

Estudio del proceso de dispersión electrón-núcleo en la aproximación de impulso



TRABAJO FIN DE MÁSTER

Alejandro Barba Lobo

Director : Juan Antonio Caballero Carretero

Máster Interuniversitario en Física Nuclear

Curso 2016/2017

*Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear,
Universidad de Sevilla, ES-41080 Sevilla, España.*

Índice General

- Abstract.	4
1 Introducción.	5
1.1 Propiedades de la dispersión de electrones por núcleos	5
1.2 Sección eficaz de dispersión	6
1.3 Motivación y estructura del trabajo	6
2 Formalismo general.	8
2.1 Aproximación de Born de ondas planas (PWBA)	8
2.1.1 Sección eficaz de dispersión	9
2.1.2 Descomposición en funciones respuestas	11
2.2 Cinemática general del proceso $(e,e'N)$	14
3 Aproximación de impulso de ondas planas (PWIA).	20
3.1 Sección eficaz diferencial en PWIA: factorización	21
3.2 Carácter “off-shell” del nucleón ligado	23
3.3 Tensor nucleónico en procesos $A(e,e'N)$	24
3.4 Respuestas nucleónicas (“single-nucleon”) en procesos $A(e,e'N)$	26
3.5 Distribución de momentos en procesos $A(e,e'N)B$	28
3.5.1 Modelos nucleares	28
3.6 Prescripción “on shell”	32
4 Análisis de los resultados.	34
4.1 Respuestas nucleónicas en cinemática $(q-y)$ constante	34
4.2 Respuestas nucleónicas en cinemática paralela	40
4.3 Sección eficaz “single-nucleon”	45
4.4 Funciones radiales y distribuciones de momentos	49
4.5 Respuestas nucleares en cinemática $(q-y)$ constante	52
Apéndice.	69
5 Conclusiones.	73
6 Referencias.	74

Abstract

En este trabajo realizaremos un estudio de la dispersión de electrones con núcleos. Nos centraremos principalmente en la denominada aproximación de impulso de ondas planas (PWIA), en la cual se considera que tras la colisión del electrón inicial con el núcleo, el fotón intercambiado interacciona con un único nucleón. Así pues, dicho nucleón será eyectado y se detectará en coincidencia con el electrón dispersado. Con el fin de simplificar el proceso, la descripción del nucleón en el estado final se realizará en la aproximación de ondas planas, es decir, no consideraremos efectos asociados a la interacción de estados finales entre el nucleón emitido y el núcleo residual. Por último, analizaremos los efectos “off-shell” debidos al carácter del nucleón ligado (se encuentra fuera de la capa de masas), y los efectos nucleares producidos por el modelo nuclear.

1 Introducción.

1.1 Propiedades de la dispersión de electrones por núcleos.

La dispersión de electrones por núcleos es un método muy potente para el estudio de la estructura nuclear. Este método tiene numerosas aplicaciones y, a su vez, dependiendo de la región del espectro que se considere, permite obtener información precisa sobre la estructura de los núcleos y sus constituyentes, como por ejemplo, propiedades del estado fundamental de los núcleos, transiciones electromagnéticas entre estados discretos, propiedades colectivas y la estructura de los nucleones. Todo esto es debido a las propiedades de la interacción entre el electrón y el núcleo:

- La interacción que predomina entre el electrón y el núcleo es la electromagnética, por lo que el vértice leptónico queda perfectamente descrito a través de la Electrodinámica Cuántica (QED), que es la teoría física más precisa en la actualidad.
- La constante de acoplo de dicha interacción es $\alpha = \frac{1}{137}$, cuyo valor es relativamente pequeño. Esto conlleva dos ventajas: en primer lugar, la aproximación de intercambio de un fotón resulta una excelente descripción del proceso y, en segundo lugar, el electrón puede explorar todo el volumen nuclear sin causarle alteraciones significativas.
- Por último, puesto que el fotón intercambiado en el proceso de interacción proyectil-blanco es virtual, la energía (ω) y el momento (q) transferidos al núcleo pueden variar independientemente, los cuales se encuentran solo bajo una restricción $Q^2 = \omega^2 - q^2 < 0$, siendo $Q^2 = Q_\mu Q^\mu$, con $Q^\mu = (\omega, \mathbf{q})$, donde Q^μ es el cuadrimomento transferido. En la Sección 2 verificaremos que Q^2 es negativo.

Las características mencionadas hacen que el uso de electrones presente ventajas frente al uso de nucleones como proyectiles, ya que en este último caso lo que predomina es la interacción fuerte, siendo la constante de acoplo alta (dificultando enormemente el tratamiento perturbativo), y descrita a través de modelos fenomenológicos (lo que impide extraer información clara de dichos procesos).

El uso de electrones como proyectiles presenta sin embargo también ciertos inconvenientes. En el ámbito experimental, las secciones eficaces son muy pequeñas, por lo que la tasa de recuento para este tipo de experimentos es normalmente baja, complicando el análisis de los resultados. Por otra parte, a nivel teórico, existen todavía incertidumbres significativas. En este trabajo vamos a realizar un estudio de las incertidumbres asociadas al carácter “off-shell” del nucleón ligado y al gauge escogido. Además, otro objetivo será estudiar los efectos nucleares debidos al modelo nuclear usado en la descripción del proceso.

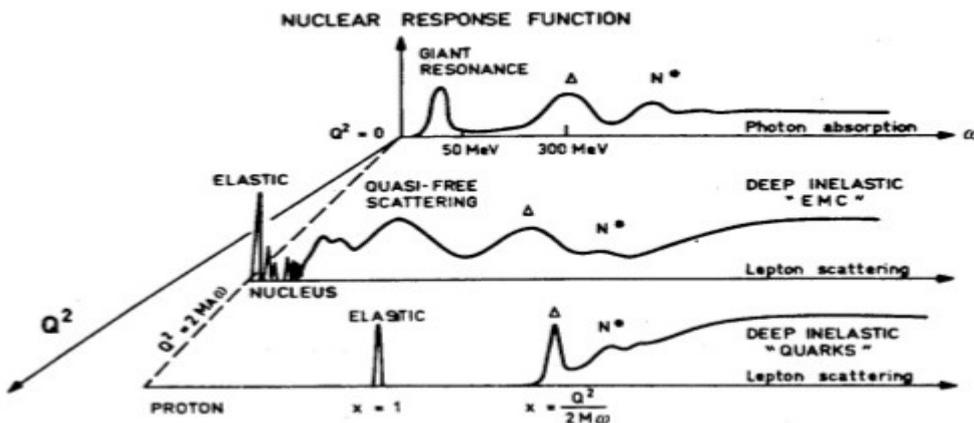


Figura 1: Sección eficaz de dispersión de electrones por núcleos en función de la energía y el momento transferidos en el proceso.

Antes de concretar los temas que vamos a tratar, es conveniente realizar un análisis general de las distintas regiones del espectro.

1.2 Sección eficaz de dispersión.

En la figura 1 representamos la respuesta nuclear en un proceso de dispersión de electrones en función de la energía y momento transferidos en el mismo. Podemos distinguir las siguientes regiones:

- Para momentos transferidos bajos se observan una serie de picos en el espectro, que corresponden a las zonas de dispersión elástica e inelástica:
 - En la región elástica la energía transferida se emplea en comunicar energía cinética al núcleo, el cual queda en su estado fundamental. Esto hace que dicha zona sea interesante para el estudio de propiedades del estado fundamental del núcleo, tales como distribuciones de carga y corriente.
 - En la zona inelástica se producen excitaciones del núcleo a estados discretos, es decir, se pasa del estado fundamental a estados excitados.
- A energías transferidas mayores se encuentra el pico correspondiente a la resonancia gigante, estado debido a excitaciones colectivas del núcleo.
- La siguiente región se denomina pico cuasielástico (QEP). En ella el proceso más probable es aquel en el que un nucleón es extraído del núcleo. Se establece la interacción de un fotón con un nucleón, donde este último absorbe la energía transferida, de forma que éste posee energía suficiente para alcanzar un estado del continuo. Esta zona debe su nombre a que este proceso puede interpretarse como una dispersión elástica del nucleón por electrones, puesto que la estructura interna del nucleón no se ve afectada por la interacción. El estudio realizado en este trabajo corresponde a esta región cinemática.
- Para energías transferidas aún mayores nos encontramos en la zona de dispersión profundamente inelástica. En esta situación las funciones de respuestas (los observables) dependen únicamente de la variable de “scaling” de Bjorken, x , donde $x = |Q^2|/2M_N\omega$, siendo M_N la masa del nucleón. Esto es una indicación de la existencia de quarks (partones) en el interior de los nucleones.

1.3 Motivación y estructura del trabajo.

El objetivo de este trabajo es el análisis del proceso $A(e,e'N)B$. En este tipo de reacción, un electrón incide sobre un núcleo blanco A, consecuentemente se emite un nucleón (nucleón saliente), que se detecta en coincidencia con el electrón dispersado. El análisis de procesos $(e,e'N)$ en la zona QEP ha proporcionado información muy valiosa sobre la función de onda individual de los nucleones, permitiéndonos determinar sus energías y distribuciones de momento, así como factores espectroscópicos. Este tipo de procesos en coincidencia plantea no obstante serias dificultades experimentales, ya que las secciones eficaces, que son pequeñas en estos procesos electromagnéticos, se ven aún más reducidas al tener en cuenta que se detecta un nucleón en coincidencia con el electrón. Esto obliga al uso de detectores muy sensibles y aceleradores de alto rendimiento.

Hasta finales de los 80 aproximadamente, el análisis teórico de los procesos $(e,e'N)$ se ha basado en cálculos no relativistas. Esto se realizaba en la denominada aproximación de impulso de ondas distorsionadas (DWIA), la cual tiene en cuenta la interacción de estados finales que existe entre el nucleón saliente y el núcleo residual. Sin embargo, las energías y momentos alcanzados en las dos últimas décadas invalidan en gran medida las aproximaciones no relativistas. Por este motivo, se

introduce un tratamiento relativista mediante la aproximación de impulso relativista de ondas distorsionadas (RDWIA). Los cálculos de las distribuciones de momentos, factores espectroscópicos y funciones de respuesta, realizados haciendo uso de la aproximación relativista de campo medio, están en mejor acuerdo con los datos experimentales en el caso de los factores espectroscópicos [1-7].

En lo referente a los efectos nucleares, introduciremos la distribución de momentos para distintos modelos nucleares como son: el oscilador armónico (HO), y modelos relativistas de campo medio (RMF) como son HS y NLHS. El modelo HO es un modelo no relativista que introduce un potencial de oscilador armónico, como consecuencia de ello, utilizaremos la ecuación de Schrödinger para el estudio de este modelo. Por el contrario, los modelos RMF son modelos relativistas que introducen un potencial vector y otro escalar, utilizándose en este caso la ecuación de Dirac para su análisis.

Debido al carácter “off-shell” de los nucleones ligado y saliente (están fuera de la capa de masas), emplearemos distintas prescripciones para el operador de corriente, además de la elección del gauge de trabajo. Para las distintas prescripciones realizaremos un tratamiento de las incertidumbres “off-shell”.

Para una comparación precisa con los datos experimentales es necesaria la introducción de la interacción de estados finales (FSI), debido a que existe una distorsión de la función de onda del nucleón saliente como consecuencia de la interacción de éste con el núcleo residual. Sin embargo, puesto que en este trabajo no realizamos un análisis de los datos experimentales, nos centraremos en la aproximación de impulso de ondas planas (PWIA), la cual simplifica enormemente los cálculos.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en primer lugar, en las Secciones 2 y 3 se presenta el formalismo general del que haremos uso en las diferentes aproximaciones. Trataremos el proceso tipo $A(e,e'N)B$, para el cual se calculará el denominado tensor nucleónico para dos expresiones del operador de corriente, las respuestas “single-nucleon” para tres gauges, y las distribuciones de momentos para los modelos nucleares mencionados anteriormente (Secciones 3.3, 3.4, 3.5 y 3.5.1). En la Sección 3.6 explicaremos brevemente en qué consiste la denominada aproximación “on-shell”. Las respuestas y secciones eficaces nucleónicas, funciones radiales, distribuciones de momentos y respuestas nucleares, serán analizadas en la Sección 4. Por último, en la Sección 5 presentaremos las conclusiones que obtengamos de dicho análisis.

Durante todo el trabajo se tomará $\hbar \equiv c \equiv 1$ (sistema de unidades naturales). Además, los cuadvectores serán representados con letras mayúsculas (A), los trivectores con letras minúsculas en negrita (\mathbf{a}), y sus módulos en letras tipo normal (a).

2 Formalismo general.

En este capítulo iremos desarrollando el formalismo para describir procesos $A(e,e'N)B$, realizando una serie de aproximaciones razonables que simplificarán los cálculos y harán más comprensible el mecanismo de la reacción.

Ya mencionamos que la constante de acoplo de la interacción electromagnética es α (constante de estructura fina), y que ésta permite un desarrollo perturbativo, en el que el orden predominante es el primero (“leading order”). De esta forma, la interacción electrón-núcleo queda bien descrita mediante el intercambio de un sólo fotón entre ellos, lo que se conoce como aproximación de Born (BA).

Asimismo, consideramos que el electrón incidente y el dispersado se comportan como ondas planas, despreciándose la distorsión causada por el potencial coulombiano. Así pues, resulta la aproximación de Born de ondas planas (PWBA), la cual es muy aceptable para núcleos ligeros y electrones ultrarrelativistas.

Para blancos medios o pesados es necesario considerar los posibles efectos producidos por el núcleo sobre la función de onda electrónica, en cuyo caso, sería conveniente utilizar la aproximación de Born de ondas distorsionadas (DWBA). Dado que en este trabajo no analizaremos datos experimentales, nos centraremos en la aproximación PWBA.

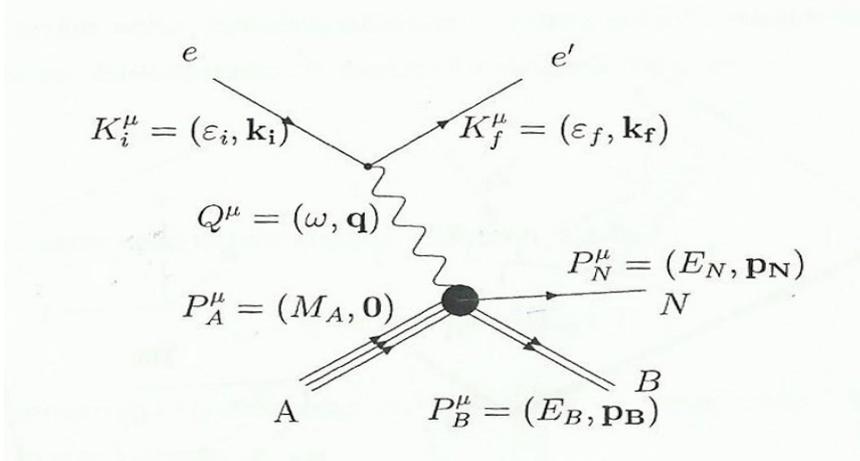


Figura 2: Diagrama de Feynman del proceso $A(e,e'N)B$ en la aproximación de Born.

2.1 Aproximación de Born de ondas planas (PWBA).

La figura 2 se corresponde con el proceso en el que un electrón con cuadrivector K_i^μ interactúa con un blanco A inicialmente en reposo, transfiriéndole una energía ω y un momento \mathbf{q} a través de un fotón virtual, arrancándose un nucleón de A, quedando un núcleo residual B caracterizado por el cuadrivector P_B^μ . El electrón, tras ser dispersado un ángulo θ_e , posee un cuadrivector K_f^μ . Las energías del nucleón saliente y del núcleo residual son $E_N = \sqrt{p_N^2 + M_N^2}$ y $E_B = \sqrt{p_B^2 + M_B^2}$, respectivamente, siendo M_B la masa del núcleo residual en su estado de excitación. Trabajaremos en el sistema laboratorio (“lab-frame”) y consideraremos los electrones como ultrarrelativistas (ERL), por lo que sus energías coinciden con los módulos de sus momentos: $\epsilon_i = k_i$, $\epsilon_f = k_f$.

En cuanto al sistema de coordenadas, el momento transferido \mathbf{q} define la dirección del eje z, y el plano que contiene a \mathbf{k}_i y \mathbf{k}_f es el plano xz, conocido como plano de dispersión. El triedro que define tal sistema será:

$$\hat{z} = \frac{\mathbf{q}}{q} \quad \hat{y} = \frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f}{|\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f|} \quad \hat{x} = \hat{y} \times \hat{z} \quad (1)$$

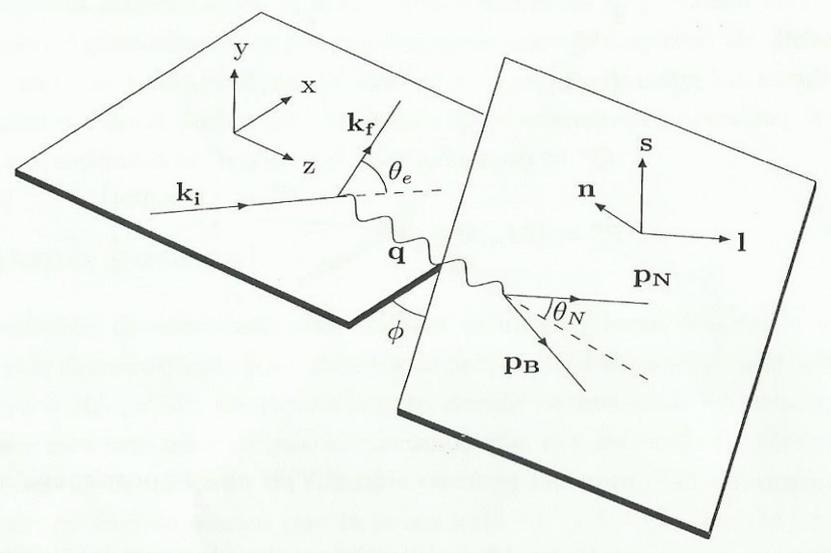


Figura 3: Representación esquemática del proceso $A(e, e' N)B$.

En la figura 3 se representa el plano que contiene a \mathbf{q} y a \mathbf{p}_N llamado plano de reacción, formando un ángulo ϕ con el plano de dispersión.

2.1.1 Sección de dispersión.

La sección eficaz diferencial del proceso anteriormente descrito puede escribirse en el sistema laboratorio como [8]

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_f d\Omega_e d\Omega_N} = \frac{2\alpha^2}{Q^4} \left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} \right) \frac{p_N M_N M_B}{M_A f_{rec}} 2 \overline{\sum_{if}} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (2)$$

donde el sumatorio indica un promedio sobre estados iniciales y suma sobre estados finales en caso de no considerar polarizaciones. El elemento de matriz invariante \mathcal{M}_{fi} es:

$$\mathcal{M}_{fi} = j_\mu^e J_{fi}^\mu, \quad (3)$$

donde j_μ^e es la cuadracorriente electromagnética para el electrón, dada por

$$j_\mu^e = \bar{u}(\mathbf{k}_f, s_f) \gamma_\mu u(\mathbf{k}_i, s_i), \quad (4)$$

y J_{fi}^μ es la cuadracorriente electromagnética nuclear. La función f_{rec} es el factor de retroceso dado por

$$f_{rec} = 1 + \frac{\omega p_N - q E_N \cos \theta_N}{M_A p_N}, \quad (5)$$

donde θ_N es el ángulo entre \mathbf{p}_N y \mathbf{q} (véase figura 3). En la ecuación (2) el momento del nucleón saliente p_N viene dado por la conservación de energía a través de:

$$\sqrt{p_N^2 + M_N^2} + \sqrt{p_N^2 - 2p_N q \cos \theta_N + q^2 + M_B^2} = M_A + \omega. \quad (6)$$

El elemento invariante de matriz al cuadrado puede expresarse introduciendo los tensores leptónico ($\eta_{\mu\nu}$) y nuclear ($W^{\mu\nu}$) en la forma,

$$2\overline{\sum_{f_i}} |\mathcal{M}_{f_i}|^2 = \eta_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (7)$$

siendo

$$\eta_{\mu\nu} = \overline{\sum_{s_i s_f}} j_\mu^{e*} j_\nu^e \quad (8)$$

y

$$W^{\mu\nu} = \overline{\sum_{f_i}} J^{\mu*}(Q)_{f_i} J^\nu(Q)_{f_i} = \overline{\sum_A} \sum_{NB} \langle NB | \hat{J}^\mu(\mathbf{q}) | A \rangle^* \langle NB | \hat{J}^\nu(\mathbf{q}) | A \rangle. \quad (9)$$

La información del vértice leptónico se encuentra en el tensor leptónico y el tensor nuclear contiene la información sobre la estructura nuclear. Puesto que sólo consideramos la interacción electromagnética, la corriente leptónica ha de conservarse, es decir, $Q^\mu \eta_{\mu\nu} = 0$. Esto puede demostrarse, y para ello, procederemos a calcular el tensor leptónico. Para ello, introducimos el proyector de energía en la forma siguiente:

$$\sum_s \bar{u}(\mathbf{k}, s) u(\mathbf{k}, s) = \frac{1}{2m} [m + \gamma_0 \varepsilon - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}] = \frac{K + m}{2m}, \quad (10)$$

donde $\bar{u}(\mathbf{k}, s) = u^\dagger \gamma_0$ es el espinor adjunto de Dirac, m es la masa del electrón y γ_μ son las matrices de Dirac. El espinor de Dirac, $u(\mathbf{k}, s)$, viene dado explícitamente por,

$$u(\mathbf{k}, s) = \sqrt{\frac{\varepsilon + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\varepsilon + m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad (11)$$

donde $\sum_s \chi_s^\dagger \chi_s = 1$, siendo χ_s un biespinor de Pauli y $\boldsymbol{\sigma}$ son las matrices de Pauli.

El tensor leptónico vendrá dado por:

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{1}{8m^2} Tr[\gamma_\mu (K_f + m) \gamma_\nu (K_i + m)] = \frac{1}{2m^2} [K_{i\mu} K_{f\nu} + K_{i\nu} K_{f\mu} - g_{\mu\nu} (K_i \cdot K_f - m^2)], \quad (12)$$

donde $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ es el tensor métrico.

Para obtener (12) se ha hecho uso de los siguientes resultados conocidos del cálculo de trazas de matrices de Dirac:

$$Tr[1] = 4, \quad Tr[ab] = 4a \cdot b, \quad Tr[abcd] = 4(a \cdot bc \cdot d + a \cdot db \cdot c - a \cdot cb \cdot d).$$

Nótese que las matrices de Dirac satisfacen la relación fundamental del álgebra de Dirac: $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = 2g_{\mu\nu} 1$.

En el límite ultrarrelativista el tensor leptónico resulta:

$$\eta_{\mu\nu} = 2m^2 \chi_{\mu\nu} = K_{i\mu} K_{f\nu} + K_{f\mu} K_{i\nu} + \frac{Q^2}{2} g_{\mu\nu}, \quad (13)$$

donde
$$Q^2 = Q_\mu Q^\mu = (K_i - K_f)^2 = 2m^2 - 2K_i \cdot K_f \Rightarrow K_i \cdot K_f = \underbrace{-\frac{Q^2}{2}}_{ERL}.$$

Si hacemos la contracción $Q^\mu \eta_{\mu\nu}$ resulta:

$$\begin{aligned} Q^\mu \eta_{\mu\nu} &= (K_i - K_f)^\mu \left[K_{i\mu} K_{f\nu} + K_{f\mu} K_{i\nu} + \frac{Q^2}{2} g_{\mu\nu} \right] \\ &= \left[\underbrace{Q \cdot K_f + \frac{Q^2}{2}}_1 \right] K_{i\nu} + \left[\underbrace{Q \cdot K_i - \frac{Q^2}{2}}_2 \right] K_{f\nu}, \end{aligned}$$

hacemos los términos 1 y 2 por separado,

$$\begin{aligned} 1: Q \cdot K_f + \frac{1}{2}(K_i^2 + K_f^2 - 2K_i \cdot K_f) &= K_i \cdot K_f - K_f^2 + \frac{K_i^2}{2} + \frac{K_f^2}{2} - K_i \cdot K_f = \frac{1}{2}(K_i^2 - K_f^2) \\ &= \frac{1}{2}(m^2 - m^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2: Q \cdot K_i - \frac{1}{2}(K_i^2 + K_f^2 - 2K_i \cdot K_f) &= K_i^2 - \frac{K_i^2}{2} - \frac{K_f^2}{2} - K_i \cdot K_f + K_i \cdot K_f = \frac{1}{2}(K_i^2 - K_f^2) \\ &= \frac{1}{2}(m^2 - m^2) = 0 \end{aligned}$$

hemos utilizado $K_\nu = g_{\mu\nu} K^\mu$.

2.1.2 Descomposición en funciones de respuesta.

En la sección eficaz diferencial aparece la contracción de los tensores leptónico y nuclear. Dicha contracción puede escribirse de la siguiente forma:

$$\eta_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = \eta_{00} \left\{ W^{00} + \frac{\eta_{xx}}{\eta_{00}} W^{xx} + \frac{\eta_{yy}}{\eta_{00}} W^{yy} + \frac{\eta_{zz}}{\eta_{00}} W^{zz} + 2 \frac{\eta_{0x}}{\eta_{00}} W^{0x} + 2 \frac{\eta_{zx}}{\eta_{00}} W^{zx} + 2 \frac{\eta_{0z}}{\eta_{00}} W^{0z} \right\}, \quad (14)$$

los términos del tensor leptónico que no aparecen en la contracción anterior son nulos. Las componentes del tensor leptónico η_{0y}, η_{xy} y η_{zy} son nulas debido a que \mathbf{k}_i y \mathbf{k}_f se encuentran en el plano xz , por tanto no tienen componente y , y además $g_{\mu\nu} = 0$ para esos casos.

Dado que $\eta_{00} = 2\varepsilon_i\varepsilon_f \cos^2 \frac{\theta_e}{2}$, utilizando (13), (14) podemos escribir:

$$\eta_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = 2\varepsilon_i\varepsilon_f \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \sum_k v_k R^k, \quad (15)$$

donde

$$\sum_k v_k R^k = v_L R^L + v_T R^T + v_{TL} R^{TL} \cos \phi + v_{TT} R^{TT} \cos 2\phi. \quad (16)$$

Los coeficientes v_k reciben el nombre de coeficientes cinemáticos del electrón, y en ellos queda reflejada la información que aporta el vértice leptónico del diagrama al proceso. A continuación vamos a calcular las expresiones de dichos coeficientes cinemáticos:

$$\frac{\eta_{xx}}{\eta_{00}} = \frac{k_{ix}k_{fx}}{\varepsilon_i\varepsilon_f \cos^2 \theta_e/2} + \tan^2 \frac{\theta_e}{2}, \quad \frac{\eta_{yy}}{\eta_{00}} = \tan^2 \frac{\theta_e}{2}, \quad \frac{\eta_{0x}}{\eta_{00}} = -\frac{\varepsilon_i k_{fx} + \varepsilon_f k_{ix}}{2\varepsilon_i\varepsilon_f \cos^2 \theta_e/2}, \quad (17)$$

donde hemos utilizado

$$Q^2 = -4\varepsilon_i\varepsilon_f \sin^2 \theta_e/2. \quad (18)$$

Para calcular k_{ix} y k_{fx} utilizamos las leyes de transformación del tensor leptónico a partir de la conservación de éste:

$$Q^\mu \eta_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \omega \eta_{0\nu} + q \eta_{z\nu} = 0 \Rightarrow \eta_{z\nu} = -\frac{\omega}{q} \eta_{0\nu}, \quad (19)$$

$$\eta_{zz} = \frac{\omega^2}{q^2} \eta_{00} \Rightarrow 2k_{iz}k_{fz} - \frac{Q^2}{2} = 2\frac{\omega^2}{q^2} \varepsilon_i\varepsilon_f \cos^2 \theta_e/2, \quad (20)$$

$$\eta_{0z} = -\frac{\omega}{q} \eta_{00} \Rightarrow \varepsilon_i k_{fz} + \varepsilon_f k_{iz} = 2\frac{\omega}{q} \varepsilon_i\varepsilon_f \cos^2 \theta_e/2. \quad (21)$$

Utilizando (20) y (21) obtenemos las expresiones para k_{iz} y k_{fz} :

$$k_{iz} = \frac{1}{2q} (2\varepsilon_i \omega - Q^2), \quad (22)$$

$$k_{fz} = \frac{1}{2q} (2\varepsilon_f \omega + Q^2). \quad (23)$$

A su vez, tenemos una relación de k_{ix} y k_{fx} con (22) y (23), respectivamente, mediante:

$$k_{ix} = \sqrt{k_i^2 - k_{iz}^2} = \sqrt{\varepsilon_i^2 - k_{iz}^2}, \quad (24)$$

$$k_{fx} = \sqrt{k_f^2 - k_{fz}^2} = \sqrt{\varepsilon_f^2 - k_{fz}^2}. \quad (25)$$

Sustituyendo k_{ix} y k_{fx} en las componentes del tensor leptónico podemos calcular los coeficientes cinemáticos del electrón:

$$\frac{\eta_{xx}}{\eta_{00}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{q^2} \right) + \tan^2 \frac{\theta_e}{2}, \quad \frac{\eta_{yy}}{\eta_{00}} = \tan^2 \frac{\theta_e}{2}, \quad \frac{\eta_{0x}}{\eta_{00}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{Q^2}{q^2} \right) \sqrt{-\frac{Q^2}{q^2} + \tan^2 \frac{\theta_e}{2}}.$$

Finalmente,

$$v_L = \left(\frac{Q^2}{q^2} \right)^2, \quad (26)$$

$$v_T = \frac{1}{v_0} \left\{ 2 \left(\frac{\varepsilon_i \varepsilon_f \sin \theta_e}{q} \right)^2 - Q^2 \right\} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{q^2} \right) + \tan^2 \frac{\theta_e}{2}, \quad (27)$$

$$v_{TL} = \frac{\sqrt{2}(\varepsilon_i + \varepsilon_f)}{v_0} \left(\frac{\varepsilon_i \varepsilon_f \sin \theta_e}{q} \right) \left(\frac{Q^2}{q^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{Q^2}{q^2} \right) \sqrt{-\frac{Q^2}{q^2} + \tan^2 \frac{\theta_e}{2}}, \quad (28)$$

$$v_{TT} = -\frac{2}{v_0} \left(\frac{\varepsilon_i \varepsilon_f \sin \theta_e}{q} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{q^2} \right), \quad (29)$$

donde hemos definido

$$v_0 \equiv 2\eta_{00} = 4\varepsilon_i \varepsilon_f \cos^2 \theta_e / 2.$$

Las funciones R^k en (15-16) reciben el nombre de funciones de respuestas nucleares. En ellas se halla contenida la información nuclear y vienen dadas como combinaciones bilineales de determinadas proyecciones de los elementos de matriz de la corriente electromagnética. La etiqueta k indica qué componentes de la corriente entran en juego: contribuciones en la dirección del momento transferido (eje \hat{z}), es decir, longitudinales, vienen caracterizadas por L , mientras que las transversales de la corriente (plano xy) se indican por T . La respuesta R^{TL} está dada por términos de interferencia transversal-longitudinal, y la R^{TT} por términos de interferencia transversal-transversal.

Definiendo un triedro constituido por los vectores esféricos unitarios $e(\mathbf{q}, 1, m)$, con $m=0, \pm 1$, cuyas expresiones en función del sistema de referencia $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ son:

$$e(\mathbf{q}, 1, 0) = \hat{z}, \quad e(\mathbf{q}, 1, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} \pm i\hat{y}) \quad (30)$$

las expresiones de las respuestas en función de la corriente nuclear son:

$$R^L = |\rho(\mathbf{q})_{fi}|^2 = (q/\omega)^2 |J(\mathbf{q}; 0)_{fi}|^2, \quad (31)$$

$$R^T = |J(\mathbf{q}; +1)_{fi}|^2 + |J(\mathbf{q}; -1)_{fi}|^2, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} R^{TL} &= -2 \operatorname{Re} \left\{ \rho^*(\mathbf{q})_{fi} (J(\mathbf{q}; +1)_{fi} - J(\mathbf{q}; -1)_{fi}) \right\} \\ &= -2(q/\omega) \operatorname{Re} \left\{ J^*(\mathbf{q}; 0)_{fi} (J(\mathbf{q}; +1)_{fi} - J(\mathbf{q}; -1)_{fi}) \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$R^{TT} = 2 \operatorname{Re} \left\{ J(\mathbf{q}; +1)_{fi} J(\mathbf{q}; -1)_{fi} \right\}, \quad (34)$$

donde

$$J(\mathbf{q}; 0)_{fi} \equiv J(\mathbf{q}; \hat{z})_{fi}, \quad J(\mathbf{q}; \pm 1)_{fi} \equiv \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(J(\mathbf{q}; \hat{x})_{fi} \pm i J(\mathbf{q}; \hat{y})_{fi} \right). \quad (35)$$

y $\rho(\mathbf{q})_{fi}$ representa la componente ‘‘temporal’’ del elemento de matriz de la corriente.

Las expresiones previas también pueden escribirse en términos de las componentes del tensor nuclear en el sistema de coordenadas antes mencionado para el gauge de Coulomb. En el gauge de Coulomb se impone que la corriente electromagnética nuclear se conserve. En este caso, las componentes longitudinales de las respuestas nucleares se ponen en función la componente 0:

$$R^L = W^{00}, \quad (36)$$

$$R^T = W^{xx} + W^{yy}, \quad (37)$$

$$R^{TL} = 2\sqrt{2}W^{0x}, \quad (38)$$

$$R^{TT} = W^{yy} - W^{xx}. \quad (39)$$

En PWBA la sección eficaz diferencial puede escribirse como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e d\varepsilon_f d\Omega_N} = K \sigma_M f_{rec}^{-1} \sum_k v_k R^k, \quad (40)$$

donde K es un factor cinemático y σ_M es la sección eficaz de Mott, cuyas expresiones vienen dadas por

$$K = \frac{p_N M_N M_B}{M_A} \quad \text{y} \quad \sigma_M = \left(\frac{\alpha \cos \theta_e / 2}{2\varepsilon_i \sin^2 \theta_e / 2} \right)^2. \quad (41)$$

La descomposición en funciones de respuesta de la sección eficaz realizada en la ecuación (40) es totalmente general en la aproximación PWBA. En la próxima sección vamos a hacer un estudio más detallado de dichas respuestas, analizando las contribuciones al proceso A(e,e'N)B.

2.2 Cinemática general del proceso (e,e'N).

Las distintas variables cinemáticas que caracterizan el proceso (figura 2) se encuentran relacionadas entre sí por medio de las leyes de conservación del momento y energía, que aplicadas sobre los vértices leptónico y nuclear del diagrama se escriben como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f = \mathbf{p}_N + \mathbf{p}_B, \quad (42)$$

$$\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f = E_B + E_N - M_A, \quad (43)$$

también podemos expresar

$$\varepsilon_f = \frac{-\omega + \sqrt{\omega^2 - \frac{Q^2}{\sin^2 \theta_e / 2}}}{2}. \quad (44)$$

A continuación definimos una serie de variables relacionadas con las energías implicadas en el proceso:

- Energía de excitación del núcleo residual ξ . Se introduce la energía ξ porque el estado del núcleo residual puede ser distinto del fundamental, de hecho puede ser incluso un estado no ligado. En caso de que el núcleo constituya un sistema ligado, esta energía se define como:

$$\xi = E_B - E_B^0, \quad (45)$$

donde $E_B = \sqrt{M_B^2 + p_B^2}$ y $E_B^0 = \sqrt{(M_B^0)^2 + p_B^2}$, siendo M_B^0 la masa en reposo del núcleo residual en su estado fundamental y M_B es la masa del sistema excitado dada por $M_B = \sqrt{(\omega + M_A - E_N)^2 - p_B^2}$.

- Energía de separación E_s . Se define como la energía mínima necesaria para separar un nucleón del núcleo blanco, quedando el núcleo residual en reposo:

$$E_s = M_B^0 + M_N - M_A. \quad (46)$$

- Energía desaparecida E_m . Se define como la parte de la energía transferida que se transforma en energía interna del sistema residual constituido por el núcleo y el nucleón,

$$E_m = \omega - T_B - T_N = M_N + M_B - M_A. \quad (47)$$

Las ecuaciones (45), (46) y (47) están relacionadas entre sí a través de $E_m = E_s + \xi + (T_B^0 - T_B)$, siendo T_B y T_B^0 las energías cinéticas del núcleo residual en sus estados de excitación y reposo, respectivamente, $T_B = E_B - M_B$ y $T_B^0 = E_B^0 - M_B^0$. Cuando T_B y T_B^0 sean mucho menor que ξ y que E_s , es decir, el momento del núcleo residual mucho menor que las masas M_B, M_B^0 , una buena aproximación de la energía desaparecida es:

$$E_m \approx E_s + \xi. \quad (48)$$

Además, definimos el llamado momento desaparecido \mathbf{p}_m como:

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_N - \mathbf{q}. \quad (49)$$

Al estar trabajando en el sistema laboratorio, el núcleo blanco se encuentra en reposo, es decir, $\mathbf{p}_A = 0$, por tanto, $\mathbf{p}_m = -\mathbf{p}_B$, por lo que sus módulos son iguales, $p_m = p_B$.

En todo momento vamos a trabajar en cinemática coplanar ($\phi = 0, \pi$) lo que se traduce en la coincidencia de los planos de reacción y dispersión. Al fijar q, ω, p_m, p_N y θ_e podemos obtener las demás variables cinemáticas. Así por ejemplo :

- q, ω nos permiten determinar Q^2 mediante:

$$Q^2 = \omega^2 - q^2. \quad (50)$$

Así pues, tras fijar θ_e obtenemos ε_f mediante la ecuación (44) y consecuentemente tendríamos ε_i a partir de (43).

- El momento desaparecido p_m nos permite determinar p_B . Mediante el momento del nucleón saliente p_N podemos obtener E_N , por tanto la masa del núcleo residual M_B puede ser conocida y, consecuentemente, podemos conocer su energía E_B también. Además, θ_N viene definida como:

$$\theta_N = \arccos \left[\frac{(p_N^2 + q^2 - p_B^2)}{2p_N q} \right]. \quad (51)$$

La sección eficaz para el proceso (e,e'N) queda completamente especificada por seis variables cinemáticas independientes. Fijados θ_e y ϕ , la sección eficaz dependerá de las denominadas variables “dinámicas”, por ejemplo $\{q, \omega, \xi, p_m\}$. La elección de las cuatro variables “dinámicas” presenta diversas alternativas dependiendo del proceso específico (e,e'N) que estemos tratando.

Supongamos que fijamos la energía y el momento transferidos. La ecuación (43) puede ser reescrita en función de la energía de excitación

$$\xi = M_A + \omega - \sqrt{M_N^2 + p_m^2 + q^2 + 2p_m q \cos \theta} - \sqrt{(M_B^0)^2 + p_m^2}, \quad (52)$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{p}_m y \mathbf{q} . Podemos ver que no todo el plano $(\xi - p_m)$ está permitido, puesto que $|\cos \theta| \leq 1$.

En la zona cuasielástica el fotón emitido interacciona con un único nucleón cediéndole toda su energía, quedando el núcleo residual en reposo. En este caso, la energía transferida vendrá dada por:

$$\omega_{QEP} = \sqrt{q^2 + M_N^2} - M_A + M_B. \quad (53)$$

En el panel superior de la figura 4 hemos representado $\xi(p_m)$ para un valor de ω real inferior a ω_{QEP} para el proceso $^{16}O(e, e'p)^{15}N$. Las regiones permitidas son $\xi(p_m) \geq 0$ y $p_m \geq 0$, que son las que tienen sentido físico. Así pues, los valores permitidos de ξ y p_m se encuentran bajo la curva correspondiente a $\cos \theta = -1$ para el panel superior de la figura 4. Los dos valores para los cuales $\xi = 0$ se denotan como $p_{\min} \equiv -y$ y $p_{\max} \equiv +Y$, cuyas expresiones son [9]:

$$y(q, \omega) = \frac{1}{W^2} \left\{ (M_A + \omega) \sqrt{\Lambda^2 - (M_B^0)^2 W^2} - q\Lambda \right\}, \quad (54)$$

$$Y(q, \omega) = \frac{1}{W^2} \left\{ (M_A + \omega) \sqrt{\Lambda^2 - (M_B^0)^2 W^2} + q\Lambda \right\}, \quad (55)$$

siendo

$$W = \sqrt{(M_A + \omega)^2 - q^2},$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left(W^2 + (M_B^0)^2 - M_N^2 \right).$$

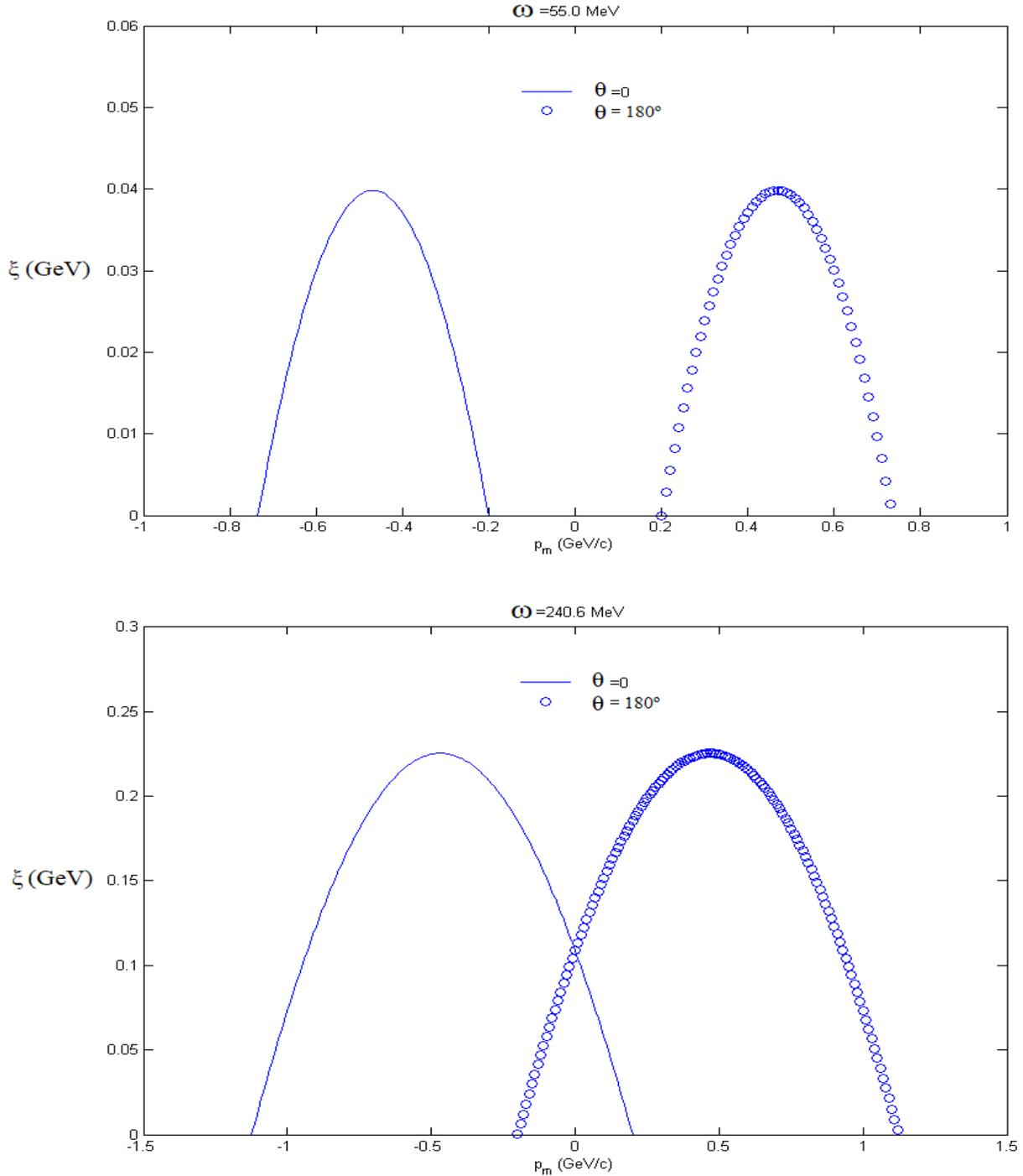


Figura 4: El panel superior corresponde a $\omega = 55$ MeV y el inferior a $\omega = 240.6$ MeV, siendo $q = 0.5$ GeV/c.

Si ω real es mayor que ω_{QEP} , obtenemos la gráfica del panel inferior de la figura 4. La zona físicamente permitida es aquella comprendida entre las curvas $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, con $\xi > 0$ y $p_m > 0$.

La energía transferida se encuentra en función de q e y , cuya expresión se puede obtener recurriendo a la ecuación (43), y teniendo en cuenta que para $p = \pm y$ (lo cual implica que $\cos \theta = \pm 1$):

$$\omega(q, y) = \sqrt{M_N^2 + (q + y)^2} + \sqrt{y^2 + M_B^2} - M_A. \quad (56)$$

En el caso $y = 0$, ω vendrá dada por:

$$\omega(q,0) = \omega_{QEP} = \sqrt{M_N^2 + q^2} + M_B - M_A . \quad (57)$$

Valores de y negativos se corresponden con ω menores que ω_{QEP} , y valores positivos con ω superiores a ω_{QEP} .

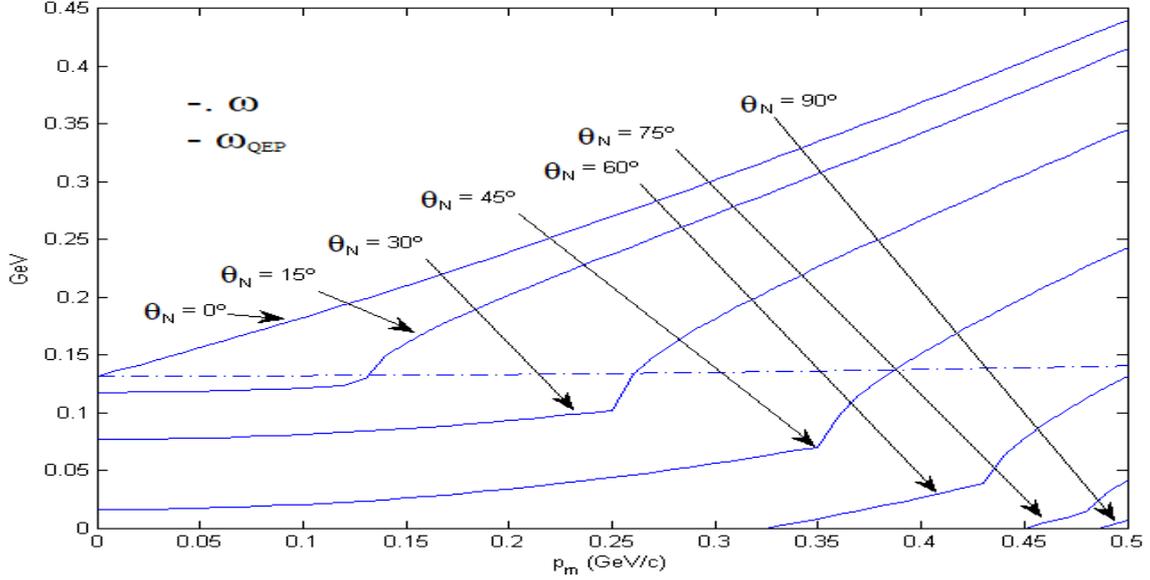


Figura 5: Comparación entre la energía transferida en el proceso y la que correspondería si se estuviera en el pico cuasielástico. Esta última depende del ángulo θ_N y se representa para siete valores del mismo.

Tenemos pues ω y ω_{QEP} como función del momento desaparecido. En la figura 5 se muestra la energía transferida en el proceso (ω) (línea de trazos) y la energía transferida que corresponde al centro del pico cuasielástico (ω_{QEP}) (líneas continuas) frente a p_m . Los resultados corresponden al proceso $^{16}O(e, e' p)^{15}N$, considerando el núcleo residual en su estado fundamental y tomando $p_N = 0.5$ GeV/c. La ecuación (56) se puede poner en función de p_N y p_m :

$$\omega(p_N, p_m) = \sqrt{p_N^2 + M_N^2} + \sqrt{p_m^2 + M_B^2} - M_A \quad (58)$$

Como se puede apreciar, la energía transferida se mantiene casi constante en todo el rango de momentos ($M_B \gg p_m$), mientras que las curvas que indican la posición del centro del pico cuasielástico para cada θ_N se alejan rápidamente del valor de ω . Concretamente, para valores pequeños de θ_N nunca se va a estar en el centro del pico cuasielástico. Solamente para los valores más bajos permitidos para p_m ($p_m \geq p_N \sin \theta_N$) estaremos en las proximidades del pico. Para valores superiores de θ_N sí vamos a conseguir en algún momento estar en el pico cuasielástico. No obstante, vamos a alejarnos rápidamente de él, pues basta con separarse aproximadamente 0.15 GeV/c del punto de corte, para que la distancia entre ω y ω_{QEP} alcance valores próximos a 0.1 GeV.

Cinemáticas usuales.

Existen dos tipos de cinemática frecuentemente utilizadas que reciben el nombre de cinemática paralela y cinemática $(q-y)$ constante, esta última también es conocida como cinemática perpendicular. Sus principales características se presentan a continuación:

1. Cinemática paralela.

Es aquella en la que coinciden la dirección del momento transferido \mathbf{q} , el momento del nucleón saliente y el momento desaparecido p_m . Distinguiremos el caso de cinemática estrictamente paralela ($\mathbf{q} \parallel \mathbf{p}_N \parallel \mathbf{p}_m$) y cinemática antiparalela ($\mathbf{q} \parallel \mathbf{p}_N$, pero siendo \mathbf{p}_m antiparalelo a ellos). En este caso, la energía transferida ω se mantiene prácticamente constante en el rango habitual de momento desaparecido ($p_m \leq 0.5 \text{ GeV}/c$). Por otra parte, el momento transferido q varía, puesto que se ha de verificar $q = p_N \pm p_m$. De esta forma, cuanto mayor es el momento desaparecido más alejados nos encontramos del pico cuasielástico.

2. Cinemática perpendicular.

Se fija el valor de y y el momento desaparecido q . Tiene la ventaja de poder trabajar en el pico cuasielástico cuando $y = 0$. Recuérdese que y es el valor mínimo permitido del momento p_m . En esta cinemática, haciendo uso de (58) y considerando $\omega \approx \omega_{QEP}$, el momento del nucleón saliente puede expresarse en la forma:

$$p_N^2 \approx q^2 - \frac{p_m^2 \sqrt{q^2 + M_N^2}}{M_B}, \quad (59)$$

por tanto, excepto para núcleos muy ligeros, el valor de p_N se mantiene muy cercano al de q . El nombre de esta cinemática es debido a que, aunque el valor de θ_N varía, los valores de p_N y q suelen ser bastante grandes como para que en el rango de momento desaparecido de interés dicho ángulo tome valores pequeños, siendo \mathbf{p}_m casi perpendicular a \mathbf{q} y \mathbf{p}_N , es decir, $\theta \approx 90^\circ$ (para $y = 0$).

3 Aproximación de impulso de ondas planas (PWIA).

Anteriormente hemos analizado el vértice leptónico del proceso utilizando la aproximación PWBA. En este capítulo nuestro interés se centra en la descripción del vértice nuclear, realizando aproximaciones que simplifican el análisis del proceso $A(e,e'N)B$.

Esta clase de procesos suele darse en la región del pico cuasielástico, en cuyo caso se cumple que

$$\omega \approx \sqrt{q^2 + M_N^2} - M_N = \frac{|Q^2|}{2M_N}. \text{ Si esta relación fuese exacta, el fotón virtual cedería toda su energía a}$$

un único nucleón en reposo del núcleo. En el pico cuasielástico es apropiado describir la interacción electrón-núcleo en la aproximación de impulso (IA), en la cual el fotón virtual intercambiado interacciona con un único nucleón, siendo este último detectado. Por tanto, los demás nucleones se consideran espectadores. Por otra parte, la interacción de estados finales se puede despreciar para energías y momentos transferidos altos. En este trabajo vamos a analizar la denominada aproximación de impulso de ondas planas (PWIA), cuyas características son las siguientes:

1. El operador de corriente electromagnética nuclear viene dado como un operador a un cuerpo, por tanto no se incluyen corrientes de intercambios de mesones (MEC).
2. El nucleón saliente se describe como una onda plana, despreciándose la interacción de éste con el núcleo residual.
3. El nucleón saliente, que absorbe la energía y el momento del fotón virtual emitido, es detectado en coincidencia con el electrón dispersado.

El pico cuasielástico es la zona en la que esta aproximación es más fiable, en cuyo caso la variable de Bjorken x es aproximadamente igual a 1, $x \approx 1$. Así pues, la aproximación PWIA resulta más fiable para valores intermedios de ω . Para valores más altos, uno debe considerar los efectos de resonancias nucleónicas y dispersión profundamente inelástica.

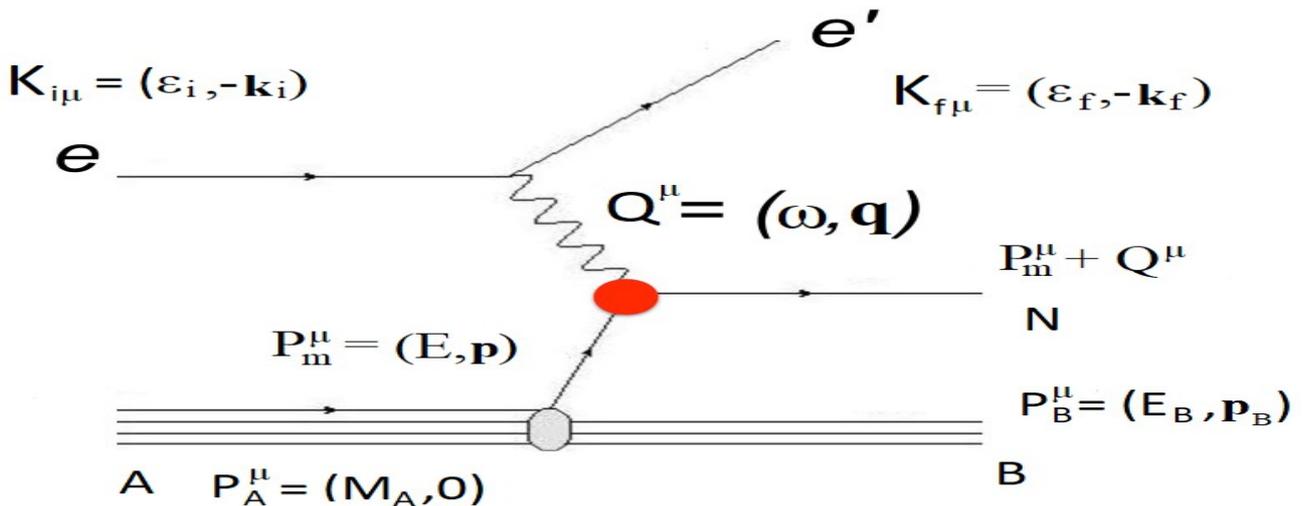


Figura 6: Vértice nuclear en la aproximación PWIA.

El diagrama de Feynman correspondiente al vértice nuclear en PWIA se encuentra representado en la figura 6. Hemos introducido dos nuevas variables que describen al nucleón ligado, su momento \mathbf{p} y su energía E . Estas dos variables están relacionadas con las demás variables implicadas en el diagrama mediante la conservación de cuadrimento en el vértice γNN , así como en el vértice nuclear:

$$E = E_N - \omega = M_A - E_B, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_N - \mathbf{q} = -\mathbf{p}_B. \quad (60)$$

Podemos ver que el momento del nucleón ligado coincide con el momento desaparecido, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_m$. El hecho de que el nucleón ligado se encuentre fuera de su capa de masas (“off-shell”) conlleva que su energía y su momento no verifiquen la relación $E = \sqrt{p^2 + M_N^2}$.

Dentro del formalismo de segunda cuantización, el operador de corriente nuclear en PWIA adopta la siguiente expresión [10]:

$$\hat{J}_\mu = \sum_{mm'} \sum_{\tau\tau'} \iint d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \langle \mathbf{p}', m'(S'), \tau' | \Gamma_\mu | \mathbf{p}, m(S), \tau \rangle a_{\mathbf{p}'m'\tau'}^+ a_{\mathbf{p}m\tau}. \quad (61)$$

En este operador, $a_{\mathbf{p}'m'\tau'}^+, a_{\mathbf{p}m\tau}$ son los operadores de creación y destrucción de nucleones con momento, proyección de espín (en el eje de cuantización caracterizado por S^μ , siendo éste el cuadriespín) e isospín: \mathbf{p}', m', τ' y \mathbf{p}, m, τ , respectivamente. Están normalizados de tal forma que:

$$\{a_{\mathbf{p}'m'\tau'}^+, a_{\mathbf{p}m\tau}\} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{mm'} \delta_{\tau\tau'}. \quad (62)$$

El término $|\mathbf{p}, m(S), \tau\rangle$ representa un espinor con momento \mathbf{p} y cuadriespín S^μ , verificándose la relación “on-shell” energía-momento: $E^2 = p^2 + M_N^2$. El operador Γ^μ describe el vértice γNN .

3.1 Sección eficaz diferencial en PWIA: factorización.

El tensor nuclear para procesos $A(e, e'N)B$ viene dado por la expresión (9):

$$W^{\mu\nu} = \overline{\sum_A} \sum_{NB} \langle NB | \hat{J}^\mu(\mathbf{q}) | A \rangle^* \langle NB | \hat{J}^\nu(\mathbf{q}) | A \rangle. \quad (63)$$

En la aproximación PWIA el estado final $|NB\rangle$ viene caracterizado por el producto de las funciones de onda correspondientes al núcleo residual y al nucleón saliente (considerado libre). Haciendo uso de la ecuación (61) para el operador de corriente, podemos obtener [11]:

$$\langle NB | a_{\mathbf{p}'m'\tau'}^+ = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_N) \delta_{m'm_N} \delta_{\tau'\tau_N} \langle B |. \quad (64)$$

Despreciándose los efectos de intercambio de carga y eliminando la dependencia con las variables de isospín, el elemento de matriz de la corriente nuclear se reduce a:

$$\langle NB | \hat{J}^\mu(\mathbf{q}) | A \rangle = \sum_m \int d\mathbf{p} \langle \mathbf{p}_N, m_N(S_N) | \Gamma^\mu | \mathbf{p}, m(S) \rangle \langle B | a_{\mathbf{p}m} | A \rangle. \quad (65)$$

Usando este resultado, el tensor nuclear viene dado por:

$$W^{\mu\nu} = \sum_{mm'} \mathcal{W}_{mm'}^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) N_{mm'}(\mathbf{p}), \quad (66)$$

siendo $\mathcal{W}_{mm'}^{\mu\nu}$ el denominado tensor nucleónico:

$$\mathcal{W}_{mm'}^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{m_N} \langle \mathbf{p}_N, m_N(S_N) | \Gamma^\mu | \mathbf{p}, m'(S') \rangle^* \langle \mathbf{p}_N, m_N(S_N) | \Gamma^\nu | \mathbf{p}, m(S) \rangle, \quad (67)$$

que depende directamente del vértice γNN , y $N_{mm'}$ la distribución de momentos, que nos proporciona la probabilidad de encontrar un nucleón en el núcleo con un cierto momento \mathbf{p} ,

$$N_{mm'}(\mathbf{p}) = \sum_A \sum_B \langle B | a_{\mathbf{p}m'} | A \rangle^* \langle B | a_{\mathbf{p}m} | A \rangle. \quad (68)$$

En el caso en que el núcleo blanco no esté polarizado y la partícula saliente sea un nucleón, la distribución de momentos es diagonal en las variables de espín,

$$N_{mm'}(\mathbf{p}) = N(p) \delta_{mm'}, \quad (69)$$

siendo $\delta_{mm'} = 0$ si $m \neq m'$ y $\delta_{mm'} = 1$ si $m = m'$. Así pues, para $m = m'$ la distribución de momentos resulta:

$$N_{mm'}(\mathbf{p}) = N(p), \quad (70)$$

con

$$N(p) = \frac{|\varphi_{shell}(p)|^2}{4\pi}, \quad (71)$$

siendo $\varphi_{shell}(p)$ la función en el espacio de momentos de un nucleón en el núcleo, la cual depende del núcleo blanco, la capa, el modelo nuclear y si el nucleón es un protón o un neutrón.

Con ello, el tensor nuclear en PWIA se expresa simplemente de la forma:

$$W^{\mu\nu} = \mathcal{W}^{\mu\nu} N(p), \quad (72)$$

donde $\mathcal{W}^{\mu\nu}$ (tensor nucleónico) está dado por la expresión:

$$\mathcal{W}^{\mu\nu} = \sum_{mm_N} \langle \mathbf{p}_N, m_N(S_N) | \Gamma^\mu | \mathbf{p}, m(S) \rangle^* \langle \mathbf{p}_N, m_N(S_N) | \Gamma^\nu | \mathbf{p}, m(S) \rangle. \quad (73)$$

En tal caso, la sección eficaz diferencial factoriza

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e d\varepsilon_f d\Omega_N} = K f_{rec}^{-1} \sigma^{eN} N(p), \quad (74)$$

siendo σ^{eN} la sección eficaz ‘‘half off-shell’’ electrón-nucleón (el nucleón inicial está ligado, y por consiguiente fuera de la capa de masas). En función de los tensores leptónico y nucleónico la sección eficaz σ^{eN} viene dada por:

$$\sigma^{eN} = \frac{2\alpha^2}{Q^4} \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} \eta_{\mu\nu} \mathcal{W}^{\mu\nu}. \quad (75)$$

La sección eficaz electrón-nucleón σ^{eN} puede descomponerse en una serie de funciones de respuesta que se denominan respuestas nucleónicas (‘‘single-nucleon’’), para diferenciarlas de las respuestas nucleares definidas en (31-34). Así pues, podemos escribir:

$$\sigma^{eN} = \sigma_M \sum_{k=L,T,TL,TT} v_k \mathcal{R}^k. \quad (76)$$

Las respuestas “single-nucleon” se calculan de forma análoga a las expresiones dadas por las ecuaciones (36-39), en las cuales se reemplaza el tensor nuclear por el nucleónico. Las respuestas nucleónicas y las nucleares se relacionan mediante la distribución de momentos:

$$R^k = \mathcal{R}^k N(p). \quad (77)$$

3.2 Carácter “off-shell” del nucleón ligado.

En la dispersión de electrones por núcleos, dentro de la aproximación de impulso, aparece una doble complicación: un nucleón que esté ligado a un núcleo está sujeto a interacciones, y por tanto su momento y su energía no están correlacionados. Asimismo, si tenemos en cuenta la interacción existente entre el nucleón saliente y el núcleo residual, dicho nucleón tampoco cumple la relación energía-momento que verifican las partículas libres (para partículas libres, $E^2 = p^2 + M_N^2$). En ambas situaciones, el nucleón presenta un carácter “off-shell” (fuera de la capa de masas). En el caso general (teniendo en cuenta la interacción de estados finales (FSI)), la estructura del operador se complica considerablemente: depende de 12 factores de forma dependientes, a su vez, de 3 escalares cada uno. Incluso la aproximación PWIA, donde el nucleón saliente está en su capa de masas, implica usar un operador con 4 factores de forma dependientes de 2 escalares. Por esta razón, han de adoptarse ciertas prescripciones para el tratamiento del vértice γNN . Es habitual extrapolar el tratamiento del vértice “on-shell” al caso “off-shell”. De Forest propone los siguientes aspectos para proceder en el caso del vértice “half off-shell” que aparece en PWIA [12,13]:

1. Definir las variables “on-shell”:

- el cuadrimomento “on-shell” del nucleón ligado: $\bar{P}^\mu = (\bar{E}, \mathbf{p})$, siendo \mathbf{p} el momento real del mismo, y \bar{E} la energía que le correspondería al nucleón si fuera libre: $\bar{E}^2 = p^2 + M_N^2$.
- el cuadrimomento transferido “on-shell” por el fotón: $\bar{Q}^\mu = (\bar{\omega}, \mathbf{q}) = (P_N - \bar{P})^\mu$, i.e., $\bar{\omega} = E_N - \bar{E}$.

2. Describir el nucleón ligado haciendo uso de los espinores libres, es decir, espinores “on-shell”.

3. Usar el operador de corriente electromagnética correspondiente al caso del nucleón libre. En este caso sólo intervienen dos factores de forma dependientes de un único escalar (Q^2). Dos formas del operador que son equivalentes para nucleones libres, pero no lo son para nucleones ligados, denominadas $CC1$ y $CC2$, son consideradas usualmente:

$$1: \quad \Gamma_{CC1}^\mu = (F_1 + F_2)\gamma^\mu - \frac{F_2}{2M_N}(\bar{P} + P_N)^\mu, \quad (78)$$

$$2: \quad \Gamma_{CC2}^\mu = F_1\gamma^\mu + \frac{iF_2}{2M_N}\sigma^{\mu\nu}Q_\nu, \quad (79)$$

siendo F_1 y F_2 los factores de forma “on-shell” de Pauli y Dirac, respectivamente, y el término $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$ es el generador de las transformaciones y opera en el espacio de Dirac.

4. En la aproximación de impulso sólo se consideran las contribuciones a un cuerpo de la corriente electromagnética nuclear, la cual no verifica $Q_\mu J^\mu = 0$, es decir, no se conserva. De hecho, los

operadores de corriente CCI o $CC2$ no satisfacen la propiedad de conservación (la violan en una cantidad proporcional a $\omega - \bar{\omega}$). A nivel de aproximación de impulso, existen por tanto tres posibles opciones:

- (a) No restablecer la conservación de la corriente, lo que da lugar a las denominadas prescripciones $NCCI$ y $NCC2$. El gauge resultante es el de Landau.
- (b) Imponer conservación artificialmente a nivel de la corriente a un cuerpo, sustituyendo la componente longitudinal J^3 por el valor $J^3 = \frac{\omega}{q} J^0$ que debería adoptar si la corriente realmente se conservara. A estas prescripciones se las denominan $CC1^0$ y $CC2^0$, dando lugar al gauge de Coulomb.
- (c) Restablecer la conservación sustituyendo J^0 por $\frac{q}{\omega} J^3$. Las prescripciones que resultan son las llamadas $CC1^3$ y $CC2^3$, obteniéndose el gauge de Weyl.

Las corrientes que hemos denominado CCI y $CC2$ son equivalentes para nucleones libres como ya mencionamos anteriormente, obteniéndose una a partir de la otra haciendo uso de la descomposición de Gordon:

$$\bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \frac{i}{2M} \sigma_{\mu\nu} Q^\nu u(\mathbf{p}_i, s_i) = \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \left(\gamma_\mu - \frac{1}{2M} (P_f + P_i)_\mu \right) u(\mathbf{p}_i, s_i). \quad (80)$$

Las incertidumbres que se presentan en este trabajo, en cuanto a operador de corriente y gauge, son producidas únicamente por el nucleón ligado al no considerarse la interacción de estados finales.

3.3 Tensor nucleónico en procesos $A(e, e'N)$.

Como ya vimos anteriormente, la sección eficaz diferencial factoriza, por tanto a nivel del diagrama de Feynman del proceso, la factorización se entiende como una separación del vértice nuclear en dos vértices: el vértice núcleo blanco-nucleón ligado-núcleo residual, y el vértice nucleón ligado-fotón virtual-nucleón saliente o vértice γNN (ver figura 6). Una vez conocido el tensor nucleónico, podemos evaluar las funciones de respuesta “single-nucleon”. En el caso en que el nucleón saliente no se encuentre polarizado, el tensor nucleónico viene dado por:

$$\mathcal{W}^{\mu\nu} = \sum_s \left[\bar{u}(\mathbf{p}_N, s_N) \hat{\Gamma}^\mu u(\mathbf{p}, s) \right]^* \left[\bar{u}(\mathbf{p}_N, s_N) \hat{\Gamma}^\nu u(\mathbf{p}, s) \right], \quad (81)$$

que puede ser evaluado mediante técnicas de trazas. La traza a evaluar resulta:

$$\mathcal{W}^{\mu\nu} = \frac{1}{8M_N^2} \text{Tr} \left[\hat{\Gamma}^\mu (\bar{\mathbf{P}} + M_N) \bar{\hat{\Gamma}}^\nu (P_N + M_N) \right], \quad (82)$$

donde $\hat{\Gamma}^\nu$ es el operador de corriente dado por (78,79), y $\bar{\hat{\Gamma}}^\nu = \gamma^0 \hat{\Gamma}^{\nu+} \gamma^0$.

A continuación vamos a calcular el tensor nucleónico mediante la ecuación (82) para los dos operadores de corriente de tipo CCI y $CC2$ dados en (78) y (79):

- **operador CCI**

$$\begin{aligned}
8M_N^2 \mathcal{W}^{\mu\nu} &= Tr \left\{ \left[(F_1 + F_2) \gamma^\mu - \frac{F_2}{2M_N} (\bar{P} + P_N)^\mu \right] (\bar{P} + M_N) \gamma^0 \left[(F_1 + F_2) \gamma^\nu - \frac{F_2}{2M_N} (\bar{P} + P_N)^\nu \right] \gamma^0 (P_N + M_N) \right\} \\
&= (F_1 + F_2)^2 Tr [\bar{P} \gamma^\mu P_N \gamma^\nu] - \frac{(F_1 + F_2) F_2}{2} (\bar{P} + P_N)^\nu Tr [\bar{P} \gamma^\mu] + \frac{F_2^2}{4M_N^2} (\bar{P} + P_N)^\mu (\bar{P} + P_N)^\nu Tr [\bar{P} P_N] \\
&\quad - \frac{(F_1 + F_2) F_2}{2} (\bar{P} + P_N)^\mu Tr [\bar{P} \gamma^\nu] - \frac{(F_1 + F_2) F_2}{2} (\bar{P} + P_N)^\nu Tr [\gamma^\mu P_N] + M_N^2 (F_1 + F_2)^2 Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu] \\
&\quad - \frac{(F_1 + F_2) F_2}{2} (\bar{P} + P_N)^\mu Tr [P_N \gamma^\nu] + \frac{F_2^2}{4} (\bar{P} + P_N)^\mu (\bar{P} + P_N)^\nu Tr [1],
\end{aligned}$$

hemos usado las siguientes fórmulas para trazas:

$$Tr[ab] = 4a \cdot b, \quad Tr[abcd] = 4(a \cdot bc \cdot d + a \cdot db \cdot c - a \cdot cb \cdot d), \quad Tr[1] = 4, \quad (83)$$

siendo la traza de un número impar de matrices de Dirac nula. Además, hemos hecho uso del álgebra de matrices de Dirac:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu} 1, \quad (84)$$

donde 1 es la matriz identidad de dimensión 4×4 .

Así pues, el tensor nucleónico, usando el operador *CCI*, resulta:

$$\mathcal{W}^{\mu\nu} = \frac{1}{2M_N^2} \left\{ (F_1 + F_2)^2 \left(\bar{P}^\mu P_N^\nu + \bar{P}^\nu P_N^\mu + \frac{\bar{Q}^2}{2} g^{\mu\nu} \right) - \left[(F_1 + F_2) F_2 - \frac{F_2^2}{2} \left(1 - \frac{\bar{Q}^2}{4M_N^2} \right) \right] C^\mu C^\nu \right\}, \quad (85)$$

con $C^\mu \equiv (\bar{P} + P_N)^\mu$.

De forma análoga calculamos el tensor nucleónico con el operador *CC2*:

• **operador *CC2***

$$\begin{aligned}
8M_N^2 \mathcal{W}^{\mu\nu} &= Tr \left\{ \left[F_1 \gamma^\mu + i \frac{F_2}{2M_N} \sigma^{\mu\nu} Q_\nu \right] (\bar{P} + M_N) \gamma^0 \left[F_1 \gamma^\nu + i \frac{F_2}{2M_N} \sigma^{\nu\mu} Q_\mu \right] \gamma^0 (P_N + M_N) \right\} \\
&= F_1^2 Tr [\bar{P} \gamma^\mu P_N \gamma^\nu] + M_N^2 F_1^2 Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu] + i \frac{F_1 F_2}{2} Q_\nu Tr [\sigma^{\mu\nu} \bar{P} \gamma^\nu] + i \frac{F_1 F_2}{2} Q_\mu Tr [\gamma^\mu \bar{P} \sigma^{\nu\mu}] \\
&\quad + i \frac{F_1 F_2}{2} Q_\mu Tr [\gamma^\mu \sigma^{\nu\mu} P_N] + i \frac{F_1 F_2}{2} Q_\nu Tr [\sigma^{\mu\nu} \gamma^\nu P_N] - \frac{F_2^2}{4} Q_\nu Q_\mu Tr [\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\nu\mu}] \\
&\quad - \frac{F_2^2}{4M_N^2} Q_\nu Q_\mu Tr [\sigma^{\mu\nu} \bar{P} \sigma^{\nu\mu} P_N],
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de (83), (84) y de la siguiente fórmula para la traza de seis matrices de Dirac [14]:

$$\begin{aligned}
Tr[abcd\bar{e}f] &= 4(a \cdot bc \cdot de \cdot f + a \cdot bc \cdot fd \cdot e - a \cdot bc \cdot ed \cdot f - a \cdot cb \cdot de \cdot f - a \cdot cb \cdot fd \cdot e + a \cdot cb \cdot ed \cdot f) \\
&+ 4(a \cdot db \cdot ce \cdot f + a \cdot db \cdot fc \cdot e - a \cdot db \cdot ec \cdot f - a \cdot eb \cdot cd \cdot f - a \cdot eb \cdot fc \cdot d + a \cdot eb \cdot dc \cdot f + a \cdot fb \cdot cd \cdot e) \\
&+ 4(a \cdot fb \cdot ec \cdot d - a \cdot fb \cdot dc \cdot e) .
\end{aligned} \tag{86}$$

Así pues, el tensor nucleónico, usando el operador CC2, resulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2M_N^2} \left\{ F_1^2 \left(\bar{P}^\mu P_N^\nu + \bar{P}^\nu P_N^\mu + \frac{\bar{Q}^2}{2} g^{\mu\nu} \right) + F_1 F_2 \left(Q \cdot \bar{Q} g^{\mu\nu} - \frac{\bar{Q}^\mu Q^\nu + \bar{Q}^\nu Q^\mu}{2} \right) \right. \\
&+ \frac{F_2^2}{4M_N^2} \left[P_N \cdot Q (\bar{P}^\mu Q^\nu + \bar{P}^\nu Q^\mu) + \bar{P} \cdot Q (P_N^\mu Q^\nu + P_N^\nu Q^\mu) - Q^2 (P_N^\mu \bar{P}^\nu + P_N^\nu \bar{P}^\mu) \right. \\
&\left. \left. - \left(2M_N^2 - \frac{\bar{Q}^2}{2} \right) Q^\mu Q^\nu + g^{\mu\nu} \left(2M_N^2 Q^2 - \frac{Q^2 \bar{Q}^2}{2} - 2P_N \cdot Q \bar{P} \cdot Q \right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{87}$$

con $A \cdot B = A_\mu B^\mu$.

3.4 Respuestas nucleónicas (“single-nucleon”) en procesos A(e,e’N).

Las respuestas nucleónicas se determinan a partir de las componentes del tensor nucleónico. En el caso en que se considere como sistema de referencia el definido por los ejes $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ (1) las expresiones de estas respuestas vienen dadas por ecuaciones análogas a (36-39), donde el tensor nuclear es sustituido por el tensor nucleónico. No hay que olvidar que en (36-39) se ha supuesto que se satisface la propiedad de conservación de la corriente. A veces, resulta más fácil trabajar en el sistema de referencia nuclear definido por los vectores unitarios:

$$\hat{z} = \frac{\mathbf{q}}{q}, \quad \hat{y} = \frac{\mathbf{p}_N \times \mathbf{q}}{|\mathbf{p}_N \times \mathbf{q}|}, \quad \hat{x} = \hat{z} \times \hat{y}. \tag{88}$$

La relación entre las corrientes para ambos sistemas de referencia es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} J^x \\ J^y \end{pmatrix} = R(\phi) \begin{pmatrix} J^1 \\ J^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^1 \\ J^2 \end{pmatrix}, \tag{89}$$

donde $R(\phi)$ es la matriz de cambio de sistema de referencia.

Podemos deducir por tanto las siguientes relaciones entre las corrientes:

$$J^x = J^1 \cos \phi - J^2 \sin \phi, \tag{90}$$

$$J^y = J^1 \sin \phi + J^2 \cos \phi. \tag{91}$$

Para el gauge de Landau obtenemos las siguientes expresiones para las respuestas nucleónicas en los sistemas de referencia (1) y (88):

$$\mathcal{R}^L = \left(\frac{q^2}{Q^2} \right)^2 \left(\mathcal{W}^{00} - 2 \frac{\omega}{q} \mathcal{W}^{0z} + \frac{\omega^2}{q^2} \mathcal{W}^{zz} \right) = \left(\frac{q^2}{Q^2} \right)^2 \left(\mathcal{W}^{00} - 2 \frac{\omega}{q} \mathcal{W}^{03} + \frac{\omega^2}{q^2} \mathcal{W}^{33} \right), \quad (92)$$

$$\mathcal{R}^T = \mathcal{W}^{xx} + \mathcal{W}^{yy} = \mathcal{W}^{11} + \mathcal{W}^{22}, \quad (93)$$

$$\mathcal{R}^{TL} = \frac{q^2}{-Q^2} 2\sqrt{2} \left(\mathcal{W}^{0x} - \frac{\omega}{q} \mathcal{W}^{zx} \right) = \frac{q^2}{-Q^2} 2\sqrt{2} \left[\left(\mathcal{W}^{01} - \frac{\omega}{q} \mathcal{W}^{31} \right) \cos \phi - \left(\mathcal{W}^{02} - \frac{\omega}{q} \mathcal{W}^{32} \right) \sin \phi \right], \quad (94)$$

$$\mathcal{R}^{TT} = \mathcal{W}^{yy} - \mathcal{W}^{xx} = (\mathcal{W}^{22} - \mathcal{W}^{11}) \cos 2\phi + 2\mathcal{W}^{12} \sin 2\phi, \quad (95)$$

donde $\mathcal{W}^{ij} = (J^i)^* J^j$. Los factores $\left(\frac{q^2}{Q^2} \right)^2$ y $\frac{q^2}{-Q^2}$ que aparecen en (92) y (94) surgen de imponer conservación del tensor nucleónico para que, al obtener el gauge de Coulomb, nos den las ecuaciones (36) y (38), respectivamente. Nótese que las ecuaciones (93) y (95) son independientes del gauge elegido puesto que las componentes transversales no se transforman. Asimismo, aplicando la conservación del tensor nucleónico obtenemos la siguiente relación:

$$Q_\mu \mathcal{W}^{\mu\nu} = \omega \mathcal{W}^{0\nu} - q \mathcal{W}^{3\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{W}^{3\nu} = \frac{\omega}{q} \mathcal{W}^{0\nu}. \quad (96)$$

Así pues, obtenemos el gauge de Coulomb a partir del de Landau imponiendo conservación del tensor nucleónico:

$$\mathcal{R}_{CC^0}^L = \mathcal{W}^{00}, \quad (97)$$

$$\mathcal{R}_{CC^0}^{TL} = 2\sqrt{2} \mathcal{W}^{0x} = 2\sqrt{2} (\mathcal{W}^{01} \cos \phi - \mathcal{W}^{02} \sin \phi). \quad (98)$$

El gauge de Coulomb también puede ser escrito de otra forma sustituyendo las componentes del tensor nucleónico:

$$\mathcal{R}_{CC^0}^L = \frac{\kappa^2}{\bar{\tau}} \left\{ \chi^2 [F_1^2 + \bar{\tau} F_2^2] + [F_1 - \bar{\tau} F_2]^2 \right\}, \quad (99)$$

$$\mathcal{R}^T = \chi^2 [F_1^2 + \rho_2 \bar{\tau} F_2^2] + 2\bar{\tau} \left[F_1 + F_2 \sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}} \right]^2, \quad (100)$$

$$\mathcal{R}_{CC^0}^{TL} = 2\sqrt{2} \zeta \chi \left[F_1^2 + \bar{\tau} F_2^2 \sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}} \right] \cos \phi, \quad (101)$$

$$\mathcal{R}^{TT} = -\chi^2 [F_1^2 + \rho_1 \bar{\tau} F_2^2] \cos 2\phi, \quad (102)$$

donde hemos introducido la siguiente notación,

$$\phi = \phi_N, \quad (103)$$

$$\chi \equiv \frac{p}{M_N} \sin \theta = \frac{p_N}{M_N} \sin \theta_N, \quad (104)$$

$$\chi' \equiv \frac{p}{M_N} \cos \theta = \frac{p_N}{M_N} \cos \theta_N - 2\kappa, \quad (105)$$

y hemos empleado las siguientes variables adimensionales: $\tau \equiv |Q^2|/4M_N^2$, $\bar{\tau} \equiv |\bar{Q}^2|/4M_N^2$, $\kappa \equiv q/2M_N$. Las variables χ y χ' están relacionadas por

$$\chi' = \sqrt{(\kappa^2/\bar{\tau} - 1)(1 + \bar{\tau} + \chi^2)} - \kappa, \quad (106)$$

y la variable ζ es la energía sin dimensión definida como

$$\zeta = \frac{\bar{E} + E_N}{2M_N} = \sqrt{\frac{\kappa^2}{\bar{\tau}}(1 + \bar{\tau} + \chi^2)}. \quad (107)$$

La relación entre ρ_1 y ρ_2 viene dada por

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{2\kappa^2}{\bar{\tau}} \left\{ \sqrt{\frac{\kappa^2}{\bar{\tau}} - 1} - \sqrt{\frac{\kappa^2}{\bar{\tau}} - \rho_1} \right\}^2. \quad (108)$$

Para la prescripción $CC1^0$ $\rho_1 = \rho_2 = 1$, y para la prescripción $CC2^0$ $\rho_1 = \tau/\bar{\tau}$ y $\rho_2 = \tau'/\bar{\tau}$, donde $\tau' \equiv |Q \cdot \bar{Q}|/4M_N^2$. Nótese que la respuesta longitudinal es la misma para ambas prescripciones.

A continuación mostramos las respuestas nucleónicas para el gauge de Weyl, las cuales son obtenidas a partir del gauge de Landau:

$$\mathcal{R}_{CC^3}^L = \frac{q^2}{\omega^2} \mathcal{W}^{zz} = \frac{q^2}{\omega^2} \mathcal{W}^{33}, \quad (109)$$

$$\mathcal{R}_{CC^3}^{TL} = 2\sqrt{2} \frac{q}{\omega} \mathcal{W}^{zx} = 2\sqrt{2} \frac{q}{\omega} (\mathcal{W}^{31} \cos \phi - \mathcal{W}^{32} \sin \phi). \quad (110)$$

3.5 Distribución de momentos en procesos $A(e,e'N)B$.

La función de onda del nucleón ligado en la aproximación de impulso de ondas planas relativista (RPWIA) es solución de la ecuación de Dirac con potencial. Esta función contiene contribuciones correspondientes a proyecciones positivas (“up”) y negativas (“down”) de la energía (113). Para esta aproximación la relación entre las respuestas nucleares y las respuestas nucleónicas viene dada por la siguiente expresión:

$$R^k = \mathcal{R}_{uu}^k N_{uu}(p) + \mathcal{R}_{uv}^k N_{uv}(p) + \mathcal{R}_{vv}^k N_{vv}(p), \quad (111)$$

siendo uu la proyección positiva, vv la negativa y uv una combinación entre ambas. Un estudio detallado sobre las diversas componentes de la distribución de momentos, así como sobre las respuestas “single-nucleon” puede encontrarse en [13,15,16].

Si tenemos únicamente en cuenta la proyección positiva de la energía, la respuesta nuclear vendrá dada por:

$$R^k = \mathcal{R}_{uu}^k N_{uu}(p). \quad (112)$$

3.5.1 Modelos nucleares.

En este trabajo consideramos básicamente tres modelos: HO, HS y NLHS. El primero es un modelo no relativista, es decir, basado en la resolución de la ecuación de Schrödinger, mientras que los otros dos son modelos de campo medio relativista (RMF) cuyas soluciones vienen dadas por la ecuación de Dirac.

A. Modelos de campo medio relativista (RMF):

Un estudio detallado sobre este tipo de modelos puede encontrarse en [17,18]. En este trabajo sólo exponemos los hechos y propiedades más relevantes de los mismos para la posterior discusión de los resultados obtenidos.

Una de las primeras parametrizaciones que surgen es la denominada HS [19]. Las constantes de acoplo se ajustan para reproducir la energía de ligadura y la energía de asimetría por nucleón, así como la densidad de saturación en materia nuclear. No obstante, aunque este modelo es capaz de describir muchas características de núcleos finitos, falla al intentar reproducir las propiedades de superficie. Además, las energías de ligadura que se derivan de él son pequeñas.

Boguta y Bodmer [20] extendieron el modelo incluyendo acoplos no lineales. Los nuevos conjuntos de parámetros NLHS [21] proporcionan mejores ajustes para las propiedades de isospín de los núcleos, con lo cual describen especialmente bien los núcleos exóticos lejos del valle de estabilidad. Las propiedades nucleares que se ajustan en el modelo NLHS son el radio de carga, la energía de ligadura y el radio neutrónico.

La solución general de la ecuación de Dirac con potenciales con simetría esférica, como son los potenciales escalar $S(r)$ y vector $V(r)$, se puede escribir como

$$\psi_{\kappa}^{m_j}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r)\Phi_{\kappa}^{m_j}(\Omega_r) \\ if_{\kappa}(r)\Phi_{-\kappa}^{m_j}(\Omega_r) \end{pmatrix}, \quad (113)$$

donde hemos introducido los armónicos esféricos de espín $\Phi_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{r}})$,

$$\Phi_{\kappa}^{m_j}(\Omega_r) = \sum_{ms} \left\langle lm_l \frac{1}{2} s \middle| jm_j \right\rangle Y_l^{m_l}(\Omega_r) \chi^s, \quad (114)$$

siendo χ^s un biespinor de Pauli como ya mencionamos en la Sección 2, $j = |\kappa| - 1/2$ y el número cuántico l dado por la relación $l = \kappa$ si $\kappa > 0$, $l = -\kappa - 1$ si $\kappa < 0$.

Nótese que no hemos introducido dependencia explícita de la función de onda en el isospín. Sin embargo, la diferencia entre la función de onda de un protón y un neutrón proviene de que el potencial vector V depende del isospín.

Las funciones radiales $g_{\kappa}(r)$ y $f_{\kappa}(r)$ satisfacen las ecuaciones:

$$\frac{df_{\kappa}}{dr} = \frac{\kappa - 1}{r} f_{\kappa} - [E - M_N - S - V]g_{\kappa}, \quad (115)$$

$$\frac{dg_{\kappa}}{dr} = -\frac{\kappa - 1}{r} g_{\kappa} - [E - M_N + S - V]f_{\kappa}. \quad (116)$$

La función de onda del nucleón ligado será un cuadriespinor de este tipo (ecuación 113) con buenos números cuánticos κ y m_j correspondientes al orbital que se considere. En el espacio de momentos, dicha función de onda se escribe como

$$\psi_{\kappa}^{m_j}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \psi_{\kappa}^{m_j}(\mathbf{r}) = (-i)^l \left(\begin{array}{c} g_{\kappa}(p) \\ S_{\kappa} f_{\kappa}(p) \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{p} \end{array} \right) \Phi_{\kappa}^{m_j}(\Omega_p), \quad (117)$$

donde $S_{\kappa} = \kappa/|\kappa|$. La función $\Phi_{\kappa}^{m_j}(\Omega_p)$ satisface la siguiente relación:

$$\Phi_{-\kappa}^{m_j}(\Omega_p) = -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{p} \Phi_{\kappa}^{m_j}(\Omega_p). \quad (118)$$

Las funciones radiales en el espacio de momentos vienen dadas por

$$g_{\kappa}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} r^2 dr g_{\kappa}(r) j_{\bar{l}}(pr), \quad (119)$$

$$f_{\kappa}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} r^2 dr f_{\kappa}(r) j_{\bar{l}}(pr), \quad (120)$$

donde $j_{\bar{l}}(pr)$ son las funciones de Ricati-Bessel y \bar{l} se define como $\bar{l} = \kappa - 1$ si $\kappa > 0$, $\bar{l} = -\kappa$ si $\kappa < 0$.

La normalización es tal que

$$\int r^2 dr (g_{\kappa}^2(r) + f_{\kappa}^2(r)) = \int p^2 dp (g_{\kappa}^2(p) + f_{\kappa}^2(p)) = 1. \quad (121)$$

Si consideramos despreciable la contribución que $f_{\kappa}(p)$ aporta a la distribución de momentos, puesto que ésta es mucho más pequeña que $g_{\kappa}(p)$, la distribución de momentos con proyección positiva de la energía vendrá dada por

$$N_{uu}(p) = \frac{2M_N}{\bar{E} + M_N} \frac{g_{\kappa}^2(p)}{4\pi}, \quad (122)$$

la cual en el límite no relativista puede escribirse de la siguiente forma

$$N_{uu}^{n.r}(p) = \frac{g_{\kappa}^2(p)}{4\pi} \mathcal{N}, \quad (123)$$

donde

$$\mathcal{N}^{-1} = \int p^2 dp g_{\kappa}^2(p). \quad (124)$$

La función $f_{\kappa}^2(p)$ no contribuye más de un 3% a la normalización, por tanto se introduce Z como factor de renormalización (para nuestro caso $\mathcal{N} = 1.025$, muy próximo a 1).

B. Modelo de oscilador armónico (HO):

En este caso la ecuación de Schrödinger (parte radial) para el HO viene dada por [22]:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(\frac{2M_N E}{\hbar^2} + \frac{2M_N U_0}{\hbar^2} - \frac{M_N^2 \omega^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) = 0, \quad (125)$$

donde ω es la frecuencia y U_0 es la constante del potencial con expresión

$$U_0 = (-51 + 33(N - Z)/A) \text{ MeV}, \quad (126)$$

siendo A el número másico, Z el número atómico y $N = A - Z$.

Las soluciones radiales normalizadas son las soluciones de Laguerre

$$R_{nl}(r) = N_{nl} (vr)^l \exp\left(-\frac{v^2 r^2}{2}\right) L_{n-1}^{l+1/2}(v^2 r^2), \quad (127)$$

donde $v = \sqrt{M_N \omega / \hbar}$ describe la frecuencia del oscilador, N_{nl} es el factor de normalización que viene dado por la función gamma como

$$N_{nl} = \left[\frac{2n! v^3}{\Gamma(n + l + 1/2)} \right]^{1/2}, \quad (128)$$

y los polinomios de Laguerre vienen dados por la serie

$$L_{n-1}^{l+1/2}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^l (-1)^k x^k. \quad (129)$$

Aplicando la transformada de Fourier dada por la ecuación (117) podemos obtener la función de onda en el espacio de momentos:

$$\varphi(p) = \left[\frac{2n!}{v^3 \Gamma(n + l + 1/2)} \right]^{1/2} (-1)^n \left(\frac{p}{v} \right)^l \exp\left(-\frac{p^2}{2v^2}\right) L_{n-1}^{l+1/2}(p^2/v^2) = (-1)^n R_{nl}(p), \quad (130)$$

donde $(-1)^n$ es el factor de fase. Consideramos que los números cuánticos n y l son ≥ 1 .

En este caso la distribución de momentos vendrá dada por

$$N(p) = \frac{|\varphi(p)|^2}{4\pi}. \quad (131)$$

Las energías para el modelo HO dependen únicamente de n y l cuya expresión es la siguiente:

$$\varepsilon_{nl} = (2(n-1) + l)\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega - U_0. \quad (132)$$

Al no depender la energía de j , se dice que el modelo está degenerado, pues para un mismo n y l obtenemos la misma energía. La introducción de un término de acoplamiento espín-órbita $\mathbf{I} \cdot \mathbf{s}$ rompe dicha degeneración. En este caso, las energías vendrán dadas por la siguiente expresión

$$\varepsilon_{n(l/2)j} = \hbar\omega[2(n-1) + l + 3/2] - U_0 + \alpha \begin{cases} -l \\ l+1 \end{cases}, \quad j = \begin{cases} l+1/2 \\ l-1/2 \end{cases} \quad (133)$$

donde

$$\alpha(r) = U_{ls} \frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr}, \quad U_{ls} = -0.44U_0 \quad (134)$$

y

$$U(r) = -U_0 + \frac{1}{2} M_N \omega^2 r^2 + \alpha \begin{cases} -l \\ l+1 \end{cases}, \quad j = \begin{cases} l+1/2 \\ l-1/2 \end{cases}. \quad (135)$$

Resolviendo la ecuación de Schrödinger obtenemos la función de onda:

$$\varphi(\mathbf{r}, n(l \frac{1}{2}) jm) \equiv R_{nl}(r) \sum_{m_l, s} \left\langle l m_l, \frac{1}{2} s \middle| j m \right\rangle Y_l^{m_l}(\Omega_r) \chi^s. \quad (136)$$

Aplicando la transformada de Fourier (117) calculamos la función de onda en el espacio de momentos:

$$\varphi(\mathbf{p}) = (-1)^n R_{nl}(p) \Phi_{\kappa}^{m_j}(\Omega_p). \quad (137)$$

Por tanto la distribución de momentos vendrá dada por

$$N(p) = \frac{1}{4\pi} \int |\varphi(\mathbf{p})|^2 d\Omega_p = \frac{|R_{nl}(p)|^2}{4\pi} \underbrace{\int |\Phi_{\kappa}^{m_j}(\Omega_p)|^2 d\Omega_p}_1 = \frac{|R_{nl}(p)|^2}{4\pi} = \frac{|\varphi(p)|^2}{4\pi}, \quad (138)$$

obteniéndose el mismo resultado que en (131). Esto se debe a que tanto para el modelo HO como el modelo HO + $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$, la función radial no depende de j , solamente depende de n y l .

3.6 Prescripción “on-shell”.

Uno de los principales problemas que plantea el tratamiento propuesto por De Forest es la ruptura de la invariancia gauge de la teoría, que es uno de los principales requisitos que ha de cumplir una teoría cuántica de campos. Para el caso del nucleón ligado la generalización del uso de la corriente “on-shell” presenta la inconsistencia de que la conservación de la corriente no se satisface en una cantidad proporcional a $\omega - \bar{\omega}$. Debido a ello, cada uno de los tres gauge en la Sección 3.2 conduce a un resultado diferente, por tanto introduciendo incertidumbres en el cálculo teórico. Además, el uso de las corrientes $CC1$ y $CC2$ introducen resultados distintos en el caso “half off-shell”, al no ser válida la descomposición de Gordon para el nucleón ligado.

La idea básica de la prescripción “on-shell” consiste en imponer que el nucleón ligado satisfaga las relaciones cinemáticas que verifica un nucleón “on-shell”. Esto conlleva que la energía y el momento del nucleón están ligados por la relación libre $E = \sqrt{p^2 + M_N^2}$. Este tratamiento conlleva ciertas implicaciones físicas. La energía E puede escribirse de la siguiente forma utilizando la condición de conservación de la energía :

$$E = M_A - \xi - E_B^0, \quad (139)$$

donde E es la energía del nucleón ligado y ξ es la energía de excitación definida en (45). Si en la ecuación (139) imponemos la condición de que la energía del nucleón ligado adopte el valor “on-shell”, la energía de excitación vendrá dada por:

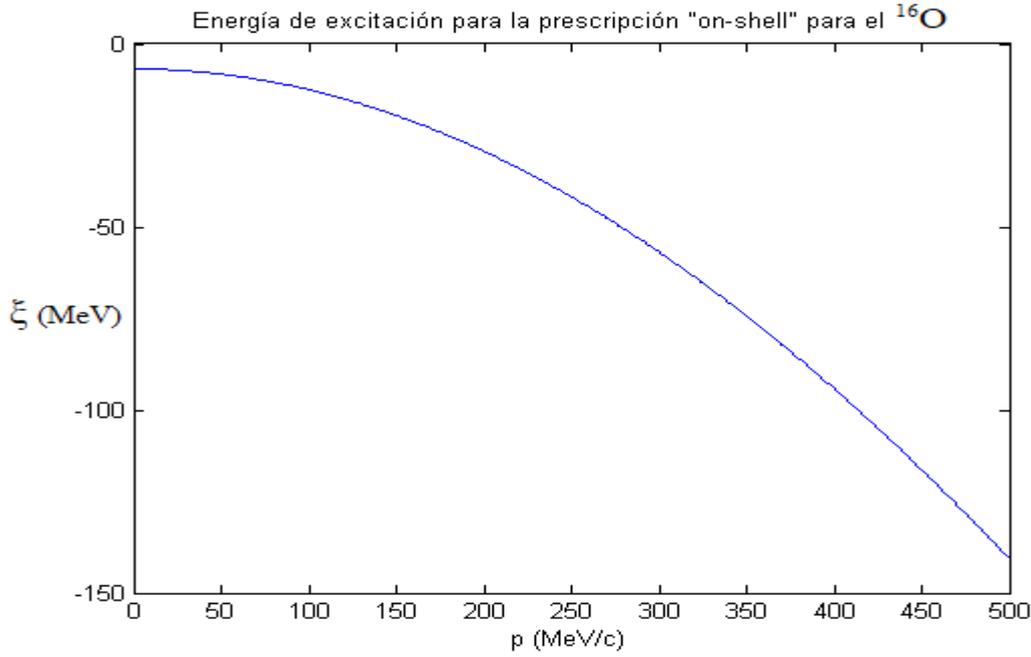


Figura 7: Energía de excitación en la prescripción “on-shell” para el ^{16}O .

$$\xi = M_A - \sqrt{p^2 + M_N^2} - \sqrt{p^2 + (M_B^0)^2}. \quad (140)$$

Podemos ver que imponiendo que el nucleón ligado verifique la condición $E = \bar{E}$ (siendo $\bar{E} = \sqrt{p^2 + M_N^2}$ la variable “on-shell” introducida por De Forest) nos lleva a una relación biunívoca entre la energía de excitación y el momento desaparecido, es decir, $\xi = \xi(p)$. La ecuación (140) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\xi = - \left[E_s + \sqrt{p^2 + M_N^2} - M_N + \sqrt{p^2 + (M_B^0)^2} - M_B^0 \right] \leq 0. \quad (141)$$

La ecuación (140) muestra que la energía de excitación es negativa para todo el rango de p . Obviamente, este resultado no se corresponde a una situación física puesto que la energía de excitación es definida positiva. Asimismo, la energía de excitación real del núcleo residual, para la prescripción “on-shell”, debe ser sustituida por un valor efectivo negativo dependiente del momento desaparecido (ver figura 7).

Un argumento a favor de la prescripción “on-shell” es que en ella no existen ambigüedades de Gordon ni ambigüedades gauge al contrario de lo que ocurre con la prescripción “off-shell”. Es importante señalar que la ecuación (140) es consistente con las ambigüedades introducidas por las diversas prescripciones “off-shell”, en la cual la energía de excitación se fija a cero. En dicho caso, ambas prescripciones coinciden únicamente para $p = 0$ y $E_s = 0$. En todo caso, la prescripción “on-shell” debe considerarse como un método aproximado más para describir el vértice γNN en procesos $A(e, e'N)$.

4 Análisis de los resultados.

En esta sección presentamos los resultados que se han obtenido para las respuestas “single-nucleon”, sección eficaz “single-nucleon”, funciones radiales, distribuciones de momentos y respuestas nucleares. El análisis de las respuestas nucleónicas lo realizaremos para cinemática (q - y) constante (en la que se fijan los valores q e y) y cinemática paralela ($\mathbf{p}_N \parallel \mathbf{q}, \mathbf{p}$ en la misma dirección), siendo $\phi = 0$, es decir, cinemática coplanar y la energía de excitación $\xi = 0$ (el núcleo residual en su estado fundamental). Para las respuestas nucleónicas hemos considerado únicamente el caso de protones, (e, e' p). Analizaremos la sección eficaz nucleónica (para los casos de protones y neutrones) para cinemática perpendicular, teniendo en cuenta distintos valores de ϕ . A continuación mostraremos las funciones radiales (los casos de protones y neutrones) y las distribuciones de momentos (el caso de protones) para los tres modelos analizados en la Sección 3.5.1. Finalmente, analizaremos las respuestas nucleares (caso de protones) para cinemática perpendicular y $\phi = 0$.

4.1 Respuestas nucleónicas para cinemática (q - y) constante.

Los resultados en cinemática (q - y) constante se presentan en las figuras 9-12. Para cada respuesta presentamos resultados para tres valores del momento transferido: $q = 0.5$ GeV/c (paneles superiores), 1 GeV/c (paneles intermedios) y 2 GeV/c (paneles inferiores). A su vez, para cada momento transferido se consideran tres valores de y : -200 MeV/c ($\omega < \omega_{QEP}$) (paneles izquierdos), 0 (valor correspondiente al pico cuasielástico) (paneles centrales), y +200 MeV/c ($\omega > \omega_{QEP}$) (paneles derechos). El análisis de todos estos casos nos servirá para tratar de entender cómo afectan las incertidumbres “off-shell” y los efectos relativistas cinemáticos a cada respuesta. Para ello se representan seis curvas para cada respuesta correspondientes a las seis prescripciones “off-shell” de De Forest.

Las curvas (ξ, p) que se obtienen para cada par de valores q, y resultan útiles para saber la región de trabajo accesible. En la figura 8 observamos que para cada elección de valores q, y , el rango permitido de momento desaparecido es diferente. Para las respuestas nucleónicas presentamos los resultados en el rango de p comprendido entre p_{\min} y 0.5 GeV/c. Para cada par de valores (q, y) estaremos barriendo una fracción distinta del rango total permitido de p .

Recordemos que las respuestas \mathcal{R}^T y \mathcal{R}^{TT} sólo dependen de la elección del operador de corriente, mientras que \mathcal{R}^L y \mathcal{R}^{TL} dependen además de la elección del gauge. En concreto, la respuesta \mathcal{R}^L es independiente en el gauge de Coulomb de la elección del operador de corriente, y, en general, la incertidumbre debida a la elección del operador es menor de un $\approx 8\%$ ($\approx 6\%$) para el gauge de Landau (Coulomb). Sin embargo, en el caso del gauge de Weyl las diferencias son apreciablemente mayores, pudiendo llegar a ser elevadas en ciertas condiciones.

Consideremos a continuación las incertidumbres asociadas a la elección del gauge. En las figuras 9 y 11 se observa que los resultados obtenidos en el gauge de Weyl son los que muestran mayores diferencias con respecto a los demás. Esto está de acuerdo con lo observado en [10,15]. Fijándonos en el operador de corriente podemos concluir lo siguiente:

- Las diferencias relativas entre el gauge de Weyl y los correspondientes gauge de Landau/Coulomb disminuyen al aumentar q , tanto más cuanto menor es el valor de y .
- Para un q fijo, el gauge de Weyl es más parecido a los gauge de Landau y Coulomb a medida que pasamos de valores negativos a positivos de y . Para valores altos de q las respuestas obtenidas para los tres gauge muestran una dependencia considerablemente menor con el valor de y .

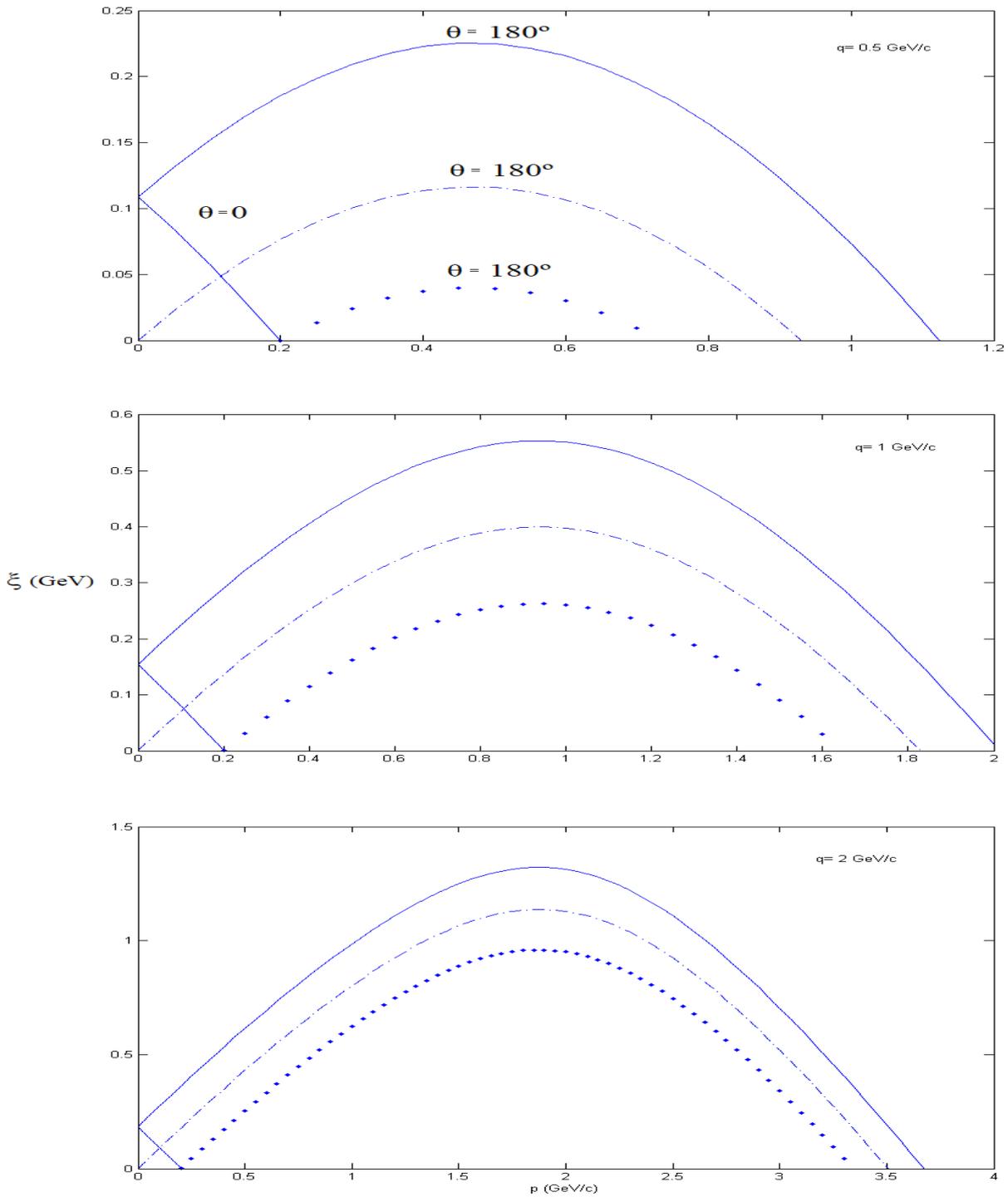


Figura 8: Energía de excitación en función de p para el ^{16}O . La línea continua se corresponde con $y = 200 \text{ MeV/c}$, la rayada-punteada con $y = 0$ y la punteada con $y = -200 \text{ MeV/c}$.

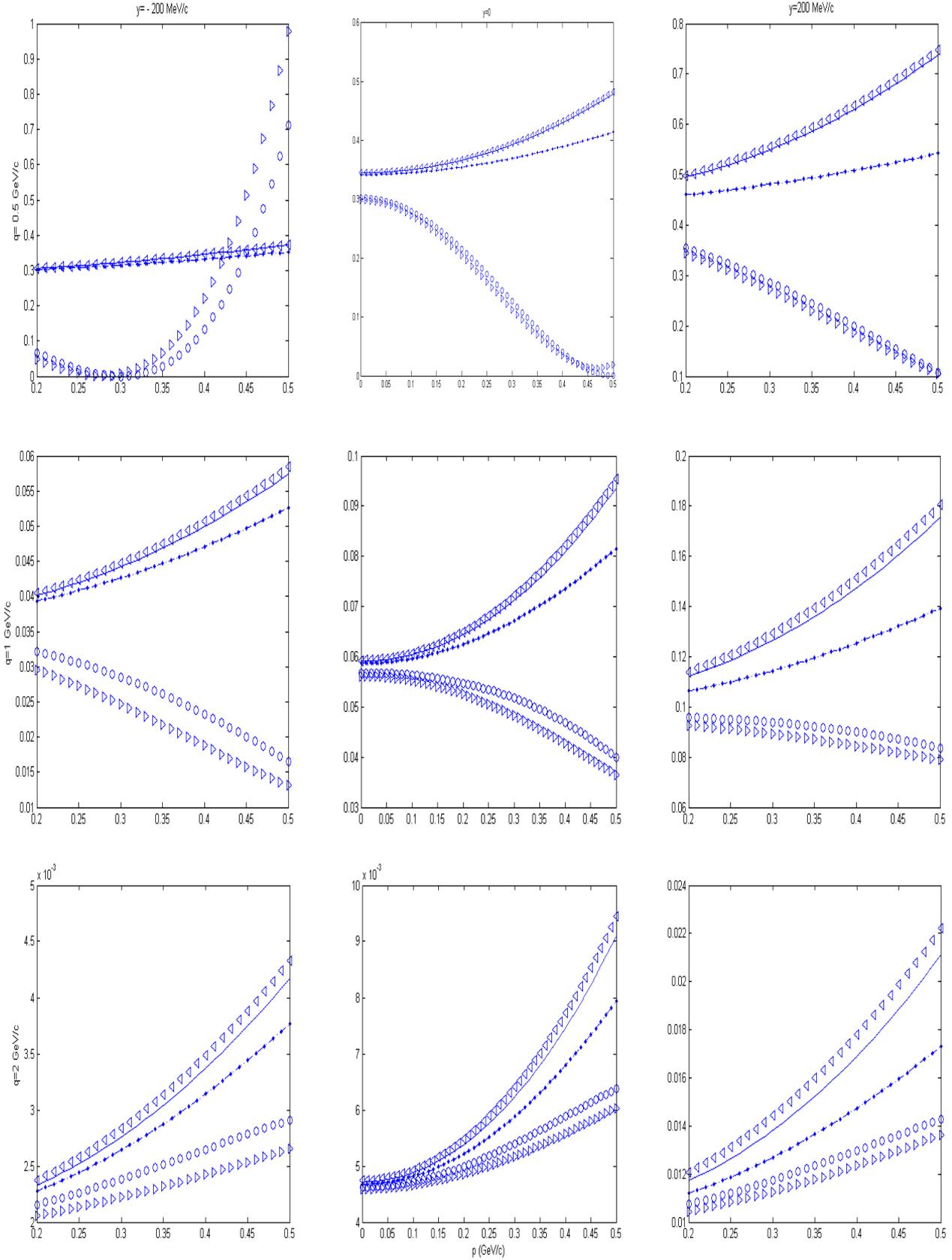
\mathcal{R}^L 

Figura 9: Respuesta longitudinal “single-nucleon”. Las curvas para el gauge de Coulomb se representan con líneas rayadas-punteadas y (líneas punteadas) para $CC1(CC2)$, para el de Weyl con círculos y (triángulos hacia la derecha) y para el de Landau con líneas continuas y (triángulos hacia la izquierda).

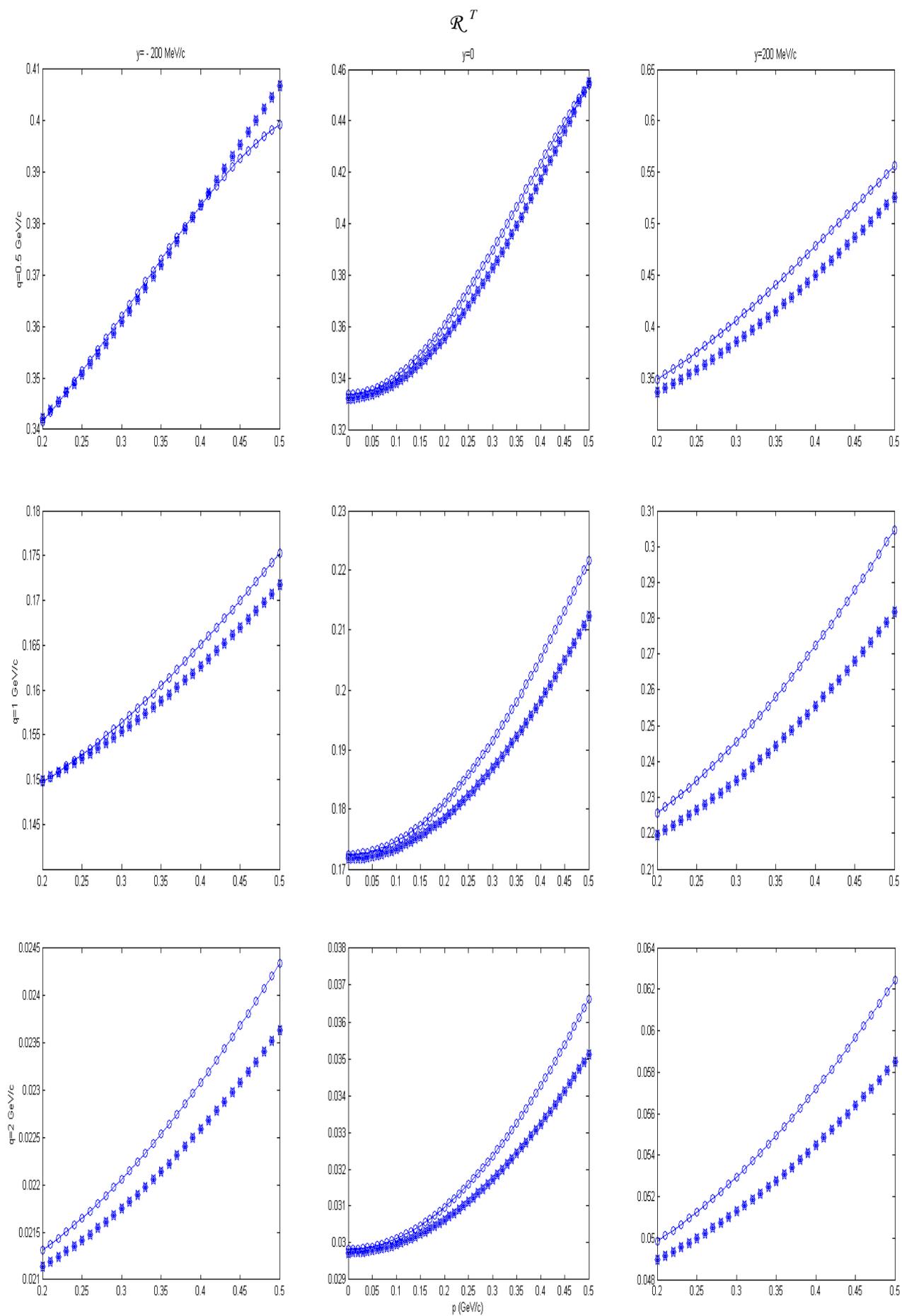


Figura 10: Respuesta transversal “single-nucleon”. Misma leyenda que en la figura 9.

$$\mathcal{R}^{TL}$$

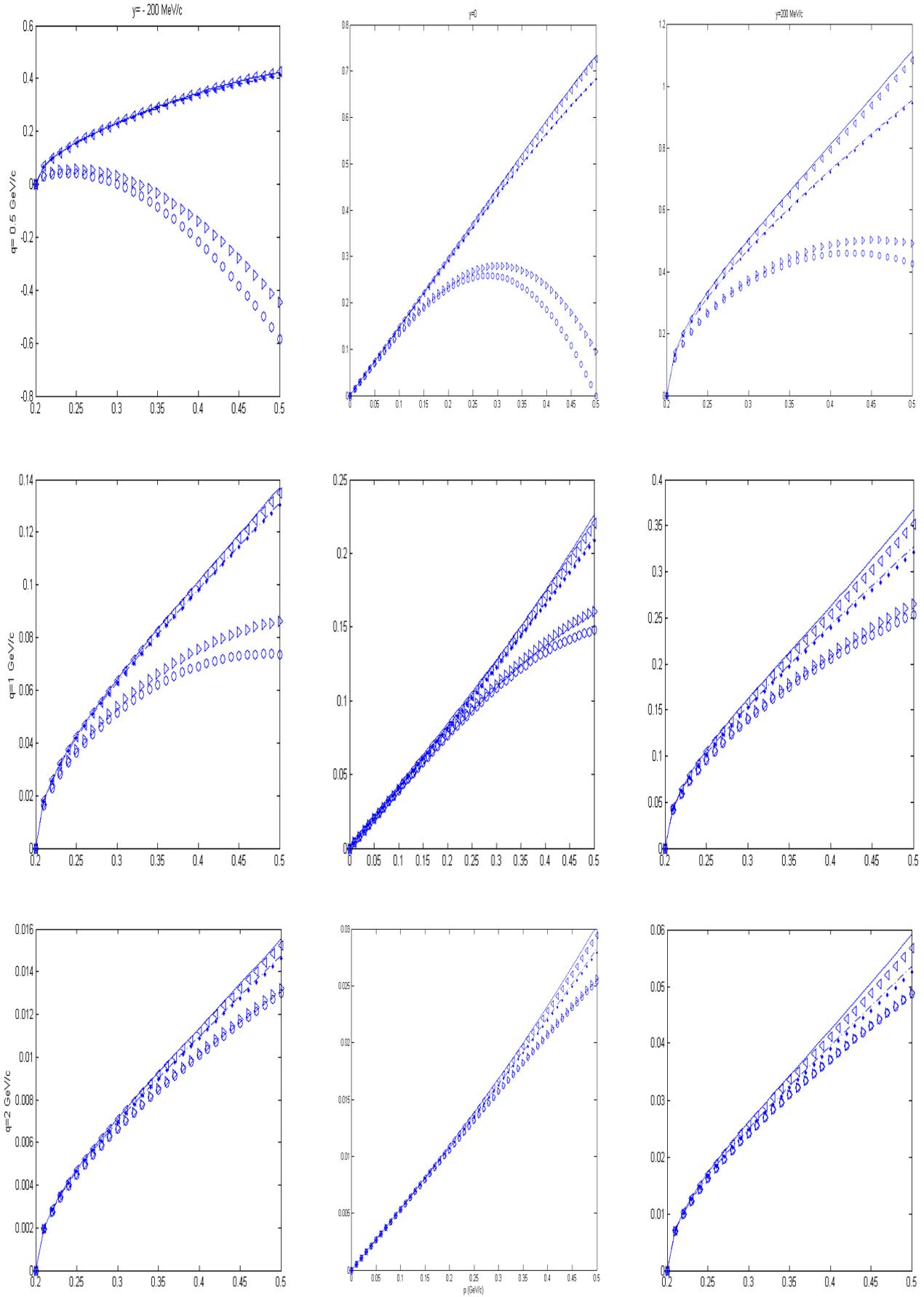


Figura 11: Respuesta nucleónica de interferencia transversal-longitudinal. Misma leyenda que figura 9.

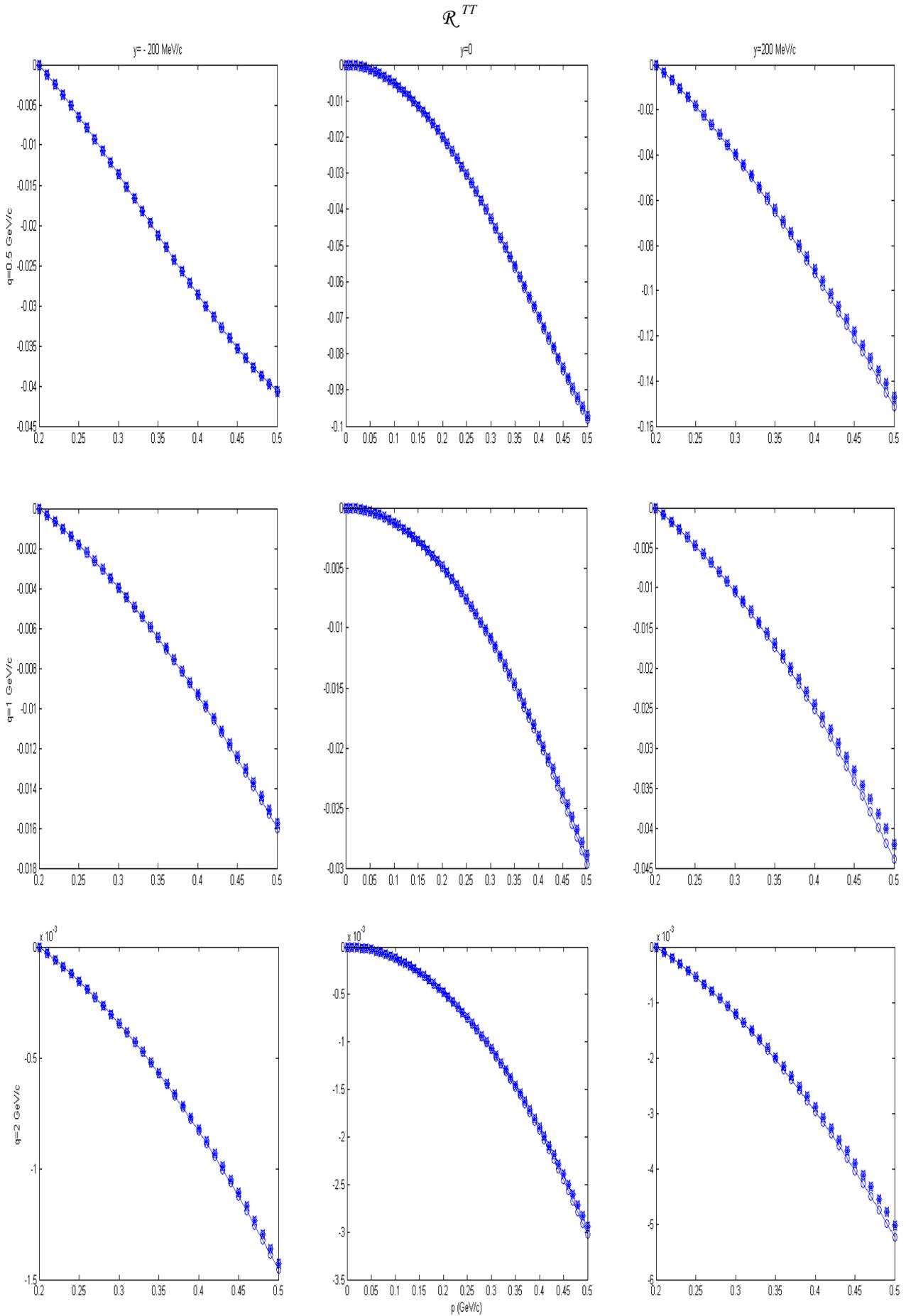


Figura 12: Respuesta nucleónica de interferencia transversal-transversal. Misma leyenda que figura 9.

- Las diferencias apreciadas entre los gauge de Landau y Coulomb van aumentando ligeramente al incrementar y . Este aumento es mayor para q pequeños.

Por último, es importante tener en cuenta que el rango de momento desaparecido $[p_{\min}, 0.5]$ GeV/c, representa una fracción muy distinta del rango total permitido para cada cinemática definida por q, y . En la figura 8 se observa que dicho rango es mayor conforme q aumenta. En efecto, el intervalo $[p_{\min}, 0.5]$ GeV/c representa aproximadamente un $\approx 55\%$ de la región permitida para $q = 0.5$ GeV/c ($\approx 30\%$ para $y = 200$ MeV/c), mientras que para $q = 2$ GeV/c representa como máximo un $\approx 15\%$. Esto puede explicar por qué las diferencias entre distintos gauge se van atenuando conforme aumentamos q .

La parametrización que hemos utilizado para obtener las gráficas de las respuestas nucleónicas es la de Galster [23]. En las Secciones 4.2, 4.3 y 4.5 también utilizaremos la parametrización de Galster.

Podemos señalar que el gauge de Weyl muestra un comportamiento muy distinto frente a los gauge de Landau/Coulomb. Por otro lado, las incertidumbres “gauge” son mayores para $CC1$, i.e., $CC2$ muestra menor sensibilidad al gauge elegido.

4.2 Respuestas nucleónicas en cinemática paralela.

En las figuras 13, 14, 15 y 16 presentamos las respuestas no polarizadas para reacciones $A(e, e'p)B$ en cinemática paralela para la aproximación PWIA. Hemos realizado dos elecciones para las variables dinámicas: $\{p_N, \theta_N = 0, \xi = 0, p\}$ y $\{q, \theta_N = 0, \xi = 0, p\}$. Si mantenemos el momento del nucleón saliente p_N fijo, esto implica que el momento transferido q tiene que variar, puesto que el momento desaparecido p varía. Para $q < p_N$ las direcciones de \mathbf{q} , \mathbf{p} y \mathbf{p}_N coinciden, en consecuencia $\theta = 0$ (cinemática estrictamente paralela). Para $q > p_N$ el momento desaparecido \mathbf{p} es antiparalelo con respecto a \mathbf{q} y \mathbf{p}_N , en consecuencia, $\theta = 180^\circ$ (cinemática antiparalela). Para la elección $\{q, \theta_N = 0, \xi = 0, p\}$, el momento transferido q se fija y para variar p el momento del nucleón saliente p_N debe variar también.

En la cinemática paralela y utilizando la aproximación PWIA sólo sobreviven dos respuestas no polarizadas en el proceso $(e, e'N)$, \mathcal{R}^L y \mathcal{R}^T . Las figuras 13 y 14 se corresponden con la elección $\{p_N, \theta_N = 0\}$, mientras que las figuras 15 y 16 se corresponden con $\{q, \theta_N = 0\}$. En ambos casos representamos las respuestas para $\theta = 0$ y $\theta = 180^\circ$.

Comencemos la explicación con las respuestas obtenidas a partir de las figuras 13 y 14. Los resultados para cinemática estrictamente paralela son mostrados en la figura 13. Aquí el momento transferido disminuye conforme aumenta p (recordemos que $q = p_N - p$). Existe, por tanto, un valor máximo de p para el cual q alcanza el valor de ω , es decir, para el cual nos aproximamos a la región de producción de fotones reales ($Q^2 = 0$). Como consecuencia de ello, la respuesta \mathcal{R}^L evaluada en el gauge de Landau diverge debido al factor $1/Q^2$ que aparece en la ecuación (92). Cuando imponemos conservación de la corriente (gauge de Coulomb o de Weyl), ese factor se cancela, y no existe divergencia. No obstante, los resultados en la región cercana a la producción de fotones reales han de ser tomados con precaución (nótese que para $p_N = 0.5$ GeV/c sólo exploramos el rango $0 < p < 0.325$ GeV/c con el fin de no acercarnos demasiado a la zona de producción de fotones reales). En cinemática antiparalela (figura 14) la situación es distinta, ya que el momento transferido se incrementa al aumentar p , y por tanto no es posible la producción de fotones reales.

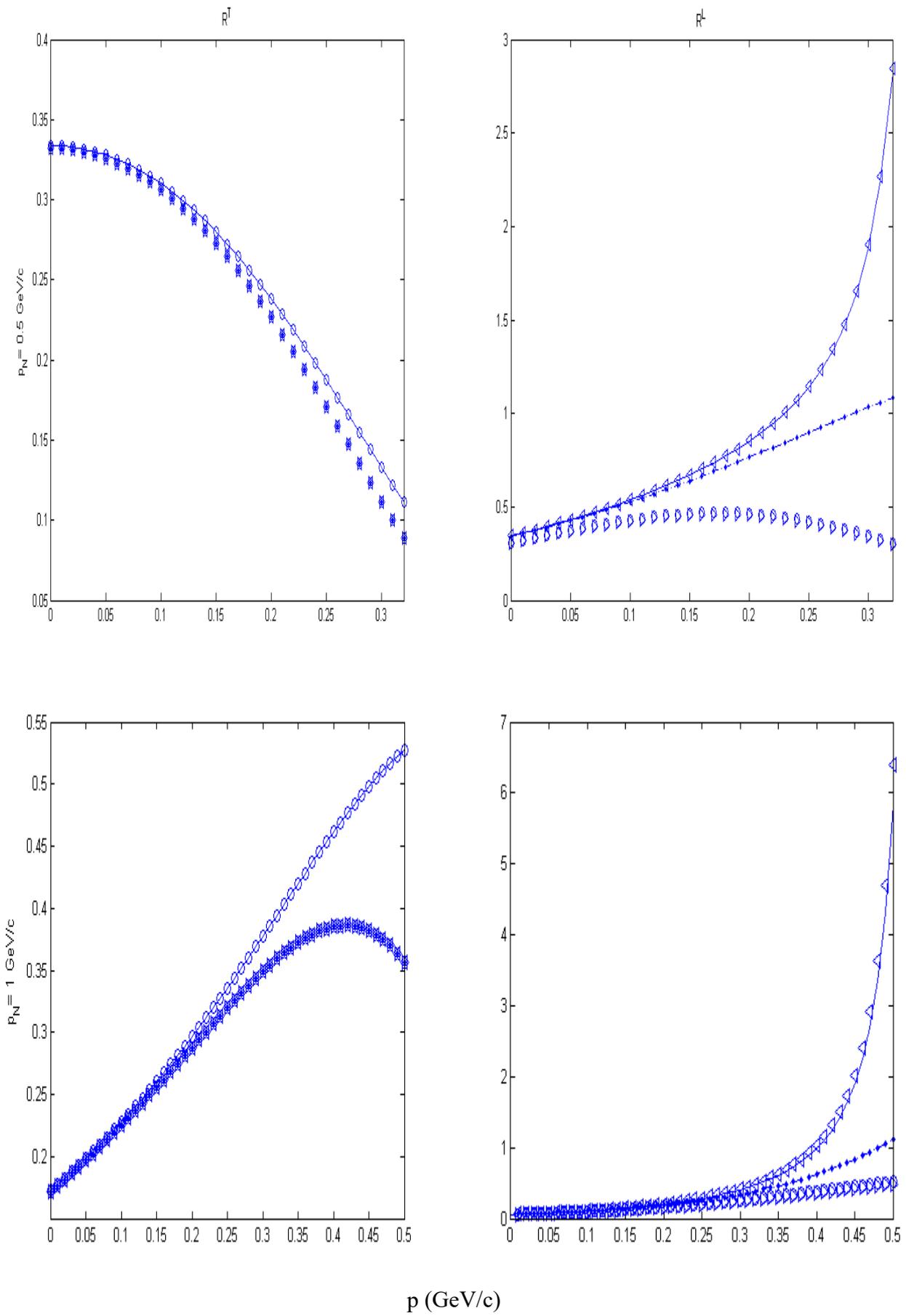


Figura 13: Respuestas en cinemática paralela con p_N fijo. Misma leyenda que figura 9.

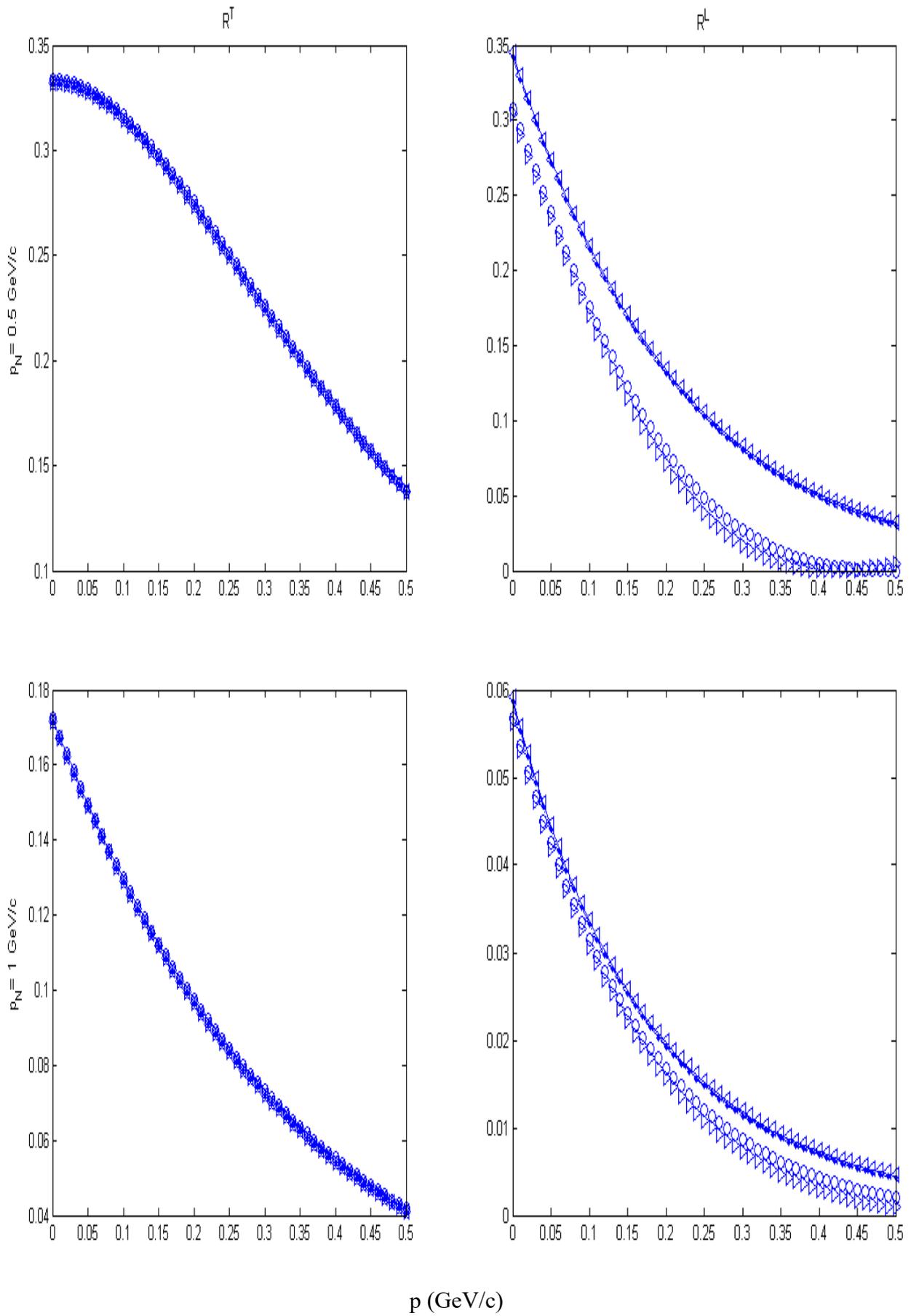


Figura 14: Respuestas en cinemática antiparalela con p_N fijo. Misma leyenda que figura 9.

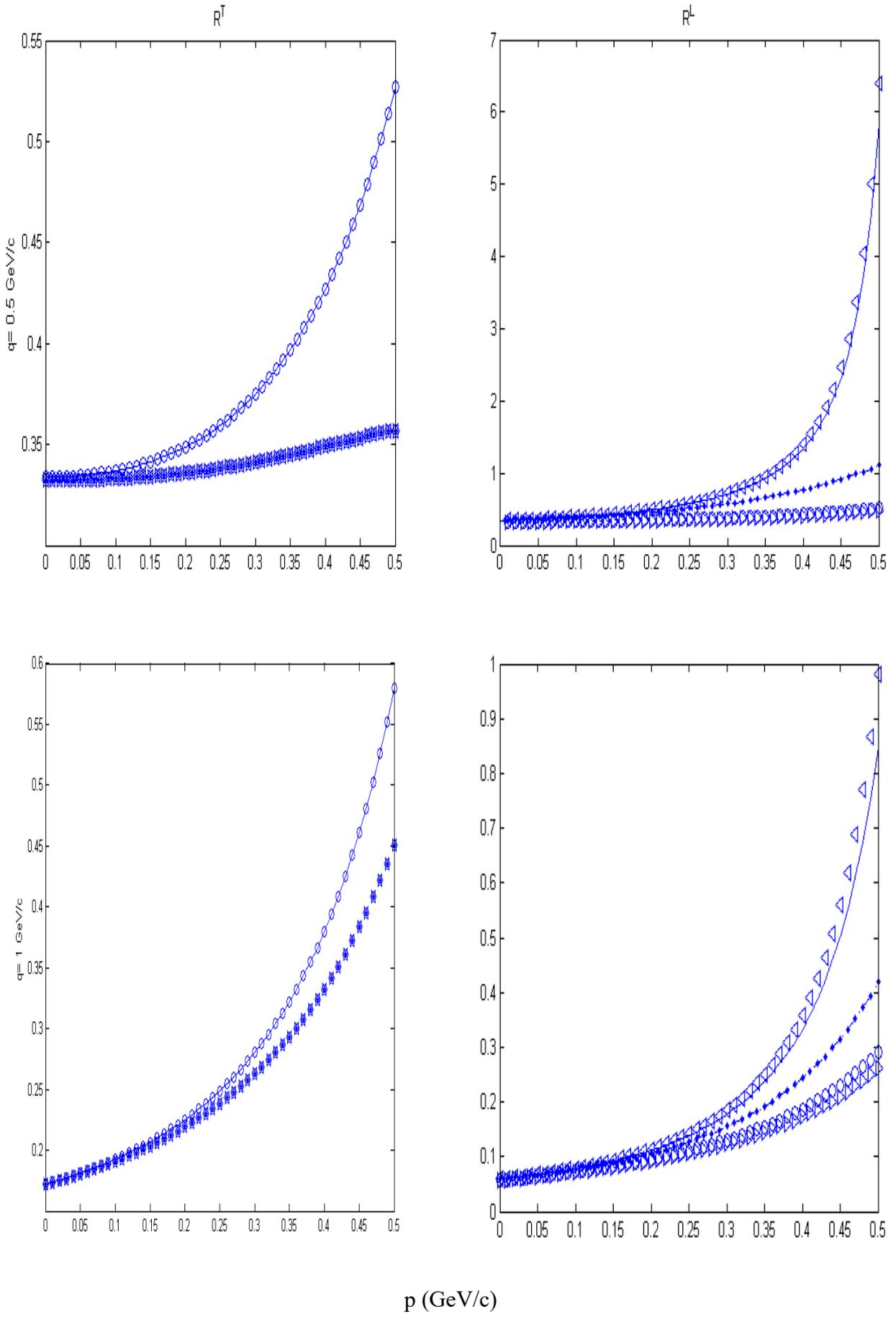


Figura 15: Respuestas en cinemática paralela con q fijo. Misma leyenda que figura 9.

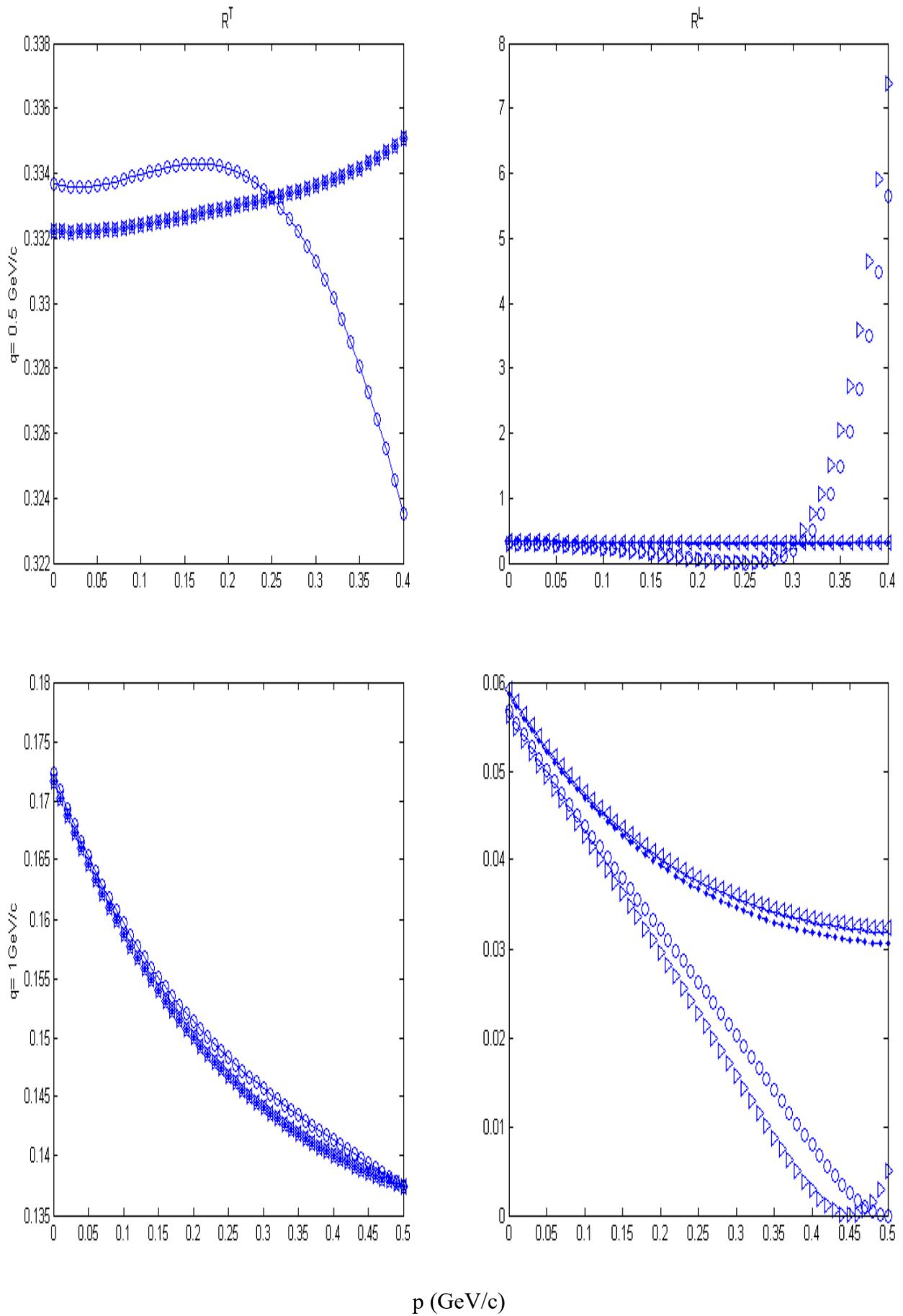


Figura 16: Respuestas en cinemática antiparalela con q fijo. Misma leyenda que figura 9.

Las incertidumbres debidas a la elección del operador de corriente son muy pequeñas en cinemática antiparalela. Las diferencias entre los resultados correspondientes a los operadores CCI y $CC2$ son menores del 2% si nos referimos a los gauge de Landau o Coulomb. Estas discrepancias aumentan de forma importante para el gauge de Weyl. Para cinemática paralela la situación es distinta. Las incertidumbres llegan a ser muy importantes para el gauge de Coulomb, especialmente para la respuesta puramente transversal ($\approx 35\%$ para $p_N = 0.5$ GeV/c y $\approx 45\%$ para $p_N = 1$ GeV/c estimado en el valor máximo de p representado en cada caso).

En lo que respecta a las incertidumbres gauge, vemos que los gauge de Landau y Coulomb en cinemática antiparalela están en muy buen acuerdo (las diferencias son menores del 5% para $p \approx 0.5$ GeV/c). Sólo el gauge de Weyl presenta un comportamiento muy diferente, si bien las discrepancias tienden a atenuarse conforme aumenta el momento del protón saliente. Sin embargo, las incertidumbres “off-shell” asociadas al gauge aumentan en el caso de cinemática estrictamente paralela.

En las figuras 15 y 16 se muestran las respuestas para la elección $\{q, y\}$. La figura 15 se corresponde con $\theta = 0$ y la figura 16 con $\theta = 180^\circ$. El comportamiento general de los resultados para $\theta = 0$ sigue una tendencia similar al caso analizado anteriormente. En particular, la respuesta puramente transversal es muy sensible con la elección de la corriente para momentos desaparecidos altos. En el caso de \mathcal{R}^L la principal incertidumbre es introducida por la elección del gauge. El comportamiento divergente de los resultados del gauge de Landau para p elevados se debe, de nuevo, al factor $1/Q^2$ en la ecuación (92). En esta situación (q fijo), al aumentar p se produce un incremento de p_N y consecuentemente la energía transferida ω aumenta, aproximándose al valor del momento transferido q (región de producción de fotones reales). Para cinemática antiparalela, el aumento de p implica el decrecimiento de p_N , y por tanto ω se reduce. Esto también explica el comportamiento totalmente diferente mostrado por el gauge de Weyl en la respuesta puramente longitudinal.

Resumiendo, podemos concluir que dentro de la cinemática paralela la situación más “segura” corresponde a $\theta = 180^\circ$ (antiparalela) fijando la energía cinética del nucleón saliente. En este caso, aparte de que la elección del gauge de Weyl maximiza las discrepancias, los resultados para las prescripciones “off-shell” son similares. Para cinemática antiparalela y q fijo, el gauge de Weyl diverge para valores altos de p en la respuesta puramente longitudinal. Finalmente, el comportamiento de las respuestas para cinemática estrictamente paralela es similar para las dos situaciones analizadas, q y p_N fijos. En ambos casos, las ambigüedades introducidas por las aproximaciones tienden a ser muy elevadas para valores de p altos. Por otra parte, al alcanzar p valores elevados nos estamos moviendo en la región cercana a la producción de fotones reales. En ese caso, las respuestas para el gauge de Landau divergen.

4.3 Sección eficaz “single-nucleon”.

En las figuras 17 y 18 representamos la sección eficaz “single-nucleon” adimensional $\tilde{\sigma}$ dada por

$$\tilde{\sigma} = K f_{rec}^{-1} \sigma^{eN}, \quad (142)$$

donde f_{rec} , K y σ^{eN} fueron descritos anteriormente por las ecuaciones (5), (41) y (75,76), respectivamente.

En la figura 17 se muestra el caso en que el nucleón saliente sea un protón. En esta misma gráfica distinguimos entre dos cinemáticas: la cinemática (I) (panel superior y lado izquierdo del panel inferior) en la que $q = 0.5$ GeV/c, $\omega = 0.1248$ GeV, $p_N \approx 0.498$ GeV/c y p se encuentra en el intervalo $\approx [0, 0.706]$ GeV/c, y la cinemática (II) (lado derecho del panel inferior) en la que $q = 1$ GeV/c, $\omega = 0.4328$ GeV, $p_N \approx 0.998$ GeV/c y p se encuentra en el intervalo $\approx [0, 1.4]$ GeV/c. En ambas cinemáticas hemos tomado $y = 0$, es decir, nos encontramos en el pico cuasielástico.

Análogamente, en la figura 18 se presenta el caso en que el nucleón saliente sea un neutrón. Aquí las cinemáticas (I) y (II) son las mismas que se han descrito.

Vamos a empezar nuestra explicación con el caso en que un protón es eyectado del núcleo ($e, e'p$) y con la cinemática (I). Los resultados se presentan para dos valores del ángulo de dispersión $\theta_e = 30^\circ$ (panel superior) y $\theta_e = 150^\circ$ (lado izquierdo del panel inferior). Podemos ver que el gauge de Weyl produce resultados que son realmente diferentes a los obtenidos por las otras prescripciones “off-shell”. Nótese que todas las prescripciones convergen en $\theta_N = 0$ para cinemática cuasielástica cuando $\xi = E_s = 0$. Cuando la energía de separación es distinta de cero o se selecciona un estado excitado en el núcleo hijo o se elige una cinemática alejada del pico cuasielástico, la convergencia que se ha visto no se producirá. La extensión típica de las predicciones basadas en las seis diferentes prescripciones puede verse en la figura 17 (lado izquierdo del panel superior).

Para el caso no coplanar con $\phi_N = 90^\circ$ (lado derecho del panel superior de la figura 17), en contraste con la situación coplanar, la contribución de la respuesta de interferencia TL es cero, como puede apreciarse por la ecuación (16).

El lado izquierdo del panel inferior de la figura 17 se corresponde con la situación de $\theta_e = 150^\circ$ y cinemática coplanar. En este caso, la contribución de las respuestas transversales predominan sobre las longitudinales. El comportamiento general de los resultados obtenidos usando las diversas prescripciones es similar al obtenido para $\theta_e = 30^\circ$ y $\phi_N = 0$. Otra vez observamos que hay grandes diferencias entre el gauge de Weyl y los gauge de Landau/Coulomb. Ahora vemos que ésta es un orden de magnitud más pequeña que para el caso $\theta_e = 30^\circ$ y $\phi_N = 0$.

En la figura 18 (panel superior y lado izquierdo del panel inferior) mostramos los resultados para el caso en que un neutrón sea eyectado del núcleo ($e, e'n$) y con la cinemática (I). Algunas de las observaciones generales hechas previamente para los casos del protón siguen siendo válidas; sin embargo también existen diferencias claras en las que nos centraremos en la discusión que sigue. En particular, nótese que para el caso de ángulos de dispersión de electrones hacia adelante y cinemática coplanar, en contraste con el caso ($e, e'p$) discutido anteriormente, el comportamiento general presentado por la prescripción $CC2^3$ no es tan diferente a los resultados obtenidos por las otras prescripciones con la excepción del caso $CC1^3$. Los órdenes de magnitud de las secciones eficaces para neutrones son generalmente más pequeñas que para el caso de protones. Nótese también que, en contraste con el caso de protones, en el caso de la emisión del neutrón los resultados para las prescripciones $CC1^3$ y $CC2^3$ son bastante diferentes. Las variaciones más pequeñas de los efectos “off-shell” son producidas cuando se usa la misma forma de la corriente nucleónica ($CC1^0$ versus $NCCI$ ó $CC2^0$ versus $NCC2$).

En el lado derecho del panel superior de la figura 18 se muestran resultados en cinemática no coplanar para la emisión del neutrón. El comportamiento de las prescripciones $CC1^3$ y $CC2^3$ es completamente distinto a los resultados con protón. En el lado izquierdo del panel inferior de la figura 18 mostramos los resultados para el neutrón con cinemática coplanar y ángulo de dispersión del electrón hacia atrás. Las mismas consideraciones que tienen que ver con los casos previos: en particular, la magnitud de las predicciones obtenidas para los efectos “off-shell” usando la corriente nucleónica $CC2$ es mucho menor que para la corriente $CC1$.

Para la cinemática (II) (lado derecho del panel inferior de las figuras 17 y 18) podría esperarse que los efectos relativistas en las corrientes jueguen un papel importante. Para esta cinemática hemos elegido $\theta_e = 12.5^\circ$ (ángulo límite para los espectrómetros Hall A en CEBAF). Para protones y neutrones el comportamiento presentado por las diferentes prescripciones “off-shell” para la corriente nucleónica es cualitativamente muy similar a los resultados anteriores (para los casos en que $\theta_e = 30^\circ$ y $\phi_N = 0$). Nótese que los órdenes de magnitud relativos de los resultados del protón y neutrón son diferentes para las diferentes secciones eficaces cuando se comparan las dos cinemáticas (I y II).

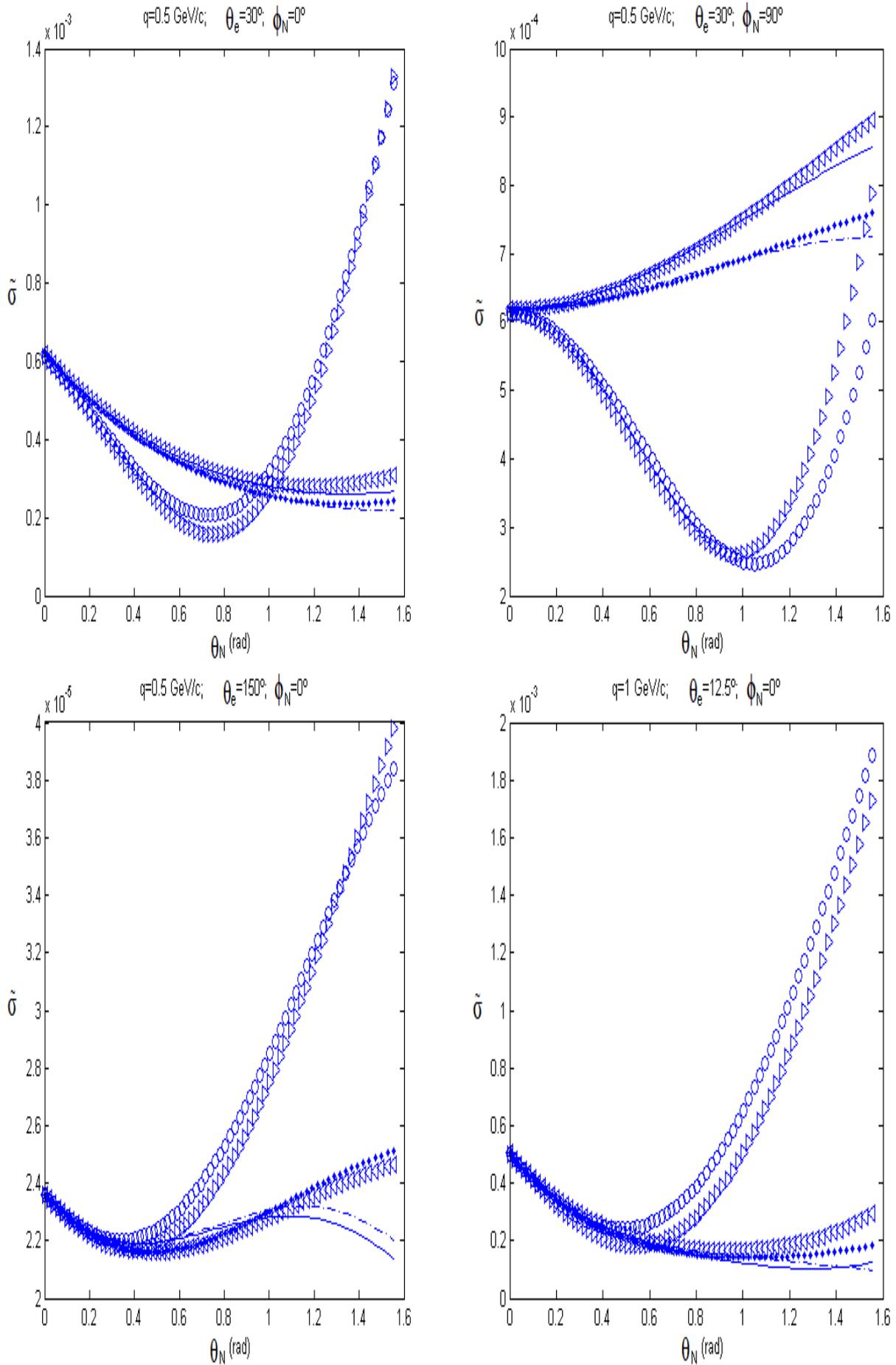


Figura 17: $\tilde{\sigma}$ para el caso de protones. Misma leyenda que figura 9.

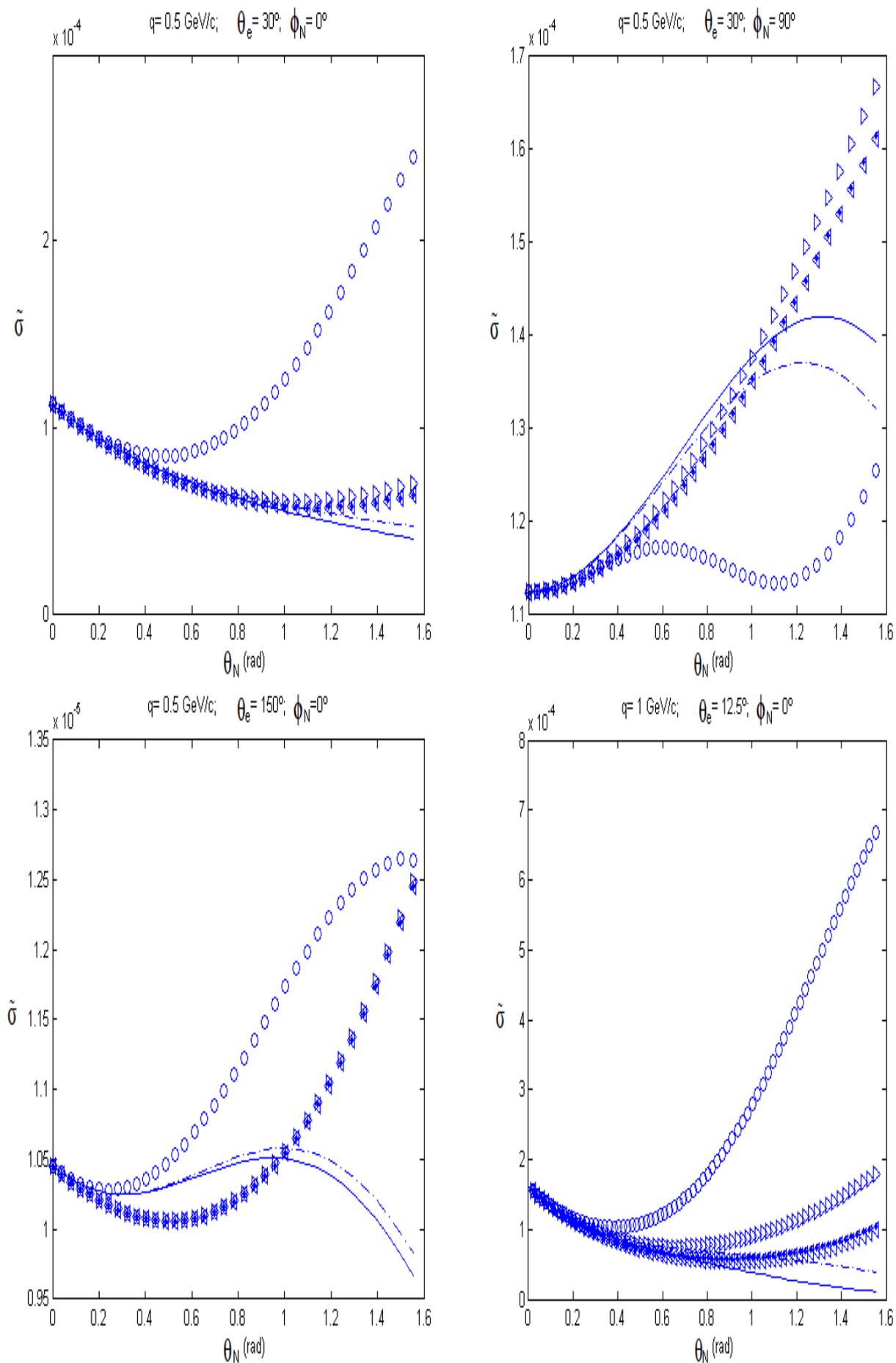


Figura 18: $\tilde{\sigma}$ para el caso de neutrones. Misma leyenda que figura 9.

4.4 Funciones radiales y distribuciones de momentos.

En esta Sección presentamos y discutimos las funciones radiales obtenidas a partir de los modelos nucleares vistos anteriormente en la Sección 3.5.1, y de sus correspondientes distribuciones de momentos vistas en las Secciones 3.5 y 3.5.1. Para ello, hemos escogido dos núcleos ^{16}O y ^{40}Ca cuyas configuraciones nucleónicas, para protones y neutrones, son $\{1s_{1/2}1p_{3/2}1p_{1/2}\}$ y $\{1s_{1/2}1p_{3/2}1p_{1/2}1d_{5/2}2s_{1/2}1d_{3/2}\}$, respectivamente. Vamos a centrarnos en las capas más externas, es decir, $1p_{3/2}$ y $1p_{1/2}$ para el ^{16}O , y $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ y $1d_{3/2}$ para el ^{40}Ca .

En la figura 19 mostramos las funciones radiales (para protones y neutrones) y las distribuciones de momentos (para protones) para el ^{16}O . En el panel superior podemos ver las funciones radiales para protones (lado izquierdo), las funciones radiales para neutrones (centro) y las distribuciones de momentos (lado derecho) para la capa $1p_{3/2}$. Análogamente, en el panel inferior de la figura 19 vemos las funciones radiales y las distribuciones de momentos en el caso de la capa $1p_{1/2}$.

En la figura 20 representamos las funciones radiales (protones y neutrones) y las distribuciones de momentos (protones) para el ^{40}Ca . En el panel superior mostramos las funciones radiales para protones (lado izquierdo), las funciones radiales para neutrones (centro) y las distribuciones de momentos (lado derecho) para la capa $1d_{5/2}$. Análogamente, en el panel central observamos las funciones radiales y distribuciones de momentos de la capa $2s_{1/2}$, y el panel inferior para la capa $1d_{3/2}$.

En la figura 19 hemos utilizado una frecuencia $\nu = 0.5795 \text{ fm}^{-1}$ para el modelo HO, mientras que en la figura 20 $\nu = 0.5156 \text{ fm}^{-1}$. Recordemos que la frecuencia ν es necesaria para determinar la función de onda, tanto en el espacio de coordenadas como en el espacio de momentos, del modelo HO, (véase Sección 3.5.1).

En las figuras 19 y 20 vemos que cuando las funciones radiales de los modelos HO, NLHS y HS se parecen, también se parecen sus correspondientes distribuciones de momentos. Esto es debido a que la función radial y la distribución de momentos están relacionadas mediante la transformada de Fourier dada por la ecuación (117).

En el panel superior de la figura 19 observamos una gran semejanza entre los dos modelos relativistas. El parecido que hay entre HS y NLHS se puede deber a que las funciones radiales para estos dos modelos están determinadas a partir de los potenciales escalar S y vector V resolviendo el sistema de ecuaciones acopladas (115) y (116), por tanto si se han escogido un potencial vector V y un potencial escalar S parecidos para ambos modelos, las soluciones de dichas ecuaciones serán parecidas para ambos casos, es decir, $g_{\kappa}(r)$ será semejante para NLHS y HS. Por el contrario, para la capa $1p_{1/2}$ existen diferencias apreciables entre los distintos modelos. Obsérvese que en la región donde se localiza el máximo de las distribuciones de momentos, la discrepancia asociada a los distintos modelos nucleares es del orden de un $\approx 7\text{-}8\%$ para la capa $1p_{3/2}$. Por el contrario, dicha diferencia se incrementa hasta un $\approx 30\text{-}35\%$ en el caso de la $1p_{1/2}$. Estos resultados pueden ser debidos a efectos relativistas, y en concreto, la posible contribución de las componentes inferiores en las funciones de ondas relativistas. Nótese que para la capa $1p_{3/2}$, la componente inferior (“down”) viene caracterizada por $l = 2$, mientras que para la capa $1p_{1/2}$, el número cuántico l que define su componente inferior es $l = 0$. Esto significa que mientras la componente inferior de la capa $1p_{3/2}$ viene caracterizada por una función de onda tipo d , la componente inferior en el caso de la capa $1p_{1/2}$ está definida por una función de onda tipo s , por tanto las diferencias apreciables entre los modelos nucleares para la capa $1p_{1/2}$ se deben a que hay más diferencia entre el comportamiento de la función de onda tipo p y s con respecto a la de tipo p y d .

Podemos apreciar que la diferencia entre las funciones radiales para protones y neutrones es mínima. Esto se debe a que la única diferencia que hay prácticamente entre protones y neutrones viene dada por el potencial vector V (ecuaciones (115) y (116)) que introduce el isospín.

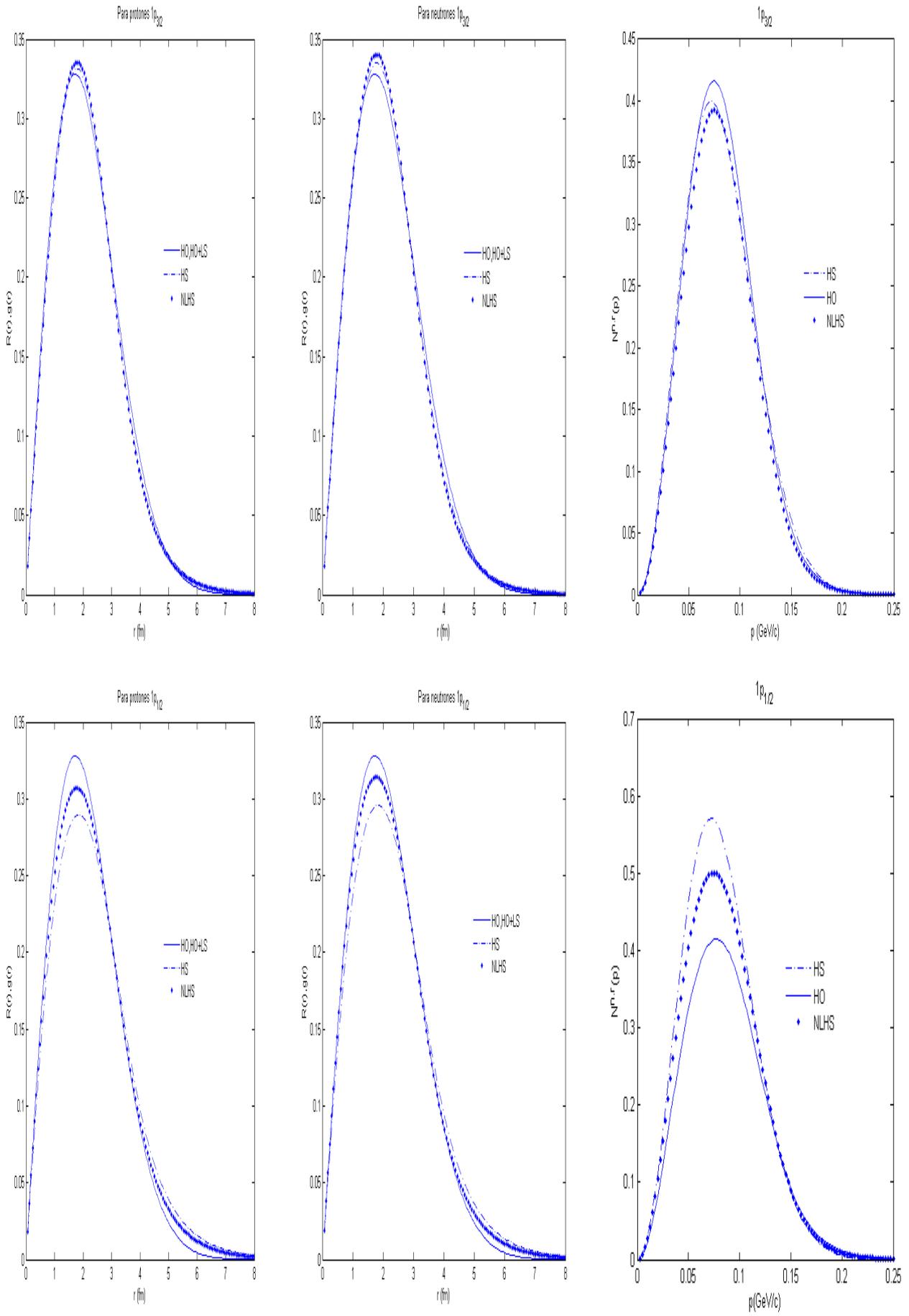


Figura 19: El modelo HO es la línea continua, HS la rayada-punteada y NLHS la punteada para ^{16}O .

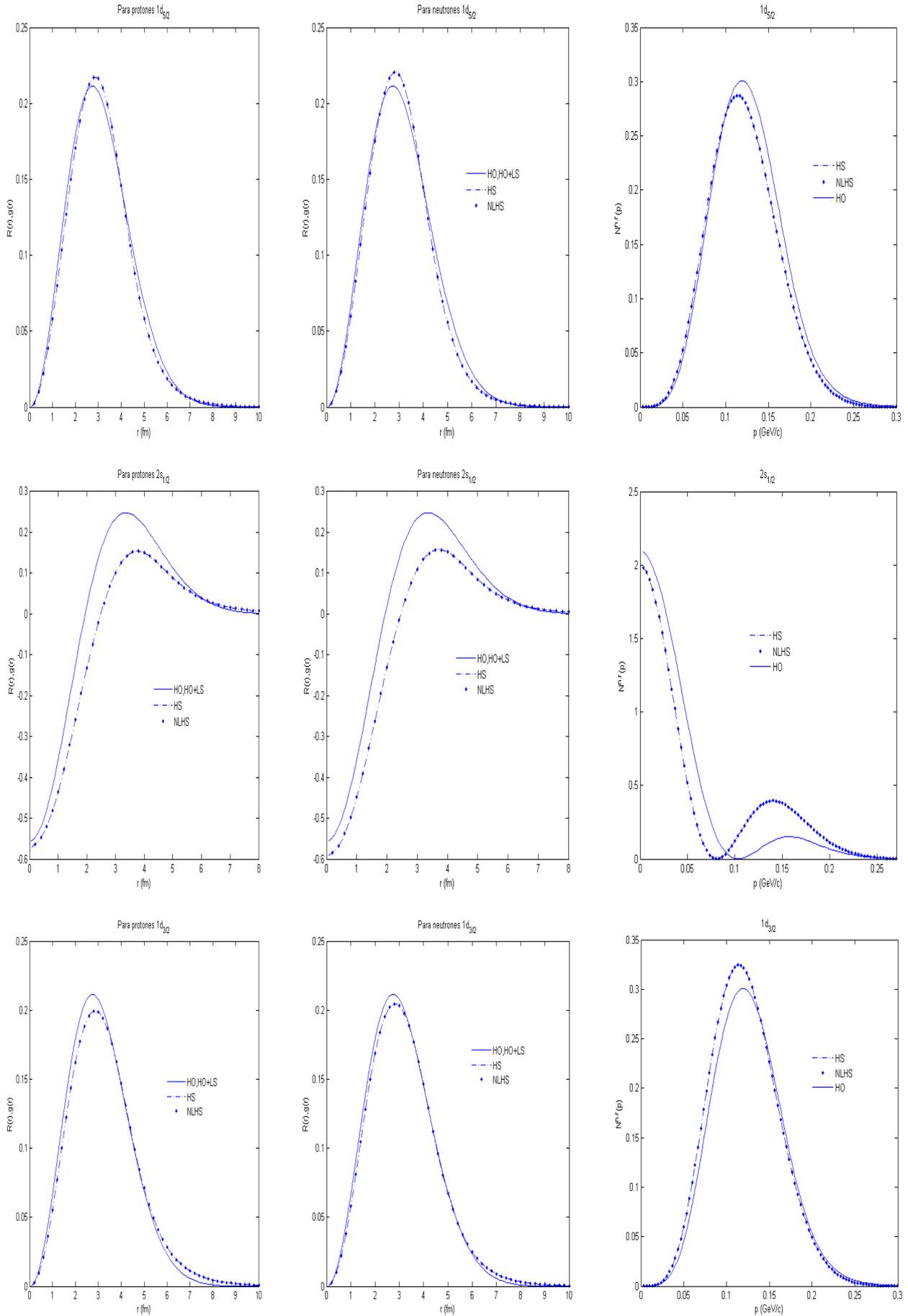


Figura 20: Funciones radiales y distribuciones de momentos para ^{40}Ca . Misma leyenda que figura 19.

En la figura 20 observamos que no hay diferencia a simple vista entre el modelo NLHS y el HS. La razón de esto es la misma que hemos discutido para la capa $1p_{3/2}$ la figura 19, pero siendo la semejanza mayor en este caso. Por el contrario, vemos que hay diferencias apreciables del modelo HO con respecto a HS/NLHS para las tres capas del ^{40}Ca , especialmente para la $2s_{1/2}$. Obsérvese en este caso el desplazamiento en el momento p en el que los distintos modelos alcanzan el mínimo (“cero” en la distribución de momentos).

En las distribuciones de momentos que hemos escogido para los tres modelos solamente se han tenido en cuenta las proyecciones positivas de la energía, pero mientras que la función radial del modelo HO es no relativista, las funciones radiales de los modelos HS y NLHS sí son relativistas, por tanto esa puede ser la razón de las diferencias apreciables que hay de forma general entre HS/NLHS versus HO.

4.5 Respuestas nucleares en cinemática (q - y) constante.

En esta Sección presentamos las respuestas nucleares haciendo uso de los tres modelos nucleares vistos en las Secciones 3.5.1 y 4.4, para las capas externas de dos núcleos: ^{16}O y ^{40}Ca . Hemos elegido una cinemática en la cual $q = 0.5 \text{ GeV}/c$, $y = 0$, $p_N \approx 0.498 \text{ GeV}/c$ y $p = [0, 0.5] \text{ GeV}/c$. Así pues, nos encontramos en la zona del pico cuasielástico.

Si escogemos únicamente la proyección positiva de la energía, las respuestas nucleares factorizan. Esto nos permite obtener las respuestas mediante el producto de las respuestas nucleónicas por la distribución de momentos.

En las figuras 21-35 mostramos las respuestas nucleares para las capas externas ya mencionadas en la Sección 4.4 del ^{16}O y ^{40}Ca , y haciendo uso de los modelos nucleares HO, HS y NLHS. En las figuras 21-26 los resultados se corresponden con el ^{16}O , mientras que las figuras 27-35 corresponden a ^{40}Ca .

Comencemos la discusión por la capa $1p_{3/2}$ del ^{16}O . En las figuras 21-23 observamos la similitud que existe entre los modelos HS y NLHS, mientras que estos dos modelos difieren del modelo HO. Los efectos nucleares hacen que los gauge de Landau y Coulomb estén en muy buen acuerdo. Por el contrario, vemos diferencias apreciables entre el gauge de Weyl y los gauge de Landau/Coulomb para las respuestas R^L y R^{TL} . Por otro lado, las incertidumbres debidas al modelo nuclear son ≈ 8 -13% para la respuesta L y ≈ 10 -17% para la respuesta TL.

En las figuras 24-26 existen diferencias apreciables entre los modelos HS/NLHS y HO. A su vez, también hay ciertas discrepancias entre los modelos HS y NLHS. Las incertidumbres debidas al modelo son ≈ 13 -16% (respuesta L) y ≈ 11 -18% (respuesta TL)

En las figuras 27-35 no existen diferencias a simple vista entre HS y NLHS. Sin embargo, sí hay diferencias apreciables entre HO y HS/NLHS, especialmente en la capa $2s_{1/2}$, (véase el Apéndice A.2).

En las figuras 27-29 las incertidumbres debidas al modelo son ≈ 3 -9% (respuesta L) y ≈ 10 -13% (respuesta TL). En las figuras 30-32 las incertidumbres son ≈ 30 -35% (respuesta L) y ≈ 35 -40% (respuesta TL) para $p \approx 0.15 \text{ GeV}/c$. En las figuras 33-35 las incertidumbres son ≈ 6 -8% (respuesta L) y ≈ 6 -9% (respuesta TL).

En lo referente a las respuestas nucleares observamos que la incertidumbre debida a la elección del operador de corriente es muy pequeña.

Podemos concluir diciendo que para la respuesta TL existe mayor incertidumbre debida al modelo nuclear. Estas incertidumbres se hacen máximas para la capa $2s_{1/2}$. Por otro lado, para las respuestas L y TL existen diferencias apreciables entre los gauge de Weyl y Landau/Coulomb. Las diferencias entre los gauge de Weyl y Landau/Coulomb disminuyen considerablemente si aumentamos el valor del momento transferido q , por ejemplo, para $q = 2 \text{ GeV}/c$, (véase el Apéndice A.3). Por tanto podemos decir que para q grandes las incertidumbres disminuyen, al igual que ocurría para las respuestas nucleónicas. Podemos ver que la respuesta L es la que introduce mayor incertidumbre gauge, excepto en la capa $2s_{1/2}$. Observamos que las respuestas nucleares L, T y TL tienen el mismo comportamiento

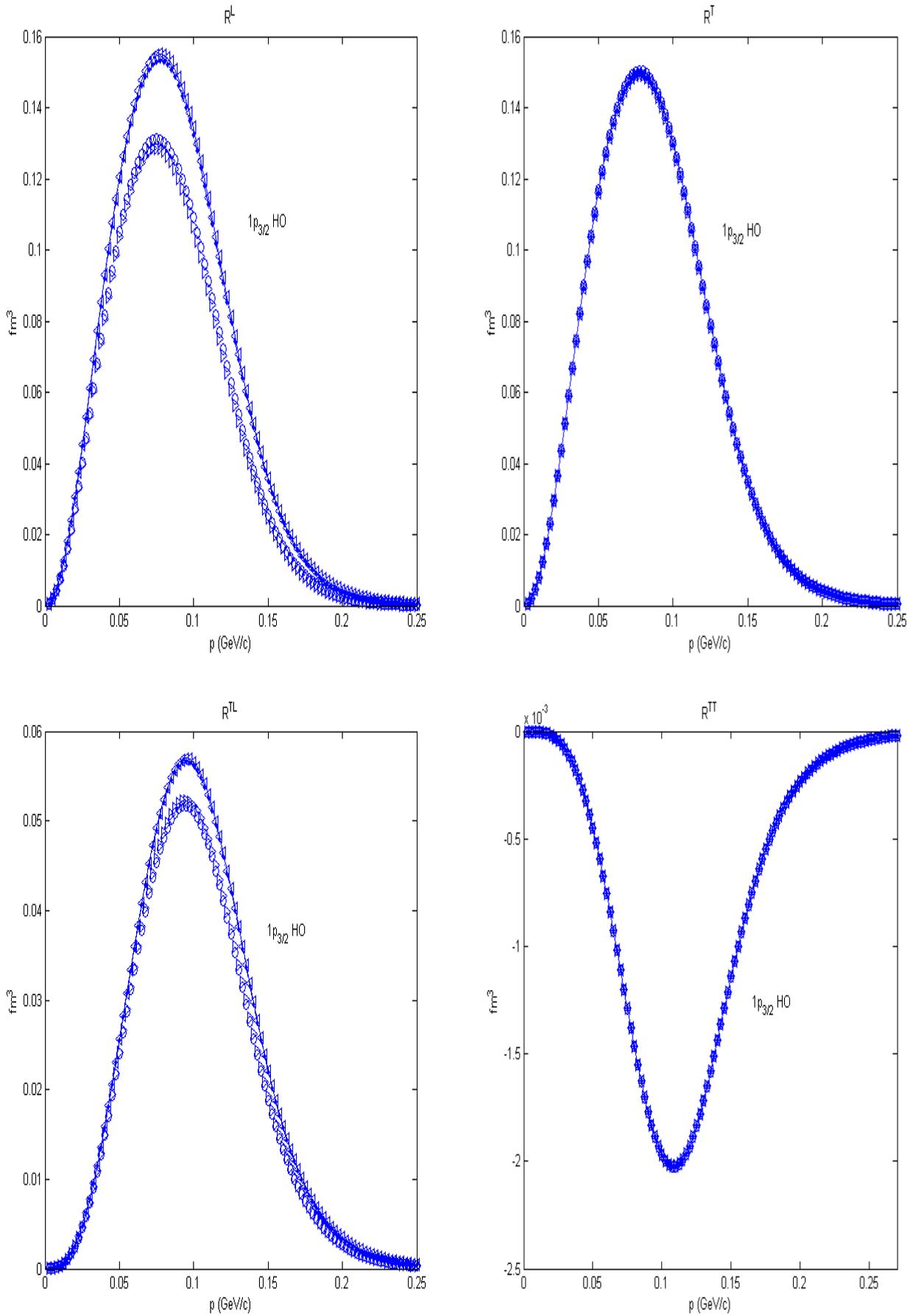


Figura 21: Modelo HO para la capa $1p_{3/2}$ del ^{16}O . Misma leyenda que figura 9.

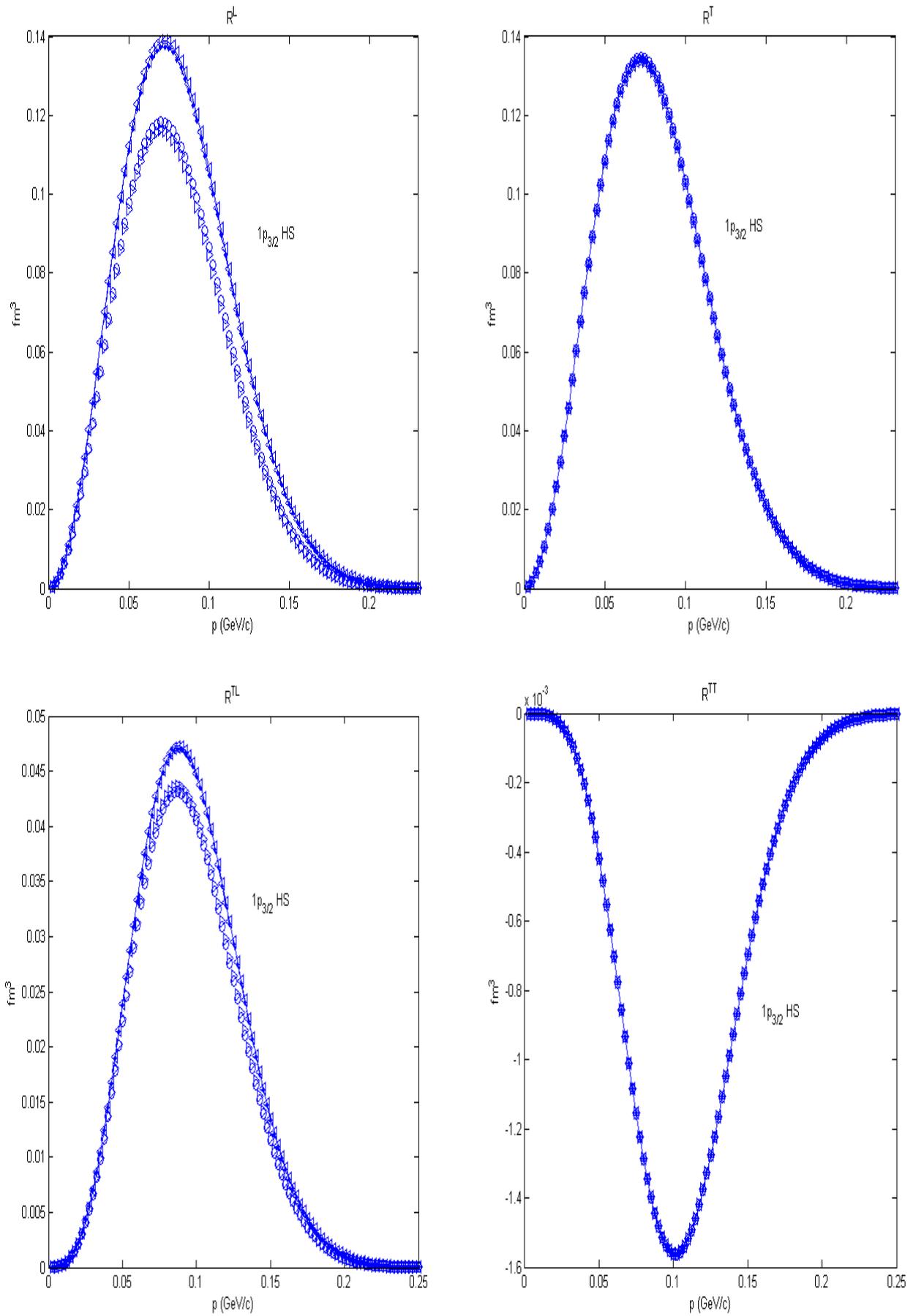


Figura 22: Modelo HS para la capa $1p_{3/2}$ del ^{16}O . Misma leyenda que figura 9.

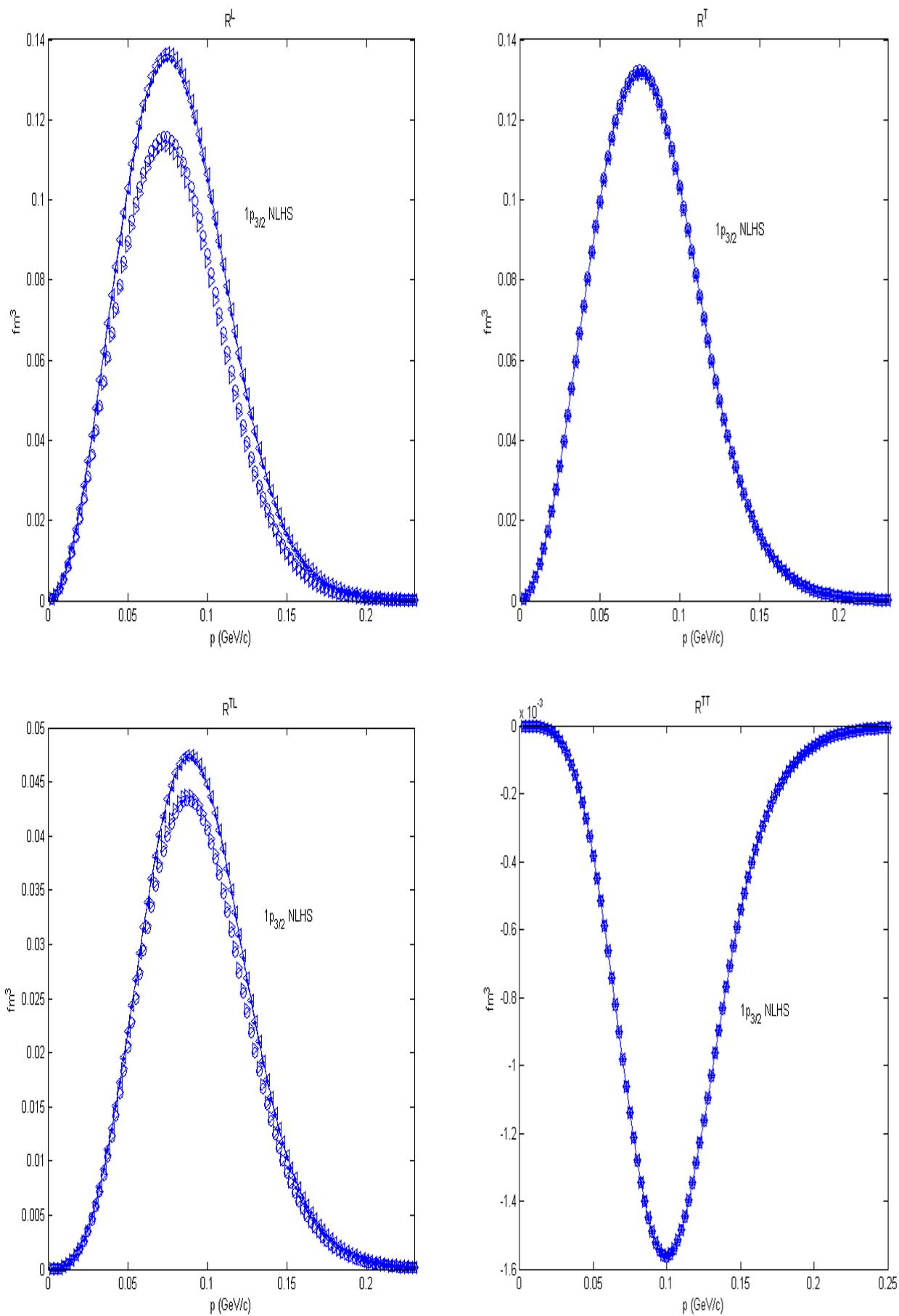


Figura 23: Modelo NLHS para la capa $1p_{3/2}$ del ^{16}O . Misma leyenda que figura 9.

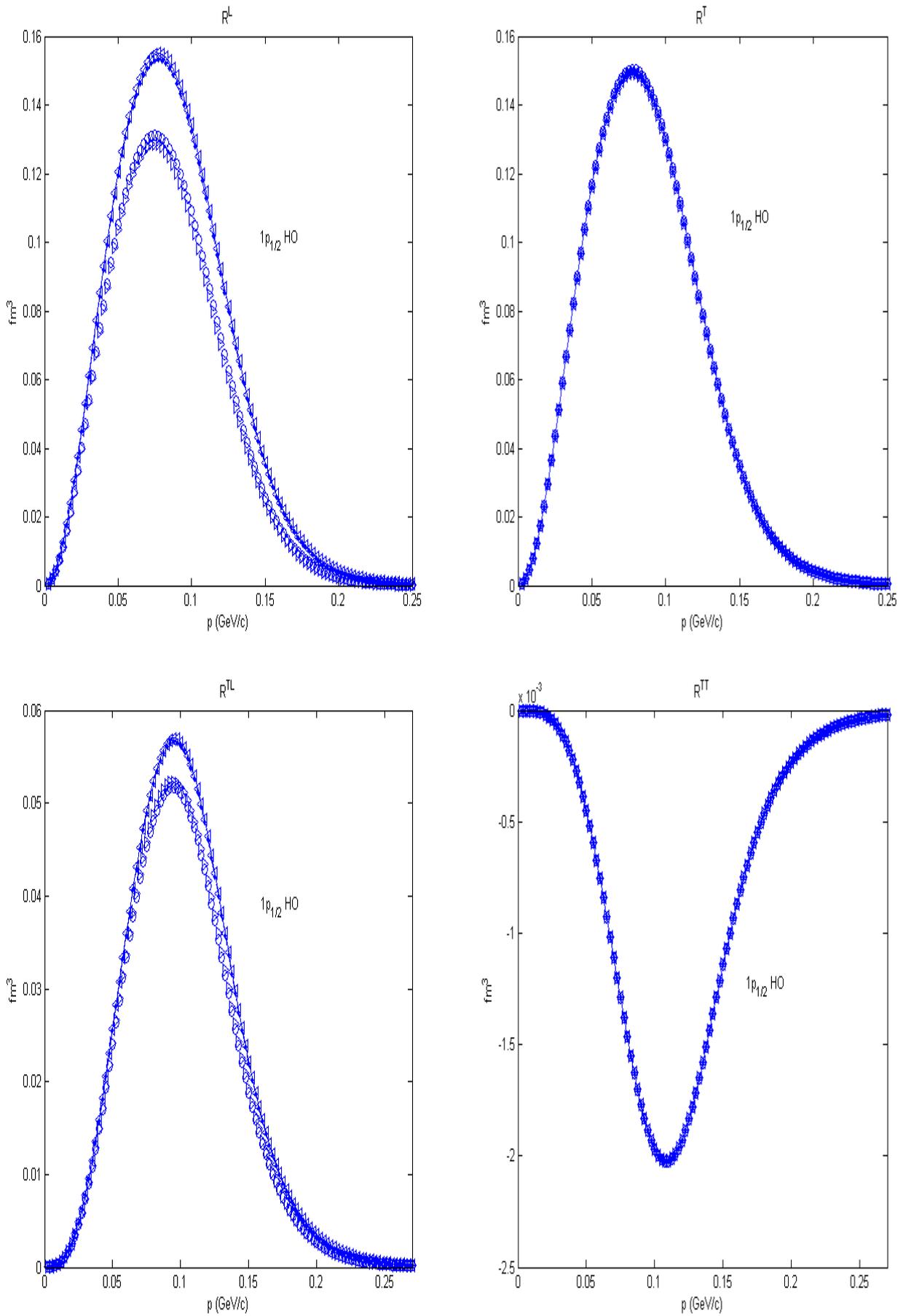


Figura 24: Modelo HO para la capa $1p_{1/2}$ del ^{16}O . Misma leyenda que figura 9.

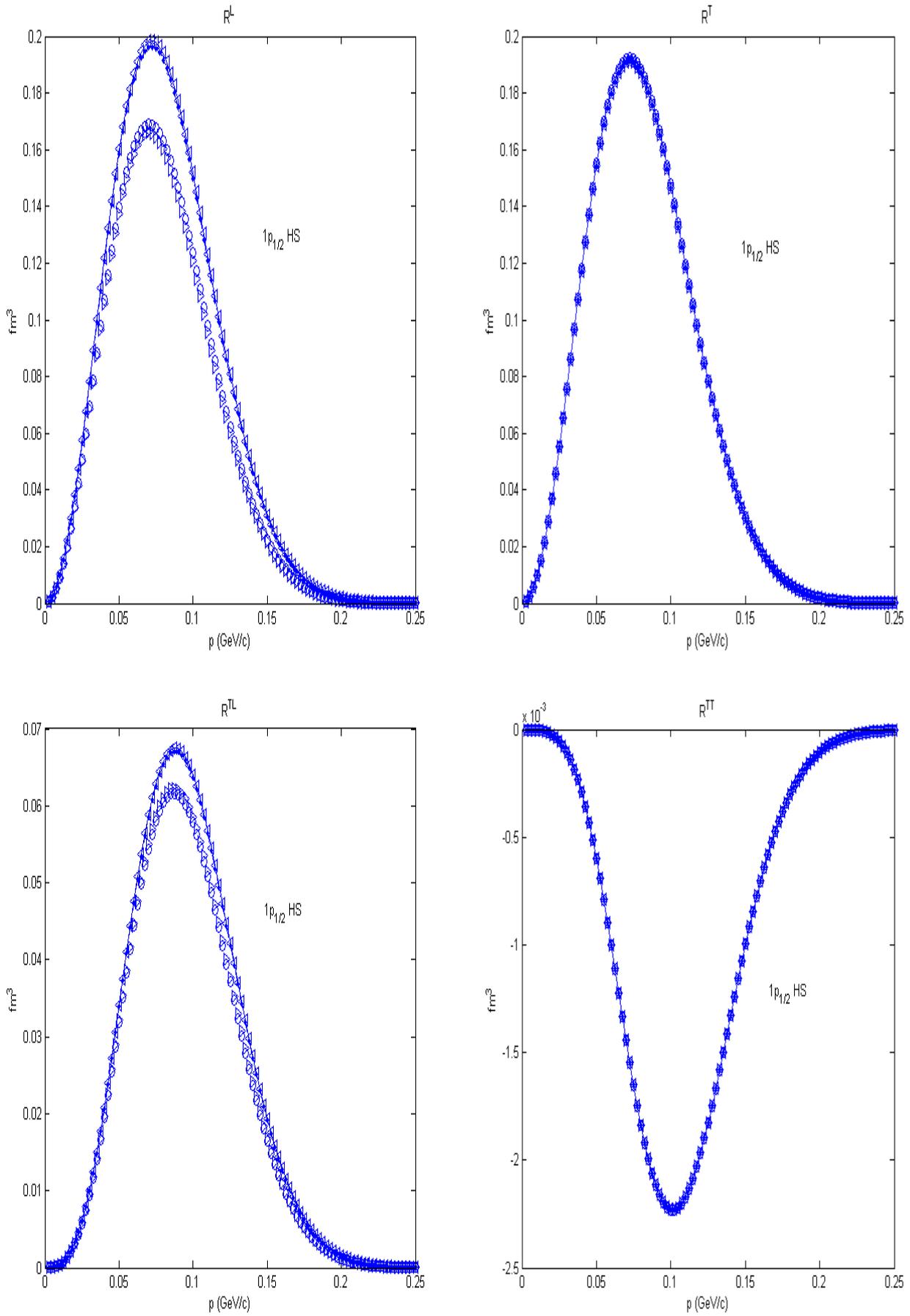


Figura 25: Modelo HS para la capa $1p_{1/2}$ del ^{16}O . Misma leyenda que figura 9.

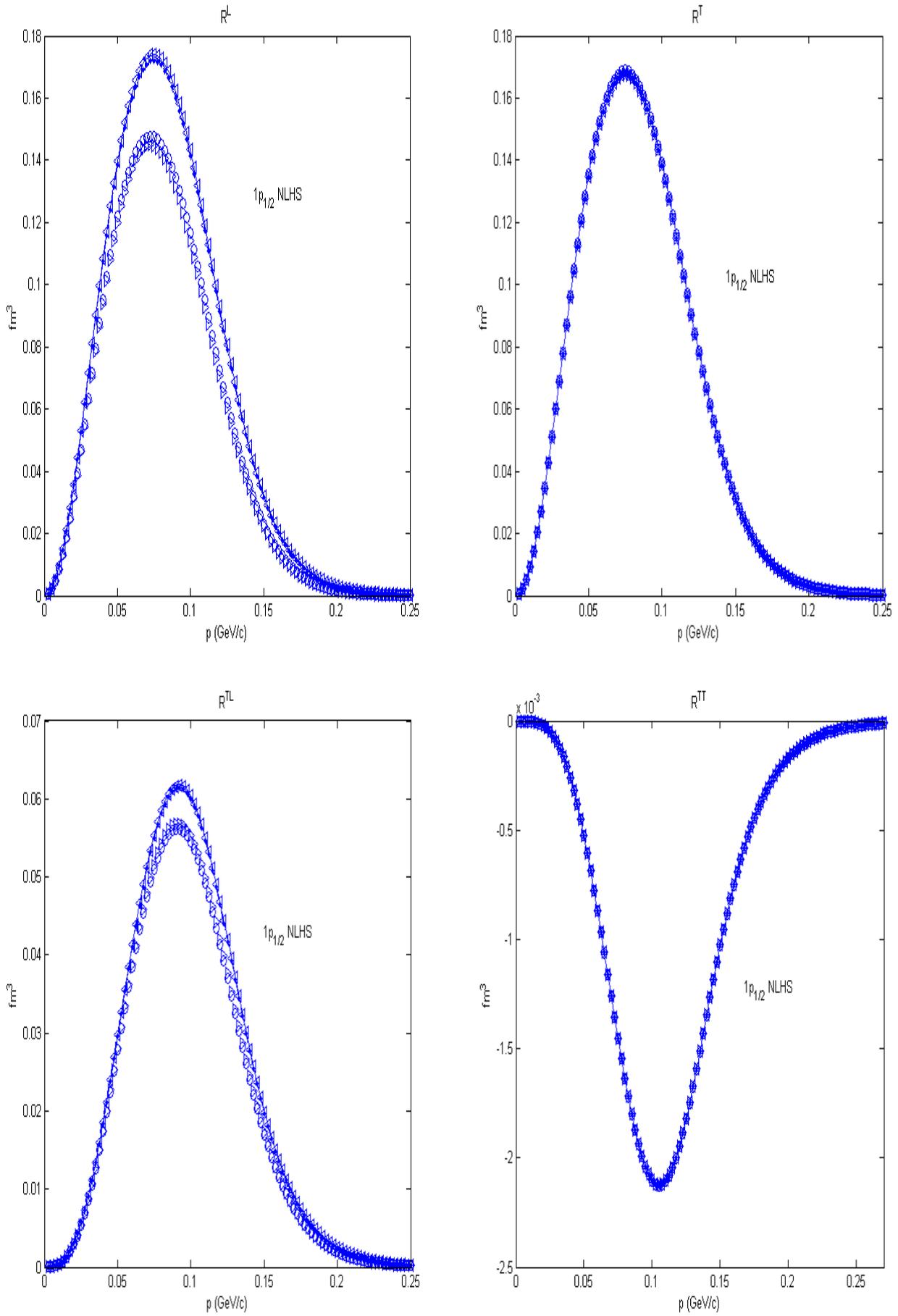


Figura 26: Modelo NLHS para la capa $1p_{1/2}$ del ^{16}O . Misma leyenda que figura 9.

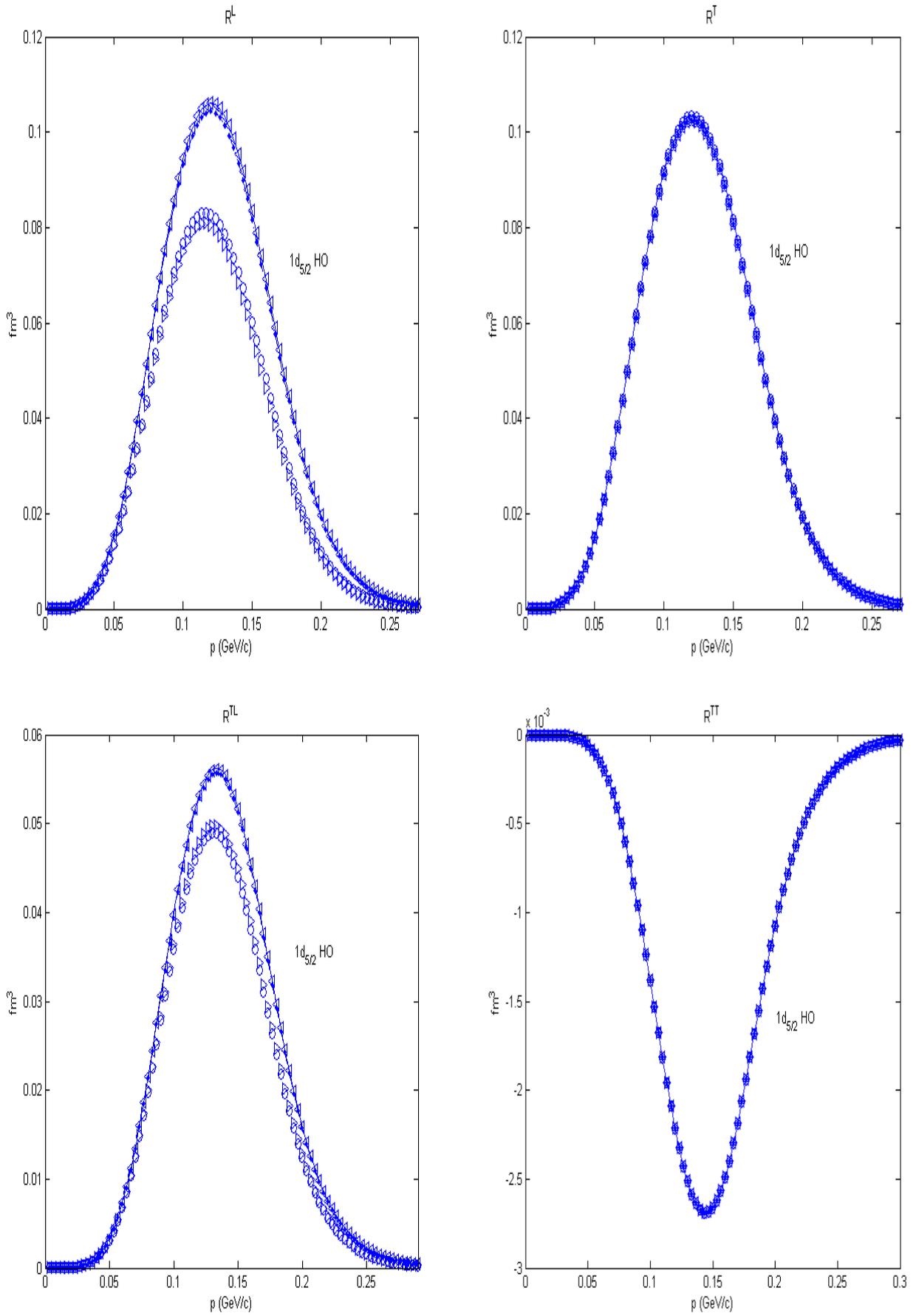


Figura 27: Modelo HO para la capa $1d_{5/2}$ del ^{40}Ca . Misma leyenda que figura 9.

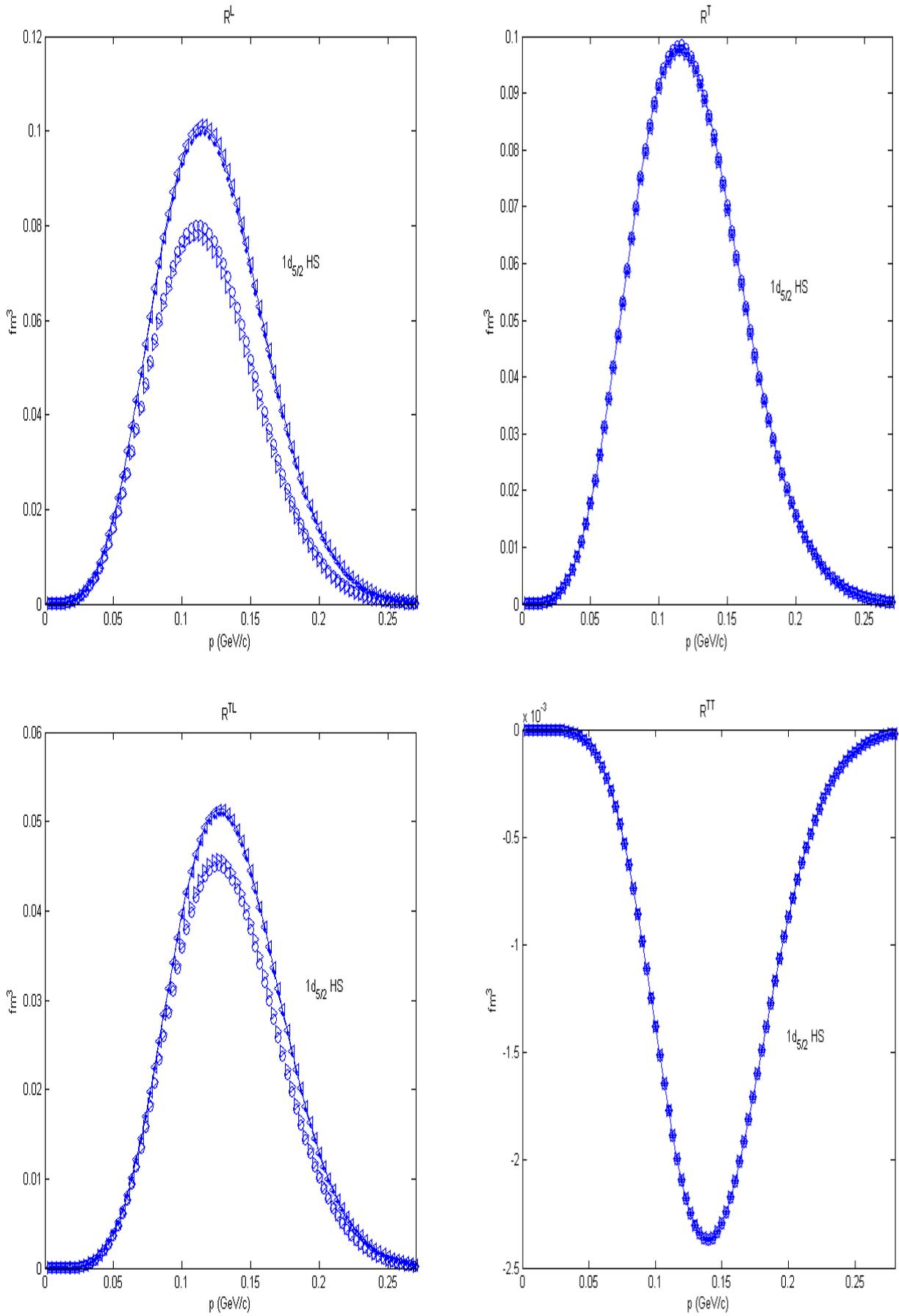


Figura 28: Modelo HS para la capa $1d_{5/2}$ del ^{40}Ca . Misma leyenda que figura 9.

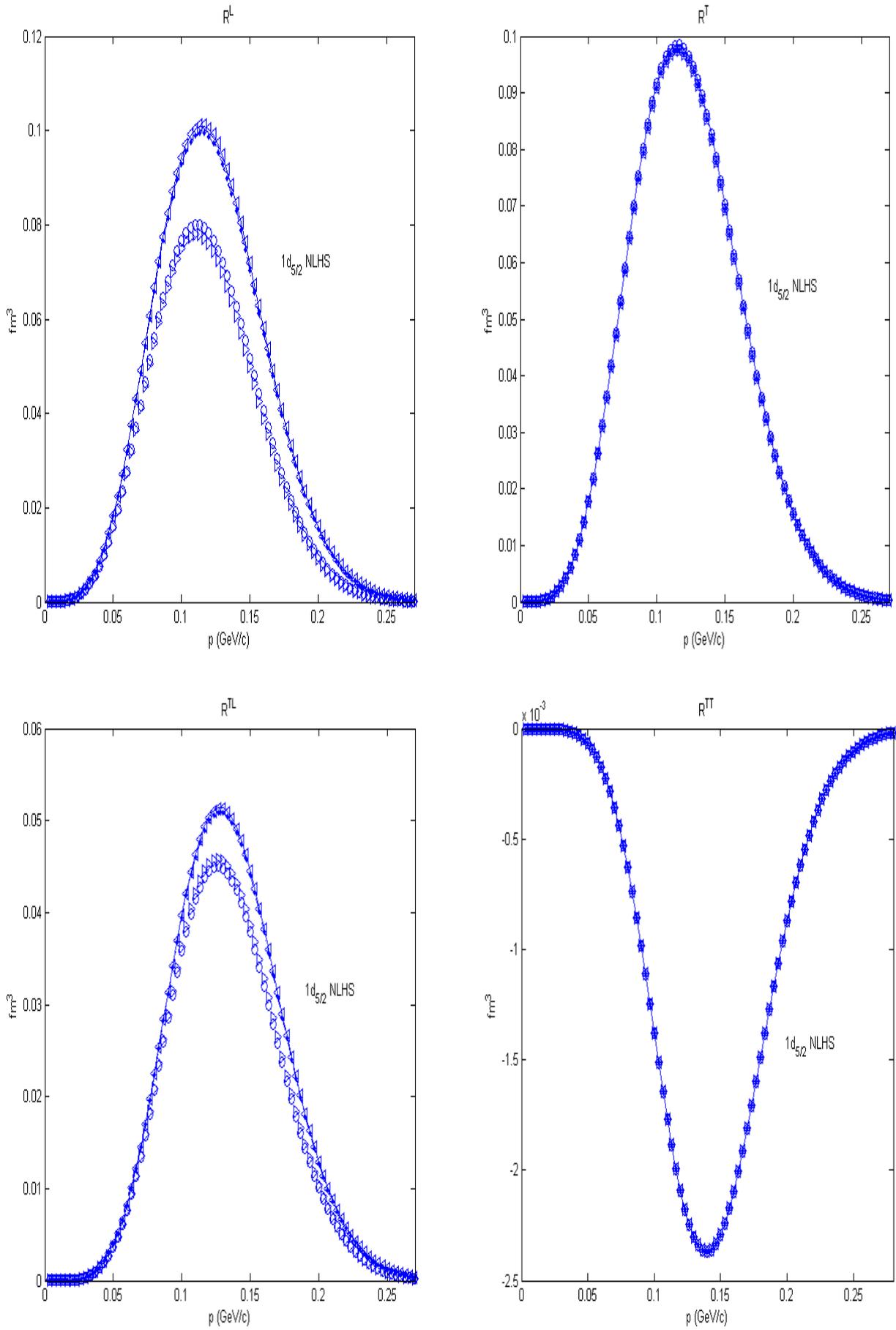


Figura 29: Modelo NLHS para la capa $1d_{5/2}$ del ^{40}Ca . Misma leyenda que figura 9.

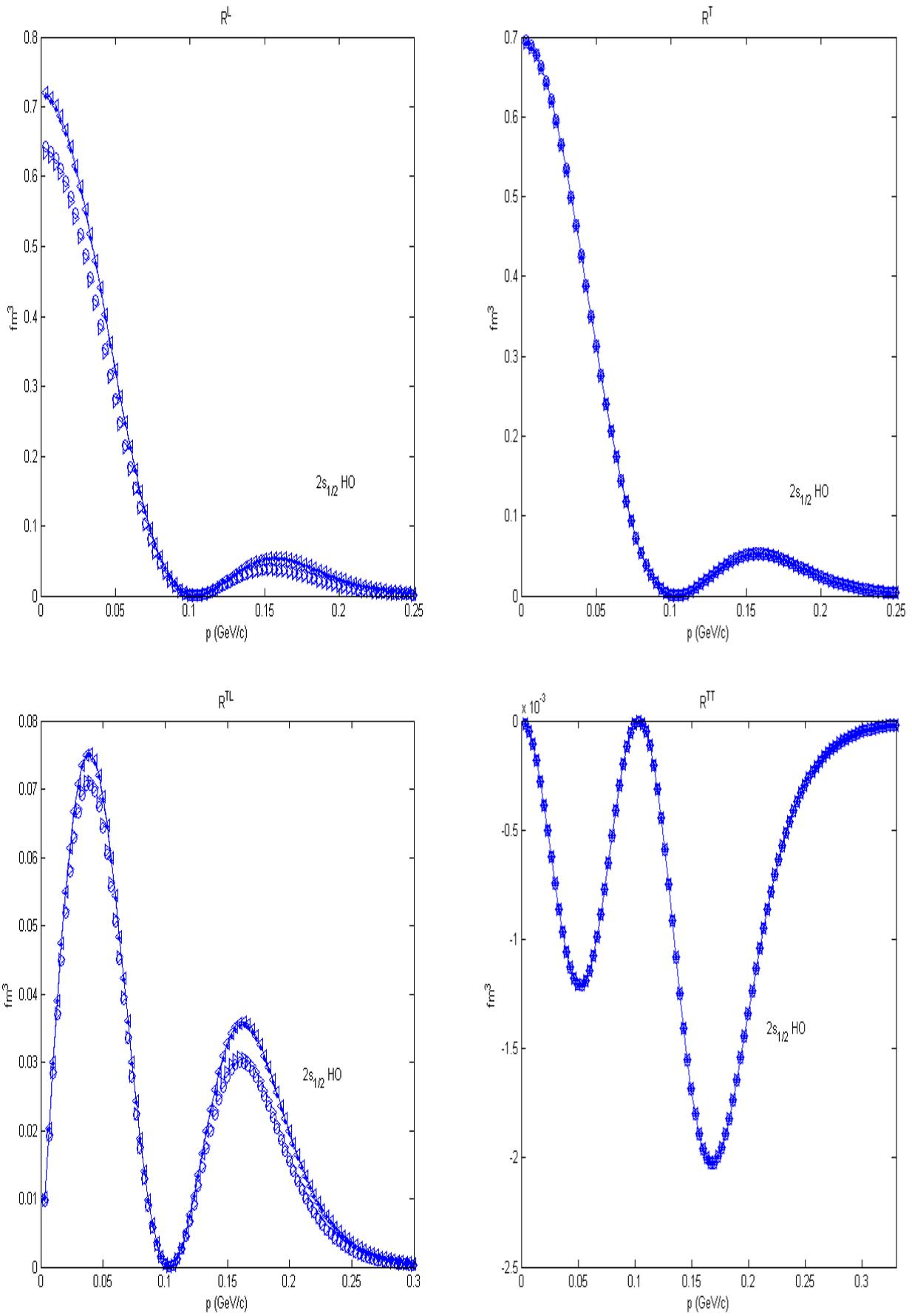


Figura 30: Modelo HO para la capa $2s_{1/2}$ del ^{40}Ca . Misma leyenda que figura 9.

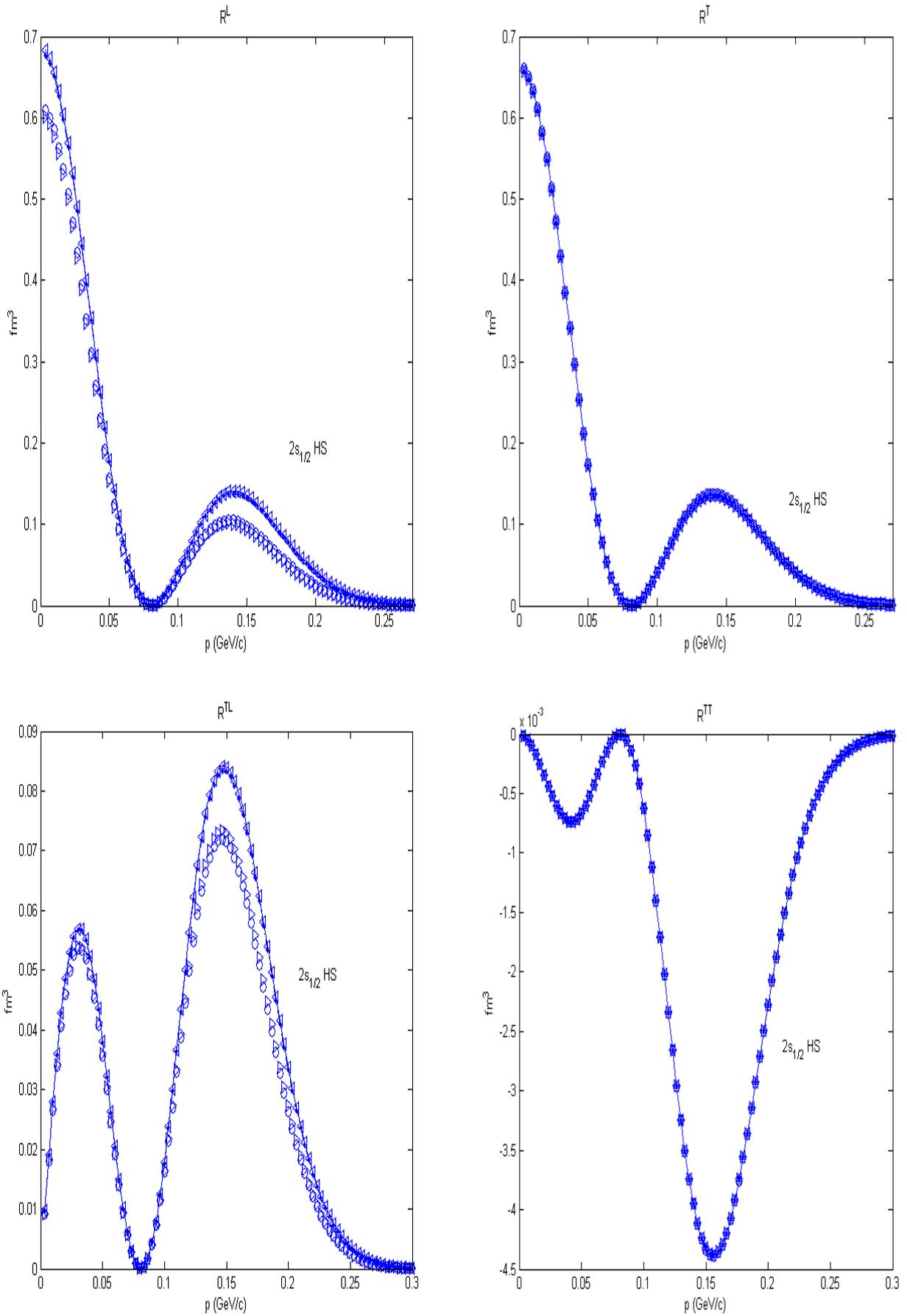


Figura 31: Modelo HS para la capa $2s_{1/2}$ del ^{40}Ca . Misma leyenda que figura 9.

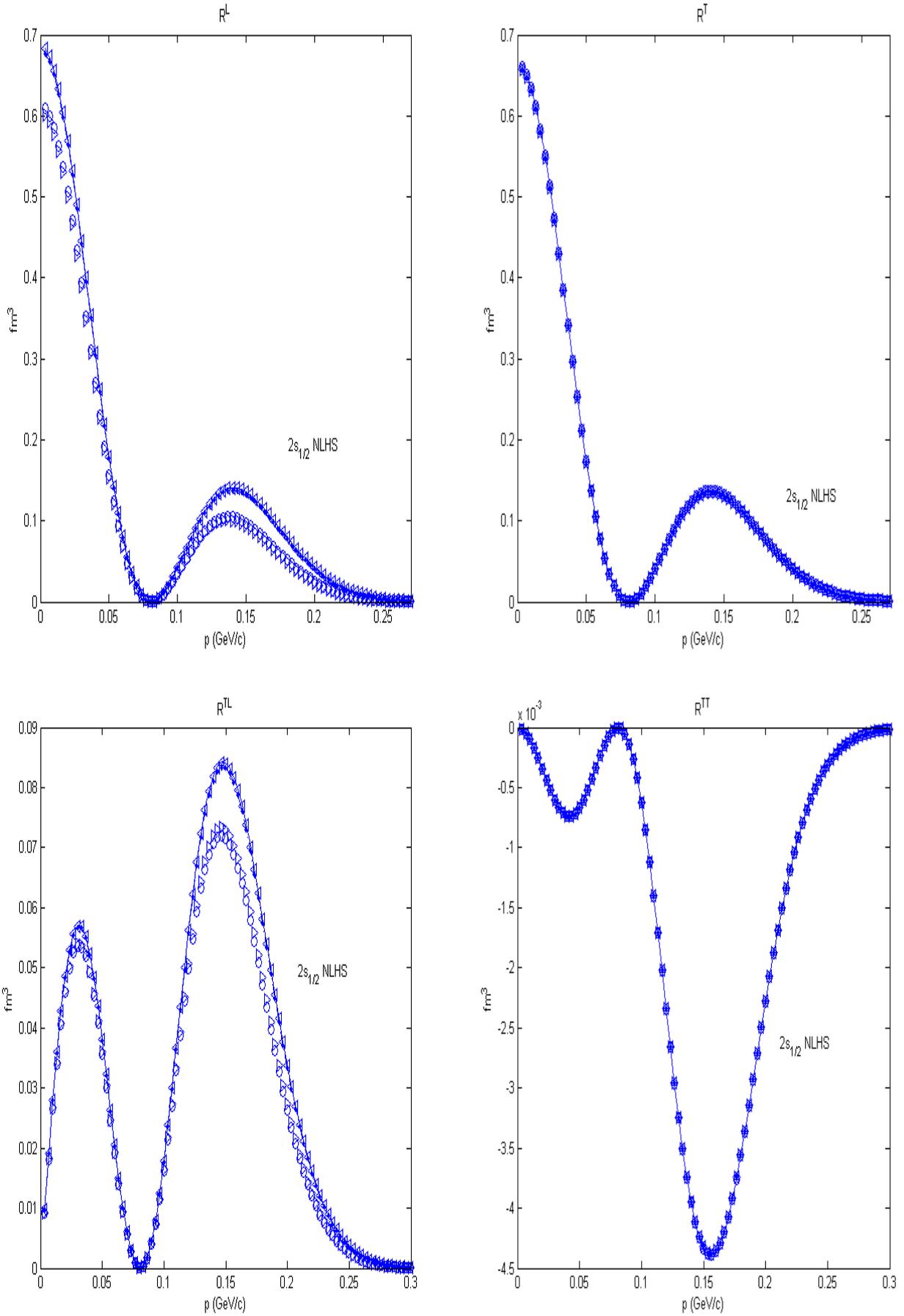


Figura 32: Modelo NLHS para la capa $2s_{1/2}$ del ^{40}Ca . Misma leyenda que figura 9.

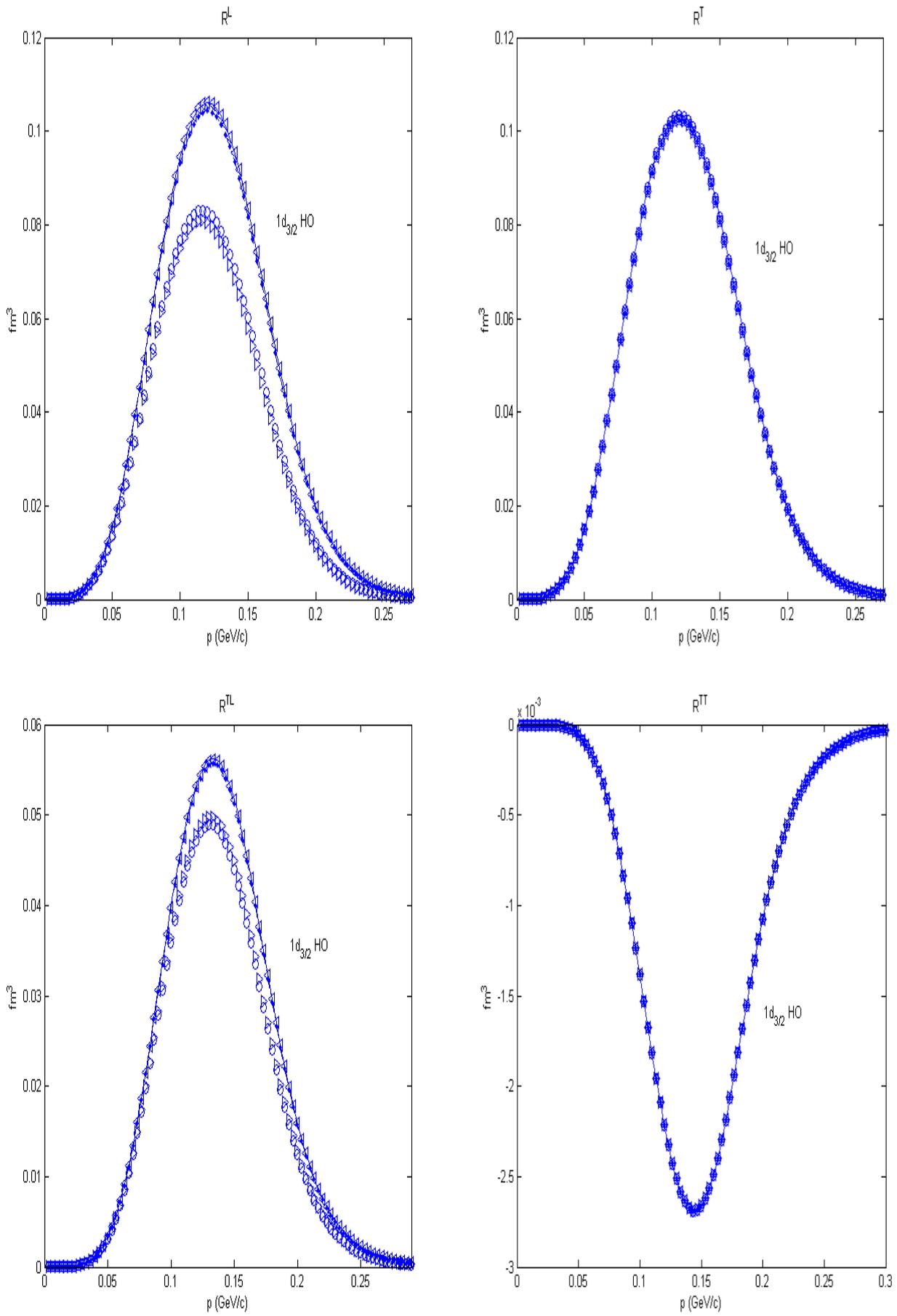


Figura 33: Modelo HO para la capa $1d_{3/2}$ del ^{40}Ca . Misma leyenda que figura 9.

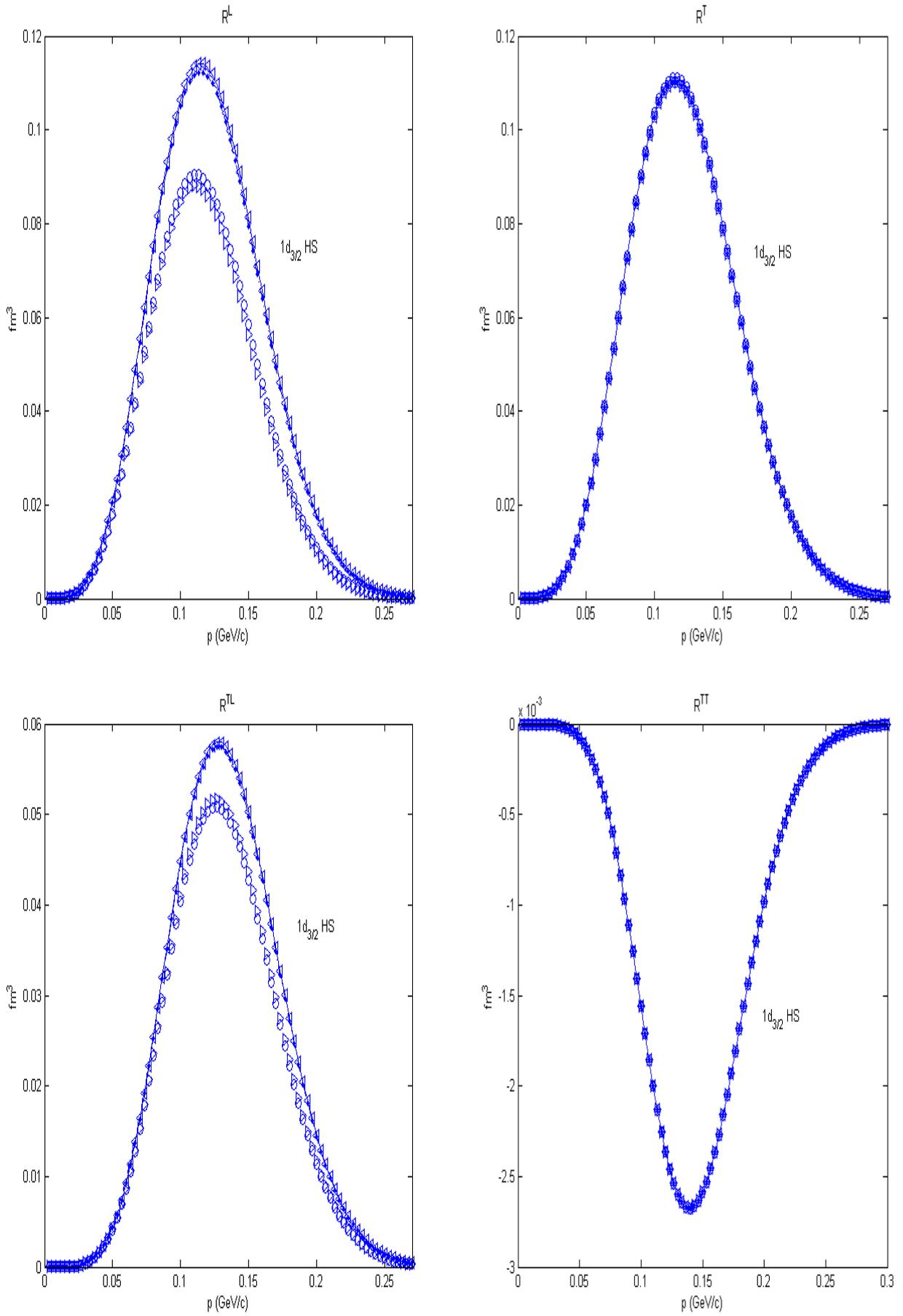


Figura 34: Modelo HS para la capa $1d_{3/2}$ del ^{40}Ca . Misma leyenda que figura 9.

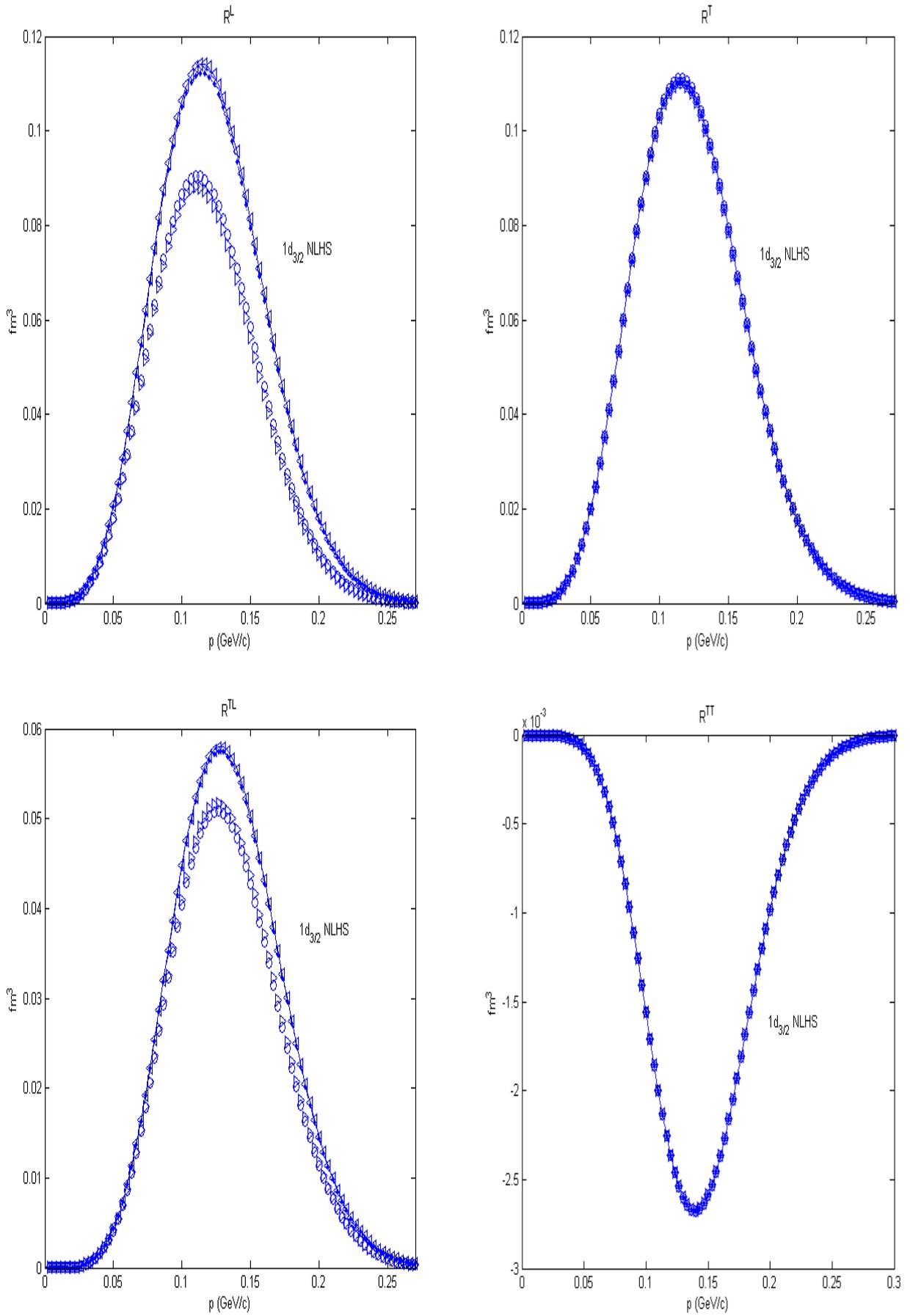


Figura 35: Modelo NLHS para la capa $1d_{3/2}$ del ^{40}Ca . Misma leyenda que figura 9.

que sus correspondientes distribuciones de momentos, exceptuando la TL para la capa $2s_{1/2}$, (véase A.2).

Nótese que las incertidumbres debidas al gauge de Weyl con respecto a Landau/Coulomb para las respuestas L aumentan conforme aumentamos el número cuántico l , obteniéndose incertidumbres mayores para $l = 2$ ($1d$), intermedias para $l = 1$ ($1p$) y menores para $l = 0$ ($2s$), sin embargo para las respuestas TL las incertidumbres se hacen mayores en la capa $2s$.

A continuación presentamos una breve discusión referente a las incertidumbres asociadas al modelo nuclear específico usado para el cálculo de las funciones de respuesta. En el caso del ^{16}O (figuras 21-26), se observa claramente que las diferencias son mucho más significativas para la capa $1p_{1/2}$. Por el contrario, vemos que los distintos modelos están en mejor acuerdo en el caso de la capa $1p_{3/2}$. Esto se debe, de nuevo, a los efectos relativistas introducidos por la posible contribución de las componentes inferiores de las funciones de ondas relativistas como ya mencionamos anteriormente (véase Sección 4.4). Por otro lado, en el caso del ^{40}Ca (figuras 27-35), observamos que las discrepancias más relevantes se encuentran en la capa $2s_{1/2}$, mientras que las incertidumbres son menos significativas en los casos de las capas $1d_{5/2}$ y $1d_{3/2}$. Para la capa $2s$ tenemos una situación similar a la de $1p_{1/2}$, puesto que en ambos casos el número cuántico j es el mismo, es decir, $j = 1/2$. Esto significa que la componente inferior de la función de onda relativista viene caracterizada por $l = 0$ y la componente superior está definida por $l = 1$ para $1p_{1/2}$, mientras que en el caso de la capa $2s$, las componentes superior e inferior vienen caracterizadas por $l = 0$ y $l = 1$, respectivamente, por tanto en ambas capas hay que considerar las diferencias significativas entre una función de onda tipo s ($l = 0$) y otra función de onda tipo p ($l = 1$).

Apéndice

A.1. Modelo HO para diferentes frecuencias.

En este apéndice mostramos los resultados obtenidos al variar un $\pm 10\%$ el valor de la frecuencia considerado en el modelo HO para las capas $1p$, $2s$ y $1d$. Así pues, en la figura 36 representamos las correspondientes distribuciones de momentos para tres valores de ν : ν_0, ν_- y ν_+ , las cuales están relacionadas mediante $\nu_{\pm} = \nu_0 \pm 0.1\nu_0$, siendo ν_0 los valores de frecuencias dados anteriormente en la Sección 4.4 para el ^{16}O y ^{40}Ca . Recordemos que ν_0 viene dada por $\nu_0 = \sqrt{M_N \omega / \hbar}$, siendo $\hbar\omega = 45A^{-1/3} - 25A^{-2/3}$ (MeV), donde A es el número másico del núcleo. La gráfica de la izquierda corresponde a la capa $1p$, la del centro a $2s$ y la de la derecha a $1d$.

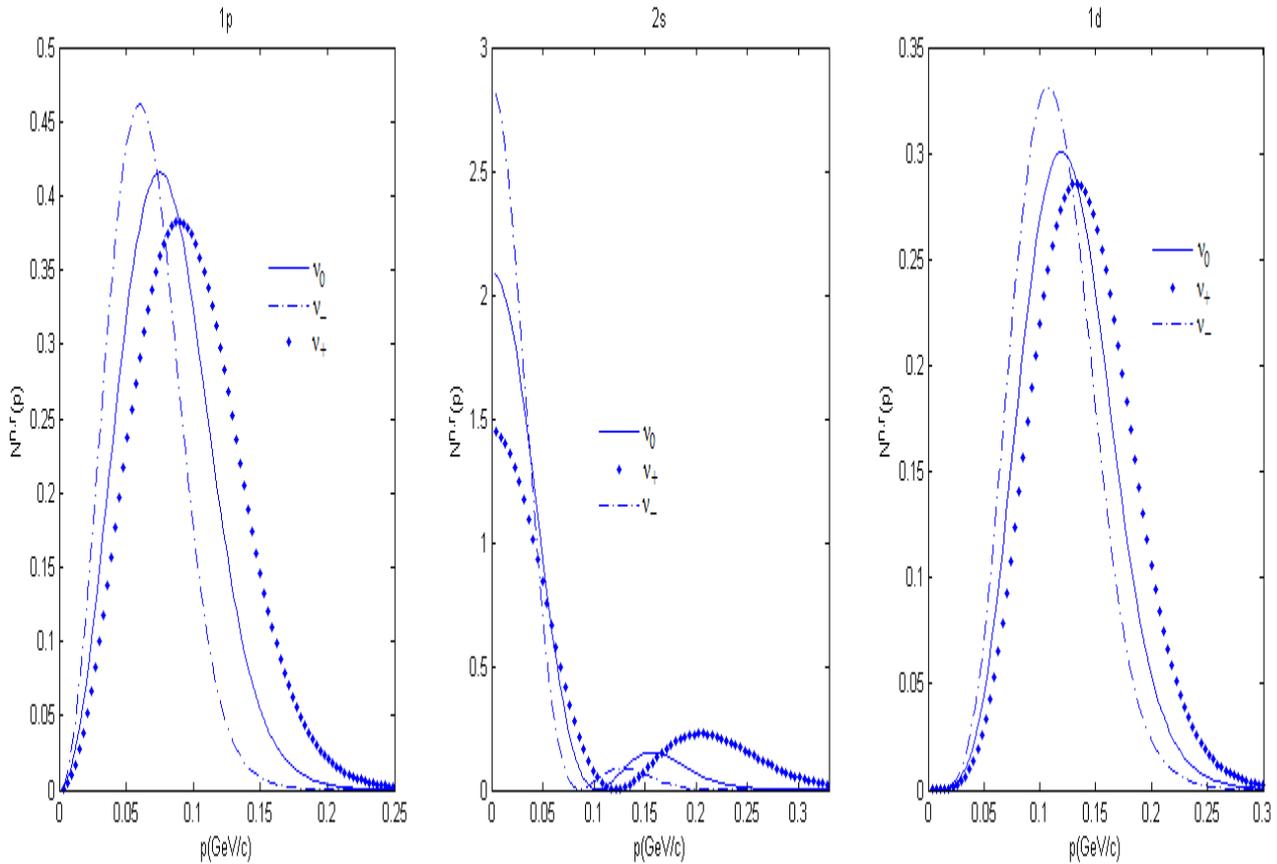


Figura 36: Distribuciones de momentos variando la frecuencia del oscilador.

Podemos ver que en las tres gráficas las curvas que están por encima son las de menores frecuencias (ν_-) y las que están por debajo son las de mayores frecuencias (ν_+). Esto se debe a que la función de onda en el espacio de momentos es inversamente proporcional a la frecuencia del oscilador, véase ecuación (130).

A.2. Respuestas nucleares TL y TT para la capa $2s$.

En la figura 37 mostramos las respuestas TL (lado izquierdo), TT (centro), y sus correspondientes distribuciones de momentos (lado derecho) de los modelos HO y HS para la capa $2s$. En este caso las respuestas nucleares han sido representadas únicamente para el gauge de Coulomb.

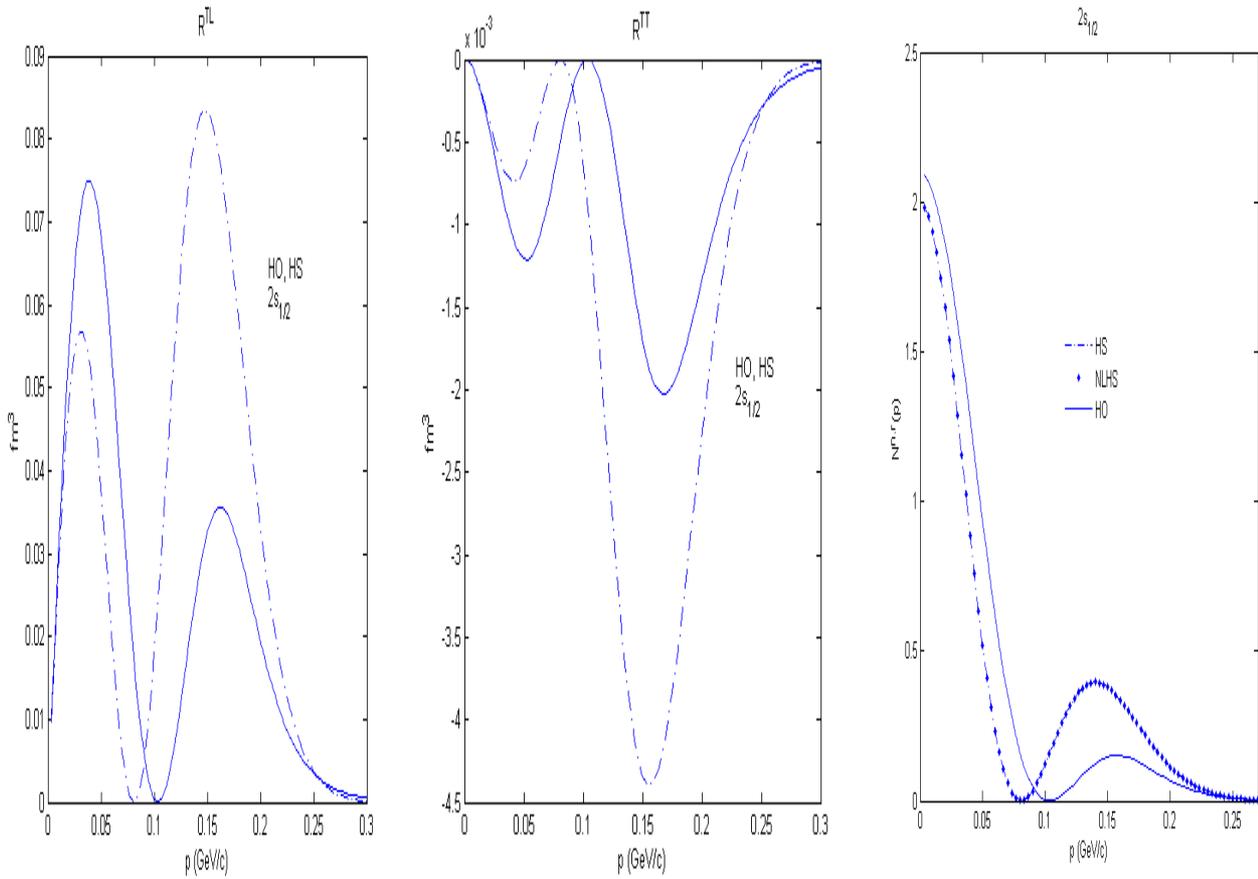


Figura 37: Respuestas TL y TT, y distribuciones de momentos para la capa $2s$. Misma leyenda que figura 19.

Las grandes diferencias que hay en el segundo pico de cada gráfica en la capa $2s$ entre los modelos HO y HS para las respuestas TL y TT se deben a la gran diferencia relativa entre estos dos modelos entre sus respectivas distribuciones de momentos para $p \approx 0.15$ GeV/c, habiendo elegido el gauge de Coulomb para CCI . Así pues, esto es debido a los efectos relativistas ya discutidos anteriormente (véase Sección 4.4).

También podemos apreciar que el comportamiento de las respuestas TL y TT son bastante distintos con respecto a sus distribuciones de momentos. Esto puede deberse a que en estas dos respuestas para la capa $2s$ las respuestas nucleónicas introducen un comportamiento distinto de las respuestas nucleares con respecto a sus distribuciones de momentos.

A.2.1 Respuesta TL para la capa $2s$ variando la frecuencia.

En la figura 38 comparamos la respuesta TL del modelo HO variando la frecuencia (ν_- , ν_0 y ν_+) con la respuesta TL del modelo HS para la capa $2s$, siendo elegido el gauge de Coulomb (CCI). Vemos que al disminuir la frecuencia, el mínimo de la respuesta TL del modelo HO se aproxima al resultado relativista, pero esto hace que haya mayor diferencia entre los máximos de las respuestas de ambos modelos, poniendo de manifiesto las discrepancias significativas entre los resultados producidos por ambos tipos de modelos.

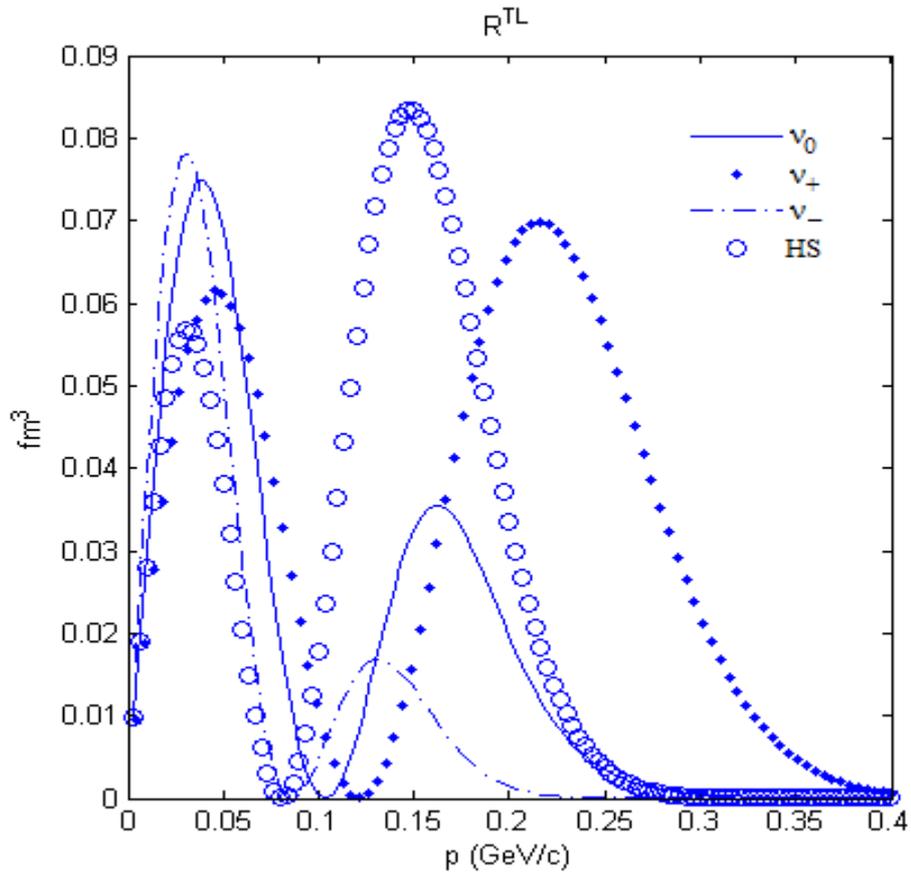


Figura 38: Comparación entre los modelos HS y HO variando la frecuencia del oscilador.

A.3. Respuesta nuclear L para la capa 1d.

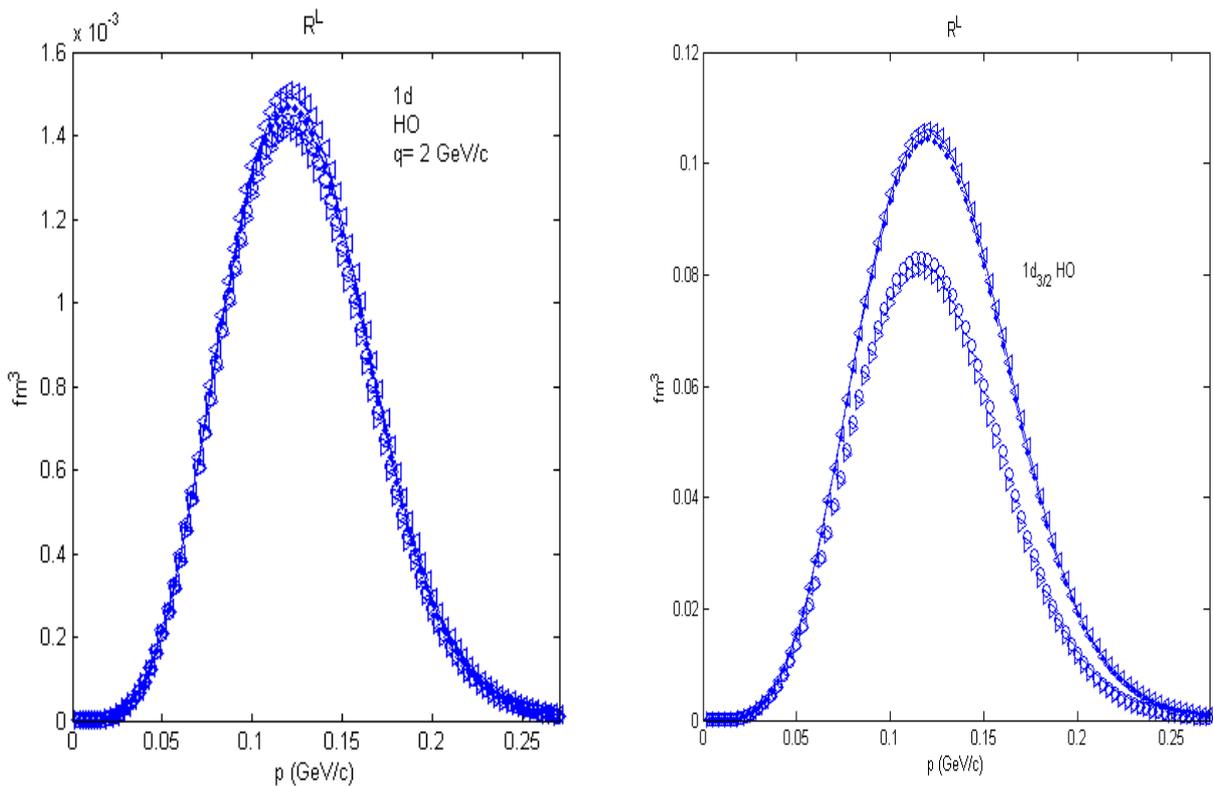


Figura 39: Respuesta L del modelo HO para la capa 1d con $q=2$ GeV/c (lado izquierdo) comparada con el caso $q=0.5$ GeV/c (lado derecho). Misma leyenda que figura 9.

Anteriormente vimos que la respuesta L para la capa $1d$ era la que introducía mayor incertidumbre debida al gauge de Weyl con respecto a los gauge de Landau/Coulomb. Esta incertidumbre puede disminuirse si aumentamos el valor del momento transferido q . Por ejemplo, para $q= 2$ GeV/c e $y = 0$ (zona del pico cuasielástico), obtenemos una incertidumbre $\approx 3\%$, siendo ésta mucho menor que para $q= 0.5$ GeV/c ($\approx 27\%$), véase figura 39. Incluso es apreciable que la respuesta L (lado izquierdo) es dos órdenes de magnitud inferior respecto a la respuesta L del lado derecho.

5 Conclusiones.

En este trabajo hemos realizado un estudio sistemático de la magnitud de las incertidumbres “off-shell” y los efectos nucleares en los observables asociados al proceso $A(e,e'N)B$ (funciones de respuesta y secciones eficaces “single-nucleon”) dentro de la aproximación PWIA. La diferencia que hay entre esta aproximación y la denominada RPWIA es que en este último caso se incluyen las componentes de energías negativas. Si consideramos únicamente la proyección de energías positivas, las respuestas nucleares y la sección eficaz diferencial factorizan en una parte que depende únicamente del vértice nucleónico y otra que incluye los efectos nucleares.

En este estudio se ha considerado una amplia variedad de situaciones cinemáticas. En concreto, hemos trabajado con dos tipos generales de elección de las variables dinámicas: la cinemática perpendicular y la cinemática paralela. En ambos casos, hemos analizado los resultados no sólo en el centro del pico cuasielástico, sino también en regiones alejadas de él.

Para el análisis de los efectos “off-shell” hemos representado los observables obtenidos para las distintas prescripciones introducidas originalmente por De Forest, para dos clases de operadores de corriente ($CC1$ ó $CC2$) y tres gauge de trabajo (Landau, Coulomb o Weyl).

Por otro lado, los efectos nucleares han sido analizados para las capas más externas de dos núcleos (^{16}O y ^{40}Ca) utilizando diversos modelos nucleares.

A continuación presentamos las principales conclusiones del análisis de las incertidumbres “off-shell” en cinemática perpendicular. Las incertidumbres más importantes son introducidas por el gauge de Weyl, lo cual concuerda con lo observado en anteriores trabajos. No obstante, los resultados proporcionados por dicho gauge se aproximan a aquellos obtenidos en los gauge de Landau y Coulomb conforme aumentan la energía y el momento transferidos. En cambio, los resultados correspondientes a los gauge de Landau y Coulomb son bastante más cercanos, y las diferencias entre ellos aumentan ligeramente cuando la variable y pasa de valores negativos a positivos. En lo que respecta a las incertidumbres asociadas a la elección del operador de corriente, hemos comprobado que son razonablemente pequeñas exceptuando casos aislados.

También hemos analizado los efectos “off-shell” para cinemática paralela. Hemos diferenciado entre dos situaciones: cinemática estrictamente paralela (\mathbf{p} , \mathbf{q} y \mathbf{p}_N paralelos) y cinemática antiparalela (\mathbf{p} opuesto a \mathbf{q} y \mathbf{p}_N). A su vez, hemos considerado dos situaciones en las cuales primero se ha fijado el momento del nucleón saliente p_N y después se ha fijado el momento transferido q . Los resultados muestran que las incertidumbres “off-shell” se minimizan escogiendo cinemática antiparalela. En cambio, las incertidumbres son bastante grandes para cinemática estrictamente paralela, ocasionadas principalmente por la cercanía del punto de producción de fotones reales.

Por otra parte, hemos empleado la distribución de momentos con la cual se introducen los efectos nucleares. Hemos visto que hay diferencias apreciables entre los modelos HO y NLHS/HS, principalmente en las capas $1p_{1/2}$ y $2s$, las cuales se deben a los efectos relativistas introducidos por la componente inferior de la función de onda. Se ha observado que las incertidumbres asociadas al modelo nuclear son mayores para las respuestas TL. Hemos visto que el gauge de Weyl tiene un comportamiento bastante diferente a los gauge de Landau/Coulomb, lo cual disminuye si aumentamos el momento transferido. Asimismo, las incertidumbres asociadas a la elección del operador de corriente son bastante pequeñas. En lo referente a las incertidumbres debidas al gauge, la respuesta L es la que introduce mayor incertidumbre, exceptuando la capa $2s$ en la cual es la respuesta TL.

Agradecimientos

Agradecer a todos los profesores del Máster su gran labor llevada a cabo durante el curso. Especialmente, quiero agradecer a Pepe Arias y Juan Antonio Caballero el esfuerzo y dedicación por facilitarme material de estudio antes de empezar el Máster.

6 Referencias.

- [1] J.M. Udías, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra, E. Garrido and J.A. Caballero, Phys. Rev. **C48** (1993) 2731.
- [2] J.M. Udías, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra, E. Garrido and J.A. Caballero, Phys. Rev. **C51** (1995) 3246.
- [3] J.M. Udías, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra and J.A. Caballero, Phys. Rev. **C53** (1996) R1488.
- [4] J.M. Udías, J.A. Caballero, E. Moya de Guerra and J.E. Amaro and T.W. Donnelly, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 5451.
- [5] J.M. Udías, J.A. Caballero, E. Moya de Guerra, J.R. Vignote and A. Escuderos, Phys. Rev. **C64** (2001) 024614.
- [6] Y. Jin and D.S. Onley, Phys. Rev. **C50** (1994) 377.
- [7] J.M. Udías and J.R. Vignote, Phys. Rev. **C62** (2000) 034302.
- [8] E. Garrido, tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid (1993).
- [9] J.A. Caballero, M.B. Barbaro, A.N. Antonov, M.V. Ivanov and T.W. Donnelly, Phys. Rev. **C81**, (2010) 055502 .
- [10] J.A. Caballero, T.W. Donnelly and G.I. Poulis, Nucl. Phys. **A555** (1993) 709.
- [11] T.W. Donnelly, “Aspects of Electromagnetic Nuclear Physics and Electroweak Interactions” Chapter 2 (1996).
- [12] T. De Forest, Nucl. Phys. **A392** (1983) 232.
- [13] M.C. Martínez, tesis doctoral, Universidad de Sevilla (2004).
- [14] W. Greiner and J. Reinhardt, “Quantum Electrodynamics”, Springer-Verlag (2009).
- [15] J.A. Caballero, T.W. Donnelly, E. Moya de Guerra and J.M. Udías, Nucl. Phys. **A632** (1998) 323.
- [16] M.C. Martínez, J.A. Caballero and T.W. Donnelly, Nucl. Phys. **A707** (2002) 83.
- [17] J.M. Udías, tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid (1993).
- [18] B.D. Serot and J.D. Walecka, Adv. Nucl. Phys. **16** (1986) 1.
- [19] C.J. Horowitz and B.D. Serot, Nucl. Phys. **A368** (1981) 503.
- [20] J. Boguta and A.R. Bodmer, Nucl. Phys. **A292** (1977) 413.

- [21] M.M. Sharma, M.A. Nagarajan and P. Ring, Phys. Lett. **B312** (1993) 377.
- [22] K. Heyde, “Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics” (2004).
- [23] S. Galster *et al.*, Nucl. Phys. **B32** (1971) 221.

