

Proyecto Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Cálculo de Capas Límites en Régimen Hipersónico

Autor: Ángel Ruy-Díaz Rojas

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez Pastor

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de
Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2017



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Estudio de la Capas Límite en Régimen Hipersónico

Autor:

Ángel Ruy-Díaz Rojas

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor titular

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Trabajo Fin de Grado: Estudio de la Capas Límite en Régimen Hipersónico

Autor: Angel Ruy-Díaz Rojas

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mi tutor

A Cristina

Agradecimientos

Este trabajo ha supuesto un gran esfuerzo, no solo para mí, sino para todos los que han estado a mí alrededor en estos meses que he dedicado. En primer lugar, me gustaría agradecer a mi familia el apoyo moral que se me ha dado, algo clave en los momentos más difíciles, y que ha permitido que pudiese seguir adelante. Por otra parte, alguien fundamental en el desarrollo del trabajo ha sido Miguel Pérez-Saborid, tutor de este trabajo. Sin su ayuda y las horas dedicadas por su parte no hubiera sido posible la realización y finalización de este trabajo. Además, me gustaría agradecer a mis compañeros no solo el apoyo moral sino el logístico, siendo generosos en ayudarme a ahorrar tiempo haciendo funcionar los programas de MATLAB en sus ordenadores pudiendo así ahorrar muchas horas de cálculo. Por último, pero no menos importante quería agradecer a Cristina todo el apoyo que me ha ofrecido ya que ha estado donde debía estar y cuando debía para que no bajara los brazos y me rindiera. De corazón, muchas gracias a todos los mencionados y a los que habré olvidado mencionar porque sin el apoyo y la ayuda de todos y cada uno de vosotros, este trabajo no hubiera sido posible.

Angel Ruy-Díaz Rojas

Sevilla, 2017

Resumen

En el Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos se han hecho multitud de trabajos sobre régimen subsónico y supersónico. Sin embargo, nunca se había tratado con el régimen hipersónico. Este trabajo tiene como objetivo hacer una introducción al régimen presentando la física que lo rodea y resolviendo el problema de la corriente exterior, así como de la capa límite de forma simplificada. Para ello se harán diversas simplificaciones, dando lugar a unos resultados con valor cualitativo de resistencia y transferencia de calor.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Índice	xiii
Índice de Figuras	xv
1 Introducción	1
1.1. <i>Régimen hipersónico</i>	1
1.2. <i>Relevancia</i>	5
1.3. <i>Física del problema</i>	8
1.3.1 Onda de choque	9
1.3.2 Corriente exterior	10
1.3.3 Capa límite	11
1.4. <i>Estructura del trabajo</i>	15
2 Corriente exterior	17
2.1. <i>Ondas de choque</i>	17
2.2. <i>Métodos aproximados</i>	21
2.2.1 Método de Newton	22
2.2.2 Ley de Newton modificada.	23
2.2.3 Correcciones de fuerzas centrífugas a la teoría de Newton o teoría de Newton-Buseman	25
2.2.4 Método de las ondas de expansión	28
2.2.5 Método híbrido	30
2.3. <i>Cálculo del resto de variables termodinámicas, velocidad y resistencia a partir del campo de presiones</i>	32
2.4. <i>Distribución de presiones y resistencia de presión en distintos cuerpos bidimensionales.</i>	34
2.4.1 Perfil elíptico	34
2.4.2 Perfil parabólico	38
2.4.3 Cilindro	42
2.4.4 Placa plana con borde de ataque semicircular	43
2.5. <i>Resistencia de presión sobre cuerpos axilsimétricos: esfera y cono.</i>	45
3 Capa Límite	49
3.1. <i>Capa límite laminar</i>	50
3.2. <i>Resolución numérica de las ecuaciones: método de las diferencias finitas</i>	54
3.1.1 Mallado del plano	54
3.1.2 Discretización de las derivadas	56
3.1.3 Resolución del sistema	56
3.3. <i>Placa plana</i>	59
3.4. <i>Resistencia de fricción</i>	62
3.5. <i>Transferencia de calor</i>	70
4 Conclusiones	83
Anexos	85
<i>A Códigos de Matlab</i>	85

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 Ley de Shuterland.	3
Figura 1-2 Comparación de temperatura tras onda normal de choque según velocidad de vuelo y modelo de gas.	4
Figura 1-3 Efectos característicos del régimen hipersónico.	5
Figura 1-4 A la izquierda, fotografía del Concorde por Adrian Pingstone. A la derecha Eurofighter Typhoon. Copyright Jeffrey Lee.	6
Figura 1-5 A la izquierda imagen conceptual del X-20 en los años 60 y a la derecha X43A en vuelo a principios de los 2000.	6
Figura 1-6 Challenger despegando. Fotografía de la NASA.	7
Figura 1-7 Distribución de presiones y de esfuerzos de fricción sobre un perfil aerodinámico de [2].	11
Figura 1-8 Evolución del punto de desprendimiento de una capa límite.	14
Figura 1-9 Distribución de presiones en cilindro circular para distintas corrientes.	14
Figura 1-10 Reacciones en el aire a 1 atmósfera.	16
Figura 2-1 Esquema general de cuerpo en régimen hipersónico.	17
Figura 2-2 Esquema general de onda de choque oblicua	18
Figura 2-3 Diagrama $\theta - \beta - M$ de [1].	20
Figura 2-4 Bala y esfera en régimen hipersónico de [4].	21
Figura 2-5 Esquema teoría de impacto de Newton.	22
Figura 2-6 Esquema general situación onda-cuerpo.	23
Figura 2-7 Coeficiente de presiones en el punto de remanso frente al Mach de vuelo	24
Figura 2-8 Esquema de geometría.	25
Figura 2-9 Distribución de la presión sobre la superficie de un cilindro circular.	26
Figura 2-10 Coeficiente de presiones sobre un perfil de [7] y sobre un paraboloide	27
Figura 2-11 Esquema de onda de expansión sobre cuerpo.	28
Figura 2-12 Coeficiente de presiones sobre perfil parabólico.	29
Figura 2-13 Comparación de geometría de ondas en régimen supersónico e hipersónico.	30
Figura 2-14 Dependencia del punto de cambio de régimen con los diferentes parámetros con $\sigma=0.2$ a la izquierda y $M_\infty=15$ a la derecha.	31
Figura 2-15 Comparación de coeficientes de presiones para el método de Newton y el método híbrido.	32
Figura 2-16 Esquema de cuerpo para cálculo de resistencia de presión.	33
Figura 2-17 Esquema de perfil elíptico.	34
Figura 2-18 Coeficiente de presiones sobre elipse para distintos números de Mach con $\sigma = 0.2$.	35
Figura 2-19 Coeficiente de presiones sobre elipse a Mach 20 y diferentes relaciones de aspecto.	36
Figura 2-20 Coeficiente de resistencia de presión frente al número de Mach para diferentes σ .	37

Figura 2-21 Esquema de perfil parabólico.	38
Figura 2-22 Coeficiente de presiones para perfil parabólico con $\sigma=0.2$.	39
Figura 2-23 Coeficiente de presiones para perfil parabólico con $\sigma=0.7$	40
Figura 2-24 Coeficiente de presiones sobre distintos perfiles parabólicos a Mach 20	40
Figura 2-25 Coeficiente de resistencia de presión frente al número de Mach para distintos valores de σ	41
Figura 2-26 Coeficiente de presiones sobre cilindro ($M=20$).	42
Figura 2-27 Coeficiente de resistencia en cilindro frente a Mach.	43
Figura 2-28 Placa plana con borde redondeado.	43
Figura 2-29 Coeficiente de presiones sobre placa plana con borde redondeado.	44
Figura 2-30 Coeficiente de resistencia de presión sobre placa plana con borde redondeado	44
Figura 2-31 Esquema de esfera.	45
Figura 2-32 Coeficiente de resistencia experimental de un cono y una esfera de [8].	46
Figura 2-33 Coeficiente de resistencia aproximado para esfera y cono	47
Figura 3-1 Perfil de velocidad en capa límite.	50
Figura 3-2 Mallado uniforme con L puntos en el eje x y M puntos en la dirección y.	55
Figura 3-3 Mallado variable en x.	55
Figura 3-4 Perfil de velocidades en placa plana fría.	59
Figura 3-5 Perfiles de temperatura para placa plana con temperatura impuesta.	60
Figura 3-6 Perfil de velocidades en placa plana adiabática.	61
Figura 3-7 Perfil de temperaturas en placa plana adiabática.	62
Figura 3-8 Coeficiente de resistencia de fricción sobre placa plana laminar de [9]	63
Figura 3-9 Coeficiente de resistencia de fricción en una placa plana para diferentes relaciones de temperaturas.	64
Figura 3-10 Coeficiente de resistencia de fricción en perfiles elípticos	65
Figura 3-11 Evolución de perfil de velocidades a Mach 5 (izqda) y 25 (drcha).	65
Figura 3-12 Evolución de perfil de temperaturas a Mach 5 (izqda) y 25 (drcha).	66
Figura 3-13 Coeficiente de resistencia de fricción en perfiles parabólicos.	67
Figura 3-14 Evolución de perfil de velocidades a Mach 5 (izqda) y 25 (drcha)	67
Figura 3-15 Evolución de perfil de temperaturas a Mach 5 (izqda) y 25 (drcha).	68
Figura 3-16 Coeficiente de resistencia de fricción en perfiles elípticos de pared adiabática.	68
Figura 3-17 Coeficiente de resistencia de fricción para perfiles parabólicos de pared adiabática.	69
Figura 3-18 Distribución de transferencia de calor en cilindro (a la izquierda resultados numéricos, a la derecha resultados de la literatura).	71
Figura 3-19 Distribución de transferencia de calor en una placa plana con borde redondeado (a la izqda. resultados numéricos, a la drcha. resultados de la literatura).	72
Figura 3-20 Distribución de transferencia de calor para varios números de Mach a lo largo de un perfil elíptico con $\sigma=0.2$	73
Figura 3-21 Distribución de transferencia de calor para diferentes perfiles elípticos a Mach 20.	74
Figura 3-22 Transferencia de calor en el punto de remanso.	74
Figura 3-23 Transferencia de calor total para perfiles elípticos a diferentes números de Mach y relaciones de aspecto.	75

Figura 3-24 Variación del número de Nusselt en perfiles elípticos con σ y Mach.	76
Figura 3-25 Distribución de calor en la superficie para varios números de Mach.	76
Figura 3-26 Distribución de transferencia de calor para varias relaciones de aspecto.	77
Figura 3-27 Transferencia de calor en las inmediaciones del punto de remanso para perfiles elípticos	77
Figura 3-28 Transferencia total de calor en perfiles parabólicos	78
Figura 3-29 Dependencia del número de Nusselt con los diferentes parámetros.	79
Figura 3-30 Temperatura en perfil elíptico ($\sigma=0.6$) adiabático.	80
Figura 3-31 Temperatura en perfiles elípticos ($M=21$) adiabático.	80
Figura 3-32 Temperatura en la pared en perfil parabólico ($\sigma=0.6$) para diferentes números de Mach	81
Figura 3-33 Temperatura en la pared de diferentes perfiles parabólicos ($M^\infty=21$).	81

1 INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se va a hacer un estudio preliminar de la capa límite en régimen hipersónico. Sin embargo, para llegar hasta este punto es necesario responder antes a ciertas cuestiones: ¿Qué es el régimen hipersónico? ¿Es realmente relevante su estudio como para separarlo del régimen supersónico?

1.1. Régimen hipersónico

De forma general, cuando se habla del régimen hipersónico, suele describirse como el régimen que se alcanza cuando el número de Mach es mayor que 5. También suelen mencionarse efectos de alta temperatura, reacciones químicas en el aire, etc. Por el contrario, no existe un salto cualitativo con el régimen supersónico como si ocurre cuando el número de Mach supera el valor unidad

Sin embargo, una mejor definición de este régimen puede encontrarse en [1]. De aquí es de donde se obtiene la definición de régimen hipersónico que se seguirá en el presente trabajo. En él, se define como un régimen dentro del supersónico donde, al aumentar el número de Mach, se tornan relevantes varios de los siguientes efectos físicos: fina capa de aire tras la onda de choque, capa entrópica, interacción viscosa, flujo a alta temperatura y flujo de baja densidad. A continuación, se desarrollarán brevemente los distintos efectos.

Volviendo a la cuestión del número de Mach al que el flujo puede considerarse hipersónico, en realidad no existe un número exacto. Se toma Mach igual a 5 como número intermedio de referencia porque es necesario hacer una distinción ya que los métodos para resolver las ecuaciones no son los mismos. Varios de los efectos son importantes a Mach menores que 5 y otros a velocidades mayores, por tanto, como primera aproximación, Mach 5 es un buen número, aunque 4 o 6 hubieran sido igualmente válidos.

Los diferentes efectos que suelen darse en el régimen hipersónico son los siguientes:

-Fina capa de aire tras la onda de choque:

Con el aumento del Mach de vuelo, la densidad tras las ondas de choque aumenta, por tanto, debido a la conservación de masa, la onda se mantiene muy cerca del cuerpo. Esto puede llegar a ser un problema a bajos números de Reynolds donde la capa viscosa puede aumentar mucho su grosor. Por el contrario, es de gran ayuda a valores altos de este número, donde al ser la capa prácticamente no viscosa permite usar la aproximación llamada *thin shock layer theory* [1]. Esta teoría, si se lleva al extremo, permite aproximar el comportamiento del aire al modelo fluidodinámico de Newton, usado con frecuencia para cálculos aproximados.

-Capa entrópica

Cuando se trata de cuerpos con nariz redondeada, además del efecto anterior, se da el de la existencia de una capa pegada al cuerpo de gran entropía. Esto se debe a la mezcla de dos cosas. Por una parte, el crecimiento de la entropía a través de la onda de choque, el cual es aún mayor cuanto más fuerte es la onda. Por otra parte, está el hecho de que cerca de la nariz, la onda de choque es prácticamente normal a la dirección de la corriente. Esto crea que un cierto número de líneas fluidas experimenten un gran crecimiento de la entropía mientras que otras no lo hacen, creando así una capa. Adicionalmente, esta gran entropía viene de la mano de una gran vorticidad según el teorema de Crocco. Esto supone una dificultad a la hora de definir las condiciones de contorno para el cálculo la capa límite.

-Interacción viscosa

Esto hace referencia a la interacción que existe entre el flujo no viscoso o ideal y el viscoso. El origen de esta interacción está en la energía cinética que posee el fluido a velocidades hipersónicas. Esta energía se transforma en energía interna al frenarse

el fluido en la capa límite, lo que se traduce en un aumento de la temperatura que, a través de la ley de Shuterland, se convierte en un aumento de la viscosidad del fluido como se puede ver en la Figura 1-1. Por último, este aumento en la viscosidad supone un aumento del grosor de la capa límite, es decir, de la zona viscosa. Cuanto más alto sea M_∞ , mayor será el grosor de la capa límite. Esto provoca que la forma del sólido virtualmente cambie provocando un cambio en la corriente no viscosa que a su vez cambia la capa límite, que a su vez, etc. Esta continua realimentación es lo que se conoce como la interacción viscosa.

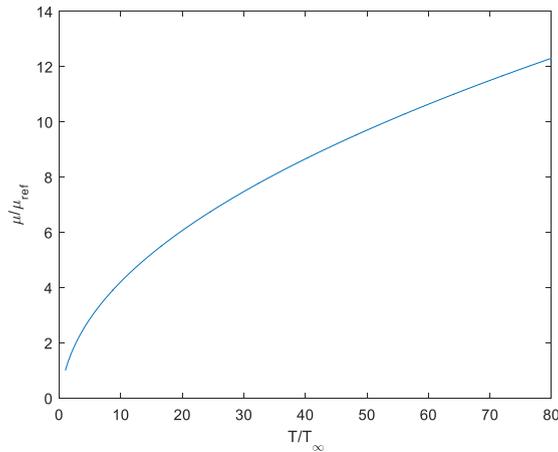


Figura 1-1 Ley de Shuterland.

-Flujos de alta temperatura

En relación con el apartado anterior, la extrema disipación de energía supone como ya se ha comentado un gran aumento de la temperatura cerca de la pared y esto puede desencadenar la disociación del aire o incluso su ionización. Además, dependiendo del material con el que esté fabricada la pared, esta también puede reaccionar. En resumen, se tiene una capa límite reaccionando químicamente.

Esto afectará a la resistencia y la sustentación además de a las comunicaciones por radiación debido a que los electrones sueltos absorben la radiación de las ondas de radio. Además, para poder tener en cuenta estos efectos con precisión será necesario dejar a un lado la hipótesis de gas ideal. Como se ve en la Figura 1-2, a mayor temperatura, la diferencia entre ambos modelos se hace más acusada. Un cálculo preciso de la temperatura es en realidad crucial para asegurar el buen funcionamiento de todos los sistemas además de la supervivencia de las personas

que haya dentro del vehículo, si las hubiese.

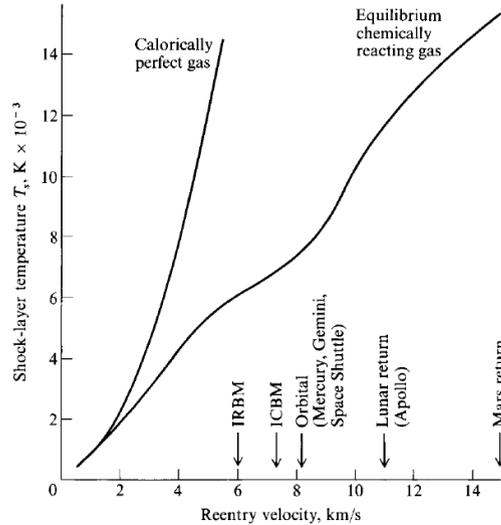


Figura 1-2 Comparación de temperatura tras onda normal de choque según velocidad de vuelo y modelo de gas.

Por último, las altas temperaturas provocan que, además de por convección, se transmita calor por radiación. Para que se tenga una referencia de la importancia que puede llegar a tener, en la reentrada de la misión Apollo supuso un 30% del calor total transferido.

-Flujo de baja densidad

La mayoría de los vuelos supersónicos se producen a muy grandes alturas, donde la atmósfera se torna muy débil. Este hecho provoca que la suposición del aire como un medio continuo deje de ser válida pudiendo provocar desde que tengan que ser revisadas las condiciones de contorno en la pared a la hora de calcular la capa límite hasta que las ecuaciones dejen de ser válidas por completo y sea necesario utilizar la teoría cinética para poder resolver el problema.

Si bien este efecto es totalmente independiente del número de Mach, se ha creído interesante incluirlo en esta lista puesto que cualquier vehículo espacial en su

reentrada va a experimentarlo.

Todos estos efectos pueden verse recopilados en la Figura 1-3 proporcionada por [1]. De todos estos efectos, dado que este es el primer trabajo realizado en esta Escuela sobre este tema, solo algunos se van a considerar. Esencialmente va a realizarse un estudio de los efectos de compresibilidad en la capa límite, dejando para estudios posteriores los efectos de disociación, reacciones químicas y radiación.

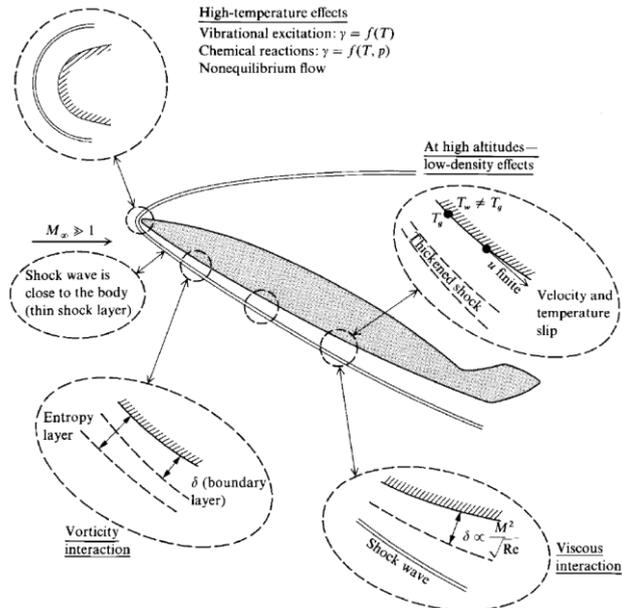


Figura 1-3 Efectos característicos del régimen hipersónico.

1.2. Relevancia

Como se ha dicho en el apartado anterior, en el caso del régimen hipersónico, no existe una transición marcada como en paso de subsónico a supersónico sino que paulatinamente van apareciendo ciertos fenómenos físicos. Por tanto, cabe preguntarse si realmente es necesario tratar el régimen hipersónico como algo totalmente diferente.

Para responder de forma rápida a esto pueden compararse los resultados obtenidos para un mismo estudio en régimen hipersónico y en supersónico. Lo más fácil es

mirar la geometría de aviones (al final un avión es un objeto diseñado para sustentar) diseñados para volar en cada uno de estos regímenes y ver si existen diferencias sustanciales como existen en el caso de aviones subsónicos y supersónicos.

Si observamos un avión supersónico cualquiera, sea militar como el Eurofighter Typhoon o el Lockheed Martin F-35 Lightning II o civil como el Aérospatiale-BAC Concorde, claramente se sigue una estructura básica: un fuselaje aproximadamente cilíndrico de sección circular con morro puntiagudo y alas en forma de ala delta de pequeño alargamiento.



Figura 1-4 A la izquierda, fotografía del Concorde por Adrian Pingstone. A la derecha Eurofighter Typhoon. Copyright Jeffrey Lee.

En cambio, para observar aviones hipersónicos hay que conformarse con proyectos aun experimentales como el X43A de la NASA o diseños que se quedaron en el túnel de viento como el Boeing X20-Dynasoar, también de la NASA.



Figura 1-5 A la izquierda imagen conceptual del X-20 en los años 60 y a la derecha X43A en vuelo a principios de los 2000.

A pesar de haber más de 40 años entre ambos diseños donde se hicieron grandes avances en el campo del régimen hipersónico, hay detalles que siguen viéndose en ambos. El morro, al contrario que antes, ya no es puntiagudo sino redondeado llegando a poderse considerar romo. Además, todas las partes del avión (alas, fuselaje y motor) se integran en uno, manteniendo una superficie totalmente plana (la inferior en el X20 y la superior en el X43A). Esto último se observa mucho mejor en el segundo caso donde la aeronave es un cuerpo con dos dispositivos estabilizadores.

Además de estos, otros muchos vehículos han sido diseñados para llegar y soportar al régimen hipersónico con el objetivo de ir más allá de la atmósfera y llegar al espacio. En esta tesitura, se pueden destacar dos tipos fácilmente reconocibles: el space shuttle y las cápsulas Apollo.



Figura 1-6 Challenger despegando. Fotografía de la NASA.

En el Challenger, que puede recordar al Dyna-Soar, pueden de nuevo verse las características destacadas antes: morro romo y panza totalmente lisa (una vez guarda el tren de aterrizaje). Por tanto, se hace patente la gran diferencia que existe entre en los dos regímenes puesto que, si no hubiese apenas cambios, los diseños tampoco serían tan diferentes. Es por ello que el régimen hipersónico debe considerarse y estudiarse como algo aparte del régimen supersónico.

Pero esto no queda aquí. Todavía hay más razones que hacen necesario el estudio. La primera de ellas y en mi opinión la más importante actualmente es la reentrada en objetos desde el espacio a la Tierra ya sea con personas o no en su interior.

En el primer caso no hace falta siquiera remarcar la importancia de que la tripulación llegue en las mejores condiciones. Es por ello que se hace especialmente importante estudiar todos los efectos de la temperatura para asegurar que el interior sea habitable, aunque solo sea para unos segundos.

En el caso de la basura espacial, la situación es la contraria. Su diseño debe permitir que sobrevivan a altas temperaturas cuando están expuestos a la radiación solar, pero no a una reentrada en la atmósfera y así poder evitar posibles accidentes.

Por último, el régimen hipersónico sigue en estudio. Aunque se han hecho grandes avances en los últimos años, aún queda mucho camino por recorrer, como un sistema de propulsión que permita mantener vuelos atmosféricos a velocidades hipersónicas más allá de lo conseguido por el X43A (10 segundos duró su motor scramjet en funcionamiento). Además, existe mucho potencial porque, si se consiguió volar a Mach 2 con un Concorde, no debería haber razones para negar que en unos años se pueda volar a Mach 5 o Mach 7.

1.3. Física del problema

El problema del estudio de capa límite no es algo que se pueda resolver por sí solo. Necesita alimentarse de los resultados de otros problemas que ocurren a su alrededor y que influyen en los resultados que se pueden obtener de la capa límite como el flujo de calor existente entre el sólido y el aire o la resistencia de fricción. El movimiento de cualquier fluido puede describirse mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, que recogen las ecuaciones escalares de conservación de la masa y energía, así como la ecuación vectorial de cantidad de movimiento (que puede transformarse a escalar tan solo con proyectarla a los ejes coordenados). Dichas ecuaciones son la de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1-1)$$

cantidad de movimiento (descomponiendo $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + (F_x)_{viscosa} , \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + (F_y)_{viscosa} , \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + (F_z)_{viscosa}, \quad (1-4)$$

y energía

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla e \right) = -p \nabla \cdot \vec{V} + \nabla \cdot (K \nabla T) + \phi_v. \quad (1-5)$$

En términos generales, el problema tiene 3 partes que interactúan entre ellas: onda de choque, corriente exterior no viscosa y capa límite.

En todas aquellas que se utilicen estas ecuaciones, sufrirán simplificaciones. Algunas comunes a todas como suponer que el movimiento es estacionario e isentrópico y otras específicas de cada una de las secciones.

Por otra parte, excepto cuando se tengan en cuenta los efectos de alta temperatura, se usará el modelo de gas ideal,

$$\frac{p}{\rho} = R_g T. \quad (1-6)$$

Esto implica que se tomará como válida la ecuación de los gases ideales (1-6) siendo $R_g=287$ y $\gamma=1.4$. En general, esto no se será así si se introducen los efectos mencionados.

1.3.1 Onda de choque

Una onda de choque es una fina región del espacio donde se producen cambios bruscos en las propiedades del aire: temperatura, presión y densidad además de frenar al fluido.

Estas ondas son características de los regímenes supersónico e hipersónico, donde la velocidad de vuelo es mayor que la velocidad del sonido. La causa de su existencia es que cuando el aire llega a un obstáculo (cuerpo) no está preparado para ello formándose una onda de choque para adaptar la corriente en un espacio casi nulo al obstáculo para cumplir condiciones del problema como la de impenetrabilidad en la pared.

Sin embargo, no todas las magnitudes sufren cambios a través de ellas. La entalpía de remanso, por ejemplo, se conserva. Esta está compuesta por la entalpía, íntimamente relacionada con la energía interna de las partículas y por energía cinética. Por tanto, en cierta manera se puede afirmar que la energía de las

partículas se conserva a través de las ondas. Además, se conserva la masa y la entalpía de remanso. Estas tres condiciones, en el caso de una onda de choque normal corresponden con las llamadas relaciones de Rankine-Hugoniot:

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} , \quad (1-7)$$

$$p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2 , \quad (1-8)$$

$$V_{t1} = V_{t2} , \quad (1-9)$$

$$h_1 + \frac{V_{n1}^2}{2} = h_2 + \frac{V_{n2}^2}{2} , \quad (1-10)$$

donde el subíndice 1 denota las condiciones antes de la onda y el 2 las existentes después de la onda. Asimismo v_n y v_t denotan las componentes normal y tangencial a la onda de la velocidad respectivamente.

En la sección 2.1 se desarrollará con más detalle las ondas de choque antes de un cuerpo.

1.3.2 Corriente exterior

Se entiende como corriente exterior a la región del espacio (o el plano en el caso 2D) que se encuentra entre la onda de choque y la capa límite, que se encuentra pegada al cuerpo.

En esta zona, la viscosidad no cumple un papel importante debido a su pequeño valor, del orden de 10^{-5} . En estas condiciones, el aire puede considerarse como un fluido ideal, es decir, se supone que la viscosidad es nula.

Esto conduce a las ecuaciones de Euler,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 , \quad (1-11)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} , \quad (1-12)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} , \quad (1-13)$$

$$u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = 0 , \quad (1-14)$$

que describirán el movimiento del fluido ideal. Sin embargo, como ya se verá en el capítulo 2, su resolución no será necesaria. En su lugar se usarán métodos que aproximan el comportamiento de la corriente con cierta precisión y que permitirán simplificar de forma significativa esta parte del problema.

En todas se han suprimido los términos que hacían referencia al tiempo puesto que, como ya se ha dicho, se considera movimiento estacionario y los que hacían referencia a fuerzas ejercidas por parte del cuerpo al fluido.

La ecuación de la energía expresa que el movimiento es isentrópico en cada línea fluida, siendo s la entropía por unidad de masa.

Como ya se verá, el grosor de la capa límite es muy pequeño en comparación con el cuerpo y, por tanto, en primera aproximación, se puede considerar que la corriente exterior llega hasta la pared del cuerpo.

El interés de estudiar la corriente exterior a la capa límite reside en que los valores de las magnitudes pegadas al cuerpo constituyen unas de las condiciones de contorno del problema objeto de este trabajo. La otra, como ya se verá, son las que se tienen en el límite con la pared.

1.3.3 Capa límite

En las ecuaciones (1-1 a 1-4) se puede observar que sobre el fluido afectan dos tipos de esfuerzos: los causados por la presión de forma perpendicular a la superficie del sólido y los causados por la fricción.

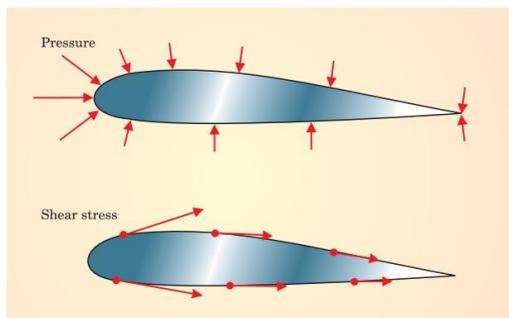


Figura 1-7 Distribución de presiones y de esfuerzos de fricción sobre un perfil aerodinámico de [2].

El cálculo del campo de presiones no suponía un problema en la época que se formularon las ecuaciones, el siglo XIX, ya que podía ser calculada de manera

aproximada suponiendo que el aire era un fluido ideal, es decir, despreciando la viscosidad. En cambio, los esfuerzos de fricción necesitaban la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, en las que se incluyen los términos viscosos causantes de dichos esfuerzos, que en esa época era algo imposible de conseguir por la tecnología de la que disponían.

En el caso del aire, al igual que con otros muchos fluidos, los términos viscosos podían ser despreciados por estar varios órdenes de magnitud por debajo que los demás términos. Si eliminamos estos términos viscosos ($\nu \approx 10^{-5}$), la resolución de las ecuaciones es asequible, pero se llega al resultado que nada tiene que ver con la realidad: la sustentación no es nula mientras que la resistencia generada es 0. Este resultado es la llamada paradoja de D'Alembert.

Esta consiste en que a pesar de que los resultados obtenidos para la sustentación concuerdan muy bien con la experimentación, la teoría predice que la resistencia aerodinámica es 0 cuando al experimentar se ve claramente que no lo es.

Es en este momento donde aparece el concepto de capa límite, objeto de estudio de este trabajo. Ludwig Prandtl fue el primero en describirlo en 1904. Según teorizó, los efectos de fricción causan que el fluido inmediatamente adyacente a la superficie del sólido quede adherido a este, o lo que es lo mismo, aplicó la condición de no deslizamiento a la superficie del sólido. Además, pensaba que estos esfuerzos de fricción sólo eran importantes, aun siendo la viscosidad muy pequeña, dentro de una capa límite: una fina región que se encuentra alrededor de la superficie de cualquier sólido inmerso en un fluido. Fuera de esta capa límite el fluido puede seguir considerándose ideal sin incurrir en mucho error.

Con la hipótesis de que sea una capa fina, puede verse que el fluido, con velocidad relativa al sólido 0 en la zona adherida a él por la condición de no deslizamiento, tiene que volver a la velocidad que tiene lejos de la pared en una distancia muy pequeña. Esto ocasiona que existan enormes gradientes de velocidad dentro de la capa.

Según la ley de esfuerzos de Newton, estos son proporcionales al gradiente de velocidades. Debido a que estos gradientes en el eje vertical tienen lugar en una zona muy estrecha, resultan ser enormes. Como resultado, los esfuerzos de fricción han de ser tenidos en cuenta dentro de la capa límite para el cálculo de la resistencia por muy pequeña que sea la viscosidad del fluido. La expresión del tensor de esfuerzos es

$$f_{\mu_i}(\vec{n}) = \sum_{j=1}^3 \tau'_{ij} \cdot \vec{n}_j, \quad (1-15)$$

donde el tensor de esfuerzos viene dado por $\tau'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$.

Al poder tener en cuenta los efectos viscosos sólo dentro de la fina capa límite, la corriente puede dividirse en dos zonas: una primera, muy cerca de la superficie del sólido, en la que han de tenerse en cuenta los efectos de la fricción y otra segunda, suficientemente lejos de la superficie, en la que el fluido puede considerarse ideal. Esta división de la corriente tiene importantes implicaciones en su cálculo, ya que permite eliminar la viscosidad en la mayor parte del espacio y donde es necesario tenerla en cuenta las ecuaciones permiten ciertas simplificaciones por la estrechez de la capa.

La razón por la que es importante el estudio de la capa límite son la transferencia de calor y la resistencia. Sin embargo, en régimen hipersónico la capa límite no es ideal. En ella se dan reacciones químicas y existe una interacción con la corriente exterior. En este trabajo se presentará un método sencillo con el que poder estimar los efectos térmicos.

Sin entrar en detalles de estos efectos, se ha realizado un programa básico que permite estimar el campo de velocidades y de temperaturas así como sus efectos de forma cualitativa en la capa límite sobre la superficie. Este puede servir como base y extenderse complementándolo con las ecuaciones necesarias para incluir dichos efectos en trabajos futuros.

Separación de la capa límite

Otro importante fenómeno estudiado por Prandtl fue el de la separación de la capa límite. El punto de separación o desprendimiento de la corriente se define como el punto donde la velocidad del fluido con respecto a la pared es 0 cerca de la misma. A partir de este punto la capa límite se separa porque el fluido no tiene suficiente cantidad de movimiento para seguir adherido a la pared. Esto causa, como se observa en la Figura 1-8, la aparición de vorticidad, la homogeneización de las presiones y el aumento de la resistencia que sufre el sólido debida a la acción de la presión.

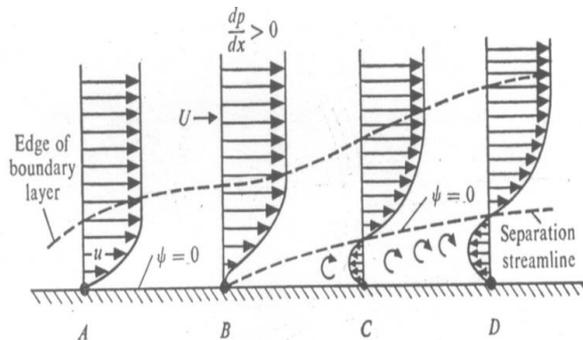


Figura 1-8 Evolución del punto de desprendimiento de una capa límite.

La separación de la corriente depende fundamentalmente de las condiciones exteriores siendo promovida por corrientes en los que existen gradientes adversos de presiones.

La corriente tras el desprendimiento, sin apenas energía cinética, causa un gran cambio en el campo de presiones alrededor del sólido. Esto genera una resistencia conocida como resistencia de presión o de forma (debido a que el campo de presiones está íntimamente relacionado con la geometría del cuerpo). Esta resistencia es tanto mayor cuanto mayor sea la superficie donde la corriente está desprendida llegando al punto de que si la superficie es lo suficientemente grande, puede llegar a ser varios órdenes de magnitud mayor que la causada por la fricción.

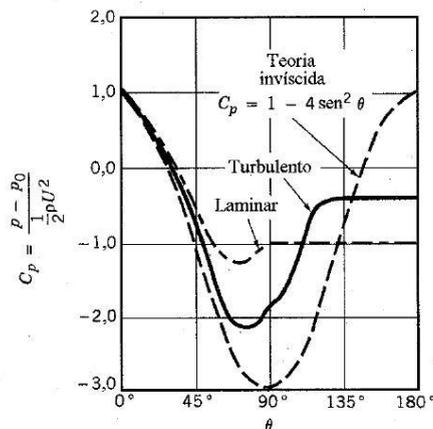


Figura 1-9 Distribución de presiones en cilindro circular para distintas corrientes.

En la Figura 1-9 se hace patente la importancia y la diferencia que supone solamente en el cálculo de la presión exterior el tener en cuenta la capa límite. Por tanto, la capa límite nos lleva a una doble fuente de resistencia: la de fricción en cualquier caso y el aumento de la de forma en el caso de que la corriente se vea desprendida.

El desprendimiento por tanto es un efecto nada deseable y que en la aeronáutica intenta retrasarse lo más posible o que ni si quiera aparezca en ninguno de los componentes de una aeronave. Este punto de desprendimiento, como se verá más tarde, se adelanta cuanto más romo sea un cuerpo.

Por otra parte, se dice que un cuerpo es romo cuando su longitud característica transversal a la corriente incidente es del mismo orden que la longitud paralela a la corriente. Por el contrario, se dice que un cuerpo es fuselado cuando la longitud transversal es mucho menor.

Es por esto por lo que los perfiles aerodinámicos son tan esbeltos, aunque, como se ve en la imagen, a grandes ángulos de ataque, se comporta como un cuerpo romo.

1.4. Estructura del trabajo

En el trabajo, antes de estudiar la capa límite, se estudiará la corriente exterior, necesaria para conocer las condiciones de contorno del tema central del trabajo.

El cálculo de la corriente exterior de forma exacta es muy complicado. Gran parte de su complicación reside en el cambio de régimen que puede producirse tras la onda de choque, de subsónico a supersónico. Este cambio lleva consigo una alteración de las ecuaciones que gobiernan las ecuaciones, pasando de ser elípticas a ser hiperbólicas.

Uno de los métodos que puede usarse es el método de las características, que lleva consigo el inconveniente de que sólo es útil en la zona supersónica del flujo. Además, para uso se requiere conocer los datos de los primeros puntos, lo que lleva a aproximarlos. Si el cuerpo de estudio es puntiagudo, toda la región fluida tras a onda será supersónica. Sin embargo, si la nariz es redondeada, antes de la zona supersónica existirá una subsónica, la cual non puede resolverse mediante el método de las características.

Con todo esto, el método no es exacto debido a que es necesaria una resolución numérica que conlleva unos errores intrínsecos. Por estas razones, en el presente trabajo se hará un cálculo simplificado de la corriente exterior. Se usarán métodos basados en la geometría del cuerpo a estudiar. Además, se presentará una modificación de los métodos presentes en la literatura basado en estos. Con esta modificación se pretende obtener mejores resultados sin que la complejidad aumente.

El estudio de la capa límite también se hará de forma simplificada mediante suposiciones como que es muy fina y que no existe un gradiente de presiones en las líneas normales a la superficie. Se propone un método sencillo basado en el método de diferencias finitas donde se tendrá en cuenta la compresibilidad del aire.

Por otra parte, no se tendrán en cuenta los efectos de disociación, reacciones químicas o radiación que pudieran ocurrir en el aire debido a las temperaturas que se alcanzan. Estos posibles efectos están recogidos en la Figura 1-10. Esto se dejará para futuros trabajos.

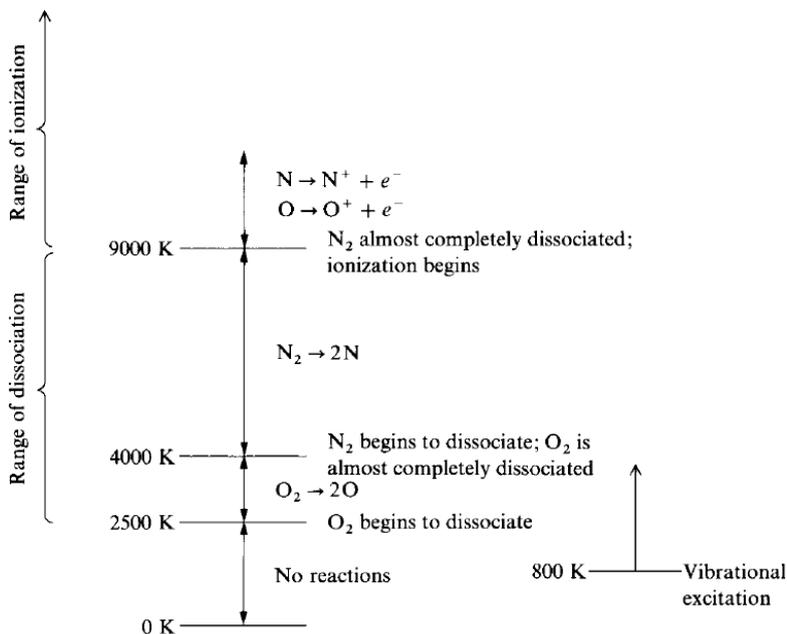


Figura 1-10 Reacciones en el aire a 1 atmósfera.

2 CORRIENTE EXTERIOR

Como ya se ha visto, la corriente exterior, a pesar de ser teóricamente más simple de estudiar debido a simplificaciones como la consideración de fluido ideal ($\mu=0$) puede llegar a ser un estudio muy tedioso. Gran parte de la dificultad reside en que tras las ondas de choque, el aire puede pasar de estar en régimen subsónico a supersónico, lo que implica que las ecuaciones pasan de ser parabólicas a hiperbólicas, introduciendo así una dificultad extra.

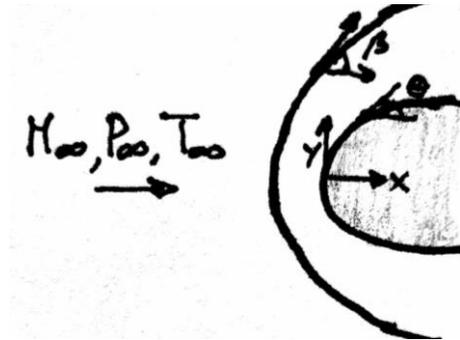


Figura 2-1 Esquema general de cuerpo en régimen hipersónico.

Para evitar esto, se ha optado por utilizar métodos aproximados en el cálculo de la misma. No obstante, en este capítulo se seguirá el orden lógico: primero se tratarán las ondas de choque que permitirá conocer las condiciones iniciales de la corriente exterior y posteriormente se comentarán los distintos métodos que pueden usarse para estimar la corriente exterior alrededor de la superficie terminando por exponer cual es el método elegido para posteriormente estudiar la capa límite.

2.1. Ondas de choque

Este apartado es quizás el más fácil de los problemas envueltos en el estudio del flujo alrededor del cuerpo. Con este estudio se pretende, a partir de las condiciones del aire en el infinito y la geometría del cuerpo objetivo de estudio obtener

relaciones que nos lleven a las condiciones justo detrás de la onda de choque. Dichas relaciones que se buscan son las ya conocidas relaciones de Rankine-Hugoniot (1-7 a 1-10) obtenidas a partir de balances de masa, cantidad de movimiento y energía asociados a un volumen de control infinitesimal en cada punto de la onda de choque que rodea y contiene a la misma. Como es conocido, tras cierto desarrollo algebraico (ver [3]) se obtienen de a partir de ellas los saltos de las magnitudes a través de la onda como función del Mach incidente, M_1 , y del ángulo de incidencia β .

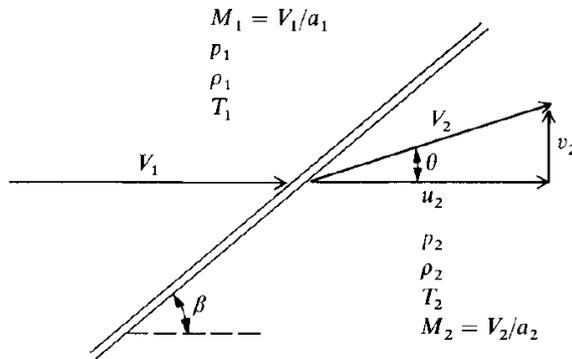


Figura 2-2 Esquema general de onda de choque oblicua

En particular, para la presión y la densidad se obtienen

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) , \quad (2-1)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \quad (2-2)$$

y haciendo uso de la ecuación de estado

$$\frac{P}{\rho} = R_g T , \quad (2-3)$$

se obtiene para la temperatura que

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(P_2/P_1)}{(\rho_2/\rho_1)}. \quad (2-4)$$

Una vez conocidas las variables termodinámicas, puede obtenerse el salto de velocidades. Si u determina la velocidad según el eje x absoluto y v según el eje y , se tienen

$$\frac{u_2}{u_1} = 1 - \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{(\gamma + 1)M_1^2}, \quad (2-5)$$

$$\frac{v_2}{u_1} = \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \cos \beta}{(\gamma + 1)M_1^2}, \quad (2-6)$$

el valor del número de Mach

$$M_2 = \frac{1}{\sin(\beta - \theta)} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \sin(\beta)^2}{\gamma M_\infty^2 \sin(\beta)^2 - \frac{\gamma - 1}{2}}}, \quad (2-7)$$

así como la relación entre la presión de remanso tras la onda P_{O_2} y P_1

$$\frac{P_{o2}}{P_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \frac{P_2}{P_1}. \quad (2-8)$$

Adicionalmente, de las ecuaciones anteriores puede obtenerse otra que relaciona M_1 y β con el ángulo de deflexión de la corriente, θ ,

:

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right]. \quad (2-9)$$

En la representación de la Figura 2-3 se observa que para cada número de Mach existe un ángulo de deflexión de la corriente (θ) máximo para que una onda oblicua adherida sea suficiente para la adaptación de la corriente. En el límite de número de Mach infinito se obtiene que es aproximadamente de 45° .

Asimismo, se observa que para un valor dado de $\theta > 0$ existen dos valores posibles de β , uno correspondiente a $M_2 < 0$ (choque fuerte) y otro correspondiente a $M_2 > 0$ (choque débil), siendo este último el que se observa en la naturaleza. Cuando $\theta = 0$, sin embargo, esta regla no se cumple y la onda de choque será normal, aunque la resolución de la ecuación pueda llevar a otro valor.

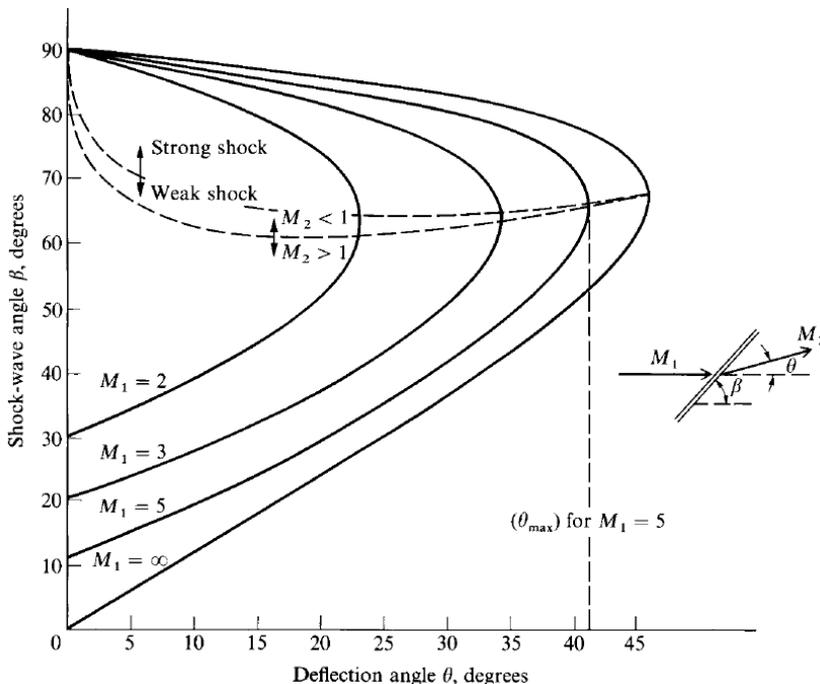


Figura 2-3 Diagrama $\theta - \beta - M$ de [1].

Obsérvese que si $M_1 \gg 1$, se tiene el comportamiento asintótico

$$\beta \rightarrow 1.2\theta.$$

Lo que significa que en el régimen hipersónico la onda de choque se ajusta bien (con un error del 20%) la geometría del cuerpo en la zona frontal.

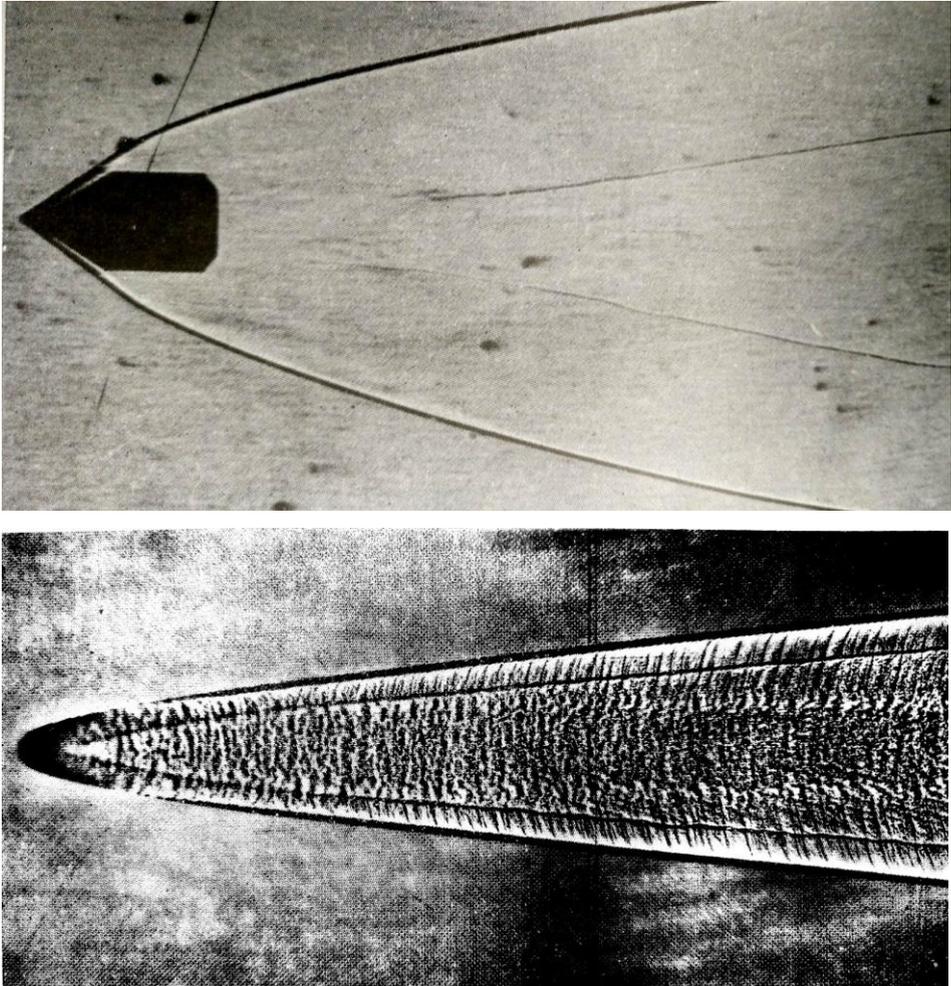


Figura 2-4 Bala y esfera en régimen hipersónico de [4].

2.2. Métodos aproximados

En este trabajo ya se ha comentado de la complejidad de resolución de la corriente exterior en régimen hipersónico. La resolución de las ecuaciones de forma analítica es imposible (solo podría llevarse a cabo haciendo simplificaciones sobre las mismas), lo que lleva a los métodos numéricos, que conllevan un error siempre.

Para resolver las ecuaciones exactas numéricamente es necesario recurrir a métodos como el de las características. Estos métodos son muy complejos, siendo necesario suponer datos para poder empezar a usarlo. Además, debido al cambio de régimen existente en el caso de cuerpos redondeados (tras la onda el aire evoluciona desde subsónico a supersónico), estos métodos no son útiles en toda la zona. Esto lleva a que en este trabajo se usen métodos aproximados.

Por simplicidad, y dado que como se verá más tarde los resultados son más que aceptables, se usarán diversos métodos basados en la geometría del objeto usando distintos mecanismos de expansión, unos basados en leyes newtonianas y otros en ondas de expansión.

2.2.1 Método de Newton

Este método fue propuesto por Newton para calcular la fuerza sobre una placa inclinada a baja velocidad. Más tarde se comprobó que era poco precisa pero irónicamente, tiene aplicación sobre flujos hipersónicos. El modelo de Newton consistía en que el fluido, modelado como una línea de corriente recta, cambiaba su velocidad normal a la superficie manteniendo la tangencial. De esta forma, si se tiene una placa inclinada un ángulo θ :

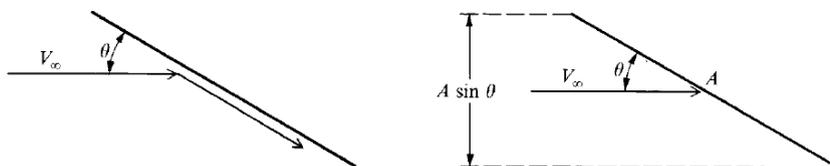


Figura 2-5 Esquema teoría de impacto de Newton.

Cambio en velocidad normal: $V_\infty \sin \theta$.

Flujo de masa que incide en una superficie A : $\rho_\infty V_\infty A \sin \theta$.

Tasa de cambio de cantidad de movimiento: $\rho_\infty V_\infty^2 A \sin^2 \theta$.

Según la segunda ley de Newton, la tasa de cambio es igual a la fuerza sufrida por la placa. Esta fuerza no incluye el movimiento aleatorio de las partículas que originan p_∞ . Por tanto,

$$p - p_\infty = \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \theta.$$

Adimensionalizando, se tiene la ley de seno cuadrado para el coeficiente de

presiones es

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{0.5 \rho_\infty V_\infty^2} = 2 \sin^2 \theta . \quad (2-10)$$

Según este método, el coeficiente de presiones sobre una superficie cualquiera 2D no depende de las condiciones exteriores del problema sino únicamente de la inclinación de la superficie en cada punto.

Todos los métodos basados en la ley de Newton expuesta tienen como ventaja que es posible usarlos para cualquier tipo de cuerpo, ya sea redondeado o afilado. Sin embargo, presentan varias desventajas como que **su precisión aumenta cuanto mayor sea el Mach de vuelo, provocando que la onda de choque se adhiera más al cuerpo, por lo que para bajos números de Mach tiene mayores errores.** Por otra parte, dada la naturaleza balística del método solo puede usarse si $\theta > 0$. Esto implica que la zona de sombra ($\theta < 0$), donde no impacta el fluido directamente se tiene una presión igual al último punto del cuerpo que no estaba en la zona de sombra.

2.2.2 Ley de Newton modificada.

En 1955, Lester Lees [5] propuso una alternativa al método de Newton. Según la ley de Newton, el coeficiente de presiones en el punto de remanso ($\theta = 90^\circ$) tiene un valor de 2. Lester pensó que el método sería más acertado si en lugar de 2, tuviera el valor real al que se denominará $C_{p_{max}}$, quedando por tanto la ley de la siguiente forma:

$$C_p = C_{p_{max}} \sin^2 \theta . \quad (2-11)$$

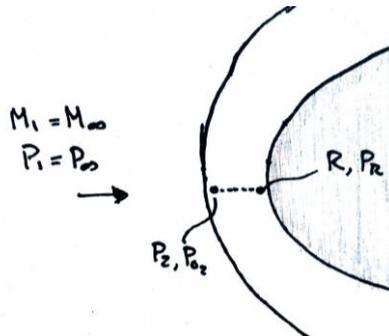


Figura 2-6 Esequema general situación onda-cuerpo.

El valor de $C_{P_{max}}$ es

$$C_{P_{max}} = \left(\frac{P_R - P_\infty}{0.5 \rho_\infty V_\infty^2} \right) = \left(\frac{P_R}{P_\infty} - 1 \right) \frac{2}{\gamma M_\infty^2}, \quad (2-12)$$

y como $P_R = P_{o2}$ y $M_1 = M_\infty$, se obtiene de (2-1), (2-7) y (2-8) que

$$C_{P_{max}} = \left(\left[\frac{(\gamma + 1)^2 M_\infty^2}{4\gamma M_\infty^2 - 2(\gamma - 1)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{1 - \gamma + 2\gamma M_\infty^2}{\gamma + 1} \right] - 1 \right) \frac{2}{\gamma M_\infty^2}. \quad (2-13)$$

De esta forma, la distribución de las presiones sí depende de las condiciones exteriores, a través del número de Mach y el coeficiente adiabático, o lo que es lo mismo: velocidad y condiciones del aire en vuelo. Además, en el punto de remanso se consigue el valor exacto de la presión.

La dependencia que tiene el $C_{P_{max}}$ con el Mach de vuelo (para $\gamma=1.4$) queda representada en la Figura 2-7. En ella se ve que el valor del mismo, fijado el coeficiente adiabático, se torna prácticamente constante a partir de Mach 10.

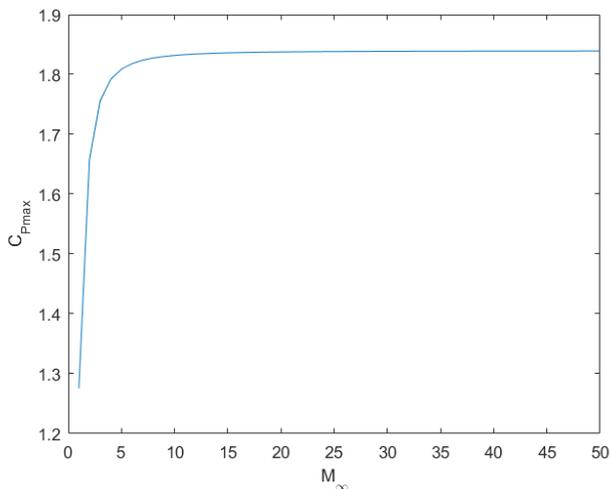


Figura 2-7 Coeficiente de presiones en el punto de remanso frente al Mach de vuelo

Esto tiene grandes implicaciones sobre el cálculo de la corriente ya que **para una geometría y un coeficiente adiabático (γ) dado, en régimen hipersónico, el coeficiente de presiones a lo largo de la superficie será independiente del Mach de vuelo.**

2.2.3 Correcciones de fuerzas centrífugas a la teoría de Newton o teoría de Newton-Buseman

La teoría de Newton, pensada para placas planas, se ha utilizado indistintamente para superficies curvas. Sin embargo, de aerodinámica potencial se conoce que sobre superficies redondeadas existe una fuerza centrífuga que hasta ahora no se ha tenido en cuenta. Por tanto, es el momento de corregir la ley de Newton para que estas fuerzas sean tenidas en cuenta.

La fuerza centrífuga tiene su origen en la aceleración radial que sufren las partículas al estar forzadas a seguir la tangente a la superficie (recordemos que la velocidad debe ser en todo momento tangencial para cumplir la condición de impenetrabilidad que impone que el flujo de masa a través de la superficie es nulo).

Tras desarrollar estas premisas (puede verse el desarrollo completo en el capítulo 3 de [1]), se tiene que el coeficiente de presiones en cada punto de la superficie es

$$C_{p_i} = 2 \sin^2 \theta_i + 2 \left(\frac{d\theta}{dy} \right)_i \sin \theta_i \int_0^{y_i} \cos \theta dy , \quad (2-14)$$

donde i es el punto de la superficie donde se quiere calcular el coeficiente de presiones e y_i se corresponde con la coordenada y (en ejes globales) del punto i como se puede ver en la Figura 2-8.

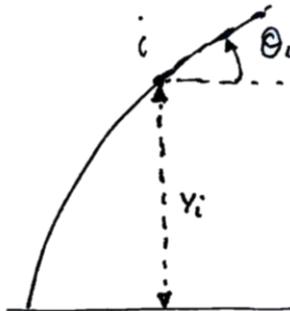


Figura 2-8 Esquema de geometría.

En este caso, el método no solo depende de la inclinación local de la superficie sino de la forma de la misma hasta llegar al punto deseado.

Comparando estos métodos entre si y con la solución exacta, varias conclusiones recogidas en [1] y resumidas aquí pueden obtenerse.

En el límite de que el Mach de vuelo sea infinito y el coeficiente adiabático sea 1.4, la comparación de los diferentes métodos queda reflejado en la Figura 2-9 de [6] . En ella se ve claramente que, bajo las condiciones mencionadas, el método que mejor se adapta es la modificación del de Newton. Por otra parte, en contraposición con lo que parece ser lo correcto, el método de Newton-Buseman, aunque aparentemente correcto desde el punto de vista teórico, no predice de forma ajustada los resultados.

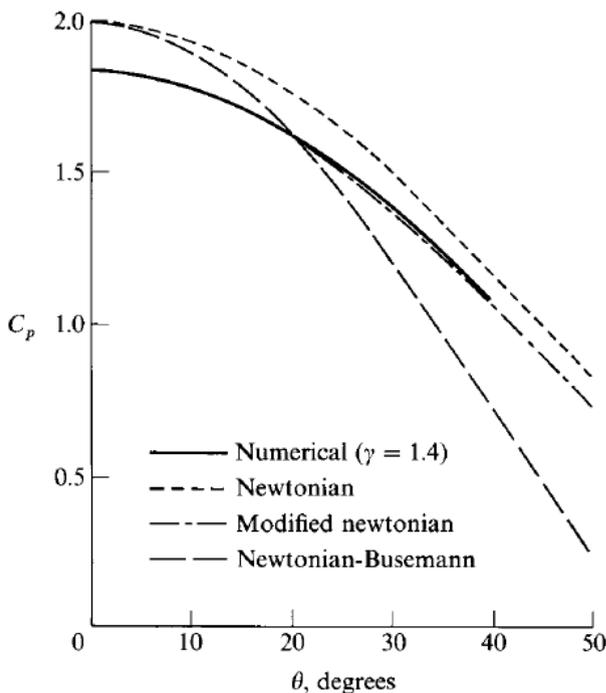


Figura 2-9 Distribución de la presión sobre la superficie de un cilindro circular.

Sin embargo, si ahora comparamos los resultados para un perfil aerodinámico formado por parábolas, el resultado que se obtiene es el mismo.

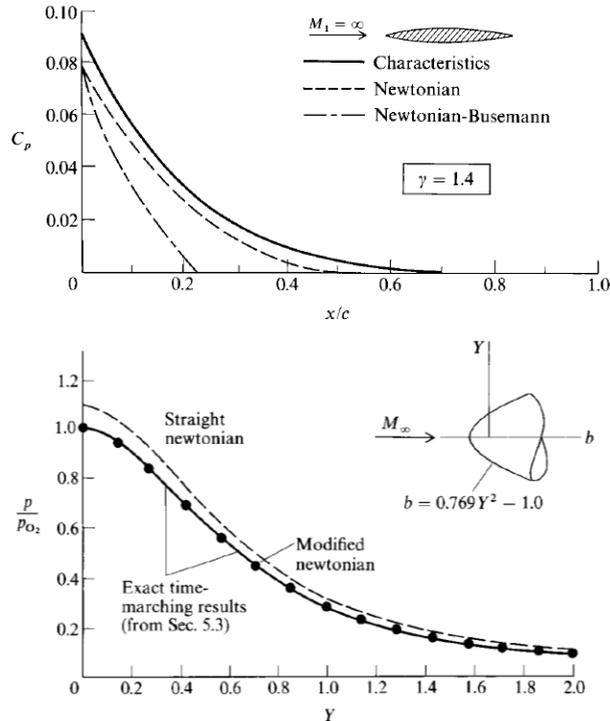


Figura 2-10 Coeficiente de presiones sobre un perfil de [7] y sobre un paraboloido

Si a altos números de Mach mantenemos el coeficiente adiabático en 1.4, los resultados concuerdan con los presentados. Lo mismo ocurre en el caso del paraboloido, donde se obtiene que el método de Newton modificado resuelve la corriente exterior de forma casi exacta.

Llegados a este punto, teniendo en cuenta que se va a considerar durante todo el estudio que $\gamma=1.4$, queda demostrado que tanto para cuerpos de borde de ataque redondeado o afilado, el método de Newton modificado (también se hará referencia a él como mejorado) es el que mejor ajusta los resultados experimentales de los métodos basados en la ley newtoniana.

2.2.4 Método de las ondas de expansión

Este cuarto método nada tiene que ver con los anteriores, basados todos en la teoría que Newton desarrolló a finales del siglo XVII. En este caso, el desarrollo del método se centra en el mecanismo que tiene aire para expandirse y así mantenerse adherido al cuerpo.

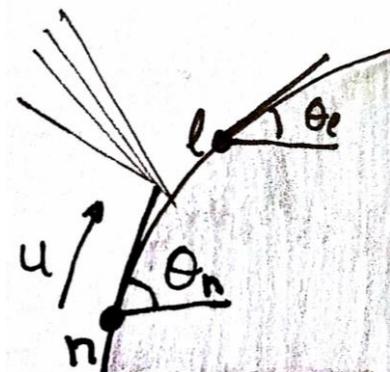


Figura 2-11 Esquema de onda de expansión sobre cuerpo.

En primer lugar, es necesario suponer un cuerpo con borde de ataque afilado cuya onda de choque esté adherida. Bajo estas condiciones es posible desarrollar el método, consistente en considerar que la expansión que sufre el aire a lo largo de la superficie del cuerpo puede aproximarse localmente como una onda de expansión de Prandtl-Meyer (de ahí el nombre del método), descrita por la función de Prandtl Meyer (2-19) que describe la expansión del punto n al l .

$$\theta_n - \theta_l = \left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M_n^2 - 1) - \tan^{-1} \sqrt{M_n^2 - 1} \right] - \left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M_l^2 - 1) - \tan^{-1} \sqrt{M_l^2 - 1} \right] \quad (2-15)$$

Esto es posible harcerlo sólo con cuerpos de nariz afilada para que el régimen detrás de la onda en la nariz sea supersónico, lo que permite ya usar el método de expansión. Sin embargo, debido a las limitaciones físicas de las ondas de choque oblicuas, la pendiente del morro no puede exceder un límite representado en la figura 2-3.

Los pasos a seguir para calcular el campo de presiones son;

- 1) Calcular el Mach y la presión detrás de la onda (M_n, p_n) en la nariz como si localmente fuera una cuña con una inclinación θ_n .
- 2) Se calcula la función de Prandtl-Meyer para la pareja θ_n, M_n .
- 3) Conocido el $\Delta\theta$ con respecto al siguiente punto es posible calcular el Mach en este segundo punto a través de (2-15).
- 4) Por último, se calcula la presión usando la relación de flujo isentrópico:

$$\frac{p_l}{p_n} = \left[\frac{1 + (\gamma + 1) / 2M_n^2}{1 + (\gamma + 1) / 2M_l^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2-16)$$

Repitiendo los pasos 2, 3 y 4 punto a punto es posible obtener el campo de presiones sobre la superficie completa. A diferencia que en [1], para ser más riguroso con el mecanismo de expansión, se discretiza la superficie y se supone una onda de expansión local en cada punto en lugar de referir todos los cambios de pendiente al punto inicial.

Este método, en comparación con los basados en la ley de Newton, tiene una base física más sólida que hace que los resultados obtenidos sean mejores. Esto puede observarse calculando el campo de presiones sobre el perfil de la Figura 2-10. Como se ve, la correspondencia con el método completo es mucho mejor que los anteriores.

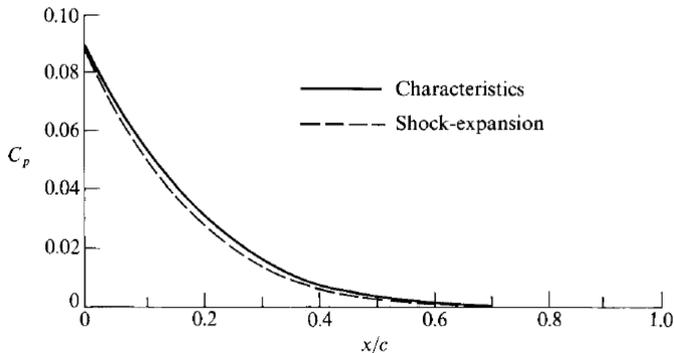


Figura 2-12 Coeficiente de presiones sobre perfil parabólico.

Aunque los resultados en régimen hipersónico son muy buenos, estos se vuelven

mucho más pobres en supersónico. Esto es así por la simplicidad del modelo, la geometría de la onda de choque y el comportamiento de las ondas de expansión.

Por una parte, existe el hecho de que las ondas de expansión que se crean en la superficie se propagan hasta la onda de choque, donde se ven reflejadas y vuelven al cuerpo. Si pintamos este dibujo para el caso supersónico y el hipersónico se tiene lo siguiente:

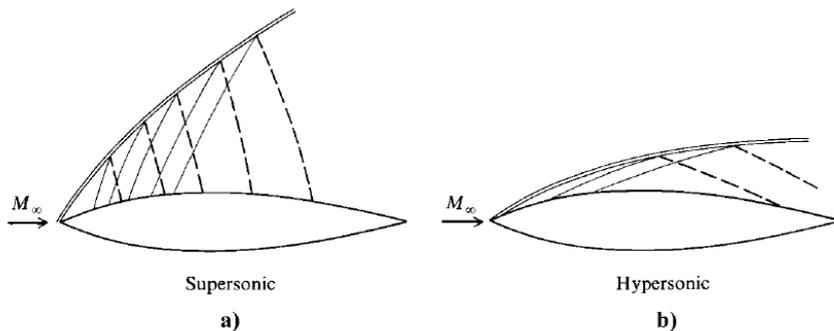


Figura 2-13 Comparación de geometría de ondas en régimen supersónico e hipersónico.

En el método no se contempla en ningún momento que las ondas se vean reflejadas y, como se ve en b, en régimen hipersónico, al estar la onda tan pegada al cuerpo, las ondas reflejadas aparecen al final del cuerpo mientras que en régimen supersónico están distribuidas por toda la superficie.

2.2.5 Método híbrido

Como se ha visto, cada uno de los métodos expuestos tiene sus ventajas y sus desventajas como el tipo de cuerpos al que pueden ser aplicados o la precisión conseguida.

En un intento de aunar las ventajas de los diferentes métodos y suplir las deficiencias se propone un método diferente el cual recoge partes del método mejorado de Newton y el método de las ondas de expansión.

El método supone un cuerpo con nariz redondeada en el que el método de las ondas de expansión no es aplicable debido a que el Mach tras la onda está por debajo de 1. Sin embargo, debido a la expansión, la velocidad aumenta llegando al punto en el que el régimen pasa a ser supersónico y es posible utilizar el método de las ondas de expansión a partir de ese punto.

Las ventajas de este método es que la presión en el punto de remanso es exacta a la real y que a partir del punto en el que se pasa a régimen supersónico la evolución se acerca más a la real.

Sin embargo, no todos son ventajas. El principal de los inconvenientes del método es que, si se punto donde se produce el cambio de régimen difiere algo entre la realidad y la aproximación, en el método de las ondas de expansión aparece un error acumulado. Dado que el punto de remanso el valor de la presión es exacto, cuanto más cerca esté el punto de cambio de régimen, mejor será la aproximación puesto que el error acumulado hasta este punto será menor. Es por ello que se hace un estudio sobre la posición del punto donde $Mach=1$ en perfiles elípticos frente a dos parámetros: la relación de aspecto entre los semiejes y el Mach de vuelo.

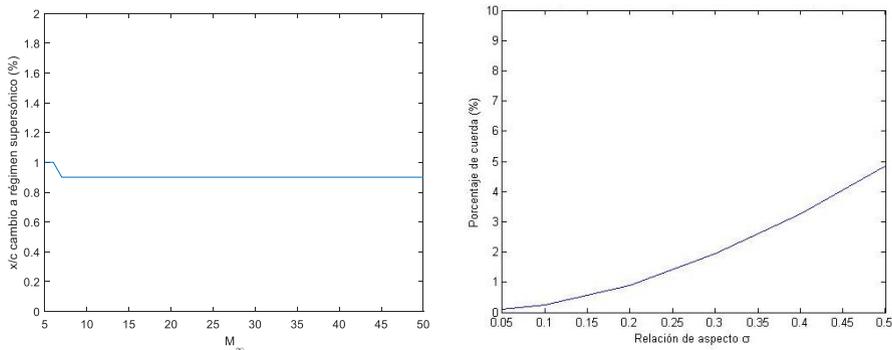


Figura 2-14 Dependencia del punto de cambio de régimen con los diferentes parámetros con $\sigma=0.2$ a la izquierda y $M_{\infty}=15$ a la derecha.

En la Figura 2-14 aparece representada la tendencia del punto. Se observa para empezar que al aumentar el Mach (lo que equivale a ser más hipersónico) el punto se mantiene por debajo del 1% de la cuerda del perfil y constante, haciéndose una vez más patente la independencia de la corriente exterior con el número de Mach cuando este es suficientemente grande. Por otra parte, el punto se retrasa cuanto menos esbelto es, llegando a estar al 5% de la cuerda, que, aunque es peor con respecto a otras relaciones de aspecto, sigue siendo un buen resultado.

Como conclusión de este pequeño estudio, se obtiene que a priori se tendrán mejores resultados cuanto más esbelto sea el cuerpo y mayor el número de Mach.

A modo de ejemplo, en la Figura 2-15 se presenta el coeficiente de presiones calculado por los dos métodos. Se ve que la diferencia no es muy grande, pero esa pequeña diferencia puede suponer un salto en la precisión. Aun así, sin datos experimentales no es posible corroborar que la precisión sea mejor al juntar ambos

métodos para cuerpos de nariz redondeada.

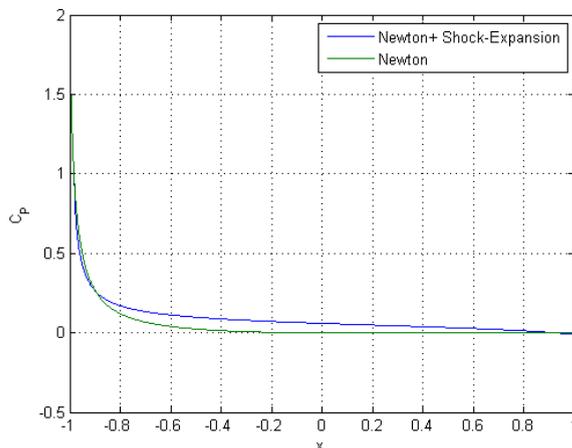


Figura 2-15 Comparación de coeficientes de presiones para el método de Newton y el método híbrido.

2.3. Cálculo del resto de variables termodinámicas, velocidad y resistencia a partir del campo de presiones

En el anterior punto se han expuesto diferentes métodos con los que calcular el campo de presiones alrededor de un cuerpo sobre el que posteriormente se hará un estudio de la capa límite. Sin embargo, para poder hacer este estudio no basta con conocer el campo de presiones, es necesario tener todas las variables termodinámicas y la velocidad.

Para calcularlas basta con saber que la presión que se conoce es a través de una línea de corriente, donde se conservan las magnitudes de remanso así como la entropía (es decir, es un movimiento isentrópico). Por tanto, basta con las ecuaciones de relaciones isentrópicas para obtener todo lo deseado. Dichas relaciones proporcionan

$$M_e = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(-1 + \left(\frac{P_o}{P_e} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right)}, \quad (2-17)$$

$$\frac{T_o}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2, \quad (2-18)$$

$$\rho_e = \frac{P_e}{R_g T_e}, \quad (2-19)$$

$$U_e = M_e \sqrt{\gamma R_g T_e}, \quad (2-20)$$

Por último, va a ser de gran interés calcular la resistencia originada por la distribución de presiones sobre el cuerpo. Para ello, se integra la proyección sobre el eje X del campo de presiones:

$$D_p = 2 \int_0^{x_f} -(P - P_\infty) n_x dx. \quad (2-21)$$

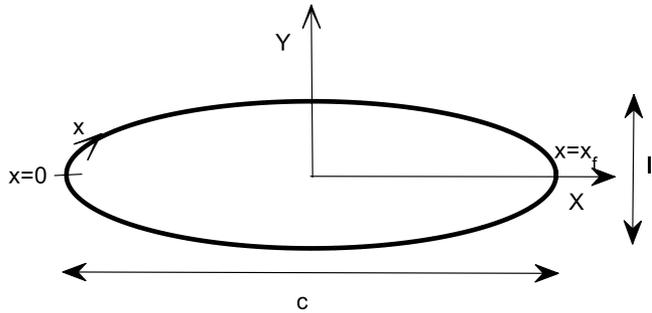


Figura 2-16 Esquema de cuerpo para cálculo de resistencia de presión.

Aun así, es más interesante el coeficiente de resistencia, puesto que es de mayor utilidad para estudios futuros. Para ello, basta con adimensionalizar la ecuación, quedando

$$C_{Dp} = \frac{2c}{l_f} \int_0^{\xi_f} -C_p n_x d\xi. \quad (2-22)$$

2.4. Distribución de presiones y resistencia de presión en distintos cuerpos bidimensionales.

Antes de pasar al estudio de la capa límite recogido en el capítulo 3 es interesante observar el comportamiento de la corriente exterior en función tanto de la esbeltez como del Mach de vuelo. De la misma forma, también cobra una gran importancia calcular la resistencia aerodinámica que la distribución de presiones genera a lo largo del cuerpo. Una vez hecho el estudio en cada cuerpo se compararán los resultados entre ambos cuerpos.

Los cuerpos que se estudiarán en este punto serán los mismos que se estudiarán en el capítulo 3: perfiles elípticos y parabólicos. Además, de forma separada se hará lo mismo con un cilindro y con una placa plana con borde de ataque semicircular.

2.4.1 Perfil elíptico

Para caracterizar la esbeltez de los perfiles elípticos se hace uso del parámetro σ , que es la relación que existe entre el semieje menor y el mayor (b/a). De esta forma, $\sigma=0$ correspondería a una placa plana y $\sigma=1$ a un cilindro circular. Por otra parte, el barrido que se hará en Mach de vuelo irá desde 5 hasta 35.

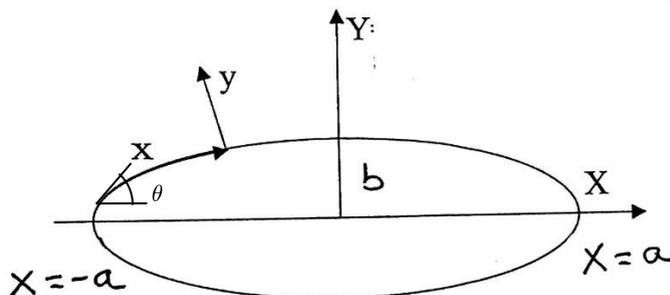


Figura 2-17 Esquema de perfil elíptico.

La ecuación que describe la elipse (con $a=1$ para que sea adimensional) es

$$X^2 + \frac{Y^2}{\sigma^2} = 1 .$$

El campo de presiones se calculará usando el método híbrido presentado en 2.2.5 ya que como se comentó, una vez el aire pasa a ser supersónico, existe un mayor fundamento físico en el proceso de expansión por medio de ondas de Pandtl-Meyer locales.

Si se fija la relación de aspecto en 0.2 y se hace un barrido en Mach se obtiene la Figura 2-18, la cual puede tomarse como representativa del campo de presiones sobre una elipse en régimen hipersónico. En ella se observa primeramente que el gradiente de presiones sobre la superficie es siempre positivo, siendo muy acusado cerca del borde de ataque y suavizándose para mantenerse prácticamente constante. Esto tiene grandes implicaciones en la capa límite ya que **un gradiente siempre positivo significa que la corriente no se desprenderá**. Además, a pesar de haber representadas 16 gráficas diferentes comprendidas entre Mach 5 y 35, apenas se ve diferencia entre ellas. Esto pone de manifiesto una vez más la independendencia con el número de Mach que parece tener la corriente exterior como ya se vió cuando se presentó el método de Newton modificado.

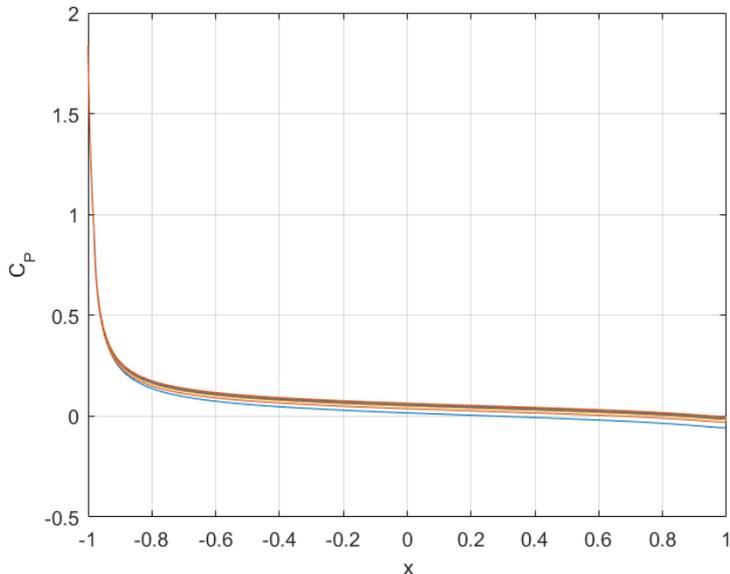


Figura 2-18 Coeficiente de presiones sobre elipse para distintos números de Mach con $\sigma = 0.2$.

Si ahora en lugar de fijar la relación de aspecto se fija el número de Mach en 20, se obtiene la Figura 2-19 que permite analizar la influencia que tiene la relación de aspecto.

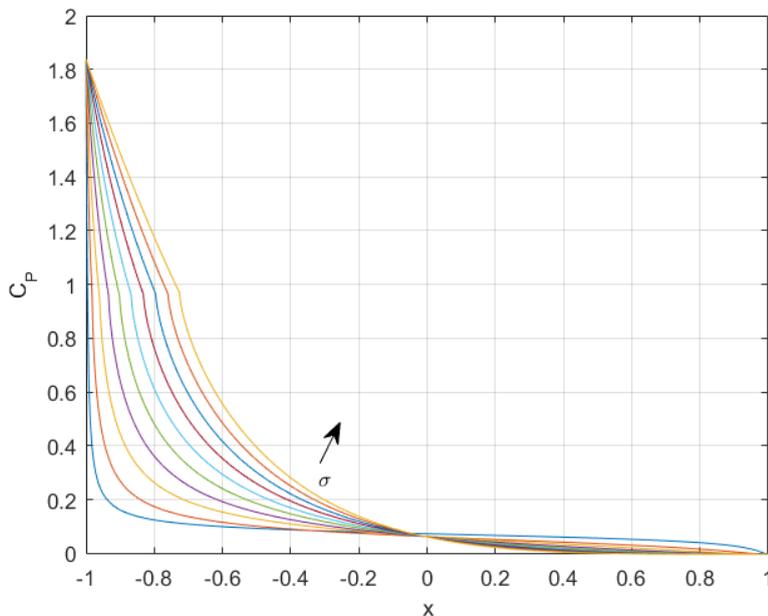


Figura 2-19 Coeficiente de presiones sobre elipse a Mach 20 y diferentes relaciones de aspecto.

En primer lugar, se observa que el gradiente de presiones en el borde de ataque se suaviza con la relación de aspecto, debido a que la expansión necesaria es menor. Así mismo, esta tendencia cambia cuando se avanza en la cuerda llegando a ser mayor la presión cuando la relación de aspecto es pequeña a partir de aproximadamente la mitad de la cuerda.

Por último, la transición de subsónico a supersónico puede apreciarse mucho mejor cuando σ es grande ya que el punto se retrasa y queda representado como un pico por el cambio de mecanismo de expansión existente.

La resistencia que genera las distribuciones de presiones siguen la misma tendencia como puede verse en la Figura 2-20.

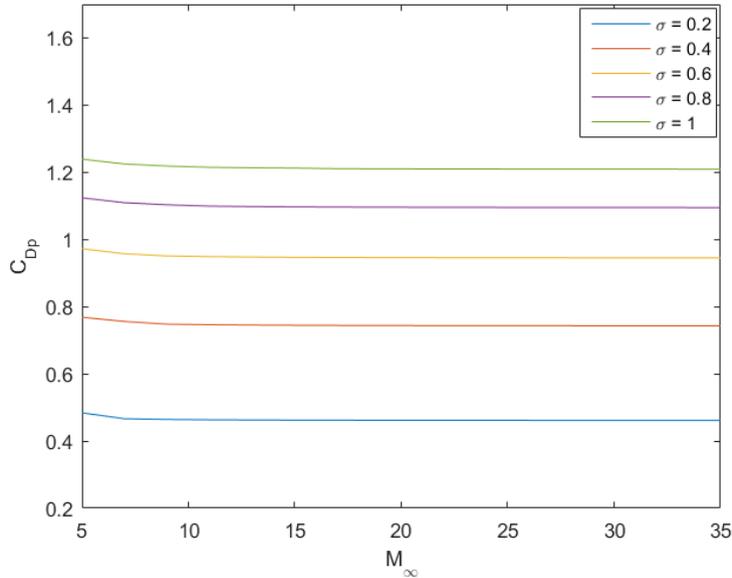


Figura 2-20 Coeficiente de resistencia de presión frente al número de Mach para diferentes σ .

Primeramente, como era de esperar, la resistencia aumenta con la relación de aspecto llegando a aumentar su orden de magnitud en 2 hasta llegar a la unidad. Por otra parte, se vuelve a observar la independencia con el número de Mach a partir de Mach 8.

La independencia con el número de Mach, a falta de futuros estudios con más detalle, tiene grandes implicaciones. Si tras hacer cálculos más rigurosos esta tendencia se mantuviese, implicaría que a la hora de hacer experimentos en túnel de viento bastaría con hacer los ensayos para un único número de Mach para obtener resultados tanto de variables termodinámicas como de velocidad y resistencia de presión para un amplio rango de velocidades hipersónicas.

2.4.2 Perfil parabólico

Para un perfil parabólico puede hacerse un estudio del mismo tipo y alcance que para los perfiles elípticos. Estos perfiles vienen descritos mediante la expresión

$$Y = 4y_{max} \cdot X \cdot (1 - X).$$

En esta ocasión, el parámetro σ corresponderá al grosor máximo del perfil dividido por la cuerda ($2y_{max}/c$) siendo así análogo al parámetro usado para los perfiles elípticos.

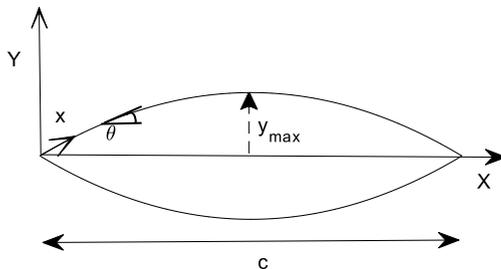


Figura 2-21 Esquema de perfil parabólico.

Para este caso, a diferencia del anterior, no se usará siempre el método híbrido para calcular la corriente exterior. En lugar de ello, para casos los suficientemente esbeltos se usará el método de las ondas de expansión debido a los magníficos resultados que devuelve como se vió en la Figura 2-12.

Cuando la relación de aspecto no permita usar este método, limitado por el ángulo del borde de ataque, pasará de nuevo a usarse el método híbrido.

Los resultados de nuevo se presentarán de la misma forma que en el subpunto anterior para su estudio y posterior comparación.

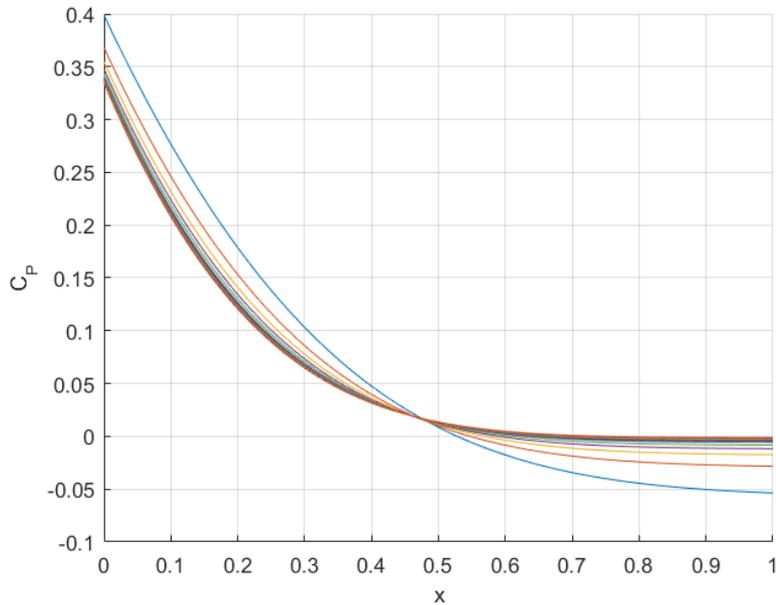


Figura 2-22 Coeficiente de presiones para perfil parabólico con $\sigma=0.2$.

Empezando con la dependencia con el número de Mach, en las figuras 2-12 y 2-13 se ha representado el coeficiente de presiones para dos relaciones de aspecto que requieren el uso de métodos diferentes. A pesar de la diferencia de métodos usados ambas mantienen dos propiedades en común. En primer lugar, a pesar de la diferencia en la evolución, ambas presentan un gradiente de presiones positivo a lo largo de todo el perfil (las diferencias entre ambos gradientes se verán más adelante) al igual que el presentado en los perfiles elípticos. Además, vuelve a poder observarse una tendencia a la independencia con el número de Mach cuando este es elevado. Esto puede verse observando como las líneas que corresponden a cada Mach se acercan cada vez más hasta prácticamente ser una. Esta tendencia se hace más acusada en el caso en el que se usa el método híbrido.

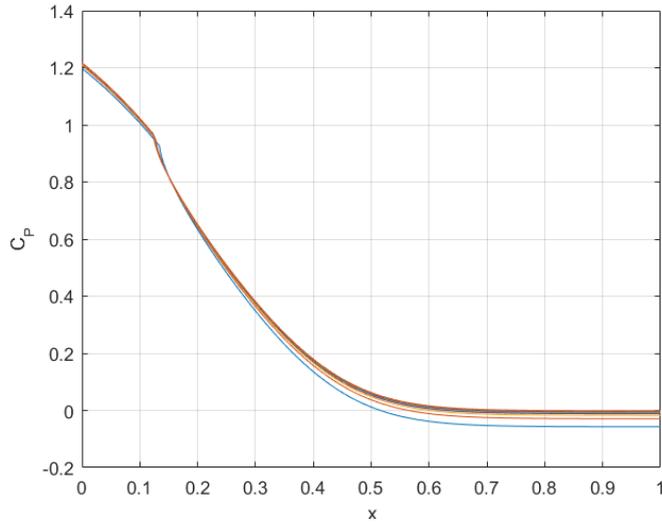


Figura 2-23 Coeficiente de presiones para perfil parabólico con $\sigma=0.7$

Por otra parte, en la Figura 2-24 se representa la variación del coeficiente de presiones con la relación de aspecto. En ella se puede apreciar que tanto el gradiente de presiones como el valor de la presión por si misma aumentan con la relación de aspecto.

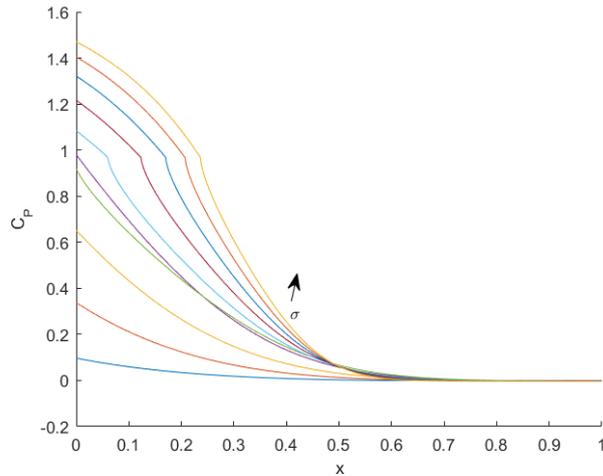


Figura 2-24 Coeficiente de presiones sobre distintos perfiles parabólicos a Mach 20

Al igual que con los perfiles elípticos, el punto de transición en el método híbrido se retrasa con σ y la tendencia creciente del valor de la presión con el parámetro se ve invertida a partir de mitad de la cuerda de la misma forma.

Por último, en la Figura 2-25 se observa que la tendencia con el Mach es la misma que se tenía en los perfiles elípticos: prácticamente constante. Por otra parte, la resistencia es creciente con σ existiendo una discontinuidad en el crecimiento debido al cambio de método de cálculo de la distribución de presiones. Este crecimiento también llega a dar un salto de dos órdenes de magnitud como sucedía anteriormente. En cambio, en esta ocasión la resistencia es menor a su caso homólogo en perfiles elípticos.

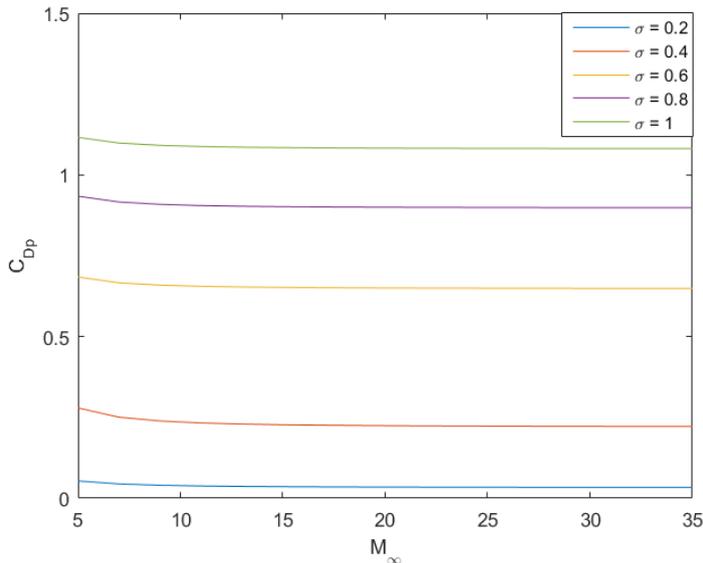


Figura 2-25 Coeficiente de resistencia de presión frente al número de Mach para distintos valores de σ

Este hecho tiene lugar debido a que el borde de ataque redondeado de los perfiles elípticos provoca una compresión mucho mayor del aire haciendo así que la contribución a la resistencia de los puntos cercanos al borde de ataque sea mucho mayor.

2.4.3 Cilindro

Un cilindro circular corresponde al caso específico de una elipse cuya relación de aspecto toma el valor 1. Este caso ya se ha estudiado en el punto 2.4.2. Sin embargo, es una geometría que dada su importancia merece la pena estudiar aparte.

En esta ocasión, para representar el coeficiente de presiones, no se usará la cuerda sino el ángulo θ , con origen en el punto de remanso. En la Figura 2-9 se observaba que los resultados del método de las características (que usa las ecuaciones de Euler al completo) y del método de Newton modificado eran prácticamente idénticos. Es por ellos que un intento de ir más allá va a comprobarse si esa correspondencia se mantiene al usar el método híbrido.

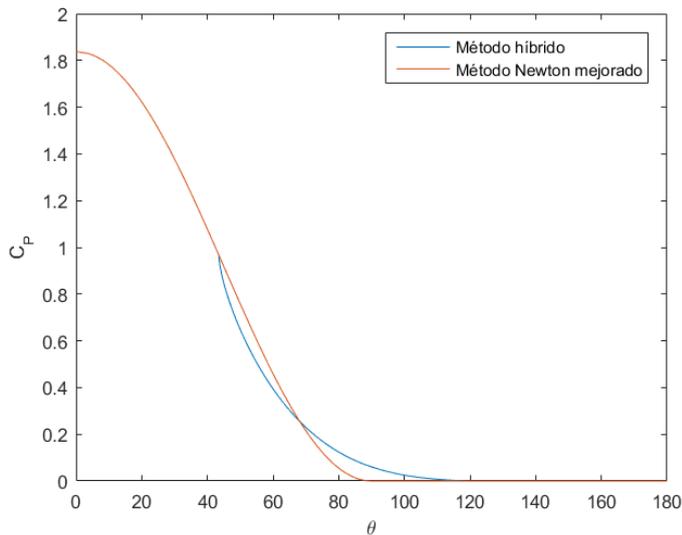


Figura 2-26 Coeficiente de presiones sobre cilindro ($M=20$).

Dado que no se tienen datos exactos más allá de los 40° , solo puede confirmarse que hasta ese punto los resultados son buenos (ya que al estar en régimen subsónico sigue siendo utilizado el método de Newton mejorado). Más allá, no puede confirmarse nada, pero cabe esperar que sean buenos ya que, sin alejarse en exceso del método newtoniano se observa el cambio brusco de tendencia debido al paso a régimen supersónico.

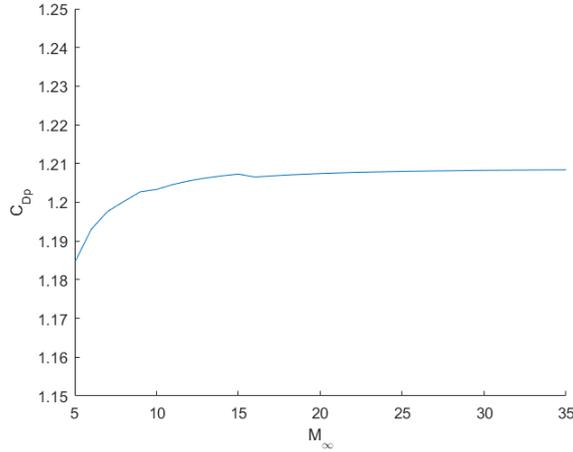


Figura 2-27 Coeficiente de resistencia en cilindro frente a Mach.

En cuanto a la resistencia de forma, representada en la Figura 2-27 frente al número de Mach, solo cabe mencionar que, a pesar de crecer levemente con el Mach de vuelo, cuando éste crece lo suficiente se observa la tendencia siempre observada hacia la independencia de ambas variables.

2.4.4 Placa plana con borde de ataque semicircular

Por último, va a analizarse el efecto que tiene dejar de suponer que la placa plana es infinitamente delgada, se pasa a suponer que el borde es finito y redondeando como en la Figura 2-28.



Figura 2-28 Placa plana con borde redondeado.

Debido al tipo de geometría, el coeficiente de presiones que se obtiene es el representado en la Figura 2-29. Hasta $x/R=1$ corresponde a un cilindro y hasta es idéntico a tal geometría. A partir de ese punto el comportamiento es idéntico al de una placa plana salvo porque la presión está por encima del valor en el infinito, que correspondería con un coeficiente de presiones de 0.

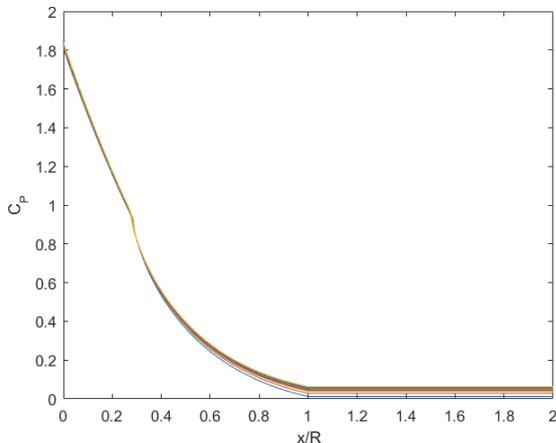


Figura 2-29 Coeficiente de presiones sobre placa plana con borde redondeado.

Por tanto, el efecto que tiene sobre el campo de presiones el borde redondeado es el de una compresión que se ve atenuada a lo largo del semicírculo.

En cuanto a la resistencia, cabe mencionar que, debido a la geometría, solo los puntos pertenecientes al borde y la parte posterior de la placa contribuyen. En cuanto a su evolución, es idéntica a la vista en todas las geometrías anteriores. Presenta una pequeña zona creciente para los primeros números de Mach pasando a adoptar un valor prácticamente constante a altos números de Mach.

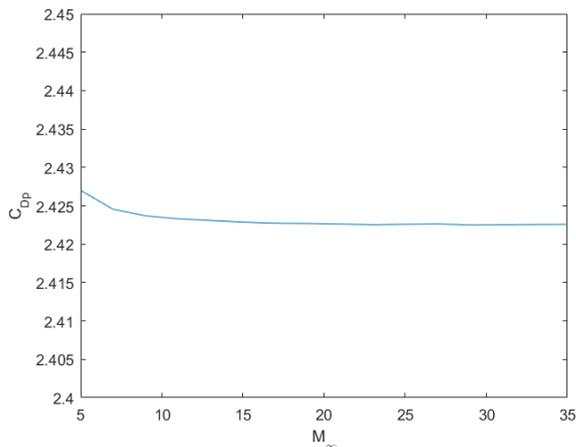


Figura 2-30 Coeficiente de resistencia de presión sobre placa plana con borde redondeado

Cuantitativamente, tiene un valor del orden de unidad al igual que el cilindro, aunque con valores mayores ya que la parte posterior en lugar de disminuir la resistencia, la aumenta a través de la resistencia de base.

2.5. Resistencia de presión sobre cuerpos axilsimétricos: esfera y cono.

Los resultados obtenidos anteriormente para cuerpos bidimensionales pueden ser extrapolados fácilmente a cuerpos axilsimétricos bajo ciertas hipótesis. Basta con considerar que el coeficiente de presiones a lo largo del cuerpo va a ser análogo al de una sección bidimensional del mismo: en el caso de una esfera, un cilindro, y en el del cono, una cuña. Esto es posible hacerse ya que es análogo extender el cuerpo bidimensional en la tercera dimensión hasta el infinito de forma plana o alrededor de un eje. De esta forma, lo único que no se tendría en cuenta es el hecho de que las ondas de choque dejan de ser planas.

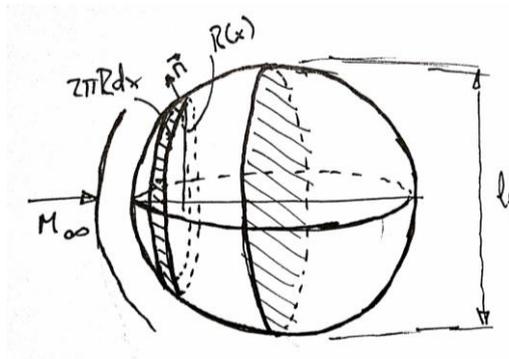


Figura 2-31 Esquema de esfera.

Con todo esto, el cálculo del coeficiente de resistencia se hace integrando en la superficie tridimensional. De esta forma, la expresión de la resistencia de presión queda:

$$C_{Dp} = 2 \int_0^{\xi_f} -C_p n_x \sin(\xi) d\xi \quad (2-23)$$

Por otra parte, para el cono será necesario tener en cuenta la resistencia de base, es de decir la contribución que hace la base del cono. Teniendo en cuenta que es una base circular y que el ángulo de expansión es mayor que el que permiten las ondas de Prandtl-Meyer, el valor de la presión en esta zona es 0.

De [8] se tiene una representación gráfica con resultados experimentales del coeficiente de resistencia tanto para una esfera como para un cono (Figura 2-32) con la que se comprobará la validez de la aproximación hecha.

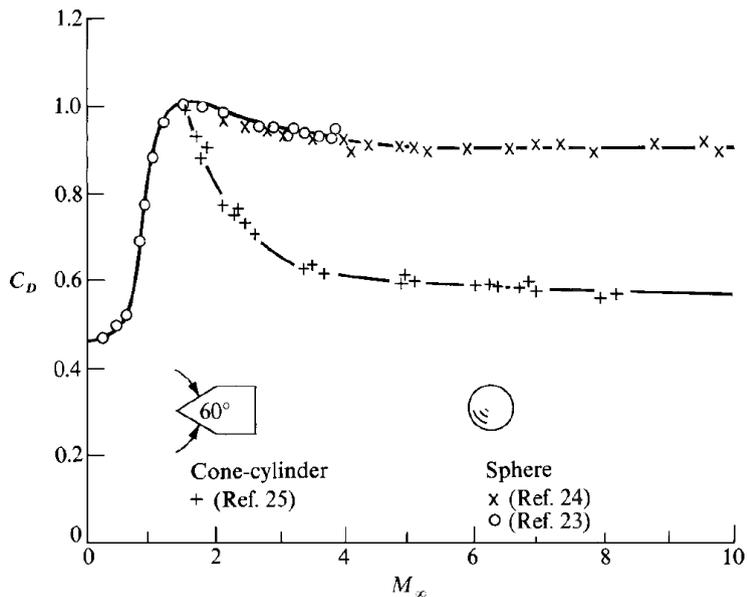


Figura 2-32 Coeficiente de resistencia experimental de un cono y una esfera de [8].

El cilindro con morro cónico y el cono ofrecerán la misma resistencia debido a que la pared del cilindro no ofrece resistencia alguna dada su orientación con respecto a la corriente incidente. En la Figura 2-33 se observa que, a bajos números de Mach los resultados no son buenos, pero a partir de Mach 6 en la esfera, y Mach 8 en el cono, los resultados empiezan a concordar bastante bien.

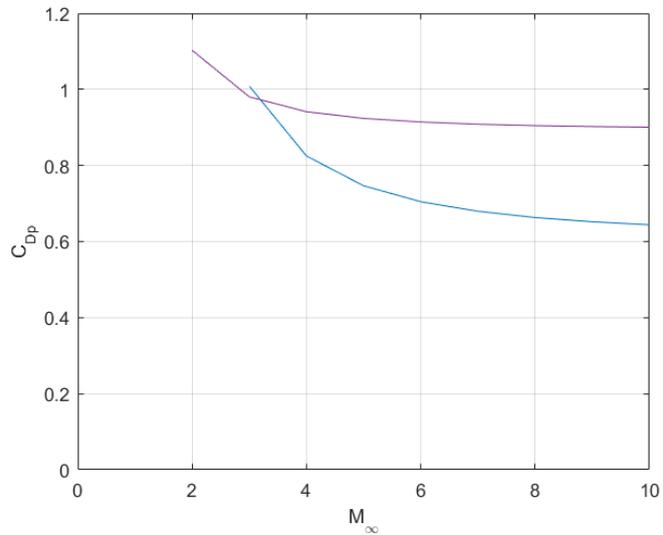


Figura 2-33 Coeficiente de resistencia aproximado para esfera y cono

Es necesario tener en cuenta que, tanto el método híbrido usado para la esfera, como el método de ondas de expansión usado con el cono, tienen resultados muy pobres a bajos números de Mach como ya se había comentado cuando se presentaron, pero estos mejoran con el aumento del Mach.

3 CAPA LÍMITE

El estudio de la capa límite, último paso dentro del recorrido del trabajo, es de gran importancia debido a la crucialidad de sus resultados en aplicaciones reales del problema como puede ser el diseño de un vehículo espacial. Por una parte, del estudio de la capa límite se obtiene la resistencia originada por la fricción entre el aire y el objeto de estudio. Esta es conveniente compararla con la ya obtenida resistencia de presión para así determinar la importancia relativa de cada una de ellas.

Por otra parte, se encuentran los efectos de temperatura. Estos, por la experiencia que se tiene en vuelo hipersónico, son los más importantes a tener en cuenta. Debido a los altos números de Mach, la temperatura cerca de los cuerpos aumenta mucho, y por consiguiente la temperatura de la superficie del cuerpo. En este trabajo no van a tenerse en cuenta varios de estos efectos como pueden ser las reacciones químicas que pueden producirse o la radiación. Sin embargo, de forma sencilla, se buscan, en lugar de resultados cuantitativos, resultados cualitativos que permitan hacernos una idea de la dependencia de las diferentes magnitudes con parámetros como la esbeltez o el Mach de vuelo.

En el presente capítulo se presentarán las ecuaciones utilizadas para calcular la capa límite, así como el método numérico que se usará para implementar dichas ecuaciones. Para terminar, se mostrarán los resultados para diferentes estudios hechos de la capa límite para diferentes geometrías y velocidades de vuelo.

Antes de poder presentar las ecuaciones es necesario hacer una pequeña introducción a ellas.

En la capa límite, como cualquier movimiento de un fluido, según el número de Reynolds (el cual mide la importancia de las fuerzas de inercia frente a las de viscosidad) las partículas pueden moverse en régimen laminar o turbulento.

Un movimiento es laminar si las partículas se mueven de forma ordenada siguiendo líneas de corriente que forman capas por encima del objeto. Por otra parte, el flujo será turbulento si deja de ser ordenado para ser caótico siendo el movimiento de las partículas aleatorio (No se estudia la velocidad total sino la velocidad media).

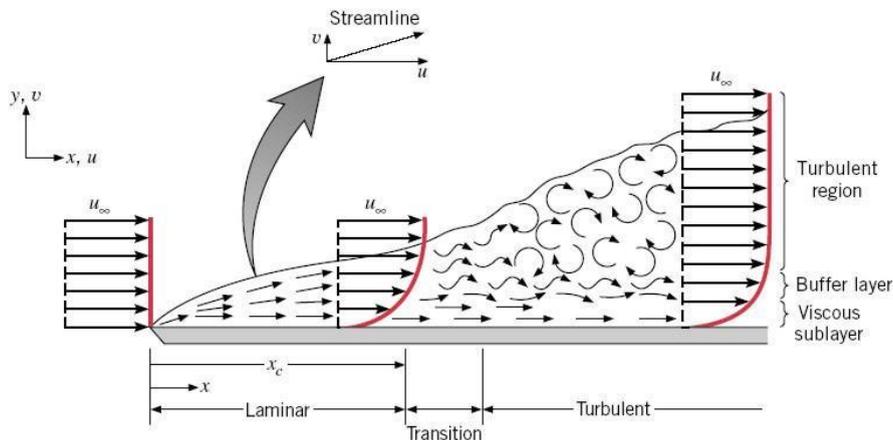


Figura 3-1 Perfil de velocidad en capa límite.

Para decidir si el flujo es laminar o turbulento existen varios criterios. Para una placa plana resultado conveniente por su simplicidad el método de Pohlhausen. Este dice que la capa límite será turbulenta si el número de Reynolds local asociado al grosor de la capa es mayor que 645. Debido a que el grosor de la capa no es algo fijo, sino que va aumentando conforme recorre el objeto, la capa límite puede ser en una zona laminar y en otra turbulenta existiendo una zona de transición que en este trabajo se considerará infinitesimal.

En el presente trabajo solo se harán cálculos para régimen laminar. Aún así, el método y los programas están preparados para implementar la transición a la turbulencia.

3.1. Capa límite laminar

Aunque como se ha visto en el capítulo 1, las ecuaciones de la capa límite son en teoría las ecuaciones de Navier-Stokes (1-1 a 1-5) al completo ya que en esta ocasión la viscosidad es importante por pequeña que sea, otro tipo de simplificaciones pueden hacerse. Estas están relacionadas con el grosor de la capa.

Por comodidad del lector se reproducen aquí de nuevo las ecuaciones 1-1 a 1-5 con ciertas simplificaciones ya hechas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (3-1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3-3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla e \right) = -p \nabla \cdot \vec{V} + \nabla \cdot (K \nabla T) + \phi_v, \quad (3-4)$$

Donde se han despreciado los esfuerzos de fuerzas másicas al ser $U_\infty^2 \gg gl$, donde l es la longitud caracterísitica del cuerpo. Pueden sustituirse los términos de fuerza viscosa pueden sustituirse por la ley de Newton, que los relaciona con el gradiente de velocidad como se comentó en la sección 1.3.3. Adicionalmente se ha eliminado la ecuación de movimiento proyectada en el eje z ya que como ya se ha comentado, en este trabajo solo va a tenerse en cuenta el problema bidimensional.

Adicionalmente, es necesario usar la ecuación de estado, así como calcular los valores de μ y k . Se utilizará la ley de Shuterland para la viscosidad, quedando así las respectivas expresiones:

$$\mu = \mu_\infty \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^w \left(\frac{T_\infty + S}{T + S} \right)^\sigma, \quad (3-5)$$

$$\frac{P_e}{\rho} = R_g T, \quad (3-6)$$

$$k = \frac{\mu c_p}{Pr}. \quad (3-7)$$

Una vez terminada la adecuación de las ecuaciones, se pasa a las simplificaciones de capa límite propiamente dichas. Debido a que los términos convectivos y viscosos deben ser del mismo orden, pueden compararse para averiguar el orden de magnitud del grosor de la capa límite en comparación con la longitud caracterísitica del problema. Para ello, las magnitudes físicas caracterñísticas son las siguientes:

$$x \sim L \quad y \sim \delta \quad u \sim U_\infty \quad v \sim V_{yc} \quad \rho \sim \rho_\infty$$

Comparando el termino convectivo en x y el viscoso en y se tiene que

$$\rho_{\infty} U_{\infty} \frac{U_{\infty}}{L} \sim \mu \frac{U_{\infty}}{\delta^2} \rightarrow \frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{\rho_{\infty} L U_{\infty}}} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \ll 1. \quad (3-8)$$

A partir de esta simplificación, otras pueden hacerse: teniendo en cuenta los órdenes de magnitud, es posible despreciar los términos viscosos en x en comparación con los mismos en y . Además, debido al pequeño grosor de la capa, las variaciones de la presión en la dirección y son mucho menores que en la dirección x . Por tanto, la ecuación 1-3 puede dejarse al un lado, siendo solo utilizada en ocasiones para hacer correcciones. Al no haber variaciones de la presión en el eje y , en cada estación la presión será igual a la de la corriente exterior.

La ecuación 3-4 hace referencia a la capa límite térmica, que da información sobre el perfil de temperaturas dentro de la capa límite. Esta ecuación también puede simplificarse y expresarse de forma alternativa.

Por una parte, la variación de energía se puede expresar como variación de entalpia, equivalente a c_p multiplicada por la temperatura. Por otra parte, los términos convectivos deben ser del mismo orden que los de conducción. Para ello, es necesario que se de lo siguiente:

$$\frac{\delta T}{l} \sim 1 \sqrt{RePr}.$$

Dado que Pr es de orden unidad para el aire, de nuevo el grosor de esta capa es mucho menor que la longitud característica del problema. Esto tiene como consecuencia que se pueden llevar a cabo simplificaciones de la misma índole que la ecuación de cantidad de movimiento. Por tanto, la ecuación de la energía queda de la siguiente forma:

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = -u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (3-9)$$

Para la resolución de las ecuaciones se hacen necesarias condiciones de contorno en ambos extremos tanto en velocidad como en temperatura. En la pared se tiene que

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_p \quad \left(o \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \right),$$

según la pared sea o no adiabática. Por su parte, para el acoplamiento con la corriente exterior es necesario que se cumpla en el último punto que

$$u = u_e, \quad T = T_e.$$

Por último, se adimensionalizan las ecuaciones. De esta forma se consigue que los resultados no dependan del tamaño del cuerpo, de la velocidad, altura o número de Reynolds al que vuele, solo de la forma, Mach y modelo de aire usado. Para ello, se introduce el escalado de variables

$$\begin{aligned} u &\rightarrow U_\infty u, & v &\rightarrow U_\infty v, & x &\rightarrow l\xi, & y &\rightarrow \frac{l\eta}{\sqrt{Re}}, \\ u_e &\rightarrow U_\infty u_e, & p &\rightarrow p_\infty p, & T &\rightarrow T_\infty \theta, \\ \rho &\rightarrow \rho_\infty \rho, & \mu &\rightarrow \mu_\infty \mu, & k &\rightarrow k_\infty k, \end{aligned}$$

donde las variables del segundo término son adimensionales

Por consiguiente, las ecuaciones de la capa límite laminar adimensionalizadas son

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0, \quad (3-10)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{dp_e}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (3-11)$$

$$\rho u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} u \frac{dp_e}{d\xi} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + M_\infty^2 (\gamma-1) \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3-12)$$

y adicionalmente,

$$\frac{p_e}{\rho} = \theta, \quad k = \mu, \quad \mu = \theta^w \left(\frac{1 + \frac{\delta_1}{T_\infty}}{\theta + \frac{\delta_1}{T_\infty}} \right)^\sigma.$$

3.2. Resolución numérica de las ecuaciones: método de las diferencias finitas

El método de las diferencias finitas es un método de resolución de ecuaciones diferenciales basado en la discretización de las derivadas en el recinto donde quieren resolverse las ecuaciones. Este método es general y adecuado para el sistema de ecuaciones bidimensionales que constituye el problema de la capa límite.

3.1.1 Mallado del plano

En primer lugar, es necesario discretizar el recinto en el que va a resolverse a través de una malla en los ejes x , que sigue la superficie del cuerpo y el eje y , perpendicular a la superficie.

Con esta discretización se obtiene un sistema matricial de cuya resolución se realiza estación a estación, siendo una estación la línea de puntos vertical con un valor de x (denotado con el subíndice n) y todos los valores de y pertenecientes a esa línea (denotados con subíndice j). El resultado del problema será el campo de velocidades (u) y de temperaturas (θ) en todos los puntos de la malla.

Debido a la resolución numérica de las ecuaciones, no es posible tener el campo de velocidades y temperaturas al completo. Para obtener el mayor número posibles de valores bastará con hacer una malla con más puntos, teniendo esto un coste de tiempo en la resolución. Por tanto, se tendrá que llegar a una solución de compromiso en la que la obtención de buenos resultados no conlleve un excesivo coste temporal.

El mallado puede ser de dos formas: uniforme o variable. En el caso del mallado uniforme, los puntos de la malla son equiespaciados en ambos ejes (aunque el espaciado de cada eje no tiene que ser el mismo). Este es un mallado que es adecuado si no se desea obtener mejores resultados en una zona en especial sino tener la misma precisión en todo el espacio.

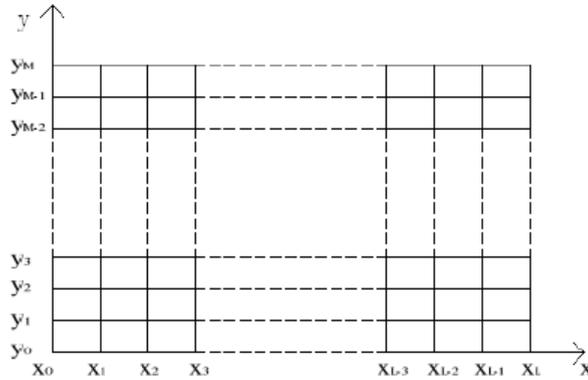


Figura 3-2 Mallado uniforme con L puntos en el eje x y M puntos en la dirección y .

Por otra parte, un mallado variable es aquel en el que alguno de los ejes (o ambos) no presenta líneas equiespaciadas. Esto es de gran utilidad si se desea o requiere una mayor precisión en alguna zona en concreto. Por ejemplo, en el caso de perfiles elípticos, es importante tener un mallado muy fino en los primeros puntos ya que el borde redondeado causa que las variables cambien mucho en esa zona. Este mallado variable puede conseguirse haciendo que los puntos del eje no sigan una ley lineal sino cuadrática, cúbica... Cuanto mayor sea el grado, mayor será la diferencia de espaciado entre los primeros puntos y los últimos. Una posible desventaja de este tipo de mallado es, que si el número de puntos no es el suficiente (o el grado del polinomio es muy grande), puede suceder que la precisión en los últimos puntos se vea muy limitada.

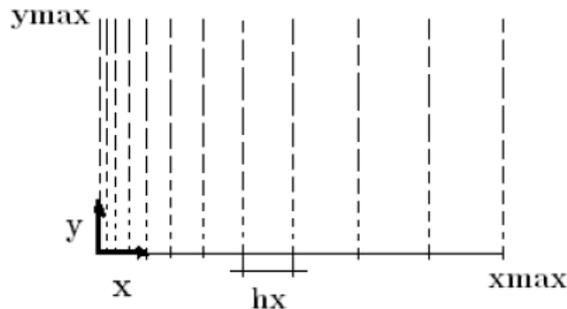


Figura 3-3 Mallado variable en x .

En este trabajo se utilizará en todo momento un mallado variable en el eje x siguiendo una ley cuadrática y mallado uniforme en el eje y.

3.1.2 Discretización de las derivadas

Una vez obtenida la malla, es necesario adaptar las ecuaciones, que son continuas en el plano, para que puedan ser resueltas. Para ello, se empieza por discretizar las derivadas. Para ello, se aproximan las derivadas como cocientes incrementales (suponiendo que el espaciado es muy pequeño, se puede obtener una buena aproximación).

En las ecuaciones aparecen derivadas en las dos direcciones posibles, x e y. Dependiendo de en qué dirección, se aproximarán de diferente manera. En el caso de las derivadas en dirección x, la derivada se aproximará con los puntos de la estación anterior. En el caso de la dirección y, se usarán derivadas centradas, es decir, la derivada en un punto se aproximará con el punto anterior y posterior en la misma estación. A modo de ejemplo, esta sería la derivada de la velocidad en (x_n, y_j) en dirección x (a la izquierda) y en dirección y (a la derecha):

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} = \frac{u_{n,j} - u_{n-1,j}}{x_n - x_{n-1}} \qquad \frac{\partial u_j}{\partial y} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}}$$

Las derivadas segundas se aproximarán de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\frac{u_{j+1} - u_j}{y_{j+1} - y_j} - \frac{u_j - u_{j-1}}{y_j - y_{j-1}}}{\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2}}$$

3.1.3 Resolución del sistema

Llegados a este punto, las ecuaciones están prácticamente listas para su resolución numérica en MATLAB. Antes es necesario linealizar las ecuaciones. Para ello, las variables que aparezcan multiplicadas por si mismas se aproximará la que no esté derivada al valor que tenía esa variable en la estación anterior.

Ahora que ya está todo preparado, ya se ha comentado que la resolución se hará estación a estación. Por tanto, lo primero es aproximar la primera estación para empezar con la resolución desde la segunda. Las condiciones iniciales que se usarán son las siguientes:

$$u(1:N_y) = u_e(1), \quad \mu(1:N_y) = 1, \quad v(1:N_y) = 0,$$

$$\theta(1) = \theta_p, \quad \theta(2: N_y) = \theta_e(1), \quad \rho(1: N_y) = \rho_e(1).$$

Posteriormente se resuelve la ecuación de cantidad de movimiento con un sistema del tipo $Au_n = r$. Para ello, se agrupan los términos que multipliquen a $u_{j-1}, u_j, y u_{j+1}$ (a, b y c respectivamente) con los que se forman la matriz diagonal A.

La matriz A será rellena de la forma:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{N_y} & b_{N_y} \end{pmatrix}$$

De esta forma, los vectores que conforman las diagonales de la matriz A son:

$$a_j = \frac{\rho_j^{n-1} v_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{1}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{\mu_j^{n-1}}{(y_{j+1} - y_{j-1})(y_j - y_{j-1})}$$

$$b_j = \frac{\rho_j^{n-1} u_j^{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{2\mu_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left(\frac{1}{(y_{j+1} - y_j)} - \frac{1}{(y_j - y_{j-1})} \right)$$

(3-13)

$$c_j = \frac{\rho_j^{n-1} v_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{1}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{\mu_j^{n-1}}{(y_{j+1} - y_{j-1})(y_j - y_{j-1})}$$

$$r_j = \rho_j^{n-1} \frac{(u_j^{n-1})^2}{x_n - x_{n-1}} - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p_e}{\partial x}$$

Con las condiciones de contorno:

- En la pared: $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$, $r_1 = 0$.
- En la corriente exterior: $a_{N_y} = 0$, $b_{N_y} = 1$, $c_{N_y} = 0$, $r_{N_y} = u_e^n$.

A continuación, se procede de la misma forma para resolver la ecuación de la

energía con un sistema $A_t \theta = r_t$:

$$\begin{aligned}
 a_{t_j} &= \frac{\rho_j^{n-1} v_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{k_j^{n-1}}{\text{Pr}} \frac{1}{(y_{j+1} - y_{j-1})(y_j - y_{j-1})} \\
 b_{t_j} &= \frac{\rho_j^{n-1} u_j^{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{2k_j^{n-1}}{\text{Pr}(y_{j+1} - y_{j-1})} \left(\frac{1}{(y_{j+1} - y_j)} - \frac{1}{(y_j - y_{j-1})} \right) \\
 c_{t_j} &= \frac{\rho_j^{n-1} v_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{\partial k}{\partial y} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{k_j^{n-1}}{\text{Pr} \cdot (y_{j+1} - y_{j-1})(y_j - y_{j-1})}
 \end{aligned} \tag{3-14}$$

$$r_{t_j} = \rho_j^{n-1} \frac{\theta_j^{n-1} u_j^{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + (\gamma - 1) M_\infty^2 \mu_j \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{y_{j+1} - y_{j-1}} \right)^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} u_j^{n-1} \frac{\partial p_e}{\partial x}$$

Con las condiciones de contorno:

- En la pared (temperatura impuesta):

$$a_{t_1} = 0, \quad b_{t_1} = 1, \quad c_{t_1} = 0, \quad r_{t_1} = \theta_p.$$

- En la pared (adiabática):

$$a_{t_1} = 0, \quad b_{t_1} = -\frac{1}{h_y(1)}, \quad c_{t_1} = \frac{1}{h_y(1)}, \quad r_{t_1} = 0.$$

- En la corriente exterior:

$$a_{N_y} = 0, \quad b_{N_y} = 1, \quad c_{N_y} = 0, \quad r_{N_y} = T_e.$$

Por último, para calcular el campo de velocidad y temperatura de la siguiente estación, se aproximan los valores de necesarios a partir de los datos de la estación calculada. Por otra parte, para actualizar la velocidad vertical (v), se integra la ecuación de conservación de la masa.

Nota: En esta sección se ha presentado la resolución de las ecuaciones en régimen

laminar. Para el régimen turbulento, la resolución es análoga solo cambiando el valor de la viscosidad, que ya se ha presentado como se procede para calcularlo.

3.3. Placa plana

Antes de comenzar con el estudio en perfiles, va a comprobarse la validez del método de resolución propuesto comparando los resultados obtenidos con los reportados en [1] para una placa plana a ángulo de ataque nulo. Para estar en concordancia con la bibliografía, se darán los valores

$$Pr = 0.75, \quad w = 1.5, \quad \sigma = 1, \quad \delta_1 = 110.$$

Si se impone la temperatura de la placa ($\frac{T_w}{T_e} = 0.25$), se tienen los siguientes campos de velocidad y temperatura respectivamente para diferentes números de Mach:

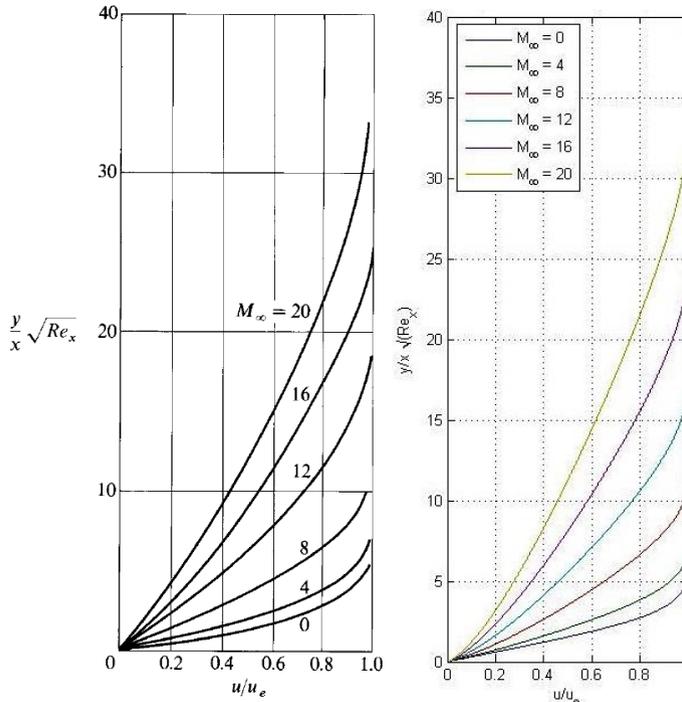


Figura 3-4 Perfil de velocidades en placa plana fría.

Como se puede observar, los perfiles obtenidos son idénticos a los reportados por la literatura. En ellos se ve la alta dependencia del grosor de la capa límite con el número de Mach. Si el número de Mach fuese lo suficientemente grande, se tendría que tener en cuenta la interacción de la capa límite con la corriente exterior (característica del régimen hipersónico que se presentó en el capítulo 1), lo que introduce una complicación que no se tendrá en cuenta en este trabajo.

Lo mismo ocurre con los perfiles de temperatura: perfiles idénticos a los de la literatura y una gran dependencia del grosor de la capa con el número de Mach como puede verse en la Figura 3-5.

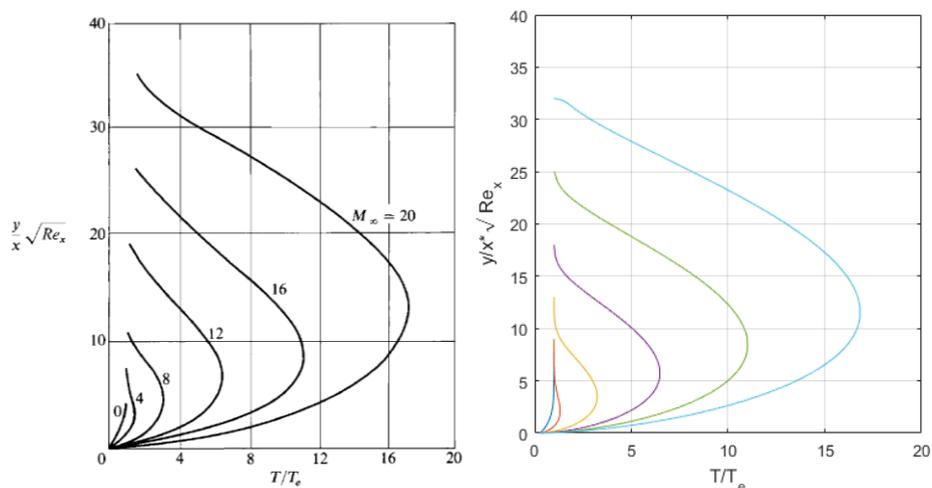


Figura 3-5 Perfiles de temperatura para placa plana con temperatura impuesta.

Además, se puede observar que la máxima temperatura alcanzada en la capa aumenta bastante con el número de Mach, pasando de 16 veces la temperatura exterior en el caso de Mach 20.

Como conclusión, puede decirse que existe una buena concordancia entre los perfiles de velocidad y temperatura calculados con el método de las diferencias finitas y la literatura.

Si se pasa al caso de placa adiabática (transferencia de calor nula) se obtienen los perfiles de velocidad de la Figura 3-6. La concordancia sigue siendo buena, aunque

algo más pobre que en el caso de temperatura impuesta. En comparación es fácil observar que el grosor de la capa es ahora aproximadamente el doble que anteriormente.

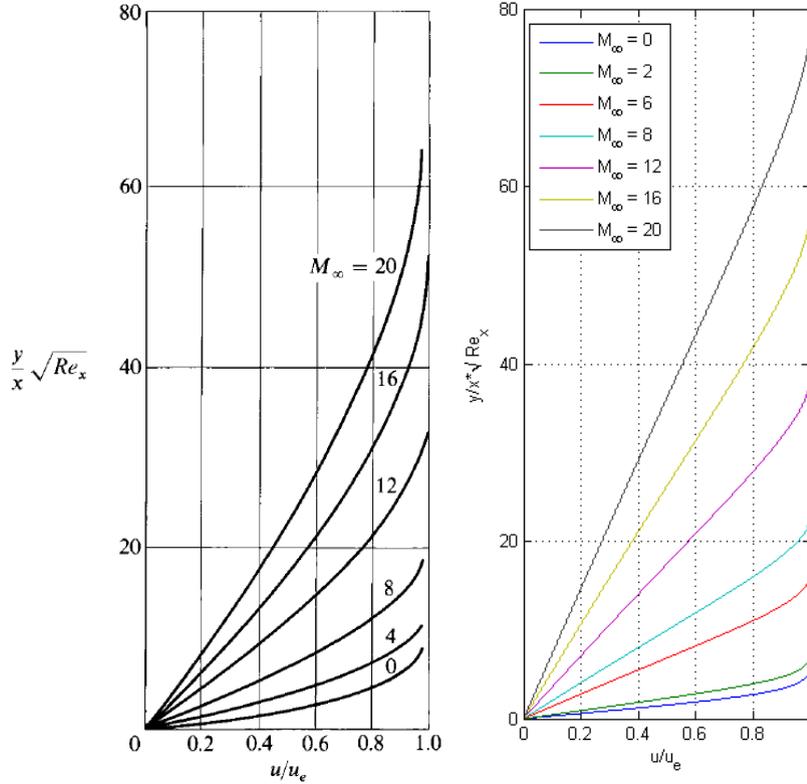


Figura 3-6 Perfil de velocidades en placa plana adiabática.

En el campo de temperaturas, representado en la Figura 3-7, vuelve a observarse una buena concordancia. Obsérvese que, en la placa, para que no exista transferencia de calor con el aire es necesario que la temperatura sea muy elevada. Esto sugiere que en aplicaciones reales serán necesarios métodos de refrigeración en la superficie para que esta aguante a altos números de Mach.

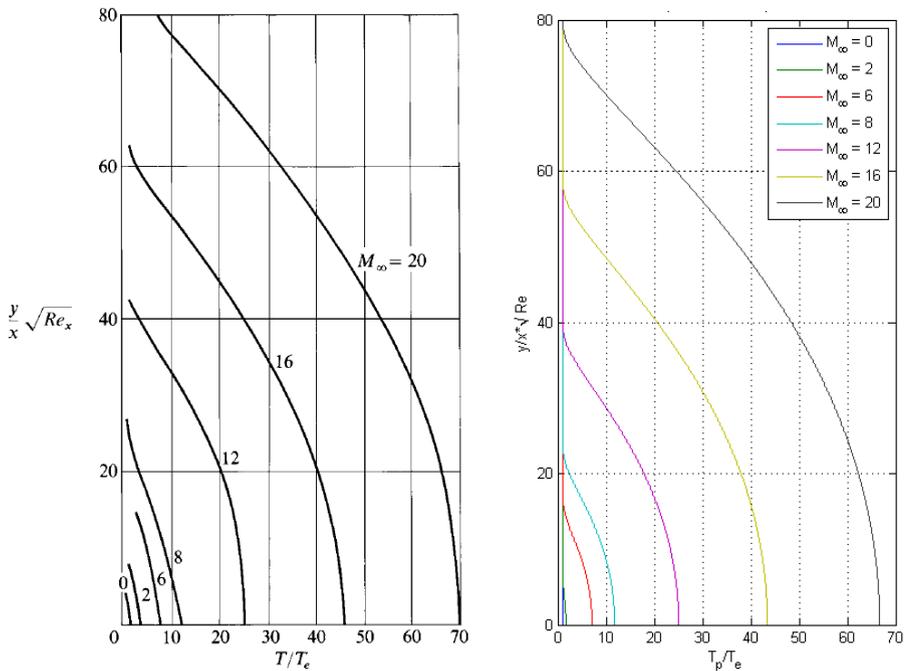


Figura 3-7 Perfil de temperaturas en placa plana adiabática.

Por último, para confirmar la veracidad de los datos puede compararse el coeficiente de resistencia de fricción obtenido con el reportado por Van Driest en [9].

3.4. Resistencia de fricción

La resistencia de fricción es la consecuencia de la condición de no deslizamiento de la pared. Según la ley de Newton, el tensor de esfuerzos en la pared es proporcional a la viscosidad y el gradiente de velocidad en la pared como se indicaba en la ecuación (1-15). A partir del mismo, el coeficiente de fricción en cada punto se tiene que es

$$C_f = \frac{2}{\sqrt{Re}} \mu \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (3-15)$$

Para obtener el coeficiente de resistencia de fricción basta con integrar el coeficiente fricción multiplicado por el vector tangente a la superficie proyectado en el eje X a lo largo de la superficie, teniéndose que

$$C_{Df} = \int_0^{\xi_f} C_f t_x d\xi \quad (3-16)$$

Al igual que se ha hecho con los perfiles de velocidades y temperatura, es posible comparar los resultados de resistencia en la placa plana. En la Figura 3-8 se observa los resultados presentados en [9].

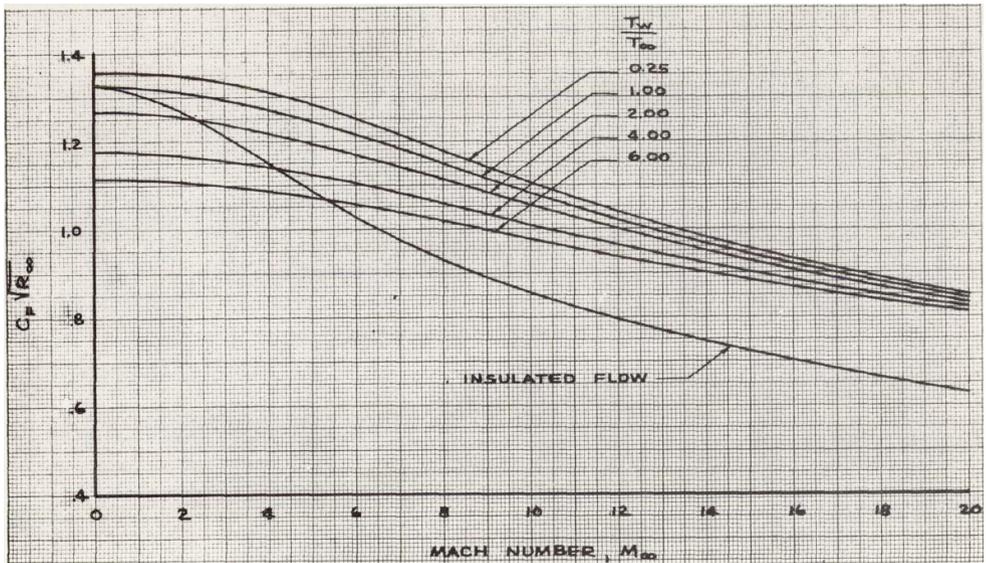


Figura 3-8 Coeficiente de resistencia de fricción sobre placa plana laminar de [9]

Por su parte, en la Figura 3-9 se tienen los resultados obtenidos por MATLAB. Existe una buena concordancia en la mayoría de los casos. Se observa que la tendencia de la resistencia es a bajar cuando el número de Mach crece, así como cuanto mayor sea la temperatura de la placa en relación con la exterior.

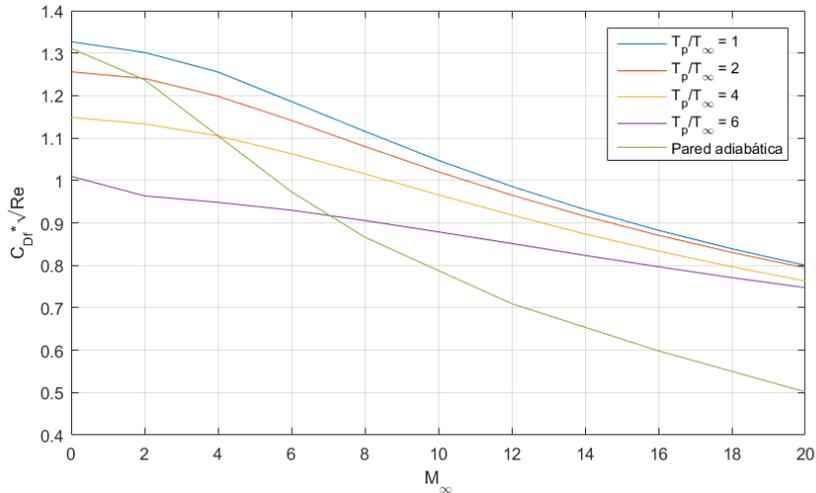


Figura 3-9 Coeficiente de resistencia de fricción en una placa plana para diferentes relaciones de temperaturas.

Sin embargo, los perfiles objeto de estudio no presentan la misma evolución que la placa plana. En el caso de una elipse se obtiene la Figura 3-10. En ella se observa que, aunque existe una variación con el número de Mach, esta es muy pequeña (se ve aumentada por la escala de la representación). Así mismo se observa que la resistencia disminuye cuanto más roma es la elipse (σ crece). Esto se debe a que el gradiente de presiones originado por la expansión aumenta con la curvatura del cuerpo, provocando que, a bajas relaciones de aspecto, donde el cambio de curvatura es más acusado, el grosor de la capa disminuya y aumente el gradiente de velocidad en la pared.

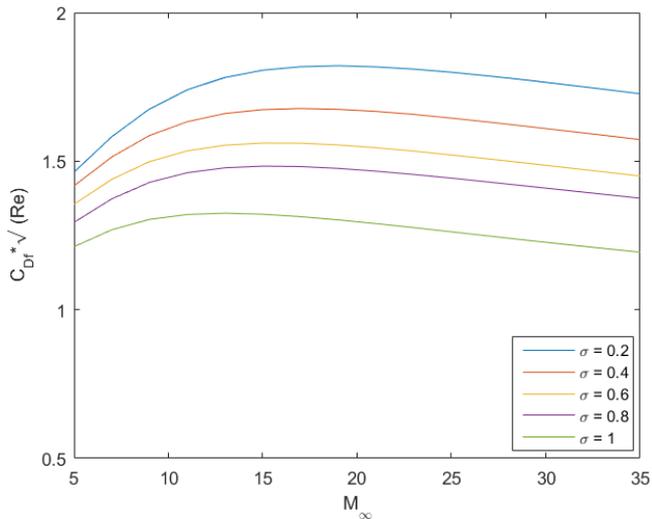


Figura 3-10 Coeficiente de resistencia de fricción en perfiles elípticos

A bajos números de Mach se observa un crecimiento de la resistencia con M_{∞} . Esto se debe a que el gradiente favorable de presiones aumenta con el Mach, ocasionando que el gradiente de velocidad sea mayor en la pared. Esto puede comprobarse en la Figura 3-11, donde se han representado la evolución del perfil de velocidades a dos números de Mach distintos.

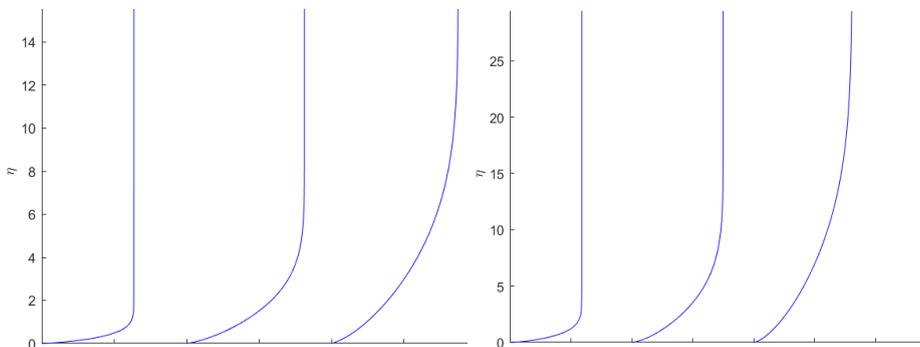


Figura 3-11 Evolución de perfil de velocidades a Mach 5 (izqda) y 25 (drcha).

La disminución de la resistencia a altos números de Mach está causada por el aumento del grosor de la capa, que conveleva una disminución del gradiente de velocidad. Este aumento del grosor está asociado al aumento del calor generado por fricción. Esto puede verse en la Figura 3-12 donde se ha representado la evolución de la capa límite térmica.

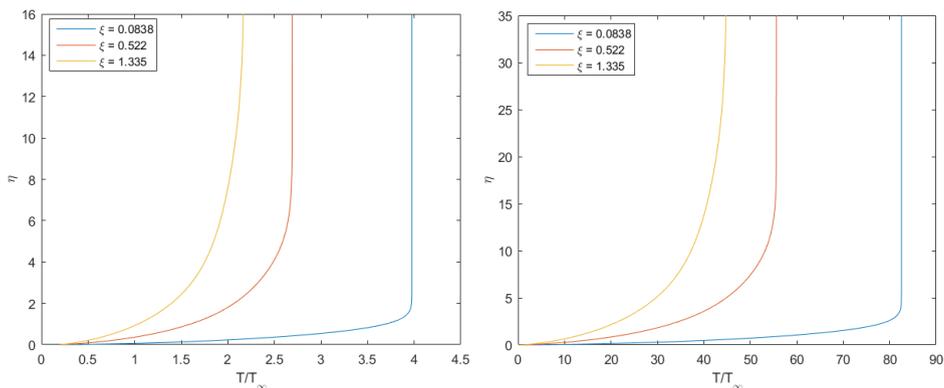


Figura 3-12 Evolución de perfil de temperaturas a Mach 5 (izqda) y 25 (drcha).

En ella se ve que, aunque a simple vista ambas parecen iguales, existe un factor de escala muy importante debido al cambio de grosor y a la temperatura que se alcanza en la capa. Esto provoca que a altos números de Mach se tenga un mayor gradiente de temperaturas en la pared.

Por su parte, los valores de la resistencia de fricción perfiles parabólicos vienen recogidos en la Figura 3-13. Cuantitativamente, se observa que en los perfiles parabólicos la resistencia es menor también en este caso (en la sección 2 se vió un comportamiento similar para la resistencia de presión). Adicionalmente, la dependencia con el Mach es muy similar, presentando el segundo caso su máximo a menores números de Mach.

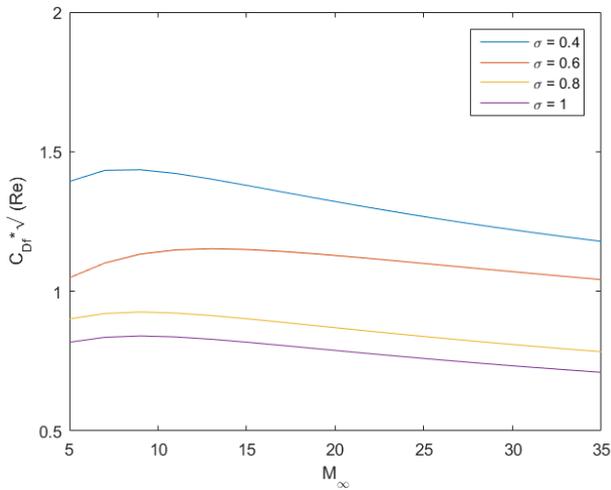


Figura 3-13 Coeficiente de resistencia de fricción en perfiles parabólicos.

La justificación de estos resultados no difiere de la dada para los perfiles elípticos.

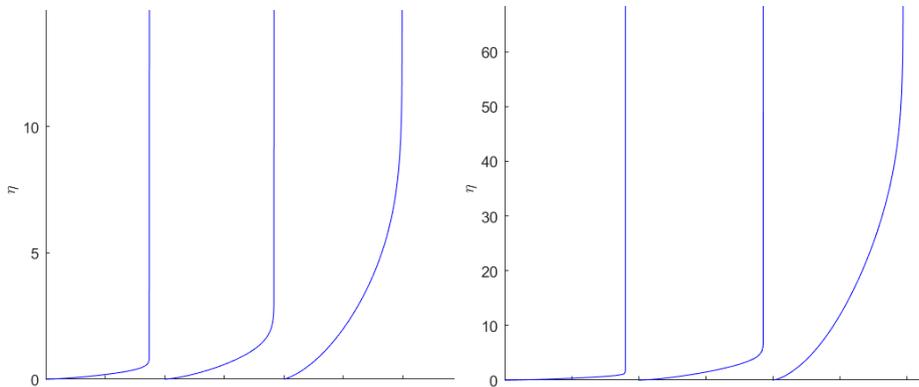


Figura 3-14 Evolución de perfil de velocidades a Mach 5 (izqda) y 25 (drcha)

En la Figura 3-14 y la Figura 3-15 se observa la evolución tanto del perfil de velocidades como del de temperaturas para dos números de Mach en perfiles

parabólicos con los que poder justificar los resultados obtenidos.

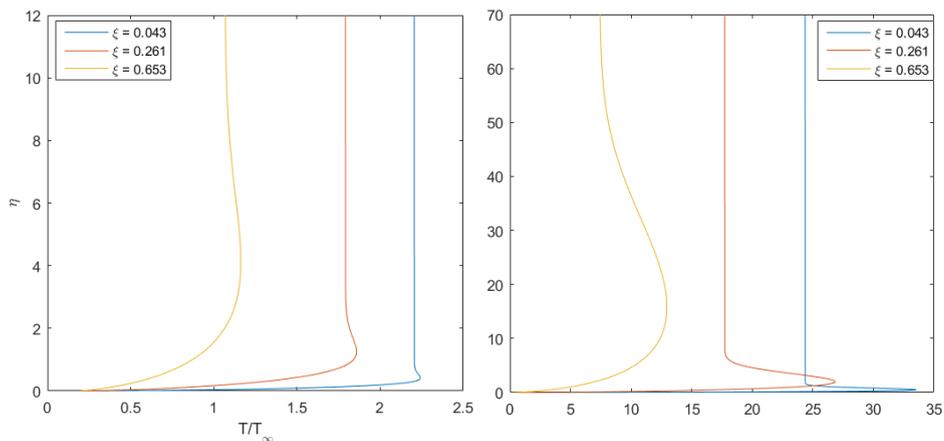


Figura 3-15 Evolución de perfil de temperaturas a Mach 5 (izqda) y 25 (drcha).

Por último, es interesante conocer el valor de esta resistencia en el caso de que la pared sea adiabática, es decir, no exista transferencia de calor. Este caso sería equivalente a mantener el vuelo el tiempo suficiente para que se llegase al equilibrio térmico en la superficie. En este caso, el coeficiente de fricción obtenido para perfiles elípticos es el que se observa en la Figura 3-16.

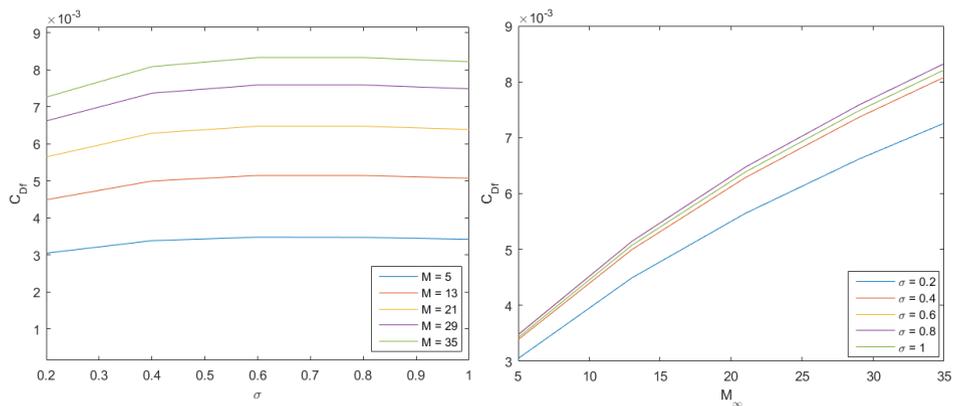


Figura 3-16 Coeficiente de resistencia de fricción en perfiles elípticos de pared adiabática.

En ella se observa que la dependencia con la relación de aspecto es creciente, aunque este crecimiento disminuye mucho llegando a ser prácticamente constante. Por su parte, el aumento de Mach conlleva el crecimiento de la resistencia también.

Por su parte, el caso de los perfiles parabólicos viene representado en la Figura 3-17. En ella se ve que la dependencia con el número de Mach sigue siendo creciente. Sin embargo, existen dos tramos en la dependencia con σ . Este cambio de tendencia de creciente a decreciente se debe al cambio físico que sufre el problema: por encima de $\sigma = 0.4$ la onda deja de ser oblicua separándose en la parte frontal (razón por la que el método de ondas de expansión deja de ser útil) y la evolución del aire se ve modificada.

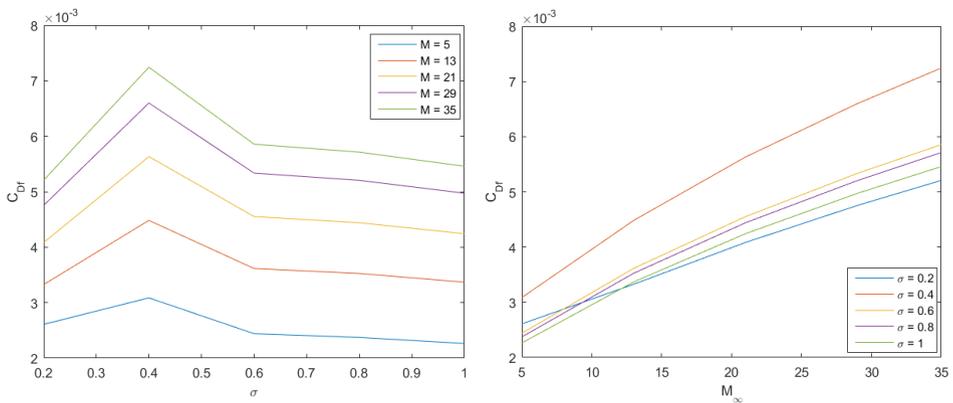


Figura 3-17 Coeficiente de resistencia de fricción para perfiles parabólicos de pared adiabática.

A la vista de los resultados obtenidos, y comparando con los valores de la resistencia de presión, se observa que, para cuerpos muy esbeltos, ambos coeficientes tienen valores pequeños y del mismo orden de magnitud. Sin embargo, para cuerpos romos, la resistencia de fricción apenas sufre cambios mientras que la de presión se vuelve mucho más importante por llegar a tener orden unidad. Por tanto, las resistencias serán equiparables solo en el caso de que el cuerpo sea esbelto.

3.5. Transferencia de calor

La transferencia de calor existente entre el aire y un cuerpo es una de las magnitudes críticas en el régimen hipersónico. Es bien sabido que en una de las aplicaciones actuales más comunes en la que se alcanza velocidades hipersónicas es en la reentrada de vehículos espaciales y que las altas temperaturas han sido causa de más de un accidente. Es por eso que se hace especial atención a este apartado dentro de la sección de capa límite.

Existen varios mecanismos por los que el calor puede transferirse del aire al cuerpo o viceversa: conducción, convección y radiación. De los tres, en este trabajo, se va a despreciar el calor transferido por radiación por simplicidad del modelo.

El calor total transferido por unidad de tiempo y envergadura (el transferido en un perfil con espesor tendiendo a 0) puede calcularse integrando a lo largo de la superficie el calor transferido en cada punto. De esta forma, en variables físicas, se tiene:

$$\dot{Q} = \int_0^{x_f} \left[-K \frac{\partial T}{\partial y} dx \right] \quad (3-17)$$

En la ecuación, que puede adimensionalizarse de la misma forma que se hizo en la sección 3.1, x corresponde con la usada para el cálculo de la capa límite.

Además de presentar el calor transferido por los cuerpos y la dependencia con el número de Mach y la relación de aspecto, también es interesante conocer la importancia del calor transferido mediante convección frente al transferido mediante conducción. Esto se consigue a través del número de Nusselt, que se define como el coeficiente de película (que aparece en el calor convectivo) partido por la conductividad térmica por unidad de longitud (K/c).

$$Nu = \frac{h}{k_\infty / c} \quad (3-18)$$

Para calcularlo, se supone que el calor calculado anteriormente es equivalente al de la ecuación (3-19), donde c corresponde a la cuerda del perfil. Igualando ambas, se puede obtener el número de Nusselt. El calor de convección es

$$\dot{Q} = h \cdot c \cdot (T_p - T_\infty) . \quad (3-19)$$

El calor, en variables adimensionales viene expresado por

$$\dot{Q} = k_{\infty} T_{\infty} \sqrt{\text{Re}} \int_0^{\xi_f} -k \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\xi . \quad (3-20)$$

Si esto lo igualamos a (3-19), se tiene la igualdad

$$k_{\infty} T_{\infty} \sqrt{\text{Re}} \int_0^{\xi_f} -k \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\xi = h \cdot c \cdot (T_p - T_{\infty}) .$$

Por último, manipulando la igualdad se llega a la expresión del número de Nusselt deseada:

$$Nu = \frac{T_{\infty}}{(T_p - T_{\infty})} \sqrt{\text{Re}} \int_0^{\xi_f} -k \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\xi \quad (3-21)$$

La veracidad de los resultados que vuelca el programa puede comprobarse mediante la literatura. En ella pueden encontrarse dos casos: el de un cilindro y el de una placa plana con borde redondeado. De ahí que se estudiase también la corriente exterior sobre ellos.

En el caso de un cilindro, los resultados reportados por la literatura y por el programa de MATLAB están plasmados en la Figura 3-18. En ellas se ve que se obtienen resultados muy acertados del programa. Lo único que difiere es que aparece una pequeña dependencia con el Mach y un pico correspondiente al cambio de método usado para calcular la corriente exterior.

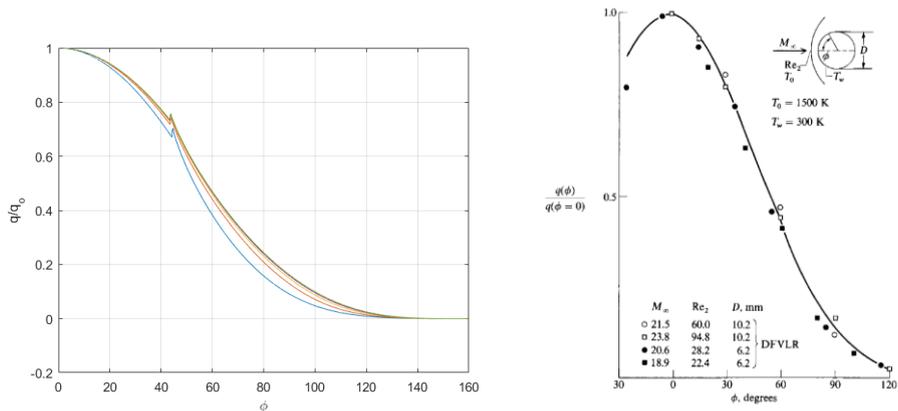


Figura 3-18 Distribución de transferencia de calor en cilindro (a la izquierda resultados numéricos, a la derecha resultados de la literatura).

En el caso de la placa con borde de ataque redondeado (representado en la figura 3-19) se obtienen los mismos resultados cualitativos: una muy buena concordancia a salvo del pico causado por el cambio de ecuaciones. Además, se ha comprobado que para distintas temperaturas en la pared la distribución es la misma.

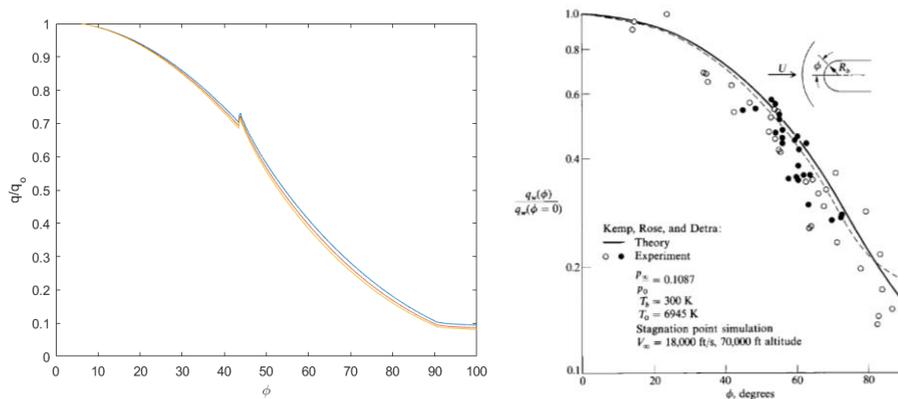


Figura 3-19 Distribución de transferencia de calor en una placa plana con borde redondeado (a la izqda. resultados numéricos, a la drcha. resultados de la literatura).

Para cada uno de los perfiles que han sido objeto de estudio van a presentarse tres resultados diferentes como función de los distintos parámetros. En primer lugar, se presentará como se distribuye la transferencia de calor a lo largo del cuerpo. Posteriormente se presentará el valor de la transferencia de calor en el punto de remanso y por último se estudiará la dependencia del número de Nusselt con los parámetros.

Perfiles elípticos

En el caso de una elipse se tiene que la distribución de la transferencia de calor es la representada en la Figura 3-20. En ella se hace patente la importancia de los primeros puntos del perfil, los más cercanos al punto de remanso, en la transferencia de calor.

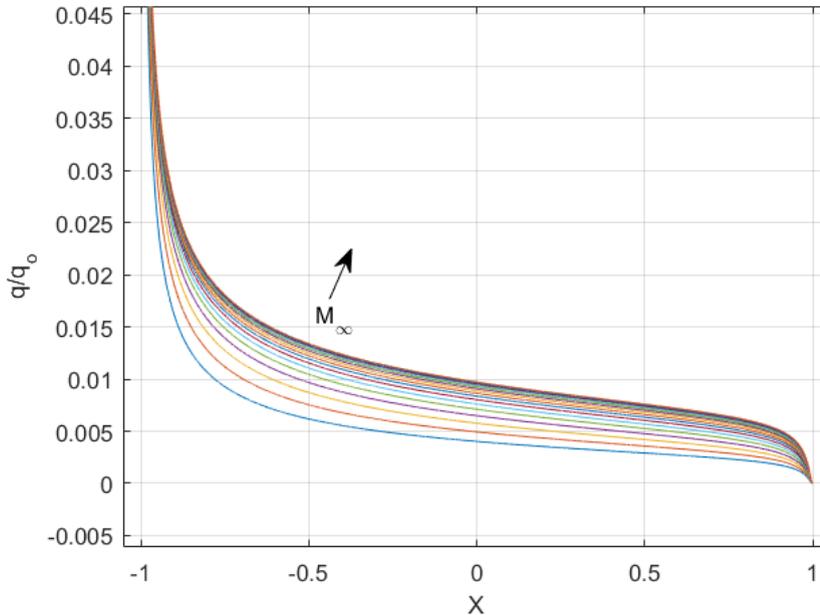


Figura 3-20 Distribución de transferencia de calor para varios números de Mach a lo largo de un perfil elíptico con $\sigma=0.2$

En la figura se observa que existe una variación con el Mach, aunque es muy pequeña. Esta tendencia de crecimiento con M_∞ se debe al calentamiento del aire por la fricción en la pared.

Si ahora se representa la distribución fijando el número de Mach, puede verse la influencia de la relación de aspecto. En la Figura 3-21 se observa que cuanto más romo es el cuerpo, el punto de remanso cobra menos importancia y el valor de la transferencia de calor total no se concentra principalmente en el morro. Además, las gráficas presentan un pico. Este se corresponde con el paso de subsónico a supersónico, lo que supone un cambio de las ecuaciones para el cálculo de las magnitudes (se recuerda que se está utilizando el método híbrido).

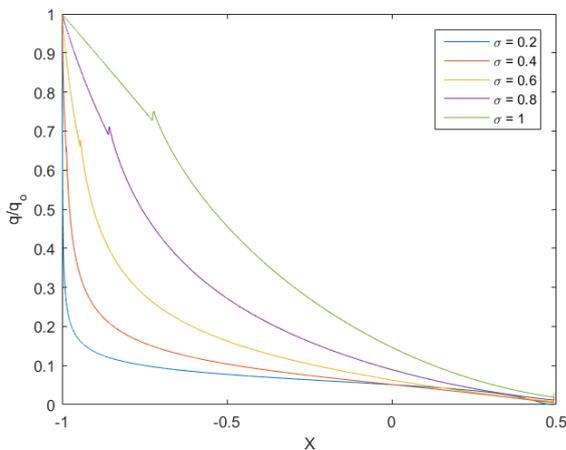


Figura 3-21 Distribución de transferencia de calor para diferentes perfiles elípticos a Mach 20.

La transferencia de calor en el punto de remanso también depende de los parámetros. Esta dependencia puede verse en la Figura 3-22, donde se observa que, como era predecible, su valor aumenta con el número de Mach, lo que indica que la transferencia total de calor también crecerá. Por otra parte, cuanto más romo es el cuerpo, se da la situación de que la transferencia de calor en el punto de remanso es menor. Esto indica que este punto estará más aliviado térmicamente.

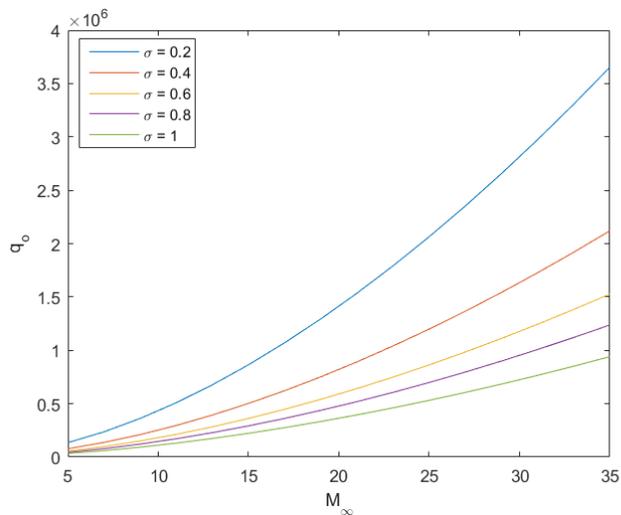


Figura 3-22 Transferencia de calor en el punto de remanso.

Por último, representado la transferencia total de calor en el cuerpo (Figura 3-23), se observa que, debido a la menor diferencia entre el punto de remanso y el resto de la superficie, y al aumento de superficie que lleva consigo el aumento de σ , la transferencia total de calor no solo aumenta con el número de Mach sino también con la relación de aspecto.

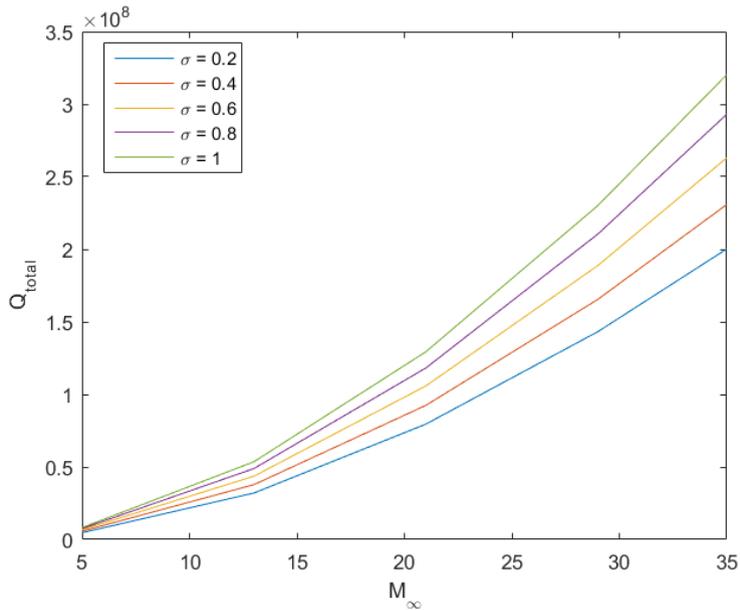


Figura 3-23 Transferencia de calor total para perfiles elípticos a diferentes números de Mach y relaciones de aspecto.

Adicionalmente, puede representarse la importancia del calor transferido por convección frente al transferido por conducción a través del número de Nusselt. En la Figura 3-24 se observa como aumenta con el número de Mach y con la relación de aspecto. Esto sugiere que la transferencia de calor por convección cobra más importancia en los cuerpos romos que en los esbeltos.

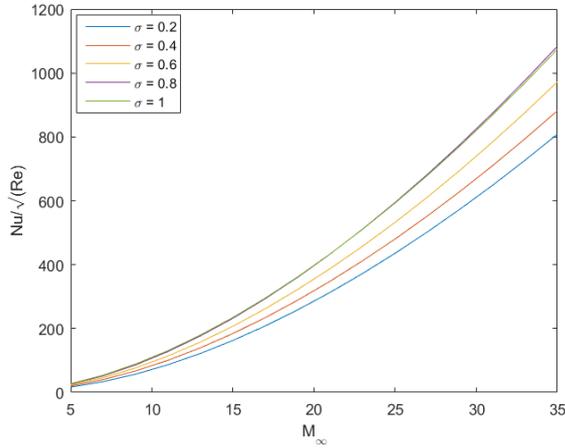


Figura 3-24 Variación del número de Nusselt en perfiles elípticos con σ y Mach.

Perfiles parabólicos

En el caso de los perfiles parabólicos, la tendencia de los parámetros no varía. En la Figura 3-25 y la Figura 3-26 está representada la distribución de la transferencia de calor a lo largo de la superficie frente a distintos parámetros.

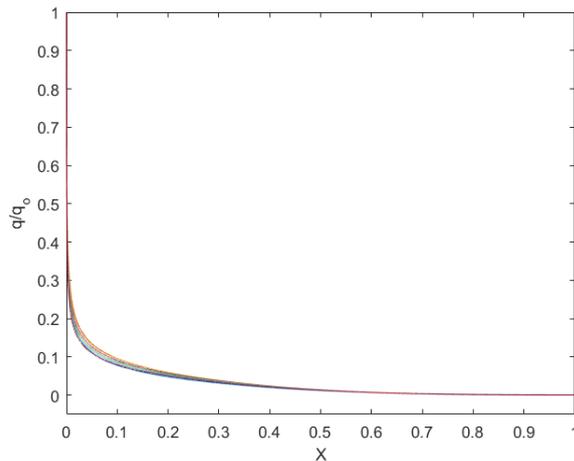


Figura 3-25 Distribución de calor en la superficie para varios números de Mach.

Al igual que en el caso de perfiles elípticos, la dependencia con el número de Mach es muy baja. Sin embargo, mayores relaciones de aspecto llevan consigo un mayor reparto de donde se procede la transferencia de calor.

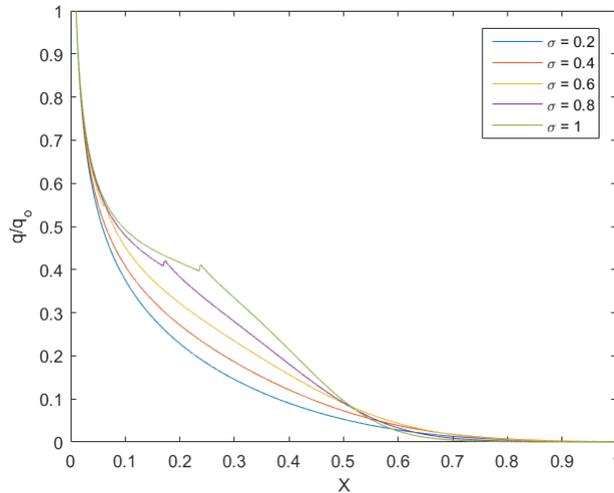


Figura 3-26 Distribución de transferencia de calor para varias relaciones de aspecto.

Para poner en escala los resultados obtenidos, se presenta en la Figura 3-27 la transferencia de calor en las inmediaciones del punto de remanso.

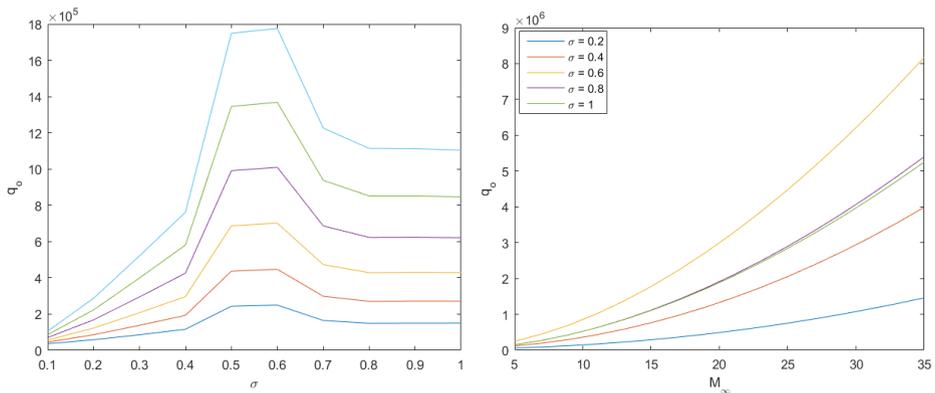


Figura 3-27 Transferencia de calor en las inmediaciones del punto de remanso para perfiles elípticos

Al igual que con el coeficiente de resistencia de fricción, la dependencia con el Mach es creciente mientras que la dependencia con la relación de aspecto es creciente hasta el cambio de físico del problema, donde comienza a decrecer para llegar a ser prácticamente constante.

Por otra parte, la transferencia de calor total está representada en la Figura 3-28. Puede observarse que, a parte de presentar la misma dependencia con los parámetros que en el caso anterior, su valor es considerablemente menor.

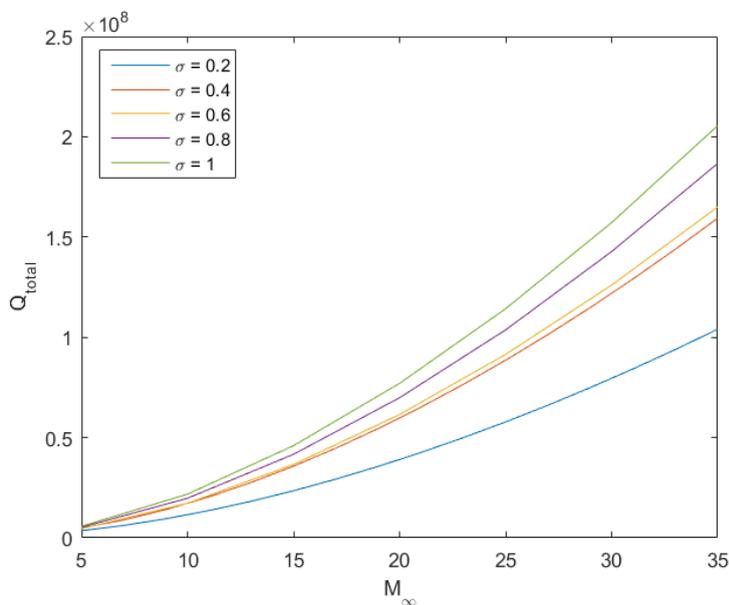


Figura 3-28 Transferencia total de calor en perfiles parabólicos

Por último, resta conocer la importancia de la transferencia de calor por convección frente a la generada por la fricción. Esto viene representado en la Figura 3-29 a través del número de Nusselt.

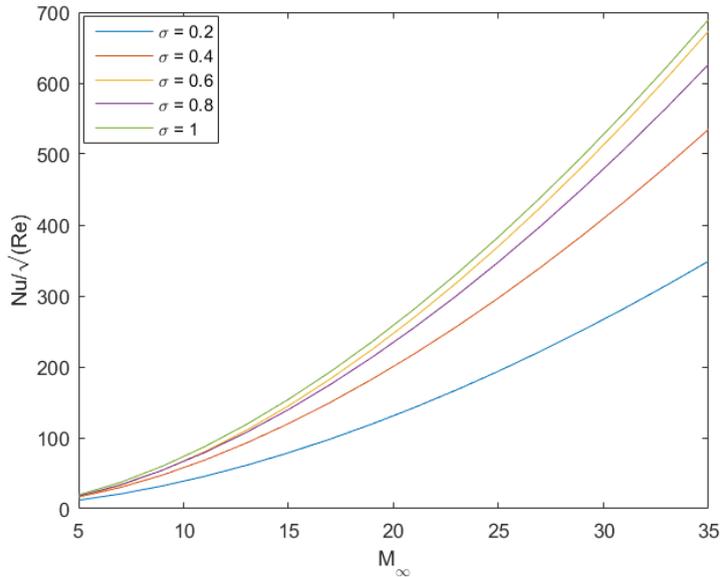


Figura 3-29 Dependencia del número de Nusselt con los diferentes parámetros.

La dependencia con los parámetros es muy similar a la obtenida para los perfiles elípticos. Sin embargo, su valor es menor. Esto indica que en perfiles parabólicos la transferencia por conducción es más importante, debido a que cerca del borde ataque la pendiente difiere mucho de los perfiles elípticos, y por consiguiente la corriente exterior y la capa límite.

Resulta interesante, además de estudiar la transferencia de calor, estudiar a que temperatura tienden los diferentes puntos del perfil en el límite en el que se alcanza el equilibrio térmico entre el aire y el perfil. Esta situación es equivalente a considerar que la pared es adiabática.

En perfiles elípticos se tienen que la temperatura en la pared decrece a lo largo del perfil teniendo un gran crecimiento con el número de Mach como puede verse en la Figura 3-30.

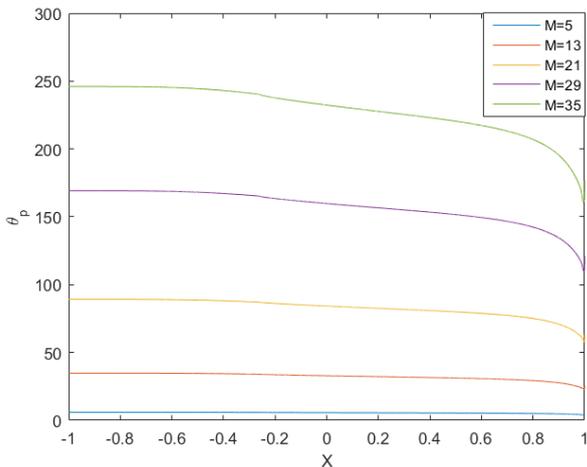


Figura 3-30 Temperatura en perfil elíptico ($\sigma=0.6$) adiabático.

En la Figura 3-31 se observa cómo evoluciona la temperatura para un mismo número de Mach y diferentes relaciones de aspecto. La razón por la que la temperatura en la parte frontal y la final no dependen de la relación de aspecto es que los métodos usados dependen de la pendiente de la superficie y en esas zonas la pendiente depende poco de la relación de aspecto.

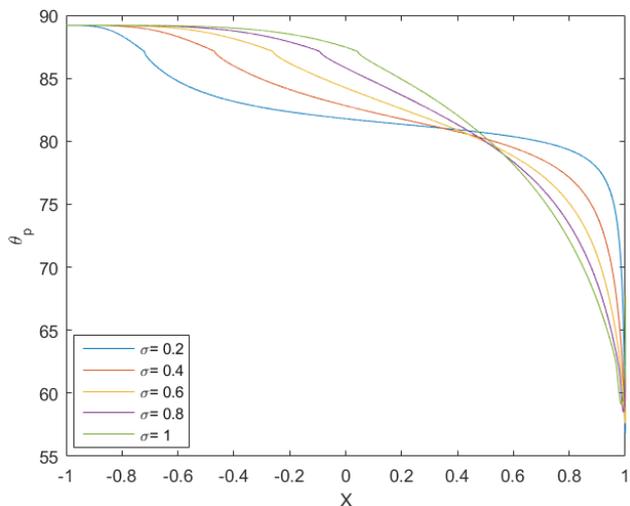


Figura 3-31 Temperatura en perfiles elípticos ($M=21$) adiabático.

Los resultados para perfiles parabólicos están recogidos en las figuras 3-32 y 3-33. En ellas puede verse que no existe gran diferencia con el caso de perfiles elípticos en cuanto a la evolución y los valores numéricos.

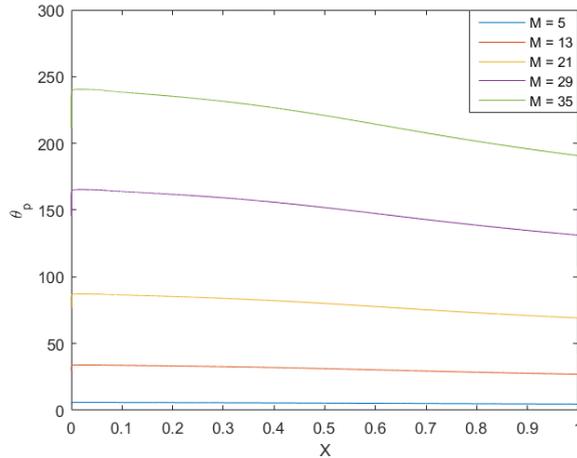


Figura 3-32 Temperatura en la pared en perfil parabólico ($\sigma=0.6$) para diferentes números de Mach

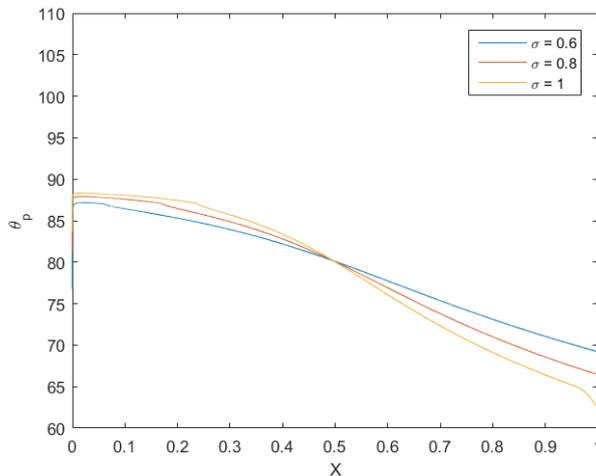


Figura 3-33 Temperatura en la pared de difernetes perfiles parabólicos ($M_{\infty}=21$).

Cabe recordar que de este estudio que se ha hecho sólo se debe tomar la evolución de los parámetros como válida debido a las simplificaciones hechas en la resolución del problema.

4 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha querido hacer un primer estudio del régimen hipersónico con vistas a servir de base y dar pie a su desarrollo en trabajos posteriores.

Para estudiar la corriente exterior no viscosa se ha simplificado el problema usando métodos basados en la geometría del cuerpo en lugar del sistema de ecuaciones completo. Además, se ha omitido la posible interacción entre corriente exterior y la capa límite. De esta forma, el objetivo del estudio de la corriente exterior se reduce al de calcular la resistencia de presión, así como la evolución de las diferentes magnitudes y su dependencia con la esbeltez y el Mach. Además, los resultados han sido usados como condiciones de contorno para el estudio de la capa límite.

Además, se ha propuesto un método de resolución alternativo hasta ahora desconocido en la literatura, bautizado como método híbrido, que permití usar el método de ondas de expansión fuera de sus limitaciones originales (borde de ataque redondeado y esbeltez mínima necesaria) con el objetivo de usar un método con mayor fundamento físico.

Por último, se ha hecho un estudio de la capa límite mecánica y térmica, que están acopladas. Haciendo uso de métodos sencillos basados en el de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes se han conseguido resultados con la precisión de métodos más complejos basados en la autosemejanza usados en la literatura. Efectos de alta temperatura como las reacciones químicas o la radiación han quedado fuera del estudio, estando los programas preparados para la implementación de las ecuaciones necesarias para que sean tenidos en cuenta.

Dentro de la capa límite se han hecho estudios de la resistencia de fricción y la transferencia de calor. Los resultados de ambos deben ser interpretados de forma cualitativa y no cuantitativa debido a las simplificaciones hechas.

ANEXOS

A Códigos de Matlab

A.1 Método de Newton mejorado

```
function [Pe_Pinf,C_P]= Newton_mej_v2(Minf,gamma,N,theta)
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% C_Pmax %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
C_Pmax =
2/(gamma*Minf^2)*(((gamma+1)^2*Minf^2/(4*gamma*Minf^2-
2*(gamma-1)))^(gamma/(gamma-1))*(1-
gamma+2*gamma*Minf^2)/(gamma+1))-1);
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% C_P %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
for j=1:N
    if theta(j)>=0
        C_P(j) = C_Pmax*sin(theta(j)).^2;
        m = j;
    else
        C_P(j) = C_P(m);
    end
end
%
Pe_Pinf = C_P*0.5*gamma*Minf^2+1;
%
End
```

A.2 Método de Ondas de choque

```

function
[UE_Uinf, Pe_Pinf, Te_Tinf, Roe_Roinf]=ShockExp(Minf,Nx,model
o_aire,theta)
gam=1.4;
M=linspace(1,50,1000);
aux=sqrt(M.^2-1); aux1=sqrt((gam+1)/(gam-1));
f=aux1*atan(aux/aux1)-atan(aux);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%% Condiciones exteriores %%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if modelo_aire==0 %Gas ideal
gamma    = 1.4;
Rg       = 287;
cp       = 1004;
elseif modelo_aire==1 %Alta temperatura
    %completar
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Onda de Choque (Cond. Ini.) %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

teta=theta(1);
par=[Minf teta];

TOLa=0; TOLr=1e-11; maxit=50; x0=1.2*teta;
[beta,iflag,iter,normf]=newtoncompleto(@ThetaBetaMach,x0,T
OLr,TOLa,maxit,par); %%Resuelve la ecuación que relaciona
theta y beta
if iflag==1
    iflag=1
end

[U2_U1,Mn2,P2_Pinf,T2_Tinf,Ro2_Roinf]=onda_choque(Minf,bet
a,modelo_aire);

```

```

M2=Mn2/sin(beta-teta);
%Necesario calcular Mach y Presion tras la onda
Mx(1)=M2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Evolución del Mach %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=2:Nx,
    M1=Mx(i-1);
    f1=interp1(M,f,M1);
    dtheta=theta(i-1)-theta(i);
    f2=f1+dtheta;
    M2=interp1(f,M,f2);
    Mx(i)=M2;
end
% plot(x,Mx)

Pe_Pinf(1)=P2_Pinf;
Pe_Pinf(2:Nx)=Pe_Pinf(1)*(1+0.2*Mx(1)^2)^(gamma/(gamma-1))./(1+0.2*Mx(2:Nx).^2)^(gamma/(gamma-1));

m=1;
while m<=Nx
    if Pe_Pinf(m)<0.00001
        Pe_Pinf(m)=0;
    end
    m=m+1;
end

Te_Tinf=T2_Tinf*(1+(gamma-1)/2*Mx(1).^2)./(1+(gamma-1)/2*Mx.^2);
%
Roe_Roinf= Pe_Pinf./Te_Tinf;
%
Ue_Uinf=Mx.*sqrt(Te_Tinf)/Minf;
%
end

```

A.3 Método híbrido

```

function
[UE_Uinf,Pe_Pinf,Te_Tinf,Roe_Roinf]=Corriente_ShockExp_New
ton(Minf,N,modelo_aire,theta)
%
if modelo_aire==0 %Gas ideal
gamma    = 1.4;
Rg       = 287;
cp       = 1004;
elseif modelo_aire==1 %Alta temperatura
%completar
end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%CONDICIONES TRAS ONDA %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
beta=pi/2; %Blunt nose
%
%[U2_U1,Mn2,P2_Pinf,T2_Tinf,Ro2_Roinf]=onda_choque(Minf,be
ta,modelo_aire);
%Velocidad
U2_U1 = (1-2*(Minf^2.*sin(beta).^2-
1)/((gamma+1)*Minf^2));
%
Mn2 = sqrt((1+((gamma-
1)/2)*Minf^2.*sin(beta).^2)./(gamma*Minf^2.*sin(beta).^2-
(gamma-1)/2)); %%%Normal a la onda de choque
%Presión
%
P2_Pinf = (1+2*gamma*(Minf^2.*sin(beta).^2-
1)/(gamma+1));
%
%Densidad
%
Ro2_Roinf = (gamma+1)*Minf^2.*sin(beta).^2./((gamma-
1)*Minf^2.*sin(beta).^2+2);
%
%Temperatura
%
T2_Tinf=P2_Pinf./Ro2_Roinf;

```



```

%%% Prandtl Mayer %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
M=linspace(1,50,1000);
aux=sqrt(M.^2-1); aux1=sqrt((gamma+1)/(gamma-1));
f=aux1*atan(aux/aux1)-atan(aux);
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Evolución del Mach %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=(1+1):N,
    M1=Me(i-1);
    f1=interp1(M,f,M1);
    dtheta=theta(i-1)-theta(i);
    f2=f1+dtheta;
    M2=interp1(f,M,f2);
    Me(i)=M2;
    Pe_Pinf(i)=Pe_Pinf(i-1)*(1+0.2*Me(i)-
1)^2)^(gamma/(gamma-1))./(1+0.2*Me(i).^2)^(gamma/(gamma-
1));
end

for i=1:N
    if Pe_Pinf(i)<0.00001
        Pe_Pinf(i:N)=0;
        Me(i:N)=Me(i-1);
    end
end
Pe_Pinf(N)=0;

%Resto de corriente exterior
%
Te_Tinf=T0_Tinf./(1+(gamma-1)/2*Me.^2);
%
Roe_Roinf= Pe_Pinf./Te_Tinf;
%
Ue_Uinf=Me.*sqrt(Te_Tinf)/Minf;

end

```

A.4 Capa límite

```

close all; clear all; clc;
%
Re=5*10^5;
%Pr=0.71; %Aire
gamma=1.4;
Minf=M_inf(zz);
Pr=0.75; omega=1.5; sigma=1;
Tp=1500; Tinf=1500; tp=Tp/Tinf;
S1=110; CSuth=S1/Tinf;
modelo_aire=0;
%
%Geometría ellipse
sigma_ellipse=0.1*(2*p);
%
%Ny=20000;
%Ny=30000;
ymin=0; %ymax=200;
Ny=50000;
ymax=550;
%ymax=150;
yv(1:Ny)=(linspace(ymin,ymax,Ny));
Dy=sparse(Ny,Ny);
Dy2=sparse(Ny,Ny);
for j=2:(Ny-1),
    hym1=yv(j)-yv(j-1); hyp1=yv(j+1)-yv(j); hypm1=yv(j+1)-
yv(j-1);
    Dy(j,j-1)=-1/hypm1; Dy(j,j+1)=1/hypm1;
    Dy2(j,j-1)=2/hym1/hypm1; Dy2(j,j+1)=2/hyp1/hypm1;
Dy2(j,j)=- (Dy2(j,j-1)+Dy2(j,j+1));
end
%
%
hy1a=yv(2)-yv(1); hy2a=yv(3)-yv(2);
f1=-hy2a*(2*hy1a+hy2a)/hy1a/hy2a/(hy1a+hy2a);
f2=(hy1a+hy2a)^2/hy1a/hy2a/(hy1a+hy2a);
f3=-hy1a^2/hy1a/hy2a/(hy1a+hy2a);
%
%
xmin=0.000001; xmax=x_max(p);
% Nx=50000;

```

```

% xv(1:Nx)=(linspace(xmin^1,xmax^1,Nx)).^1;
% Nx=30000;
Nx=10000;
xv(1:Nx)=(linspace(xmin^(1/2),xmax^(1/2),Nx)).^2;
hx(1)=xv(1); hx(2:Nx)=xv(2:Nx)-xv(1:Nx-1);
Xg(1)=-1+1/2/sigma_elipse^2*xv(1);
theta(1)=atan(-sigma_elipse*Xg(1)./sqrt(1-Xg(1).^2));
nX(1)=-sin(theta(1));
tX(1)=cos(theta(1));
for n=2:Nx,
    Xg(n)=Xg(n-1)+sqrt(abs(1-Xg(n-1)^2)/abs(1-(1-
sigma_elipse^2)*Xg(n-1)^2))*hx(n);
    theta(n)=atan(-sigma_elipse*Xg(n)./sqrt(abs(1-
Xg(n).^2)));
    nX(n)=-sin(theta(n));
    tX(n)=cos(theta(n));
end
%Corriente exterior
[ue,pe,te,rhoe]=Corriente_ShockExp_Newton(Minf,Nx,modelo_a
ire,theta);
%
[ue1,pe1,te1,rhoe1]=corriente_exterior(Minf,Nx,modelo_aire
,theta); %Método de Newton

% ue(1:Nx)=1; % Placa Plana
unm1(1:Ny)=ue(1);
unm2(1:Ny)=ue(1);
mumol(1:Ny)=1;
%Tp=313.15;
dpe_dx(1)=(pe(2)-pe(1))/(xv(2)-xv(1)); dpe_dx(2:Nx-
1)=(pe(3:Nx)-pe(1:Nx-2))./(xv(3:Nx)-xv(1:Nx-2));
dpe_dx(Nx)=(pe(Nx)-pe(Nx-1))/(xv(Nx)-xv(Nx-1));
%Condiciones iniciales
%
vnm1(1:Ny)=0;
tnm1(1)=tp;
tnm1(2:Ny)=te(1);
rhonm1(1:Ny)=rhoe(1); %cambiar cuando no es placa plana
mumolnm1(1:Ny)=mumol;
%
A=sparse(Ny,Ny); At=sparse(Ny,Ny);
iturb=0;

```

```

for n=2:Nx,
    hx(n)=xv(n)-xv(n-1);
    vrhonm1(1:Ny)=rhonm1.*vnm1;
    urhonm1(1:Ny)=rhonm1.*unm1;
    numolnm1(1:Ny)=mumolnm1./rhonm1;
    delta1(n)=trapz(yv(1:Ny),(ones(1,Ny)-
rhonm1(1:Ny).*unm1(1:Ny)./rhoe(n)./ue(n)));

delta2(n)=trapz(yv(1:Ny),rhonm1(1:Ny).*unm1(1:Ny)./rhoe(n)
./ue(n).*(ones(1,Ny)-unm1(1:Ny)/ue(n)));
%     if Re*ue(n)*delta1(n)/numolnm1(Ny) >= 600,
%
uast(n)=sqrt((f1*unm1(1)+f2*unm1(2)+f3*unm1(3))/Re*mumolnm1
1(1)./rhonm1(1));
%     nuRei(1:Ny)=min(0.41*(Re*uast(n)*yv./numolnm1-
9.7*tanh(Re*uast(n)*yv./numolnm1/9.7)),0.018*Re*ue(n)*delt
a1(n)./numolnm1);
%     else
%     nuRei(1:Ny)=0;
%     end
    nuRei(1:Ny)=0;
    munm1(1:Ny)=mumolnm1.*(1+nuRei);
    cappanm1(1:Ny)=mumolnm1.*(1+Pr*nuRei);
    dmuynm1=(Dy*munm1)';
    dmuynm1(1)=f1*munm1(1)+f2*munm1(2)+f3*munm1(3);
    dmuynm1(Ny)=dmuynm1(Ny-1);
    dcappaynm1=(Dy*cappanm1)';

dcappaynm1(1)=f1*cappanm1(1)+f2*cappanm1(2)+f3*cappanm1(3)
;
    dcappaynm1(Ny)=dcappaynm1(Ny-1);
%
    A=spdiags(urhonm1',0,Ny,Ny)/hx(n)+spdiags(vrhonm1'-
dmuynm1',0,Ny,Ny)*Dy-spdiags(munm1',0,Ny,Ny)*Dy2;
    A(1,:)=0; A(1,1)=1; A(Ny,:)=0; A(Ny,Ny)=1;
    r(2:Ny-1)=urhonm1(2:Ny-1).*unm1(2:Ny-1)./hx(n)-
dpe_dx(n)/gamma/Minf^2; r(1)=0; r(Ny)=ue(n);
    un(1:Ny)=(A\r')'; %"un" es un vector fila
    [xv(n)
plot(un,yv,'r')
axis([0 55 ymin ymax])
%     pause(0.01)
%

```

```

%TEMPERATURA
%
At=spdiags (urhonm1', 0, Ny, Ny) /hx (n) +spdiags (vrhonm1' -
1/Pr*dcappaynm1', 0, Ny, Ny) *Dy-
1/Pr*spdiags (cappanm1', 0, Ny, Ny) *Dy2;
%Tp impuesta
%     rt (1)=tp;
%     At (1, :)=0; At (1, 1)=1;
% Adiabatico:
%     rt (1)=0;
%     At (1, :)=0; At (1, 1)=f1; At (1, 2)=f2; At (1, 3)=f3;
%
At (Ny, :)=0; At (Ny, Ny)=1;
rt (2:Ny-1)=urhonm1 (2: (Ny-1)) .*tnm1 (2: (Ny-
1)) /hx (n) +Minf^2 * (gamma-1) *munm1 (2: (Ny-1)) .* (Dy (2:Ny-
1, :) *un')' .^2 + (gamma-1) *unm1 (2:Ny-1) .*dpe_dx (n) /gamma;
%falta añadir el termino del gradiente de presiones
rt (Ny)=te (n);
tn (1:Ny)=(At\rt)';
figure (1)
hold on
plot (tn, yv, 'b')
pause (0.01)
hold off

%
%TRANSFERENCIA DE CALOR

dtdy_0 (n)=(f1*tn (1)+f2*tn (2)+f3*tn (3)) *sqrt (Re) .*cappanm1 (
1);

q (n)=(f1*tn (1)+f2*tn (2)+f3*tn (3)) *sqrt (Re);

%
%Densidad, viscosidad:
rho (1:Ny)=pe (n) ./tn (1:Ny);
mumol (1:Ny)=tn.^omega .* ((1+CSuth) ./ (tn+CSuth)).^sigma;

%
dudy_0=f1*un (1)+f2*un (2)+f3*un (3);
Cf (n)=(2/sqrt (Re)) *mumol (1) *dudy_0;

%
% Cálculo de vn
durhon (1:Ny)=(un .*rho-urhonm1) /hx (n);
vrhon (1)=0;
for j=2:Ny,

```

```
    vrhon(j)=vrhon(j-1)-0.5*(yv(j)-yv(j-1))*(durhon(j)+durhon(j-1));
end
vn=vrhon./rho;
% a estación siguiente
unm1=un;
vnm1=vn;
tnm1=tn;
rhonm1=rho;
mumolnm1=mumol;
end
%CALCULO DE CD

CDF=trapz(xv,Cf.*tX);
```


REFERENCIAS

- [1] J. D. Anderson Jr., *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*. Second Edition, AIAA, 2006.
- [2] J. D. Anderson Jr., «Ludwing Prandtl's Boundary Layer,» *Physics Today*, 2005.
- [3] A. Barrero Ripoll y M. Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos*, Sevilla: McGraw Hill, 2005.
- [4] A. H. Shapiro, *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*, New York: The Ronald Press Company, 1954.
- [5] L. Lees, «Hypersonic Flow,» de *Fifth International Aeronautical Conference, Los Angeles*, New York, Inst. of Aeronautical Sciences, 1955, pp. 241-276.
- [6] R. N. Cox y L. F. Crabtree, *Elements of Hypersonic Aerodynamics*, New York: Academic Press, 1965.
- [7] A. J. Eggers , C. A. Syvertson y S. Kraus, «A Study of Inviscid Flow about Airfoils at High Supersonic Speeds,» NACA Report 1123, 1953.
- [8] Gran Enciclopedia Soviética, 1979.
- [9] E. R. Van Driest, «Invesstigation of Laminar Boundary Layer in compressible fluids using the Crocco Method,» National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1952.
- [10] J. Peral González, *Cálculo de la capa límite compresible sobre perfiles aerodinámicos*, Sevilla: Escuela Técnica Superior de Ingenieros, 2015.
- [11] J. D. Anderson Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*, New York: McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace engineering, 2011.

