ , entonces  $f_\delta = f$  y  $d_\delta = f\delta g$ .
- Si  $g$  verifica que  $\phi\delta g = 0$ , se tiene que  $g_\delta = g$  y  $d_\delta = f\delta g$ .

Igualmente se puede establecer un lema recíproco, en el que se modifica la diferencial del dga-módulo pequeño, obteniéndose una nueva contracción.

**Teorema 1.4** (Lema de Perturbación Inverso. IPL). Sean  $r : \{N, M, f, g, \phi\}$  una contracción y  $\delta : M \rightarrow M$  una perturbación de  $M$ . Entonces, se puede definir una nueva contracción

$$r_\delta : \{(N, d_N + d_\delta), (M, d_M + \delta), f, g, \phi\}$$

donde el único morfismo que cambia es la diferencial del dg-módulo  $N$ , la cual viene dada por la fórmula  $d_\delta = g\delta f$ .

En [GLS91] se prueba que dadas una contracción de álgebras completa  $r$  y un dato de perturbación de álgebras  $\delta$  de  $r$ , la contracción resultante es una contracción de álgebras completa.

Además, para el caso de una contracción de álgebras casi-completa o semi-completa se tiene que al perturbarla como mínimo es una contracción de álgebras semi-completa, es decir:

- Las contracciones de álgebras completas se preservan por perturbación, mientras que la composición y producto tensorial de este tipo de contracciones dan lugar a contracciones semi-completas.
- Las contracciones de álgebras casi-completas se preservan bajo composición y producto tensorial, pero la perturbación degenera en contracción semi-completa.

- Las contracciones de álgebras semi-completas se preservan por composición, producto tensorial y perturbación.

Una propiedad importante a destacar, es que dada una contracción de dga-álgebras semi-completa, el producto de la dga-álgebra menor está dado por la fórmula  $\mu_{A'} = f\mu_{Ag}^{\otimes 2}$ ,

$$r \text{ semi-completa} \Rightarrow \mu_{A'} = f\mu_{Ag}^{\otimes 2}.$$

Por lo que en capítulos posteriores estaremos interesados en estudiar el tipo de contracción con el fin de ver la transferencia de las estructuras subyacentes.

## 1.2. Nociones de Topología Simplicial

Después de establecer las nociones básicas de álgebra homológica necesarias, podemos adentrarnos en la Topología Simplicial con el fin de poder describir espacios topológicos con la ayuda de modelos combinatorios coherentes. Para ello, expondremos una serie de definiciones y resultados.

**Definición 1.37.** Dado  $K$  un conjunto, es un *conjunto simplicial* si  $K = \{K_n\}_{n \geq 0}$ , donde  $K_n$  son conjuntos y de modo que para todo  $n$  existen

- *operadores cara*  $\delta_i^n : K_n \rightarrow K_{n-1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,
- *operadores degeneración*  $s_i^n : K_n \rightarrow K_{n+1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , verificando las relaciones simpliciales:
  - $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$  si  $i < j$ ;
  - $s_i s_j = s_{j+1} s_i$  si  $i \leq j$ ;
  - $\delta_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} \delta_i & \text{si } i < j; \\ 1_{K_n} = \delta_{i+1} s_j & \text{si } i = j; \\ s_j \delta_{i-1} & \text{si } i > j + 1. \end{cases}$

Los elementos de  $K_n$  se llaman *n-símplices*. Además se dice que  $x$  es un *símplice degenerado* si  $x = s_i z$ , para algún *símplice*  $z$  y operador de degeneración  $s_i$ ; en caso contrario se dice que  $x$  es *no degenerado*.

**Definición 1.38.** Un conjunto simplicial  $K$  es *reducido* si tiene un único *símplice* en  $K_0$ .

**Definición 1.39.** Como ejemplo, sea  $X$  un espacio topológico, se define el *conjunto simplicial singular* de  $X$ ,  $S(X)$ , como el conjunto simplicial formado por los conjuntos de  $n$ -símplices singulares

$$S_n(X) = \{f : |\Delta^n| \rightarrow X \text{ continuas}\}$$

y las aplicaciones cara y degeneración ( $0 \leq i \leq n$ ) siguientes

$$\delta_i(f(x)) = f(\varepsilon_i(x))$$

$$s_i(f(x)) = f(d_i(x)).$$

**Definición 1.40.** Un *morfismo simplicial*  $f : K \rightarrow L$  entre dos conjuntos simpliciales es una familia de aplicaciones  $\{f_q : K_q \rightarrow L_q\}_{q \geq 0}$  las cuales conmutan con los operadores cara y degeneración, i.e.,

$$f_q \delta_i = \delta_i f_{q+1}, \quad 0 \leq i \leq q, \quad \forall q \geq 0;$$

$$f_q s_i = s_i f_{q-1}, \quad 0 \leq i \leq q, \quad \forall q \geq 0.$$

**Definición 1.41.** Un *punto base*  $\star$  de  $K$  es el subconjunto simplicial formado por un elemento de  $K_0$ ,  $\star$ , y todas sus degeneraciones.

Cuando no haya lugar a dudas, identificaremos el punto base con el elemento  $\star$  de  $K_0$ .

**Definición 1.42.** Un *conjunto simplicial con punto base* es un par  $(K, \star)$ , donde  $K$  es un conjunto simplicial y  $\star$  es un punto base de  $K$ .

**Definición 1.43.** Sea  $K$  un conjunto simplicial. Se define el  $\Lambda$ -*módulo libre generado por*  $K$  como el  $\Lambda$ -módulo simplicial

$$[\Lambda K]_n = \Lambda[K_n] = \left\{ \sum_{a_x \in \Lambda} a_x x : x \in K_n, a_x = 0 \text{ para casi todo } x \right\}$$

donde los operadores cara y degeneración son los morfismos de  $\Lambda$ -módulos inducidos por los operadores cara y degeneración de  $K$ .

**Definición 1.44.** [May67] Sea  $K$  un conjunto simplicial. Se define el *complejo de cadenas asociado a*  $K$ ,  $C_\star(K)$ , como el dg-módulo  $(\Lambda[K], d)$

$$\cdots \xrightarrow{\partial^{n+1}} \Lambda K_n \xrightarrow{\partial^n} \Lambda K_{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} \Lambda K_{n-2} \xrightarrow{\partial^{n-2}} \cdots \xrightarrow{\partial^2} \Lambda K_1 \xrightarrow{\partial^1} \Lambda K_0$$

donde

$$\partial^n : \Lambda K_n \rightarrow \Lambda K_{n-1}$$

$$\partial^n \left( \sum a_x x \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i^n \left( \sum a_x x \right).$$



**Definición 1.45.** La homología de  $K$ ,  $H(K)$  se define como

$$H_n(K) = H_n(C_*(K)), \quad \forall n \geq 0.$$

Si  $(K, \star)$  es un conjunto simplicial con punto base, entonces  $C_*(K)$  es un dga-módulo donde la aumentación está definida por

$$\xi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y la coaumentación está definida por  $\eta_K(1) = \star$ .

**Definición 1.46.** Sean  $K$  un  $\Lambda$ -módulo simplicial y  $sK$  el submódulo generado por todos los símlices degenerados. Entonces, se verifica que

$$d_n(sK)_n \subset (sK)_{n-1},$$

$(K/sK, d)$  es un dga-módulo, el cual se denomina *submódulo normalizado de  $K$* , denotado por  $K_N$ .

**Definición 1.47.** Dado  $K$  un conjunto simplicial, se llama *complejo de cadenas normalizado de  $K$* ,  $C_*^N(K)$ , al normalizado del  $\Lambda$ -módulo simplicial  $C_*(K)$ .

La homología de  $K$  se puede calcular indistintamente tanto a partir del complejo de cadenas  $C_*(K)$  como del complejo de cadenas normalizado  $C_*^N(K)$ .

**Definición 1.48.** Dados los conjuntos simpliciales  $K$  y  $L$ , el *producto cartesiano*,  $K \times L$ , es el conjunto simplicial  $(K \times L)_n = K_n \times L_n$  con

$$\delta_i(x, y) = (\delta_{i_K} x, \delta_{i_L} y); \quad s_i(x, y) = (s_{i_K} x, s_{i_L} y).$$

**Definición 1.49.** Análogamente, se define el *producto tensorial de los complejos de cadenas asociados*,  $C_*(K) \otimes C_*(L)$ , como el dg-módulo graduado

$$(C_*(K) \otimes C_*(L))_r = \sum_{p+q=r} C_p(K) \otimes C_q(L)$$

con diferencial definida por

$$d(k_p, l_q) = d_K k_p \otimes l_q + (-1)^p k_p \otimes d_L l_q.$$

**Definición 1.50.** Sean  $K$  y  $K'$  dos módulos simpliciales aumentados. Entonces, se puede definir

- los morfismos de dg-módulos de grado cero

- el operador de Alexander-Whitney

$$aw : (K \times K')_N \rightarrow K_N \otimes K'_N$$

$$aw(x_n, y_n) = \sum_{i=0}^n \partial_{i+1} \cdots \partial_n x_n \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i-1} y_n;$$

- operador de Eilenberg-Mac Lane

$$eml : K_N \otimes K'_N \rightarrow (K \times K')_N,$$

$$eml(x_p \otimes y_q) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \{(p, q)\text{-shuffles}\}} (-1)^{\sigma(\alpha, \beta)} (s_{\beta_q} \cdots s_{\beta_1} x_p, s_{\alpha_p} \cdots s_{\alpha_1} y_q).$$

- El morfismo de grado +1, el operador de homotopía de Shi

$$shi : (K \times K')_N \rightarrow (K \times K')_N$$

$$shi(x_n, y_n) =$$

$$\sum (-1)^{n-p-q+sg(\alpha, \beta)} (s_{\beta_q+n-p-q} \cdots s_{\beta_1+n-p-q} s_{n-p-q-1} \partial_{n-q+1} \cdots \partial_n x_n, s_{\alpha_{p+1}+n-p-q} \cdots s_{\alpha_1+n-p-q} \partial_{n-p-q} \cdots \partial_{n-q-1} y_n),$$

donde la suma está considerada para todos los índices

$$0 \leq q \leq n-1, 0 \leq p \leq n-q-1,$$

donde  $(\alpha, \beta) \in \{(p+1, q)\text{-shuffles}\}$  y  $sg(\alpha, \beta) = \sum [\alpha_i - (i-1)]$ .

**Teorema 1.5.** [EM54] En las condiciones anteriores, la 5-tupla

$$EZ_{K, K'} : \{(K \times K')_N, K_N \otimes K'_N, aw_{K, K'}, eml_{K, K'}, shi_{K, K'}\}$$

es una contracción.

**Teorema 1.6.** [EM54][Teorema de Eilenberg-Zilber] Sean  $X$  y  $Y$  dos conjuntos simpliciales. Entonces, la 5-tupla

$$EZ_{C_*(X), C_*(Y)} : \{C_*(X \times Y), C_*(X) \otimes C_*(Y), aw, eml, shi\}$$

define una contracción.

Es importante destacar que las contracciones obtenidas en los dos últimos teoremas son contracciones de álgebras semi-completas en el caso de tener grupos simpliciales, en vez de conjuntos simpliciales (ver [Alv97]), donde la estructura multiplicativa viene dada en función del morfismo de Eilenberg-Mac Lane.

**Definición 1.51.** Dado  $K$  un conjunto simplicial, el *coproducto de Alexander-Whitney*  $\Delta_K : C_*^N(K) \rightarrow C_*^N(K) \otimes C_*^N(K)$  se define como la composición de la aplicación diagonal  $C_*^N(K) \rightarrow C_*^N(K) \times C_*^N(K)$  y el operador de Alexander-Whitney  $aw$ ,

$$\Delta_K(x_n) = \sum_{i=0}^n \partial_{i+1} \cdots \partial_n x_n \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i-1} x_n.$$

Además, si  $K$  es un conjunto simplicial con punto base, el coproducto de Alexander-Whitney convierte a  $C_*^N(K)$  en una dga-coálgebra.

**Definición 1.52.** Si  $G$  es un grupo simplicial, se define el *producto de Eilenberg-Mac Lane*

$$\mu_G : C_*^N(G) \otimes C_*^N(G) \rightarrow C_*^N(G)$$

como la composición del operador de Eilenberg-Mac Lane  $eml$  junto con el morfismo de dg-módulos inducido por el producto de  $G$ ,  $\circ : C_*^N(G \times G) \rightarrow C_*^N(G)$ .

$$\mu_G(x_p, y_q) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \{(p, q)\text{-shuffles}\}} (-1)^{\sigma(\alpha, \beta)} s_{\beta_q} \cdots s_{\beta_1} x_p \circ s_{\alpha_p} \cdots s_{\alpha_1} y_q.$$

El producto de Eilenberg-Mac Lane convierte a  $C_*^N(G)$  en una dga-álgebra, que es conmutativa, si  $G$  lo es.

Veamos una noción dual a la de conjunto simplicial que utilizaremos más adelante en diversas construcciones algebraicas.

**Definición 1.53.** [GJ99] Dado  $K$  un conjunto, es un *conjunto cosimplicial* si  $K = \{K_n\}_{n \geq 0}$ , donde  $K_n$  son conjuntos y para todo  $n$  existen

- operadores cocara  $d^i : K_{n-1} \longrightarrow K_n$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,
- operadores codegeneración  $s^i : K_{n+1} \longrightarrow K_n$ ,  $0 \leq i \leq n$ , satisfaciendo las relaciones:
  - $d^j d^i = d^i d^{j-1}$  si  $i < j$ .
  - $s^j s^i = s^i s^{j+1}$  si  $i \leq j$ .

$$\bullet \quad s^j d^i = \begin{cases} d^i s^{j-1} & \text{si } i < j; \\ 1_{K_n} = s^j d^{i+1} & \text{si } i = j; \\ d^{i-1} s^j & \text{si } i > j + 1. \end{cases}$$

**Definición 1.54.** Dados  $K$  y  $L$  conjuntos cosimpliciales, se define el *producto cartesiano*,  $K \times L$ , como el conjunto cosimplicial  $(K \times L)_n = K_n \times L_n$  donde los operadores cocara y codegeneración vienen dados por

$$d^i(k \times l) = d^i(k) \times d^i(l); \quad s^i(k \times l) = s^i(k) \times s^i(l).$$

**Definición 1.55.** Dados  $K$  un conjunto cosimplicial y  $\Lambda$  un anillo, se define el  $\Lambda$ -*módulo cosimplicial* generado por  $K$  como

$$(\Lambda[K])_n = \Lambda[K_n]$$

cuya codiferencial es el morfismo de grado  $+1$ , determinado por los operadores cocara

$$\begin{aligned} d &:= \{d_n\}_{n \geq 0}, \text{ donde} \\ d_n &: \Lambda[K]_n \rightarrow \Lambda[K]_{n+1} \\ d_n &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d^i \end{aligned}$$

A partir de ahora, denotaremos al *complejo de cocadenas asociado*  $(\Lambda[K], d)$  por  $C^*(K)$ .

$$\dots \xrightarrow{d_{n-2}} \Lambda[K]_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \Lambda[K]_n \xrightarrow{d_n} \Lambda[K]_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \Lambda[K]_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} \dots$$

**Definición 1.56.** [GJ99] El *complejo de cocadenas normalizado*,  $C_N^*(K)$  es el módulo graduado libre generado en cada grado por

$$N_s K = \Lambda[K^s \cap \ker s^0 \cap \dots \cap \ker s^{s-1}].$$

**Definición 1.57.** Dados  $(C, d_C)$  y  $(D, d_D)$  dos complejos de cocadenas, se define una *contracción* entre ellas,  $r$ , como la 5-tupla  $\{C, D, f, g, \phi\}$  donde  $f, g$  son morfismos de grado cero,  $\phi : (C, d_C) \rightarrow (C, d_C)$  es un morfismo de grado  $-1$ ; verificándose las relaciones:

$$fg = 1_D, \quad f\phi = 0, \quad \phi g = 0, \quad \phi^2 = 0, \quad \phi d_C + d_C \phi + gf = 1_C.$$



# Capítulo 2

## Estudio y control de $A_\infty$ -estructuras

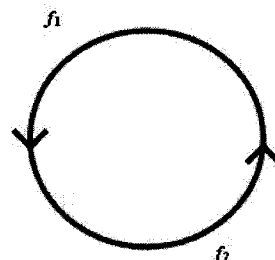
El origen de las  $A_\infty$ -álgebras surge como generalización de la falta de asociatividad encontrada por J. D. Stasheff (ver [Sta63]) en un morfismo candidato a ser el producto del espacio de lazos de un espacio topológico.

**Ejemplo 2.1.** Sea  $(X, *)$  un espacio topológico con punto base y sea  $\Omega X$  el espacio de lazos de  $X$ : un punto de  $\Omega X$  es una aplicación continua  $f : S^1 \rightarrow X$ , llevando el punto base de la circunferencia en el punto base de  $X, *$ .

Si consideramos como multiplicación

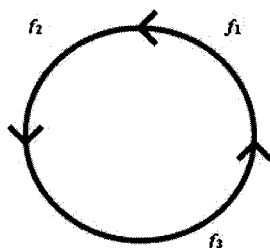
$$\begin{aligned} \mu_2 : \Omega X \times \Omega X &\rightarrow \Omega X \\ (f_1, f_2) &\longrightarrow f_1 * f_2, \end{aligned}$$

donde  $*$  es el producto de caminos usual

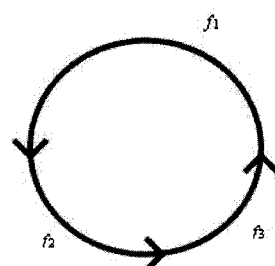


$\mu_2$  no es asociativo, pero si asociativo salvo homotopía

$$(f_1 * f_2) * f_3$$



$$f_1 * (f_2 * f_3)$$



Lo que nos lleva automáticamente a que el complejo de cadenas asociado no tenga estruc-

tura de álgebra “en modo estricto”.

De hecho, muestra que al considerar el complejo de cadenas de dicho espacio topológico, el morfismo inducido  $\mu_2$  no es asociativo a pesar de ser compatible con diferencial  $d$  ( $d\mu_2 = \mu_2(d \otimes 1 + 1 \otimes d)$ ) y tener grado cero, pero sí que es *asociativo salvo homotopía*  $\mu_3, \mu_3 : M^{\otimes 3} \rightarrow M$ , es decir, verifica la ecuación

$$\mu_3 d + d\mu_3 = \mu_2(\mu_2 \otimes 1) - \mu_2(1 \otimes \mu_2).$$

Así pues, esta noción da lugar en los años sesenta, a la definición de una  $A_\infty$ -álgebra, la cual podríamos describir a grandes rasgos como un dg-módulo  $M$  junto con una familia de operaciones  $\mu_i : M^{\otimes i} \rightarrow M$ ,  $i \geq 2$ , las cuales verifican la propiedad generalizada de ser “asociativas salvo homotopía”.

Desde entonces, diversos trabajos han dado respuestas parciales sobre la naturaleza de tales objetos, tanto desde el punto de vista de la Teoría de Perturbación, como desde la Teoría de *Operads*, sin olvidar el enfoque totalmente novedoso de R. Umble y S. Sanedidze gracias a la noción de *Permutahedra*, en el cual se estudia en profundidad la definición de  $A_\infty$ -álgebra de Hopf.

Nuestro objetivo en este capítulo es mostrar cómo controlar la naturaleza de dichos objetos haciendo uso exclusivo de la Teoría de Perturbación. Gracias a la dualidad en la definición y en las propiedades de las  $A_\infty$ -álgebras y de las  $A_\infty$ -coálgebras, nos referiremos a ellas de modo genérico como  $A_\infty$ -estructuras.

Así pues, mostraremos a continuación algunas nociones básicas, al igual que teoremas y comentarios clarificadores al respecto, para luego adentrarnos en resultados más potentes que nos permitan añadir información, hasta ahora no conocida.

De hecho, como resultados importantes queremos mencionar un teorema dual al de la contracción Bar, al igual que diversos teoremas que nos garantizan que el producto tensorial de  $A_\infty$ -estructuras con estructuras no afecta a la naturaleza de las primeras, es decir, las operaciones no nulas siguen siendo las de partida y no aparece ninguna más.

## 2.1. Propiedades principales

Veamos pues en esta sección algunos aspectos básicos de las  $A_\infty$ -estructuras.

**Definición 2.1.** Una  $A_\infty$ -álgebra (resp.  $A_\infty$ -coálgebra) es un módulo graduado  $A$  (resp.  $C$ ), dotado de una familia de operaciones de módulos graduados  $\mu_i : A^{\otimes i} \rightarrow A$  (resp.

$\Delta_i : C \rightarrow C^{\otimes i}$ , de grado  $i - 2$ , las cuales satisfacen para todo  $i \geq 1$  las relaciones:

$$\sum_{n=1}^i \sum_{k=0}^{i-n} (-1)^{n+k+nk} \mu_{i-n+1}(1^k \otimes \mu_n \otimes 1^{\otimes i-n-k}) = 0.$$

$$(\text{resp. } \sum_{n=1}^i \sum_{k=0}^{i-n} (-1)^{n+k+nk} (1^{\otimes i-n-k} \otimes \Delta_n \otimes 1^k) \Delta_{i-n+1} = 0.)$$

Si inspeccionamos la fórmula anterior en bajo nivel obtenemos la siguiente interpretación

- $\mu_1 \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1$  es una diferencial.
- $\mu_1 \mu_2 = \mu_2(\mu_1 \otimes 1 + 1 \otimes \mu_1)$ , es decir,  $\mu_2$  es compatible con la diferencial.
- $\mu_3(\mu_1 \otimes 1^2 + 1^2 \otimes \mu_1 + 1 \otimes \mu_1 \otimes 1) + \mu_1 \mu_3 = \mu_2(\mu_2 \otimes 1 - 1 \otimes \mu_2)$ .

A. Prouté muestra en su tesis [Pro84] que la siguiente definición es equivalente a la anterior:

**Definición 2.2.** Una  $A_\infty$ -álgebra es un módulo graduado junto con una aplicación lineal  $m : T(sM) \rightarrow M$ , tal que el morfismo  $d = -(s(mT(s^{-1})))^{[1]}$  hace de  $T(s(M))$  una dga-coálgebra.

$(T(s(M)), d + d_t)$  se conoce como la *construcción Bar Tilde* de  $M$ ,  $\tilde{B}(M)$ , definida por J. D. Stasheff en [Sta63], la cual coincide como módulo graduado con la construcción Bar.

En particular, desde el punto de vista de la Teoría de la Perturbación podemos identificar una  $A_\infty$ -estructura con una contracción gracias a los siguientes resultados que pasamos a enunciar a continuación.

- Dada una contracción de una estructura a un dg-módulo, el dg-módulo menor hereda una  $A_\infty$ -estructura.

**Teorema 2.1.** [GLS91] *Dados  $A$  una dg-álgebra conexa, con producto  $\mu$ ,  $M$  un dg-módulo y  $r : \{A, M, f, g, \phi\}$  una contracción entre ellos,  $M$  adquiere una estructura de  $A_\infty$ -álgebra inducida por la contracción  $r$  dada por la fórmula*

$$\mu_n = (-1)^{(n-1)} f \mu^{[1]} \phi^{[\otimes 2]} \dots \phi^{[\otimes (n-1)]} \mu^{[n-1]} g^{\otimes n},$$

donde

$$\mu^{[k]} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i-1} 1^{\otimes i} \otimes \mu \otimes 1^{\otimes k-i-1}.$$

**Teorema 2.2.** [GLS91] *Dados  $C$  una dg-coálgebra simplemente conexa, con co-producto  $\Delta$ ,  $M$  un dg-módulo y  $r : \{C, M, f, g, \phi\}$  una contracción de dga-módulos, el dg-módulo  $M$  adquiere una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra inducida por la contracción  $r$  dada por la fórmula*

$$\Delta_n = (-1)^{[n/2]+n+1} f^{\otimes n} \Delta^{[n]} \phi^{[\otimes(n-1)]} \dots \phi^{\otimes 2} \Delta^{[2]} g,$$

donde

$$\Delta^{[k]} = \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i 1^{\otimes i} \otimes \Delta \otimes 1^{\otimes k-i-2}.$$

- Análogamente, dada una  $A_\infty$ -estructura existe una contracción y una estructura que la inducen.

**Teorema 2.3.** [Jim03]  *$A$  es una  $A_\infty$ -álgebra si y sólo si existe una contracción  $r : \{A', A, f, g, \phi\}$ , de una dga-álgebra conexa  $A'$  al dga-módulo  $A$ , tal que la aplicación del “tensor trick” a la contracción  $r$ , da como resultado la estructura de  $A_\infty$ -álgebra original.*

**Teorema 2.4.** [Jim03]  *$C$  es una  $A_\infty$ -coálgebra si y sólo si existe una contracción  $r : \{C', C, f, g, \phi\}$ , de una dga-coálgebra conexa  $C'$  al dga-módulo  $C$ , tal que la aplicación del “tensor trick” a la contracción  $r$ , da como resultado la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra original.*

- En particular, en las demostraciones de los teoremas anteriores, se prueba que la dga-álgebra que induce la  $A_\infty$ -álgebra en  $M$  es  $\tilde{\Omega}\tilde{B}(M)$ , donde  $\tilde{\Omega}$  es la construcción cobar definida en la siguiente sección y la dga-coálgebra que induce la  $A_\infty$ -coálgebra en  $M$  es  $\tilde{B}\tilde{\Omega}(M)$ . Además, cualquier álgebra que induzca la  $A_\infty$ -álgebra de partida en  $M$  es homotópicamente equivalente como álgebra a  $\tilde{\Omega}\tilde{B}(M)$ .
- También es importante destacar una compatibilidad en la transferencia de estructuras al establecer una contracción entre la construcción Bar y la construcción Bar Tilde, explícitamente

**Teorema 2.5.** [Rea00] *Sea  $r : \{A, M, f, g, \phi\}$  una contracción donde  $A$  es una dga-álgebra conmutativa y  $M$  un dg-módulo conexo. Entonces*

$$\bar{B}(r) : \{\bar{B}(A), \bar{B}(M), \bar{B}(f), \bar{B}(g), \bar{B}(\phi)\}$$

*es una contracción de álgebras semi-completa.*

De hecho, la contracción de salida es la que dota a  $M$  de la estructura de  $A_\infty$ -álgebra, heredada mediante  $r$  de la dga-álgebra  $A$ .

Por tanto, como ya hemos mencionado con anterioridad, para nosotros es equivalente hablar de  $A_\infty$ -estructuras o de contracciones en las que el dg-módulo mayor es una estructura.

En casos especiales en que el dg-módulo menor tiene estructura de (co)álgebra, dependiendo de las propiedades de los morfismos involucrados en la contracción, puede que dicha estructura sea compatible con los morfismos tal y como mostramos en el capítulo primero, por lo que no obtendríamos una  $A_\infty$ -estructura en él, sino una transferencia (co)multiplicativa.

## 2.2. Contracciones que preservan las estructuras

Como ya introdujimos en el capítulo anterior, el saber cuándo una contracción preserva o no la estructura subyacente es uno de nuestros objetivos con el fin de prever cuando, dada una contracción, obtendremos o no en el dg-módulo menor una  $A_\infty$ -estructura y de qué tipo.

Así pues, mostramos aquí dos contracciones especiales desde el punto de vista multiplicativo:

- la “*contracción Bar*”, tanto desde el punto de vista de álgebra como de coálgebra, preserva la estructura en el caso de dga-álgebras conmutativas.
- la “*contracción Cobar*”, la cual definiremos y probaremos que verifica las propiedades duales de la anterior, siempre y cuando tengamos dga-coálgebras conmutativas.

### 2.2.1. Estudio multiplicativo de la “*contracción Bar*”

En los años cincuenta, Eilenberg y Mac Lane estudiaron exhaustivamente cómo definir una contracción entre la construcción Bar del producto tensorial de dos álgebras y el producto tensorial de las construcciones bares correspondientes, probando el teorema que enunciamos unas líneas más abajo.

De hecho, en [EM53] se detalla el minucioso proceso de construcción en el que la piedra angular de esta prueba es la estructura simplicial subyacente en el objeto algebraico  $\bar{B}(A)$ , junto con el Teorema de Eilenberg-Zilber (1.6).

**Teorema 2.6.** [EM53] *Dadas  $A$  y  $A'$  dos dga-álgebras conmutativas, existe una contracción*

$$r_{\bar{B} \otimes} : \{ \bar{B}_N(A \otimes A'), \bar{B}_N(A) \otimes \bar{B}_N(A'), f_{\bar{B} \otimes}, g_{\bar{B} \otimes}, \phi_{\bar{B} \otimes} \},$$

*dada por:*

- $f_{\bar{B}^\otimes}$ , actuando sobre elementos homogéneos  $[a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_n \otimes a'_n]$  de  $\bar{B}(A \otimes A')$ , es

$$f_{\bar{B}^\otimes}[a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_n \otimes a'_n] = \sum_{i=0}^n \xi_{\bar{B}(A)}(a_{i+1} \cdots a_n) \xi_{\bar{B}(A')}(a'_1 \cdots a'_i) [a_1 | \cdots | a_i] \otimes [a'_{i+1} | \cdots | a'_n],$$

con  $i = 0$ ,  $[a_1 | \cdots | a_i] = 1 \in \bar{B}_N(A)$ ;  $i = n$ ,  $[a'_{i+1} | \cdots | a'_n] = 1 \in \bar{B}_N(A')$ .

- $g_{\bar{B}^\otimes}$ , tras identificar  $\bar{B}_N(A)$  y  $\bar{B}_N(A')$  como subálgebras de  $\bar{B}_N(A \otimes A')$ , vía

$$[a_1 | \cdots | a_n] = [a_1 \otimes 1 | \cdots | a_n \otimes 1], \quad [a'_1 | \cdots | a'_n] = [1 \otimes a'_1 | \cdots | 1 \otimes a'_n]$$

se define como

$$g_{\bar{B}^\otimes}(u \otimes v) = u \star v, \quad u \in \bar{B}_N(A), \quad v \in \bar{B}_N(A').$$

donde  $\star$  es el producto shuffle definido en el capítulo 1.

- $\phi_{\bar{B}^\otimes}$  es la composición

$$\phi_{\bar{B}^\otimes} = \lambda^{-1} shi \lambda,$$

donde  $\lambda$  es el isomorfismo de dg-módulos

$$\begin{aligned} \lambda : \bar{B}_N(A \otimes A') &\rightarrow \bar{B}_N(A) \times \bar{B}_N(A') \\ \lambda[a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_n \otimes a'_n] &= (-1)^{\sum_{j>k} (1+|a_j|)(1+|a'_k|)} [a_1 | \cdots | a_n] \times [a'_{i+1} | \cdots | a'_n], \end{aligned}$$

con  $a_i$  y  $a'_i$  elementos homogéneos y  $shi$  el operador de homotopía definido en el Teorema de Eilenberg-Zilber (1.6).

Desde el punto de vista de álgebras, S. Eilenberg y S. Mac Lane probaron que los morfismos  $f_{\bar{B}^\otimes}$  y  $g_{\bar{B}^\otimes}$  son morfismos de dga-álgebras. En [Rea00] se tiene que  $\phi_{\bar{B}^\otimes}$  es una casi-homotopía de álgebras, por lo que dicha contracción es una *contracción de álgebras casi-completa*.

Desde el punto de vista de coálgebras se tiene que  $g_{\bar{B}^\otimes}$  es un morfismo de dga-coálgebras, dando lugar a que se preserve la estructura de coálgebra.

**Esquema de la demostración:** Dadas las repercusiones que tiene en nuestro trabajo la existencia de esta contracción gracias a sus propiedades multiplicativas (un ejemplo claro, es el capítulo cuatro), veamos los pasos fundamentales que tuvieron que dar S. Eilenberg y S. Mac Lane en sus artículos [EM53] y [EM54] para probar dicho teorema.

- descripción de la estructura simplicial de la construcción Bar;
- demostración del teorema de Eilenberg-Zilber;
- establecimiento de un isomorfismo simplicial  $\lambda : \bar{B}_N(A \otimes A') \rightarrow (\bar{B}(A) \times \bar{B}(A'))_N$ ;
- establecimiento de un isomorfismo de grupos

$$\kappa : \bar{B}_N(A) \otimes \bar{B}_N(A') \rightarrow \bar{B}_N(A) \odot \bar{B}_N(A'),$$

donde  $\bar{B}_N(A) \odot \bar{B}_N(A')$  es el producto tensorial considerada como única diferencial la diferencial simplicial;

- comprobación de que los morfismos  $f$  y  $g$  conmutan con la diferencial tensorial, obteniendo así la contracción deseada como la composición

$$\bar{B}_N(A \otimes A') \xrightarrow{\lambda} (\bar{B}(A) \times \bar{B}(A'))_N \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} \bar{B}_N(A) \odot \bar{B}_N(A') \xrightarrow{\kappa} \bar{B}_N(A) \otimes \bar{B}_N(A')$$

Así pues, iterando el proceso, se puede establecer una contracción entre  $\bar{B}_N(\otimes_{i \in I} A_i)$  y  $\otimes_{i \in I} \bar{B}_N(A_i)$ , en donde las estructuras multiplicativas y comultiplicativas se transfieran.

$r_{\otimes \bar{B}} : \bar{B}_N(\otimes_{i \in I} A_i) \rightarrow \otimes_{i \in I} \bar{B}_N(A_i)$  contracción que preserva la estructura de coálgebra.

### 2.2.2. Estudio multiplicativo de la “contracción Cobar”

En este apartado ponemos de manifiesto la existencia de un teorema dual al teorema de Eilenberg-Zilber para el caso de estructuras cosimpliciales, el cual nos da como aplicación el teorema que nos establece una contracción entre la construcción cobar reducida del producto tensorial de dos coálgebras conmutativas y el producto tensorial de las construcciones cobares reducidas correspondientes.

**Definición 2.3.** Dada  $C$  una dga-coálgebra, se define la *construcción cobar* de  $C$ ,  $\Omega(C)$ , como la dga-álgebra del módulo tensorial de  $T^a(s^{-1}(C))$ ,

$$(\Omega(C), d_\Omega, \mu_\Omega, \xi_\Omega, \eta_\Omega) = (T^a(s^{-1}(C)), d_t + d_c, \mu_T, \xi_T, \eta_T).$$

Dado un elemento  $s^{-1}(c_1) \otimes \cdots \otimes s^{-1}(c_n) \in \Omega(C)$ , lo denotaremos por  $\langle c_1 | \cdots | c_n \rangle$ . Se dirá homogéneo si para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $c_i$  es homogéneo. Denotaremos por  $\langle \rangle = 1 \in \Lambda$ .



La diferencial total  $d_\Omega$  es la suma de las diferenciales *cosimplicial*

$$d_{cos} = \sum_{i=1}^n (-1)^{e_i} \langle c_1 | \cdots | c_{i-1} | \Delta(c_i) | \cdots | c_n \rangle \\ + \langle \eta(1) | c_1 | \cdots | c_n \rangle + (-1)^{e_n} \langle c_1 | \cdots | c_n | \eta(1) \rangle,$$

y *tensorial*

$$d_t \langle c_1 | \cdots | c_n \rangle = - \sum_{i=1}^n (-1)^{e_i-1} \langle c_1 | \cdots | d(c_i) | \cdots | c_n \rangle,$$

donde  $e_i = |c_1| + \cdots + |c_i| + i$ .

El *grado cosimplicial* de un elemento se define como

$$|\langle c_1 | \cdots | c_n \rangle|_c = -n,$$

y el *grado* de un elemento

$$|\langle c_1 | \cdots | c_n \rangle| = |\langle c_1 | \cdots | c_n \rangle|_t - n.$$

El producto es el del módulo tensorial

$$\mu_\Omega : \Omega(C) \otimes \Omega(C) \rightarrow \Omega(C) \\ \langle c_1 | \cdots | c_i \rangle \otimes \langle c_{i+1} | \cdots | c_n \rangle \rightarrow \langle c_1 | \cdots | c_n \rangle.$$

En caso de que  $C$  sea conmutativa, se puede definir un coproducto en la construcción cobar, convirtiéndola en una álgebra de Hopf. Dicho coproducto, conocido como *coproducto shuffle* viene determinado por la fórmula

$$\Delta_\Omega : \Omega(C) \rightarrow \Omega(C) \otimes \Omega(C) \\ \Delta \langle c_1 | \cdots | c_n \rangle \rightarrow \sum_{(\alpha, \beta) \in \{(p, q)\text{-shuffles}\}} \langle c_{\alpha_1} | \cdots | c_{\alpha_p} \rangle \otimes \langle c_{\beta_1} | \cdots | c_{\beta_q} \rangle$$

Más explícitamente, podemos detallar la estructura cosimplicial de la construcción cobar gracias a los operadores cocara y codegeneración siguientes:

$$d^i : \Omega_n(C) \rightarrow \Omega_{n+1}(C), \quad 0 \leq i \leq n+1 : \\ d^0 \langle c_1 | \cdots | c_n \rangle = \langle \eta(1) | c_1 | \cdots | c_n \rangle, \\ d^i \langle c_1 | \cdots | c_n \rangle = (-1)^{|c_1| \cdots |c_i|} \langle c_1 | \cdots | \Delta(c_i) | \cdots | c_n \rangle, \\ d^{n+1} \langle c_1 | \cdots | c_n \rangle = (-1)^{|c_1| \cdots |c_n|} \langle c_1 | \cdots | c_n | \eta(1) \rangle.$$

$$s^j : \Omega_n(C) \rightarrow \Omega_{n-1}(C), \quad 0 \leq j \leq n-1 : \\ s^0 \langle 1 \rangle = \langle \rangle, \\ s^j \langle c_1 | \cdots | c_n \rangle = (-1)^{|c_1| \cdots |c_j|} \langle c_1 | \cdots | c_j | \xi(c_{j+1}) | \cdots | c_n \rangle.$$



El comprobar que se verifican las relaciones cosimpliciales, es trivial gracias al hecho

$$(\xi \otimes 1)\Delta = 1_C = (1 \otimes \xi).$$

Dada  $\Omega(C)$  la construcción cobar de  $C$ , definimos la *construcción cobar normalizada*  $\bar{\Omega}(C)$  como la normalización del conjunto cosimplicial  $\Omega(C)$ , que coincide con el cociente de

$$\bar{\Omega}(C) = \frac{\Omega(C)}{d(\Omega(C))}$$

donde  $d(\Omega(C))$  es el subconjunto de elementos de  $\Omega(C)$  de la forma  $\langle c_1 | \cdots | c_i | 1 | \cdots | c_n \rangle$  con 1 la counidad de la coálgebra. De hecho,  $\bar{\Omega}(C)$  coincide con  $T^a(s^{-1}(\text{Coker}(\eta_C)))$ .

En particular,  $\bar{\Omega}(C)$  es una dga-álgebra cuyas graduación, diferencial y producto son las inducidas por las de la construcción cobar.

El siguiente teorema es uno de los pilares de esta sección, gracias a él podemos establecer una contracción entre la construcción cobar del producto tensorial de dos coálgebras hacia el producto tensorial de sus cobares bajo ciertas condiciones.

**Teorema 2.7.** *Sean  $C$  y  $C'$  dos dga-coálgebras conmutativas, existe una contracción*

$$r_\Omega : \{\bar{\Omega}(C \otimes C'), \bar{\Omega}(C) \otimes \bar{\Omega}(C'), f_\Omega, g_\Omega, \phi_\Omega\},$$

dada por:

- $f_\Omega$ , actuando sobre elementos homogéneos  $\langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | c_n \otimes c'_n \rangle$  de  $\bar{\Omega}(C \otimes C')$ , es

$$f_\Omega(\langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | c_n \otimes c'_n \rangle) = \sum_{i=0}^n \xi_C(c_{i+1} \cdots c_n) \xi_{C'}(c'_1 \cdots c'_i) \langle c_1 | \cdots | c_i \rangle \otimes \langle c'_{i+1} | \cdots | c'_n \rangle,$$

con  $i = 0$ ,  $\langle c_1 | \cdots | c_i \rangle = 1 \in \bar{\Omega}(C)$ ;  $i = n$ ,  $\langle c'_{i+1} | \cdots | c'_n \rangle = 1 \in \bar{\Omega}(C')$ .

- $g_\Omega$  se define como composición de dos morfismos: si consideramos elementos homogéneos de las construcciones cobar correspondientes,  $\langle c_1 | \cdots | c_n \rangle \in \bar{\Omega}(C)$  y  $\langle c'_1 | \cdots | c'_m \rangle \in \bar{\Omega}(C')$ , entonces

$$g_\Omega(\langle c_1 | \cdots | c_n \rangle \otimes \langle c'_1 | \cdots | c'_m \rangle) = \sum_{(n,m)\text{-shuffles}} (-1)^{sg(\alpha,\beta)} \langle c_1 | \Delta(c_{\alpha_1}) | \cdots | \Delta(c_{\alpha_m}) | \cdots | c_n \rangle \star \langle c'_1 | \cdots | \Delta(c'_{\beta_1}) | \cdots | \Delta(c'_{\beta_n}) | \cdots | c'_m \rangle$$

donde  $\star$  es el producto definido por el isomorfismo  $\lambda$  detallado en 2.12, que se corresponde con hacer el producto tensorial coordenada a coordenada (salvo signo)  $\langle c_1 | \cdots | c_m \rangle \star \langle c'_1 | \cdots | c'_m \rangle = \langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | c_m \otimes c'_m \rangle$ .

- $\phi_\Omega$  es la composición

$$\phi_\Omega = \lambda^{-1} shi^c \lambda,$$

donde  $\lambda$  es el isomorfismo de dg-módulos detallado en 2.12 con  $c_i$  y  $c'_i$  elementos homogéneos y  $shi^c$  el operador de homotopía definido en el Teorema de Eilenberg-Zilber Cosimplicial (2.10).

Para la demostración de este teorema, necesitamos seguir los mismos pasos que los establecidos para la construcción Bar, a continuación pasaremos a detallar y demostrar diversos lemas que concatenados darán lugar a la demostración.

El pilar central de toda la argumentación es el teorema 2.10, dual para conjuntos cosimpliciales del teorema de Eilenberg-Zilber, al cual hemos querido “bautizar” como *Eilenberg-Zilber Cosimplicial*.

Antes de enunciarlo, debemos hacer un estudio más exhaustivo de los conjuntos cosimpliciales de la definición 1.53.

Una de las propiedades fundamentales de los conjuntos simpliciales es que todo símplice se puede describir de modo único como degeneración de un símplice no degenerado.

Este hecho (fundamental en el caso simplicial), no es cierto, en general, para los conjuntos cosimpliciales, dado que la descomposición (en términos duales) no es única.

En [RR78] se da un criterio para saber cuando esta descomposición es única; criterio que pasamos a detallar a continuación.

**Definición 2.4.** Dado  $K$  un conjunto cosimplicial e  $x \in K_n$  se dice que es un *punto interior* de  $K$  si  $y \in K_0$  ó  $y \in K_n$  (con  $n > 0$ ) tal que no es posible describirlo como  $d^i y'$ , con  $y' \in K_{n-1}$ .

Es claro que todo cosímplice de  $K$  que no sea interior, se puede descomponer como imagen de un punto interior por un número finito de cocaras, lo que nos lleva a la definición

**Definición 2.5.** Dado  $K$  un conjunto cosimplicial se dice *de tipo E-Z* si para todo cosímplice la descomposición anterior es única.

**Definición 2.6.** Dado  $K$  un conjunto cosimplicial se dice que *admite puntos cosimpliciales* si contiene subconjuntos cosimpliciales con exactamente un único punto en cada dimensión.

**Lema 2.8.** Dado  $K$  un conjunto cosimplicial, entonces es de tipo E-Z si y sólo si no admite puntos cosimpliciales.

En particular, una proposición que se deduce automáticamente es la siguiente.

**Proposición 2.9.** Si  $K$  es un módulo cosimplicial de tipo E-Z, entonces  $K$  se puede describir como suma directa de los submódulos  $K = N(K) \oplus D(K)$ , donde  $N(K)$  está definido en 1.56 y  $D(K)$  viene dado por

$$D_n(K) = \Lambda \left\langle \bigcup_{j=0}^{n-1} d^j(K_{n-1}) \right\rangle$$

**Demostración:** Dividamos la prueba en cuatro apartados.

- $N_n \cap D_n = 0$ . Si  $x \in D_n(K)$ , entonces  $x = d^i x_i$ , por otro lado, si  $x \in N_n(K)$ , entonces  $s^j x = 0$ ,  $\forall j$ , lo que nos lleva a  $0 = s^i x = s^i d^i x = x_i$ , lo que lleva a una contradicción.
- $N(K)$  es submódulo de  $K$ . Dado  $x \in N_n(K)$ , se tiene que  $s^i(x) = 0$  para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

$$\begin{aligned} s^j(d(x)) &= s^j \left[ \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d^i(x) \right] = s^j \left[ \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i d^i(x) \right] + s^j \left[ \sum_{i=j+2}^{n+1} (-1)^i d^i(x) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i d^i s^{j-1}(x) + \sum_{i=j+2}^{n+1} (-1)^i d^{i-1} s^j(x) = 0 \end{aligned}$$

- $D(K)$  es submódulo de  $K$ . Dado  $x \in D_n(K)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} d(x) &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d^i x = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (d^j x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i d^i d^j x_{n-1} + (-1)^{n+1} d^{n+1} d^j x_{n-1} \in D_{n+1}(K). \end{aligned}$$

- Dado  $x \in K_n$ , sea  $i$  el primer índice tal que  $s^i y \neq 0$ , entonces  $y \equiv y - d^i s^i(y) = y' \pmod{D_i}$ . Para todo  $j < i$ ,  $s^j y' = s^j y - s^j d^i s^i y = 0$ , por lo que  $s^i y' = 0$ . Este argumento finaliza la prueba en un número finito de pasos. Gracias a que  $K$  es un conjunto de tipo E-Z, dicha descomposición es única. ■



**Teorema 2.10** (Eilenberg-Zilber Cosimplicial). *Dados  $F$  y  $K$  conjuntos cosimpliciales de tipo E-Z, existe una contracción de cocadenas*

$$C_*^N(F \times K) \begin{array}{c} \xrightarrow{aw^c} \\ \xleftarrow{eml^c} \end{array} C_*^N(F) \otimes C_*^N(K).$$

Explícitamente, las fórmulas de los morfismos son:

- Alexander-Whitney Cosimplicial,  $aw^c$ ,

$$f : C_*^N(F \times K) \rightarrow C_*^N(F) \otimes C_*^N(K)$$

$$(a_n, b_n) \rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} s^i \cdots s^{n-1} a_n \otimes s^0 \cdots s^{i-1} b_n.$$

- Eilenberg-Mac Lane Cosimplicial,  $eml^c$ ,

$$g : C_*^N(F) \otimes C_*^N(K) \rightarrow C_*^N(F \times K)$$

$$(a_n \otimes b_m) \rightarrow \sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} (d^{\beta_m} \cdots d^{\beta_1} a_n, d^{\alpha_n} \cdots d^{\alpha_1} b_m),$$

donde la suma está hecha sobre los  $(\alpha, \beta) \in \{n, m\}$ -shuffles.

- El operador de homotopía Shi Cosimplicial,  $shi^c$ , de grado  $-1$ ,

$$\phi : C_*^N(F \times K) \rightarrow C_*^N(F \times K)$$

$$(a_n, b_n) \rightarrow \sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{s_1} (d^{\beta_{q-1}} \cdots d^{\beta_1} s^{n-q} \cdots s^{n-1} a_n,$$

$$d^{\alpha_{p-1}} \cdots d^{\alpha_1} s^{n-1-p-q} \cdots s^{n-q-2} b_n),$$

donde la suma es realizada sobre los  $(\alpha, \beta) \in \{p-1, q-1\}$ -shuffles, tales que  $p+q = n-1$  y  $s_1 = n-p-q + sg(\alpha, \beta)$ .

**Demostración:** Si denotamos por  $\tilde{s}^i = s^i \cdots s^{n-1}$  y  $s^i = s^0 \cdots s^{i-1}$ , entonces gracias a las propiedades cosimpliciales, es fácil ver que

$$\tilde{s}^i d^j a_{n-1} = \begin{cases} s^i \cdots s^{n-2} a_{n-1} = \tilde{s}^i a_{n-1} & \text{if } i \leq j; \\ d^j s^{i-1} \cdots s^{n-2} a_{n-1} = d^j \tilde{s}^{i-1} a_{n-1} & \text{si } j < i. \end{cases}$$

$$s^i d^j b_{n-1} = \begin{cases} s^0 \cdots s^{i-2} b_{n-1} = s^{i-1} b_{n-1} & \text{if } j \leq i; \\ d^{j-i} s^0 \cdots s^{i-1} b_{n-1} = d^{j-i} s^i b_{n-1} & \text{si } j > i. \end{cases}$$

■ **Propiedades del morfismo  $f$**

- $f$  es un morfismo de grado cero (trivial).
- $f$  conmuta con la diferencial, i.e.,  $df = fd$ . Para probarlo, describamos  $f$  como una suma de morfismos  $f_i$

$$f = \sum_{i=0}^n f_i : F_n \times K_n \rightarrow F_i \otimes K_{n-i}$$

donde  $f_i(a_n, b_n) = (\tilde{s}^i a_n, s^i b_n)$ , entonces es claro que  $df$  viene descrita por la fórmula

$$d \sum_{i=0}^n f_i = d \sum_{i=0}^n (\tilde{s}^i, s^i) = \sum_{i=0}^n \left\{ \sum_{j=0}^i (-1)^j (d^j \tilde{s}^i, s^i) + \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^{j+i} (\tilde{s}^i, d^j s^i) \right\}$$

Mientras que  $fd$  está definida como

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j f_i(d^j, d^j) &= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (\tilde{s}^i d^j, s^i d^j) = \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{j=0}^i (-1)^j (d^j \tilde{s}^i, s^i) \right. \\ &\left. + \sum_{j=i}^n (-1)^j (\tilde{s}^i, d^{j-i} s^i) \right] = \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{j=0}^i (-1)^j (d^j \tilde{s}^i, s^i) + \sum_{t=0}^{n-i} (-1)^{t+i} (\tilde{s}^i, d^t s^i) \right]. \end{aligned}$$

Por tanto,  $df = fd$ .

■ **Propiedades del morfismo  $g$**

- $g$  es un morfismo de grado cero (trivial).
- $g$  conmuta con la diferencial, i.e.,  $dg = gd$ .

Para probar esta igualdad, necesitamos enunciar diversas propiedades de los shuffles.

Sea  $(\alpha, \beta)$  un  $(p, q)$ -shuffle, si  $\alpha_1 = 0$ , i.e.,  $(\alpha, \beta) = (0, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$ , entonces denotamos por  $\bar{\alpha}$  al conjunto obtenido al eliminar de  $\alpha$  su primera componente  $\alpha_1$ ,  $\bar{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_p)$ ; del mismo modo definimos  $\bar{\beta}$ . Por otro lado, denotemos por  $\alpha - 1$  el conjunto de elementos  $(\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_p - 1)$ , de igual modo  $\beta - 1$  será el conjunto  $(\beta_1 - 1, \dots, \beta_q - 1)$ .

**Lema 2.11.** [May67] Con las notaciones anteriores, se verifican las propiedades siguientes

- Si  $(\alpha, \beta) \in (p, q)$ -shuffle, con  $\alpha_1 = 0$ . Entonces,  $(\bar{\alpha}-1, \beta-1) \in (p-1, q)$ -shuffle y  $sg(\bar{\alpha}-1, \beta-1) = sg(\alpha, \beta)$ .  
Además, todo  $(p-1, q)$ -shuffle se puede obtener de este modo.
- Si  $(\alpha, \beta) \in (p, q)$ -shuffle, con  $\beta_1 = 0$ . Entonces,  $(\alpha-1, \bar{\beta}-1) \in (p, q-1)$ -shuffle y  $sg(\alpha-1, \bar{\beta}-1) = sg(\alpha, \beta) + p$ .  
Además, todo  $(p, q-1)$ -shuffle se puede obtener de este modo.

Por un lado tenemos que  $dg$  sobre un elemento  $(a_n, b_m)$  vale

$$\sum_{i=0}^{n+m+1} (-1)^i \sum_{(\alpha, \beta) \in (n, m) - sh} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} (d^i d_{\beta_m} \cdots d_{\beta_1} a_n, d^i d_{\alpha_n} \cdots d_{\alpha_1} b_m).$$

Mientras que por el otro  $gd$  es

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sum_{(\alpha, \beta) \in (n+1, m) - sh} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} (d_{\beta_m} \cdots d_{\beta_1} d^i a_n, d_{\alpha_{n+1}} \cdots d_{\alpha_1} b_m) + \\ & \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{i+n} \sum_{(\alpha, \beta) \in (n, m+1) - sh} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} (d_{\beta_{m+1}} \cdots d_{\beta_1} a_n, d_{\alpha_n} \cdots d_{\alpha_1} d^i b_m). \end{aligned}$$

Si  $a_n$  ó  $b_m$  tienen grado cero, el resultado es claro. Si no, es necesario tener en cuenta el lema anterior relativo a los shuffles.

#### ■ Propiedades de compatibilidad

- $fg = Id$ . Gracias a que  $f = \sum f_i$ , primero estudiamos qué pasa con  $f_i d^j$

$$f_i(d^j a_{q-1}, d^j b_{q-1}) = \tilde{s}^i d^j a_{q-1} \otimes s^i d^j b_{q-1} = \begin{cases} s^i d^j b_{q-1} \subset D(K_{q-i}) & \text{if } i < j; \\ \tilde{s}^i d^j a_{q-1} \subset D(F_i) & \text{if } i > j; \\ (\tilde{s}^i a_{q-1}, s^{i-1} b_{q-1}) & \text{if } i = j. \end{cases}$$

Ahora, si consideramos  $f_i$  sobre un sumando de  $eml^c$ , éste cambia el orden de  $s$  y  $d$  dependiendo de la regla

$$f_i g_{(\beta, \alpha)}(a_p, b_q) = (\tilde{s}^i d^{\beta_q} \cdots d^{\beta_1} a_p, s^i d^{\alpha_p} \cdots d^{\alpha_1} b_q) =$$

- Si  $p > i$ , entonces el segundo factor tiene al menos un operador cocara.

- Si  $p < i$ , entonces el primer factor tiene más cocaras que codegeneraciones, por lo que es nulo en el caso normalizado.
- Si  $p = i$ , entonces el sumando es no nulo si y solo si  $\alpha_i = i - 1, \dots, \alpha_1 = 0$ , esta condición implica que  $\beta_q = p + q - 1, \dots, \beta_1 = p$ , y, por tanto, obtenemos la identidad sobre  $(a_p, b_q)$ .
- $f\phi = 0$  debido a las relaciones cosimpliciales existentes entre los operadores cocara y codegeneración. De hecho, la prueba es similar a la mostrada anteriormente,  $fg = Id$ , con la salvedad de que en este caso los operadores cocara aplicados a los elementos no tienen el mismo exponente a la vez, por lo que o el primer término del producto tensorial es degenerado o el segundo lo es.
- $\phi g = 0$ . Veamos la prueba por inducción.
  - $\phi g(a_0 \otimes b_0) = \phi(a_0, b_0) = 0$ ;
  - $\phi g(a_0 \otimes b_1) = \phi(d^0 a_0, b_1) = 0$ ;
  - $\phi g(a_1 \otimes b_0) = \phi(a_1, d^0 b_0) = 0$ ;
  - Supongamos cierto para  $n + m \leq k$  y consideremos  $n + m = k + 1$ . Para probar que  $\phi g = 0$ , necesitamos dar diversas propiedades del morfismo  $g$ , con el fin de hacer más accesible su demostración. De hecho, definamos el morfismo derivado de  $g$ ,  $g'$ , como

$$g' : C_{n+1}(F) \otimes C_{m+1}(K) \rightarrow C_{n+m+1}(F \times K)$$

$$(a_{n+1} \otimes b_{m+1}) \rightarrow \sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} (d^{\beta_m+1} \dots d^{\beta_1+1} a_{n+1}, d^{\alpha_n+1} \dots d^{\alpha_1+1} b_{m+1}),$$

donde la suma está hecha sobre los  $(\alpha, \beta) \in \{n, m\}$ -shuffles. En baja dimensión, las fórmulas explícitas de  $g'$  son

$$g'(a_1, b_1) = (a_1, b_1); \quad g'(a_2, b_1) = (a_2, d^1 b_1);$$

$$g'(a_2, b_2) = (d^2 a_2, d^1 b_2) - (d^1 a_2, d^2 b_2).$$

Los morfismos  $g$  y  $g'$ , verifican las propiedades

$$g(a_n, b_m) = g'(a_n, d^0 b_m) + (-1)^p g'(d^0 a_n, b_m) \text{ si } p > 0, q > 0;$$

$$g(a_n, b_0) = g'(a_n, d^0 b_0);$$

$$g(a_0, b_m) = g'(d^0 a_0, b_m).$$

Teniendo en cuenta que  $\phi g'(a_1, b_1) = 0$ ,  $\phi g'(a_2, b_1) = 0$ , podemos aplicar la hipótesis de inducción igualmente para  $g'$  con  $n + m \leq k$ , por lo que por la primera propiedad del párrafo anterior, tenemos que

$$\phi g(a_n, b_m) = \phi[g'(a_n, d^0 b_m) + (-1)^p g'(d^0 a_n, b_m)] = 0.$$



- $gf + d\phi + \phi d = Id$ . Veamos la prueba dependiendo del grado del elemento.
  - $\phi(a_0 \otimes b_0) = 0$ , por lo que  $[gf + d\phi + \phi d](a_0, b_0) = (a_0, b_0)$ .
  - Igualmente se tiene que  $[gf + d\phi + \phi d](a_1, b_1) = (a_1, b_1)$ .
  - Consideremos un elemento  $(a_n, b_n)$  con  $n > 1$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 [gf + d\phi + \phi d](a_n, b_n) &= \\
 &\sum_{(\alpha, \beta)} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} (d^{\beta_m} \dots d^{\beta_1} s^i \dots s^{n-1} a_n, d^{\alpha_n} \dots d^{\alpha_1} s^0 \dots s^{i-1} b_n) \\
 &+ \sum_{i=0}^n (-1)^i \left[ \sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{s_1} (d^i d^{\beta_{q-1}} \dots d^{\beta_1} s^{n-q} \dots s^{n-1} a_n, \right. \\
 &\quad \left. d^i d^{\alpha_{p-1}} \dots d^{\alpha_1} s^{n-1-p-q} \dots s^{n-q-2} b_n) \right] \\
 &+ \sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{s_1} \left[ \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (d^{\beta_{q-1}} \dots d^{\beta_1} s^{n-q+1} \dots s^n d^i a_n, \right. \\
 &\quad \left. d^{\alpha_{p-1}} \dots d^{\alpha_1} s^{n-p-q} \dots s^{n-q-1} d^i b_n) \right].
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que estamos en el caso normalizado, las sumas correspondientes a la diferencial, pueden restringirse exclusivamente a la cocara  $d^n$ , dando lugar a:

$$\begin{aligned}
 [gf + d\phi + \phi d](a_n, b_n) &= \\
 &\sum_{(\alpha, \beta)} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} (d^{\beta_m} \dots d^{\beta_1} s^i \dots s^{n-1} a_n, d^{\alpha_n} \dots d^{\alpha_1} s^0 \dots s^{i-1} b_n) \\
 &+ (-1)^n \left[ \sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{s_1} (d^n d^{\beta_{q-1}} \dots d^{\beta_1} s^{n-q} \dots s^{n-1} a_n, \right. \\
 &\quad \left. d^n d^{\alpha_{p-1}} \dots d^{\alpha_1} s^{n-1-p-q} \dots s^{n-q-2} b_n) \right] \\
 &+ \sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{s_1} \left[ \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (d^{\beta_{q-1}} \dots d^{\beta_1} s^{n-q+1} \dots s^n d^i a_n, \right. \\
 &\quad \left. d^{\alpha_{p-1}} \dots d^{\alpha_1} s^{n-p-q} \dots s^{n-q-1} d^i b_n) \right].
 \end{aligned}$$

Además, gracias al lema 2.11 acerca de las propiedades de los shuffles



junto con las propiedades cosimpliciales, concluimos que

$$[gf + d\phi + \phi d](a_n, b_n) = (a_n, b_n).$$

Por tanto, acabamos de probar el teorema. ■

**Definición 2.7.** Dadas  $\Omega(C)$  y  $\Omega(C')$ , definimos el *producto tensorial (cosimplicial)*,  $\Omega(C) \otimes \Omega(C')$ , como el dg-módulo con grado y diferencial cosimpliciales.

**Observación 2.1.** Esta definición tiene sentido gracias a que  $\Omega(C)$  y  $\Omega(C')$  son dg-módulos con respecto al grado cosimplicial  $||_{cos}$  y la diferencial cosimplicial  $d_{cos}$ .

**Lema 2.12.** Dadas  $C$  y  $C'$  dos dga-coálgebras, entonces existe un isomorfismo cosimplicial:

$$\begin{aligned} \lambda : \Omega(C \otimes C') &\rightarrow \Omega(C) \times \Omega(C') \\ \langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | c_m \otimes c'_m \rangle &\rightarrow (-1)^{\sum_{j>k} |c_j| |c'_k|} \langle c_1 | \cdots | c_m \rangle \times \langle c'_1 | \cdots | c'_m \rangle. \end{aligned}$$

donde  $c_i$  y  $c'_i$  son elementos homogéneos de  $C$  y  $C'$  respectivamente.

**Demostración:** Una consecuencia de las definiciones de la diferencial tensorial junto con el grado tensorial en  $\Omega(C) \times \Omega(C')$  es que  $\lambda$  verifica:  $\lambda d_t = d_t \lambda$ ,  $\lambda|_t = ||_t \lambda$ .

En particular, la definición de  $\lambda^{-1}$  es:

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} : \Omega(C) \times \Omega(C') &\rightarrow \Omega(C \otimes C') \\ \langle c_1 | \cdots | c_m \rangle \times \langle c'_1 | \cdots | c'_m \rangle &\rightarrow (-1)^{\sum_{j>k} |c_j| |c'_k|} \langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | c_m \otimes c'_m \rangle. \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que:

- $\lambda \lambda^{-1} = Id$  y  $\lambda^{-1} \lambda = Id$ .
- $\lambda d = d \lambda$ . Donde la diferencial cosimplicial de  $\Omega(C \otimes C')$  viene dada por

$$d_{cos|\Omega(C \otimes C')} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | (1 \otimes T \otimes 1)(\Delta c_i \otimes \Delta c'_i) | \cdots | c_n \otimes c'_n \rangle. \quad \blacksquare$$

$\Omega(C) \times \Omega(C')$  es un dg-módulo graduado con grado cosimplicial, diferencial cosimplicial y además  $\lambda$  transfiere el grado tensorial y la diferencial tensorial gracias a las fórmulas

$$\begin{aligned} |c \times c'|_t &= |c|_t + |c'|_t; \\ d_t(c \times c') &= d_t(c) \times c' + (-1)^{|c|_t} c \times d_t c'; \end{aligned}$$

donde  $c$  y  $c'$  son elementos homogéneos tales que  $|c|_{cos} = |c'|_{cos}$ .



**Lema 2.13.** Sean  $C$  y  $C'$  dos dga-coálgebras conmutativas, entonces existe un isomorfismo de dg-módulos:

$$\begin{aligned}\kappa : \Omega(C) \odot \Omega(C') &\rightarrow \Omega(C) \otimes \Omega(C'), \\ \kappa(c \odot c') &= (-1)^{|c|_t |c'|_{\text{cos}}} c \otimes c',\end{aligned}$$

donde  $c$  y  $c'$  son elementos homogéneos de  $\Omega(C)$  y  $\Omega(C')$  respectivamente.

**Demostración:** Es fácil probar que  $\kappa\kappa^{-1} = Id$  y  $\kappa^{-1}\kappa = Id$ , por tanto  $\kappa$  es un isomorfismo.

Es más,  $\kappa$  verifica las propiedades:

$$\kappa d_{\text{cos}} = d_{\text{cos}} \kappa, \quad \kappa d_t = d_t \kappa, \quad \kappa|_{\text{cos}} = ||_{\text{cos}} \kappa, \quad \kappa|_t = ||_t \kappa. \blacksquare$$

**Lema 2.14.** El morfismo  $f : \overline{\Omega}(C) \times \overline{\Omega}(C') \rightarrow \overline{\Omega}(C) \odot \overline{\Omega}(C')$  del teorema de Eilenberg-Zilber cosimplicial conmuta con  $d_t$ .

**Demostración:** Para probar que  $f$  conmuta con la diferencial tensorial, probaremos que  $\kappa f$  conmuta con ella, obteniendo automáticamente el resultado deseado. Si  $\kappa f d_t = d_t \kappa f$ , entonces

$$\boxed{f d_t = \kappa^{-1} \kappa f d_t = \kappa^{-1} (d_t \kappa f) = d_t \kappa^{-1} \kappa f = d_t f}$$

Para un elemento de grado cosimplicial  $n$ , podemos describir  $f$  como  $f = f_0 + \dots + f_n$ , donde

$$f_i(c \times c') = s^i \dots s^{n-1} \langle c_1 | \dots | c_n \rangle \odot s^0 \dots s^{i-1} \langle c'_1 | \dots | c'_n \rangle.$$

En particular, la última cara de  $f_i$  sobre el primer factor es

$$(-1)^{|c_1| \dots |c_n|_t} \xi(c_n) \langle c_1 | \dots | c_{n-1} \rangle.$$

Por supuesto,  $\xi(c_m) = 0$  a menos que  $dc_m = 0$ , por lo que el signo puede ser reescrito como  $(-1)^{|c_1| \dots |c_{n-1}|_t}$ . Un proceso de iteración muestra que

$$s^i \dots s^{n-1} \langle c_1 | \dots | c_n \rangle = (-1)^{(n-i)|c_1| \dots |c_i|_t} \xi(c_{i+1} \dots c_n) \langle c_1 | \dots | c_i \rangle.$$

De modo análogo, para que el segundo factor sea no nulo, tiene que cumplirse que el grado de  $c'_1, \dots, c'_i$  sea nulo, por lo que

$$s^0 \dots s^{i-1} \langle c'_1 | \dots | c'_n \rangle = \xi'(c'_1 \dots c'_i) \langle c'_{i+1} | \dots | c'_n \rangle.$$

Es más,  $f_i(c \times c')$  es nulo excepto cuando

$$dc'_1 = \dots = dc'_i = 0, \quad dc_{i+1} = \dots = dc_n = 0.$$

Aplicando  $\kappa$  obtenemos que

$$\kappa f_i(c \times c') = \xi(c_{i+1} \cdots c_n) \xi'(c'_1 \cdots c'_i) \langle c_1 | \cdots | c_i \rangle \otimes \langle c'_{i+1} | \cdots | c'_n \rangle.$$

Por otro lado,

$$\kappa f_i(d_t c \times c') = (-1)^{|c_t| |c'| \cos} \xi(c_{i+1} \cdots c_n) \xi'(c'_1 \cdots c'_i) d_t \langle c_1 | \cdots | c_i \rangle \otimes \langle c'_{i+1} | \cdots | c'_n \rangle,$$

$$\kappa f_i(c \times d_t c') = (-1)^{|c_t| |c'| \cos} \xi(c_{i+1} \cdots c_n) \xi'(c'_1 \cdots c'_i) \langle c_1 | \cdots | c_i \rangle \otimes d_t \langle c'_{i+1} | \cdots | c'_n \rangle.$$

Comparando estas dos fórmulas con  $d_t \kappa f_i$ , se demuestra que  $f$  conmuta con  $d_t$ . ■

**Demostración del teorema 2.7:**

$$\boxed{\begin{array}{c} \overline{\Omega}(C \otimes C') \xleftarrow{\lambda} \overline{\Omega}(C) \times \overline{\Omega}(C') \xrightarrow{EML} \overline{\Omega}(C) \odot \overline{\Omega}(C') \xleftarrow{\kappa} \overline{\Omega}(C) \otimes \overline{\Omega}(C') \\ \xrightarrow{\tau} \end{array}}$$

Las fórmulas explícitas de la contracción cobar son

- La proyección  $f_\Omega$  está dada por  $\kappa f \lambda$

$$f_\Omega : \overline{\Omega}(C \otimes C') \rightarrow \overline{\Omega}(C) \otimes \overline{\Omega}(C')$$

$$\langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | c_n \otimes c'_n \rangle \rightarrow \sum_{i=0}^n \xi_C(c_{i+1} \cdots c_n) \xi_{C'}(c'_1 \cdots c'_i) \langle c_1 | \cdots | c_i \rangle \otimes \langle c'_{i+1} | \cdots | c'_n \rangle$$

- La inyección  $g_\Omega : \overline{\Omega}(C) \otimes \overline{\Omega}(C') \rightarrow \overline{\Omega}(C \otimes C')$  es  $\lambda^{-1} g \kappa^{-1}$ .

- El operador de homotopía,  $\phi_\Omega$

$$\begin{aligned} \phi_\Omega : \overline{\Omega}(C \otimes C') &\rightarrow \overline{\Omega}(C \otimes C') \\ \langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | c_n \otimes c'_n \rangle &\rightarrow \lambda(Shi)^c \lambda^{-1} \end{aligned}$$

**Compatibilidad de los morfismos**

- $f$  no es un morfismo de álgebras:  $\mu f^{\otimes 2} \neq f \mu$ . Consideremos como ejemplo los elementos  $\langle c \otimes 1 \rangle$  y  $\langle 1 \otimes c' \rangle$  de  $\overline{\Omega}(C \otimes C')$ .

Por un lado, tenemos que

$$f[\mu(\langle c \otimes 1 \rangle, \langle 1 \otimes c' \rangle)] = f[\langle c \otimes c' \rangle] = 0.$$

Mientras que por el otro,  $\mu f^{\otimes 2}$  no da cero. Salvo el signo, obtenemos

$$\mu[f^{\otimes 2} \langle c \otimes 1 \rangle \otimes \langle 1 \otimes c' \rangle] = \mu(1 \otimes \langle 1 \rangle + \langle c \rangle \otimes 1, \langle 1 \rangle \otimes 1) = \langle c | 1 \rangle \otimes 1 + \langle 1 \rangle \otimes \langle 1 \rangle.$$

- $f$  es un morfismo de dga-coálgebras, es decir,  $f^{\otimes 2}\Delta = \Delta f$ . Sea  $\langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | c_n \otimes c'_n \rangle$  un elemento de  $\bar{\Omega}(C \otimes C')$ . En primer lugar, tenemos que

$$f(\langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | c_n \otimes c'_n \rangle) = \sum_{i=0}^n \xi_C(c_{i+1} \cdots c_n) \xi_{C'}(c'_1 \cdots c'_i) \langle c_1 | \cdots | c_i \rangle \otimes \langle c'_{i+1} | \cdots | c'_n \rangle,$$

por lo que si consideramos exclusivamente los elementos distintos de cero, y denotamos dicha suma por  $\sum_j$ , el morfismo  $\Delta$  sobre dichos elementos da

$$\sum_j \sum_{(p,q) \in -sh} \sum_{(r,s) \in -sh} \left\{ \langle c_{\alpha_1} | \cdots | c_{\alpha_p} \rangle \otimes \langle c'_{\gamma_1} | \cdots | c'_{\gamma_r} \rangle \right\} \\ \otimes \left\{ \langle c_{\beta_1} | \cdots | c_{\beta_q} \rangle \otimes \langle c'_{\rho_1} | \cdots | c'_{\rho_s} \rangle \right\}$$

donde los shuffles dependen del índice  $j$  (que por complejidad en la notación no mostraremos explícitamente).

Por otro lado, se tiene que  $\Delta$  sobre el elemento  $\langle c_1 \otimes c'_1 | \cdots | c_n \otimes c'_n \rangle$  da

$$\sum_{(p,q) \in -sh} \langle c \otimes c'_{\alpha_1} | \cdots | c \otimes c'_{\alpha_p} \rangle \otimes \langle c \otimes c'_{\beta_1} | \cdots | c \otimes c'_{\beta_q} \rangle$$

por lo que al aplicar  $f^{\otimes 2}$ , obtenemos

$$\sum_{sh} \sum_i \sum_j \left\{ \langle c_1 | \cdots | c_i \rangle \otimes \langle c'_{i+1} | \cdots | c'_n \rangle \right\} \\ \otimes \left\{ \langle c_1 | \cdots | c_j \rangle \otimes \langle c'_{j+1} | \cdots | c'_n \rangle \right\}$$

que es igual a la fórmula anterior gracias a que el morfismo  $\Delta$  es un morfismo que no varía el grado y  $\xi$  solamente es distinta de cero sobre elementos de grado cero, por lo que los sumandos distintos de cero al calcular la imagen vía  $\Delta f$  ó vía el morfismo  $f^{\otimes 2}\Delta$ . ■

- $g$  es un morfismo de dga-coálgebras, es decir,  $g^{\otimes 2}\Delta = \Delta g$ . Esta propiedad se prueba de igual manera que la realizada anteriormente para la inyección. ■

## 2.3. Técnicas de Transferencia

Una de las preguntas que nos rondan la cabeza al hablar de  $A_\infty$ -estructuras es ver qué pasa con el producto tensorial entre ellas o con otras estructuras, ¿obtenemos una  $A_\infty$ -estructura? ¿qué operaciones la integran?

Así pues, demostraremos que el producto tensorial de  $A_\infty$ -estructuras con estructuras nos da lugar a  $A_\infty$ -estructuras y calcularemos las operaciones involucradas en el producto tensorial de dos  $A_\infty$ -estructuras como colofón de esta sección.

Igualmente, veremos que gracias a nuestro peculiar punto de vista de las  $A_\infty$ -estructuras, podemos inducir en el dg-módulo mayor (bajo ciertas condiciones) una  $A_\infty$ -estructura tal y como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 2.15.** *Dada  $C$  una  $A_\infty$ -coalgebra, ésta induce en  $\overline{B\tilde{\Omega}}(C)$  una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra.*

**Demostración:** Consideramos la contracción explícita dada por M. J. Jiménez [Jim03], cuyas fórmulas a grosso modo vienen descritas por:

$$f : \overline{B\tilde{\Omega}}(C) \longrightarrow C$$

$$f[\langle c \rangle] = c.$$

$$g(c) = \sum_{i \geq 0} \sum_{k_1, \dots, k_i \geq 2} \sum_{j_1, \dots, j_i} \pm [\langle \Delta_{k_i}^{j_i, 1}(\pi_{1,1}(h\delta)^{i-1}[\langle c \rangle]) \rangle$$

$$|\langle \Delta_{k_i}^{j_i, 2}(\pi_{1,1}(h\delta)^{i-1}[\langle c \rangle]) \rangle| \cdots |\Delta_{k_i}^{j_i, k_i}(\pi_{1,1}(h\delta)^{i-1}[\langle c \rangle]) \rangle|$$

$$|\langle \Delta_{k_{i-1}}^{j_{i-1}, 2}(\pi_{1,1}(h\delta)^{i-2}[\langle c \rangle]) \rangle| \cdots |\Delta_{k_{i-1}}^{j_{i-1}, k_{i-1}}(\pi_{1,1}(h\delta)^{i-2}[\langle c \rangle]) \rangle|$$

$$|\cdots| \langle \Delta_{k_1}^{j_1, 2} \rangle \cdots |\Delta_{k_1}^{j_1, k_1} c \rangle].$$

Si denotamos por  $\omega$  el elemento  $[\langle c_{1,1} | \cdots | c_{1,k(1)} \rangle | a_2 | \cdots | a_n]$ ,  $\phi$  nos da el valor

$$\phi : \overline{B\tilde{\Omega}}(C) \rightarrow \overline{B\tilde{\Omega}}(C),$$

$$\phi(\omega) =$$

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{k_1, \dots, k_i \geq 2} \pm [\langle \Delta_{k_i}^1(\pi_{1,1}(h\delta)^{i-1}h\omega) \rangle$$

$$|\langle \Delta_{k_i}^2(\pi_{1,1}(h\delta)^{i-1}h\omega) \rangle| \cdots |\Delta_{k_i}^{k_i}(\pi_{1,1}(h\delta)^{i-1}h\omega) \rangle|$$

$$|\langle \Delta_{k_{i-1}}^2(\pi_{1,1}(h\delta)^{i-2}h\omega) \rangle| \cdots |\Delta_{k_{i-1}}^{k_{i-1}}(\pi_{1,1}(h\delta)^{i-2}h\omega) \rangle| \cdots$$

$$|\langle \Delta_{k_1}^2 c_{1,1} \rangle \cdots |\Delta_{k_1}^{k_1} c_{1,1} \rangle | \langle c_{1,2} | \cdots | c_{1,k(1)} \rangle | a_2 \cdots | a_n].$$

Para probar que podemos inducir en el dg-módulo mayor una  $A_\infty$ -coálgebra, primero desuspendemos y aplicamos el módulo tensorial, obteniendo una nueva contracción

$$Ts^{-1}(\overline{\Omega}\widetilde{B}(C)) \rightarrow Ts^{-1}(C),$$

donde los morfismos que conforman la contracción son  $T(f)$ ,  $T(g)$ ,  $T(-\phi)$ .

Si perturbamos en el dg-módulo menor por la diferencial necesaria para tener la construcción cobar tilde, dicha diferencial se puede escribir como

$$\partial = \sum_{k \geq 2} \sum_{i=1}^k 1^{\otimes i-1} \otimes \downarrow \Delta_k \uparrow \otimes 1^{\otimes k-i},$$

donde  $\uparrow, \downarrow$  significan suspender y desuspender respectivamente en las dimensiones correspondientes.

Gracias al Lema de Perturbación Inverso 1.4, es claro que la diferencial perturbada en el dg-módulo mayor viene dada por

$$d_\partial = T(g)\partial T(f).$$

Por tanto, los  $\Delta'_i$ s que determinan la  $A_\infty$ -coálgebra vienen dados por las fórmulas (salvo el signo)

$$g^{\otimes ni} \Delta_i^* f^{\otimes n}$$

para cada elemento de grado simplicial  $n$ , donde

$$\Delta_k^* = \sum 1^{\otimes \lambda} \otimes \uparrow \Delta_k \downarrow \otimes 1^{\otimes n-\lambda-1}.$$

Es fácil ver que realmente se obtiene una  $A_\infty$ -coálgebra y que el coproducto inducido verifica la condición de asociatividad:

$$(\Delta_2 \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_2)\Delta_2 = 0. \quad \blacksquare$$

**Nota:** dada la complejidad de la notación en la demostración de los siguientes dos teoremas, hemos considerado oportuno denotar por  $c_{(n)}$  a las operaciones de grado  $n - 2$  de una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra arbitraria.

**Teorema 2.16.** *Dadas  $C$  una coálgebra y  $M$  una  $A_\infty$ -coálgebra, se puede inducir en el producto tensorial de  $C$  por  $M$  una  $A_\infty$ -coálgebra, la cual viene determinada sólo por las operaciones de la  $A_\infty$ -coálgebra de  $M$ . Explícitamente, dicha estructura viene dada por la fórmula:*

$$c_{(n)_{CM}} = c_{[n]_C} \ominus c_{(n)_M}.$$

Si denotamos por

$$\Delta^{[n]} = \sum_{i=0}^{n-1} 1^{\otimes i} \otimes \Delta \otimes 1^{\otimes n-i-2};$$

las operaciones  $c_{(n)M}$  son las operaciones de la  $A_\infty$ -coálgebra de  $M$ , mientras que  $c_{[n]C}$  vienen definidos por:

$$c_{[n]C} = \Delta^{[n]} \dots \Delta^{[2]}$$

y  $\ominus$  denota el *producto coordenada a coordenada* en el producto tensorial.

**Definición 2.8.** Dados dos morfismos

$$f = (f_1, \dots, f_t) : M_1 \otimes \dots \otimes M_s \rightarrow M_1 \otimes \dots \otimes M_t, \quad f_i : M_1 \otimes \dots \otimes M_s \rightarrow M_i$$

y

$$g = (g_1, \dots, g_t) : N_1 \otimes \dots \otimes N_s \rightarrow N_1 \otimes \dots \otimes N_t, \quad g_i : N_1 \otimes \dots \otimes N_s \rightarrow N_i$$

se define el *producto coordenada a coordenada* entre  $f$  y  $g$ ,  $f \ominus g$  como el morfismo

$$(M_1 \otimes \dots \otimes M_s) \otimes (N_1 \otimes \dots \otimes N_s) \rightarrow (M_1 \otimes N_1) \otimes \dots \otimes (M_t \otimes N_t)$$

dado por  $(f_1 \otimes g_1) \otimes \dots \otimes (f_t \otimes g_t)$ .

**Propiedades:**

- A dicho “producto” le imponemos que verifique la ley distributiva, es decir, dada  $f = f_1 + \dots + f_n, g = g_1 + \dots + g_n$ , entonces consideramos que  $f \ominus g = \sum_{i,j}^n f_i \ominus g_j$ .
- La composición conmuta con el producto coordenada a coordenada, es decir,

$$(f_1 \ominus g_1) \cdot (f_2 \ominus g_2) = (f_1 \cdot f_2) \ominus (g_1 \cdot g_2).$$

Introducimos este producto con el fin de simplificar las fórmulas en las demostraciones de los teoremas posteriores. También se podrían realizar siguiendo el convenio de Koszul sobre los signos, pero por supuesto con una complejidad muy superior.

**Demostración del teorema 2.16:**

- Debido a la definición es claro que  $c_{(n)C \otimes M}$  es una operación cuyo dominio es  $C \otimes M$  y la imagen es  $(C \otimes M)^n$  para todo  $n$ .
- Igualmente, debido a la definición,  $c_{(n)C \otimes M}$  es de grado  $n - 2$  para todo  $n$ .



- Por tanto, sólo faltaría probar que se verifica la fórmula

$$\sum_{n=1}^i \sum_{k=0}^{i-n} (-1)^{n+k+nk} (1^{\otimes i-n-k} \otimes c_{(n)} \otimes 1^{\otimes k}) c_{(i-n+1)} = 0.$$

Esta fórmula que es cierta gracias a las dos propiedades mencionadas anteriormente del producto coordinada a coordinada, es decir:

$$(1^{\otimes i-n-k} \otimes c_{(n)} \otimes 1^{\otimes k}) c_{(i-n+1)} = \{(1_C^{\otimes i-n-k} \otimes c_{[n]} \otimes 1_C^{\otimes k}) c_{[i-n+1]}\} \ominus \{(1_M^{\otimes i-n-k} \otimes c_{(n)} \otimes 1_M^{\otimes k}) c_{(i-n+1)}\}.$$

Y la suma anterior se “desdobla” en dos, por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^i \sum_{k=0}^{i-n} \{(1_C^{\otimes i-n-k} \otimes c_{[n]} \otimes 1_C^{\otimes k}) c_{[i-n+1]}\} \ominus \\ \sum_{n=1}^i \sum_{k=0}^{i-n} (-1)^{n+k+nk} \{(1_M^{\otimes i-n-k} \otimes c_{(n)} \otimes 1_M^{\otimes k}) c_{(i-n+1)}\} = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

**Corolario 2.17.** *El número de operaciones en la  $A_\infty$ -coálgebra inducida en  $C \otimes M$  es a lo sumo el mismo número de operaciones de  $M$ .*

**Teorema 2.18.** *Dadas  $C$  una coálgebra y  $M$  una  $A_\infty$ -coálgebra, el producto tensorial de  $C$  por  $M$  es una  $A_\infty$ -coálgebra cuya estructura viene determinada de forma canónica por la  $A_\infty$ -estructura descrita en el teorema anterior (salvo el signo).*

**Demostración:** Debido a que  $M$  es una  $A_\infty$ -coálgebra, sabemos que existe  $D$  coálgebra y una contracción entre  $D$  y  $M$  la cual induce de modo natural la  $A_\infty$ -coálgebra que  $M$  tenía de partida. Denotemos dicha contracción por la tupla  $(f, g, \phi) : D \Rightarrow M$ . En particular, si denotamos por

$$\Delta^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i 1^{\otimes i} \otimes \Delta_D \otimes 1^{\otimes n-i-2},$$

donde  $\Delta_D$  es el coproducto de  $D$ ; las operaciones de  $M$  se obtienen vía la contracción dados por las fórmulas:

$$c_{(n)M} = f^{\otimes n} \Delta^{(n)} \phi^{(n-1)} \dots \phi^{(2)} \Delta^{(2)} g;$$

donde  $\phi^{(i)}$  está definido por

$$\phi^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} 1^{\otimes k} \otimes \phi \otimes (gf)^{\otimes i-k-1}$$



Igualmente,  $C$  lo podemos ver como la contracción  $(1_C, 1_C, 0) : C \Rightarrow C$ . Por tanto, podemos construir la contracción producto tensorial,

$$(\tilde{f} = (1 \otimes f), \tilde{g} = (1 \otimes g), \tilde{\phi} = (1 \otimes \phi)) : C \otimes D \Rightarrow C \otimes M,$$

la cual induce de modo natural la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra existente en  $C \otimes M$ . Las operaciones se pueden calcular vía la fórmula:

$$c_{(n)C \otimes M} = \tilde{f}^{\otimes n} \Delta^{(n)} \tilde{\phi}^{(n-1)} \dots \tilde{\phi}^{(2)} \Delta^{(2)} \tilde{g};$$

donde

$$\Delta^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i 1^{\otimes i} \otimes \Delta \otimes 1^{\otimes n-i-2}, \quad \text{donde } \Delta = (1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_C \otimes \Delta_D).$$

$$\tilde{\phi}^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} 1^{\otimes k} \otimes \tilde{\phi} \otimes (\tilde{g}\tilde{f})^{\otimes i-k-1}.$$

**Propiedades:**

- $\tilde{f}^n = (1 \otimes f)^n = (1 \otimes f) \cdots (1 \otimes f) = 1^{\otimes n} \ominus f^{\otimes n};$
- $\tilde{g}^n = (1 \otimes g)^n = (1 \otimes g) \cdots (1 \otimes g) = 1^{\otimes n} \ominus g^{\otimes n};$
- $\tilde{\phi}^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} 1^{\otimes k} \otimes \tilde{\phi} \otimes (\tilde{g}\tilde{f})^{\otimes i-k-1} = \sum_{k=0}^{i-1} 1^{\otimes k} \otimes (1 \otimes \phi) \otimes (1 \otimes gf)^{\otimes i-k-1} = 1^i \ominus \phi^{(i)};$
- Teniendo en cuenta que  $\Delta = (1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_C \otimes \Delta_D) = \pm \Delta_C \ominus \Delta_D$ , tenemos que

$$\Delta^{(n)} = \pm \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} 1^{\otimes i} \otimes \Delta_C \otimes 1^{\otimes n-i-2} \right\} \ominus \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i 1^{\otimes i} \otimes \Delta_D \otimes 1^{\otimes n-i-2} \right\}.$$

Por tanto, la  $A_\infty$ -coálgebra inducida por contracción en  $C \otimes M$ ,  $\{c_{(n)}\}_{n \geq 2}$ , coincide salvo signo con  $c_{[n]C} \ominus c_{(n)M}$ . ■

**Corolario 2.19.** Sean  $C, C', C''$  coálgebras tales que existen  $j : C \rightarrow C'$  un isomorfismo de coálgebras y  $C'' \rightarrow M$  una contracción de  $C''$  al dg-módulo  $M$ . Entonces, la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra de  $C' \otimes M$  viene determinada exclusivamente por las operaciones de  $M$ , es decir,

$$c_{(n)}(u \otimes v) = c_{[n]}(u) \ominus c_{(n)}(v).$$



**Lema 2.20.** *Sea  $M$  una  $A_\infty$ -coálgebra, con operaciones distintas de cero  $\Delta_2$  y  $\Delta_p$ . Entonces si perturbamos la diferencial en  $\tilde{\Omega}(M)$  por la diferencial inducida por  $-\Delta_p$  de modo que convertimos a  $M$  en una coálgebra, inducimos en  $A$  una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra, cuyas operaciones son de nuevo  $\Delta_2$  y  $\Delta_p$ .*

**Demostración:** La primera parte, es trivial, es claro que si a  $M$  le restamos  $-\Delta_p$ , se convierte en una coálgebra, así pues sólo tenemos que probar que  $A$  se convierte en una  $A_\infty$ -coálgebra cuyas únicas operaciones distintas de cero son  $\Delta_2$  y  $\Delta_p$ . Esta última afirmación es una aplicación inmediata del lema de perturbación inverso 1.4: la diferencial inducida en el dg-módulo mayor viene dada por la fórmula

$$d_\delta = g\delta f. \quad \blacksquare$$

Estos resultados previos, nos animan a buscar las fórmulas explícitas de la  $A_\infty$ -estructura del producto tensorial de dos  $A_\infty$ -estructuras, así pues mostramos a continuación uno de los teoremas más importantes de este capítulo.

**Teorema 2.21.** *Dadas  $M$  y  $M'$  dos  $A_\infty$ -álgebras dadas respectivamente por sendas contracciones  $r_1 : A \rightarrow M$ ,  $r_2 : A' \rightarrow M'$ , la estructura de  $A_\infty$ -álgebra del producto tensorial de  $M$  con  $M'$  viene determinada exclusivamente por las operaciones componentes de la  $A_\infty$ -álgebra de  $M$  y las correspondientes de  $M'$ .*

**Demostración:** La demostración de este teorema se basa básicamente en las propiedades del “producto coordenada a coordenada” definido anteriormente junto con el lema de perturbación básico 1.2, el cual es aplicado como caso particular, para la demostración del teorema 2.5.

Dadas las contracciones  $r_1$  y  $r_2$ , podemos definir una nueva contracción,  $r$ , de  $A \otimes A'$  hacia el dg-módulo  $M \otimes M'$ , definida por la regla del producto tensorial.

Por tanto, podemos establecer una nueva contracción

$$T(r) : T(s(A \otimes A')) \rightarrow T(s(M \otimes M'))$$

y aplicar el lema de perturbación básico, utilizando como dato de perturbación la diferencial simplicial definida por la fórmula:

$$d_s[a_1 \otimes a'_1 | \dots | a_n \otimes a'_n] = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{e_i} [a_1 \otimes a'_1 | \dots | \mu_{(A \otimes A')}(a_i \otimes a'_i, a_{i+1} \otimes a'_{i+1}) | \dots | a_n \otimes a'_n]$$

debemos destacar aquí que el producto  $\mu_{(A \otimes A')}$  está definido por la fórmula

$$\mu_{(A \otimes A')} = (\mu_A \otimes \mu_{A'})(1 \otimes T \otimes 1),$$

y por tanto coincide (salvo signo) con  $\mu_A \ominus \mu_{A'}$ , aplicados ambos morfismos sobre la misma componente  $i$ -ésima a la vez.

Por tanto, aplicar  $d_s$  como dato de perturbación a la contracción  $T(r)$  es equivalente a aplicar  $d_{s_1} \ominus d_{s_2}$ , donde  $d_{s_1}$  es la diferencial simplicial de  $T(s(A))$  y  $d_{s_2}$  es la diferencial simplicial de  $T(s(A'))$ .

Además es claro que

- $T(f) = T(f_1 \otimes f_2) \simeq T(f_1) \ominus T(f_2)$ .
- $T(g) = T(g_1 \otimes g_2) \simeq T(g_1) \ominus T(g_2)$ .
- $T(\phi) = T(1 \otimes \phi_2 + \phi_1 \otimes g_2 f_2)$  que se puede separar como

$$T(1) \ominus T(\phi_2) + T(\phi_1) \ominus T(g_2 f_2).$$

Por tanto, aplicando el lema de perturbación básico, la diferencial inducida en el dg-módulo menor  $M \otimes M'$  viene dada por la fórmula

$$\begin{aligned} d_\infty &= T(f) d_s \sum_{i \geq 0} [T(\phi) d_s]^i T(g) \\ &= [T(f_1) \ominus T(f_2)] [d_{s_1} \ominus d_{s_2}] \circ \\ &\quad \circ \sum_{i \geq 0} \left\{ T(1) d_{s_1} \ominus T(\phi_2) d_{s_2} + T(\phi_1) d_{s_1} \ominus T(g_2 f_2) d_{s_2} \right\}^i T(g_1 \ominus g_2) \end{aligned}$$

Si examinamos la suma

$$S_i = \sum_{i \geq 0} \left\{ T(1) d_{s_1} \ominus T(\phi_2) d_{s_2} + T(\phi_1) d_{s_1} \ominus T(g_2 f_2) d_{s_2} \right\}^i$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} S_i &= (T(1) d_{s_1} \ominus T(\phi_2) d_{s_2})^i + (T(\phi_1) d_{s_1} \ominus T(g_2 f_2) d_{s_2})^i + \\ &\quad \sum_{k=1}^{i-1} \left[ \sigma_k \{ (T(1) d_{s_1})^k (T(\phi_1) d_{s_1})^{i-k} \} \right] \ominus \left[ \sigma_k \{ (T(\phi_2) d_{s_2})^k (T(g_2 f_2) d_{s_2})^{i-k} \} \right] \end{aligned}$$

donde  $\sigma_k$  indica todas las permutaciones posibles en el producto tensorial.

Por tanto, las operaciones de la  $A_\infty$ -álgebra de  $M \otimes M'$  vienen dadas por la fórmula

$$\begin{aligned} \mu_{(n)} &= \mu_{[n]} \ominus \mu_{(n)} + \mu_{(n)} \ominus \mu_{[n]} + \\ &\quad \sum_{i+j=n+2} \left\{ \sigma_k [\mu_{[k]} \otimes \mu_i \otimes \mu_{[j-k]}] \right\} \ominus \left\{ \sigma_k [\mu_{[k]} \otimes \mu_j \otimes \mu_{[i-k]}] \right\} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



## 2.4. Técnicas de Control de $A_\infty$ -estructuras

Una de las preguntas naturales que nos surge al hablar de  $A_\infty$ -estructuras es ver qué pasa si modificamos levemente alguna de las diferenciales integrantes en la contracción canónica de partida que nos induce dicha estructura.

Por tanto, en esta última sección estableceremos diversos teoremas que nos permitan afirmar bajo qué condiciones podemos modificar la naturaleza de una  $A_\infty$ -estructura, añadiendo o eliminando operaciones dependiendo del caso.

**Teorema 2.22.** *Sea  $M$  una  $A_\infty$ -álgebra, dada por la contracción  $r : \{A, M, f, g, \phi\}$  y  $\delta$  una dato de perturbación de  $r$ . Entonces, si*

$$f\delta(\phi\delta)^n g = 0, \quad \forall n \geq 1;$$

la  $A_\infty$ -estructura de  $(M, d_M + d_\delta)$  queda invariante por dicha perturbación, salvo  $\mu_2$ , el cual viene dado por la fórmula  $\mu_2 = f\mu_A(g_\delta)^{\otimes 2}$ .

**Demostración:** La demostración es inmediata teniendo en cuenta el lema de perturbación básico, así como las fórmulas de las operaciones inducidas en  $M$  gracias a la contracción establecida en el teorema 2.1. ■

**Nota:** Es importante destacar que el teorema previo sigue siendo si imponemos la condición más restrictiva  $\phi\delta g = 0$ .

**Teorema 2.23.** *Sean  $A$  y  $A'$  dos dga-álgebras conmutativas y  $r_{B\otimes}$  la contracción, establecida en la sección primera, entre  $\bar{B}(A \otimes A')$  y  $\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A')$ . Si perturbamos la diferencial del dga-módulo mayor por una perturbación  $\delta$ , tal que es una derivación, una coderivación y lleva elementos donde una de las dos coordenadas es la unidad de una de las dos álgebras (es decir, todas las componentes son  $1 \otimes a'$  y/o  $a \otimes 1$ ) en elementos con una única componente de este tipo, entonces el dga-módulo menor hereda una verdadera estructura de coálgebra.*

$$\{(\bar{B}(A \otimes A'), d_B + \delta, \Delta_B), (\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A'), d_{\otimes B} + d_\delta, \tilde{\Delta}_{\otimes B}), f_\delta, g_\delta, \phi_\delta\}$$

donde el coproducto viene dado por la fórmula

$$\tilde{\Delta}_{\otimes B} = (f_B \otimes f_B)\Delta_B g_\delta.$$

**Demostración:** Este teorema se puede probar como aplicación inmediata del teorema dual al teorema 2.22. De hecho, veamos que en las condiciones que hemos descrito, se verifica la fórmula

$$f\delta(\phi\delta)^n g = 0, \quad \forall n \geq 1;$$

Para ello, si tenemos en cuenta la definición de la contracción Bar 2.6, descrita en la primera parte de este capítulo, sabemos que la imagen de  $g$  está formada por elementos en los que una de sus coordenadas es unidad de  $A$  o de  $A'$ .

Por hipótesis, sabemos que la perturbación sobre elementos de la forma anteriormente descrita, devuelve elementos con una única componente  $a \otimes 1$  ó  $1 \otimes a'$ .

Ahora bien, de la definición explícita de  $\phi$  (ver teorema 2.6), se deduce que al aplicarlo sobre la imagen de  $\delta$ , se obtienen elementos cuyas coordenadas son todas de la forma  $1 \otimes a'$  ó  $a \otimes 1$ .

Por tanto,  $(\phi\delta)^n$ , para  $n \geq 1$  devuelve elementos con coordenadas  $1 \otimes a'$  y/o  $a \otimes 1$ .

Así pues,  $\delta(\phi\delta)^n g^{\otimes n}$ , para  $n \geq 1$  genera elementos con una única coordenada de la forma  $1 \otimes a'$  o  $a \otimes 1$ , por lo que  $f\delta(\phi\delta)^n g^{\otimes n} = 0$ ,  $\forall n \geq 1$ . ■

Como aplicación de dicho teorema, consideremos como anillo base  $\mathbb{Z}$  localizado en  $p$ ,  $\mathbb{Z}_{(p)}$ , con  $p$  un número primo.

**Proposición 2.24.** [Rea00] Sean  $n$  un número natural y  $p$  un número primo. Entonces, existe un isomorfismo de dga-álgebras entre el álgebra polinomial modificada  $\Gamma(u, 2n)$  y el producto tensorial

$$\tilde{\otimes}_{i \geq 0} Q_{(p)}(u_i, 2np^i).$$

Como  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -módulo, este dga-módulo coincide con el producto tensorial usual, sin embargo, el producto viene dado por la fórmula

$$u_i^k u_j^h = \begin{cases} u_i^k \otimes u_j^h & \text{si } i \neq j; \\ u_i^{k+h} & \text{si } i = j \text{ y } k + h < p; \\ -pu_i^t u_{i+1} & \text{si } i = j \text{ y } k + h = p + t. \end{cases}$$

En particular, las fórmulas explícitas del isomorfismo son:

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma(u, 2n) &\rightarrow \tilde{\otimes}_{i \geq 0} Q_{(p)}(u_i, 2np^i) \\ \varphi(\gamma_k(u)) &= \frac{(-p)^{\sum_{i=0}^r k_i} S_p(i)}{k!} u_0^{k_0} \otimes \dots \otimes u_r^{k_r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \tilde{\otimes}_{i \geq 0} Q_{(p)}(u_i, 2np^i) &\rightarrow \Gamma(u, 2n) \\ \varphi^{-1}(u_n^k) &= \frac{(-1)^{nk} k (kp^n - 1)!}{p^{k S_p(n) - n}} \gamma_{kp^n}(u) \end{aligned}$$

donde  $k = k_0 + k_1p + \cdots + k_r p^r$ , ( $0 \leq k_i < p$ ), es la expresión  $p$ -ádica de  $k$  y  $S_p(n)$  está definido como  $S_p(n) = \frac{p^n - 1}{p - 1}$  para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Demostración:** Para probar que  $\varphi$  es inverso de  $\varphi^{-1}$  es suficiente con mencionar que los números  $\frac{(-1)^{nk} k (kp^n - 1)!}{p^{kS_p(n) - n}}$ ,  $\frac{(-p)^{\sum_{i=0}^r k_i S_p(i)}}{k!}$  son inversos el uno del otro en  $\mathbb{Z}_{(p)}$ . ■

**Corolario 2.25.** Si consideramos como anillo base  $\mathbb{Z}_{(p)}$ , entonces se puede establecer el isomorfismo de dga-álgebras de Hopf

$$\bar{B}(\Gamma(u, 2n)) \rightarrow \bar{B}(\tilde{\otimes}_{i \geq 0} Q_{(p)}(u_i, 2np^i)).$$

El producto definido en la proposición anterior induce una perturbación en la construcción bar, y por tanto, podríamos aplicar el teorema 2.23, obtenemos una nueva contracción

**Corolario 2.26.** Dada  $\Gamma$  el álgebra polinomial modificada, con coeficientes en  $\mathbb{Z}_{(p)}$ , existe una contracción

$$\bar{B}(\Gamma(u, 2n)) \rightarrow \otimes_{i \geq 0} \bar{B}(Q_{(p)}(u_i, 2np^i)),$$

donde el coproducto del dg-módulo menor ha sido modificado, pero no da lugar a una  $A_\infty$ -coálgebra.

Este resultado sería interesante utilizarlo para obtener una mayor información acerca de la estructura de homología de los Espacios de Eilenberg-Mac Lane sobre  $\mathbb{Z}_{(p)}$ , con un razonamiento análogo al que mostramos en el capítulo cuarto sobre  $\mathbb{Z}_p$ .

## 2.5. Problemas abiertos

En esta última sección mostramos diversos problemas relacionados, a los cuales no damos una respuesta expresa, por lo que distintas líneas de investigación se abren con respecto a estos aspectos.

Como ya hemos ido mencionando a lo largo de este capítulo, nuestra filosofía es la de controlar lo máximo posible el comportamiento de las  $A_\infty$ -estructuras inducidas por contracción, por lo que todo tipo de avance en este sentido sería bien recibido.

Igualmente, es importante encontrar ejemplos que tengan que ver con cuestiones álgebro-topológicas que muestren las operaciones explícitas de los teoremas antes mencionados.

# Capítulo 3

## $A_\infty$ -Álgebras de Hopf

El propósito de este capítulo es el definir un modelo combinatorio-algebraico adecuado para el cálculo de las  $A_\infty$ -álgebras de Hopf, dar una noción exacta de su significado, así como especificar las operaciones involucradas en dicha estructura.

Nuestro punto de partida está inspirado en el trabajo de M. J. Jiménez ([Jim03]), en el cual, como ya hemos mencionado anteriormente, se muestran los modelos de las  $A_\infty$ -álgebras y  $A_\infty$ -coálgebras en términos de equivalencias de homotopía. De hecho, en el trabajo se prueba que dada una álgebra y una contracción, induce una  $A_\infty$ -álgebra en el dg-módulo menor.

Por tanto, si una álgebra de Hopf se define como una álgebra, una coálgebra, con una relación estrecha entre el coproducto y el producto, el plantearse qué estructura induce por perturbación sobre un dg-módulo menor es nuestro primer objetivo.

Una respuesta concisa a la cuestión no es nada fácil, pero intuitiva y naturalmente, desde nuestro punto de vista, una  $A_\infty$ -álgebra de Hopf debería venir descrita por una contracción de una álgebra de Hopf hacia un dg-módulo. Así pues, varias preguntas surgen de modo natural: si una  $A_\infty$ -álgebra de Hopf está determinada por una contracción tan especial,

- ¿cuales son las operaciones que la definen?
- ¿que tienen que ver dichas operaciones con las estructuras de  $A_\infty$ -álgebra y  $A_\infty$ -coálgebra subyacentes?

En este capítulo construiremos un dg-modulo asociado a cualquier dg-álgebra de Hopf, de modo que dada una contracción, podamos extraer del dg-módulo menor las operaciones integrantes en la estructura de  $A_\infty$ -álgebra, de  $A_\infty$ -coálgebra y las operaciones que miden la noción generalizada de “relación de Hopf” salvo homotopía.



### 3.1. Representación matricial del módulo tensorial asociado a una álgebra de Hopf

Pasemos pues a detallar la construcción de un dg-módulo asociado a una álgebra de Hopf.

Sea  $(H, d, \mu, \Delta, \eta, \xi)$  una dg-álgebra de Hopf aumentada y consideremos el producto tensorial de  $H$  consigo misma  $p \cdot q$ -veces, es decir,  $(H^{\otimes p})^{\otimes q}$  (también lo denotado por  $H^{p,q}$ ).

**Definición 3.1.** Se define el módulo *Bar-Cobar* de  $H$ ,  $BC(H)$ , como el módulo diferencial graduado  $\{(H^{\otimes p})^{\otimes q}\}_{p \geq 0, q \geq 0}$ . Un elemento  $a \in (H^{\otimes p})^{\otimes q}$  viene descrito por una matriz con  $p$ -filas y  $q$ -columnas.

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Se dirá homogéneo si todos sus componentes  $a_{ij}$  son elementos homogéneos de  $H$ .

El *grado tensorial* de  $a = (a_{ij})$  está determinado por la suma

$$|a|_t = \sum_{i=1, j=1}^{p, q} |a_{ij}|;$$

el *grado simplicial* de  $a$  es el número de filas, i.e.,

$$|a|_s = p$$

y el *grado cosimplicial* se define como el número de columnas

$$|a|_c = q;$$

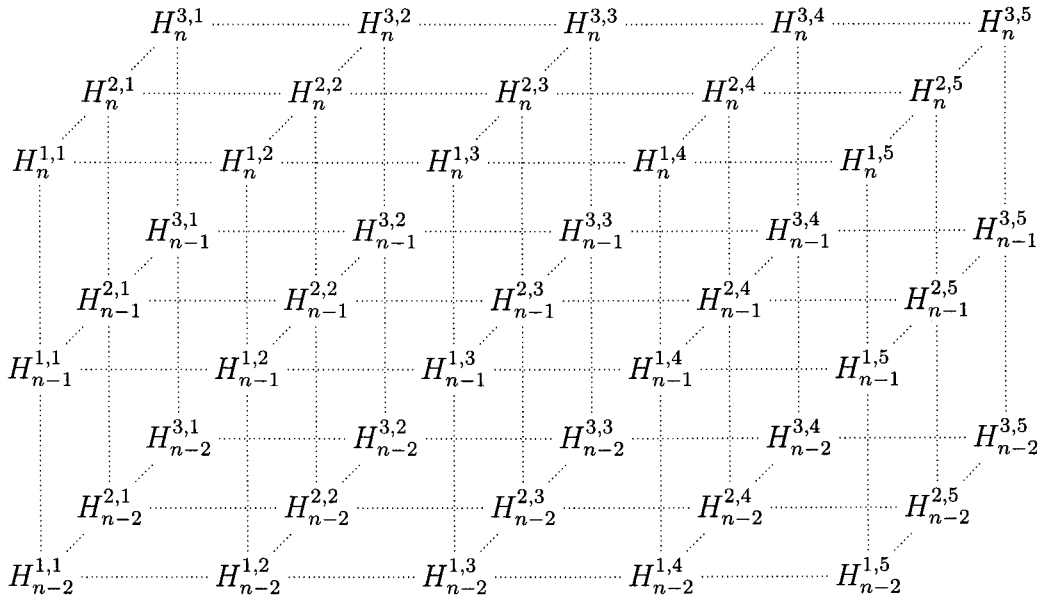
el *grado total* de  $a$  se define como

$$|a| = |a|_t + |a|_s - |a|_c = |a|_t + p - q.$$

En particular, si tenemos en cuenta el grado tensorial,  $BC(H)$  está determinado por



$\{BC(H)\}_{(p,q,n)} = (H_n^{\otimes p})^{\otimes q}$ . Además, lo podemos visualizar como el octante



### 3.1.1. La estructura diferencial de BC(H)

Dado  $BC(H)$  el tricomplejo definido por

$$\{BC(H)\}_{(p,q,n)} = (H_n^{\otimes p})^{\otimes q},$$

vamos a considerar tres diferenciales asociadas a él.

#### La diferencial tensorial de BC(H)

La diferencial tensorial  $d_t: H_n^{p,q} \rightarrow H_{n-1}^{p,q}; \quad d_t = \sum_{i=1, j=1}^{p,q} d_{i,j}$ .

$$d_{ij} = -(-1)^{P(i,j)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & d(a_{ij}) & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

$$P(i, j) = \sum_{k \in i \cup (k=i, l < j)} |a_{kl}| + (i - 1) - (j - 1)$$



**Proposición 3.1.** Con la definición anterior,  $d_t$  es una diferencial en  $BC(H)$ .

**Demostración:** Veamos que  $d_t^2 = 0$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \rightarrow - \sum_{i=1, j=1}^{p,q} (-1)^{P(i,j)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & d(a_{ij}) & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

$\downarrow d_t$

$$- \sum_{k=1, l=1}^{p,q} (-1)^{P(k,l)} \left[ - \sum_{i=1, j=1}^{p,q} (-1)^{P(i,j)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & d(a_{kl}) & \cdots & a_{kq} \\ a_{i1} & \cdots & d(a_{ij}) & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \right]$$

Para ver que se cancelan dos a dos los elementos de esta suma, diferenciamos tres casos,  $(i, j) = (k, l)$ ,  $(i, j) > (k, l)$  o  $(i, j) < (k, l)$  (donde el orden escogido es el lexicográfico).

- $(i, j) = (k, l)$ : trivialmente  $d_t^2 = 0$ .
- $(i, j) > (k, l)$ : tenemos que comparar el signo generado por  $P(i, j) + P(k, l)$  en ambos casos.

$$d_{kl}d_{ij} \rightarrow P(i, j) + P(k, l) = \sum_{s < i \cup (s=i, t < j)} |a_{st}| + (i-1) - (j-1) +$$

$$\sum_{s < k \cup (s=k, t < l)} |a_{st}| + (k-1) - (l-1)$$

$$d_{ij}d_{kl} \rightarrow P(i, j) + P(k, l) = \sum_{s < i \cup (s=i, t < j)} |a_{st}| + (i-1) - (j-1) +$$

$$\sum_{s < k \cup (s=k, t < l)} |a_{st}| + (k-1) - (l-1)$$

Es en esta segunda suma, donde aparece  $|d(a_{kl})|$  que es igual a  $|a_{kl}| - 1$ , por tanto, ambas sumas son de signos opuestos.

- $(i, j) < (k, l)$ : es análogo al caso previo. ■

**La diferencial simplicial de BC(H)**

La diferencial simplicial  $d_s: H_n^{p,q} \rightarrow H_n^{p-1,q}$ .

$$d_s: H_n^{p,q} \rightarrow H_n^{p-1,q}, \quad d_s = \sum_{i=0}^p (-1)^i \delta_i$$

$$\delta_0 = \xi(a_{11}) \cdots \xi(a_{1q}) \cdot \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

$$\delta_p = (-1)^{sg_B(p)} \xi(a_{p1}) \cdots \xi(a_{pq}) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p-1,1} & \cdots & a_{p-1,q} \end{pmatrix}$$

$$\delta_k, \quad 1 \leq k \leq p-1,$$

$$\delta_k = (-1)^{sg(k,k+1)+sg_B(k)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu(a_{k1}, a_{k+1,1}) & \cdots & \mu(a_{kq}, a_{k+1,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

donde

$$sg(k, k+1) = |a_{k+1,1}|(|a_{k,2}| + \cdots + |a_{k,q}|) \\ + |a_{k+1,2}|(|a_{k,3}| + \cdots + |a_{k,q}|) + \cdots + |a_{k+1,q-1}| |a_{k,q}|$$

$$sg_B(k) = \sum_{j=1, l=1}^{k,q} |a_{jl}|$$

**Proposición 3.2.** Con la definición anterior,  $d_s$  es una diferencial en  $BC(H)$ . De hecho, fijados los grados cosimplicial y tensorial,  $H_n^{*,q}$  tiene estructura de conjunto simplicial.

**Demostración:** Veamos que  $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$ , si  $i < j$ , por lo que automáticamente habremos probado la estructura simplicial. Por tanto, directamente obtendremos que  $d_s = \sum_{i=0}^p (-1)^i \delta_i$  es una diferencial. Para ello, consideraremos tres casos:

- $i = 0, 0 < j < p,$
- $0 < i < p, 0 < j < p,$

- $0 < i < p, j = p.$

$$\boxed{i = 0, 0 < j < p \Rightarrow \delta_0 \delta_j = \delta_{j-1} \delta_0}$$

Por un lado tenemos

$$\delta_0 \delta_j \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{s_1} \xi(a_{11}) \cdots \xi(a_{1q}) \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu(a_{j,1}, a_{j+1,1}) & \cdots & \mu(a_{j,n}, a_{j+1,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Por otra parte

$$\delta_0 \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{s_2} \xi(a_{11}) \cdots \xi(a_{1q}) \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu(a_{j,1}, a_{j+1,1}) & \cdots & \mu(a_{j,n}, a_{j+1,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  vienen dados por las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} s_1 &= sg_B(j) + sg(j, j+1) \\ s_2 &= sg_B(j-1) + sg(j-1, j) \end{aligned}$$

el exponente  $s_1$  es igual a  $s_2$  gracias a dos hechos:

- $sg(j-1, j)$  del segundo sumando es igual a  $sg(j, j+1)$  del primero, dado que es el signo de las permutaciones de los elementos  $\{a_{j1}, \dots, a_{jq}\}, \{a_{j+1,1}, \dots, a_{j+1,q}\}$  en ambos casos.
- En el segundo sumando tenemos  $sg_B(j-1) = \sum_{m=2, l=1}^{j,q} |a_{ml}|$  mientras que en el primero  $sg_B(j-1) = \sum_{m=1, l=1}^{j,q} |a_{ml}|$ , que son iguales si y solo si  $|a_{1i}| = 0$  para todo  $i$ . En caso de que exista  $i$  tal que  $|a_{1i}| > 0$ , ambos sumandos son cero.

$$\boxed{0 < i < p, 0 < j < p \Rightarrow \delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i}$$

Por un lado tenemos

$$\delta_i \delta_j \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{s_1} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu(a_{i,1}, a_{i+1,1}) & \cdots & \mu(a_{i,n}, a_{i+1,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ \mu(a_{j,1}, a_{j+1,1}) & \cdots & \mu(a_{j,n}, a_{j+1,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Por otra parte

$$\delta_{j-1} \delta_i \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{s_2} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu(a_{i,1}, a_{i+1,1}) & \cdots & \mu(a_{i,n}, a_{i+1,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ \mu(a_{j,1}, a_{j+1,1}) & \cdots & \mu(a_{j,n}, a_{j+1,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  vienen dados por las fórmulas siguientes:

$$s_1 = \sum_{m=1, l=1}^{j, q} |a_{ml}| + sg(j, j+1) + \sum_{m=1, l=1}^{i, q} |a_{ml}| + sg(i, i+1)$$

$$s_2 = \sum_{m=1, l=1}^{i, q} |a_{ml}| + sg(i, i+1) + \sum_{m=1, l=1}^{j-1, q} |a_{ml}| + sg(j-1, j)$$

En  $\sum_{m=1, l=1}^{j-1, q} |a_{ml}|$  de  $s_2$ , se tiene que la fila  $i$ -ésima está compuesta por la suma de los grados de  $a_{ik}$  y  $a_{i+1, k}$ , de ahí que ambos signos sean iguales.

$$\boxed{0 < i < p, j = p \Rightarrow \delta_i \delta_p = \delta_{p-1} \delta_i}$$

Por un lado tenemos

$$\delta_i \delta_p \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{s_1} \xi(a_{p1}) \cdots \xi(a_{pq}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu(a_{i,1}, a_{i+1,1}) & \cdots & \mu(a_{i,n}, a_{i+1,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p-1,1} & \cdots & a_{p-1,q} \end{pmatrix}$$



Por otro lado

$$\delta_{p-1}\delta_i \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{s_2} \xi(a_{p1}) \cdots \xi(a_{pq}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu(a_{i,1}, a_{i+1,1}) & \cdots & \mu(a_{i,n}, a_{i+1,q}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p-1,1} & \cdots & a_{p-1,q} \end{pmatrix}$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  vienen dados por las fórmulas siguientes:

$$s_1 = \sum_{m=1, l=1}^{p, q} |a_{ml}| + \sum_{m=1, l=1}^{i, q} |a_{ml}| + sg(i, i+1)$$

$$s_2 = \sum_{m=1, l=1}^{p-1, q} |a_{ml}| + \sum_{m=1, l=1}^{i, i+1} |a_{ml}| + sg(i, i+1)$$

En  $\sum_{m=1, l=1}^{p-1, q} |a_{ml}|$  de  $s_2$ , se tiene que la fila  $i$ -ésima está compuesta por la suma de los grados de  $a_{ik}$  y  $a_{i+1, k}$ , de ahí que ambos signos sean iguales.

Por tanto, acabamos de probar que  $\{\delta_i\}_{i=0}^p$  da lugar a una estructura simplicial, por lo que  $d_s = \sum_i (-1)^i \delta_i$  es una diferencial. ■

**La diferencial cosimplicial de BC(H)**

La diferencial cosimplicial  $d_c: H_n^{p,q} \rightarrow H^{p,q+1}$ ;  $d_c = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \delta^i$

$$\delta^0 = \begin{pmatrix} \eta(1) & a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta(1) & a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

$$\delta^{q+1} = (-1)^{sg_B(q+1)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \eta(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} & \eta(1) \end{pmatrix}$$

$$\delta^k, \quad 1 \leq k \leq q,$$

$$\delta^k = (-1)^{sg_C(k)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & \Delta(a_{1,k}) & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{p,k-1} & \Delta(a_{p,k}) & a_{p,k+1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

donde

$$sg_C(k) = \sum_{j=1, l=1}^{p,k-1} |a_{jl}|$$

**Proposición 3.3.** Con la definición anterior,  $d_c$  es una diferencial en  $BC(H)$ . De hecho, fijados los grados simplicial y tensorial,  $H_n^{p,*}$  tiene estructura de conjunto cosimplicial.

**Demostración:** Veamos que  $\delta^j \delta^i = \delta^i \delta^{j-1}$ , si  $i < j$ , por lo que automáticamente habremos probado la estructura cosimplicial. Por tanto, directamente tenemos que  $d_c = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \delta^i$  es una diferencial. Para ello, consideraremos tres casos:

- $i = 0, 0 < j < q + 2,$
- $0 < i < q + 1, 0 < j < q + 2,$
- $0 < i < q + 1, j = q + 2.$

$$\boxed{i = 0, 0 < j < q + 2 \Rightarrow \delta^j \delta^0 = \delta^0 \delta^{j-1}}$$

Por un lado

$$\delta^j \delta^0 \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{\sum_{m=1, l=1}^{p,j-2}} \begin{pmatrix} \eta(1) & a_{11} & \cdots & \Delta(a_{1,j-1}) & a_{1q} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \eta(1) & a_{p,1} & \cdots & \Delta(a_{p,j-1}) & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Por otra parte

$$\delta^0 \delta^{j-1} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{\sum_{m=1, l=1}^{p, j-2}} \begin{pmatrix} \eta(1) & a_{11} & \cdots & \Delta(a_{1, j-1}) & a_{1q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \eta(1) & a_{p,1} & \cdots & \Delta(a_{p, j-1}) & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{0 < i < q + 1, 0 < j < q + 2 \Rightarrow \delta^j \delta^i = \delta^i \delta^{j-1}}$$

Por un lado

$$\delta^j \delta^i \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{s_1} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \Delta(a_{1,i}) & \cdots & \Delta(a_{1, j-1}) & a_{1q} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & \Delta(a_{p,i}) & \cdots & \Delta(a_{p, j-1}) & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Por otra parte

$$\delta^i \delta^{j-1} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{s_2} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \Delta(a_{1,i}) & \cdots & \Delta(a_{1, j-1}) & a_{1q} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{p-1,1} & \cdots & \Delta(a_{p,i}) & \cdots & \Delta(a_{p, j-1}) & a_{p-1,q} \end{pmatrix}$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  vienen dados por las mismas fórmulas

$$s_1 = \sum_{m=1, l=1}^{p, i-1} |a_{ml}| + \sum_{m=1, l=1}^{p, j-2} |a_{ml}|$$

$$s_2 = \sum_{m=1, l=1}^{p, i-1} |a_{ml}| + \sum_{m=1, l=1}^{p, j-2} |a_{ml}|$$

$$\boxed{0 < i < q + 1, j = q + 2 \Rightarrow \delta^{q+2} \delta^i = \delta^i \delta^{q+1}}$$

Por un lado

$$\delta^{q+2} \delta^i \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{s_1} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \Delta(a_{1,i}) & \cdots & a_{1q} & \eta(1) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & \Delta(a_{p,i}) & \cdots & a_{p,q} & \eta(1) \end{pmatrix}$$

Por otra parte

$$\delta^i \delta^{q+1} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (-1)^{s_2} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \Delta(a_{1,i}) & \cdots & a_{1q} & \eta(1) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & \Delta(a_{p,i}) & \cdots & a_{p,q} & \eta(1) \end{pmatrix}$$



donde  $s_1$  y  $s_2$  vienen dados por las mismas fórmulas

$$s_1 = \sum_{m=1, l=1}^{p, i-1} |a_{ml}| + \sum_{m=1, l=1}^{p, q} |a_{ml}|$$

$$s_2 = \sum_{m=1, l=1}^{p, i-1} |a_{ml}| + \sum_{m=1, l=1}^{p, q} |a_{ml}|$$

### Propiedades de compatibilidad entre las diferenciales

Una vez introducidas las tres diferenciales en  $BC(H)$ , pasemos a detallar algunos resultados de compatibilidad entre ellas a la hora de componerlas en uno u otro órdenes.

**Proposición 3.4.**  $d_s d_t = -d_t d_s$ .

**Demostración:** Consideremos  $a \in H_n^{p,q}$ , entonces se tiene que  $d_t d_s$  sobre  $a$  es la suma

$$d_t d_s(a) =$$

$$(I) - \sum_{i,j} (-1)^{P(i,j)} \xi(a_{11}) \cdots \xi(a_{1q}) \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & d(a_{ij}) & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} +$$

$$(II) - \sum_{i,j} (-1)^{P(i,j)} \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{sg_B(k)+sg(k,k+1)+k} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & d(a_{ij}) & \vdots \\ \mu(a_{k1}a_{k+1,1}) & & \mu(a_{kq}a_{k+1,q}) \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} +$$

$$(III) - \sum_{i,j} (-1)^{P(i,j)+sg_B(p)+p} \xi(a_{p1}) \cdots \xi(a_{pq}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & d(a_{ij}) & \vdots \\ a_{p-1,1} & \cdots & a_{p-1,q} \end{pmatrix}$$

Una vez dividida la suma en tres partes, veamos la prueba dependiendo de los casos:

- Caso (I): se verifica que  $d_t d_0 = -d_0 d_t$ .

$$d_0 d_t(a) = - \sum_{i,j} (-1)^{P(i,j)} \xi(a_{11}) \cdots \xi(a_{1q}) \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & d(a_{ij}) & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

- Si  $i > 1$ , en el signo generado por  $P(i, j)$  tenemos una fila más, al igual que la suma de los grados de los elementos de la primera fila, pero el único modo de que dicho sumando sea distinto de cero, es que  $a_{1,j}$  sea un elemento de grado cero para todo  $j$ , lo que nos lleva a concluir  $d_t d_0 = -d_0 d_t$ .

- Para  $i = 1$ , es claro que  $d_0 d_{1j} = 0$  para todo  $j$ , gracias a la compatibilidad existente entre  $\xi$  y la diferencial de  $H$ ,  $d$ .
- Caso (II): A su vez, vamos a estudiar esta suma dependiendo de si los morfismos componentes de la diferencial tensorial están en una fila superior o no de la  $k$ -ésima componente de la diferencial simplicial. Así pues, tenemos los casos  $i < k$ ,  $i > k + 1$  y  $i = k, i = k + 1$ .
- Si  $i < k$ , se tiene que  $d_{ij} d_k = -d_k d_{ij}$ . La diferencia de signo nos la da  $sg_B(k)$  que en el segundo factor aparece el grado de  $d(a_{ij})$ , lo que disminuye la suma en uno.
  - Si  $i > k + 1$ ,  $d_{ij} d_k = -d_k d_{i-1,j}$ . El número de filas ha disminuido en uno y por tanto el signo de la diferencial tensorial cambia dependiendo de si se aplica primero la  $d_k$  o después.
  - Si  $i = k$ , veamos que  $d_{kj} d_k = -d_k(d_{kj} + d_{k+1,j})$ . Esta igualdad se debe básicamente al hecho de que el producto de  $H$ ,  $\mu$ , conmuta con la diferencial, i.e.,  

$$d\mu(a_{kj}, a_{k+1,j}) = \mu(d(a_{kj}), a_{k+1,j}) + (-1)^{|a_{kj}|} \mu(a_{kj}, d(a_{k+1,j})).$$

$$d_{kj} d_k = (-1)^{(a)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \mu(a_{k1}, a_{k+1,1}) & d\mu(a_{kj}, a_{k+1,j}) & \mu(a_{kq}, a_{k+1,q}) \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d_k(d_{kj} + d_{k+1,j}) &= (-1)^{(b)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \mu(a_{k1}, a_{k+1,1}) & \mu(d(a_{kj}), a_{k+1,j}) & \mu(a_{kq}, a_{k+1,q}) \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^{(c)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \mu(a_{k1}, a_{k+1,1}) & \mu(a_{kj}, d(a_{k+1,j})) & \mu(a_{kq}, a_{k+1,q}) \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si denotamos por  $sg_t(k) = \sum_{j=i, l=1}^{k-1, q}$ , tenemos que

$$(a) = sg_B(k) + sg(k, k+1) + sg_t(k) + k - (j-1) + \sum_{l=1}^{j-1} [|a_{kl}| + |a_{k+1, l}|]$$

$$(b) = sg_B(k) + sg(k, k+1) + sg_t(k) + k - (j-1) - 1 - \sum_{i=1}^{j-1} |a_{k+1, i}| +$$

$$\sum_{l=1}^{j-1} |a_{kl}|$$

$$(c) = sg_B(k) + sg(k, k+1) + sg_t(k) + k - (j-1) + 1 + \sum_{l=1}^q |a_{kl}| +$$

$$\sum_{l=1}^{j-1} |a_{k+1, l}| - \sum_{i=j+1}^q |a_{ki}|$$

Por tanto, tenemos que  $(a) = (b) + 1$  y  $(a) = (c) + 1 + |a_{kj}|$ , lo que implica que  $d_{kj}d_k = -d_k(d_{kj} + d_{k+1, j})$ .

- Caso (III): se verifica que  $d_t d_p = -d_p d_t$ , gracias a que el signo de  $d_t$  es el mismo en ambos casos, pero el signo en  $d_p$  ha disminuido en 1 por  $d_{a_i j}$ . Por otro lado, es claro que los morfismos  $d_p d_{pj}$  con  $1 \leq j \leq q$  son todos nulos, por las propiedades de compatibilidad entre  $\xi$  y la diferencial de  $H$ ,  $d$ .

Así pues,  $d_t + d_s$  es una diferencial en  $BC(H)$ . ■

**Proposición 3.5.**  $d_c d_t = -d_t d_c$ .

**Demostración:** Teniendo en cuenta la propiedad  $(d \otimes 1 + 1 \otimes d)\Delta = \Delta d$ , dividamos la prueba en tres casos

- Caso (I): se verifica que  $d_t \delta^0 = -\delta^0 d_t$ . De hecho,

$$d_{i+1, j} \delta^0 = (-1)^{s_1} \begin{pmatrix} \eta(1) & a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \eta(1) & a_{i1} & d(a_{ij}) & a_{i, q} \\ \eta(1) & a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

donde  $s_1 = \sum_{k < i, k=i \sim l < j} |a_{kl}| + i - (j-1)$ . Por otro lado, tenemos que

$$\delta^0 d_{i, j} = (-1)^{s_2} \begin{pmatrix} \eta(1) & a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \eta(1) & a_{i1} & d(a_{ij}) & a_{i, q} \\ \eta(1) & a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$



donde  $s_2 = \sum_{k < i, k=i \smallfrown l < j} |a_{kl}| + (i-1) - (j-1)$ , así que teniendo en cuenta que  $|\eta(1)| = 0$ , se tiene que  $s_1 = -s_2$ . Además sabemos que  $d_{j0}\delta^0 = 0$  para todo  $1 \leq j \leq q$ .

- Caso (II): Con respecto a la última cocara de la diferencial cosimplicial tenemos que  $d_{ij}\delta^{q+1} = -\delta^{q+1}d_{ij}$ .

$$d_{ij}\delta^{q+1} = (-1)^{s_1} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \eta(1) \\ a_{i1} & d(a_{ij}) & a_{i,q} & \eta(1) \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & \eta(1) \end{pmatrix}$$

donde  $s_1 = \sum_{k < i, k=i \smallfrown l < j} |a_{kl}| + (i-1) - (j-1) - 1 + sg_C(q+1)$ .

$$\delta^{q+1}d_{ij} = (-1)^{s_2} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \eta(1) \\ a_{i1} & d(a_{ij}) & a_{i,q} & \eta(1) \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & \eta(1) \end{pmatrix}$$

donde  $s_2 = \sum_{k < i, k=i \smallfrown l < j} |a_{kl}| + (i-1) - (j-1) - 1 + sg_C(q+1)$ . Solo hay que tener en cuenta que en la suma  $sg_C(q+1)$  aparece  $|d(a_{ij})|$ , para concluir que  $s_1 = -s_2$ . Por otro lado,  $d_{qj}\delta^{q+1} = 0$ .

- Caso (III) : veamos que  $d_{ij}\delta^k = -\delta^k d_{ij}$ . Para ello, al igual que en la proposición anterior, diferenciamos si  $j < k$ ,  $j > k+1$  o  $j = k$ .
  - Si  $j < k$ , se tiene que  $d_{ij}\delta^k = -\delta^k d_{ij}$ . La diferencia de signo nos la da  $sg_C(k)$  que en el segundo factor aparece el grado de  $d(a_{ij})$ , lo que disminuye la suma en uno.
  - Si  $j > k+1$ ,  $d_{ij}\delta^k = -\delta^k d_{i,j-1}$ . Se debe exclusivamente a que el número de columnas ha aumentado en uno y por tanto el signo de la diferencial tensorial cambia dependiendo de si se aplica primero la  $d_k$  o después.
  - Si  $j = k$ , veamos que  $\delta^k d_{ik} = -(d_{ik} + d_{i,k+1})\delta^k$ . Esta igualdad se debe básicamente al hecho de que el coproducto de  $H$ ,  $\Delta$ , conmuta con la diferencial, i.e.,  $\Delta(d(a_{kj})) = d(a_{k_1 j_1}) \otimes a_{k_2 j_2} + (-1)^{|a_{k_1 j_1}|} a_{k_1 j_1} \otimes d(a_{k_2 j_2})$ .

$$d_{kj}d_k = (-1)^{(a)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \mu(a_{k1}, a_{k+1,1}) & d\mu(a_{kj}, a_{k+1,j}) & \mu(a_{kq}, a_{k+1,q}) \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Por tanto, acabamos de probar que  $d_t + d_c$  es una diferencial en  $BC(H)$ . ■

**Proposición 3.6.**  $d_c d_s = d_s d_c$ .

**Demostración:** Para probarlo es necesario hacer uso de la condición de Hopf existente entre el coproducto y el producto de  $H$ ,  $\mu^{\otimes 2}(1 \otimes T \otimes 1)\Delta^{\otimes 2} = \Delta\mu$ .

Así pues, veamos que  $\delta^k \delta_{s+1} = \delta_{s+1} \delta^k$ .

De un lado, tenemos

$$\delta^k \delta_{s+1} = (-1)^{s_1} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \Delta(a_{1,k}) & \cdots a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu(a_{s+1,1}, a_{s+2,1}) & \cdots \Delta(\mu(a_{s+1,k}, a_{s+2,k})) & \mu(a_{s+1,q}, a_{s+2,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots \Delta(a_{p,k}) & \cdots a_{pq} \end{pmatrix}$$

del otro:

$$\delta_{s+1} \delta^k = (-1)^{s_2} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \Delta(a_{1,k}) & \cdots a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu(a_{s+1,1}, a_{s+2,1}) & \cdots \mu(\Delta a_{s+1,k}, \Delta a_{s+2,k}) & \cdots \mu(a_{s+1,q}, a_{s+2,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots \Delta(a_{p,k}) & \cdots a_{pq} \end{pmatrix}$$

Donde los signos  $s_1$  y  $s_2$  vienen dados por las fórmulas

$$\begin{aligned} s_1 &= s + 1 + sg_B(s + 1) + sg(s + 1, s + 2) + k + sg_C(k) \\ s_2 &= k + sg_C(k) + s + 1 + sg_B(s + 1) + sg(s + 1, s + 2) \end{aligned}$$

por tanto nos vale con comparar  $sg(s + 1, s + 2)$  en  $s_1$  y en  $s_2$ . En particular, la fórmula para  $sg(s + 1, s + 2)$  de  $s_2$  es

$$\begin{aligned} sg(s + 1, s + 2) &= \sum_{i=1}^{k-1} |a_{s+2,i}| (|a_{s+1,i+1}| + \cdots + |\Delta a_{s+1,k}| + \cdots + |a_{s+1,n}|) \\ &\quad + |\Delta^1 a_{s+2,k}| (|\Delta^2 a_{s+1,k}| + |a_{s+1,k+1}| + \cdots + |a_{s+1,n}|) \\ &\quad + |\Delta^2 a_{s+2,k}| (|a_{s+1,k+1}| + \cdots + |a_{s+1,n}|) \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{n-1} |a_{s+2,i}| (|a_{s+1,i+1}| + \cdots + |a_{s+1,n}|) \end{aligned}$$

Es más, para  $j > k$  y  $j < k$ , el sumando del elemento  $a_{s+2,j}$  es igual en ambos casos.

Por tanto, restrinjámonos al sumando de  $a_{s+2,k}$ : Por una parte, tenemos

$$|a_{s+2,k}|(|a_{s+1,k+1}| + \cdots + |a_{s+1,n}|),$$

y por la otra tenemos

$$|\Delta^1 a_{s+2,k}|(|\Delta^2 a_{s+1,k}| + |a_{s+1,k+1}| + \cdots + |a_{s+1,n}|) + |\Delta^2 a_{s+2,k}|(|a_{s+1,k+1}| + \cdots + |a_{s+1,n}|)$$

Pero, ésta no es más que la condición de Hopf con respecto a los signos, por lo que obtenemos que  $d_c d_s = d_s d_c$ . ■

**Proposición 3.7.** *El morfismo*

$$d_{BC} = d_t + d_c + (-1)^q d_s : H_n^{p,q} \rightarrow H_{n-1}^{p,q} \oplus H_n^{p-1,q} \oplus H_n^{p,q+1}$$

es una diferencial para el tricomplejo  $BC(H) = \{H_n^{p,q}\}_{p,q,n \geq 0}$ .

**Demostración:** Gracias a las tres proposiciones anteriores, probar que  $d^2 = 0$  se reduce simplemente a las tres observaciones siguientes:

- $d_t d_c + d_c d_t = 0$ .
- $(-1)^q d_c d_s + (-1)^{q+1} d_s d_c = 0$ .
- $(-1)^q d_t d_s + (-1)^q d_s d_t = 0$ . ■

### 3.1.2. La estructura multiplicativa de $BC(H)$

En esta sección definimos la estructura multiplicativa y comultiplicativa de  $BC(H)$ , convirtiéndolo en una biálgebra.

#### La estructura de álgebra en las filas de $BC(H)$

**Definición 3.2.** Fijado el grado simplicial en  $n$ , definamos para todo  $n > 0$ , un producto en  $H^{n,*}$ ,  $\mu : H_*^{n,*} \otimes H_*^{n,*} \rightarrow H_*^{n,*}$ , como un morfismo de grado cero (sin considerar el grado simplicial) dado por

$$H_k^{n,m} \otimes H_t^{n,r} \rightarrow H_{k+t}^{n,m+r}$$

$$(a, b) \longrightarrow (a \ b)$$

**Proposición 3.8.** *El producto  $\mu$  es asociativo.*

**Demostración:**

$$\mu(1 \otimes \mu) : H_*^{n,*} \otimes H_*^{n,*} \otimes H_*^{n,*} \rightarrow H_*^{n,*}$$

$$(a, b, c) \longrightarrow \mu(a, (b \ c)) = (a \ b \ c)$$

$$\mu(\mu \otimes 1) : H_*^{n,*} \otimes H_*^{n,*} \otimes H_*^{n,*} \rightarrow H_*^{n,*}$$

$$(a, b, c) \longrightarrow \mu((a \ b), c) = (a \ b \ c)$$

**Proposición 3.9.** *El producto  $\mu$  conmuta con la diferencial cosimplicial y tensorial.*

**Demostración:** Para probar que el producto conmuta con las dos diferenciales, en primer lugar tenemos que considerar exclusivamente los grados *cosimplicial* y *tensorial* de un elemento de  $H_*^{n,*}$ .

Una vez hecha tal puntualización, es trivial probar que  $\mu(d_t \otimes 1 + 1 \otimes d_t) = d_t \mu$ . Sean  $a \in H_k^{n,q}$  y  $b \in H_r^{n,t}$ , entonces tenemos que

$$d_t \mu(a, b) = - \sum_{i,j} (-1)^{P(i,j)} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & d(b_{ij}) & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & b_{p1} & \cdots & b_{pt} \end{pmatrix}$$

Aquellos sumandos cuya diferencial se aplica sobre  $b_{ij}$  tienen como signo

$P(i, j) = k + \sum |b_{kl}| + (i - 1) - (q + j - 1)$ . Por otro lado,

$$\mu(1 \otimes d_t) = d_t \mu(a, b) = - \sum_{i,j} (-1)^{P(i,j)+|a|_t-|a|_c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & d(b_{ij}) & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & b_{p1} & \cdots & b_{pt} \end{pmatrix}$$

donde el signo  $P(i, j) = \sum |b_{kl}| + (i - 1) - (j - 1)$ . Por tanto, ambos sumandos son iguales.

Ahora bien, para probar que  $\mu(d_c \otimes 1 + 1 \otimes d_c) = d_c \mu$ , solamente hay que tener en cuenta que en el caso de la construcción cobar se tiene que  $\mu_\Omega(d_c \otimes 1 + 1 \otimes d_c) = d_c \mu_\Omega$ , y que la diferencial cosimplicial definida actualmente es aplicar  $n$ -copias de la  $d_c$  sobre un elemento de grado simplicial  $n$ , al igual que el producto es aplicar  $n$ -copias del producto de la cobar. ■



**Proposición 3.10.** *El producto  $\mu$  no conmuta con la diferencial simplicial.*

**Demostración:** Sean  $a, b \in H_*^{n,*}$  dos elementos, entonces  $d_s(a), d_s(b) \in H_*^{n-1,*}$ , por tanto, no es posible calcular  $\mu(d_s \otimes 1)$  ni  $\mu(1 \otimes d_s)$  dado que no coinciden los grados simpliciales. ■

### La estructura de coálgebra en las columnas de $BC(H)$

**Definición 3.3.** Fijado el grado cosimplicial en  $n$ , definamos para todo  $n > 0$ , un coproducto en  $H_*^{*,n}$ ,  $\Delta : H_*^{*,n} \rightarrow H_*^{*,n} \otimes H_*^{*,n}$ , como un morfismo de grado cero (sin considerar el grado cosimplicial) dado por

$$H_t^{r,n} \rightarrow \sum_{i+j=r} H_d^{i,n} \otimes H_t^{j,n}$$

$$a \longrightarrow \sum_{j=0}^r \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \end{pmatrix}$$

**Proposición 3.11.** *El coproducto  $\Delta$  es asociativo.*

**Demostración:** Es simple probar que  $(\Delta \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \Delta)\Delta$ .

Por un lado  $(1 \otimes \Delta)\Delta$  tenemos,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Delta} \sum_{j=0}^r \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow 1 \otimes \Delta$$

$$\sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^{r-j} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j+i,1} & \cdots & a_{j+i,n} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{j+i,1} & \cdots & a_{j+i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \end{pmatrix}$$



Por otro lado  $(\Delta \otimes 1)\Delta$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix} &\xrightarrow{\Delta} \sum_{j=0}^r \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \\ &\downarrow \Delta \otimes 1 \\ \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^j \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.12.** *El coproducto  $\Delta$  conmuta con la diferencial simplicial y tensorial.*

**Demostración:** Para probar que el coproducto conmuta con las dos diferenciales, en primer lugar tenemos que considerar exclusivamente los grados *simplicial* y *tensorial* de un elemento de  $H_*^{*,m}$ .

Una vez hecha tal puntualización, es trivial probar que  $(d_t \otimes 1 + 1 \otimes d_t)\Delta = \Delta d_t$ .

Ahora bien, para probar que  $(d_s \otimes 1 + 1 \otimes d_s)\Delta = \Delta d_s$ , solamente hay que tener en cuenta que en el caso de la construcción bar se tiene que  $(d_s \otimes 1 + 1 \otimes d_s)\Delta_B = \Delta_B d_s$ , y que la diferencial simplicial definida actualmente es aplicar  $n$ -copias de la  $d_s$  sobre un elemento de grado cosimplicial  $n$ , al igual que el coproducto es aplicar  $n$ -copias del coproducto de la bar. ■

**Proposición 3.13.** *El coproducto  $\Delta$  no conmuta con la diferencial cosimplicial.*

**Demostración:** Sea  $a$  un elemento de  $H_r^{2,1}$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} d_c \Delta \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} &\rightarrow (a_{11}) \otimes (a_{21}) \rightarrow \sum_{i,j} (a_{11}) \otimes \begin{pmatrix} a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix} + \sum_{i,j} \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \end{pmatrix} \otimes (a_{21}) \\ \Delta d_c \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} &\rightarrow \sum \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix} \rightarrow \sum \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Observación 3.1.** Dada una álgebra de Hopf conmutativa, se tiene que la construcción cobar al igual que la construcción bar posee sendos morfismos multiplicativo y comultiplicativo que la convierte en una álgebra de Hopf.



Un aspecto importante en dicha estructura es la complejidad existente en uno de los dos morfismos (en el caso de la construcción Cobar, el coproducto es un shuffle, mientras que en el caso de la construcción bar, el producto es un shuffle).

Esta problemática junto con la incompatibilidad de los morfismos anteriormente definidos con alguna de las tres diferenciales, nos lleva a afirmar rotundamente que éstos no pueden ser extendidos de modo natural a un producto y un coproducto globalmente, de modo que la restricción sobre la primera fila y columna den las estructuras co-multiplicativas correspondientes a la construcciones Bar y Cobar como álgebras de Hopf.

**Proposición 3.14.** *El producto y coproducto anteriormente definidos verifican la condición de Hopf generalizada, i.e.,  $\Delta\mu = \mu^{\otimes 2}\Delta^{\otimes 2}$ .*

**Demostración:** Dados  $a, b \in BC(H)$ , distingamos dos casos.

$$\boxed{|a|_s = |b|_s}$$

Veamos qué da  $\Delta\mu$

$$\left( \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right) \xrightarrow{\mu} \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right)$$

$\downarrow \Delta$

$$\sum_{j=0}^m \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} & b_{j1} & \cdots & b_{jn} \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cccc} a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} & b_{j+1,1} & \cdots & b_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right)$$

Mientras que  $\mu^{\otimes 2}\Delta^{\otimes 2}$

$$\left( \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right)$$

$\downarrow \Delta^{\otimes 2}$

$$\sum_{j=0}^m \left[ \left( \begin{array}{cc} a_{11} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{jn} \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} a_{j+1,1} & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mn} \end{array} \right) \right] \otimes \sum_{i=0}^m \left[ \left( \begin{array}{cc} b_{11} & b_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{in} \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} b_{i+1,1} & b_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{mn} \end{array} \right) \right]$$

$$\downarrow \mu^{\otimes 2}$$

$$\sum_{j=0}^m \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} & b_{j1} & \cdots & b_{jn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} & b_{j+1,1} & \cdots & b_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|a|_s \neq |b|_s}$$

Veamos que en este caso se tiene que

$$\Delta\mu = 0 = \mu^{\otimes 2}\Delta^{\otimes 2}.$$

- La primera parte de la igualdad es fácil ver que es cero, dado que  $\mu(a, b) = 0$ .
- Por otro lado, para ver que  $\mu^{\otimes 2}\Delta^{\otimes 2}(a, b) = 0$  supongamos que  $a$  es un elemento con grado simplicial  $|a|_s = m$  y grado cosimplicial  $|a|_c = n$ ; análogamente, supongamos que  $b$  tiene grado simplicial  $|b|_s = t$  y grado cosimplicial  $|b|_c = p$  (con  $p$  no necesariamente distinto de  $n$ ).

Es claro que el coproducto  $\Delta$  aplicado sobre  $a$  da suma de elementos de la forma  $a_1 \otimes a_2$ , donde se verifica que  $|a_1|_s + |a_2|_s = |a|_s$  y  $|a_1|_c = |a_2|_c = |a|_c$ .

Igualmente, se tiene que al aplicar  $\Delta$  sobre  $b$ , éste da lugar a una combinación de elementos de la forma  $b_1 \otimes b_2$ , donde se verifica que  $|b_1|_s + |b_2|_s = |b|_s$  y  $|b_1|_c = |b_2|_c = |b|_c$ .

Por tanto, es imposible que al hacer el producto  $\mu(a_1 \otimes b_1) \otimes \mu(a_2, b_2)$  sean ambos términos distintos de cero a la vez por una cuestión de grados simpliciales. ■

### La estructura multiplicativa global de $BC(H)$

Dada la complejidad de la estructura diferencial de  $BC(H)$ , ésta nos lleva a definir productos y coproductos mucho más sofisticados con el fin de que sean compatibles con la diferencial total. En un primer paso, mostramos un morfismo de grado cero, asociativo, que al menos es compatible con la diferencial tensorial.

**Definición 3.4.** Globalmente, podemos definir *un morfismo en  $BC(H)$  trivial*



$\hat{\mu} : BC(H) \otimes BC(H) \rightarrow BC(H)$  dado por

$$H_n^{r,s} \otimes H_m^{t,w} \rightarrow H_{n+m}^{t+r,s+w}$$

$$(a, b) \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

donde 1 es la unidad del producto de  $H$ .

**Proposición 3.15.** *El morfismo  $\hat{\mu}$  es de grado cero y es asociativo.*

**Demostración:** Dividamos la prueba en dos partes

- Es claro que  $\hat{\mu}$  es un morfismo de grado cero.
- Será asociativo si verifica  $\hat{\mu}(1 \otimes \hat{\mu}) = \hat{\mu}(\hat{\mu} \otimes 1)$

$$\hat{\mu}(1 \otimes \hat{\mu}) : BC(H) \otimes BC(H) \otimes BC(H) \rightarrow BC(H)$$

$$(a, b, c) \longrightarrow \hat{\mu}\left(a, \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mu}(\hat{\mu} \otimes 1) : BC(H) \otimes BC(H) \otimes BC(H) \rightarrow BC(H)$$

$$(a, b, c) \longrightarrow \hat{\mu}\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, c\right) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Lo que finaliza la demostración. ■

**Proposición 3.16.** *El morfismo  $\hat{\mu}$  conmuta con la diferencial tensorial de  $BC(H)$ .*

**Demostración:** La demostración se sigue inmediatamente de la definición (también es importante mencionar que dicho morfismo no conmuta con la diferencial simplicial). ■

Siguiendo un poco esta línea de definición de morfismos candidatos a ser extendidos globalmente, debemos tener en cuenta que en la construcción Cobar el producto viene definido por el producto trivial existente en el módulo tensorial, mientras que en la construcción Bar dicho producto es el producto shuffle.

Por tanto, dado que  $BC(H)$  es la generalización natural del producto tensorial de construcciones Bar en columnas y construcciones Cobar en filas, consideremos el siguiente producto globalmente.

**Definición 3.5.** Globalmente, podemos definir  $\mu : BC(H) \otimes BC(H) \rightarrow BC(H)$  un producto en  $BC(H)$  dado por

$$H_n^{r,s} \otimes H_m^{t,w} \rightarrow H_{n+m}^{t+r,s+w}$$

$$(a, b) \longrightarrow \prod \left[ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \right]$$

donde 1 es la unidad del producto de  $H$  y  $\prod$  es el producto shuffle en cada columna, es decir, dados  $a$  y  $b$ ,

- los completamos hasta ser elementos de  $HH_*^{t+r,*}$ , dando lugar a:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rs} \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ b_{11} & \cdots & b_{1w} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tw} \end{pmatrix}$$

- Una vez completados consideramos el producto shuffle sobre cada columna independientemente dado por

$$[a_{11} | \cdots | a_{r1}] * [1 | \cdots | 1] = \sum_{\pi} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} [c_{\pi_{11}} | \cdots | c_{\pi_{r+t,1}}],$$

donde la suma está definida para todos los  $\pi \in \{(r, t) - \text{shuffles}\}$ .

- Finalmente, “pegamos” ambas matrices, dando lugar a

$$(-1)^{\sum sg(\alpha_i, \beta_i)} \begin{pmatrix} c_{\pi_{11}} & \cdots & c_{\pi_{1,s+w}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{\pi_{r+t,1}} & \cdots & c_{\pi_{r+t,s+w}} \end{pmatrix}$$

Es decir, con respecto a la estructura “horizontal”, consideramos el producto dado por el producto trivial de “pegado”, mientras que en la estructura “vertical”, consideramos un producto shuffle globalmente sobre cada una de las columnas.

**Proposición 3.17.** El morfismo  $\mu$  es de grado cero y es asociativo.

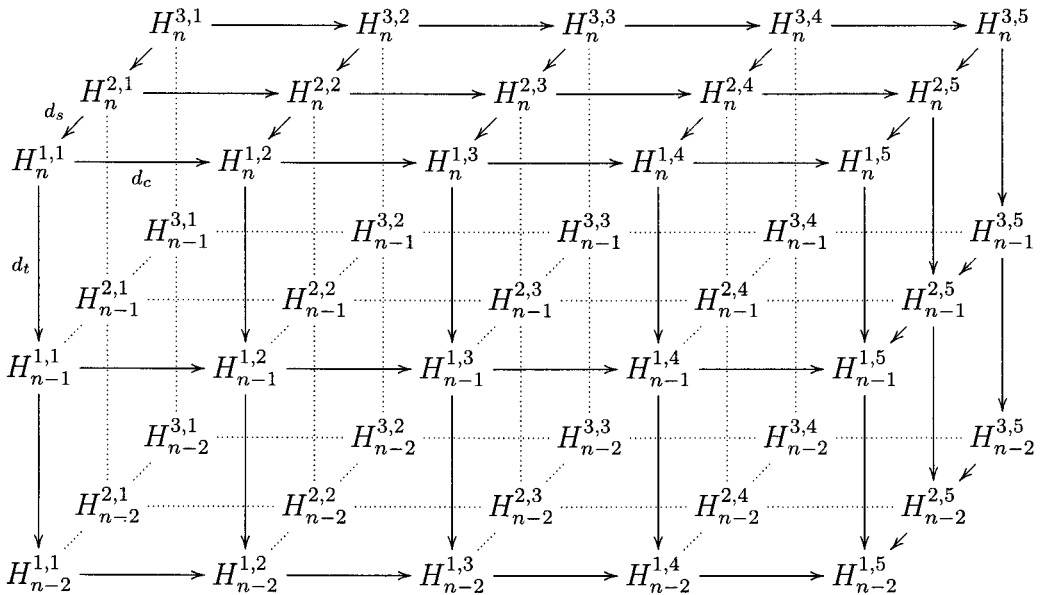
**Demostración:** La prueba es idéntica a la realizada en la proposición 3.15. ■

**Proposición 3.18.** *El morfismo  $\mu$  conmuta con las tres diferenciales de  $BC(H)$ .*

**Demostración:** Dividamos la prueba dependiendo de la diferencial.

- En primer lugar es claro que  $\mu$  conmuta con la diferencial tensorial trivialmente.
- De igual modo se ve que conmuta con la diferencial cosimplicial.
- Por último, teniendo en cuenta que el producto sobre las columnas es el producto shuffle generalizado del producto shuffle de la construcción Bar, y que la diferencial simplicial de  $BC(H)$  también es la definición generalizada de la diferencial simplicial de la construcción Bar, se tiene que  $\mu$  conmuta con  $d_s$ . ■

Finalmente, podemos visualizar el “tricomplejo” como un octante de  $\mathbb{R}^3$



### 3.2. $A_\infty$ -álgebras de Hopf por Perturbación

En esta sección daremos una respuesta a la pregunta :¿Cuál es la definición de  $A_\infty$ -álgebra de Hopf desde el punto de Teoría de Perturbación?

La noción de  $A_\infty$ -álgebra de Hopf surge de modo natural desde el punto de vista de las contracciones, como un dg-módulo  $M$  que hereda de una dg-álgebra de Hopf, vía una contracción  $r$ , sendas estructuras de  $A_\infty$ -álgebra,  $\{\mu_i\}_{i \in I}$ , y  $A_\infty$ -coálgebra,  $\{\Delta_j\}_{j \in J}$ , junto con unas operaciones  $h^{i,j} : M^{\otimes i} \rightarrow M^{\otimes j}$ , las cuales miden la diferencia entre la composición de las operaciones  $\mu_i$  con  $\Delta_j$  cuando sea posible. He aquí pues una serie de resultados que nos llevarán a dar una definición de lo que es una  $A_\infty$ -álgebra de Hopf.

**Proposición 3.19.** *Dada  $H$  una álgebra de Hopf y  $r : H \rightarrow M$  una contracción, ésta induce una nueva contracción de dg-módulos*

$$bc(r) : \{(BC(H), d_t), (BC(M), d_t), bc(f), bc(g), bc(\phi)\},$$

donde los morfismos  $bcf, bcg, bc\phi$  están definidos por las fórmulas siguientes

$$\begin{aligned} bc(f)|_{BC(H)_n} &= \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{n \text{ veces}}; \\ bc(g)|_{BC(M)_n} &= \underbrace{g \otimes \cdots \otimes g}_{n \text{ veces}}; \\ bc(\phi)|_{BC(H)_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{k \text{ veces}} \otimes \phi \otimes \underbrace{gf \otimes \cdots \otimes gf}_{n-k-1 \text{ veces}}. \end{aligned}$$

**Demostración:**  $BC(H)^{p,q}$  con la diferencial tensorial coincide con el módulo tensorial en grado  $pq$ , por lo que la contracción resultante no es nada más que el producto tensorial de la contracción  $r$  consigo misma  $pq$ -veces. ■

En todo lo que sigue, supongamos que  $H$  es una dga-álgebra de Hopf conexa, i.e.,  $H_0 \simeq \Lambda$ . Considerada la aumentación  $\xi : H \rightarrow \Lambda$ , denotemos por  $\bar{H} = Ker\xi$ .

De modo análogo podemos construir  $\widehat{BCH}$  como el tricomplejo  $BC(H)$  al cual le hemos eliminado los elementos con grado tensorial cero.

**Definición 3.6.** Dada  $H$  una dga-álgebra de Hopf conexa, se define el módulo  $\widehat{BCH}$  como el módulo graduado

$$\widehat{BCH} = \Lambda \oplus \bar{H}^{1,1} \oplus (\bar{H}^{2,1} \oplus \bar{H}^{1,2}) \oplus \cdots \oplus \sum_{i+j=k} \bar{H}^{i,j} \oplus \cdots$$

junto con las diferenciales  $d_t, d_s$  y  $d_c$  inducidas en  $\bar{H}$ .

### 3.2.1. La estructura de $A_\infty$ -coálgebra

**Proposición 3.20.** Fijado  $n > 0$ ,  $\bar{H}^{*,n}$  es una coálgebra junto con la diferencial  $d_s + d_t$ . En particular,  $H^{*,1}$  coincide con la construcción bar de  $H$ .

$$\boxed{(\bar{H}^{*,1}, d_s + d_t, | | _s + | | _t) \equiv \bar{B}(H)}$$

**Demostración:** La primera parte del teorema ya lo hemos probado al establecer la compatibilidad del coproducto con las diferenciales simplicial y tensorial, así pues, veamos que  $(\bar{H}^{*,1}, d_s + d_t, | | _s + | | _t)$  coincide con la construcción Bar. Para ello, examinemos las fórmulas explícitas de  $d_t$ ,  $d_s$  y el coproducto definido en  $H^{*,1}$

- En primer lugar, la diferencial tensorial viene dada por  $d_t|_{H^{*,1}} = \sum_{i=1}^p d_{i,1}$ .

$$d_i = -(-1)^{P(i,1)} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ d(a_{i1}) \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} \quad \text{donde } P(i,1) = \sum_{k < i} |a_{k1}| + (i-1).$$

Esta fórmula coincide con la definición de la diferencial tensorial en la construcción Bar.

- Igualmente se observa que la diferencial simplicial resultará ser la diferencial simplicial de la construcción Bar, es decir,  $d_s = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \delta_k$

$$\delta_k = (-1)^{sg_B(k)} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \mu(a_{k1}, a_{k+1,1}) \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} \quad \text{donde } sg_B(k) = \sum_{j=1}^k |a_{j1}|.$$

Esta fórmula es la de la diferencial simplicial de la construcción Bar.

- El coproducto claramente coincide con el coproducto definido en la construcción Bar. ■

**Teorema 3.21.** Dada la contracción  $r : H \rightarrow M$ , si establecemos la contracción 3.19

$$bc(r) : \{(\widehat{BCH}, d_t), (\widehat{BCM}, d_t), bc(f), bc(g), bc(\phi)\}$$



la diferencial simplicial  $d_s$  es un dato de perturbación para la proposición 3.19.

Aplicando el lema de perturbación básico, tenemos una nueva contracción

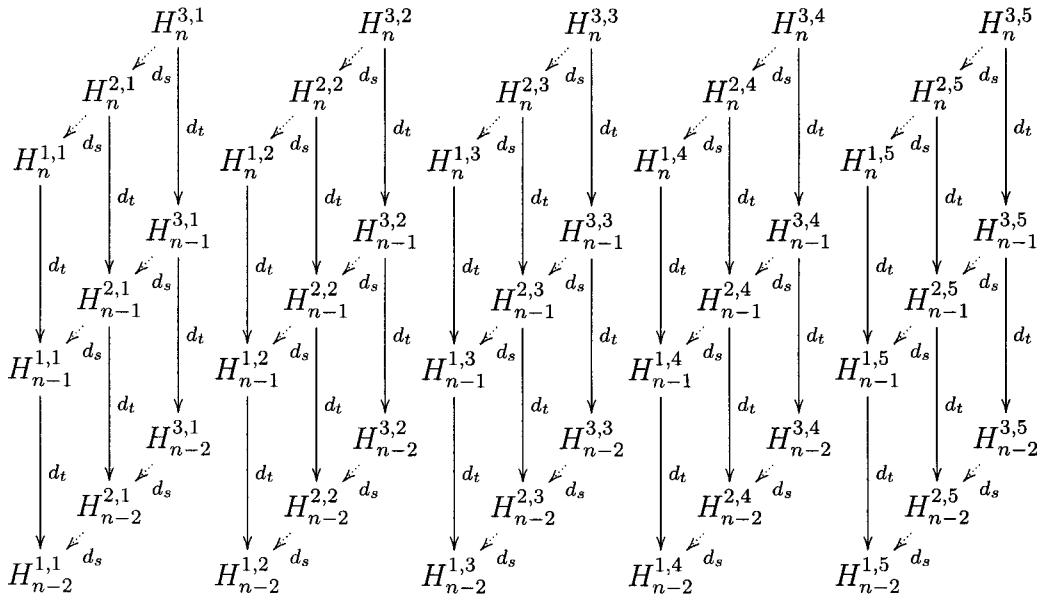
$$bc(r)_{d_s} : \{(\widehat{BCH}, d_t + d_s), (\widehat{BCM}, d_t + d_\infty), bc(f)_{d_s}, bc(g)_{d_s}, bc(\phi)_{d_s}\}$$

tal que la proyección sobre los elementos con grado cosimplicial igual a uno, da lugar a una  $A_\infty$ -coálgebra en  $M$ .

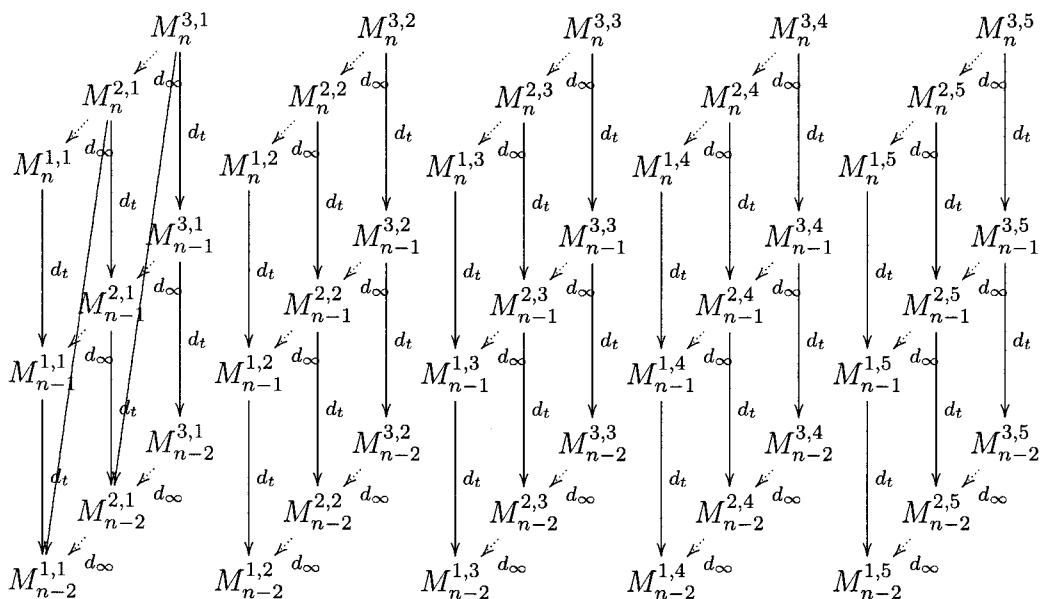
**Demostración:** La primera parte de la demostración es probar que la diferencial simplicial es un dato de perturbación de  $bc(r)$ , es decir, que  $bc(\phi)_{d_s}$  es puntualmente nilpotente, lo cual es cierto, dado que  $bc(\phi)$  aumenta en grado tensorial y  $d_s$  disminuye el grado simplicial en uno, por lo que como máximo sobre un elemento con grado simplicial  $n$ , al cabo de  $n$ -veces obtenemos un valor nulo.

De hecho la demostración se debe exclusivamente a la proposición 3.20, en la que hemos probado que al considerar los elementos de  $BC(H)$  con grado simplicial 1, éste coincidía con la construcción Bar de  $H$ . ■

Así pues, la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra la encontramos en la pared lateral izquierda del tricomplejo.



que da lugar vía  $bc(r)$  a



### 3.2.2. La estructura de $A_\infty$ -álgebra

**Proposición 3.22.** Fijado  $n > 0$ ,  $\bar{H}^{n,*}$  es una álgebra junto con la diferencial  $d_c + d_t$ . En particular,  $\bar{H}^{1,*}$  coincide con la construcción cobar de  $H$ .

$$(\bar{H}^{1,*}, d_c + d_t, | |c + | |t) \equiv \Omega(H)$$

**Demostración:** La primera parte del teorema ya lo hemos probado al ver la compatibilidad del producto con las diferenciales cosimplicial y tensorial, así pues, veamos que  $(\bar{H}^{1,*}, d_c + d_t, | |c + | |t)$  coincide con la construcción Cobar. Para ello, examinemos las fórmulas explícitas de  $d_t$ ,  $d_c$  y el producto definido en  $\bar{H}^{1,*}$

- En primer lugar, la diferencial tensorial viene dada por  $d_t|_{\bar{H}^{1,*}} = \sum_{i=1}^q d_{1,i}$ .

$$d_i = -(-1)^{P(1,i)} ( a_{11} \cdots d(a_{1i}) \cdots a_{1q} )$$

donde

$$P(1,i) = \sum_{k < i} |a_{1k}| - (i-1).$$

Esta fórmula coincide con la definición de la diferencial tensorial en la construcción Cobar.

- La diferencial cosimplicial es la diferencial cosimplicial de la construcción Cobar,

$$\text{i.e., } d_c = \sum_{k=1}^q (-1)^k \delta^k$$

$$\delta^k = (-1)^{sg_C(k)} ( a_{11} \cdots a_{1,k-1} \Delta(a_{1,k}) a_{1,k+1} \cdots a_{1q} )$$

donde

$$sg_C(k) = \sum_{l=1}^{k-1} |a_{1l}|$$

- El producto claramente tiene la misma definición que el producto definido en la construcción Cobar. ■

**Teorema 3.23.** Dada la contracción  $r : H \rightarrow M$ , si establecemos la contracción 3.19

$$bc(r) : \{(\widehat{BCH}, d_t), (\widehat{BCM}, d_t), bc(f), bc(g), bc(\phi)\}$$

la diferencial cosimplicial  $d_c$  es un dato de perturbación de la proposición 3.19.

Aplicando el lema de perturbación básico, tenemos una nueva contracción

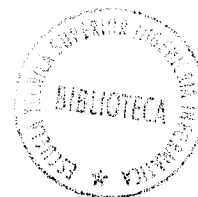
$$bc(r)_{d_c} : \{(\widehat{BCH}, d_t + d_c), (\widehat{BCM}, d_t + d_\infty), bc(f)_{d_c}, bc(g)_{d_c}, bc(\phi)_{d_c}\}$$

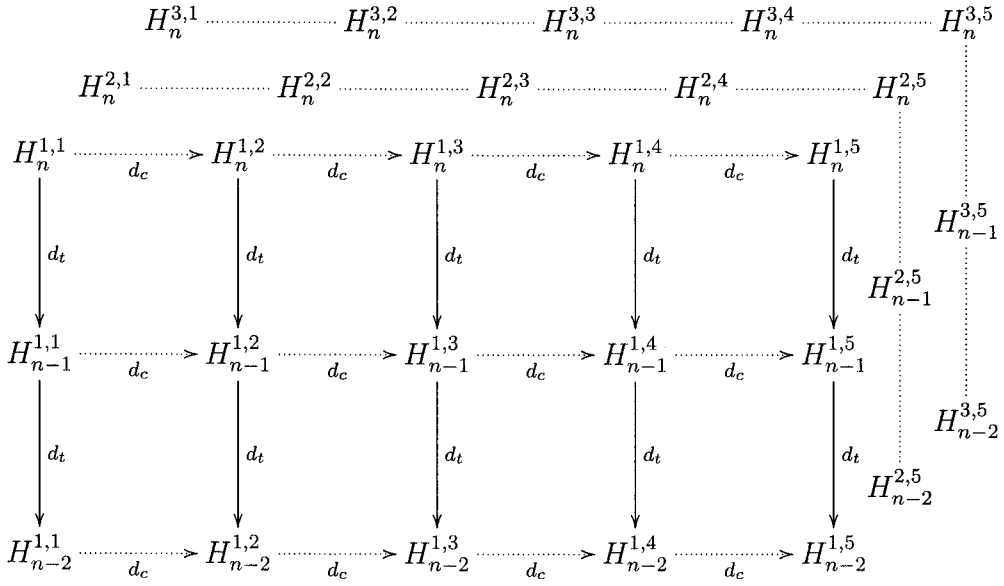
tal que la proyección sobre los elementos con grado simplicial igual a uno, da lugar a una  $A_\infty$ -álgebra en  $M$ .

**Demostración:** La primera parte de la prueba es ver que la diferencial cosimplicial es un dato de perturbación de  $bc(r)$ , es decir, que  $bc(\phi)_{d_c}$  es puntualmente nilpotente, lo cual es cierto, dado que  $bc(\phi)$  aumenta el grado tensorial y  $d_c$  aumenta el grado cosimplicial en uno, por lo que gracias a la conexión del álgebra de partida, al cabo de  $n$ -veces obtenemos un valor nulo.

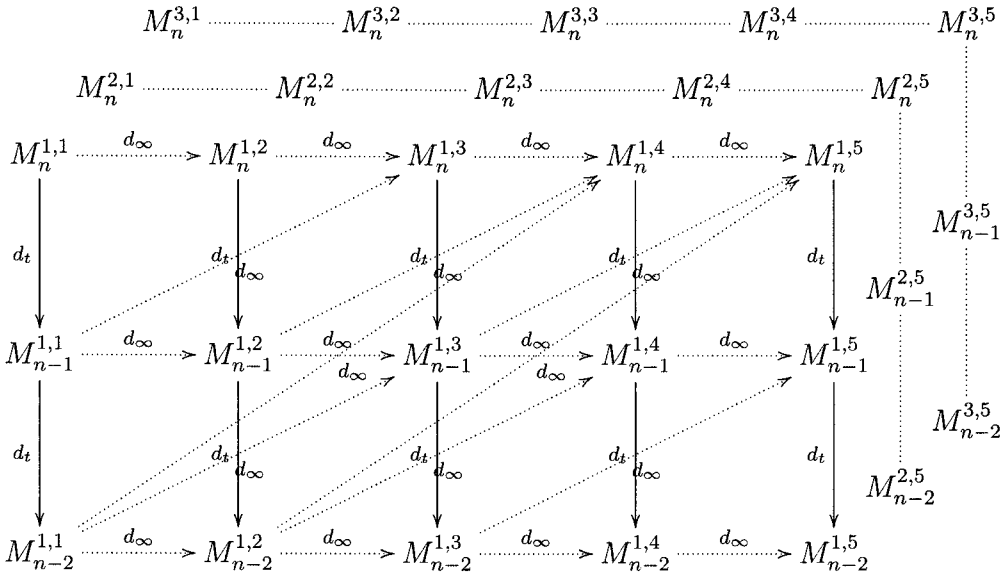
De hecho la demostración se debe exclusivamente a la proposición 3.22, en la que hemos probado que al considerar los elementos de  $\widehat{BCH}$  con grado cosimplicial 1, éste coincide con la construcción Cobar de  $H$ . ■

Así pues, la estructura de  $A_\infty$ -álgebra la encontramos en la pared frontal del tricomplejo:





que da lugar vía  $bc(r)$  a



### 3.2.3. Los operadores de homotopía

En esta sección damos una noción explícita de las  $A_\infty$ -álgebras de Hopf gracias a la teoría de perturbación.

Ahora bien, gracias a una propiedad del lema de perturbación que enunciamos a continuación, podemos establecer el siguiente teorema, el cual nos da una definición de  $A_\infty$ -álgebras de Hopf.

**Lema 3.24.** [GLS91] Sean  $r : \{N, M, f, g, \phi\}$  una contracción y  $\delta, \delta'$  y  $\delta + \delta'$  datos de perturbación de  $r$ . Entonces,

$$(r_\delta)_{\delta'} = (r_{\delta'})_\delta = r_{(\delta+\delta')}.$$

**Teorema 3.25.** Dada la contracción  $r : H \rightarrow M$ , donde  $H$  es una dg-álgebra de Hopf y  $M$  es un dg-módulo, si consideramos la contracción definida por la proposición 3.19,

$$bc(r) : \{(\widehat{BCH}, d_t), (\widehat{BCM}, d_t), bc(f), bc(g), bc(\phi)\}$$

junto con el dato de perturbación  $d_c + (-1)^q d_s$ , gracias al lema de perturbación básico, podemos definir una nueva contracción

$$bc(r)_{d_c+(-1)^q d_s} : \{(\widehat{BCH}, d_t + d_c + (-1)^q d_s), (\widehat{BCM}, d_t + d_\infty), bc(f)_\infty, bc(g)_\infty, bc(\phi)_\infty\}$$

tal que:

- la proyección sobre los elementos con grado simplicial igual a uno, da lugar a una  $A_\infty$ -álgebra en  $M$ ;
- la proyección sobre los elementos con grado cosimplicial igual a uno, da lugar a una  $A_\infty$ -coalgebra en  $M$ ;
- los operadores de homotopía de orden superior en  $M$ , son operaciones  $h^{i,j} : M^{\otimes i} \rightarrow M^{\otimes j}$  de grado  $i + j - 3$ , con  $i > 1, j > 1$ , los cuales vienen dados por las fórmulas del lema de perturbación básico que detallamos a continuación.

**Demostración:** Gracias al lema de perturbación, junto con el lema anterior, sabemos que

$$bc(r)_{(d_c+(-1)^q d_s)} = (bc(r)_{d_c})_{(-1)^q d_s} = (bc(r)_{(-1)^q d_s})_{d_c}.$$

Con el fin de simplificar las fórmulas, denotemos por  $\delta = d_c, \delta' = (-1)^q d_s, f = bc(f), g = bc(g)$  y por  $\phi = bc(\phi)$ . La fórmula explícita de  $d_\infty$  es

$$d_\infty = f(\delta + \delta') \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\phi(\delta + \delta'))^i g.$$

Desarrollando esta fórmula tenemos que

$$\begin{aligned}
 d_\infty &= f\delta \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\phi\delta + \phi\delta')^i g + f\delta' \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\phi\delta + \phi\delta')^i g \\
 &= \underbrace{f\delta \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\phi\delta)^i g}_{(*) A_\infty\text{-álgebra}} + \underbrace{f\delta' \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\phi\delta')^i g}_{(*) A_\infty\text{-coálgebra}} \\
 &\quad + \underbrace{f\delta \sum_{i \geq 0} (-1)^i \sum_{k > 0}^i \sigma(\underbrace{(\phi\delta)^{i-k} (\phi\delta')^k}_{\text{Permutaciones}}) g + f\delta' \sum_{i \geq 0} (-1)^i \sum_{k > 0}^i \sigma(\underbrace{(\phi\delta)^{i-k} (\phi\delta')^k}_{\text{Permutaciones}}) g}_{(\diamond) \text{Operadores de homotopía de orden superior}}
 \end{aligned}$$

donde  $\sigma(\underbrace{f^i g^j}_{\text{Permutaciones}})$  denota la suma de todas composiciones posibles de  $f$  con  $g$  dadas por las permutaciones del conjunto  $\underbrace{\{f, \dots, f\}}_{i\text{-veces}} \underbrace{\{g, \dots, g\}}_{j\text{-veces}}$ .

Veamos pues que en la anterior fórmula, obtenemos la estructura de  $A_\infty$ -álgebra, la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra y también la de  $A_\infty$ -álgebra de Hopf, la cual aúna las dos anteriores.

- Como ya hemos visto en el teorema 3.20, sabemos que sobre elementos con grado cosimplicial 1, obtenemos la  $A_\infty$ -coálgebra de  $M$ , la cual viene dada por la fórmula (\*). Por tanto, solamente tenemos que restringir dicha fórmula a elementos  $M_*^{*,1}$ .
- Análogamente, por el teorema 3.22, sabemos que sobre los elementos con grado simplicial 1, obtenemos la  $A_\infty$ -álgebra de  $M$ , la cual viene dada por la fórmula (\*). Por tanto, solamente tenemos que restringir dicha fórmula a elementos  $M_*^{1,*}$ .
- Ahora bien, para los operadores de homotopía de orden superior

$$h^{i,j} : M^{\otimes i} \rightarrow M^{\otimes j}, \text{ con } i > 1, j > 1,$$

veamos que las fórmulas  $(\diamond)$  nos los definen, siempre y cuando consideremos  $h^{i,j} : M^{i,1} \rightarrow M^{1,j}$ . Para ello, veamos que tienen grado  $i + j - 3$ .

En las fórmulas detalladas anteriormente, el único modo de ir de  $M^{i,1}$  a  $M^{1,j}$  es aplicando  $(i-1)$ -veces la diferencial simplicial y  $(j-1)$ -veces la diferencial cosimplicial, por tanto, las fórmulas explícitas para  $h^{i,j}$  son

$$\boxed{h^{i,j} = f\delta(-1)^{i-1} \sigma(\underbrace{(\phi\delta)^{i-2} (\phi\delta')^{j-1}}_{\text{Permutaciones}}) g + f\delta'(-1)^{i-1} \sigma(\underbrace{(\phi\delta)^{i-1} (\phi\delta')^{j-2}}_{\text{Permutaciones}}) g}$$

Teniendo en cuenta el grado tensorial exclusivamente, es claro que  $\delta$  y  $\delta'$  tienen grado cero, por tanto el grado de dichas operaciones depende del número de operadores de homotopía  $\phi$  en las fórmulas, que son, en el primer caso,  $(i-2) + (j-1) = i+j-3$ , y en el segundo  $(i-1) + (j-2) = i+j-3$ , tal y como queríamos probar. ■

**Definición 3.7.** Una  $A_\infty$ -álgebra de Hopf es un módulo graduado  $H$ , dotado de una familia de operaciones de módulos graduados  $h^{i,j} : H^{\otimes i} \rightarrow H^{\otimes j}$ , para todo  $i, j \geq 1$ , de grado  $i+j-3$ , de modo que:

- La familia de operaciones  $h^{i,1} : H^{\otimes i} \rightarrow H$ , define una estructura de  $A_\infty$ -álgebra en  $H$ .
- Igualmente, la familia de operaciones  $h^{1,j} : H \rightarrow H^{\otimes j}$ , define una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra en  $H$ .
- Al considerar el módulo tensorial  $BC(H)$ , las extensiones lineales de la familia de operaciones  $\{h^{i,j}\}_{i,j}$  definen una diferencial.

Un corolario inmediato de todos los resultados previos, junto con la definición previa es el siguiente.

**Corolario 3.26.** Sean  $H$  una dga-álgebra de Hopf con producto  $\mu$ , coproducto  $\Delta$ ,  $M$  un dga-módulo y  $r : \{H, M, f, g, \phi\}$  una contracción de dga-módulos. Entonces,  $M$  adquiere una estructura de  $A_\infty$ -álgebra de Hopf inducida por la contracción  $r$  dada por las fórmulas

$$\begin{aligned} h^{n,1} &= \mu_n = (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} f \mu \phi^{\otimes 2} \mu^{[2]} \dots \phi^{\otimes (n-1)} \mu^{[n-1]} g^{\otimes n} \\ h^{1,n} &= \Delta_n = (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} f^{\otimes n} \Delta^{[n-1]} \phi^{\otimes (n-1)} \dots \Delta^{[2]} \phi^{\otimes 2} \Delta g \\ h^{i,j} &= (-1)^{\lfloor \frac{i+j-2}{2} \rfloor} f^{\otimes j} \Delta \sigma \underbrace{((\phi \Delta)^{i-2} (\phi \mu)^{j-1})}_{\text{Permutaciones}} g^{\otimes i} + (-1)^{\lfloor \frac{i+j-2}{2} \rfloor} f^{\otimes j} \mu \sigma \underbrace{((\phi \Delta)^{i-1} (\phi \mu)^{j-2})}_{\text{Permutaciones}} g^{\otimes i} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta^{[i]} &= (\Delta \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{i-1 \text{ veces}} + \dots + (-1)^{i-1} \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{i-1 \text{ veces}} \otimes \Delta) \\ \phi^{\otimes i} &= \sum_{k=0}^{i-1} 1^{\otimes k} \otimes \phi \otimes (fg)^{\otimes (i-k-1)} \\ \lfloor \frac{k}{2} \rfloor &= \text{Parte entera de } \frac{k}{2} \end{aligned}$$

y  $\mu, \Delta$  y  $\phi$  deben ser entendidos en la fórmula de  $h^{i,j}$  como las operaciones inducidas en la representación matricial de  $BC(H)$ .

### 3.3. Problemas abiertos

Es importante mencionar en esta sección algunas de las líneas de investigación que se podrían seguir gracias a diversos aspectos relacionados con los resultados aquí expuestos.

La primera línea podría ser la búsqueda de un modelo canónico de álgebra de Hopf, es decir, dada una  $A_\infty$ -álgebra de Hopf  $M$ , encontrar una álgebra de Hopf junto con una contracción que induzca vía perturbación las operaciones originales de  $M$ , y que además cualquier otra álgebra de Hopf que induzca vía perturbación las mismas operaciones sea homotópicamente equivalente a la primera como álgebras de Hopf.

Este primer punto no parece fácilmente asequible, visto el comportamiento multiplicativo de la construcción  $BC(H)$ , por lo que es posible que no se pueda obtener una respuesta fácil ni rápida en el tiempo.

La segunda línea de actuación vive en el mundo computacional: una vez descrita totalmente la estructura diferencial al igual que multiplicativa módulo  $BC(H)$ , resultaría interesante calcular vía un ordenador las fórmulas explícitas de los operadores de homotopía de orden superior.

Como primer paso, los algoritmos que calculan las estructuras de  $A_\infty$ -álgebras al igual que  $A_\infty$ -coálgebras ya están programados (tal y como mostramos en el último capítulo), aunque de modo independiente, por lo que sería un avance significativo el poder calcular todas las operaciones involucradas (al menos a bajo nivel) en una  $A_\infty$ -álgebra de Hopf dada por una contracción globalmente.

De igual modo, el establecer las fórmulas explícitas que deben verificar las operaciones unas con otras aparece como cuestión de modo natural.

Por último, otro aspecto importante es estudiar las posibles interacciones entre el trabajo de S. Sanedidze y R. Umble ([SU1],..., [SU4]) y el nuestro.



## Capítulo 4

# Estructura de la Homología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane

El objetivo principal de este capítulo es el estudio de la estructura algebraica de la homología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane.

Es bien conocido en Topología Algebraica que en general los grupos de homología de un espacio dado son más fáciles de obtener que los grupos de homotopía; de hecho, en general los grupos de homotopía no se saben calcular. Por otro lado, dado un espacio topológico, si se conocen los grupos de homología existen métodos clásicos (como la Torre de Whitehead o la Torre de Postnikov) para obtener resultados parciales de sus grupos de homotopía. Dichos métodos consisten en anular adecuadamente los grupos de homotopía a partir de cierto nivel.

En esta construcción juegan un papel esencial los espacios de Eilenberg-Mac Lane, o más comúnmente conocidos como  $K(\pi, n)$ , los cuales presentan un único grupo de homotopía distinto de cero,  $\pi$ , en dimensión  $n$ .

Así pues, la necesidad de conocer la estructura algebraica de dichos espacios surge de modo natural.

Centraremos nuestro estudio en la homología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane con coeficientes en el anillo base  $\mathbb{Z}_p$ , con  $p$  primo, la cual, gracias a un trabajo de H. Cartan (véase [Car56]), se sabe que tiene estructura de álgebra.

Demostraremos que desde el punto de vista de coálgebra, dicha homología explota en una  $A_\infty$ -**estructura** en donde las operaciones que la definen están estrechamente relacionadas con el número primo  $p$ .

## 4.1. Propiedades principales

Recordemos brevemente algunas propiedades de los espacios de Eilenberg-Mac Lane. En particular, todos los resultados expuestos en esta sección son ciertos para cualquier anillo base conmutativo con unidad distinta de cero y sólo en la siguiente sección será cuando nos restrinjamos al anillo  $\mathbb{Z}_p$ .

**Definición 4.1.** Dado  $X$  un espacio topológico, se dice que es un *espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo  $K(\pi, n)$*  si su único grupo de homotopía no trivial es  $\pi_n(X) \approx \pi$  (excepto  $\pi_0 = \mathbb{Z}$ ).

Si consideramos como grupo  $\mathbb{Z}$ , tenemos como ejemplo de  $K(\mathbb{Z}, 1)$  a la esfera de dimensión uno,  $\mathbb{S}^1$ . Sin embargo, para  $n \geq 2$ , los ejemplos se vuelven mucho más complejos; de hecho, para  $n = 2$  encontramos en la literatura como ejemplo el espacio proyectivo complejo infinito  $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ , i.e.,

$$\pi_n(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta simplicidad en los grupos de homotopía se transfiere en una complejidad enorme en la estructura algebraica de la homología como ya hemos indicado en la introducción.

Para tener una definición más constructiva de los espacios de Eilenberg-Mac Lane, tenemos que recurrir a la topología simplicial, la cual nos proporciona un método simple de obtener de modo recursivo  $K(\pi, n)$ 's para cualquier  $n$ , siempre y cuando  $\pi$  sea abeliano.

**Lema 4.1.** [May67] Dado  $\pi$  un grupo, si se define el conjunto simplicial  $K = \{K_n\}_{n \geq 0}$ , donde  $K_n = \pi$  para todo  $n$  y los operadores cara y degeneración son la identidad de  $\pi$ , entonces  $K$  resulta ser un  $K(\pi, 0)$  y cualquier otro espacio de tipo  $K(\pi, 0)$  es naturalmente isomorfo a él (simplicialmente).

Ahora bien, para obtener un  $K(\pi, n)$  con  $n > 0$ , necesitamos dar la siguiente definición

**Definición 4.2.** [May67] Dado  $G$  un grupo simplicial, se define el *espacio clasificante (geométrico) de  $G$* ,  $\bar{W}_g(G)$ , como el conjunto simplicial

$$\begin{aligned} \bar{W}_g(G)_0 &= \star \\ \bar{W}_g(G)_n &= G_{n-1} \times \cdots \times G_0 \\ \delta_0(g_{n-1}, \cdots, g_0) &= (g_{n-2}, \cdots, g_0), \\ \delta_i(g_{n-1}, \cdots, g_0) &= (\delta_{i-1}g_{n-1}, \cdots, \delta_1g_{n-i+1}, \delta_0g_{n-i} \cdot g_{n-i-1}, g_{n-i-2}, \cdots, g_0), \\ s_0(g_{n-1}, \cdots, g_0) &= (e_n, g_{n-1}, \cdots, g_0), \\ s_i(g_{n-1}, \cdots, g_0) &= (s_{i-1}g_{n-1}, \cdots, s_0g_{n-i}, e_{n-i}, g_{n-i-1}, \cdots, g_0). \end{aligned}$$

Si  $G$  es un grupo conmutativo simplicial,  $\bar{W}_g(G)$  será también un grupo simplicial conmutativo cuyo producto es

$$(g_{n-1}, \dots, g_0) \cdot (g'_{n-1}, \dots, g'_0) = (g_{n-1}g'_{n-1}, \dots, g_0g'_0).$$

En tal caso, se puede definir el clasificante iterado como  $\bar{W}_g^n(G) = \bar{W}_g(\bar{W}_g^{n-1}(G))$  para todo  $n \geq 1$ , donde  $\bar{W}_g^0(G) = G$ .

**Teorema 4.2.** [May67] Sea  $\pi$  un grupo. Entonces,  $\bar{W}_g(K(\pi, 0))$  es un  $K(\pi, 1)$ . Si además  $\pi$  es abeliano, entonces el conjunto simplicial  $\bar{W}_g^n(K(\pi, 0))$  es un  $K(\pi, n)$ .

$$K(\pi, n) \simeq \bar{W}_g^n(K(\pi, 0))$$

De este modo, cada vez que nos refiramos a un  $K(\pi, n)$ , lo estaremos haciendo desde el punto de vista simplicial, como el clasificante geométrico iterado  $n$  veces.

Una vez adentrados en el mundo simplicial, para poder establecer una contracción del complejo de cadenas asociado a este tipo de espacios, necesitamos dar un paso más allá e introducir la noción de clasificante en su versión algebraica, dada por S. Eilenberg y S. Mac Lane en los años cincuenta.

**Definición 4.3.** [EM53] Dada  $K$  una álgebra simplicial conmutativa y aumentada, se define el clasificante algebraico de  $K$  como el álgebra simplicial conmutativa,  $\bar{W}(K)$ , tal que

$$\begin{aligned} \bar{W}_0(K) &= [ ] \\ \bar{W}_q(K) &= K_{q-1} \otimes \dots \otimes K_0 \quad q > 0 \end{aligned}$$

El producto del álgebra  $\bar{W}_q$  viene definido por

$$(a_{q-1}, \dots, a_0) \cdot (b_{q-1}, \dots, b_0) = (a_{q-1}b_{q-1}, \dots, a_0b_0).$$

En particular, el elemento unidad es  $1_{(q, \bar{W})} = (1_{(q-1, \bar{W})}, \dots, 1_{(0, \bar{W})})$  y los operadores cara y degeneración vienen dados por las fórmulas

$$\begin{aligned} \delta_0(a_{q-1}, \dots, a_0) &= \xi(a_{q-1})(a_{q-2}, \dots, a_0), \\ \delta_i(a_{q-1}, \dots, a_0) &= (\delta_{i-1}a_{n-1}, \dots, \delta_1a_{q-i+1}, \delta_0a_{q-i} \cdot a_{q-i-1}, a_{q-i-2}, \dots, a_0), \\ \delta_q(a_{q-1}, \dots, a_0) &= \xi(a_0)(\delta_{q-1}a_{q-1}, \dots, \delta_1a_1), \\ s_i(a_{q-1}, \dots, a_0) &= (s_{i-1}a_{q-1}, \dots, s_0a_{q-i}, 1_{q-i}, a_{q-i-1}, \dots, a_0). \end{aligned}$$

A mediados de los setenta, previo análisis de la estructura multiplicativa y comultiplicativa del clasificante en su versión algebraica, V.K.A.M. Gugenheim y J.P. May aunaron ambos conceptos, probando que bajo ciertas condiciones, el complejo de cadenas del clasificante geométrico coincidía como dga-coálgebra con el clasificante algebraico del complejo de cadenas, es decir,

**Proposición 4.3.** [GM74a] *Si  $K$  es una álgebra simplicial, entonces  $\bar{W}_N(K)$  es una dga-coálgebra coconmutativa salvo homotopía. Si además  $K$  es conmutativa, entonces  $\bar{W}_N(K)$  es una dga-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa salvo homotopía.*

**Proposición 4.4.** [GM74a] *Si  $\pi$  es un grupo simplicial reducido, la construcción  $\bar{W}_N(C_*(\pi))$  coincide como dga-coálgebra con  $C_*^N(\bar{W}_g(\pi))$ . Si  $\pi$  es conmutativo, entonces coincidirán como dga-álgebras de Hopf.*

$$\boxed{C_*^N(\bar{W}_g(\pi)) \simeq \bar{W}_N(C_*(\pi))}$$

Así pues, sin perder ningún tipo de información a cerca de la estructura comultiplicativa de los espacios de Eilenberg-Mac Lane de partida, hemos pasado de un espacio topológico, a su interpretación algebraica, gracias a su modelo combinatorio-simplicial, tal y como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 4.5.** [EM53] *Dados  $\pi$  un grupo abeliano y  $n \geq 1$ , se puede construir un isomorfismo de dga-álgebras de Hopf entre  $C_*^N(K(\pi, n))$  y  $\bar{W}_N^n(K(\pi, 0))$ .*

$$\boxed{C_*^N(K(\pi, n)) \simeq \bar{W}_N^n(K(\pi, 0))}$$

Ahora bien, dado nuestro interés en el cálculo de la homología, si denotamos por  $\bar{B}$  la construcción bar reducida definida en el capítulo primero, ésta jugará un papel importante a la hora de determinar tal estructura, veamos pues cómo. El primer resultado positivo a este respecto fue dado por P. Real a primeros de los noventa

**Teorema 4.6.** [Rea93] *Sea  $K$  una álgebra simplicial aumentada (resp. álgebra simplicial aumentada conmutativa). Entonces, se puede definir una contracción  $c_{\bar{W}_B}$  entre los dga-módulos*

$$r_{\bar{W}_B} : \{\bar{W}_N(K), \bar{B}_N(K_N), f_{\bar{W}_B}, g_{\bar{W}_B}, \phi_{\bar{W}_B}\}$$

*donde la inyección  $g_{\bar{W}_B}$  es un morfismo de dga-coálgebras (resp. es un morfismo de dga-álgebras de Hopf) y la proyección  $f_{\bar{W}_B}$  es un morfismo de dga-coálgebras salvo homotopía (resp. es un morfismo de dga-álgebras de Hopf salvo homotopía).*

$$\boxed{r_{\bar{W}_B} : \bar{W}_N(K) \longrightarrow \bar{B}_N(K_N)}$$

Este teorema fue generalizado en el mismo trabajo dando lugar a

**Teorema 4.7.** [Rea93] Sea  $n \geq 1$  y  $K$  una álgebra simplicial conmutativa aumentada. Entonces, se puede definir una contracción  $c_{\bar{W}B}^n$  entre los dga-módulos

$$r_{\bar{W}B}^n : \{\bar{W}_N^n(K), \bar{B}_N^n(K_N), f_{\bar{W}B}^n, g_{\bar{W}B}^n, \phi_{\bar{W}B}^n\}$$

donde la inyección  $g_{\bar{W}B}$  es un morfismo de dga-álgebras de Hopf.

$$r_{\bar{W}B}^n : \bar{W}_N^n(K) \longrightarrow \bar{B}_N^n(K_N)$$

Aún más, teniendo en cuenta el Teorema de Eilenberg-Zilber, S. Eilenberg y S. Mac Lane establecieron una contracción entre la construcción bar del producto tensorial de dos álgebras y el producto de las construcciones bar.

**Teorema 4.8.** [EM54] Sean  $A$  y  $A'$  dos dga-álgebras conmutativas, entonces se puede construir una contracción de dga-álgebras  $r_B : \bar{B}_N(A \otimes A') \rightarrow \bar{B}_N(A) \otimes \bar{B}_N(A')$ . Además la inyección es un morfismo de dga-coálgebras.

$$r_B : \bar{B}_N(A \otimes A') \longrightarrow \bar{B}_N(A) \otimes \bar{B}_N(A')$$

Dicha contracción, introducida en el capítulo anterior, resulta ser desde el punto de vista de coálgebras, semi-completa, lo que nos permite hasta este punto preservar toda la estructura comultiplicativa del complejo de cadenas asociado a un  $K(\pi, n)$  cualquiera (con  $\pi$  un grupo abeliano finitamente generado).

Ahora bien, con el fin de hacer más fácil el cálculo, necesitamos presentar un par de resultados puramente algebraicos.

**Teorema 4.9** (Teorema Fundamental de Grupos Abelianos Finitamente Generados). *Todo grupo abeliano finitamente generado  $\pi$  es una suma directa de subgrupos cíclicos  $\{\pi_j \subset \pi\}$ ,*

$$\pi = \bigoplus_{j=1}^k \pi_j, \quad \pi_j = \mathbb{Z}/\nu_j \mathbb{Z}, \quad \nu_j \in \mathbb{Z};$$

donde  $\nu_j \geq 1$  pueden ser escogidos de modo único (salvo permutación) como potencias de números primos  $p_j$ ,  $\nu_j = p_j^{\rho_j}$ ,  $\rho_j > 0$  (ver, por ejemplo, [Kur56]).

**Proposición 4.10.** [EM54] Sea  $\pi$  un grupo abeliano y  $n \geq 0$ . Dada  $\pi = \bigoplus_{j=1}^k \pi_j$  una descomposición de  $\pi$  en subgrupos, entonces se puede construir una contracción de dga-módulos entre  $\bar{B}_N^n(\Lambda(\pi))$  y  $\bar{B}_N^n(\Lambda(\pi_1)) \otimes \cdots \otimes \bar{B}_N^n(\Lambda(\pi_k))$ , donde la inyección es un morfismo de dga-álgebras de Hopf.

**Demostración:** Teniendo en cuenta que  $\pi$  viene dado como suma directa de subgrupos, tenemos el isomorfismo de dga-álgebras de Hopf

$$\Lambda[\pi] \cong \Lambda[\pi_1] \otimes \cdots \otimes \Lambda[\pi_k];$$

Aplicando  $\bar{B}_N$ , obtenemos una contracción de álgebras de Hopf  $r_{\bigoplus \pi_j}$ ,

$$r_{\oplus \pi_j} : \bar{B}_N(\Lambda(\pi)) \rightarrow \bar{B}_N(\Lambda(\pi_1)) \otimes \cdots \otimes \bar{B}_N(\Lambda(\pi_j))$$

Haciendo uso del teorema 4.8, obtenemos una contracción entre  $\bar{B}_N(\Lambda[\pi])$  y  $\bar{B}_N(\Lambda[\pi_1]) \otimes \cdots \otimes \bar{B}_N(\Lambda[\pi_k])$ , cuya inyección sigue siendo un morfismo de dga-álgebras de Hopf. Así pues, aplicando reiteradas veces  $\bar{B}_N$ , se prueba el resultado anterior.

$$r_{\oplus \pi_j}^n : \bar{B}_N^n(\Lambda(\pi)) \rightarrow \bar{B}_N^n(\Lambda(\pi_1)) \otimes \cdots \otimes \bar{B}_N^n(\Lambda(\pi_j))$$

Por tanto, podemos restringir nuestro estudio del cálculo de la  $A_\infty$ -estructura de la homología de los  $K(\pi, n)$ 's al caso especial en que  $\pi$  es  $\mathbb{Z}$ , i.e., ver qué pasa con  $K(\mathbb{Z}, n)$ , para luego adentrarnos en los casos  $\mathbb{Z}^r$ , con  $r$  un natural y  $\mathbb{Z}_p^r$ , con  $p$  primo.

## 4.2. Método de cálculo y estudio multiplicativo de la homología

Como ya hemos mencionado anteriormente, a la hora de calcular la homología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane con coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$ , sólo necesitamos establecer una contracción,  $r_{(\pi, n); p}$ , entre el complejo de cadenas de  $K(\pi, n)$ ,  $C_*(K(\pi, n); \mathbb{Z}_p)$  y un dga-módulo de tipo libre, el cual coincidirá con la homología  $H_*(K(\pi, n); \mathbb{Z}_p)$ , en caso de que su diferencial sea nula.

Para ello, nuestro punto de partida es el trabajo de A. Prouté ([Pro84]) acerca de la  $A_\infty$ -coálgebra inducida sobre el producto tensorial de una álgebra exterior y una álgebra polinomial modificada; junto con los resultados anteriormente enunciados, en los cuales se establecen los estadios intermedios para poder obtener la  $A_\infty$ -estructura de dichos espacios.

Veamos pues, el esquema del trabajo:

- Hasta ahora, hemos conseguido establecer una contracción  $r_{WB}$  “conectando” el complejo de cadenas normalizado  $C_*^N(\overline{W}_g(\pi))$  del clasificante geométrico de un grupo abeliano  $\pi$ , y la construcción bar reducida  $\bar{B}_N(C_*(\pi))$  del complejo de cadenas normalizado de  $\pi$ .
- Veremos a continuación la necesidad de establecer un isomorfismo (o iso-contracción) entre la construcción bar reducida del álgebra exterior y el álgebra polinomial modificada.
- Para acabar estudiando la transferencia vía una contracción entre la construcción bar reducida  $\bar{B}(\Gamma(u, 2n))$  y el producto tensorial infinito de álgebras del tipo  $E(v, 2np^i + 1) \otimes \Gamma(w, 2np^{(i+1)} + 2)$ .

Teniendo en cuenta la terminología de tipos de contracciones introducida en el capítulo anterior, se tiene que los dos primeros puntos están determinados por contracciones que preservan la estructura de coálgebra, siendo la última de estas contracciones la que produce una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra en el dg-módulo menor. Obviamente, la obtención de una  $A_\infty$ -coálgebra en la homología viene dada por este último hecho.

El isomorfismo mencionado como segundo paso de nuestro esquema fue demostrado por S. Eilenberg y S. Mac Lane.

**Lema 4.11.** [EM54] Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene el isomorfismo de dga-álgebras de Hopf

$$\begin{aligned} \bar{B}(E(u, 2n + 1)) &\rightarrow \Gamma(\sigma(u), 2n + 2) \\ [u | \overset{k \text{ veces}}{\cdots} | u] &\mapsto \gamma_k(\sigma(u)) \end{aligned}$$

Dicho isomorfismo se puede ver como una iso-contracción, en el cual hemos descrito el generador del álgebra polinomial modificada por  $\sigma(u) = [u]$  con el fin de destacar que se puede obtener a partir del generador del álgebra exterior, vía la operación suspensión  $\sigma : A \rightarrow \bar{B}(A)$ .

Una vez expuestos todos los resultados previos necesarios, pasemos a calcular la estructura multiplicativa de la homología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane con coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$ , con  $p$  primo distinto de 2.

Antes de entrar en detalles y con el fin de hacer más claro nuestro propósito, presentamos aquí el teorema principal de toda esta sección.

**Teorema 4.12.** Sea  $\pi$  un grupo abeliano finitamente generado,  $n \geq 3$  un entero positivo y  $p$  un primo distinto de 2. Entonces, las únicas operaciones (posiblemente) no nulas en la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra de  $H_*(K(\pi, n); \mathbb{Z}_p)$  son  $\Delta_{i(p-2)+2}$ ,  $\forall i \geq 0$ .

**Demostración:** Para probar dicho teorema, necesitamos establecer una contracción de  $C_*(K(\pi, n), \mathbb{Z}_p)$  en un dga-módulo libre de tipo finito.

Así pues, nuestra demostración será desarrollada en primer lugar para el caso en que el grupo  $\pi$  sea  $\mathbb{Z}$ , dando lugar a una prueba inmediata para el caso en que  $\pi$  sea de la forma  $\mathbb{Z}^r$ ; a posteriori veremos que pasa para  $\mathbb{Z}_{q^r}$ , finalizando así el resultado para cualquier grupo  $\pi$  abeliano finitamente generado.



### 4.3. Caso $K(\mathbb{Z}, n)$

#### 4.3.1. $K(\mathbb{Z}, n)$ , donde $n \leq 2$

En este caso, los resultados aquí mostrados son ciertos independientemente del anillo base.

$$\boxed{n = 0}$$

$$C_*(K(\mathbb{Z}, 0), \Lambda) \rightarrow \Lambda[\mathbb{Z}] \Rightarrow H(K(\mathbb{Z}, 0), \Lambda) = \Lambda[\mathbb{Z}].$$

$$\boxed{n = 1}$$

$$C_*(K(\mathbb{Z}, 1), \Lambda) \rightarrow \bar{B}(C_*(K(\mathbb{Z}, 0), \Lambda)) \simeq \bar{B}(\Lambda[\mathbb{Z}]) \Rightarrow H(K(\mathbb{Z}, 1), \Lambda) = E_\Lambda(u, 1).$$

Esta última afirmación es bien conocida gracias al teorema

**Teorema 4.13.** [EM54] Dado el grupo  $\mathbb{Z}$ , se puede construir una contracción de dga-álgebras de Hopf,

$$r_{\mathbb{Z}} : \{\bar{B}_N(\Lambda[\mathbb{Z}]), E(u, 1), f_{\mathbb{Z}}, g_{\mathbb{Z}}, \phi_{\mathbb{Z}}\},$$

donde los morfismos explícitos vienen dados por

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}}([n]) &= n \cdot u, \quad n \in \mathbb{Z} \\ f_{\mathbb{Z}}x_n &= 0; \quad x_n \in \bar{B}_n(\Lambda[\mathbb{Z}]), n > 1; \\ g_{\mathbb{Z}}(u) &= [1] \\ \phi_{\mathbb{Z}}[n_1 | \cdots | n_k] &= \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n_1-1} [1 | i | n_2 | \cdots | n_k] & \text{si } n_1 > 1, \\ 0 & \text{si } n_1 = 1, \\ \sum_{i=1}^{|n_1|} [1 | -i | n_2 | \cdots | n_k] & \text{si } n_1 < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{n = 2}$$

$$C_*(K(\mathbb{Z}, 2), \Lambda) \rightarrow \bar{B}(C_*(K(\mathbb{Z}, 1), \Lambda)) \Rightarrow H(K(\mathbb{Z}, 2), \Lambda) = \bar{B}(E(u, 1)) \cong \Gamma(\nu, 2).$$

#### 4.3.2. $K(\mathbb{Z}, n)$ , donde $n = 3$

$$C_*(K(\mathbb{Z}, 3), \Lambda) \rightarrow \bar{B}(C_*(K(\mathbb{Z}, 2), \Lambda)) \Rightarrow H(K(\mathbb{Z}, 3), \Lambda) = H(\bar{B}(\Gamma(w, 2)), \Lambda).$$

Ahora bien, en caso de querer avanzar en nuestro estudio, debemos restringirnos al caso  $\Lambda = \mathbb{Z}_p$  y hacer uso del lema



**Lema 4.14.** [Pro84] Si  $\Lambda = \mathbb{Z}_p$ , con  $p$  primo, entonces el morfismo definido por

$$\Phi : \bigotimes_{i=1}^{\infty} Q_p(y_i, 2np^i) \rightarrow \Gamma(w, 2n)$$

$$y_i \longrightarrow \gamma_{p^i}(w)$$

es un isomorfismo de dga-álgebras.

**Demostración:** Recordemos aquí la definición de las álgebras polinomiales divididas (introducidas en el capítulo primero), junto con alguna propiedad que se deduce automáticamente, con el fin de hacer más fácil la demostración.

Por definición,  $\Gamma(w, 2n)$  es la dga-álgebra libre generada por  $\gamma_0(w) = 1, \gamma_1(w) = w, \dots, \gamma_k(w), \dots$ , con  $|\gamma_k(w)| = 2kn$ , diferencial nula y producto dado por

$$\gamma_k(w)\gamma_h(w) = \frac{(k+h)!}{k!h!}\gamma_{k+h}(w).$$

Una propiedad inmediata es que  $w \cdot \gamma_{k-1}(w) = k\gamma_k(w)$ , la cual implica que

$$w^k = k!\gamma_k(w) \iff \gamma_k = \frac{w^k}{k!}.$$

Ahora bien, dado que estamos en característica  $p$ , con  $p$  primo, se tiene que

$$(\gamma_{p^i}(w))^k = k!\gamma_{kp^i}(w).$$

- $\Phi$  está bien definida. Vale con probar que  $(\Phi(y_i))^p = 0$ .

$$(\Phi(y_i))^p = \gamma_{p^i}(w)^p = \frac{(p^i + p^i)!}{p^i!p^i!} \frac{(2p^i + p^i)!}{2p^i!p^i!} \dots \frac{((p-1) \cdot p^i + p^i)!}{(p-1) \cdot p^i!p^i!} \gamma_{p^{i+1}}(w) = 0.$$

- $\Phi$  es biyectiva, claramente.
- $\Phi$  está definida sobre los generadores y se extiende de modo que conmute con los productos.

$$\Phi(y_i \cdot y_i) = \Phi(y_i^2) = \Phi(y_i) \cdot \Phi(y_i) = (\gamma_{p^i}(w))^2 = 2\gamma_{2p^i}(w). \quad \blacksquare$$

Por tanto, si consideramos como anillo base  $\mathbb{Z}_p$ , por el lema anterior, podemos sustituir  $\bar{B}(\Gamma(w, 2))$  por la construcción bar de un producto infinito de álgebras polinomiales truncadas



$$\bar{B}(\bigotimes_{i=1}^{\infty} Q_p(y_i, 2p^i)).$$

El siguiente escollo a resolver es si el producto infinito de coálgebras, sigue siendo una coálgebra, con el fin de poder aplicar el teorema 4.8. Es aquí donde tenemos que buscar la respuesta en el mundo categórico. Sabemos que las dga-coálgebras forman una categoría, por lo que gracias al siguiente teorema

**Teorema 4.15.** [Mac71] *Dada una categoría, el límite inductivo pertenece a dicha categoría.*

podemos afirmar que el producto tensorial infinito de dga-álgebras es una dga-álgebra, luego

$$\boxed{\bar{B}(\bigotimes_{i=1}^{\infty} Q_p(y_i, 2np^i)) \Rightarrow \bigotimes_{i=1}^{\infty} \bar{B}(Q_p(y_i, 2np^i)) \text{ preserva la estructura de coálgebra.}}$$

Por tanto, sólo nos queda ver si es posible definir una contracción del álgebra truncada  $Q_p(y_i, 2np^i)$ , hacia un dga-módulo de tipo libre.

**La contracción**  $\bar{B}(Q_p(u, 2n)) \rightarrow E(v, 2n + 1) \otimes \Gamma(w, 2np + 2)$

Dada  $Q_p(u, 2n)$ , podemos establecer una contracción de su construcción bar hacia el producto tensorial de una álgebra exterior con una álgebra polinomial modificada,

$$r_{BQ} = \{\bar{B}(Q_p(u, 2n)), E(v, 2n + 1) \otimes \Gamma(w, 2np + 2), f_{BQ}, g_{BQ}, \phi_{BQ}\}.$$

Dicha contracción  $r$ , es válida sobre cualquier anillo conmutativo con unidad distinta de cero y viene definida sobre elementos homogéneos de  $\bar{B}(Q_p(u, 2n))$ , por la fórmulas que pasamos a detallar.

Dado  $[u^{r_1} | \dots | u^{r_m}]$  un elemento de  $\bar{B}(Q_p(u, 2n))$ , de ahora en adelante lo denotaremos por  $[r_1 | \dots | r_m]$ , donde  $0 \leq r_i < p$ ; además con el fin de simplificar un poco más la notación,  $E(v, 2n + 1) \otimes \Gamma(w, 2np + 2)$  será denotado por  $E \otimes \Gamma$ .

Las fórmulas explícitas de la contracción  $c_{BQ}$  son:

$$f_{BQ}[r_1 | t_1 | \dots | r_m | t_m] = \{\prod_{k=1}^m \delta_{p, r_k + t_k}\} \gamma_m(w),$$

$$f_{BQ}[r_1 | t_1 | \dots | r_m | t_m | l] = \delta_{1, l} \{\prod_{k=1}^m \delta_{p, r_k + t_k}\} v \otimes \gamma_m(w),$$

donde los símbolos  $\delta_{i, j}$  son los deltas de Kronecker:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

El morfismo  $g_{BQ} : E \otimes \Gamma \rightarrow \bar{B}(Q_p(u, 2n))$  está definido sobre los generadores como:

$$g_{BQ}(v) = [1],$$

$$g_{BQ}(\gamma_k(w)) = [1|p-1| \overset{k \text{ veces}}{|1|} |p-1].$$

El operador de homotopía  $\phi_{BQ}$  está definido por:

$$\phi_{BQ}1 = 0; \quad \phi_{BQ}[1] = 0;$$

$$\phi_{BQ}[x] = -[1|x-1] \quad 1 < x < p;$$

$$\phi_{BQ}[x|y] = -[1|x-1|y];$$

$$\phi_{BQ}[x|y|z] = -[1|x-1|y|z] - \delta_{p,x+y}[1|p-1|\phi(z)]$$

donde  $z \in \bar{B}(Q_p(u, 2n))$ .

**Proposición 4.16.** [EM54] *La anteriormente definida*

$$r_{BQ} = \{\bar{B}(Q_p(u, 2n)), E(v, 2n+1) \otimes \Gamma(w, 2np+2), f_{BQ}, g_{BQ}, \phi_{BQ}\}$$

*es una contracción.*

Para poder determinar las operaciones no nulas

$$\Delta_i : E \otimes \Gamma \rightarrow (E \otimes \Gamma)^{\otimes i}$$

en la  $A_\infty$ -coálgebra del dga-módulo menor  $E \otimes \Gamma$ , debemos estudiar qué pasa con

$$\Delta_i = (-1)^{sig} f^{\otimes i} (\Delta^{[i-1]} \phi^{[r, i-1]} \dots \Delta^{[2]} \phi^{[2]}) \Delta g, \quad \forall i \geq 2.$$

Recordemos que el coproducto en  $\bar{B}(Q_p(u, 2n))$  es

$$\Delta([a_1 | \dots | a_r]) = \sum_{i=0}^r [a_1 | \dots | a_i] \otimes [a_{i+1} | \dots | a_r].$$

**Proposición 4.17.** *Si descomponemos  $\Delta(x)$  en la forma  $\Delta = \sum \Delta^1(x) \otimes \Delta^2(x)$ , siendo  $x$  un elemento de  $\bar{B}(Q_p(u, 2n))$ , se verifican las propiedades*



- $\phi_{BQ}(\Delta^1)^i g_{BQ} = 0, \quad i \geq 1;$
- $\phi_{BQ}(\Delta^1)^i \phi_{BQ} = 0, \quad i \geq 1.$

A continuación introducimos una herramienta que nos simplifique los cálculos y nos sirva para establecer que operaciones de la fórmula de la  $A_\infty$ -estructura son nulas. Por similitud con trabajos anteriores en [Jim03], [CHATA00b], [CHATA00a], [Rea00], etc, esta técnica la hemos querido denominar *Teoría de Inversiones*.

Dicha técnica, necesaria para alcanzar nuestro propósito teórico, resulta ser además muy potente a la hora de calcular las fórmulas explícitas vía un ordenador dado que simplifica la complejidad, tanto en tiempo como en espacio, de las operaciones involucradas (dicho estudio será descrito en la última sección, haciendo una comparativa teórica entre el cálculo usando o no dicha estrategia).

### Teoría de Inversiones

**Definición 4.4.** Sea  $S$  el submódulo de  $\overline{B}(Q_p(u, 2n))$  generado por los elementos  $[a_1|a_2|\cdots|a_r]$  tales que o bien  $a_{2i+1} = 1$  para todo  $i$  o bien  $a_{2i} = 1$  para todo  $i$  y los elementos del tipo  $[a_i]$  con  $1 \leq i \leq p-1$ .

**Proposición 4.18.** Con la definición anterior de  $S$ , se verifican las propiedades

- $\phi_{BQ}(S) \subset S,$
- $\Delta(S) \subset S \otimes S,$
- $\text{Im } g_{BQ} \subset S.$

**Definición 4.5.** Dado  $[x] \equiv [a_1|a_2|\cdots|a_r] \in \overline{B}(Q_p(u, 2n))$ , diremos que posee  $t$  *inversiones* dependiendo de los casos:

- Si  $[x]$  es de la forma  $[1|a_1|\cdots|a_r|1]$  ó  $[1|a_1|\cdots|1|a_r]$ , entonces tiene  $t$  *inversiones* si existen  $t-a_i$ 's, donde  $a_i \in \{1, \dots, p-2\}$ .
- Si  $[x]$  es de la forma  $[a_1|1|a_2|\cdots|1]$  ó  $[a_1|1|a_2|\cdots|a_r]$ , entonces tiene  $t$  *inversiones* si existen  $(t+1)-a_i$ 's, con  $a_i \in \{1, \dots, p-2\}$ .
- Si  $[x] \equiv [1|1|\cdots|1|1]$ , tiene  $[n/2]$ -*inversiones*, donde  $n$  es el número de 1's.
- El elemento  $[a_i]$  tiene 0-*inversiones* para todo  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ .

**Observación 4.1.** Si tenemos  $[x] \otimes [y]$ , diremos que  $[x] \otimes [y]$  tiene  $t$ -*inversiones* si  $[x]$  tiene  $r$ -*inversiones*,  $[y]$  tiene  $s$ -*inversiones* y  $r+s=t$ .

**Proposición 4.19.** Con esta definición, se verifican las siguientes propiedades:

- $\phi_{BQ}(\text{elemento con } i\text{-inversiones}) = \sum \text{elementos con al menos } (i + 1)\text{-inversiones},$
- $\Delta(\text{elemento con } i\text{-inversiones}) = \sum \text{elementos con al menos } (i - 1)\text{-inversiones}$
- $f_{BQ}(\text{elemento con } i\text{-inversiones}) = 0, \quad \forall i \geq 1.$

Es particular,  $f$  es distinto de cero si y sólo si actúa sobre elementos de la forma:

$$[1|p-1|\cdots|p-1|1], [1|p-1|\cdots|p-1], [p-1|1|\cdots|p-1|1], [1].$$

$\phi$  sobre los elementos del tipo 1 ó del tipo 3 es nulo.

**Definición 4.6.** Dado un elemento  $a_i$ , con  $1 \leq a_i < p-1$ , definimos el *grado de inversión* de  $a_i$ , denotado por  $|a_i|$ , como “lo lejos que está de 1”, es decir,

$$|a_i| = a_i - 1.$$

**Definición 4.7.** Dado un elemento  $[x] \in \overline{B}(Q_p)$ , se define el *grado de inversión* de  $[x] = [a_1|\cdots|a_r]$ , como la suma de los grados de los  $a_i$ 's.

**Proposición 4.20.** Con esta definición, se verifican las propiedades:

- $\phi_{BQ}(\text{elemento con grado inv. } i) = \sum \text{elementos con grado inv. } (i - 1), \quad i \neq 0,$
- $\phi_{BQ}(\text{elemento con grado inv. } 0) = \begin{cases} 0 & a_i = 1, \forall i, \\ \sum \text{elementos con grado inv. } p - 3 & \text{otro caso;} \end{cases}$
- $\Delta(\text{elemento con grado inv. } i) = \sum \text{elementos con grado inv. } i,$
- $f_{BQ}(\text{elemento con grado inv. } i) = 0, \quad \forall i \geq 1.$

**Teorema 4.21.** Las únicas operaciones no nulas en la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra sobre  $E \otimes \Gamma$  inducida por esta contracción son  $\Delta_2$  y  $\Delta_p$ .

**Demostración:** Denotemos por  $(n, m)$  la pareja formada por (número de inversiones,



grado de inversión) de un elemento.

$$\begin{array}{c}
 E \otimes \Gamma \xrightarrow{\Delta g} (0, 0) \\
 \downarrow \phi^{(2)} \\
 (1, p-3) \\
 \swarrow \Delta^2 \quad \searrow \\
 (0, p-3) \quad (1, p-3) \\
 \downarrow \phi^{(3)} \quad \downarrow \phi^{(3)} \\
 (1, p-4) \quad (2, p-4) \cdots \rightarrow 0 \\
 \swarrow \Delta^3 \quad \searrow \quad \xrightarrow{\phi^{(4)}} \\
 (0, p-4) \quad (1, p-4) \quad (2, p-5) \cdots \rightarrow 0 \\
 \downarrow \phi^{(i-1)} \\
 (1, p-i) \xrightarrow{\Delta_{i-1}} (0, p-i) \xrightarrow{f} \neq 0 \Leftrightarrow \Delta_i = \Delta_p.
 \end{array}$$

Así que, las dos únicas operaciones distintas de cero en la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra de  $E \otimes \Gamma$  son  $\Delta_2$  y  $\Delta_p$ .

De hecho, veamos cuales son las fórmulas explícitas para las operaciones  $\Delta_2$  y  $\Delta_p$ , teniendo en cuenta como actúan sobre los generadores:

$$\Delta_2(v^i) = \sum_{k=0}^i v^k \otimes v^{i-k}, \quad i \in \{0, 1\}$$

$$\Delta_2(\gamma_k(w)) = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i(w) \otimes \gamma_{k-i}(w).$$

$$\Delta_2(v^i \gamma_j(w)) = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \gamma_l(w) v^k \otimes \gamma_{j-l}(w) v^{i-k}, \quad i \in \{0, 1\}.$$

$$\Delta_p(v^i) = 0 \quad \forall i \geq 0.$$

$$\Delta_p(\gamma_j(w)) = \sum_{k_1 + \dots + k_p = j-1} \gamma_{k_1}(w) v \otimes \dots \otimes \gamma_{k_p}(w) v.$$

$$\Delta_p(\gamma_j(w) v^i) = \sum_{k_1 + \dots + k_p = j-1} \gamma_{k_1}(w) v^{i+1} \otimes \dots \otimes \gamma_{k_p}(w) v^{i+1}.$$

**Proposición 4.22.** *El morfismo  $g$  no es morfismo de dga-coálgebras.*

**Demostración:** Si lo fuera, debería verificar la igualdad

$$g^{\otimes 2} \Delta_2 = \Delta g \Rightarrow (gf \otimes gf) = (id \otimes id),$$

pero si consideramos el elemento  $[1|1] \otimes [1]$ , tenemos que

$$(gf \otimes gf)([1|1] \otimes [1]) = 0. \quad \blacksquare$$

**Propiedades de las operaciones de  $E \otimes \Gamma$ .**

Además, teniendo en cuenta las relaciones que tienen que verificar las operaciones

$$\sum_{n=1}^i \sum_{k=0}^{i-n} (-1)^{n+k+nk} (1^{\otimes i-n-k} \otimes \Delta_n \otimes 1^k) \Delta_{i-n+1} = 0. \quad i \geq 1$$

se deducen fácilmente las ecuaciones

$$\begin{aligned} (1 \otimes \Delta_1 + \Delta_1 \otimes 1) \Delta_2 &= \Delta_2 \Delta_1 \\ - (1^{\otimes 2} \otimes \Delta_1) \Delta_3 - (1 \otimes \Delta_1 \otimes 1) \Delta_3 - (\Delta_1 \otimes 1^{\otimes 2}) \Delta_3 + (1 \otimes \Delta_2) \Delta_2 - (\Delta_2 \otimes 1) \Delta_2 &= \Delta_3 \Delta_1 \end{aligned}$$

Salvo para  $p = 3$ , esta última ecuación se reduce a la anterior. Igualmente se puede ver que existe una única relación entre  $\Delta_2$  y  $\Delta_p$  si  $p \neq 3$ , esto es:

$$\begin{aligned} - \Delta_p \Delta_1 &= \sum_{k=0}^{p-1} (1^k \otimes \Delta_1 \otimes 1^{p-1-k}) \Delta_p. \\ \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k (1^{\otimes p-k-1} \otimes \Delta_2 \otimes 1^{\otimes k}) \Delta_p &= (1 \otimes \Delta_p) \Delta_2 + (\Delta_p \otimes 1) \Delta_2. \\ \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p+k+pk} (1^{\otimes p-1-k} \otimes \Delta_p \otimes 1^{\otimes k}) \Delta_p &= 0. \end{aligned}$$

**Proposición 4.23.** *La operación  $\Delta_2$  es asociativa.*

**Demostración:** Si  $p \neq 3$ , trivialmente, se demuestra que

$$[(1 \otimes \Delta_2) \Delta_2 - (\Delta_2 \otimes 1) \Delta_2](u \bullet v) = 0.$$

Si  $p = 3$ , teniendo en cuenta la relación entre  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  y  $\Delta_1$ , y que  $\Delta_1 = 0$  se demuestra que

$$-(1^{\otimes 2} \otimes \Delta_1)\Delta_3 - (1 \otimes \Delta_1 \otimes 1)\Delta_3 - (\Delta_1 \otimes 1^{\otimes 2})\Delta_3 + (1 \otimes \Delta_2)\Delta_2 - (\Delta_2 \otimes 1)\Delta_2 = \Delta_3\Delta_1$$

Por tanto,  $\Delta_2$  es asociativa si y sólo si:

$$-(1^{\otimes 2} \otimes \Delta_1)\Delta_3 - (1 \otimes \Delta_1 \otimes 1)\Delta_3 - (\Delta_1 \otimes 1^{\otimes 2})\Delta_3 = \Delta_3\Delta_1,$$

que se verifica, ya que ambos miembros de la igualdad valen cero. ■

**Proposición 4.24.** *La operación  $\Delta_2$  verifica la condición de Hopf.*

**Demostración:** Denotemos por  $\bullet$  el producto en  $E \otimes \Gamma$ ,  $\star_S$  el producto shuffle y  $\Delta_S$  el coproducto en  $\overline{BQ}$ . Sabemos que  $\overline{BQ}$  es un álgebra de Hopf, por tanto, tenemos que  $\overline{BQ}$  verifica dicha condición, i.e:

$$\Delta_S \star_S = (\star_S \otimes \star_S)(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_S \otimes \Delta_S)$$

Para  $E \otimes \Gamma$  deberían cumplirse las ecuaciones:

$$\Delta_i \bullet = (\bullet \otimes \bullet)(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_i \otimes \Delta_i)$$

donde el producto  $\bullet$  viene dado en función del producto en  $\overline{BQ}$ ,  $\bullet = f \star_S (g \otimes g)$ , por tanto

$$\begin{aligned} (\bullet \otimes \bullet)(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_2 \otimes \Delta_2) &= (\bullet \otimes \bullet)(1 \otimes T \otimes 1)f^{\otimes 4}(\Delta_S \otimes \Delta_S)(g \otimes g) \\ &= f^{\otimes 2}(\star_S \otimes \star_S)g^{\otimes 4}(1 \otimes T \otimes 1)f^{\otimes 4}(\Delta_S \otimes \Delta_S)(g \otimes g) \\ &= f^{\otimes 2}g^{\otimes 2}(\bullet \otimes \bullet)f^{\otimes 4}(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_S \otimes \Delta_S)(g \otimes g) \\ &= f^{\otimes 2}(\star_S \otimes \star_S)(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_S \otimes \Delta_S)(g \otimes g) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \Delta_2 \bullet &= f^{\otimes 2}\Delta g f \star_S (g \otimes g) = f^{\otimes 2}\Delta g \bullet f^{\otimes 2}(g \otimes g) = f^{\otimes 2}\Delta \star_S g^{\otimes 2}f^{\otimes 2}g^{\otimes 2} \\ &= f^{\otimes 2}(\star_S \otimes \star_S)(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_S \otimes \Delta_S)(g \otimes g). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Observación 4.2.** A pesar de que el estudio de la  $A_\infty$ -coálgebra de  $E \otimes \Gamma$  lo hayamos hecho seleccionando el álgebra truncada con generador de grado  $2n$ , dicho estudio se puede hacer igualmente para el álgebra truncada con generador de grado  $2np^i$ .

Lo único que cambia es el grado de los generadores del álgebra exterior y polinomial dividida, teniéndose la contracción

$$\tilde{B}_n(Q_p(u, 2np^i) \rightarrow E(v, 2np^i + 1) \otimes \Gamma(w, 2np^{i+1} + 2).$$



Una vez visto que la  $A_\infty$ -estructura sobre  $E \otimes \Gamma$  está formada por solo dos operaciones, a saber,  $\Delta_2$  y  $\Delta_p$ , he aquí donde aplicamos la teoría de perturbación para seguir el proceso.

Consideremos ahora, el producto tensorial de dos álgebras truncadas,  $Q_p(y_i, 2np^i)$  y  $Q_p(y_j, 2np^j)$ , con la única restricción de que la  $p$  en ambos casos coincida con el número primo de  $\mathbb{Z}_p$ .

Gracias al teorema 4.8, sabemos que existe una contracción de dga-coálgebras semi-completa entre  $\overline{B}(Q_p \otimes Q_p)$  y  $(\overline{B}Q_p \otimes \overline{B}Q_p)$ . Así pues, nos es suficiente con considerar el coproducto del dg-módulo menor para ver la transferencia.

Denotemos por  $\Delta^*$  el coproducto del producto tensorial de las dos construcciones bares, el cual viene dado de modo explícito por:

$$\Delta^* = (1 \otimes T \otimes 1)(\Delta \otimes \Delta).$$

La contracción actual puede visualizarse gráficamente

$$\begin{array}{ccc} \overline{B}(Q_p \otimes Q_p) & \xrightarrow{r_B} & \overline{B}Q_p \otimes \overline{B}Q_p \\ & \searrow r & \downarrow r_{BQ} \otimes c_{BQ} \\ & & E \otimes \Gamma \otimes E \otimes \Gamma \end{array}$$

Ahora los morfismos de la contracción  $c_p \otimes c_p$  vienen dados por las fórmulas:

$$\begin{aligned} g^* &= g_{BQ} \otimes g_{BQ}, \\ f^* &= f_{BQ} \otimes f_{BQ} \\ \phi^* &= 1 \otimes \phi_{BQ} + \phi_{BQ} \otimes g_{BQ} f_{BQ}. \end{aligned}$$

Las operaciones que determinan la  $A_\infty$ -estructura vienen dadas por las fórmulas (salvo signo):

$$\Delta_i = (f_{BQ} \otimes f_{BQ})^{\otimes i} (\Delta^{*[(i-1)]} \phi^{*[r, i-1]} \dots (\Delta^{*[2]} \phi^{*[r, 2]}) \Delta^* (g_{BQ} \otimes g_{BQ}), \quad \forall i \geq 2.$$

**Definición 4.8.** Sea  $\tilde{S}$  el submódulo de  $(\overline{B}Q_p \otimes \overline{B}Q_p)$ , definido como el producto tensorial de  $S$  por  $S$ .

**Proposición 4.25.** Con la definición anterior de  $\tilde{S}$ , se verifican las propiedades

- $\phi^*(\tilde{S}) \subset \tilde{S}$ ,



- $\Delta^*(\tilde{S}) \subset \tilde{S} \otimes \tilde{S}$ ,
- $\text{Im } g^* \subset \tilde{S}$ .

**Proposición 4.26.** *Definiendo las inversiones en el producto tensorial como suma de inversiones del primer factor más inversiones del segundo, se tiene*

- $\phi^*(\text{elemento con } i\text{-inversiones}) = \sum \text{elementos con al menos } (i+1)\text{-inversiones}$ ,
- $\Delta^*(\text{elemento con } i\text{-inversiones}) = \sum \text{elementos con al menos } (i-2)\text{-inversiones}$ ,
- $f^*(\text{elemento con } i\text{-inversiones}) = 0, \quad \forall i \geq 1$ .

**Proposición 4.27.** *Del mismo modo, si definimos el grado de inversión en el producto tensorial como la suma de los grados,*

- $\Delta^*(\text{elemento con grado inv. } i) = \sum \text{elementos con grado inv. } i$ ,
- $f^*(\text{elemento con grado inv. } i) = 0, \quad \forall i \geq 1$ .

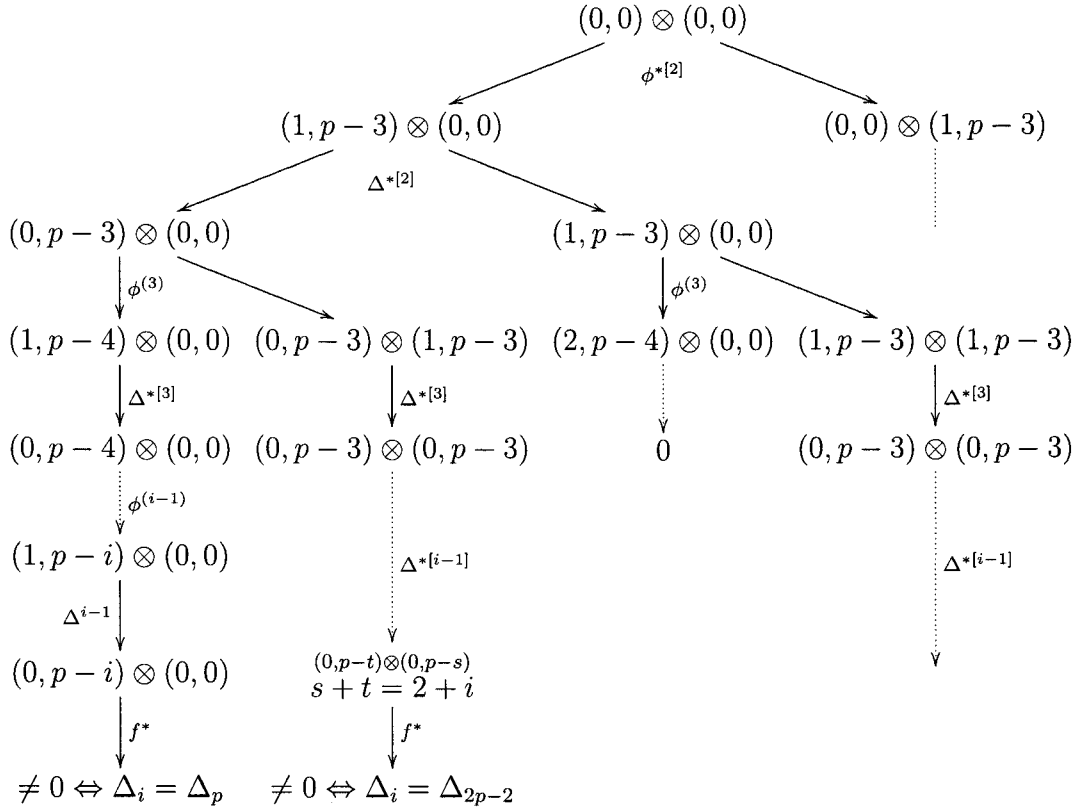
La demostración de las dos proposiciones anteriores es inmediata de la propia definición del submódulo  $\tilde{S}$ , junto con las fórmulas de  $f^*$ ,  $\phi^*$  y  $\Delta^*$  en función de  $f$ ,  $\phi$  y  $\Delta$ .

**Teorema 4.28.** *Las únicas operaciones posiblemente no nulas en la  $A_\infty$ -coálgebra de  $(E \otimes \Gamma) \otimes (E \otimes \Gamma)$  son  $\Delta_2, \Delta_p, \Delta_{2p-2}$ .*

**Demostración:** Denotemos, por analogía con el primer caso,  $(n, m) \otimes (k, l)$  las parejas formadas respectivamente por

(número de inversiones, grado de inversión)  $\otimes$  (número de inversiones, grado de inversión)

de un elemento de  $\bar{B}(Q_p) \otimes \bar{B}(Q_p)$ .



De hecho, es fácil probar que

$$(\Delta\phi)^{[k]} \dots (\Delta\phi)^{[2]} = \begin{cases} (0, 0) \otimes (0, p-k-1), \\ (0, p-k-1) \otimes (0, 0), \\ (0, p-s) \otimes (0, p-t) \text{ tal que } s+t=3+k. \end{cases}$$

Lo que prueba automáticamente que las únicas operaciones posiblemente no nulas son aquellas para las cuales

- $k = p - 1$ , es decir,  $\Delta_p$ .
- $k = 2p - 3$ , es decir,  $\Delta_{2p-2}$ . ■

Las fórmulas explícitas de las operaciones no son fáciles de obtener, pero si podemos dar a grandes rasgos su comportamiento sobre generadores.  $\Delta_2$  que se corresponde con el



coproducto, viene dada por la fórmula

$$\begin{aligned} \Delta_2(v^i \gamma_j(w) \otimes v^l \gamma_k(w)) &= (1 \otimes T \otimes 1)[\Delta_{2_{E \otimes \Gamma}}(v^i \gamma_j(w)) \otimes \Delta_{2_{E \otimes \Gamma}}(v^l \gamma_k(w))] = \\ (1 \otimes T \otimes 1) &\left[ \sum_{t=0}^i \sum_{h=0}^j \gamma_h(w) v^t \otimes \gamma_{j-h}(w) v^{i-t} \right] \otimes \left[ \sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^k \gamma_s(w) v^r \otimes \gamma_{k-s}(w) v^{l-r} \right] = \\ \sum_{t=0}^i \sum_{h=0}^j \sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^k &\left[ \gamma_h(w) v^t \otimes \gamma_s(w) v^r \otimes \gamma_{j-h}(w) v^{i-t} \otimes \gamma_{k-s}(w) v^{l-r} \right], \quad i, l \in \{0, 1\}; \end{aligned}$$

La operación  $\Delta_p$ , está definida por

$$\Delta_p(v \otimes v) = 0;$$

$$\Delta_p(\gamma_1(w) \otimes \gamma_1(w)) = \text{permutaciones de } \{ \gamma_1(w) \otimes \overbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}^{p-1 \text{ veces}} \otimes \overbrace{v \otimes \cdots \otimes v}^p \}$$

Mientras que de  $\Delta_{2p-2}$  podemos decir dónde se anula y algún pequeño rasgo sobre los generadores de  $\Gamma$

$$\Delta_{2p-2}(v \otimes v) = 0.$$

$$\Delta_{2p-2}(\gamma_1(w) \otimes \gamma_1(w)) = \text{permutaciones de } \{ \overbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}^{2p-4 \text{ veces}} \otimes \overbrace{v \otimes \cdots \otimes v}^{2p \text{ veces}} \}$$

Desde el punto de vista de álgebras,  $(E \otimes \Gamma)^{\otimes 2}$  sigue preservando su estructura y, por tanto, es factible plantearse si la operación  $\Delta_2$ , la cual juega el papel de coproducto, sigue verificando la condición de Hopf, dando lugar a una álgebra de Hopf con la peculiaridad de ser a la vez una  $A_\infty$ -coálgebra.

**Proposición 4.29.** *La operación  $\Delta_2$  verifica la condición de Hopf.*

Dado que las álgebras de Hopf forman una categoría, el producto tensorial de dos álgebras de Hopf, es una álgebra de Hopf. ■

Las relaciones que verifican  $\Delta_2$ ,  $\Delta_p$ ,  $\Delta_{2p-2}$  de modo detallado son

$$i = p + 1 :$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k (1^{\otimes p-k-1} \otimes \Delta_2 \otimes 1^{\otimes k}) \Delta_p = (1 \otimes \Delta_p) \Delta_2 + (\Delta_p \otimes 1) \Delta_2;$$

$$i = 2p - 1 :$$

$$\sum_{k=0}^{2p-3} (-1)^k (1^{\otimes 2p-3-k} \otimes \Delta_2 \otimes 1^{\otimes k}) \Delta_{2p-2} + \sum_{k=0}^1 (-1)^k (1^{\otimes 1-k} \otimes \Delta_{2p-2} \otimes 1^{\otimes k}) \Delta_2 +$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p+k+pk} (1^{\otimes p-1-k} \otimes \Delta_p \otimes 1^{\otimes k}) \Delta_p = 0;$$

$i = 3p - 3 :$

$$\sum_{k=0}^{2p-3} (1^{\otimes 2p-3-k} \otimes \Delta_p \otimes 1^{\otimes k}) \Delta_{2p-2} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k (1^{\otimes p-1-k} \otimes \Delta_{2p-2} \otimes 1^{\otimes k}) \Delta_p;$$

$i = 4p - 5 :$

$$\sum_{k=0}^{2p-3} (-1)^k (1^{\otimes 2p-3-k} \otimes \Delta_{2p-2} \otimes 1^{\otimes k}) \Delta_{2p-2} = 0.$$

Por tanto, para demostrar el teorema 4.12, sólo nos falta probar que dada  $\bar{B}(Q_p^{\otimes j})$ , la contracción  $r^{\otimes j}$  dada por

$$\begin{array}{ccc} \bar{B}(Q_p^{\otimes j}) & \xrightarrow{r_B^{\otimes j}} & \bar{B}(Q_p)^{\otimes j} \\ & \searrow r^{\otimes j} & \downarrow r_{BQ}^{\otimes j} \\ & & (E \otimes \Gamma)^{\otimes j} \end{array}$$

induce sobre  $(E \otimes \Gamma)^{\otimes j}$  una  $A_\infty$ -coálgebra, cuyas operaciones no nulas son  $\Delta_{i(p-2)+2}$ , para todo  $0 \leq i \leq j$ .

Dicha prueba, la haremos suponiendo cierto el caso  $i = j$  y probando que se cumple para  $i = j + 1$ .

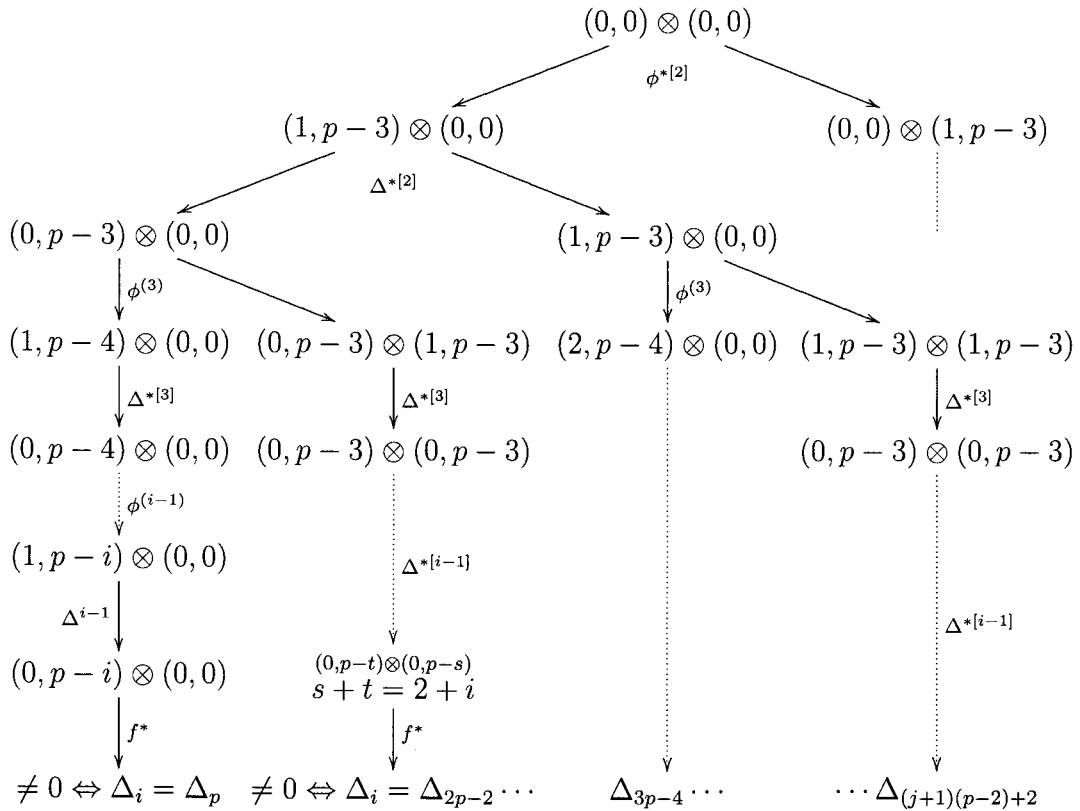
Sabemos por hipótesis que las operaciones distintas de cero en  $(E \otimes \Gamma)^j$  vienen determinadas por el producto tensorial de  $j$ -elementos, que verifican ciertas relaciones entre los grados y las inversiones, esto es, son de la forma

$$(\Delta\phi)^{[k]} \dots (\Delta\phi)^{[2]}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \begin{cases} (0, p - k - 1), \\ (0, 2p - k - 3), \\ \dots, \\ (0, i(p - 2) - 1 - k) \end{cases}$$

Así pues, obtenemos como operaciones las  $\Delta_n = \Delta_{i(p-2)+2}$ , con  $0 \leq i \leq j$ . Para probar el caso  $i = j + 1$ , consideramos las inversiones y grado de inversión como si fuera el producto de dos únicos elementos (tal y como hicimos para el caso  $i=2$ ). Es decir, agrupamos las inversiones y grados de las  $i$ -primeras coordenadas y hacemos el diagrama



de (inversiones, grado de inversión)



De hecho, se tiene que las únicas operaciones no nulas son  $\Delta_n = \Delta_{i(p-2)+2}$ , para todo  $0 \leq i \leq j + 1$ .

Dado que las álgebras de Hopf forman una categoría y de que  $H_*(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Z}_p)$  se puede pensar como el límite inductivo de las álgebras de Hopf  $\otimes_{i \geq 0} (E \otimes \Gamma)$ , tenemos en particular, que si consideramos la operación  $\Delta_2$ ,  $\otimes_{i \geq 0} (E \otimes \Gamma)$  tiene estructura de álgebra de Hopf.

Por tanto, acabamos de probar el teorema

**Teorema 4.30.** *Las únicas operaciones (posiblemente) no nulas en la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra de  $H_*(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Z}_p)$  son  $\Delta_{i(p-2)+2}$ ,  $\forall i \geq 0$ .*

**4.3.3.  $K(\mathbb{Z}, n)$ , donde  $n = 4$** 

$$C_*(K(\mathbb{Z}, 4), \mathbb{Z}_p) \rightarrow \bar{B}(C_*(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}_p)) \rightarrow \bar{B}\left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} (E \otimes \Gamma), \mathbb{Z}_p\right).$$

Por tanto tenemos que definir una contracción de  $\bar{B}(\bigotimes_{i=1}^{\infty} (E \otimes \Gamma), \mathbb{Z}_p)$  hacia un dga-módulo libre. Para ver que la  $A_{\infty}$ -coálgebra es la misma que el caso anterior, es necesario hacer uso de diversos resultados previos ya mostrados anteriormente.

- $c_{\otimes B} : \bar{B}(\bigotimes_{i=1}^{\infty} (E \otimes \Gamma), \mathbb{Z}_p) \rightarrow \bigotimes_{i=1}^{\infty} \bar{B}(E \otimes \Gamma)$ .
- $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \bar{B}(E \otimes \Gamma) \rightarrow \bigotimes_{i=1}^{\infty} \bar{B}(E) \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \bar{B}(\Gamma)$ .
- $\bar{B}(E) \cong \Gamma, \Gamma \cong \bigotimes_i Q_p$ .
- Aplicamos el resultado previo sobre  $\bar{B}(\bigotimes_i Q_p)$  dando lugar a la misma  $A_{\infty}$ -estructura.
- El producto infinito de coálgebras,  $\bigotimes_i \Gamma$ , es una coálgebra. Además, si tensorizamos una coálgebra con una  $A_{\infty}$ -coálgebra la estructura resultante en el producto tensorial queda definido por las operaciones de la  $A_{\infty}$ -coálgebra inicial (teorema 2.18).

La estructura  $A_{\infty}$ -coálgebra de la homología de  $K(\mathbb{Z}, 4)$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$  está formada por las operaciones  $\Delta_i$ , con  $i = k(p-2) + 2, k \geq 0$ .

**4.3.4.  $K(\mathbb{Z}, n)$ , donde  $n > 4$** 

Por un proceso de inducción, obtenemos que las únicas operaciones de la homología de  $K(\mathbb{Z}, n)$ , con  $n > 4$ , son  $\Delta_i$ , con  $i = k(p-2) + 2, k \geq 0$ . En definitiva, acabamos de probar el teorema.

**Teorema 4.31.** *Sea  $\mathbb{Z}$  y  $n \geq 3$  un entero positivo. Entonces, las únicas operaciones (posiblemente) no nulas en la estructura de  $A_{\infty}$ -coálgebra de  $H_*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_p)$  son  $\Delta_{i(p-2)+2}, \forall i \geq 0$ .*

**4.4. Caso  $K(\mathbb{Z}^r, n)$** 

Veamos ahora el estudio para el caso en que el grupo  $\pi$ , se descompone como  $\mathbb{Z}^r$ . Al igual que antes, distinguimos si  $n$  es mayor que 2 o menor o igual a él.



**4.4.1.**  $K(\mathbb{Z}^r, n)$ , donde  $n \leq 2$ 

En este caso, los resultados aquí mostrados son ciertos independientemente del anillo base.

$$n = 0$$

$$C_*(K(\mathbb{Z}^r, 0), \Lambda) \rightarrow \Lambda[\mathbb{Z}^r] \Rightarrow H(K(\mathbb{Z}^r, 0), \Lambda) = \Lambda[\mathbb{Z}^r].$$

$$n = 1$$

$$\begin{aligned} C_*(K(\mathbb{Z}^r, 1), \Lambda) &\rightarrow \bar{B}(C_*(K(\mathbb{Z}^r, 0), \Lambda)) \simeq \bar{B}(\Lambda[\mathbb{Z}^r]) \Rightarrow \\ \bar{B}(\Lambda[\mathbb{Z}]) \otimes \cdots \otimes \bar{B}(\Lambda[\mathbb{Z}]) &\rightarrow E_\Lambda(u, 1) \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{r \text{ veces}} E_\Lambda(u, 1). \end{aligned}$$

$$n = 2$$

$$\begin{aligned} C_*(K(\mathbb{Z}^r, 2), \Lambda) &\rightarrow \bar{B}(C_*(K(\mathbb{Z}^r, 1), \Lambda)) \Rightarrow H(K(\mathbb{Z}^r, 2), \Lambda) = \\ \bar{B}(E(u, 1)) \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{r \text{ veces}} \bar{B}(E(u, 1)) &\cong \Gamma(\nu, 2) \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{r \text{ veces}} \Gamma(\nu, 2). \end{aligned}$$

**4.4.2.**  $K(\mathbb{Z}^r, n)$ , donde  $n \geq 3$ 

Es aquí de nuevo donde debemos restringir nuestro estudio al anillo base  $\mathbb{Z}_p$ , obteniendo al igual que para el caso  $\pi = \mathbb{Z}$ , que las únicas operaciones de la homología de  $K(\mathbb{Z}^r, n)$  son  $\Delta_i$ , con  $i = k(p-2) + 2$ ,  $k \geq 0$ . En definitiva, se tiene el resultado siguiente:

**Teorema 4.32.** *Sea  $\mathbb{Z}^r$ , con  $r$  un natural y  $n \geq 3$  un entero positivo. Entonces, las únicas operaciones (posiblemente) no nulas en la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra de  $H_*(K(\mathbb{Z}^r, n); \mathbb{Z}_p)$  son  $\Delta_{i(p-2)+2}$ ,  $\forall i \geq 0$ .*

**4.5. Caso  $K(\mathbb{Z}_{p^r}, n)$** 

Veamos ahora el estudio para el caso en que el grupo  $\pi$ , se descompone como  $\mathbb{Z}^r$ . Al igual que antes, distinguimos si  $n$  es mayor que 2 o menor o igual a él.

**4.5.1.**  $K(\mathbb{Z}_{p^r}, n)$ , donde  $n < 2$ 

En este caso, los resultados aquí mostrados son ciertos independientemente del anillo base.

$$n = 0$$

$$C_*(K(\mathbb{Z}_{p^r}, 0), \Lambda) \rightarrow \Lambda[\mathbb{Z}_{p^r}] \Rightarrow H(K(\mathbb{Z}_{p^r}, 0), \Lambda) = \Lambda[\mathbb{Z}_{p^r}].$$



Es aquí de nuevo donde debemos restringir nuestro estudio al anillo base  $\mathbb{Z}_p$ , obteniendo que las únicas operaciones de la homología de  $K(\mathbb{Z}_{p^r}, n)$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$  son  $\Delta_i$ , con  $i = k(p - 2) + 2$ ,  $k \geq 0$ .

$$n = 1$$

$$\begin{aligned} C_*(K(\mathbb{Z}_{p^r}, 1), \mathbb{Z}_p) &\rightarrow \bar{B}(C_*(K(\mathbb{Z}_{p^r}, 0), \mathbb{Z}_p)) \simeq \bar{B}(\Lambda[\mathbb{Z}_{p^r}]) \Rightarrow \\ H(K(\mathbb{Z}_{p^r}, 1), \mathbb{Z}_p) &= E(u, 1) \otimes \Gamma(v, 2). \end{aligned}$$

Dicha afirmación es cierta gracias al teorema de S. Eilenberg y S. Mac Lane siguiente

**Teorema 4.33.** [EM54] *Sea  $p$  un número primo y  $r$  un número natural. Sea  $\mathbb{Z}_{p^r}$  un grupo finito cíclico de orden  $p^r$ . Entonces, existe una contracción de dga-álgebras*

$$r_{\mathbb{Z}_{p^r}} : \{ \bar{B}_N(\Lambda[\mathbb{Z}_{p^r}]), E(u, 1) \tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}} \Gamma(v, 2), f_{\mathbb{Z}_{p^r}}, g_{\mathbb{Z}_{p^r}}, \phi_{\mathbb{Z}_{p^r}} \},$$

donde  $E(u, 1) \tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}} \Gamma(v, 2)$  es el producto tensorial torcido, donde la diferencial viene determinada por la derivación  $\delta_{p^r}$  cuya fórmula es

$$\delta_{p^r}(v) = \pm p^r u.$$

Los morfismos explícitos son:

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}_{p^r}}[x_1|y_1| \cdots |x_n|y_n] &= \prod_{i=1}^n s^2(x_i, y_i) \gamma_n(v); \\ f_{\mathbb{Z}_{p^r}}[x_1|y_1| \cdots |x_n|y_n|z] &= s^1(z) \prod_{i=1}^n s^2(x_i, y_i) u \otimes \gamma_n(v); \\ g_{\mathbb{Z}_{p^r}}(u) &= [1]; \\ g_{\mathbb{Z}_{p^r}}(\gamma_k(v)) &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}_{p^r}} [1|x_1| \cdots |1|x_k] \\ g_{\mathbb{Z}_{p^r}}(u \otimes \gamma_k(v)) &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}_{p^r}} [1|x_1| \cdots |1|x_k|1] \\ \phi_{\mathbb{Z}_{p^r}} 1 &= 0; \quad \phi_{\mathbb{Z}_{p^r}}[x] = -C(x); \\ \phi_{\mathbb{Z}_{p^r}}[x|y|\sigma] &= [-C(x)|y|\sigma] - s^2(x, y) \left[ \sum_{x \in \mathbb{Z}_{p^r}} [1|x] \phi_{\mathbb{Z}_{p^r}} \sigma \right] \end{aligned}$$



donde

$$\begin{aligned}
 s^2 &: \mathbb{Z}_{p^r} \times \mathbb{Z}_{p^r} \longrightarrow \mathbb{Z} \\
 s^2(i, j) &\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } i + j < p^r, \\ 1 & \text{si } i + j \geq p^r, \end{cases} \\
 s^1(i) &= i \text{ si } 0 \leq i < p^r, \\
 C(x) &= \sum_{i=0}^{x-1} [1|i].
 \end{aligned}$$

**Observación 4.3.** En nuestro caso, dado que el anillo base es  $\mathbb{Z}_p$ , obtenemos que  $\delta_{p^r}$  es nula, por lo que el producto tensorial torcido queda exclusivamente como el producto tensorial  $E(u, 1) \otimes \Gamma(v, 2)$ , tal y como mostramos más arriba.

#### 4.5.2. $K(\mathbb{Z}_{p^r}, n)$ , donde $n = 2$

$$\begin{aligned}
 C_*(K(\mathbb{Z}_{p^r}, 2), \mathbb{Z}_p) &\rightarrow \bar{B}(C_*(K(\mathbb{Z}_{p^r}, 1), \mathbb{Z}_p)) \Rightarrow H(K(\mathbb{Z}_{p^r}, 2), \mathbb{Z}_p) = \\
 &\bar{B}(E(u, 1) \otimes \Gamma(v, 2)) \rightarrow \Gamma(v, 2) \otimes_i (E \otimes \Gamma).
 \end{aligned}$$

#### 4.5.3. $K(\mathbb{Z}_{p^r}, n)$ , donde $n > 2$

Es aquí de nuevo donde debemos trabajar por inducción, obteniendo que las únicas operaciones de la homología de  $K(\mathbb{Z}_{p^r}, n)$ , con coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$ , son  $\Delta_i$ , donde  $i = k(p-2) + 2$ ,  $k \geq 0$ . Por tanto, en este caso, acabamos de probar el teorema

**Teorema 4.34.** *Sea  $\mathbb{Z}_{p^r}$  un grupo finito cíclico de orden  $p^r$ , con  $p$  un primo distinto de 2 y  $r$  un natural. Si consideramos  $n \geq 2$  un entero positivo, entonces, las únicas operaciones (posiblemente) no nulas en la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra de  $H_*(K(\mathbb{Z}_{p^r}, n); \mathbb{Z}_p)$  son  $\Delta_{i(p-2)+2}$ ,  $\forall i \geq 0$ .*

## 4.6. Aplicación computacional de la Teoría de Inversiones.

En esta sección mostramos el ahorro computacional basado en la teoría de inversiones en el cálculo de las operaciones involucradas en la  $A_\infty$ -estructura de la homología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane.

De hecho, solamente vamos a estudiar la contracción

$$r_{BQ} = \{\bar{B}(Q_p(u, 2n)), E(v, 2n+1) \otimes \Gamma(w, 2np+2), f_{BQ}, g_{BQ}, \phi_{BQ}\}.$$

Es claro que dado que dicha contracción aparece reiteradas veces para el cálculo de  $A_\infty$ -coálgebra de  $K(\mathbb{Z}, n)$ , el minimizar costes computacionales en ella, significaría una importante ventaja.

Recordemos pues, que la fórmula de las operaciones  $\Delta_i$  está determinada (salvo signo) por

$$\Delta_i = f^{\otimes i}(\Delta^{[i-1]}\phi^{[r, i-1]} \dots \Delta^{[2]}\phi^{[2]})\Delta g, \quad \forall i \geq 2,$$

donde los morfismos  $f, g, \phi$  están dados por la contracción  $r_{BQ}$  y  $\Delta$  es el coproducto de la construcción bar.

$$\Delta([a_1 | \dots | a_r]) = \sum_{i=0}^r [a_1 | \dots | a_i] \otimes [a_{i+1} | \dots | a_r].$$

Es importante hacer notar que el número de inversiones de un elemento, será quién nos diga si es preciso o no aplicar el morfismo correspondiente (véase  $\Delta, \phi$  o  $f$ , según corresponda) y el grado de inversión nos dirá en qué parte del elemento debería actuar alguno de los morfismos anteriores.

De hecho, recopilando la información mostrada en las proposiciones 4.19 y 4.20, si denotamos por  $(k, t)$  un elemento de  $\bar{B}(Q_p)$  con  $k$ -inversiones y  $t$  el grado de inversión, tenemos que la imagen de elementos por los morfismos  $\Delta, f$  y  $\phi$  nos dan combinaciones caracterizadas por

$$\begin{aligned} \Delta(k, t) &= \sum \text{al menos } (k-1, t) \\ f(k, t) &= 0 \text{ si } k > 0 \text{ ó } t > 0; \\ \phi(k, t) &= \begin{cases} \sum \text{al menos } (k+1, t-1) & t \neq 0, \\ \sum \text{al menos } (k+1, p-3) & t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo que dependiendo de las inversiones y grado de inversión sabemos si el resultado va a ser nulo o no.

Para ver la mejora, nos vamos a basar exclusivamente en el número de sumandos generados, dependiendo del grado simplicial del elemento en cuestión.

Así pues, consideremos un elemento  $x \in E \otimes \Gamma$ , tal que al aplicarle  $g$  nos da un elemento con grado simplicial  $k$ .

- El morfismo  $\Delta$  nos da una combinación de elementos de la forma

$$[a_1 | \dots | a_n] \otimes [a_{n+1} | \dots | a_k],$$

con  $n$  variando en  $\{0, \dots, k\}$ , todos ellos con  $(0, 0)$  como pareja de (inversiones, grado de inversión). Es decir, por cada elemento de grado simplicial  $k$ , genera  $k$  elementos.

- EL morfismo  $\phi^{[2]}$  genera al menos una inversión en cada elemento. Descartemos aquellos con inversiones mayores o iguales a 2.
- Sólo hay una única posibilidad de que  $\Delta^{[2]}$  destruya la inversión anterior, por lo que pasa a dar un único elemento en lugar de  $k$ .
- Del mismo modo, sólo hay que considerar el morfismo en la fórmula de  $\phi^{[r,n]}$  conveniente, teniendo en cuenta que  $f$  sobre elementos con inversiones o grado de inversión distintos de cero, da cero.

Así pues, podemos simplificar las fórmulas de  $\Delta^{[n]}$  y  $\phi^{[r,n]}$ , en términos del número de sumandos y por tanto en su complejidad, al igual que el tiempo invertido en el cálculo.

Consideramos el número de sumandos que intervienen en los morfismos antes mencionados como parámetro temporal. Como criterio espacial el número de elementos que produce cualquier morfismo aplicado sobre un único elemento de grado simplicial  $k$ . Con estos parámetros, una tabla aproximativa de cálculo espacio-tiempo es:

Comparación	Modo clásico		Inversiones	
	Tiempo	Número de Sumandos	Tiempo	Número de Sumandos
$f$	1	1	1	1
$g$	1	1	1	1
$\Delta$	$k$	$k$	1	1
$\Delta^{[n]}$	$k^2$	$k^2$	1	1
$\phi^{[r,n]}$	n	n	1	1
$\Delta_2$	k	k	1	1
$\Delta_p$	$k^{4p-1}$	$k^{4p-1}$	1	1

Por tanto, la eficiencia de un programa que incluyera las inversiones y grados de inversión como parámetros a la hora de parar el proceso de computación de las operaciones involucradas en la  $A_\infty$ -coálgebra de  $(E \otimes \Gamma)^{\otimes i}$ , sería muy superior a un programa que lo único que tuviera en cuenta fuera las fórmulas sin más.

En nuestro caso, hemos creado un programa que muestra las fórmulas de  $A_\infty$ -estructuras generadas por perturbación, es decir, dada una contracción entre una dga-coálgebra y un dga-módulo, obtenemos la  $A_\infty$ -coálgebra inducida sobre éste último. Dicho programa será explicado y desarrollado en detalle en el último capítulo.

## 4.7. Cuestiones relacionadas y problemas abiertos

Una vez analizada la  $A_\infty$ -coálgebra de la homología de los  $K(\pi, n)$ 's nos surgen preguntas y problemas abiertos relacionados con ellos.

Gracias a un teorema de E.H. Brown, cualquier espacio topológico es homotópicamente equivalente al producto cartesiano torcido de un número indeterminado de  $K(\pi, n)$ 's. Una pregunta interesante sería ver cuál es la  $A_\infty$ -estructura del producto cartesiano de un número pequeño de  $K(\pi, n)$ 's haciendo uso de la teoría de perturbación, así como la teoría de inversiones, con el fin de poder obtener un resultado positivo, al igual que desde el punto de vista computacional, más efectivo.

Aparte del interés que de por sí suscita que un espacio, a priori tan elemental, tenga una estructura tan rica en la homología, también queremos reseñar la necesidad de determinar de modo explícito las operaciones de dicha estructura a bajo nivel, que hasta ahora no se han podido realizar, ni desde un punto de vista teórico ni computacional.

Por tanto, una línea interesante podría ser ver si las operaciones de dicha  $A_\infty$ -estructura tienen algún comportamiento estratificado, es decir, que sólo son distintos de cero para elementos cuyo grado sea mayor que cierto valor y nulo por debajo, tal y como resultados experimentales parciales nos inducen a pensar.

Otro importante avance sería ver qué pasa al cambiar el anillo base  $\mathbb{Z}_p$ , por un anillo como pueda ser  $\mathbb{Z}$  localizado en  $p$  con  $p$  primo. Como ya comentamos al final del capítulo 2, se pueden establecer diversas contracciones que ligan el complejo de cadenas de  $K(\pi, n)$  con productos tensoriales torcidos de álgebras como las aquí usadas, y que preservan la estructura de coálgebra hasta cierto grado. Así pues, sería interesante determinar el efecto en la  $A_\infty$ -coálgebra producido por dichas torsiones.



## Capítulo 5

### Cálculo simbólico de $A_\infty$ -estructuras

En este capítulo, presentamos una herramienta computacional creada explícitamente para obtener resultados experimentales con ejemplos concretos del cálculo de  $A_\infty$ -estructuras vía perturbación.

El programa creado ha sido hecho en CLOS (Common Lisp Object System) y es un módulo de aproximadamente 2500 líneas que hemos añadido al programa ya existente Kenzo [DRSS99], el cual es un programa dedicado exclusivamente al cálculo de invariantes en Topología Algebraica y en particular, al cálculo de grupos de homología entera (ver [Rub91], [Ser87]).

La elección de añadir un módulo a Kenzo y no a otros programas de cálculo algebraico como Macaulay, Gap, etc, o de crear un nuevo programa desde cero, es debido a que seguimos la misma filosofía.

Dada la importancia de esta elección, hablaremos más extensamente en una posterior sección acerca de la naturaleza de Kenzo para reforzar la comprensión a nuestro módulo computacional.

Trabajos como los de S. Eilenberg junto con S. Mac Lane sobre diversos aspectos de la Topología Algebraica, a mediados de los años cincuenta del siglo pasado, con demostraciones constructivas han sugerido que la creación de una Topología Algebraica Efectiva es posible. De hecho, en la mayoría de sus trabajos, no sólo demostraban la veracidad de un teorema, sino que en caso de estar buscando objetos con ciertas propiedades, daban el modo de construirlos, lo que hace posible la traducción inmediata al mundo computacional.

En este contexto, el lema de perturbación básico es la herramienta fundamental usada

exhaustivamente, para llegar a buen fin en nuestro propósito de calcular simbólicamente las  $A_\infty$ -estructuras inducidas por una contracción. De hecho, este lema ha llevado a la implementación real de algoritmos efectivos.

El lema básico podría traducirse en forma de algoritmo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
 \text{Input: } c : (N, d_N) \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi} \\ \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} (M, d_M) \quad + \quad \text{perturbación } \delta \\
 \\
 \text{Output: } c_\delta : (N, d_N + \delta) \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_\delta} \\ \xrightarrow{f_\delta} \\ \xleftarrow{g_\delta} \end{array} (M, d_M + d_\delta) \quad \text{con } \{f_\delta, g_\delta, \phi_\delta, d_\delta\} \text{ explícitos}
 \end{array}$$

Nuestra aportación en la parte computacional, ha sido la creación de un módulo con tres grandes pilares, a destacar:

- Modificación de todos los archivos de combinatoria con el fin de poder realizar todo tipo de cálculos con la aritmética de  $\mathbb{Z}_p$  y no sólo con la de  $\mathbb{Z}$ .
- Enriquecimiento de las clases de la parte algebraica de Kenzo, implementando ejemplos específicos de álgebras de Hopf, rediseñando la jerarquía de clases, etc.
- Creación de ARAIA (Algebra Reduction  $A_\infty$ -algebra) y de CRAIC (Coalgebra Reduction  $A_\infty$ -coalgebra). Se trata de una serie de programas destinados a la obtención de fórmulas explícitas de  $A_\infty$ -estructuras inducidas por perturbación sobre generadores de grado bajo en el dg-módulo menor.

## 5.1. Entorno de partida KENZO y aspectos básicos de computación

Para poder introducir nuestro trabajo, veamos primero algunas características especiales de Kenzo; en primer lugar cabe decir que es un programa creado exclusivamente por especialistas en Topología Algebraica y del área de la Computación. Además hay que destacar que dicho programa sigue evolucionando tanto en su estructura interna como en su funcionalidad.

El lenguaje de programación en el que está diseñado es el CLOS (Common Lisp Object System), lenguaje funcional con la propiedad de ser orientado a objetos, que permite una

transferencia más asequible de conceptos matemáticos al mundo computacional.

En particular Kenzo es el resultado del intensísimo trabajo de diversos especialistas en Topología Algebraica Efectiva a lo largo de casi dos décadas, a destacar F. Sergeraert y J. Rubio; consta de aproximadamente 18000 líneas de código. Dado que una de sus finalidades principales es la de calcular grupos de homología entera de espacios topológicos (con ciertas condiciones óptimas para ello), es fácil ver que la parte topológica consta de una gran variedad de archivos de código muy cuidado y sofisticado.

Este aspecto difiere totalmente de la simplicidad de las estructuras algebraicas que aparecen en el diseño original, el cual no tiene en cuenta las posibles estructuras adicionales de los objetos.

Por tanto, como ya hemos dicho antes, uno de los primeros pasos que hemos tenido que llevar a cabo para el cálculo de  $A_\infty$ -estructuras ha sido el enriquecimiento desde el punto de vista algebraico de Kenzo.

Nuestro objetivo es claro, queremos diseñar un sistema de cálculo simbólico (algebraico) en el que se puedan calcular distintos invariantes del objeto de partida, tales como la homología, las  $A_\infty$ -estructuras existentes en dicha homología.

En la primera parte daremos diversos resultados teóricos, mientras que en la segunda parte mostraremos resultados experimentales de dicho programa al igual que algún esbozo del código fuente de los algoritmos involucrados.

Con el fin de hacer más legible esta última parte de la memoria, a continuación comentaremos algunos aspectos básicos de computación sin ser demasiado rigurosos.

Dado que nuestra filosofía de programación es la *orientada a objetos*, describimos los aspectos más básicos de dicha programación (ver [MO96])

- *Objeto-tipo*: ideas o nociones sobre los cuales podemos aplicar funciones, etc. En definitiva, son sinónimos de *conceptos*.
- *Objeto*: es un elemento que cumple los requisitos para pertenecer a un objeto-tipo.
- *Clase*: son los objeto-tipo junto con las operaciones permisibles aplicables sobre ellos.

Pongamos un paralelismo sencillo del mundo matemático para comprender las tres nociones, escojamos pues **Sets**: la noción de conjunto es una noción general, por tanto sería



un **Objeto-tipo**, además cuando tratemos con un conjunto en concreto éste sería un **objeto de Sets**, y ya cuando consideramos la categoría **Sets**, entonces estaríamos hablando de la **clase Sets**.

La *herencia* nos permite crear jerarquías haciendo que algunas clases puedan derivar de otras, es decir, hereden los atributos y las “operaciones permisibles”.

Si  $A$  hereda de otra clase  $B$ , se dice que  $A$  es una *subclase* de  $B$ , análogamente  $B$  es una *superclase* de  $A$ .

En particular, la importancia de la *herencia* radica en la posibilidad de reutilizar las características de las clases existentes para crear nuevas.

Con respecto a las “operaciones permisibles” sobre los objetos debemos distinguir tres casos

- *Operación*: es una especie de proceso que está siendo solicitado.
- *Método*: es el procedimiento para determinar cómo se debe llevar a cabo una operación.
- *Polimorfismo*: es la “capacidad” de una operación para soportar múltiples tipos de objetos, vía diferentes métodos.

En particular, dicho polimorfismo es el que nos permite definir operaciones genéricas (como el producto tensorial de dos estructuras algebraicas) independientemente de la clase a la que pertenezcan.

Por otro lado, el carácter funcional del lenguaje de programación LISP (ver [Gra96]), nos lleva a destacar diversas propiedades

- *Definición de funciones*: definición al puro estilo matemático.
- *Recursividad*: se puede definir al igual que en matemáticas una función referida a sí misma de forma recursiva.
- *Evaluación perezosa (lazy)*: dada una función, sólo evalúa los argumentos de la misma si es necesario hacerlo para evaluarla.
- *Evaluación voraz (eager)*: evalúa todos los argumentos de la llamada a la función antes de evaluar la función propiamente.

Para mostrar el uso útil de la recursividad, tomemos como ejemplo trivial el factorial de un número natural  $n \geq 0$ ,  $n!$ . Desde el punto de vista matemático  $f(n) = n! = n \cdot \dots \cdot 1$ , o equivalentemente  $f(n) = n \cdot f(n - 1)$ , con el pre-requisito de que  $f(0) = 1$ . Este mismo proceso, se puede hacer con lisp:

```
(defun fact (n)
  (if(= 0 n)
      1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

Para distinguir entre la evaluación perezosa y la evaluación voraz, veamos dos ejemplos simples. Supongamos que nuestra primera función toma dos números reales y da como resultado su suma; en este caso, sólo podemos usar una evaluación voraz, dado que el desconocimiento de uno de los números nos impediría obtener el resultado.

Ahora bien, supongamos que nuestra segunda función tiene como argumentos dos números reales, y nos da como resultado su multiplicación. En este caso, es claro que dependiendo de los casos, podemos usar la evaluación perezosa o la voraz, el ejemplo clave es considerar uno de los argumentos cero, en ese caso da absolutamente igual que valga el otro número, dado que sabemos que el resultado siempre va a ser nulo.

Una vez introducidas las nociones básicas, si volvemos a nuestro entorno de partida, una de las piezas claves del diseño de la estructura algebraica, es el hecho de que siempre trabajamos con módulos, álgebras o estructuras algebraicas en general *graduadas* y *con diferencial*, por lo que tenemos asociado un complejo de cadenas a cada objeto algebraico.

Por tanto, en nuestro diagrama de clases, la “superclase” será la clase formada por los complejos de cadenas (una vez identificado cada dg-módulo con su complejo de cadenas), junto con los morfismos permitidos en dichas estructuras. De ahí heredaran todas las propiedades las dg-álgebras, dg-coálgebras y dg-álgebras de Hopf.

Para clarificar un poco más las bases de nuestro entorno, establezcamos un paralelismo entre el mundo matemático y el mundo computacional creado en Kenzo. Dicho paralelismo ha sido creado basándonos exclusivamente en las ideas intuitivas, establecidas desde un punto de vista matemático, de las nociones computacionales más elementales que hemos ido detallando en precedentes párrafos al igual que las similitudes mostradas con nociones matemáticas que bien conocemos.

La siguiente tabla pretende dar una “equivalencia” de los términos con el fin de hacer más comprensibles los aspectos técnicos tratados en posteriores apartados de este capítulo.



**Traducción de objetos matemáticos a objetos computacionales**

<b>Matemáticas</b>	<b>Programación</b>
<i>Obj</i> (Categoría)	Objeto
Categorías	Clases
Subcategorías	Subclases
Recursividad	Recursividad
Paso al infinito	Evaluación perezosa

## 5.2. Aspectos técnicos de nuestro módulo de programación

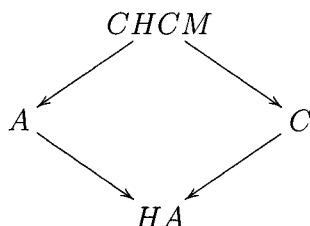
En esta sección pretendemos dar algunas pinceladas de los obstáculos y dificultades que hemos tenido que solventar a lo largo del proceso de generación del programa, trasladando los conceptos matemáticos a objetos computacionales.

Para ello, hemos considerado dividir la sección en dos subsecciones, en la primera explicamos los problemas más importantes y en la segunda las soluciones adoptadas en cada caso.

### 5.2.1. Problemas

Comencemos tratando los problemas más relevantes que se nos han planteado a la hora de generar la estructura de clases en la parte algebraica de Kenzo.

Es importante mencionar, que en la versión original y de momento oficial de Kenzo, sólo hay cuatro clases desde el punto de vista algebraico: *chain-complex* (*CHCM*), *algebra* (*A*), *coalgebra* (*C*) y *Hopf-algebra* (*HA*); las cuales podríamos visualizar en el siguiente diagrama de clases



donde se sobreentiende que *CHCM* es una superclase de *A* y *C*, que a su vez son superclases de *HA*, por lo que cualquier función aplicable sobre *CHCM* será aplicable sobre *A*, sobre *C*, y por supuesto, sobre *HA*.

## Bucles Infinitos

Nuestro primer problema es el traspaso de una de las propiedades de categoría, es decir, dados dos elementos de una categoría, el producto de ambos nos proporciona un tercero que sigue perteneciendo a dicha categoría.

En nuestro caso, como ya sabemos, las álgebras, coálgebras y álgebras de Hopf, forman cada una de ellas una categoría. Además, dadas dos álgebras  $A$  y  $B$  (resp. coálgebras), su producto tensorial,  $A \otimes B$ , sigue siendo una álgebra (resp. coálgebra).

Este nuevo objeto  $A \otimes B$ , está caracterizado por el morfismo de grado cero  $\mu = (\mu_A \otimes \mu_B)(1 \otimes T \otimes 1)$ , es decir,

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes B)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\mu_{A \otimes B}} & A \otimes B \\
 \searrow^{(1 \otimes T \otimes 1)} & & \nearrow_{\mu \otimes \mu} \\
 & (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) &
 \end{array}$$

Así pues, desde el punto de vista matemático, no tenemos ningún problema a la hora de definir  $A \otimes B$  como álgebra, el problema lo encontramos cuando hacemos su traslación computacional, veamos por qué.

Al tratar con un sistema orientado a objetos, en nuestro entorno existe la clase “algebra”. Un objeto de esta clase está caracterizado por ser un objeto de la clase *CHCM* junto con un producto  $\mu$ . Así pues, la clase creada está definida como

```
(DEFCLASS ALGEBRA (chain-complex)
 ((aprd :type morphism :reader aprd1)))
```

Por tanto, al ir a definir  $A \otimes B$  como un objeto de la clase *algebra*, el sistema primero crea el objeto  $A \otimes B$  en *CHCM* y luego intenta definir el morfismo  $\mu_{A \otimes B} : (A \otimes B)^{\otimes 2} \rightarrow A \otimes B$ ; para ello, primero debe construir  $(A \otimes B)^{\otimes 2}$ .

He aquí donde se origina el *bucle infinito*: dado que  $(A \otimes B)$  es una álgebra,  $(A \otimes B)^{\otimes 2}$  a su vez es reconocida como un objeto de la clase *algebra*, por lo que el sistema trata de definir el morfismo  $\mu : (A \otimes B)^{\otimes 4} \rightarrow (A \otimes B)^{\otimes 2}$ , y así sucesivamente, dando lugar a *un bucle infinito*.

Este es uno de los primeros escollos a salvar a la hora de querer enriquecer algebraicamente toda la compleja estructura de Kenzo. En el siguiente apartado, veremos cómo

solucionar dicho problema.

### Coherencia

Nuestro segundo y principal problema, tiene que ver con la “coherencia”. Nuestra filosofía en todo el capítulo de programación es que cuanto más estrictos seamos a la hora de trasladar el mundo matemático, mejor será el resultado.

Dada la falta de estructuras algebraicas en Kenzo, es claro que nuestro primer paso debe ser la creación de nuevas clases, como por ejemplo las  $A_\infty$ -álgebras.

Desde el punto de vista matemático, una  $A_\infty$ -álgebra es un objeto algebraico mucho más complejo que una álgebra, de hecho, la definición a grandes rasgos es la generalización de la noción de una álgebra no necesariamente asociativa, que sí lo es salvo homotopía (tal y como mostramos en el capítulo segundo).

Ahora bien, desde el punto de vista computacional las  $A_\infty$ -álgebras forman una clase más débil que las álgebras; más débil en el sentido de que todas las propiedades de las  $A_\infty$ -álgebras son, a su vez, propiedades que verifican las álgebras.

He aquí donde topamos aparentemente con un problema de coherencia a la hora de traducir nociones del mundo matemático a nuestro entorno computacional, i.e., un objeto que resulta ser más complejo que otro desde el punto de vista matemático se vuelve más simple desde el punto de vista computacional. Veamos pues, en la siguiente sección cómo resolver tal enigma.

### 5.2.2. Soluciones

Al igual que en apartado anterior, primero plantearemos la solución a la cuestión de bucles infinitos, para más tarde adentrarnos en el escollo principal relacionado con jerarquías de clases, herencias y, como ya hemos visto, una necesaria nueva perspectiva.

### Bucles infinitos $\longleftrightarrow$ “Slot-unbound”

Una vez que ya hemos visto el bucle infinito ocasionado por una de las propiedades de nuestra programación orientada a objetos, hemos de hacer uso de la una de las propiedades de Lisp, la *estrategia perezosa*.

Supongamos, al igual que antes, que tenemos dos álgebras,  $A$  y  $B$ , cuyo producto tensorial,  $A \otimes B$ , queremos que a su vez sea una álgebra.

Nos basta con obligar a que el programa cree el objeto  $A \otimes B$  dejando el *slot producto* (que caracteriza dicho producto tensorial como objeto de la clase álgebra) *vacío*.

Esto es posible gracias al método *slot-unbound*, el cual sólo carga el *slot* al que se hace referencia en caso de que se pida explícitamente.

```
(DEFMETHOD TNSR-PRDC ((algb1 algebra) (algb2 algebra)...)
  (declare (ignore rest))
  (let ((result (call-next-method)))
    (assert (typep algb1 'algebra))
    (assert (typep algb2 'algebra))
    (change-class result 'algebra)))

(DEFMETHOD SLOT-UNBOUND (class (result algebra)
  (name (eql 'aprd)))
  (declare (ignore class))
  (let* ((dfnt (dfnt result))
        (algb1 (second dfnt))
        (algb2 (third dfnt))
        (aprd (cmps (tnsr-prdc (aprd algb1) (aprd algb2))
                    (1-TT-1 algb1 algb2))))
    (setf (slot-value result 'aprd) aprd)))
```

Esta solución aparentemente poco ortodoxa nos permite obviar las diferencias existentes entre las categorías y sus análogos, las clases. A continuación mostraremos un ejemplo ilustrativo de este hecho.

### Ejemplo máquina

1. Definamos el álgebra exterior con generador de grado 3 sobre  $\mathbb{Z}$ ,  $E(u, 3)$ , el cual es un álgebra de Hopf.

```
> (setf e3 (extr_algb 0 3))
[K1 Hopf-Algebra]
```

2. Definamos el producto tensorial de dicha álgebra consigo misma.

```
> (setf ee (tnsr-prdc e3 e3))
```



```
[K3 Hopf-Algebra]
```

3. Si inspeccionamos el objeto generado por Kenzo, obtenemos que el slot “aprd”, está vacío, a pesar de que dicho objeto pertenece a la clase *álgebra de Hopf*.

```
> (inspect ee)
```

```
Inspecting the HOPF-ALGEBRA [K3 Hopf-Algebra]

object      [K3 Hopf-Algebra]
class       #<standard-class hopf-algebra>
type        hopf-algebra
aprd        #:<unbound>
basis       #<Closure (flet tnsr-prdc-basis ...) @ #x20ced3da>
bsgn        <TnPr 0 0>
cmmn        #:<unbound>
cmpr        #<Closure (flet tnsr-prdc-cmpr ...) @ #x20ced3ba>
cprd        #:<unbound>
dffr        [K4 Morphism (degree -1): K3 -> K3]
dfnt        (tnsr-prdc [K1 Hopf-Algebra] ...)
efhm        #:<unbound>
grmd        #:<unbound>
idnm        3
mcprd       #:<unbound>
mprd        #:<unbound>
prpr        #:<unbound>
zp          0
```

4. Sin embargo, podemos hacer la multiplicación de dos elementos de esta álgebra:

```
> (aprd ee 3 (tnpr 0 (tnpr 0 0 0 0) 3 (tnpr 3 1 0 0)))
-----{CMBN 3}
<1 * <TnPr 1 0>>
-----
```

Si volvemos a inspeccionar el objeto, obtenemos que el *slot* sigue estando vacío aparentemente, a pesar de haber obtenido el resultado anterior.

```
> (inspect ee)
```

```
Inspecting the HOPF-ALGEBRA [K3 Hopf-Algebra]

object      [K3 Hopf-Algebra]
class       #<standard-class hopf-algebra>
type        hopf-algebra
aprd        #:<unbound>
basis       #<Closure (flet tnsr-prdc-basis ...) @ #x20ced3da>
bsgn        <TnPr 0 0>
cmmn        #:<unbound>
cmpr        #<Closure (flet tnsr-prdc-cmpr ...) @ #x20ced3ba>
cprd        #:<unbound>
dffr        [K4 Morphism (degree -1): K3 -> K3]
dfnt        (tnsr-prdc [K1 Hopf-Algebra] ...)
efhm        #:<unbound>
grmd        #:<unbound>
idnm        3
mcprd       #:<unbound>
mprd        #:<unbound>
prpr        #:<unbound>
zp          0
```

Lo que nos lleva a una solución correcta y sencilla.

Coherencia  $\longleftrightarrow$  Cambio de enfoque jerárquico

Históricamente, como ya hemos mencionado en capítulos anteriores, la noción de  $A_\infty$ -álgebra surge a mediados del siglo veinte, con el fin de medir la pérdida de asociatividad del producto de una estructura dada.

El problema planteado anteriormente acerca de cuál es el lugar que debería ocupar la clase “*a-infty-algebra*” en nuestro esquema de clases, es difícil de resolver. De hecho, la mejor solución que hemos encontrado, parte de un cambio de enfoque por completo. Veamos en qué consiste dicho enfoque.

En primer lugar, una  $A_\infty$ -álgebra,  $M$ , la podemos codificar como un dg-módulo junto con un morfismo de grado cero de  $mprd : TM \rightarrow M$ .

```
(DEFCLASS A-INFTY-ALGEBRA (chain-complex)
  ((mprd :type morphism :reader mprd1)))
```

Esta codificación tiene como contra que el grado de algunas de las operaciones involucradas no es el correcto en sentido estricto, de hecho, sabemos que si  $M$  es una  $A_\infty$ -álgebra, entonces las operaciones que definen dicha estructura, dan lugar a una diferencial de  $Ts(M)$  en  $Ts(M)$ , es decir, un morfismo de grado -1.

Al cometer este pequeño abuso de notación, cuando queramos calcular la imagen vía este morfismo sobre un elemento de  $M^{\otimes n}$ , deberemos cambiar convenientemente el grado de la combinación dada por la máquina de cero a  $n - 2$ .

A su vez, como pro tiene que ahora resulta muy fácil crear una jerarquía correcta de clases: dado que el producto de una álgebra  $A$  puede verse como un morfismo de grado cero de  $mprd : TA \rightarrow A$ , en donde para todo  $n > 2$ ,  $mprd : A^{\otimes n} \rightarrow A$  es una operación nula, y para  $n = 2$ ,  $mprd$  coincide con el producto de  $A$ ,  $aprd$ .

De este modo, en lugar de usar la estructura original de Kenzo, debemos añadir la  $A_\infty$ -álgebra (AA) de modo que sea una subclase de *chain-complex* (CHCM) y que a su vez sea una superclase de *algebra* (A).

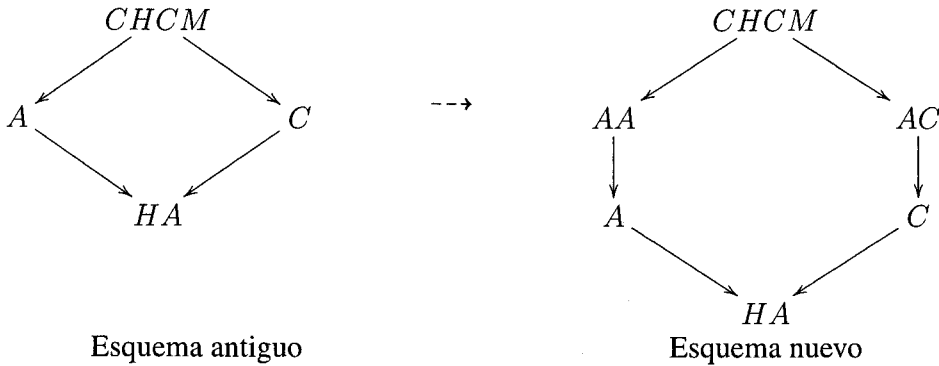
```
(DEFCLASS A-INFTY-ALGEBRA (chain-complex)
  ((mprd :type morphism :reader mprd1)))

(DEFCLASS ALGEBRA (a-infty-algebra)
```



```
((aprd :type morphism :reader aprdl))
```

Es decir, el punto de vista correcto es ver las estructuras como herederas de las  $A_\infty$ -estructuras. Si denotamos por  $AA$  la clase de  $A_\infty$ -álgebras y por  $AC$  la clase de  $A_\infty$ -coálgebras, tenemos


**Enriquecimiento de las clases**

Siguiendo un poco con la filosofía mostrada anteriormente de cómo enriquecer la estructura de clases de Kenzo de un modo coherente, hemos seguido añadiendo diversas clases intermedias, dando lugar a un diseño mucho más sofisticado actualmente.

De hecho, la búsqueda de fórmulas explícitas vía una contracción nos han llevado a definir más clases dependiendo del tipo de objeto de partida a estudiar.

En particular, nuestro interés por comparar  $A_\infty$ -estructuras inducidas vía perturbación con la posible estructura infinita ya existente en el dg-módulo menor, nos han llevado a preservar tal información, a costa de tener que generar un esquema de clases terriblemente complejo, sofisticado y aparentemente difícil de manejar.

Pasemos pues a describir las nuevas clases antes de analizar el esquema.

- Si el dg-módulo de partida es una  $A_\infty$ -álgebra  $AA$ , tenemos las subclases

$AAAA$ : si inducimos una nueva  $A_\infty$ -álgebra vía una contracción.

$ACAA$ : si inducimos una nueva  $A_\infty$ -coálgebra vía una contracción.

- Análogamente, si el dg-módulo de partida es  $A_\infty$ -coálgebra  $AC$ , tenemos las subclases

*AAAC, ACAC.*

- Si el dg-módulo de partida es una álgebra  $A$ , tenemos las subclases

*DAA*: si inducimos una nueva  $A_\infty$ -álgebra vía una contracción.

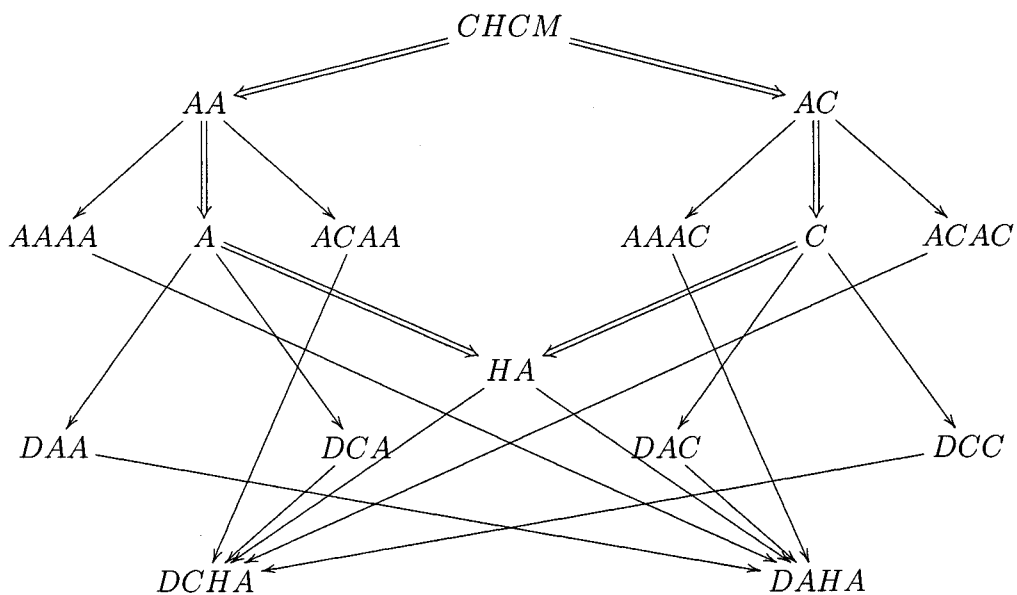
*DCA*: si inducimos una nueva  $A_\infty$ -coálgebra vía una contracción.

- Análogamente, si el dg-módulo de partida es una coálgebra  $C$ , tenemos las subclases

*DAC, DCC.*

- Y si es una álgebra de Hopf de partida  $HA$ , tenemos las subclases

*DAHA, DCHA.*



Nuevo esquema de clases



### 5.3. Esbozo del código fuente

En este apartado mostraremos algunas de las partes más importantes del trabajo computacional, como pseudo-código (pudiéndose ver todo el código fuente en el apéndice adjunto).

Es difícil describir con exactitud todo el trabajo realizado dado que la finalidad de esta parte computacional siempre ha sido el enriquecimiento de Kenzo desde el punto de vista algebraico con el fin de poder adaptar toda la herramienta ya implementada hacia el cálculo de las  $A_\infty$ -estructuras.

#### 5.3.1. Módulo combinatorio sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_p$

La primera parte en la que estamos interesados es en la parte combinatoria de Kenzo. Originalmente, éste sólo realizaba operaciones en  $\mathbb{Z}$ , por lo que consideramos oportuno modificar todos los comandos existentes para poder trabajar sobre  $\mathbb{Z}_p$ , con  $p$  un número natural cualquiera (véase archivo combinations.cl).

Mostramos a continuación una tabla con las leves modificaciones aplicadas a los comandos ya existentes en Kenzo con el fin de poder trabajar sobre un anillo arbitrario. Así pues, dado que nuestro entorno se basa en combinaciones lineales, las sumas, restas y demás operaciones siguen siendo válidas en la actualidad. En caso de querer trabajar con  $\mathbb{Z}$  es suficiente con poner en lugar de **zp** el 0.

**Estructura de los comandos combinatorios**

comandos en Kenzo-2	Nuevos comandos sobre $\mathbb{Z}_p$
(cmbn-ops cmbn)	(cmbn-ops <b>zp</b> cmbn)
(n-cmbn n cmbn)	(n-cmbn <b>zp</b> n cmbn)
(2cmbn-add cmpr cmbn1 cmbn2)	(2cmbn-add cmpr <b>zp</b> cmbn1 cmbn2)
(2cmbn-sbtr cmpr cmbn1 cmbn2)	(2cmbn-sbtr cmpr <b>zp</b> cmbn1 cmbn2)
(2n-2cmbn cmpr n1 cmbn1 n2 cmbn2)	(2n-2cmbn cmpr <b>zp</b> n1 cmbn1 n2 cmbn2)
(cmbn-cmbn cmpr n-cmbn-list)	(cmbn-cmbn cmpr <b>zp</b> n-cmbn-list)
(nterm-add cmpr degr rest)	(nterm-add cmpr <b>zp</b> degr rest)
(ncmbn-add cmpr cmbn rest)	(ncmbn-add cmpr <b>zp</b> cmbn rest)

Consideremos como ejemplo la suma de dos combinaciones donde en el primer caso que-remos sumar con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ , mientras que en el segundo, con coeficientes en  $\mathbb{Z}_{10}$ .

```
>(2cmbn-add #'s-cmpr 0 (cmbn 0 2 'b) (cmbn 0 1 'a 3 'c))
-----{CMBN 0}
<1 * A>
```

```

<2 * B>
<3 * C>
-----
>(2cmbn-add #'s-cmpr 10 (cmbn 0 9 'a) (cmbn 0 1 'a 3 'c))
-----{CMBN 0}
<3 * C>
-----

```

De igual modo, todos los dg-módulos y demás estructuras algebraicas han sido modificados con el fin de determinar sobre qué anillo se quiere trabajar. En caso de optar por el anillo  $\mathbb{Z}$ , es suficiente con no especificar nada, dado que éste es escogido por defecto.

De hecho, el objeto clave modificado es el objeto de la clase *chain-complex*, al cual le hemos añadido un “slot” en el que se debe precisar sobre que anillo se quiere trabajar (véase *classes.cl*):

```

(DEFCLASS CHAIN-COMPLEX (kenzo-object)
  ((-cmpr :type-cmprf :reader-cmpr1)
   (basis :type-basis :reader-basis1)
   ;; BaSe GeNerator
   (bsgn :type-gnrt :reader-bsgn)
   ;zpzp>
   (zp :type-fixnum :reader-zp)
   ;zpzp<
   ;; DiFFeRential
   (dffr :type-morphism :reader-dffr1)
   ;; GRound MoDule
   (grmd :type-chain-complex :reader-grmd)
   ;; EFFective HoMology
   (efhm :type-equivalence :accessor-efhm)))

```

De este modo, automáticamente el resto de estructuras algebraicas extraen el anillo base del dg-módulo subyacente, y por tanto, el producto tensorial, construcciones bar y cobar son generalizadas a cualquier anillo  $\mathbb{Z}_p$ .

### 5.3.2. Álgebras polinomiales, exteriores

En esta pequeña sección mostramos algunos ejemplos de dga-álgebras de Hopf que hemos añadido a Kenzo. De hecho, una de las finalidades a corto plazo de nuestro módulo es la

determinación del comportamiento de las operaciones involucradas en la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra de la homología de los espacios de Eilenberg- Mac Lane con coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$  y para ello, necesitamos hablar de álgebras polinomiales, exteriores, truncadas y modificadas desde el punto de vista computacional. Veamos pues, algunos ejemplos clarificadores de su codificación (véase `small-cartan-complexes.cl`, `small-cartan-reduction.cl`).

Para codificar los cuatro tipos de álgebras, consideramos interesante hacerlo por los exponentes de los generadores. Veamos parte del código fuente de

- el *álgebra polinomial* con un generador de grado  $n$ ,  $P(u, n)$ .

```
(DEFUN PLNM_ALGB (zp dmns)
  (declare (fixnum zp dmns))
  (unless (plusp dmns)
    (error ... the dimension should be positive))
  (the hopf-algebra
    ...
    rslt)))
```

Consideremos como ejemplo, el álgebra polinomial con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  con un generador de grado 3. Podemos ver el producto y el coproducto de dicha álgebra de Hopf:

```
> (setf zp3 (plnm_algb 0 3))
[K1 Hopf-Algebra]
> (aprd zp3 6 (tnpr 3 1 3 1))
-----{CMBN 6}
<1 * 2>
-----

> (cprd zp3 6 2)
-----{CMBN 6}
<1 * <TnPr 0 2>>
<2 * <TnPr 1 1>>
<1 * <TnPr 2 0>>
-----
```

- el álgebra exterior con generador de grado impar  $E(u, 2n + 1)$ :

```
(DEFUN EXTR_ALGB (zp dmns)
  (declare (fixnum zp dmns))
  (unless (oddp dmns)
    (error the dimension should be odd))
  (the hopf-algebra
    ...
    rslt)))
```

Consideremos como ejemplo, el álgebra exterior con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  con un generador de grado 5:

```
> (setf e5 (extr_algb 0 5))
[K13 Hopf-Algebra]
> (cprd e5 5 1)
-----{CMBN 5}
<1 * <TnPr 0 1>>
<1 * <TnPr 1 0>>
-----
> (aprd e5 10 (tnpr 5 1 5 1))
-----{CMBN 10}
-----
```

- el álgebra polinomial modificada con un generador de grado par  $\Gamma(u, 2n)$ :

```
(DEFUN DVPW_ALGB (zp dmns)
  (declare (type fixnum zp dmns))
  (unless (evenp dmns)
    (error the dimension should be even))
  (the hopf-algebra
    ...
    rslt)))
```



Consideremos como ejemplo, el álgebra polinomial modificada con coeficientes en  $\mathbb{Z}_{13}$  con un generador de grado 4:

```
> (setf z13dp4 (dvpw_algb 13 4))
[K7 Hopf-Algebra]
> (aprd z13dp4 12 (tnpr 8 2 4 1))
-----{CMBN 12}
<3 * 3>
-----
> (cprd z13dp4 4 1)
-----{CMBN 4}
<1 * <TnPr 0 1>>
<1 * <TnPr 1 0>>
-----
```

- el álgebra polinomial truncada,  $Q_p(u, 2n)$ :

```
(DEFUN TRPW_ALGB (zp prm dmns)
  (declare (fixnum zp dmns))
  (the algebra
    ...
    rslt)))
```

Consideremos como ejemplo, el álgebra polinomial truncada con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  con un generador de grado 4 y  $p = 11$ :

```
> (setf tp11-4 (trpw_algb 0 11 4))
[K1 Hopf-Algebra]
> (aprd tp11-4 8 (tnpr 4 1 4 1))
-----{CMBN 8}
<1 * 2>
-----
> (cprd tp11-4 8 2)
-----{CMBN 8}
```

```

<1 * <TnPr 0 2>>
<2 * <TnPr 1 1>>
<1 * <TnPr 2 0>>
-----

```

### 5.3.3. Módulos ARAIA y CRAIC

Como ya hemos comentado anteriormente, el programa más destacable añadido a Kenzo es un módulo, que nos permite calcular las estructuras de  $A_\infty$ -(co)álgebras inducidas en el módulo menor de una contracción dada, siempre y cuando el dg-módulo mayor sea una (co)álgebra.

Dada una contracción  $c : N \rightarrow M$ , si  $N$  es una dg-coálgebra, **CRAIC**, Coalgebra Reduction A-Infinity Coalgebra (resp. **ARAIA**, Algebra Reduction A-Infinity Algebra) es un método que funciona siguiendo el siguiente esquema:

- Considera como input la contracción  $c : N \rightarrow M$ .
- Chequea si  $N$  es una dg-coálgebra.
- Crea una nueva contracción  $Ts^{-1}c : Ts^{-1}(N) \rightarrow Ts^{-1}(M)$ .
- Usa el BPL, añadiendo como dato de perturbación la diferencial simplicial  $\delta$ , para dar lugar a una nueva contracción de la construcción Bar de  $N$  a la construcción Bar Tilde de  $M$ :  $\bar{B}c : \bar{B}N \rightarrow (\bar{B}M, d_T + d_\infty)$ .
- Extrae la nueva diferencial inducida en el dg-módulo menor  $d_\infty$  (la cual nos define la  $A_\infty$ -coalgebra inducida en  $M$ ) y la transforma en los  $\Delta_i$  inducidos en  $M$ .
- Finalmente CRAIC devuelve la contracción original  $c : N \rightarrow M$ , con la única modificación de la clase de  $M$  de dg-módulo a un objeto de la clase  $A_\infty$ -coalgebra.

Esta modificación de la clase de  $M$  es porque estamos interesados en comparar la estructura “antigua” con la nueva inducida, i.e., si  $M$  era originalmente una coálgebra, quizá, queramos a posteriori comparar el “antiguo” coproducto con la operación  $\Delta_2$  inducida por la contracción. Por este motivo, decidimos crear una estructura de clases muy compleja, en lugar de crear objetos nuevos.

De modo más explícito, el objeto  $M$  tiene los mismos **slots** que antes además de uno nuevo **imcprd** (Induced Multi CoPRoDuct), que es un morfismo de  $M$  a  $TM$ , definido como la suma de los  $\{\Delta_i\}_i$  con ciertos signos. Así pues, si queremos determinar la  $A_\infty$ -coalgebra de  $M$ , sólo tenemos que aplicar **imcprd** sobre generadores e inspeccionar cual es su



imagen. La estructura de este slot es simple

```
(imcprd módulo (grado de elemento) elemento).
```

la salida es una combinación (cmbn) de elementos de  $M^{\otimes n}$  con  $n \geq 2$ . Como ejemplo, si  $x \in M^{\otimes 3}$ ,  $x = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ , éste es codificado como

```
<<Mtnpr [|x1| x1][|x2| x2][|x3| x3]>>
```

### Ejemplos didácticos

Consideremos dos ejemplos para ilustrar el funcionamiento de CRAIC: el primero es un ejemplo trivial, en el que consideramos una dg-coálgebra y queremos ver cuál es la  $A_\infty$ -coálgebra inducida por un isomorfismo sobre si misma.

El segundo ejemplo muestra la estructura transferida por la construcción bar de una álgebra polinomial truncada hacia el producto tensorial del álgebra exterior,  $E$ , con una álgebra polinomial modificada,  $\Gamma$ .

**Ejemplo 1: La contracción trivial  $P(u, 2) \rightarrow P(u, 2)$**

Sea  $P(u, 2)$  el álgebra polinomial generada por  $u$  de grado 2 con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  y consideremos como isomorfismo el dado por la identidad. Como ya hemos visto anteriormente, este isomorfismo se puede considerar como la iso-contracción

$$c : \{P(u, 2), P(u, 2), 1_P, 1_P, 0\},$$

y por supuesto, la  $A_\infty$ -coálgebra inducida sobre  $P(u, 2n)$  debe ser nula excepto para  $\Delta_2$ , el cual coincide con el coproducto original de  $P(u, 2)$ , i.e, tiene que ser una dg-coálgebra.

```
> (setf p (plnm_algb 0 2))      ↔ PoLyNoMial ALGeBra en  $\mathbb{Z}$ ,  $|u| = 2$ .
  [K1 Hopf-Algebra]           ↔ objeto de la clase Hopf-Algebra.
> (setf r (trivial-rdct p))    ↔ Construcción de la iso-contracción.
[K9 Reduction K1 => K1]
> (craic r)                    ↔ Llamada a CRAIC.
[K9 Reduction K1 => K1]
> (setf m (bcc r))            ↔ Extracción del módulo menor.
[K1 double-a-infty-clgb-h-algb] ↔ La clase cambia a hopf-alg+ $A_\infty$ -coalg
inducida.
```

```

> (imcprd m 2 1)                               ← ¿A∞-coalg. sobre u?
-----{CMBN 2}
<-1 * <<Mtnpr[0 0][2 1]>>>                    ← (0, u0) ⊗ (2, u1) ∈ M⊗2
<-1 * <<Mtnpr[2 1][0 0]>>>                    ← (2, u1) ⊗ (0, u0) ∈ M⊗2
-----

> (imcprd m 4 2)                               ← ¿A∞-coalg. sobre u2?
-----{CMBN 4}
<-1 * <<Mtnpr[0 0][4 2]>>>                    ← (0, u0) ⊗ (4, u2) ∈ M⊗2
<-1 * <<Mtnpr[2 1][2 1]>>>                    ← (2, u1) ⊗ (2, u1) ∈ M⊗2
<-1 * <<Mtnpr[4 2][0 0]>>>                    ← (4, u2) ⊗ (0, u0) ∈ M⊗2
-----

> (imcprd m 6 3)                               ← ¿A∞-coalg. sobre u3?
-----{CMBN 6}
<-1 * <<Mtnpr[0 0][6 3]>>>                    ← (0, u0) ⊗ (6, u3) ∈ M⊗2
<-1 * <<Mtnpr[2 1][4 2]>>>                    ← (2, u1) ⊗ (4, u2) ∈ M⊗2
<-1 * <<Mtnpr[4 2][2 1]>>>                    ← (4, u2) ⊗ (2, u1) ∈ M⊗2
<-1 * <<Mtnpr[6 3][0 0]>>>                    ← (6, u3) ⊗ (0, u0) ∈ M⊗2
-----

```

De hecho, se ve experimentalmente que la máquina devuelve el coproducto de  $P(u, 2)$  como  $A_\infty$ -coálgebra inducida.

**Ejemplo 2:** La contracción  $\bar{B}(Q_5(u, 2)) \rightarrow E(v, 3) \otimes \Gamma(w, 12)$

Consideremos como segundo ejemplo la contracción entre la construcción bar del álgebra truncada y el producto tensorial del álgebra exterior con el álgebra polinomial modificada. Teniendo en cuenta las fórmulas explícitas descritas en el capítulo 3, los elementos de estas álgebras serán codificados por sus exponentes (como en el ejemplo anterior).

```

> (setf tr (trpw_algb 0 5 2))                  ← TRuncated PoWer-ALGeBra in Z, p =
5, deg(u)=2.

[K1 Hopf-Algebra]                             ← objeto de la clase Hopf-Algebra.
> (setf rr (rdct-bar tr))                     ← Construcción de la contracción.
[K32 Reduction K10 => K27]
> (craic rr)                                   ← Llamada a CRAIC.
[K32 Reduction K10 => K27]
> (setf m (bcc rr))                           ← Extracción del módulo menor.

```



[K27 double-a-infty-clgb-h-algb]  $\leftrightarrow$  **La clase cambia a hopf- $alg+A_\infty$ -coalg inducida.**

```

> (imcprd m 3 (tnpr 3 1 0 0))           $\leftrightarrow$  ¿ $A_\infty$ -coalg. sobre  $u \otimes \gamma_0$ ?
-----{CMBN 1}
<-1 * <<Mtnpr[0 <TnPr 0 0>][3 <TnPr 1 0>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[3 <TnPr 1 0>][0 <TnPr 0 0>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
-----

> (imcprd m 12 (tnpr 0 0 12 1))        $\leftrightarrow$  ¿ $A_\infty$ -coalg. sobre  $u^0 \otimes \gamma_1$ ?
-----{CMBN 15}
<-1 * <<Mtnpr[0 <TnPr 0 0>][12 <TnPr 0 1>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[12 <TnPr 0 1>][0 <TnPr 0 0>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>]
      [3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 5}$ 
-----

> (imcprd m 15 (tnpr 3 1 12 1))        $\leftrightarrow$  ¿ $A_\infty$ -coalg. sobre  $u^1 \otimes \gamma_1$ ?
-----{CMBN 15}
<-1 * <<Mtnpr[0 <TnPr 0 0>][15 <TnPr 1 1>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[3 <TnPr 1 0>][12 <TnPr 0 1>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[15 <TnPr 1 1>][0 <TnPr 0 0>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
-----

> (imcprd m 24 (tnpr 0 0 24 2))        $\leftrightarrow$  ¿ $A_\infty$ -coalg. sobre  $u^0 \otimes \gamma_2$ ?
-----{CMBN 24}
<-1 * <<Mtnpr[0 <TnPr 0 0>][24 <TnPr 0 2>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[12 <TnPr 0 1>][12 <TnPr 0 1>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[24 <TnPr 0 2>][0 <TnPr 0 0>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>]
      [3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>][15 <TnPr 1 1>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 5}$ 
<-1 * <<Mtnpr[3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>]
      [3 <TnPr 1 0>][15 <TnPr 1 1>][3 <TnPr 1 0>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 5}$ 
<-1 * <<Mtnpr[3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>]
      [15 <TnPr 1 1>][3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 5}$ 
<-1 * <<Mtnpr[3 <TnPr 1 0>][15 <TnPr 1 1>]
      [3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 5}$ 
<-1 * <<Mtnpr[15 <TnPr 1 1>][3 <TnPr 1 0>]
      [3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>][3 <TnPr 1 0>]>>>  $\leftrightarrow$  Elemento de  $M^{\otimes 5}$ 

```

Una importante conclusión en la determinación de la  $A_\infty$ -coálgebra inducida en  $E(u, 3) \otimes \Gamma(w, 12)$  es la fórmula experimental obtenida para  $\Delta_5$ ,

$$\Delta_5(u^i \otimes \gamma_j(w)) = \sum_{k_1 + \dots + k_p = j-1} u^{i+1} \gamma_{k_1}(w) \otimes \dots \otimes u^{i+1} \gamma_{k_p}(w).$$

## 5.4. Aplicaciones

La finalidad última de este programa es la obtención de resultados experimentales sobre  $A_\infty$ -estructuras junto con sus fórmulas explícitas, que puedan dar luz sobre resultados teóricos a posteriori.

Ahondando un poco más en la contextualización del párrafo anterior, una aplicación inmediata es el estudio de las fórmulas explícitas de la  $A_\infty$ -estructura del producto tensorial de varias  $A_\infty$ -estructuras definidas por perturbación. Mostramos a continuación algún ejemplo de este caso.

### 5.4.1. Cálculo de $A_\infty$ -estructuras en productos tensoriales

Una importante aplicación de este programa es que se puede ver la naturaleza del producto tensorial de varias  $A_\infty$ -estructuras y dar a grandes rasgos las fórmulas explícitas, desconocidas hasta ahora, gracias a una tarea experimental. Por supuesto, es importante destacar que los algoritmos son de una complejidad enorme por lo que sólo es posible calcular resultados en baja dimensión.

Cálculo de la  $A_\infty$ -coálgebra de  $E(u, 3) \otimes \Gamma(\gamma, 8)^{\otimes 2}$

Consideremos pues, como ejemplo el producto tensorial de  $E(u, 3) \otimes \Gamma(\gamma, 8)$  consigo mismo. Gracias a las propiedades de las contracciones, es posible construir el producto tensorial de varias contracciones, el cual resulta ser nuestro punto de vista a la hora de abordar el estudio de las fórmulas explícitas del dg-módulo antes mencionado.

> (setf tr2 (trpw\_algb 0 3 2))  $\leftrightarrow Q_3(u, 2)$ .

[K1 Hopf-Algebra]

$\leftrightarrow$  objeto de la clase Hopf-Algebra.

> (setf r2 (rdct-bar tr2))

$\leftrightarrow$  Construcción de la contracción.

[K32 Reduction K10 => K27]

> (setf rr2 (tnsr-prdc r2 r2))

$\leftrightarrow$  contracción $\otimes$ contracción.



```

[K42 Reduction K12 => K33]
> (craic rr2)                                ← Llamada a CRAIC.
[K42 Reduction K12 => K33]
> (setf m (bcc rr2))
[K33 double-a-infty-clgb-h-algb]

> (imcprd m 3 (tnpr 0 (tnpr 0 0 0 0) 3 (tnpr 3 1 0 0)))
-----{CMBN 3}
<-1 * <<Mtnpr[0 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 0>>]
      [3 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 1 0>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[3 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 1 0>>]
      [0 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 0>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
-----

> (imcprd m 8 (tnpr 0 (tnpr 0 0 0 0) 8 (tnpr 0 0 8 1)))
-----{CMBN 8}
<-1 * <<Mtnpr[0 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 0>>]
      [8 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 1>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[8 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 1>>]
      [0 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 0>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
-----

> (imcprd m 16 (tnpr 8 (tnpr 0 0 8 1) 8 (tnpr 0 0 8 1)))
-----{CMBN 14}
<-1 * <<Mtnpr[0 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 0>>]
      [16 <TnPr <TnPr 0 1> <TnPr 0 1>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[16 <TnPr <TnPr 0 1> <TnPr 0 1>>]
      [0 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 0>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
-----

> (imcprd m 22 (tnpr 11 (tnpr 3 1 8 1) 11 (tnpr 3 1 8 1)))
-----{CMBN 22}
<-1 * <<Mtnpr[0 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 0>>]
      [22 <TnPr <TnPr 1 1> <TnPr 1 1>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[6 <TnPr <TnPr 1 0> <TnPr 1 0>>]
      [16 <TnPr <TnPr 0 1> <TnPr 0 1>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[22 <TnPr <TnPr 1 1> <TnPr 1 1>>]
      [0 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 0>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
-----

```

```

> (imcprd m 32 (tnpr 16 (tnpr 0 0 16 2) 16 (tnpr 0 0 16 2)))
-----{CMBN 32}
<-1 * <<Mtnpr[0 <TnPr <TnPr 0 0> <TnPr 0 0>>]
  [32 <TnPr <TnPr 0 2> <TnPr 0 2>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
<-1 * <<Mtnpr[16 <TnPr <TnPr 0 1> <TnPr 0 1>>]
  [16 <TnPr <TnPr 0 1> <TnPr 0 1>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 2}$ 
+ terms of  $M^{\otimes 2}$ 
<1 * <<Mtnpr[6 <TnPr <TnPr 1 0> <TnPr 1 0>>]
  [6 <TnPr <TnPr 1 0> <TnPr 1 0>>]
  [11 <TnPr <TnPr 1 0> <TnPr 0 1>>]
  [11 <TnPr <TnPr 0 1> <TnPr 1 0>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 4}$ 
<1 * <<Mtnpr[6 <TnPr <TnPr 1 0> <TnPr 1 0>>]
  [11 <TnPr <TnPr 0 1> <TnPr 1 0>>]
  [6 <TnPr <TnPr 1 0> <TnPr 1 0>>]
  [11 <TnPr <TnPr 1 0> <TnPr 0 1>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 4}$ 
+ terms of  $M^{\otimes 4}$ 
<1 * <<Mtnpr[11 <TnPr <TnPr 0 1> <TnPr 1 0>>]
  [6 <TnPr <TnPr 1 0> <TnPr 1 0>>]
  [6 <TnPr <TnPr 1 0> <TnPr 1 0>>]
  [11 <TnPr <TnPr 1 0> <TnPr 0 1>>]>>>    ← Elemento de  $M^{\otimes 4}$ 
-----

```

Gracias a los cálculos con diversos ejemplos a bajo nivel del producto tensorial del álgebra exterior con el álgebra polinomial modificada podemos mostrar las fórmulas experimentales para las operaciones involucradas en la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra.

Fórmulas experimentales de  $\Delta_p$

$$\begin{aligned} \Delta_p(u^i \otimes \gamma_j \otimes u^l \otimes \gamma_k) = & \left\{ \sum_i 1^i \otimes \Delta_2(u^i \otimes \gamma_j) \otimes 1^{p-i-2} \right\} \ominus \Delta_p(u^l \otimes \gamma_k) \\ & + \Delta_p(u^i \otimes \gamma_j) \ominus \left\{ \sum_i 1^i \otimes \Delta_2(u^l \otimes \gamma_k) \otimes 1^{p-i-2} \right\}. \end{aligned}$$

Fórmulas experimentales de  $\Delta_{2p-2}$

$$\Delta_{2p-2}(u^i \otimes \gamma_j \otimes u^l \otimes \gamma_k) = \left\{ \sum_i 1^i \otimes \Delta_p(u^i \otimes \gamma_j) \otimes 1^{p-i-2} \right\} \ominus \left\{ \sum_j 1^j \otimes \Delta_p(u^l \otimes \gamma_k) \otimes 1^{p-j-2} \right\}.$$

## 5.5. Optimizaciones y posibles mejoras

Por supuesto nos quedan mencionar unos cuantos puntos a mejorar del módulo que hemos creado partiendo del programa Kenzo.

En primer lugar, cabe decir que la parte computacional de esta memoria, no es ni mucho menos una parte cerrada, dado que siempre existe la posibilidad de modificar pequeños aspectos computacionales que lo hacen más eficiente o más “correcto”.

Por supuesto, dado que trabajamos en Topología Algebraica, no podemos obviar el hecho de que la mayoría de los cálculos son muy costosos en tiempo, lo que imposibilita probar con ejemplos extremadamente complejos tanto por tiempo como por espacio; por tanto, cualquier mejora en los algoritmos implementados o la obtención de nuevos métodos a priori más eficaces, proporcionaría una ventaja sustancial desde este punto de vista.

Como ejemplo, resultaría interesante añadir parámetros que se correspondan con la teoría de inversiones mostrada en el capítulo anterior con el fin de evitar cálculos superfluos.

Igualmente, el uso de estructuras más ricas, permitiría cálculos más eficientes. Como ejemplo a este respecto, sabemos que el álgebra polinomial  $P(u, 2n)$  considerada como una dga-álgebra tiene un único generador en grado  $2n$ , mientras que considerada como dga-módulo tiene un generador en cada grado par  $2kn$ ,  $u^k = u \dots u$ .

Lo que nos lleva a que el cálculo de la diferencial sobre un generador de  $P(u, 2n)$  como dga-módulo se puede deducir a partir de la diferencial aplicada sobre los generadores de  $P(u, 2n)$  como dga-álgebra:  $d(u^k) = d(u) \cdot u^{k-1} + ud(u)u^{k-2} + \dots + u^{k-1}d(u)$  y, por tanto, obtendríamos una reducción en tiempo y espacio muy importantes.

# Apéndice

En esta última parte de la memoria mostramos la lista de archivos modificados y/o añadidos a Kenzo-2 junto con algunas breves explicaciones de como usarlos/testearlos.

Antes de enumerarlos y de mostrar algunas de sus peculiaridades, en caso de querer manejarse un poco con el módulo de programación es de gran ayuda leer el manual de Kenzo [DRSS99] o visitar la web [BS05].

- **classes.cl**: añadidas todas las clases necesarias para poder trabajar con  $A_\infty$ -estructuras. Los archivos relacionados son
  - **a-infty-algebras.cl**
  - **a-infty-coalgebras.cl**
  - **a-infty-algb-a-infty-clgb.cl**
  - **a-infty-algb-a-infty-algb.cl**
  - **a-infty-clgb-a-infty-algb.cl**
  - **a-infty-clgb-a-infty-clgb.cl**
  - **d-a-infty-algb-clgb.cl**
  - **d-a-infty-algb-algb.cl**
  - **d-a-infty-clgb-clgb.cl**
  - **d-a-infty-clgb-algb.cl**
- **combinations.cl**: como ya comentamos en el capítulo anterior, éste es el archivo principal modificado para poder trabajar con combinaciones sobre cualquier anillo  $\mathbb{Z}_p$ .
- **chain-complexes.cl**: contiene una pequeña modificación con respecto a la versión “oficial”, de modo que si no se especifica el anillo, se considere automáticamente  $\mathbb{Z}$ .





- **tensor-products.cl**: modificado para que el producto tensorial de dos álgebras sea una álgebra (ídem con coálgebras y con álgebras de Hopf).
- **tnsr-mdls.cl**: nuevo archivo que crea el módulo tensorial sobre un dg-módulo dado. Como subrutinas principales destacamos:
  - (MTNPR degr list)
  - +NULL-MTNPR+
  - (PRINT-KEYCONS...) <<Mtnpr . . . >>
  - (MTNPR-CMPR cmpr)
  - (MTNPR-BASIS-LENGTH basis degr length)
  - (MTNPR-BASIS basis)
  - (MTNPR-INTR-VRTC-DFFR dffr)
  - (MTNPR-CHCM (chcm chain-complex))
- **algebras.cl**: añadidas algunas subrutinas de modo que el módulo tensorial de una álgebra tenga estructura de coálgebra.
- **coalgebras.cl**: añadidas algunas subrutinas de modo que el módulo tensorial de una coálgebra tenga estructura de álgebra.
- **cobar.cl**: añadida la estructura de álgebra.
- **bar.cl**: añadida la estructura de coálgebra.
- **small-cartan-complexes.cl**: definidas las cuatro álgebras de Hopf básicas (definidas en el capítulo anterior).
- **small-cartan-reduction.cl**: contracción de  $B(Q_p)$  al producto tensorial del álgebra exterior con el álgebra de potencias divididas  $E \otimes \Gamma$ .
- **araia.cl**: Las funciones definidas en este archivo son:
  - (mtnpr-abar mtnpr)
  - (abar-mtnpr abar)
  - (degr-mtnpr-degr-abar degr mtnpr)
  - (CMBN-ABAR-CMBN-MTNPR cmbn)
  - (extr-1abar-abar-cmbn cmbn)
  - (extr-nabar-abar-cmbn n cmbn)

- (algebra-reduction-a-infty-algebra (rdct reduction))
- **craic.cl**: Las funciones definidas en este archivo son:
  - (mtnpr-allp mtnpr)
  - (allp-mtnpr allp)
  - (degr-mtnpr-degr-allp degr mtnpr)
  - (CMBN-ALLP-CMBN-MTNPR cmbn)
  - (extr-1cobar-cobar-cmbn cmbn)
  - (extr-n-cobar-cobar-cmbn n cmbn)
  - (coalgebra-reduction-a-infty-coalgebra (rdct reduction))
- **matrixes.cl**: archivo auxiliar para el estudio de las a-infinito álgebras de Hopf.
- **bar-cobar.cl**: archivo dedicado al módulo  $BC(H)$  (en construcción).



# Bibliografía

- [Ada78] J. F. Adams, *Infinite loop spaces*, Ann. of Math. Stud., **90** (1978), Princeton Univ. Press, Princeton.
- [Alv97] V. Álvarez, *Un tratamiento del Teorema de Eilenberg-Zilber torcido*, Tesina, Sevilla (1997).
- [Alv01] V. Álvarez, *Complejos reducidos de resoluciones y perturbación homológica*, Tesis Doctoral de la Universidad de Sevilla, Sevilla (2001).
- [Arm99] J.A. Armario, *Estructuras multiplicativas y Homología de fibrados*, Tesis Doctoral de la Universidad de Sevilla, Sevilla (1999).
- [AL91] A. Asperti y G. Longo, *Categories types and structures*, M.I.T. Press (1991).
- [Ber06] A. Berciano, *Symbolic Description of Hopf Algebras and Perturbation*, Proceedings EACA 2006.
- [Ber06b] A. Berciano, *Symbolic Computation of  $A_\infty$ -structures*, Congreso Mathematics, Algorithms and Proofs, 2006.
- [BS05] A. Berciano y F. Sergeraert: Software to compute  $A_\infty$ -(co)algebras: Araia  $\beta$  Craic. <http://www.ehu.es/aba/araia-craic.htm>
- [BJR06] A. Berciano, M.J. Jiménez y P. Real, *Reducing computational cost of the basic perturbation lemma*, preprint.
- [BR04] A. Berciano y P. Real, *The  $A_\infty$ -coalgebra structure of the  $\mathbb{Z}_p$ -homology of Eilenberg-Mac Lane spaces*, Proceedings EACA 2004, 29-33.
- [BV73] J. M. Boardman, R. M. Vogt, *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **347** (1973).
- [Bro57] E.H. Brown, *Finite computability of Postnikov complexes*, Annals of Math. **65** (2) (1957), 1-20.



- [Bro59] E.H. Brown, *Twisted tensor products I*, Annals of Math. **65** (1959), 223-246.
- [Bro67] R. Brown, *The twisted Eilenberg-Zilber theorem*, Celebrazioni Archimedae del Secolo XX, Simposio di Topologia (1967), 34-37.
- [Car56] H. Cartan, *Algèbres d'Eilenberg-Mac Lane*, Séminaire H. Cartan, 1954/55, (1956), (exposés 2 à 11).
- [CE56] H. Cartan y S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.
- [CHATA00a] C.H.A.T.A. Group *Determining 1-homological models for CDGAs*, International Workshop "Algebraic Models for topological spaces and fibrations and their application", Tbilisi, Georgia (2000).
- [CHATA00b] C.H.A.T.A. Group *Computing small 1-homological models cdga-'s*, Proceedings of CASC'00, Samarcanda, Uzbekistan, Eds. V.G. Ganzha, E.W. Mayr, E.V. Vorozhtsov, Springer-Verlag, (2000), 87-100.
- [Cos00] S.R. Costenoble, *Simplicial and Categorical Comma Categories*, Preprint (2000).
- [Cur71] E.B. Curtis, *Simplicial Homotopy Theory*, Advances in Mathematics **6** (1971), 107-209.
- [DRSS99] X. Dousson, J. Rubio, F. Sergeraert e Y. Siret: The Kenzo program. Institut Fourier, Grenoble (1999). <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/sergeraert/Kenzo/>
- [EM53] S. Eilenberg y S. Mac Lane, *On the groups  $H(\pi, n)$ , I*, Annals of Math. **58** (1953), 55-106.
- [EM54] S. Eilenberg y S. Mac Lane, *On the groups  $H(\pi, n)$ , II*, Annals of Math. **60** (1954), 49-139.
- [EZ50] S. Eilenberg y J.A. Zilber, *Semisimplicial complexes and singular homology*, Annals of Math. **51**, (1950), 499-513.
- [EZ59] S. Eilenberg y J.A. Zilber, *On products of complexes*, Am. J. Math. **75** (1959), 200-204.
- [FP90] R. Fritsch y R.A. Piccinini, *Cellular structures in Topology*, Cambridge University Press (1990).
- [Fuk93] K. Fukaya, *Morse homotopy,  $A_\infty$ -category and Floer homologies*, MSRI preprint n.020-94 (1993).

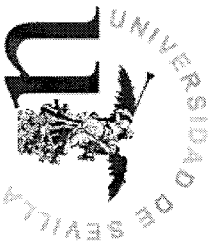
- [GJ90] E. Getzler, J. D. S. Jones,  *$A_\infty$ -algebras and the cyclic bar complex*, Illinois J. Math. **34** (1990), 256-283.
- [GJ99] P.G. Goerss y J.F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Birkhäuser Verlag (1999).
- [GL89] V.K.A.M. Gugenheim y L. Lambe, *Perturbation theory in Differential Homological Algebra, I*, Illinois J.Math. **33** (1989), 556-582.
- [GLS91] V.K.A.M. Gugenheim, L. Lambe y J.D. Stasheff, *Perturbation theory in Differential Homological Algebra, II*, Illinois J.Math. **35** (3) (1991), 357-373.
- [GM74a] V.K.A.M. Gugenheim y J.P. May, *On the theory and application of differential torsion products*, Mem.A.M.S., **142**, (1974).
- [GS86] V.K.A.M. Gugenheim y J.D. Stasheff, *On perturbations and  $A_\infty$ -structures*, Bull. Soc. Math. de Belg. **38**, (1986),237-246.
- [Gra96] P. Graham, *Ansi Common Lisp*, Prentice-Hall Inc., (1996).
- [HK91] J. Huebschmann y T. Kadeishvili, *Small models for chain algebras*, Math. Z. **207** (1991), 245-280.
- [JR01] M.J. Jiménez y P. Real. “Coalgebra” structure on 1-homological models of commutative differential graded algebras, Proc. of Computer Algebra in Scientific Computing, Springer-Verlag (2001).
- [Jim03] M.J. Jiménez,  *$A_\infty$ -estructuras y perturbación homológica*, Tesis Doctoral de la Universidad de Sevilla, Sevilla (2003).
- [JT99] A. Joyal y M. Tierney, *An Introduction to Simplicial Homotopy Theory*, preprint.
- [Kad80] T. Kadeishvili, *On the homology theory of fibre spaces*, Uspekhi Mat. Nauk. **35** (3), (1980), 183-188
- [Kad82] T. Kadeishvili, *The algebraic structure in the homology of an  $A_\infty$ -algebra*, (Russian) Soobshch. Akad. nauk Gruzin SSR **108** (1982), 249-252.
- [Kad87] T. Kadeishvili, *The functor  $D$  for a category of  $A_\infty$ -algebras*, (Russian) Soobshch. Akad. nauk Gruzin SSR **125** (1987), 273-276.
- [Kad88] T. Kadeishvili, *The structure of  $A_\infty$ -algebra and the Hochschild and Harrison cohomologies*, (Russian) Trudy Tbiliss. Math Inst. Razmadze Akad. nauk Gruzin SSR **91** (1988), 19-27.

- [Kan56] D.M. Kan *On complete semi-simplicial complexes*, Amer. J. Math. **79**, (1956), 449-476.
- [Kel01] B. Keller, *Introduction to  $A_\infty$ -Algebras and Modules*, Homology, Homotopy and Applications **3** (1) (2001), 1-35.
- [Kon94] M. Kontsevich, *Homological algebra of Mirror Symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, Switzerland (1994), **1** (1995), Birkhäuser Basel, 120-139.
- [Kos47] J.L. Koszul, *Sur les opérateurs de dérivation dans un anneau*, C.R. Acad. Sci. Paris **225**, (1947), 217-219.
- [Kur56] A. G. Kurosh, *The theory of groups*, Chesea Publ. Co., New York, **1** (1956).
- [LS87] L.A. Lambe y J.D. Stasheff, *Applications of perturbation theory to iterated fibrations*, Manuscripta Math. **58** (1987), 363-376.
- [LSc86] J. Lambek y P.J. Scott, *Introduction to higher order Categorical Logic*, Cambridge University Press (1986).
- [Lef03] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les  $A_\infty$ -catégories*, Tesis Doctoral de l'Université Paris 7, Paris (2003).
- [Lyo00] R. Lyons, *Categories*, Preprint (2000).
- [Mac71] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag (1971).
- [Mac95] S. Mac Lane, *Homology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag (1995).
- [Mar92] M. Mark, *A cohomology theory for  $A_m$ -algebras and applications*. J. of Pure and Applied Algebra **83** (6) (1992), 141-175.
- [May67] J.P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, D. Van Nostrand Company (1967).
- [May72] J. P. May, *The Geometry of Iterated Loop Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **271** (1972).
- [MM94] S. Mac Lane y L. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag (1994).
- [McC85] J. McCleary, *User's guide to spectral sequences*, Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware (1985).

- [MO96] J. Martin y J.J. Odell, *Object-Oriented Methods: Pragmatic Considerations*, Prentice Hall (1996).
- [Mun74] H.J. Munkholm, *The Eilenberg-Moore spectral sequence and strongly homotopy multiplicative maps*. J. Pure Appl. Alg. **5** (1974), 1-50.
- [Munk84] J.R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Adisson-Wesley (1984).
- [Pre88] G. Preuss, *Theory of Topological Structures (an approach to Categorical Topology)*, Dordrecht (1988).
- [Pro84] A. Prouté, *Algèbres différentielles fortement homotopiquement associatives*. PhD thesis, Université Paris VII (1984).
- [Rea93] P. Real, *Algoritmos de cálculo de homología efectiva de los espacios clasificantes*, Ph. D. thesis, Universidad de Sevilla (1993).
- [Rea00] P. Real, *Homological Perturbation theory and associativity*, Homology, Homotopy and Applications **2**, (5) (2000), 51-88.
- [Rub91] J. Rubio, *Homologie effective des espaces de lacets itérés: un logiciel*, PhD thesis, l'Université J.Fourier, Grenoble (1991).
- [RS88] J. Rubio y F. Sergeraert, *Homologie effective et suites spectrales d'Eilenberg-Moore*, C.R. Acad. Sc. Paris, **306** (1988), 723-726.
- [RS02] J. Rubio y F. Sergeraert, *Constructive algebraic topology*, Bull. Sci. Math, **126** (2002), 389-412.
- [RR78] C. Ruiz y R. Ruiz, *Remarks about the Eilenberg-Zilber type decomposition in cosimplicial sets*, Revista Colombiana de Matemáticas, **7** (1978), 61-82.
- [Sch91] R. Schön, *Effective Algebraic Topology*, Mem. AMS. **451** (1991).
- [Ser87] F. Sergeraert, *Homologie effective I, II*, C. R. Acad. Sc. Paris **304** (1987), 279-281 y 319-321.
- [Ser94] F. Sergeraert, *The computability problem in algebraic topology*. Adv. Math. **104** (1) (1994), 1-29.
- [Shi62] W. Shih, *Homologie des espaces fibrés*, Inst. Hautes Etudes Sci., **13** (1962), 93-176.
- [Sta63] J.D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces I, II*, Transactions of A.M.S. **108** (1963), 275-292, 293-312.

- [Sta70] J.D. Stasheff, *H-spaces from a homotopy point of view*, Lecture Notes in Math. **161**, Springer, N.Y., (1970).
- [Sta92] J.D. Stasheff, *Differential graded Lie algebras, Quasi-Hopf algebras, and higher homotopy algebras*, Quantum Groups, Proc. workshops, Euler Int. Math. Inst., Leningrad 1990, Lecture Notes in Mathematics **1510** (1992), 120-137.
- [SU1] S. Sanedlidze y R. Umble, *A Diagonal on the Associahedra*, preprint Arxiv math.AT/0011065.
- [SU2] S. Sanedlidze y R. Umble,  *$A_\infty$ -Hopf algebras*, preprint.
- [SU3] S. Sanedlidze y R. Umble, *The biderivative and  $A_\infty$ -bialgebras*, Homology, Homotopy and Applications **7** (2) (2005), 161-177.
- [SU4] S. Sanedlidze y R. Umble, *Diagonals on the permutahedra, multiplihedra and Associahedra*, preprint Arxiv math.AT/0209109.
- [Tan85] M.C. Tangora, *Computing the homology of the lambda algebra*, Mem. A.M.S. **337** (1985).
- [Tan89] M.C. Tangora, *Computers in Geometry and Topology*, Marcel Dekker, Inc. New York (1989).
- [Wei94] C.A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge University Press (1994).





**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

Reunido el tribunal en el día de la fecha, integrado por los abajo firmantes, para evaluar la tesis doctoral de D. titulada

acordo otorgarle la calificación de

Sevilla, a                    de                    de 200 .

Vocal,

Vocal,

Vocal,

Presidente,

Secretario,

Doctorando,