

UNIVERSIDAD DE BARCELONA  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
MÁSTER INTERUNIVERSITARIO DE FÍSICA NUCLEAR



**SUPERFLUID DYNAMICS IN THE OUTER CORE  
OF NEUTRON STARS**

TESIS DE MÁSTER

AUTOR: Juan Antonio Gil Granados

DIRECTORES: Xavier Viñas y Antonio Muñoz

BARCELONA - ESPAÑA  
2017



# Abstract

The consensus between observations and theory is that neutron star shows a layered structure determined by an increasing density and temperature with depth. Quantum degeneracy of nuclear matter lays at the basis of the existence of these exotic objects, and the Bose condensation of neutron and proton pairs leads to the emergence of superfluidity in the star interior. However, the precise equation of state of nuclear matter under such extreme conditions, relating its pressure and density, are yet unknown, and many proposals compete to provide a plausible picture compatible with the observational constrains. Currently, the study of neutron stars is becoming an interdisciplinary subject which is receiving an increasing attention due to more available data from precise observations and the possibility of making realistic computational simulations of the superfluid dynamics. This latter feature is crucial to account for the observed low moment of inertia and for the cooling down of the neutron star. It also allows us to understand the extraordinarily regular rotation of pulsars or even their observed, sudden speed-ups (glitches). Hydrodynamical models including the coupling of a normal fluid and a superfluid, or two coupled superfluids (neutronic superfluid and protonic superconductor) are being used to find dynamical instabilities that could explain the astronomical observations. Our work belongs to the latter group and models the macroscopic structure of the outer core, with typical densities around the nuclear saturation density and temperatures of the order of  $10^8$  K. The coupling between the two overlapped condensates of fermionic pairs is due to the entrainment of neutron and protons, which results from the Galilean invariance of the whole system. An equation of state based on the short range interactions between nucleons (Skyrme type) is assumed in order for the model to be consistent with observations. The resulting nonlinear equations of motion are linearized and the modes, obtained in the long wavelength regime, which allows to neglect the proton-electron interaction, are analytically derived as a function of the nuclear matter density. Comparison between the analytical predictions and numerical simulations of the original nonlinear equations are made, and relations with astronomical observations are discussed.

# Índice

<b>Preámbulo</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Dinámica del outer-core</b>	<b>7</b>
2.1. Acoplamiento por densidad y arrastre no disipativo . . . . .	7
2.2. Ecuaciones hidrodinámicas . . . . .	9
2.3. Estados estacionarios . . . . .	10
2.4. Relación de dispersión y velocidad del sonido . . . . .	11
<b>3. Ecuación de estado del outer-core</b>	<b>14</b>
3.1. Interacción efectiva N-N. Fuerzas de Skyrme . . . . .	14
3.2. Materia nuclear Beta-estable . . . . .	15
<b>4. Acoplamiento. Cálculo práctico de la matriz <math>\rho_{ij}</math></b>	<b>19</b>
<b>5. Modos longitudinales. Interpretación física</b>	<b>21</b>
<b>6. Resultados numéricos</b>	<b>23</b>
<b>7. Discusión y conclusiones</b>	<b>27</b>
<b>Anexos</b>	<b>28</b>
<b>A. Criterio de Landau para superfluidos</b>	<b>28</b>
<b>Referencias</b>	<b>29</b>

# Preámbulo

Una estrella es una nube de gas ligada gravitacionalmente y en equilibrio hidrostático. En el interior de la estrella tienen lugar reacciones nucleares que liberan una gran cantidad de energía. La presión del gas interior a temperatura elevada compensa el colapso gravitatorio estableciendo el equilibrio hidrostático y garantizando que la estrella permanezca en la secuencia principal durante un periodo de tiempo largo.

Cuando se ha consumido prácticamente todo el hidrógeno, se rompe el equilibrio hidrostático y el colapso gravitatorio empieza a dominar. El resultado es una fuerte compresión de la estrella, que produce un aumento de su temperatura central. Este aumento de temperatura inicia la combustión del helio en el interior de la estrella para producir carbono mientras que, en la parte externa de la misma, continúa la combustión del hidrógeno. Este proceso combustión-compresión se repite produciéndose otros elementos más pesados como el oxígeno, el neón y el silicio. Esta cadena de reacciones finaliza con la formación de núcleos de hierro, ya que la producción por fusión de elementos más pesados deja de ser favorable energéticamente. La estrella adopta, como resultado final, una estructura de capas con un núcleo de hierro rodeado por una secuencia de capas de elementos cada vez más ligeros presentando, finalmente, hidrógeno en su capa más externa. Esta es la estructura final que adopta una estrella suficientemente masiva. Estrellas de menor masa no llegan a almacenar hierro en su interior y finalizan con una estructura similar pero menos rica en elementos pesados.

Cuando las reacciones nucleares cesan, el colapso gravitacional se detendrá si aparece algún mecanismo alternativo a la presión térmica fruto de las reacciones nucleares. Llega un momento que se alcanza una densidad tan elevada que empieza a actuar el principio de incertidumbre. A causa de la fuerte compresión, cada electrón es confinado en un minúsculo volumen definiéndose, de forma notable, su posición. De acuerdo con el principio de incertidumbre, el momento de los electrones no queda bien determinado. Éstos, animados a moverse muy rápidamente, dan origen a un nuevo tipo de fuerza de presión llamada presión de degeneración. Esta fuerza es puramente cuántica y tiene su origen en el principio de exclusión de Pauli. Este mecanismo de frenado del colapso es eficiente si la masa de la estrella que está siendo comprimida no supera un cierto umbral llamado masa de Chandrasekhar ( $\approx 1,44M_{\odot}$ ). Por lo tanto, la presión de degeneración es la que estabiliza a las *enanas blancas* con masas inferiores a esta masa crítica.

En el caso de estrellas con masas mayores a  $10M_{\odot}$ , los electrones serán incapaces de frenar el colapso y continuará la contracción. Llega un punto en que las condiciones centrales de densidad y temperatura son tan extremas que los núcleos de hierro se disocian en sus constituyentes y, paralelamente, se favorece la captura electrónica por parte de los protones del medio que han sido desconfiados. El colapso se ve acelerado por este hecho y continuará hasta alcanzar (en el *core*) unas densidades del orden de la densidad de saturación nuclear ( $0.16 \text{ fm}^{-3} = 2.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ ). En esta situación el *core* de la estrella es un gas de nucleones degenerados cuya presión de degeneración ofrece una resistencia a la contracción gravitacional. Esta resistencia genera una onda de choque que convertirá el colapso gravitatorio en una explosión *supernova* que expulsa violentamente materia estelar al espacio quedando en el centro un remanente denso. Este remanente puede equilibrar la presión gravitatoria con la presión de degeneración nuclear si su masa es inferior a  $2M_{\odot}$  (límite de Tolman-Oppenheimer-Volkov) formándose una *estrella de neutrones*. Estos objetos tienen un radio típico de 10 Km y masas de  $1,44 - 2M_{\odot}$ . Los resultados observacionales sugieren que la estrella de neutrones puede formarse a partir de explosiones supernova de estrellas de masa hasta  $20M_{\odot}$ . Para estrellas más masivas, el remanente después de la explosión es mayor a  $2M_{\odot}$  y la presión de degeneración de los nucleones no puede evitar el colapso gravitacional del remanente que terminará convirtiéndose en un *agujero negro*.

Podemos distinguir 3 (quizás 4) regiones principales en el interior de las estrellas de neu-

trones: el *outer crust*, el *inner crust* y el *core* (pudiéndose distinguir entre *outer core* e *inner core*). Hasta densidades  $\approx 6 \times 10^{-11} \text{ fm}^{-3}$  la materia está formada por átomos de hierro distribuidos a lo largo de una red a fin de minimizar la energía coulombiana del sistema. Para densidades mayores pero por debajo de  $\approx 2.5 \times 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$  los átomos se ionizan y se forma una red de núcleos (cada vez más ricos en neutrones debido a las capturas electrónicas y a las desintegraciones beta inversas) inmersos en un gas de electrones libres relativistas (*outer crust*). Si todavía aumentamos más la densidad, los núcleos de la red serán incapaces de soportar el aumento continuo de neutrones y comenzarán a cederlos al continuo (neutron drip). Tendremos pues una red de núcleos rodeada de un gas mixto de neutrones y electrones (*inner crust*). Los agregados nucleares empiezan a romperse para densidades  $\approx 0.1 \text{ fm}^{-3}$ . Para esta densidad, al sistema le resulta más favorable energéticamente destruir la red de núcleos y homogeneizarse formando un fluido homogéneo de neutrones, protones y electrones en equilibrio beta (*outer core*). También es posible la aparición de muones en el sistema si la densidad es lo suficientemente elevada como para que el canal que los produce sea posible energéticamente. En la región interna de la estrella de neutrones (*inner core*) las densidades pueden sobrepasar con creces el triple de la densidad de saturación nuclear, rango de aceptación del modelo *npe $\mu$* . Para estas densidades tan elevadas es posible energéticamente la aparición de toda una colección de hiperones ( $\Lambda, \Sigma^+$ , etc...), el desconfinamiento de los quarks, etc...

## 1. Introducción

Poco tiempo después del advenimiento de la teoría cuántica y del descubrimiento del neutrón, W. Baade y F. Zwicky [7] predijeron la aparición de una estrella de neutrones como etapa final de una estrella masiva como resultado de una explosión supernova. Sin embargo, hubo que esperar tres décadas para registrarse las primeras observaciones astronómicas que proporcionaron candidatos plausibles coincidentes con tales predicciones. Dichas observaciones vinieron de la mano de A. Hewish y J. Bell [8] tras detectar una señal de radio producida por la rotación rápida y regular de una estrella de neutrones, un púlsar, en particular el PSR B1919+21.

Hoy en día, se han detectado varios miles de estrellas de neutrones y se está realizando un gran esfuerzo en plantear restricciones precisas en los modelos que describen su naturaleza y estructura. Las densidades extremas (del orden de la densidad de saturación nuclear  $\rho_0 = 2.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ ), las altas temperaturas (típicamente  $\sim 10^8$  K) y las elevadas frecuencias de rotación (cientos de Hz), se combinan para dar lugar a un sistema físico extraordinario -la estrella de neutrones-, de unos 10 Km de radio y masas de  $\sim 2M_{\odot}$  que únicamente puede ser descrito dentro del marco de la mecánica cuántica y de la teoría relativista. Algunos años antes de la observación del primer púlsar, y siguiendo la analogía con los pares de electrones (*pares de Cooper*) en superconductores para analizar la influencia de la superfluidez en los espectros de energía y el momento de inercia de los núcleos, A. Migdal [9] señaló que la superfluidez de la materia nuclear podría manifestarse como un fenómeno macroscópico si existen estrellas de neutrones. La teoría correspondiente comenzó a desarrollarse por V.L Ginzburg y D. A. Kirzhnits [10] al darse cuenta de que la interacción entre dos neutrones en un estado de singlete es atractiva para momentos alrededor de la superficie de Fermi, y como consecuencia, de acuerdo con la teoría BCS, el gas de Fermi neutrónico puede reducir su energía mediante el emparejamiento de neutrones (formando bosones) y acabar sufriendo la condensación de Bose Einstein por debajo de una cierta temperatura crítica. En estas condiciones, se espera que en el interior de las estrellas de neutrones existan neutrones superfluidos en el estado  $^1S_0$  en la parte interior de la corteza y en el estado  $^3PF_2$  en la parte exterior del core, a densidades mayores que la de saturación (Fig. 2 de [6]). También se espera que existan protones superconductores en el estado  $^1S_0$ , debido a su pequeña concentración y por tanto baja densidad, en la parte exterior

del core [2]. El apareamiento neutrón-protón sería, en principio, posible, pero está desfavorecido debido al bajo contenido de protones [3]. En el interior de las estrellas de neutrones existen también electrones, que garantizan la neutralidad de carga pero que no se encuentran formando pares ya que su temperatura crítica ( $\sim 200K$  en superconductores terrestres) es mucho menor que la temperatura de  $10^7 - 10^8 K$  existente en el interior de las estrellas de neutrones.

La diferencia esencial entre un superfluido y un fluido normal es que el superfluido está libre de viscosidad y es localmente irrotacional. Esta propiedad queda, sin embargo, compensada por la posibilidad de que el superfluido esté atravesado por vórtices cuantizados que, a escala macroscópica, simulan el comportamiento rotacional de los fluidos ordinarios.

Los efectos de superfluididad y superconductividad en estrellas de neutrones pueden ponerse de manifiesto en tres escenarios distintos: i) observaciones relacionadas con el enfriamiento de estrellas de neutrones [4-7], ii) fenómenos de glitches detectados en estrellas de neutrones en rotación [8-11], iii) oscilaciones estelares y modos colectivos en la materia [12-16].

Un evento importante para el estudio del enfriamiento de estrellas de neutrones es el proporcionado por *Casiopea A*, que es el remanente de una estrella de neutrones que explotó hace 330 años y que está situada a 11.000 años luz de la Tierra. Esta estrella de neutrones es la más joven que se conoce y es la primera cuyo enfriamiento ha sido observado directamente. Los resultados observacionales parecen indicar que su temperatura ha decrecido unos pocos por ciento desde su descubrimiento en 1999. De confirmarse esta tasa de decrecimiento, su descripción teórica requeriría la existencia de neutrones superfluidos que no son completamente necesarios para explicar el enfriamiento de otras estrellas de neutrones más maduras cuya tasa de decrecimiento de la temperatura es conocida [17].

Los radiopúlsares con períodos de milisegundos muestran una estabilidad excepcional siendo uno de los relojes más precisos del universo rivalizando con los relojes atómicos. Mientras que en la mayoría de estos objetos se observa un decrecimiento de la rotación debido a la emisión electromagnética y tal vez de ondas gravitacionales, muchos púlsares muestran aumentos bruscos de su frecuencia de rotación ( $\Delta\Omega/\Omega$  entre  $10^{-9}$  y  $10^{-5}$ ) acompañados de un largo tiempo de relajación. Este fenómeno se conoce con el nombre de glitches. Hasta la fecha se han detectado 482 glitches en 160 púlsares. Inmediatamente después de los descubrimientos de los púlsares de *Vela* y *Cangrejo* en 1969, se sugieren diversos mecanismos para explicar los glitches. El modelo estándar de glitches [26] supone que el interior de las estrellas de neutrones es superfluido. En la parte interna de la corteza, los neutrones están acoplados débilmente con las partículas cargadas mientras que los neutrones del core están fuertemente acoplados al core de modo que no participan en el glitch. En estas condiciones el fenómeno de los glitches puede describirse mediante anclajes y desanclajes de los vórtices, que se generan en la rotación inducida en los neutrones superfluidos, a las cargas positivas de la corteza interior. Sin embargo, se ha mostrado que los neutrones superfluidos en la corteza interior no contienen suficiente momento angular para explicar los glitches gigantes, ya que se ignoran los efectos del scattering de Bragg [26]. Estos resultados sugieren que el core superfluido podría jugar también un papel en el fenómeno de los glitches.

La hidrodinámica de los cores superfluidos de estrellas de neutrones puede describirse en términos de un modelo de dos fluidos, uno de los cuales corresponde a los neutrones y el otro representa el resto de los constituyentes (clusters en el crust, protones, electrones, etc...). Este modelo incorpora también los efectos de arrastre que implican que el momento de uno de los constituyentes transporta parte de la masa del otro constituyente. Mediante este método pueden estudiarse distintos modos de oscilación de estrellas de neutrones [25], modos colectivos de materia y glitches en estrellas de neutrones en rotación [15].

En este trabajo nos centramos en el estudio de las ecuaciones dinámicas de dos superfluidos que están acoplados debido al efecto de arrastre. Este estudio se realiza en el límite de longitud de onda larga y baja frecuencia, en la cual la neutralidad de carga se mantiene y no

hay corrientes eléctricas. Físicamente corresponde al caso en que las frecuencias son pequeñas comparadas con las del plasma de electrones y las longitudes de onda largas comparadas con la longitud de apantallamiento de Debye para los electrones. La aproximación hidrodinámica implica que la frecuencia es más pequeña que la inversa del tiempo de relajación de los electrones debida a las colisiones. El cálculo se realiza en un sistema de referencia inercial de modo que las fuerzas centrífugas y de Coriolis no aparecen de modo explícito. Resolvemos las ecuaciones hidrodinámicas de los superfluidos acoplados por el término de arrastre suponiendo una perturbación de tipo onda plana que afecta a las densidades y a los momentos de los dos condensados. La solución de este problema requiere conocer las densidades no perturbadas que, en nuestro caso, corresponden a las densidades de neutrones y protones en equilibrio beta calculadas con la fuerza nuclear efectiva de Skyrme SLy4. La misma interacción se utiliza para calcular los coeficientes de arrastre siguiendo el método propuesto en la referencia [2].

El trabajo se organiza en 7 secciones. La sección 2 empieza definiendo algunas cantidades que necesitaremos para el tratamiento hidrodinámico de un superfluido con dos componentes que ocupa el outer-core. Continúa presentando las ecuaciones que rigen la dinámica de cada una de las dos componentes en esta región de la estrella de neutrones. Da una receta de cómo calcular cantidades termodinámicas del sistema a partir de una ecuación de estado dada para el outer-core. Caracteriza los estados estacionarios del sistema y se derivan analíticamente los modos de longitud de onda larga. La sección 3 presenta la ecuación de estado del sistema y el problema de la beta estabilidad. En la sección 4 se explica un procedimiento práctico para resolver el acoplamiento en densidad entre las dos componentes. En la sección 5 se presentan las velocidades de los modos longitudinales que se derivan de nuestro modelo y se discute el comportamiento físico del sistema en base a éstas. En la sección 6 introducimos una perturbación en el superfluido y simulamos su dinámica. Se cierra la sección haciendo un análisis comparativo de los resultados numéricos obtenidos con los resultados analíticos del modelo. Finalmente, se discuten brevemente las conclusiones del trabajo en la sección 7.

## 2. Dinámica del outer-core

La mayoría de la bibliografía que estudia el *core* de las estrellas de neutrones supone que está formado por un fluido uniforme de neutrones, protones y electrones en equilibrio beta, a densidades  $\rho \sim 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup> y temperaturas  $T \sim 10^8$  K (10 keV) muy elevadas. En estas condiciones de densidad extrema, las estrellas de neutrones pueden ser consideradas como objetos extraordinariamente fríos en comparación con la temperatura equivalente de los niveles de Fermi de sus componentes  $T_F \sim 100$  MeV. La longitud de onda térmica de Broglie de los nucleones es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura,  $\lambda_{dB} = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$ , mientras que la distancia de separación típica entre las partículas escala con  $l = \rho^{-1/3}$ . Cuando estas dos longitudes son del mismo orden, es decir cuando  $h/\sqrt{2\pi mk_B T} \sim \rho^{-1/3}$ , las longitudes de onda características de las partículas se solapan y el sistema entra en el denominado régimen de degeneración cuántico. En tales condiciones, y a efectos de cálculo, la temperatura del sistema puede aproximarse por  $T = 0$  K. Este límite se alcanza actualmente de forma casi rutinaria en los gases ultrafríos, donde los condensados de Bose Einstein para sistemas atómicos muy diluidos son estudiados con un elevado control de los parámetros experimentales. Pero también en el extremo opuesto de densidades y temperaturas, como ocurre en el interior de las estrellas de neutrones, la degeneración cuántica se alcanza para  $l \sim \lambda_{dB}$ . En este régimen, la superfluidez en neutrones y protones emerge de forma natural si existe algún mecanismo que produzca la condensación de Bose en ambas componentes. Dicho mecanismo es la formación de pares de neutrones y pares de protones por separado (*pares de Cooper*), el cuál requiere una interacción atractiva entre dos neutrones o dos protones, como de hecho ocurre en el potencial atractivo nucleón-nucleón (N-N). Esta interacción contiene un término *central* que resulta atractivo para  $r > 0,5$  fm y repulsivo para distancias menores. También depende del acoplamiento de los dos nucleones a  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ . Fijada una densidad bariónica total  $\rho$ , el acoplamiento será aquél que minimiza la energía del par garantizando la antisimetría de la función de onda. Consultando el artículo de J. A. Sauls [6], donde se discute cuál es el acoplamiento más favorable en función de la densidad, puede verse que a baja densidad ( $< 2 \times 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>) el canal más atractivo es el de onda-s ( $^1S_0$ ), mientras que a densidad elevada, por contra, es más atractivo el canal  $^3PF_2$ . Por consiguiente, podemos concluir que a las densidades típicas del outer-core, los protones se acoplan a  $^1S_0$  mientras que los neutrones lo hacen a  $^3PF_2$ . Éste es el punto de partida de nuestro estudio.

### 2.1. Acoplamiento por densidad y arrastre no disipativo

Nuestro sistema consta por tanto de dos condensados de pares fermiónicos: uno de protones ( $p$ ) y otro de neutrones ( $n$ ). Cada condensado es descrito por un parámetro de orden complejo  $\Psi_j$ , con  $j = n, p$  que puede representarse como  $\Psi_j = \sqrt{n_j} \exp(2i\theta_j)$ , donde  $n_j$  es la densidad local de pares de la especie  $j$  y  $2\theta_j$  es la fase del condensado. La fase contiene la información dinámica del sistema y proporciona el campo de momentos (o de velocidades) de cada condensado a partir de la relación  $\vec{p}_j = \hbar \nabla 2\theta_j$  [27]. Como consecuencia de la condensación de los pares (bosónicos) de Cooper, el sistema exhibe propiedades superfluidas. La cantidad  $\hbar \nabla \theta / m$  corresponde a la velocidad superfluida de los pares, la fase es el potencial de velocidades y el sistema es irrotacional  $\nabla \times \vec{v}_j \propto \nabla \times (\nabla \theta) = 0$ .

La densidad de energía  $\mathcal{H}$  puede descomponerse en la suma de dos términos  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{Kin} + \mathcal{H}^{Nuc}$ , donde  $\mathcal{H}^{Kin}$  es un término dinámico que depende de los gradientes de las fases, y  $\mathcal{H}^{Nuc}$  es un término estático que depende exclusivamente de las densidades. A su vez, el término dinámico puede descomponerse como:

$$\mathcal{H}^{Kin} = \frac{\hbar}{2m} \sum_{ij} \rho_{ij} \nabla \theta_i \nabla \theta_j,$$

donde los términos cruzados juegan el papel de un arrastre no disipativo de una componente sobre la otra y asegura la invariancia Galileana del sistema [28]. En términos de los momentos:

$$\mathcal{H}^{Kin} = \frac{\rho_{nn} \vec{p}_n^2}{2m} + \frac{\rho_{pp} \vec{p}_p^2}{2m} + \frac{\rho_{np} \vec{p}_n \cdot \vec{p}_p}{m}, \quad (1)$$

donde  $\rho_{ij}$  con  $i, j = n, p$  son las funciones respuesta que dependen de las densidades de cada componente pero no de sus momentos [29].

Por su parte, el término estático contiene la información nuclear del sistema y por tanto ha de reproducir la ecuación de estado. La expresión completa de este término en función de las densidades nucleares  $\mathcal{H}^{Nuc}(\rho_n, \rho_p)$  se presenta en la sección *Ecuación de estado del outer-core*. Además de las densidades bariónicas  $\rho_n$  y  $\rho_p$ , la densidad electrónica  $\rho_e$  juega un papel importante. Por un lado asumiremos que existe neutralidad local de la carga eléctrica, y por otro, como veremos, estas tres densidades no serán independientes entre sí ya que deberá también imponerse la condición de beta-estabilidad que las relacionará [11].

A partir del funcional de la energía, las ecuaciones de movimiento para las fases se obtienen de [27],

$$\hbar \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_i},$$

que desarrolladas pueden escribirse como,

$$\hbar \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -\mu_i(\rho_n, \rho_p) - \frac{\partial \mathcal{H}^{Kin}}{\partial \rho_i}, \quad (2)$$

donde  $\mu_i(\rho_n, \rho_p) = \partial \mathcal{H}^{Nuc} / \partial \rho_i$  es el potencial químico de la componente “i”.

El sistema presenta pues dos tipos de acoplamiento diferentes entre protones y neutrones: un acoplamiento por densidad, que se pone de manifiesto en la doble dependencia de los potenciales químicos locales con las densidades de ambos componentes bariónicos, y un acoplamiento por velocidad (el denominado *entrainment*), que se manifiesta como una fuerza de arrastre de una componente a la otra. Los pares de protones y neutrones no conforman fluidos independientes y están sujetos a la interacción nuclear fuerte. Cada nucleón se encuentra inmerso en una nube de polarización de neutrones y protones. La densidad de corriente de cada componente bariónica depende también del momento de la otra y pueden expresarse como la siguiente combinación lineal [28]

$$\vec{j}_n = \frac{\rho_{nn}}{m} \vec{p}_n + \frac{\rho_{np}}{m} \vec{p}_p, \quad (3)$$

$$\vec{j}_p = \frac{\rho_{pp}}{m} \vec{p}_p + \frac{\rho_{pn}}{m} \vec{p}_n, \quad (4)$$

donde  $m$  es la masa del nucleón (asumiendo que no hay diferencias entre las masas del protón y el neutrón).

Si finalmente consideramos que el tiempo característico de las interacciones débiles  $\tau_{weak}$  es mucho mayor que las escalas de tiempo asociadas a la dinámica  $\tau_{dyn}$  ( $\tau_{weak} \gg \tau_{dyn}$ ), podemos obtener la conservación del número de neutrones y de protones por separado. En estas condiciones podemos escribir una ecuación de continuidad para cada componente:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_i = 0. \quad (5)$$

Dado que el presente trabajo se centra en el límite de longitud de onda larga, o de frecuencias pequeñas comparadas con la frecuencia de oscilación del plasma de los electrones o con la longitud de Debye de los mismos, asumimos no sólo la neutralidad local de carga sino también la ausencia de corrientes eléctricas.

## 2.2. Ecuaciones hidrodinámicas

El sistema de ecuaciones completo que describe la dinámica del outer-core en forma hidrodinámica es,

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \left[ \frac{\rho_n \vec{p}_n}{m} - \frac{\rho_{np}}{m} (\vec{p}_n - \vec{p}_p) \right] = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \left[ \frac{\rho_p \vec{p}_p}{m} - \frac{\rho_{np}}{m} (\vec{p}_p - \vec{p}_n) \right] = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \vec{p}_n}{\partial t} = -\nabla \left( \mu_n + \frac{\vec{p}_n^2}{2m} - \frac{1}{2m} \frac{\partial \rho_{np}}{\partial \rho_n} (\vec{p}_n - \vec{p}_p)^2 \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \vec{p}_p}{\partial t} = -\nabla \left( \mu_p + \frac{\vec{p}_p^2}{2m} - \frac{1}{2m} \frac{\partial \rho_{np}}{\partial \rho_p} (\vec{p}_n - \vec{p}_p)^2 \right), \quad (9)$$

donde las ecuaciones (6) y (7) son las ecuaciones de continuidad de pares de neutrones y protones respectivamente y las ecuaciones (8) y (9) son las ecuaciones de conservación del momento de cada una de las componentes. Estas dos últimas ecuaciones pueden identificarse con la segunda ley de Newton:  $\partial_t \vec{p} = -\nabla \phi$  donde el término de la derecha juega el papel de una fuerza (gradiente de un potencial  $\phi$ ). Todas las ecuaciones contienen un término proporcional al momento relativo de las dos componentes que las acopla en velocidad. Como hemos anticipado, este término, además de acoplar las dos componentes, dota al sistema de ecuaciones de invariancia galileana, la cual nos permite relacionar las cantidades  $\rho_{ij}$  [2],

$$\rho_n = \rho_{nn} + \rho_{np}, \quad \rho_p = \rho_{pp} + \rho_{pn}. \quad (10)$$

Es importante notar que aunque el carácter superfluido del sistema no aparece de forma explícita en las ecuaciones dinámicas (6-9), dicho carácter está contenido tanto en las densidades como en los momentos de las dos componentes bariónicas.

Este sistema de ecuaciones puede identificarse con las ecuaciones de Euler generalizadas que describen la dinámica de los fluidos irrotacionales ( $\nabla \times \vec{p} = 0$ ) en el régimen no viscoso. Las cantidades termodinámicas relevantes pueden obtenerse directamente a partir de la densidad de energía nuclear  $\mathcal{H}^{Nuc}$  del sistema que presentaremos en la sección 3. El cálculo de los potenciales químicos de cada componente es fundamental para conocer la proporción de protones, neutrones y electrones a las diferentes densidades del outer-core (resolver la beta-estabilidad). Éstos pueden obtenerse a partir de la densidad de energía nuclear como,

$$\mu_n = \frac{\partial \mathcal{H}^{Nuc}(\rho_n, \rho_p)}{\partial \rho_n}, \quad \mu_p = \frac{\partial \mathcal{H}^{Nuc}(\rho_n, \rho_p)}{\partial \rho_p}. \quad (11)$$

También podemos obtener la ecuación de estado del outer-core, presión en función de la densidad, de forma relativamente sencilla mediante la expresión:

$$P(\rho) = \rho \frac{\partial \mathcal{H}^{Nuc}}{\partial \rho} - \mathcal{H}^{Nuc}, \quad (12)$$

así como la incompresibilidad de la materia nuclear,

$$K(\rho) = 9\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left( \frac{\mathcal{H}^{Nuc}}{\rho} \right), \quad (13)$$

que nos da una idea de la curvatura alrededor del mínimo de la energía de ligadura y, que en interacciones efectivas de campo medio, toma un valor de  $\approx 230 MeV$  para la densidad de saturación nuclear ( $\rho_0 = 0,16 fm^{-3}$ ).

Las derivadas de los potenciales químicos son otras cantidades necesarias ya que, a partir de ellas, pueden obtenerse ciertas propiedades del sistema como por ejemplo la velocidad del sonido. Denotaremos estas cantidades como  $E_{ij}$  y podremos obtenerlas a partir de,

$$E_{nn} = \frac{\partial \mu_n}{\partial \rho_n}, \quad E_{np} = \frac{\partial \mu_n}{\partial \rho_p}, \quad E_{pp} = \frac{\partial \mu_p}{\partial \rho_p} + \frac{\partial \mu_e}{\partial \rho_e}. \quad (14)$$

Hemos añadido explícitamente la contribución de los electrones en  $E_{pp}$  ya que este término es el dominante como podemos ver en la referencia [1].

### 2.3. Estados estacionarios

En esta sección vamos a mostrar cuáles son los estados estacionarios accesibles del sistema, solución de las ecuaciones dinámicas (6)-(9), en una situación de densidad constante. Debemos dejar claro cuáles son estos estados de equilibrio ya que, el análisis posterior centrado en ver cómo afecta (y se propaga) una perturbación a las magnitudes principales del sistema, está definido entorno a uno particular de estos estados de equilibrio.

Los estados estacionarios pueden obtenerse tomando igual a cero todas las derivadas temporales de las ecuaciones (6)-(9) y ver qué relaciones se alcanzan entre las magnitudes relevantes del sistema (densidades, densidades de corriente y potenciales químicos).

El estado de equilibrio más sencillo (que de hecho es el estado fundamental) corresponde a dos fluidos en reposo ( $\vec{p}_n = \vec{p}_p = 0$ ). También son solución de las ecuaciones hidrodinámicas las situaciones no estáticas de velocidad relativa nula ( $\vec{p}_n - \vec{p}_p = 0$ ) y no nula ( $\vec{p}_n - \vec{p}_p = cte$ ).

Imponiendo  $\partial/\partial t = 0$ , para el caso  $\vec{p}_n = \vec{p}_p$  debe verificarse la relación,

$$\rho_n \vec{j}_p = \rho_p \vec{j}_n$$

donde las corrientes  $\vec{j}_n$  y  $\vec{j}_p$  han de ser constantes. Para el caso de velocidad relativa no nula,  $\vec{p}_n - \vec{p}_p = cte$ , la relación que se obtiene es,

$$\vec{p}_n - \vec{p}_p = m \frac{\rho_n \vec{j}_p - \rho_p \vec{j}_n}{\rho_{np}^2 - \rho_{nn} \rho_{pp}}$$

En la siguiente sección evaluaremos las excitaciones de onda larga del sistema en torno al estado fundamental (equilibrio estático).

## 2.4. Relación de dispersión y velocidad del sonido

Introduzcamos una perturbación en las ecuaciones (6)-(9). Perturbaremos un sistema en reposo ( $\vec{p}_n = \vec{p}_p = 0$ ) y con un perfil de densidad constante ( $\rho_n^0, \rho_p^0$ ) en beta-equilibrio ( $\rho_n^0, \rho_p^0$ ). Así pues, abusando del lenguaje, denotaremos la perturbación en el momento directamente por  $\vec{p}_i$  ( $i = n, p$ ) y la densidad quedará modificada por  $(\rho_n^0, \rho_p^0) \rightarrow (\rho_n^0 + \rho_n, \rho_p^0 + \rho_p)$ . Quedándonos a primer orden en la perturbación (linealizando las ecuaciones para la perturbación) obtenemos,

$$\frac{\partial \vec{p}_n}{\partial t} = -\nabla \mu_n,$$

$$\frac{\partial \vec{p}_p}{\partial t} = -\nabla \mu_p,$$

donde las variaciones de los potenciales químicos de cada componente pueden expresarse como,

$$\nabla \mu_n = E_{nn}|_{\rho^0} \nabla \rho_n + E_{np}|_{\rho^0} \nabla \rho_p, \quad (15)$$

$$\nabla \mu_p = E_{pp}|_{\rho^0} \nabla \rho_p + E_{np}|_{\rho^0} \nabla \rho_n, \quad (16)$$

donde  $|_{\rho^0}$  significa que estamos evaluando las cantidades  $E_{ij}$  para las densidades ( $\rho_n^0, \rho_p^0$ ) que nos dan el equilibrio beta. Para no hacer la notación más farragosa, escribiremos simplemente  $E_{ij}$ . Introduciendo (15) y (16) en las ecuaciones de Euler linealizadas y recuperando las ecuaciones de continuidad obtenemos:

$$\frac{\partial \vec{p}_n}{\partial t} = -E_{nn} \nabla \rho_n - E_{np} \nabla \rho_p, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vec{p}_p}{\partial t} = -E_{pp} \nabla \rho_p - E_{np} \nabla \rho_n, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\rho_{nn}}{m} \nabla \cdot \vec{p}_n + \frac{\rho_{np}}{m} \nabla \cdot \vec{p}_p = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{\rho_{pp}}{m} \nabla \cdot \vec{p}_p + \frac{\rho_{np}}{m} \nabla \cdot \vec{p}_n = 0. \quad (20)$$

Para poner de manifiesto que la perturbación introducida sigue una ecuación de ondas vamos a realizar algunas manipulaciones matemáticas. Derivando las ecuaciones (17) y (18) respecto al tiempo e introduciendo el resultado en (19) y (20) previamente habiendo tomado gradiente en éstas dos últimas, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \vec{p}_n}{\partial t^2} - c_{nn}^2 \nabla^2 \vec{p}_n - c_{np}^2 \nabla^2 \vec{p}_p = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{p}_p}{\partial t^2} - c_{pp}^2 \nabla^2 \vec{p}_p - c_{pn}^2 \nabla^2 \vec{p}_n = 0, \quad (22)$$

o sus equivalentes en función de las densidades de cada componente,

$$\frac{\partial^2 \rho_n}{\partial t^2} - c_{nn}^2 \nabla^2 \rho_n - c_{np}^2 \nabla^2 \rho_p = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_p}{\partial t^2} - c_{pp}^2 \nabla^2 \rho_p - c_{pn}^2 \nabla^2 \rho_n = 0, \quad (24)$$

donde los coeficientes  $c$ 's tienen dimensiones de velocidad y tienen las siguientes expresiones,

$$c_{nn}^2 = \frac{E_{nn}\rho_{nn} + E_{np}\rho_{np}}{m}, \quad (25)$$

$$c_{pp}^2 = \frac{E_{pp}\rho_{pp} + E_{np}\rho_{np}}{m}, \quad (26)$$

$$c_{np}^2 = \frac{E_{nn}\rho_{np} + E_{pn}\rho_{pp}}{m}, \quad (27)$$

$$c_{pn}^2 = \frac{E_{pp}\rho_{np} + E_{np}\rho_{nn}}{m}. \quad (28)$$

Vemos pues que las perturbaciones introducidas siguen ecuaciones de onda ordinarias pero con un término adicional debido al acoplamiento. En ausencia de acoplamiento ( $E_{np} = 0, \rho_{np} = 0$ ), estos términos adicionales serán nulos y la perturbación en el momento y la perturbación de la densidad de cada componente se propagará por el medio a velocidad  $v_n^0 = (E_{nn}\rho_n^0/m)^{1/2}$  los neutrones y  $v_p^0 = (E_{pp}\rho_p^0/m)^{1/2}$  los protones. Estrictamente hablando, resulta imposible separar las dos componentes por completo ya que  $v_n^0$  y  $v_p^0$  siguen dependiendo de  $E_{nn}$  y  $E_{pp}$  respectivamente que, a su vez, dependen de las densidades de las dos componentes ( $E_{ij}(\rho_n, \rho_p)$ ). Lo que se desacopla, siendo precisos, es el espectro de excitaciones lineales de las dos componentes presentando velocidades del sonido distintas.

Por simplicidad, perturbemos el momento únicamente en la dirección X. Con esta consideración podemos prescindir del carácter vectorial del momento ( $\vec{p} \rightarrow p$ ) y substituir  $\nabla \rightarrow d/dx$  simplificando significativamente el problema pero manteniendo la física que queremos exponer. Para obtener la relación de dispersión primero desarrollamos la perturbación en ondas planas,

$$p_n = \sum_j c_j e^{i(\omega_j t - kx)},$$

$$p_p = \sum_j d_j e^{i(\omega_j t - kx)}.$$

Substituyendo en las ecuaciones de onda (21) y (22) obtenemos,

$$\begin{pmatrix} c_{nn}^2 k^2 - \omega_j^2 & c_{np}^2 k^2 \\ c_{pn}^2 k^2 & c_{pp}^2 k^2 - \omega_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = 0 \quad (29)$$

Imponiendo que el determinante sea nulo obtenemos la siguiente ecuación bicuadrada que verifican los diferentes modos (autovalores),

$$\omega_j^4 - (c_{nn}^2 + c_{pp}^2) k^2 \omega_j^2 + (c_{nn}^2 c_{pp}^2 - c_{np}^2 c_{pn}^2) k^4 = 0,$$

a partir de la cual se obtiene la siguiente relación de dispersión,

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k^2}{2} \left\{ (c_{nn}^2 + c_{pp}^2) \pm \sqrt{(c_{nn}^2 - c_{pp}^2)^2 + 4c_{np}^2 c_{pn}^2} \right\}. \quad (30)$$

Finalmente podemos extraer la velocidad de fase,

$$v_{\pm}(k) = \frac{\omega_{\pm}}{k} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ (c_{nn}^2 + c_{pp}^2) \pm \sqrt{(c_{nn}^2 - c_{pp}^2)^2 + 4c_{np}^2 c_{pn}^2} \right\}}, \quad (31)$$

que resulta independiente del vector de onda  $k$  y que presenta dos ramas  $v_{\pm}$  según tomemos el signo.

Para interpretar físicamente los modos y las velocidades asociadas a éstos que acabamos de obtener, es conveniente extraer los autovectores de (29) correspondientes a los autovalores  $\omega_{\pm}$ . Introduciendo los autovalores en (29) la relación entre las amplitudes  $c$ 's y  $d$ 's resulta,

$$\left. \frac{c_j}{d_j} \right|_{v_{\pm}} = \frac{E_{pn}\rho_{pp} + E_{nn}\rho_{np}}{mv_{\pm}^2 - E_{nn}\rho_{nn} - E_{np}\rho_{np}}. \quad (32)$$

A partir de esta relación, es conveniente definir las cantidades,

$$\gamma_+ = \arctan\left(\frac{c_+}{d_+}\right), \quad (33)$$

$$\gamma_- = \arctan\left(\frac{d_-}{c_-}\right). \quad (34)$$

Las dos ramas  $v_{\pm}$  involucrarán a una o a las dos componentes según los valores que tomen las cantidades “angulares” (o ángulos de mezcla)  $\gamma_{\pm}$  que acabamos de definir. Si  $\gamma_+ = 0$ , implica que  $c_{np} = 0$ . Así pues, el modo  $v_+$  corresponde a  $c_{pp}$ , involucrando únicamente a los protones en el movimiento. Cuando  $0 < \gamma_+ < \pi/2$ ,  $v_+$  corresponde a la oscilación en fase de las densidades de protones y neutrones. Finalmente, si  $-\pi/2 < \gamma_+ < 0$ , la cantidad  $v_+$  corresponde a la oscilación fuera de fase de dichas densidades. De forma análoga, el modo  $v_-$  corresponde a  $c_{nn}$  cuando  $\gamma_- = 0$ , habiendo una oscilación exclusiva de los neutrones. Las oscilaciones simultáneas de las densidades de las dos componentes en fase o no, se darán para  $0 < \gamma_- < \pi/2$  o  $-\pi/2 < \gamma_- < 0$  respectivamente.

### 3. Ecuación de estado del outer-core

#### 3.1. Interacción efectiva N-N. Fuerzas de Skyrme

La complejidad del sistema nuclear y la imposibilidad de obtener soluciones exactas, ya que esto implicaría acudir a la teoría fundamental (QCD), nos animan a buscar alternativas que permitan realizar cálculos de una forma sencilla y que puedan reproducir datos experimentales. Una alternativa es utilizar interacciones fenomenológicas que respeten las propiedades de la fuerza nuclear y sus simetrías. Existen diversos tipos de interacciones fenomenológicas y todas ellas dependen de un número más o menos elevado de parámetros libres que deben ajustarse a datos experimentales. Un ejemplo de interacción efectiva, utilizada frecuentemente por su simplicidad y su capacidad de reproducir observables nucleares (energías de ligadura, radios, etc...), es la conocida fuerza de Skyrme. Este tipo de interacciones efectivas son sencillas de tratar matemáticamente debido a su alcance nulo (interacción localizada representada por funciones  $\delta$ ). Existen distintas parametrizaciones de la fuerza de Skyrme en el mercado. Se diferencian básicamente en el valor de sus parámetros libres ya que éstos se obtienen a partir del ajuste a unos datos experimentales u otros.

Partimos de la densidad de energía de Skyrme propuesta en [4],

$$\mathcal{H}^{Nuc} = \mathcal{T} + \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_{eff} + \dots \quad (35)$$

donde  $\mathcal{T}$  es la densidad de energía cinética,  $\mathcal{H}_0$  es el término de “alcance nulo” correspondiente a la interacción atractiva a dos cuerpos,  $\mathcal{H}_3$  es el término “dependiente de la densidad” que simula la interacción a tres cuerpos y  $\mathcal{H}_{eff}$  es el término en masa efectiva que proviene de la dependencia en momento de la interacción. Las expresiones para los distintos términos son,

$$\mathcal{T} = \frac{\hbar^2}{2m}(\tau_n + \tau_p),$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{4}t_0[(2 + x_0)\rho^2 - (2x_0 + 1)(\rho_p^2 + \rho_n^2)],$$

$$\mathcal{H}_3 = \frac{1}{24}t_3\rho^\alpha[(2 + x_3)\rho^2 - (2x_3 + 1)(\rho_p^2 + \rho_n^2)],$$

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{1}{8}[t_1(2 + x_1) + t_2(2 + x_2)](\tau_n + \tau_p)\rho + \frac{1}{8}[t_2(2x_2 + 1) - t_1(2x_1 + 1)](\tau_p\rho_p + \tau_n\rho_n),$$

donde  $\rho = \rho_p + \rho_n$  es la densidad total y  $\tau_q = \frac{3}{5}(3\pi^2)^{2/3}\rho_q^{5/3}$  es la densidad de energía cinética de la componente  $q = n, p$ . Los puntos [...] en (35) indican otros términos proporcionales a gradientes de la densidad que no contribuyen en el caso de materia nuclear ( $\nabla\rho = \nabla\rho_n = \nabla\rho_p = 0$ ). Los valores de los parámetros dependen del ajuste realizado. Para nuestro caso escogemos la ecuación de estado SLy4 que funciona especialmente bien para describir el outer-core de estrellas de neutrones. Los parámetros para esta fuerza de Skyrme son:  $t_0 = -2488.91 \text{ MeV fm}^3$ ,  $t_1 = 486.82 \text{ MeV fm}^5$ ,  $t_2 = -546.39 \text{ MeV fm}^5$ ,  $t_3 = 13777.00 \text{ MeV fm}^4$ ,  $x_0 = 0.834$ ,  $x_1 = -0.344$ ,  $x_2 = -1.000$ ,  $x_3 = 1.354$  y  $\alpha = 1/6$ .

### 3.2. Materia nuclear Beta-estable

La materia estelar que constituye la estrella de neutrones está formada por neutrones, protones y electrones en equilibrio beta. Esto implica neutralidad local de carga,

$$\rho_p = \rho_e, \quad (36)$$

y equilibrio químico entre desintegraciones  $\beta^- (n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e)$  y capturas electrónicas ( $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ ). El equilibrio químico implica que,

$$\mu_n - \mu_p - \mu_e = 0, \quad (37)$$

donde hemos supuesto que los neutrinos escapan de la estrella sin interactuar. El potencial químico de los electrones, tratados como un gas ideal ultrarelativista, viene dado por  $\mu_e = \hbar c (3\pi^2 \rho_e)^{1/3}$ . Los potenciales químicos de protones y neutrones pueden obtenerse a partir de la EOS (35) usando (11). Esto resulta,

$$\begin{aligned} \mu_n = \frac{5}{3} A \rho_n^{2/3} + \frac{t_0}{2} [\rho_n(1 - x_0) + \rho_p(x_0 + 2)] + \frac{t_3}{144} \left[ \frac{-13\rho_n^2(x_3 - 1) + 2\rho_n\rho_p(x_3 + 20) + \rho_p^2(11x_3 + 25)}{(\rho_n + \rho_p)^{5/6}} \right] \\ + C \left[ \frac{5}{3} \rho_n^{2/3}(\rho_n + \rho_p) + \rho_n^{5/3} + \rho_p^{5/3} \right] + \frac{8}{3} D \rho_n^{5/3}, \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_p = \frac{5}{3} A \rho_p^{2/3} + \frac{t_0}{2} [\rho_p(1 - x_0) + \rho_n(x_0 + 2)] + \frac{t_3}{144} \left[ \frac{-13\rho_p^2(x_3 - 1) + 2\rho_n\rho_p(x_3 + 20) + \rho_n^2(11x_3 + 25)}{(\rho_n + \rho_p)^{5/6}} \right] \\ + C \left[ \frac{5}{3} \rho_p^{2/3}(\rho_n + \rho_p) + \rho_n^{5/3} + \rho_p^{5/3} \right] + \frac{8}{3} D \rho_p^{5/3}, \quad (39) \end{aligned}$$

donde,

$$A = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{3}{5} (3\pi^2)^{2/3},$$

$$C = \frac{3}{40} (3\pi^2)^{2/3} [t_1(2 + x_1) + t_2(2 + x_2)],$$

$$D = \frac{3}{40} (3\pi^2)^{2/3} [t_2(2x_2 + 1) - t_1(2x_1 + 1)],$$

Para expresar la estabilidad  $\beta$  en una única ecuación es conveniente realizar el cambio de variables  $(\rho_n, \rho_p) \rightarrow (\rho, \delta)$ , donde

$$\delta = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho}, \quad \rho = \rho_n + \rho_p.$$

En función de estas nuevas variables, la condición de estabilidad  $\beta$  para SLy4 puede escribirse como,

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} (A + C\rho) \left( \frac{\rho}{2} \right)^{2/3} [(1 + \delta)^{2/3} - (1 - \delta)^{2/3}] - \frac{t_0}{2} \rho \delta (1 + 2x_0) \\ - \frac{t_3}{12} (2x_3 + 1) \delta \rho^{\alpha+1} + \frac{8}{3} D \left( \frac{\rho}{2} \right)^{5/3} [(1 + \delta)^{5/3} - (1 - \delta)^{5/3}] - \hbar c (3\pi^2 \rho_e)^{1/3} = 0, \quad (40) \end{aligned}$$

permitiendo expresar el equilibrio  $\beta$  a una densidad dada en función de una única variable, la asimetría  $\delta$ . La solución numérica de la ecuación (40) se presenta en la Figura 1 en función de

la densidad bariónica total. A medida que aumenta la densidad (yendo a regiones más internas del outer-core), se reduce la asimetría apareciendo más protones en el sistema. No obstante, los neutrones siguen aportando prácticamente  $\sim 90\%$  de la densidad total.

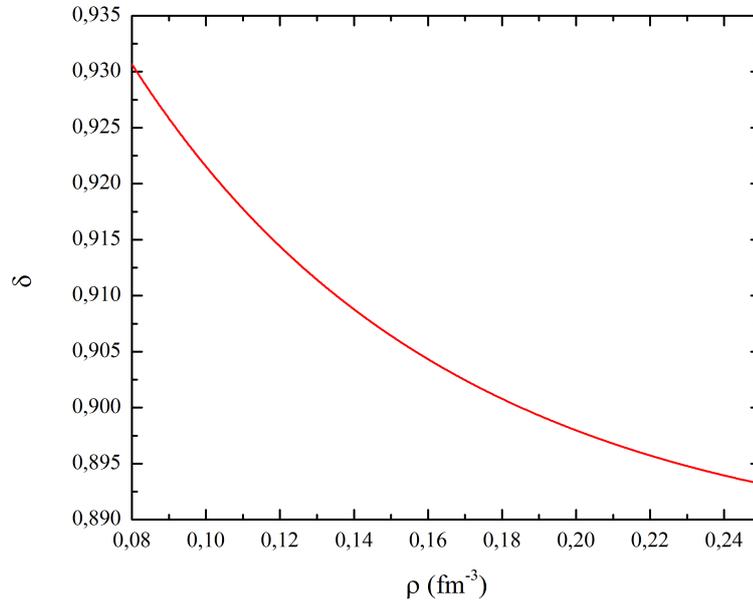


Figura 1: Asimetría en función de la densidad total en equilibrio beta para la fuerza de Skyrme SLy4.

Conociendo la proporción de protones y neutrones para una densidad dada (Figura 1), a partir de la ecuación (12) podemos obtener la presión del sistema en función de la densidad. Puede observarse un aumento progresivo de la presión con la densidad.

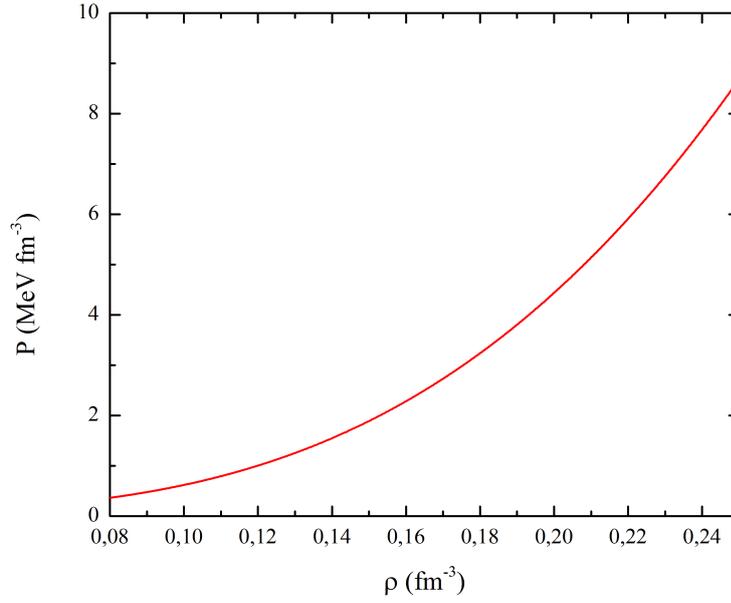


Figura 2: Presión en función de la densidad total utilizando la fuerza de Skyrme SLy4

Planteado el equilibrio  $\beta$ , pueden calcularse a partir de la ecuación de estado otras cantidades como la energía por partícula, los potenciales químicos y las derivadas de estos últimos ( $E_{\alpha\beta}$  con  $\{\alpha, \beta = n, p\}$ ). Los resultados se presentan en las Figuras 3, 4 y 5 respectivamente.

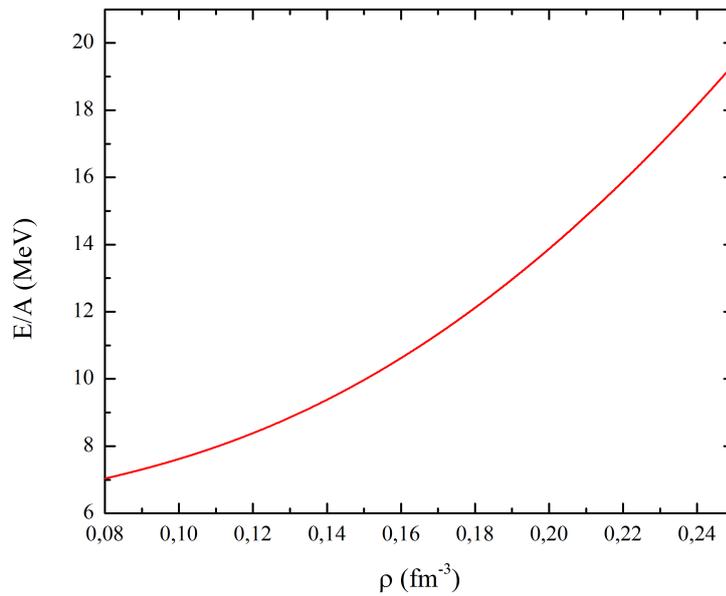


Figura 3: Energía por partícula SLy4 en función de la densidad total

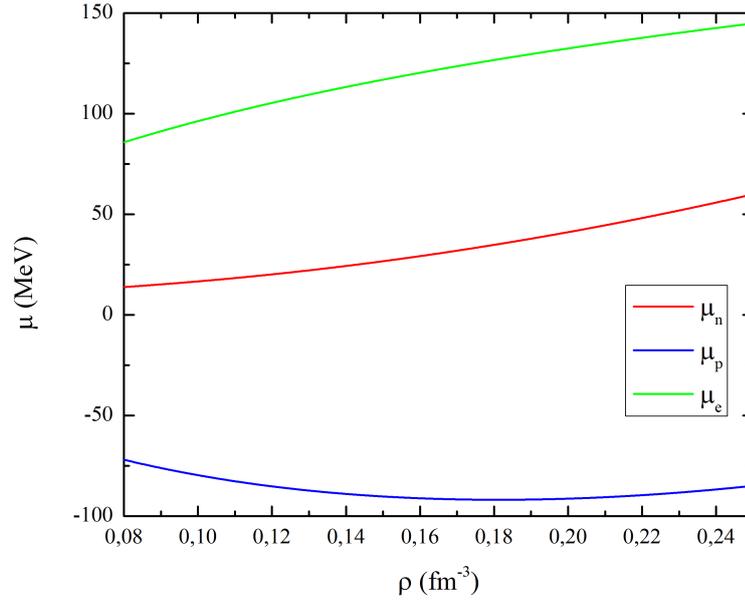


Figura 4: Potenciales químicos de neutrones, protones y electrones en función de la densidad. Sistema en equilibrio beta  $\mu_n = \mu_p + \mu_e$ .

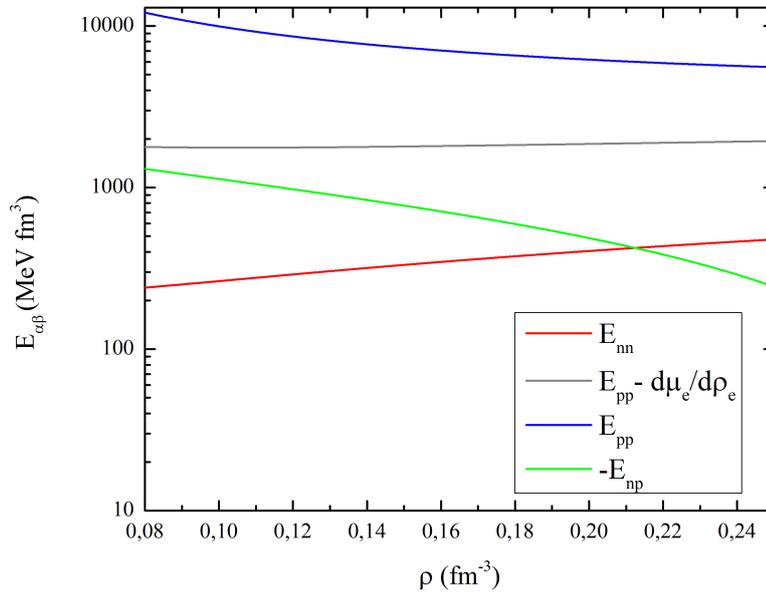


Figura 5: Valores de  $E_{\alpha\beta}$  en función de la densidad total obtenidos a partir de SLy4. La cantidad  $E_{pp}$  contiene la contribución electrónica  $\partial\mu_e/\partial\rho_e$  que resulta dominante.

## 4. Acoplamiento. Cálculo práctico de la matriz $\rho_{ij}$

Además de la interacción entre protones y neutrones que aparece de forma explícita en la ecuación de estado propuesta en la sección 3 (ecuación (35)), hemos relacionado el momento de cada componente con la corriente de ambas componentes a través de las cantidades  $\rho_{ij}$  (ecuaciones (3) y (4)). El objetivo de esta sección es calcular la matriz de arrastre  $\rho_{ij}$  siguiendo el método de Chamel&Haensel [2], que permite obtener, de una forma totalmente general, los parámetros del acoplamiento para líquidos de Fermi interactuantes en el límite de  $T = 0$ . Las densidades elevadas de nuestro sistema fijan los niveles de Fermi de cada una de las componentes uno (o dos) órdenes de magnitud por encima de los gaps de ambos superfluidos que se esperan  $\sim 1 - 3$  MeV (Fig. 3 de [5]). La contribución del pairing a la energía total del sistema es muy pequeña y puede prescindirse del pairing en el funcional de la energía. Añadiendo a este hecho la situación de  $T \rightarrow 0$ , más que justificada en este sistema, es lícito hacer uso de la teoría de Landau para líquidos de Fermi ultrafríos, marco teórico en el que se sitúa el método propuesto en [2]. Dentro de este marco, se definen los parámetros de Landau como segundas derivadas funcionales de la densidad de energía  $\mathcal{H}^{Nuc}$ ,

$$f^{qq'}(\vec{k}, \vec{k}') = \left. \frac{\delta^2 \mathcal{H}^{Nuc}}{\delta n^q(\vec{k}) \delta n^{q'}(\vec{k}')} \right|_0, \quad (41)$$

donde  $|_0$  indica que la variación se evalúa en el estado fundamental estático del sistema (que implica  $\vec{j}_q = 0$ ) y donde  $n^q$  son las funciones de distribución de los nucleones, relacionadas con las densidades de cada componentes como,

$$\rho_q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} n^q(\vec{k}).$$

Los parámetros  $f^{qq'}$  juegan el papel de una constante recuperadora y dan una idea de la elasticidad del medio frente a una variación local de la densidad de alguna de las componentes. Como comentábamos en la sección 2, la densidad de energía se descompone como  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{Kin} + \mathcal{H}^{Nuc}$ . El término estático depende únicamente de las densidades de las componentes mientras que, el término dinámico, depende de las densidades y también de los momentos (eq. (1)). El estado fundamental estático es estable si  $\mathcal{H}^{Kin} > 0$ . Esto significa que la matriz de arrastre debe estar definida positiva, por lo tanto,

$$\rho_{nn} + \rho_{pp} > 0, \quad \rho_{np}^2 < \rho_{nn}\rho_{pp}. \quad (42)$$

Alternativamente, esta condición de estabilidad puede expresarse imponiendo que  $\det[\rho_{ij}] > 0$  y  $\rho_{nn}, \rho_{pp} > 0$ .

La teoría de Landau relaciona los términos no diagonales  $\rho_{np}$  de la matriz  $\rho_{ij}$  con los momentos de Fermi  $k_{F_n}$  y  $k_{F_p}$  de neutrones y protones respectivamente a través del parámetro de Landau  $f_1^{np}$  correspondiente a la interacción entre neutrones y protones con  $l = 1$ . La relación es,

$$\frac{\rho_{np}}{m} = \frac{k_{F_n}^2 k_{F_p}^2}{9\pi^4} f_1^{np}. \quad (43)$$

Para interacciones de Skyrme,

$$f_1^{np} = -\frac{k_{F_n} k_{F_p}}{2} \left[ t_1 \left( 1 + \frac{x_1}{2} \right) + t_2 \left( 1 + \frac{x_2}{2} \right) \right]. \quad (44)$$

Introduciendo (44) en (43) y haciendo uso de  $k_F^q = (3\pi^2\rho_q)^{1/3}$  obtenemos,

$$\rho_{np} = \alpha_{np}\rho_n\rho_p, \quad (45)$$

donde

$$\alpha_{np} = -\frac{m}{2} \left[ t_1 \left( 1 + \frac{x_1}{2} \right) + t_2 \left( 1 + \frac{x_2}{2} \right) \right]. \quad (46)$$

Para la fuerza SLy4 se obtiene  $\alpha_{np} \approx -1,566 \text{ fm}^3$  y por lo tanto,

$$\rho_{np} \approx -1,566\rho_n\rho_p. \quad (47)$$

Finalmente la matriz de acoplamiento,

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} \rho_{nn} & \rho_{np} \\ \rho_{pn} & \rho_{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_n(1 + 1,566\rho_p) & -1,566\rho_n\rho_p \\ -1,566\rho_n\rho_p & \rho_p(1 + 1,566\rho_n) \end{pmatrix} \quad (48)$$

donde es fácil ver que  $\det[\rho_{ij}] > 0$ , condición de estabilidad del sistema.

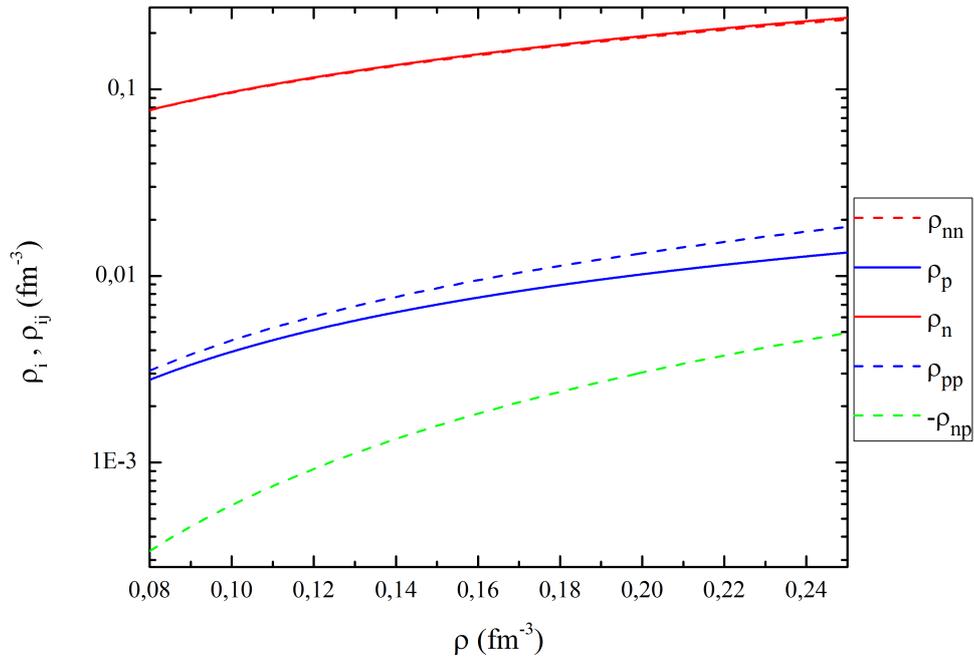


Figura 6: Matriz de arrastre  $\rho_{ij}$  en función de la densidad.

## 5. Modos longitudinales. Interpretación física

Una vez obtenida la matriz  $\rho_{ij}$  (ecuación (48)) y las cantidades termodinámicas  $E_{pp}$ ,  $E_{nn}$  y  $E_{np}$  (Figura 5), las velocidades de los modos longitudinales se obtienen de la ecuación (31) y se presentan, en unidades de la velocidad de la luz  $c$ , en función de la densidad total de bariones en la Figura 7.

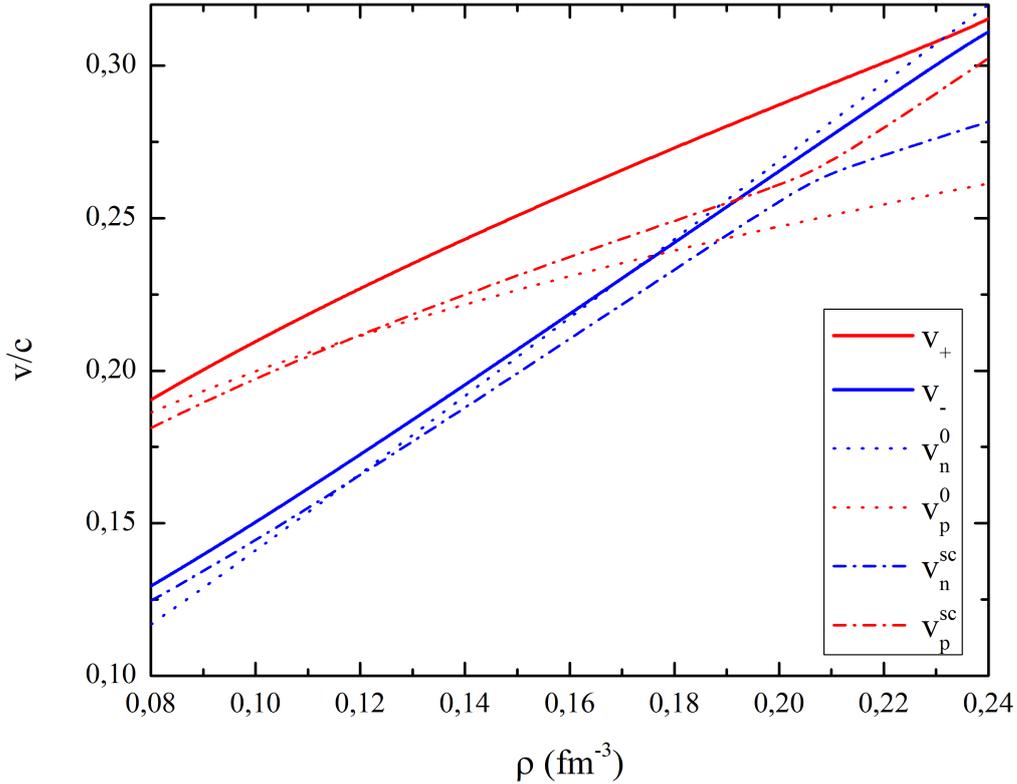


Figura 7: Velocidad de los modos longitudinales (velocidad del sonido) en el outer-core de la estrella de neutrones en función de la densidad de bariones.

Las líneas sólidas en la Figura 7 corresponden a las dos ramas  $v_{\pm}$  asociadas a la oscilación de la densidad de neutrones y protones tras perturbar el estado fundamental estático del sistema, en una situación con un perfil de densidad constante para las dos componentes en equilibrio beta. Las líneas de puntos  $\{\cdot\cdot\cdot\}$  corresponden a las velocidades de los modos en ausencia de acoplamiento entre las dos componentes ( $\rho_{np} = 0$  y  $E_{np} = 0$ ). Por otra parte, las líneas punteadas  $\{-\cdot-\cdot-\}$  corresponden a las velocidades de los modos incluyendo los efectos de  $E_{np}$  pero eliminando el *entrainment* ( $\rho_{np} = 0$ ). La notación  $v_i^{sc}$  significa “scalar coupling” haciendo referencia a que únicamente se acoplan las componentes a través de este mecanismo. Vemos que el *entrainment* afecta mucho más a los protones que a los neutrones, resultado lógico ya que en las ecuaciones dinámicas (8-9) vemos que el término de arrastre  $\propto \rho_{np}/\rho_i$  y  $\rho_n \gg \rho_p$ . Al “activar” el *entrainment*, la velocidad de los dos modos aumenta pero en diferente proporción. La velocidad del modo asociado a los protones se incrementa de forma considerable mientras que, la velocidad del modo asociado a los neutrones, lo hace ligeramente. Para densidades elevadas ( $> 0,20 \text{ fm}^{-3}$ ), la diferencia entre  $v_-$  y  $v_n^{sc}$  comienza a ser relevante.

Si dispusiéramos del espectro de excitaciones elementales en el superfluido (energía de las excitaciones en función del momento de las mismas), la velocidad del sonido podría obtenerse como la pendiente del diagrama de dispersión de dichas excitaciones en el límite de  $k \rightarrow 0$ . No obstante, el tratamiento hidrodinámico del sistema ya nos sitúa en este límite de longitudes de onda largas y podemos identificar la rama  $v_+$  con la velocidad máxima en el medio.

La rama  $v_-$  corresponde a la velocidad crítica del sistema (ver *Anexo A: Criterio de Landau para superfluidos*). La energía mínima necesaria para excitar el sistema y modificar el estado estacionario en el que se encuentra es  $mv_-^2$ . Una perturbación con una energía superior a este umbral podría inducir corrientes en el superfluido que podrían dar lugar a la generación de vórtices (o incluso solitones) que rompieran el estado de equilibrio del sistema.

Vemos que para mayor densidad, mayor es la velocidad del sonido. En general,  $v_{so} \sim \sqrt{\partial P / \partial \rho}$  y vemos en la Figura 2 que la presión del sistema crece con la densidad y, por lo tanto, la velocidad del sonido también.

Las figuras [8] y [9] nos informan de cómo se ven afectadas las densidades (y momentos) de las dos componentes cuando se introduce una pequeña perturbación en la densidad (y el momento) sobre el estado fundamental estático. Vemos que  $c_j/d_j < 0$  para las dos ramas y para todo el régimen de densidades. Ésto nos dice que la oscilación de las dos componentes no es en fase (también se ve claramente en la figura [9] donde  $\gamma_- < 0$  para todas las densidades). En la figura [9] vemos también que  $\gamma_+ \approx 0$ , diciéndonos que la amplitud de oscilación de los protones es, en términos relativos, mucho mayor que la de los neutrones y que, básicamente,  $v_+ \simeq c_{pp}$ .

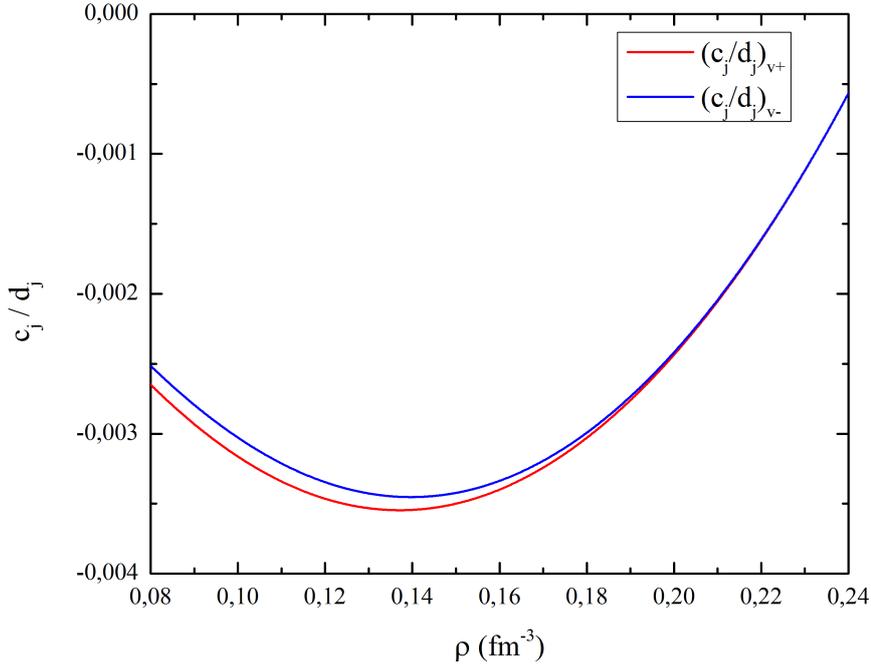


Figura 8: Autovectores correspondientes a los modos longitudinales  $v_{\pm}$  en función de la densidad total de bariones.

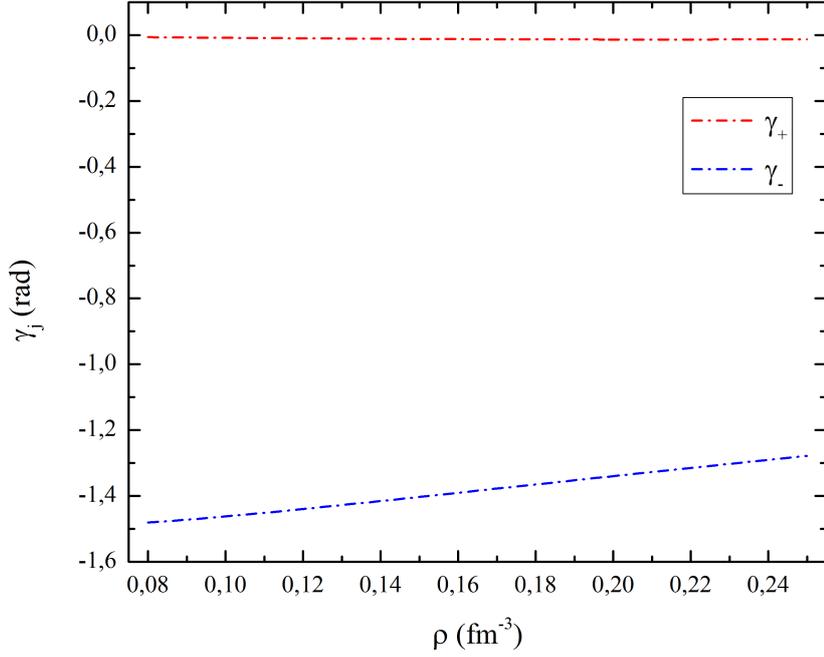


Figura 9: Ángulos de mezcla en función de la densidad total de bariones.  $\gamma_+$  asociado a la rama  $v_+$  (protones) y  $\gamma_-$  asociado a la rama  $v_-$  (neutrones).

## 6. Resultados numéricos

Consideremos ahora las ecuaciones (6-9) completas, es decir, sin despreciar los términos no lineales en la perturbación. Vamos a introducir una perturbación en el sistema y vamos a ver cómo evoluciona en el tiempo. El objetivo es calcular la velocidad con la que se propaga dicha perturbación por el medio (a una densidad dada), y compararla con la velocidad  $v_+$  que predice nuestro modelo (Figura 7). La perturbación introducida ha de ser pequeña si queremos comparar las dos velocidades y, por lo tanto, validar el modelo lineal presentado en este trabajo.

Consideremos una perturbación con forma gaussiana que afecte únicamente a la componente neutrónica. En concreto, un defecto puntual en la densidad de beta-equilibrio del sistema que, en el apartado 2, denotábamos como  $\rho_n^0$ . La perturbación la introducimos en el espacio de momentos y tiene una amplitud del 1% de la intensidad, en norma, respecto al valor estacionario con momento nulo. Escogemos una anchura para la perturbación de  $5 \text{ fm}$ . El perfil inicial de densidad para  $\rho = 0,16 \text{ fm}^{-3}$  con la perturbación en la componente neutrónica se presenta en la Figura 10.

Una vez introducida la perturbación, simulamos la evolución temporal de la misma en el medio. En la Figura 11 vemos cómo cambia el perfil de densidad inicial con el tiempo  $\tau$  (que se mide en unidades de  $\hbar/\mu_n$ ). Observamos la aparición de ondas alrededor del punto donde se introdujo la perturbación y como éstas se van difundiendo por el espacio disminuyendo su amplitud. El seguimiento de una de las crestas formadas (o valle) nos permite calcular la velocidad de propagación de la onda a través de la relación  $\Delta x/t$ .

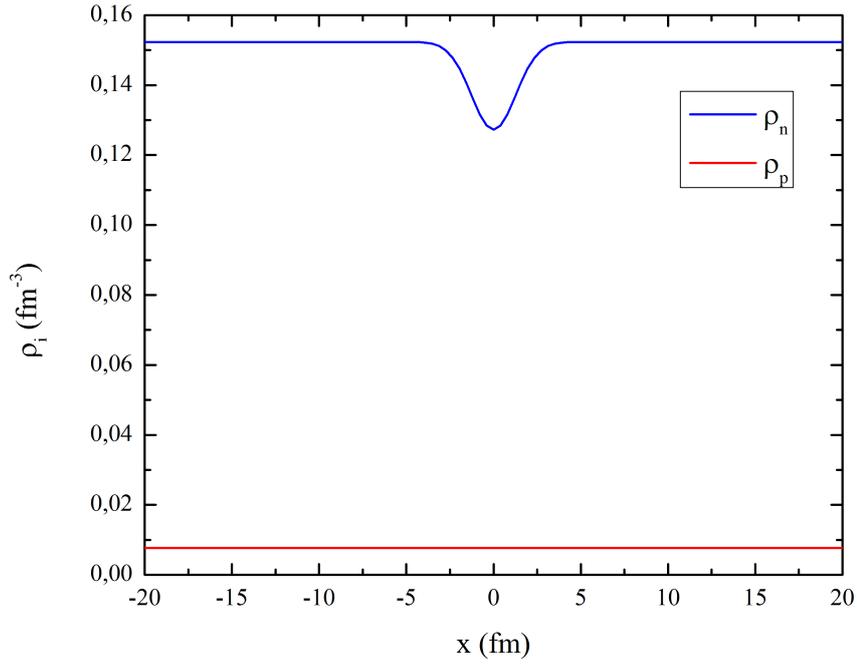


Figura 10: Perfil inicial de densidad para  $\rho = 0,16 fm^{-3}$  habiendo introducido una perturbación gaussiana en la densidad estacionaria de neutrones en equilibrio beta.

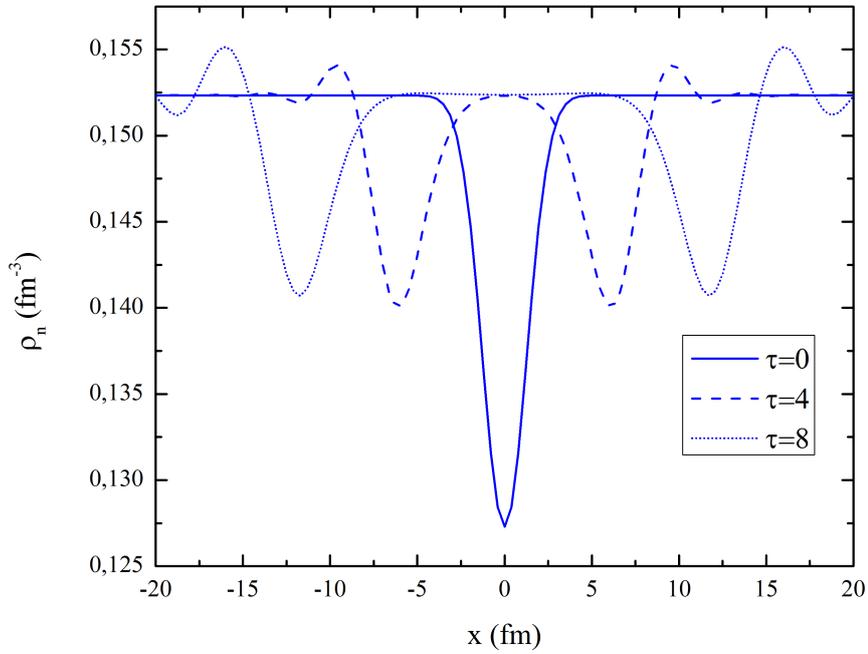


Figura 11: Evolución temporal del perfil de densidad de la componente neutrónica para  $\rho = 0,16 fm^{-3}$

La perturbación se transmite rápidamente a los protones como podemos ver en la Figura 12. Éstos responden oscilando en desfase respecto a los neutrones (como ya predecía nuestro modelo siendo  $\gamma_- < 0$ ). La perturbación en los protones se propaga en el espacio y, a diferencia de los neutrones, aumenta su amplitud con el tiempo. Esto era de esperar ya que  $\gamma_+ \simeq 0$  y la respuesta de los protones a la perturbación es más eficiente que la respuesta de los neutrones.

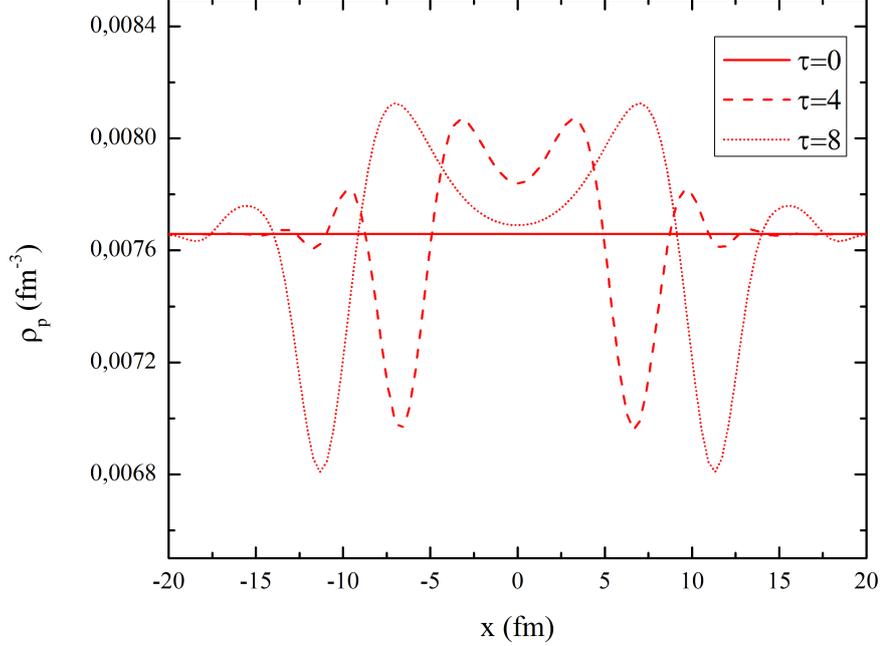


Figura 12: Evolución temporal del perfil de densidad de los protones para  $\rho = 0,16 fm^{-3}$ . Vemos como la perturbación en la densidad de neutrones se transmite rápidamente a las cargas positivas.

Hemos observado que introduciendo la misma perturbación en la componente neutrónica pero generando un exceso de densidad puntual respecto a la densidad estacionaria  $\rho_n^0$  (en vez de un defecto), la velocidad de propagación de la perturbación cambia de forma notoria. Esto podría deberse a que las perturbaciones que hemos escogidos no son del todo “pequeñas” y cambian localmente la densidad, lo que se traduce en cambios en la propagación de dichas perturbaciones. Es por esto que escogemos como velocidad de la perturbación el valor promedio de las dos velocidades obtenidas:  $v_{\rho^0+\delta\rho}$  y  $v_{\rho^0-\delta\rho}$  correspondientes al exceso y defecto de densidad respectivamente. En la Figura 13 presentamos los puntos  $(\Delta x, t)$  para  $\rho = 0,16 fm^{-3}$ , obtenidos a partir del seguimiento de los dos pulsos. También se presentan los ajustes lineales correspondientes que nos permiten extraer las velocidades mencionadas.

En la Tabla 1 se muestran las velocidades que se obtienen de la simulación ( $v_{\rho^0-\delta\rho}, v_{\rho^0+\delta\rho}$ ), su promedio ( $\bar{v}$ ) y la velocidad de la perturbación que proporciona el modelo (Figura 7) para tres densidades diferentes. El acuerdo entre  $\bar{v}$  y  $v_+^{model}$  para  $\rho = 0.16$  y  $0.22 fm^{-3}$  es razonable, no muestran discrepancias significativas. Sin embargo, para  $\rho = 0.1 fm^{-3}$  no podemos decir que el acuerdo entre las dos velocidades sea satisfactorio. Es posible que la distorsión en la densidad que genera la perturbación (quizás no es tal), afecte notablemente a la dinámica de la misma situándonos fuera del límite  $k \rightarrow 0$  en el cual es válido nuestro modelo. Quizás la combinación de una densidad baja ( $0.10 fm^{-3}$ ) con una perturbación grande saquen al sistema del régimen

lineal de una forma más notoria que para densidades mayores, provocando las discrepancias relevantes entre las dos velocidades para  $0.1 fm^{-3}$ .

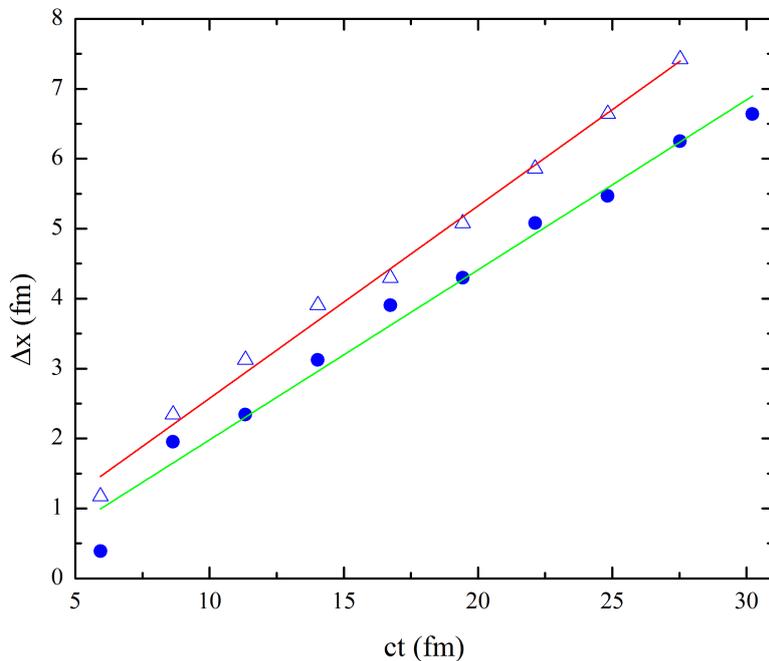


Figura 13: Desplazamiento en función del tiempo de la perturbación en la componente neutrónica para  $\rho = 0,16 fm^{-3}$ . Los triángulos corresponden a la perturbación que introduce un exceso local de densidad y los puntos, a la que introduce un defecto. A partir de los ajustes lineales obtenemos  $v_{\rho^0+\delta\rho} = (0,27 \pm 0,01)c$  y  $v_{\rho^0-\delta\rho} = (0,24 \pm 0,01)c$ .

$\rho[fm^{-3}]$	$v_{\rho^0-\delta\rho}(\pm 0.01)$	$v_{\rho^0+\delta\rho}(\pm 0.01)$	$\bar{v}(\pm 0.01)$	$v_+^{model}$
0.10	0.18	0.20	0.19	0.209
0.16	0.24	0.27	0.25	0.258
0.22	0.29	0.34	0.31	0.301

Tabla 1: Comparación de la velocidad promedio  $\bar{v} = (v_{\rho^0-\delta\rho} + v_{\rho^0+\delta\rho})/2$  con la velocidad predicha por el modelo para la perturbación ( $v_+^{model}$ ) para tres densidades representativas diferentes: 0.10, 0.16 y 0.22  $fm$ .

## 7. Discusión y conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la dinámica superfluida de los cores de las estrellas de neutrones utilizando un modelo hidrodinámico para dos superfluidos formados por pares de Cooper de neutrones y protones respectivamente. Nuestro modelo considera un acoplamiento doble entre ambos superfluidos, por velocidad (el arrastre no disipativo) y a través de la interacción nucleón-nucleón efectiva SLy4 en la que se basa la ecuación de estado de la materia betaestable empleada en el cálculo. Esta ecuación de estado es realista en el sentido de que se ha empleado en cálculos astrofísicos de estrellas de neutrones, tanto en el crust como en el core. Nuestro estudio se ha centrado en el cálculo de las excitaciones elementales del sistema superfluido con densidad constante a partir de las ecuaciones de movimiento linealizadas. De esta manera hemos podido obtener dos ramas de dispersión independientes que proporcionan dos velocidades de propagación de las perturbaciones equivalentes a las velocidades del sonido en fluidos convencionales. De acuerdo con el criterio de Landau, la rama de menor energía conduce a la menor velocidad crítica para la excitación del estado superfluido y es por tanto relevante para la producción de inestabilidades hidrodinámicas que podrían ser detectadas en observaciones astronómicas.

Las predicciones analíticas del modelo linealizado han sido contrastadas con la solución numérica de las ecuaciones no lineales completas. Para ello hemos introducido una perturbación gaussiana sobre el estado estacionario de densidad constante y hemos seguido su evolución en el tiempo. La velocidad de propagación observada coincide razonablemente bien con la velocidad máxima predicha.

Una posible extensión/continuidad del trabajo sería estudiar cómo cambian los resultados obtenidos al introducir la interacción coulombiana de las cargas positivas con los electrones en las ecuaciones dinámicas completas fuera del límite de frecuencias pequeñas comparadas con las del plasma de electrones y longitudes de onda largas comparadas con la longitud de apantallamiento de Debye. También sería interesante estudiar la sensibilidad del sistema frente a otras fuerzas de Skyrme incluyendo el potencial coulombiano (o no incluyéndolo) así como el estudio de la estabilidad del sistema alrededor de los estados estacionarios donde las componentes están en movimiento. Por último, otra posible propuesta es la ampliación del modelo a 2D y ver cómo la inestabilidad del sistema puede dar lugar a vórtices en el seno del superfluido...

# Anexos

## A. Criterio de Landau para superfluidos

El criterio de Landau para superfluidos se basa en las transformaciones galileanas de la energía y el momento. Sean  $E$  y  $\vec{P}$  la energía y el momento de un fluido de masa  $M$  en un sistema de referencia  $K$  y sean  $E'$  y  $\vec{P}'$  la energía y el momento del mismo fluido pero en un sistema de referencia  $K'$  que se mueve respecto a  $K$ , con una velocidad relativa  $\vec{V}$ . Podemos escribir las relaciones,

$$\vec{P}' = \vec{P} - M\vec{V} \quad (49)$$

$$E' = \frac{|\vec{P}'|^2}{2M} = E - \vec{P} \cdot \vec{V} + \frac{1}{2}M|\vec{V}|^2, \quad (50)$$

donde  $E = \frac{|\vec{P}|^2}{2M}$ . Consideremos el fluido a temperatura cero y con todas sus partículas en el estado fundamental fluyendo a lo largo de un capilar a velocidad constante  $\vec{v}$ . Si el fluido es viscoso, el movimiento producirá disipación de energía por fricción con las paredes del capilar y disminuirá la energía cinética del fluido. Asumiremos que los procesos disipativos se producirán por creación de una excitación elemental en el seno del fluido (aparición/destrucción de una cuasipartícula). Empecemos describiendo este proceso en el sistema de referencia  $K$  que, por simplificar, se mueve con la misma velocidad  $\vec{v}$  que el fluido. En este sistema de referencia, el fluido está en reposo. Si aparece una única excitación elemental con momento  $\vec{p}$ , la energía total del fluido en el sistema de referencia  $K$  será  $E_0 + \epsilon(\vec{p})$ , donde  $E_0$  es la energía del estado fundamental y  $\epsilon(\vec{p})$  la energía de la excitación elemental. Situándonos en el sistema de referencia móvil  $K'$  y escogiendo  $\vec{V} = \vec{v}$ , las ecuaciones (50)-(51) se reescriben,

$$\vec{P}' = \vec{p} + M\vec{v}, \quad (51)$$

$$E' = E_0 + \epsilon(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2}M|\vec{v}|^2. \quad (52)$$

Los resultados anteriores indican que los cambios en la energía y el momento del fluido causados por las aparición de una excitación elemental son  $\epsilon(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v}$  y  $\vec{p}$ , respectivamente. La creación espontánea de una excitación elemental puede darse si y sólo si tal proceso es energéticamente favorable. Ésto es si,

$$\epsilon(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v} < 0. \quad (53)$$

La condición anterior se satisface cuando  $|\vec{v}| > \epsilon(\vec{p})/|\vec{p}|$  y  $\vec{p} \cdot \vec{v} < 0$ , es decir, cuando la excitación elemental tiene un momento  $\vec{p}$  opuesto a la velocidad del fluido  $\vec{v}$ , excediendo  $|\vec{v}|$  el valor crítico,

$$v_c = \min_{\vec{p}} \frac{\epsilon(\vec{p})}{|\vec{p}|} \quad (54)$$

donde el mínimo está calculado sobre todos los valores de  $\vec{p}$ . Si la velocidad relativa entre el fluido y el capilar es inferior a  $v_c$ , no aparecerán, de forma espontánea, excitaciones elementales en el sistema.

## Referencias

- [1] D. N. KOPYAKOV and C. J. PETHICK, *Two-component Superfluid Hydrodynamics of Neutron Star Cores*, The Astrophysical Journal 836:203 (2017)
- [2] NICOLAS CHAMEL and PAWEL HAENSEL, *Entrainment parameters in a cold superfluid neutron stars core*, Phys. Rev. C 73, 045802 (2006)
- [3] D. N. KOPYAKOV and C. J. PETHICK, *Dynamics of the inner crust of neutron stars: Hydrodynamics, elasticity and collective modes*, Phys. Rev. C 87, 055803 (2013)
- [4] E. CHABANAT, P. BONCHE and P. HAENSEL, *A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities, Part II: Nuclei far from stabilities*, Nuclear Physics A 635 (1998) 231-256
- [5] E. GARRIDO, P. SARRIGUREN, E. MOYA DE GUERRA and P. SCHUCK, *Effective density-dependent pairing forces in the  $T=1$  and  $T=0$  channels*, Phys. Rev. C 60, 064312 (1999)
- [6] J. A. SAULS, *Superfluidity in the interiors of Neutron Stars*, NATO ASI Series C, Vol.262, pp.457-490 (1989)
- [7] BAADE, WALTER AND ZWICKY, FRITZ, *Cosmic rays from super-novae*, 20(5):259-263 (1934)
- [8] HEWISH, ANTONY AND BELL, S. JOCELYN AND PILKINGTON, JDH AND SCOTT, PAUL FREDERICK AND COLLINS, ROBIN ASHLEY, *Observation of a rapidly pulsating radio source*, Nature 217(5130):709-713 (1968)
- [9] AB MIGDAL, *Superfluidity and the moments of inertia of nuclei*, Sov. Phys. JETP, 10:176 (1960)
- [10] VL. GINZBURG AND DA. KIRZHNITS, *On the superfluidity of neutron stars*, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz., 47 (1964)
- [11] GORDON BAYM, CHRISTOPHER PETHICK AND DAVID PINES, *Superfluidity in neutron stars*, Nature 224(5220):673-674 (1969)
- [12] GORDON BAYM, CHRISTOPHER PETHICK, DAVID PINES AND MALVIN RUDERMAN, *Spin up in neutron stars: the future of the Vela pulsar*, Nature 224(5222):872-874 (1969)
- [13] PW. ANDERSON AND N. ITOH, *Pulsar glitches and restlessness as a hard superfluidity phenomenon*, Nature 256(5512):25-27 (1975)
- [14] NICOLAS CHAMEL, *Neutron conduction in the inner crust of a neutron star in the framework of the band theory of solids*, Phys. Rev. C 85(3):035801 (2012)
- [15] BRYNMOR HASKELL AND ANDREW MELATOS, *Models of pulsar glitches*, International Journal of Modern Physics D, 24(03):1530008 (2015)
- [16] GENTARO WATANABE AND CJ. PETHICK, *Superfluid Density of Neutrons in the Inner Crust of Neutron Stars: New Life for Pulsar Glitch Models*, arXiv preprint arXiv:1704.08859 (2017)
- [17] JR. FUENTES, CM. ESPINOZA, A. REISENEGGER, BW. STAPPERS, B. SHAW AND AG. LYNE, *The glitch activity of neutron stars*, arXiv preprint arXiv:1710.00952 (2017)

- [18] WYNN CG HO, CRISTOBAL M ESPINOZA, DANAI ANTONOPOULOU AND NILS ANDERSSON, *Pinning down the superfluid and nuclear equation of state and measuring neutron star mass using pulsar glitches*, 14th International Symposium on Nuclei in the Cosmos (NIC2016), page 010805 (2017)
- [19] MICHAEL ROBIN MATTHEWS, BRIAN P ANDERSON, PC HALJAN, DS HALL, CE WIE- MAN, AND ERIC A CORNELL, *Vortices in a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. 83(13):2498 (1999)
- [20] JR. ABO-SHAEER, C. RAMAN, JM. VOGELS AND WOLFGANG KETTERLE, *Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates*, Science 292(5516):476-479 (2001)
- [21] MW. ZWIERLEIN, JR. ABO-SHAEER, A. SCHIROTZEK, CH. SCHUNCK, AND W. KET- TERLE, *Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas*, Nature 435:1047-1051 (2005)
- [22] DN. KOBYAKOV, CHRISTOPHER J. PETHICK, S. REDDY AND A. SCHWENK, *Dispersion and decay of collective modes in neutron star cores*, Phys. Rev. C, 96(2):025805 (2017)
- [23] VANESSA GRABER, NILS ANDERSSON AND MICHAEL HOGG, *Neutron stars in the laboratory*, International Journal of Modern Physics D, page 1730015 (2016)
- [24] X. R. SHOU, H. J. SHULZE, E, G. ZHAO, FENG PAN, J. P. DRAAYER, *Pairing gaps in neutron stars*, Phys. Rev. C 70, 048802 (2004)
- [25] N. ANDERSON, G. L. COMER AND R. PRIX, *The superfluid two-stream instability*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 354, 101-110 (2004)
- [26] NICOLAS CHAMEL, *Superfluidity and Superconductivity in Neutron Stars*, J. Astrophys. Astr. 38, 43 (2017)
- [27] P. W. ANDERSON, *Considerations on the Flow of Superfluid Helium*, Reviews of Modern Physics 38, 2 (1966)
- [28] A. G. ANDREEV and E. P. BASHKIN, *Three-velocity hydrodynamics of superfluid solutions*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 69, 319-326 (1975)
- [29] V. M. KAUROV and A. B. KUKLOV and A. E. MEYEROVICH, *Drag Effect and Topological Complexes in Strongly Interacting Two-Component Lattice Superfluids*, Phys. Rev. Lett. 95, 090403 (2005)