Arboles Semánticos para Lógica Modal con algunos resultados sobre Sistemas Normales.

Tesis presentada por
Francisco José Salguero Lamillar
en la Universidad de Sevilla para
obtener el Título de Doctor.

La lógica modal está unida en sus orígenes al estudio lógico categorial de los modos lingüísticos llevado a cabo por Aristóteles como un paso más hacia la constitución del método científico. Este aspecto lingüístico es especialmente relevante para entender la importancia que el estudio de las modalidades tuvo en la Edad Media, sobre todo entre aquellos tratadistas y comentaristas de Aristóteles que conocemos habitualmente como *modisti*, padres de la gramática especulativa y, de alguna forma, también de la moderna lingüística general. Lamentablemente, este amplio interés por la lógica modal en el medievo no tuvo continuidad en los siglos posteriores. Tanto en la tradición de la denominada gramática especulativa (o gramática racional) como en la tradición lógica de los siglos XVI-XIX (habitualmente unidas por lazos evidentes de parentesco), las modalidades pasaron a un segundo plano e, incluso, al olvido absoluto. Es raro encontrar en este largo periodo de tiempo autores que traten la modalidad desde una perspectiva lógica y ni siquiera los tratadistas de Port Royal, seguramente los pensadores más representativos en este terreno desde el Renacimiento hasta el siglo XIX, incluyen en sus obras sobre lógica y gramática el análisis de los modos o del silogismo modal aristotélico. Y cuando algún autor lo hace, como en el caso de Leibniz, el espacio dedicado a la lógica de los modos es insignificante en relación con el resto de las disquisiciones lógicas o lingüísticas, sin suponer ningún avance con respecto a lo establecido por los lógicos y gramáticos medievales. Hay que esperar para que en la segunda mitad del siglo XIX y primer tercio del XX los trabajos de H.MacColl, primero, y después los de C.I.Lewis sobre la teoría de la deducción y sobre la implicación estricta y su relación con los modos *necesario* y *posible* reaviven el interés por la lógica modal.

Pero si a partir de los trabajos de Lewis la teoría de la deducción empieza a contar con sistemas lógicos modales, merced a *Meaning and Necessity* de R. Carnap comienzan a aplicarse a la lógica modal modelos semánticos basados en la teoría de modelos clásica. Sin duda, la actual *semántica de mundos posibles* es heredera de los trabajos de Carnap, aunque su desarrollo reciente ha dependido en gran medida de otros dos acontecimientos importantes que no deben olvidarse. En primer lugar, la obra del lógico norteamericano R.Montague y el énfasis que puso sobre la semántica de los mundos posibles como piedra angular de su teoría del lenguaje y como herramienta de análisis filosófico ha influído decisivamente para que la teoría de las modalidades fructifique, especialmente en el terreno del análisis del lenguaje natural. En segundo lugar, el desarrollo en los últimos tiempos de la teoría matemática de modelos clásica, sobre todo en el ámbito de la computación, ha supuesto una apertura de la lógica hacia el estudio de lenguajes formales más expresivos que el lenguaje de la lógica clásica de predicados.

***

En tal contexto, esta investigación supone la aplicación a la lógica de las modalidades de procedimientos semánticos de análisis bien conocidos en la lógica de predicados de primer orden. El fundamento de la semántica propuesta para la lógica modal es el concepto de **conjunto modelo** (conjunto Hintikka), que suple con ventajas al de mundo posible por diversas razones de tipo teórico y técnico. Un conjunto modelo (λ, μ, ν,...) se define como un conjunto no vacío de fórmulas sin variables libres (sentencias) que satisface las siguientes condiciones (resumidamente):

(C.$\perp$): Para todo $\mu\varepsilon\Omega$, $\perp$ no pertenece a μ;

(C.$\neg$): Si $\neg\alpha\varepsilon\mu$ entonces α no pertenece a μ;

(C.∞): Si $(\alpha\infty\beta)\varepsilon\mu$ entonces $\alpha\varepsilon\mu$ y $\beta\varepsilon\mu$;

(C.$\exists$): Si $\exists x\alpha(x)\varepsilon\mu$ entonces $\alpha(b)\varepsilon\mu$ y $[\,]\exists x(x=b)\varepsilon\mu$ para al menos una constante individual $b\varepsilon\mathcal{D}(\mu)$;

(C.<>): Si $<>\alpha\varepsilon\mu\varepsilon\Omega$ entonces hay al menos un $\lambda\varepsilon\Omega$ tal que $\mu\mathcal{R}\lambda$ y $\alpha\varepsilon\lambda$.

En la formulación de las condiciones anteriores, <> y [] son operadores modales interdefinibles mediante la negación, mientras que λ y μ son dos conjuntos modelos cualesquiera.

A partir de la definición de conjunto modelo, se ofrece un álgebra para lógica modal de predicados fácilmente aplicable a cualquier lógica modal, con especial énfasis en los denominados *sistemas normales* de lógica modal. Se define de este modo un **Sistema Modelo** como una quíntupla ordenada $<\Omega, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \vdash, f>$, en la que Ω es un conjunto de conjuntos modelos, $\boldsymbol{R}$ es una relación definida sobre Ω tal que $\mathcal{R}\subseteq\Omega^2$, $\boldsymbol{D}$ es una función definida en Ω tal que, para cada conjunto modelo $\mu\varepsilon\Omega$, $\mathcal{D}(\mu)$ es el conjunto de las constantes individuales que aparecen en las fórmulas de

μ, $\mid-$ es una relación que se establece entre los elementos de Ω y el conjunto de las fórmulas bien formadas del lenguaje de forma que (resumidamente):

$\mu \mid- \alpha$ sii $\alpha \varepsilon \mu$;

$\mu \mid- \neg\alpha$ sii no $\mu \mid- \alpha$;

$\mu \mid- \alpha \infty \beta$ sii $\mu \mid- \alpha$ y $\mu \mid- \beta$;

$\mu \mid- \exists x \alpha(x)$ sii $\mu \mid- \alpha(b)$ para algún $b \varepsilon D(\mu)$;

$\mu \mid- <>\alpha$ sii hay un $\lambda \varepsilon \Omega$ tal que $\mu R \lambda$ y $\lambda \mid- \alpha$,

y *f* es una función que a una variable x cualquiera le otorga como valor una constante individual en un dominio ***D***, de modo que para cualesquiera dos conjuntos modelos $\lambda, \mu \varepsilon \Omega$, si $\mu R \lambda$ entonces $f(x, D(\mu)) \varepsilon D(\lambda)$.

El concepto de Sistema Modelo así definido permite el tratamiento semántico de cualquier lenguaje de predicados de primer orden con modalidad, independientemente de cuál sea la interpretación que se dé a los operadores modales, incluso cuando se usan lenguajes con operadores modales mixtos e iterados (v.gr.: lenguajes con operadores aléticos y deónticos o aléticos y epistémicos, etcétera). Es útil también como marco general de interpretación para diferentes lógicas modales basadas en la lógica clásica de predicados de primer orden (en la investigación se estudian los sistemas normales K, KD, T, B, S4 y S5, entre otros), bastando leves cambios en la definición de conjunto modelo para obtener un álgebra para lógicas modales no clásicas, como por ejemplo la lógica intuicionista o la lógica de la relevancia.

A partir de la definición de conjunto modelo se puede establecer un procedimiento semántico de decisión basado en el de las tablas de Beth, usualmente llamado de árboles semánticos, bastante más simple y general que algunas adaptaciones anteriores (v.gr.: Fitting en *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*). En pocas palabras, un árbol semántico para lógica modal se define como una secuencia de secuencias de expresiones del tipo β/n, donde β es una sentencia y n es un índice numérico tal que $n>0$, de modo que dicha secuencia se constituye a partir de una primera expresión del tipo $\alpha/1$ según reglas de construcción que se establecen debidamente y que se aplican atendiendo exclusivamente a la *construcción sintáctica* de las sentencias que van apareciendo en el árbol. Las reglas de construcción del árbol semántico a partir de una expresión cualquiera se establecen a partir del análisis de la noción de conjunto modelo y se relacionan directamente con las condiciones que la definen. Se trata, por tanto, de un procedimiento mecánico de análisis que relaciona criterios sintácticos (buena formación de una fórmula, signo principal de una fórmula) y criterios semánticos (interpretación de una fórmula, modelo que satisface una fórmula, etc.).

Se puede demostrar que el procedimiento de árboles modales es un procedimiento efectivo de decisión para aquellos sistemas decidibles (en general, todos los sistemas normales de lógica modal de proposiciones), quedando como un procedimiento eficiente, aunque no efectivo, para aquellos que no lo son (esto es, todos los sistemas de lógica modal de predicados, como demostró Kripke en 1962). En el primer caso, se establecen reglas para parar los árboles que crecen infinitamente por causa de la iteración de operadores modales, fenómeno que se da en los denominados *sistemas transitivos* (S4 y S5, entre otros). En el segundo caso, se dan reglas para parar ciertos árboles infinitos por causa de la iteración de los operadores cuantificacionales y para establecer modelos a partir de árboles no cerrados, analizándose los tipos de dominios necesarios en función de las propiedades que la relación ***R*** de alternatividad posee en cada sistema.

El procedimiento de árboles semánticos aplicado a la lógica modal conserva todos los usos metateóricos para los diferentes sistemas modales que ya le diera Smullyan en *First-Order Logic* en relación con la lógica clásica. En este sentido, se ofrecen algunos resultados metateóricos basados en el concepto de conjunto modelo y en el procedimiento de árboles semánticos. Entre ellos se encuentra el denominado *teorema fundamental de los árboles semánticos*, a partir del cual se dan sendas pruebas de corrección y completitud de los sistemas normales de lógica modal mucho más económicas que las pruebas tipo Henkin. Este resultado es casi directo a partir de dicho teorema y la introducción de un cálculo que me permito calificar como *semántico*, a pesar de la aparente contradicción. El cálculo CD^* es, en realidad, una presentación peculiar de los árboles semánticos. Como tal, permite obtener resultados metateóricos similares a los que se obtenían con aquel procedimiento, con la ventaja añadida de que en efecto se trata de un cálculo lógico para las modalidades. De esta forma, CD^* es un cálculo que no precisa estrategias, puesto que el proceso para desarrollar las secuencias es mecánico, como lo es el proceso de construcción de los árboles semánticos, reduciéndose a cumplimentar la aplicación de las reglas que en cada momento revela la estructura sintáctica de los enunciados que van apareciendo en la secuencia. Además, CD^* es un cálculo que ya se encuentra de suyo en forma normal, lo que significa que por cada enunciado del lenguaje hay una única demostración, mientras que con un cálculo deductivo natural tipo Gentzen puede haber más de una.

Estas características hacen de CD^* un cálculo fácilmente implementable en lenguajes de alto nivel apropiados para la manipulación simbólica, como es el caso de LISP o PROLOG, siendo este un atractivo añadido si se tiene en cuenta que las lógicas modales están encontrando su aplicación, sobre todo, en el terreno del análisis y la computación del lenguaje natural. Es en este campo del análisis lingüístico de expresiones propias de juegos de lenguaje característicos donde la semántica y el procedimiento lógico de decisión diseñados tienen un mayor interés, pudiéndose aplicar como método de análisis del lenguaje natural en múltiples cuestiones relacionadas con la intensionalidad (por ejemplo, el estudio del aspecto y el tiempo verbales), así como en el ámbito de la relación entre lenguaje y conocimiento (el estudio de la lógica epistémica y de bases de datos, por ejemplo) o entre lenguaje y acción (desarrollando áreas como la de la teoría general de la acción y las normas).

Referencias

BENTHEM, J. van (1985):
Modal logic and clasical logic. Bibliopolis, Nápoles.

BURRIEZA, A. & LE"N, J.C. (1987):
"Modal trees: correction to a decision procedure for S5 (and T)". Notre Dame Journal of Formal Logic, 28, pp.: 385-391.

CHELLAS, B.F. (1988):
Modal logic. An introduction. Cambridge U.P., Cambridge.

FITTING, M. (1983):
Proof methods for modal and intuitionistic logics. Reidel, Dordrecht.

HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J. (1984):
A companion to modal logic. Methuen and Co., Londres.