Isotopismos de álgebras de Lie filiformes sobre cuerpos finitos

O.J. Falcón[a], R.M. Falcón[a], J. Núñez[b]

(a) *Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla.*
E-mail: osfalgan@yahoo.es, rafalgan@us.es

(b) *Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Sevilla.*
E-mail: jnvaldes@us.es

Resumen. El presente trabajo trata la distribución del conjunto $\mathcal{F}_n^p$ de álgebras de Lie filiformes de dimensión n sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en clases isomórficas e isotópicas. Se estudian para ello distintas propiedades que deben verificar las aplicaciones lineales correspondientes, al mismo tiempo que se identifica dicho conjunto con la variedad afín asociada a un determinado ideal de polinomios booleanos. Finalmente, para $p = 2$, se muestra cómo identificar cada álgebra de $\mathcal{F}_n^2$ con un par de grafos, cuyas clases de isomorfismo pueden identificarse con las clases isomórficas e isotópicas de las correspondientes álgebras.

Palabras clave. Isotopismo; álgebra de Lie filiforme; teoría de grafos.

1 Introducción

En esta comunicación buscamos relacionar la Teoría de Lie con la Teoría de grafos, con un doble objetivo. El primero, tratar de utilizar las propiedades de cada una de estas teorías para obtener nuevas propiedades de la otra. El segundo, ya más concreto y en la linea del primero ya mencionado, apoyarnos en el estudio de grafos para facilitar la resolución del problema de la clasificación de las álgebras de Lie (reales o complejas), que permanece abierto en la actualidad.

A pesar de que la clasificación de álgebras de Lie *semisimples* es ya totalmente conocida, sólo se conocen hasta el momento clasificaciones explícitas (listas de álgebras no isomorfas entre sí) de otros tipos de álgebras para dimensiones pequeñas. Así, de las *resolubles*, sólo hasta dimensión menor o igual que 6. Del subconjunto de estas últimas, el de las *nilpotentes*, sólo hasta dimensión menor o igual que 7. Finalmente, de las *filiformes*, subconjunto de las anteriores, sólo son conocidas las clasificaciones hasta dimensión 12 inclusive [3, 4, 7]. A partir de ahí y pese a los numerosos intentos realizados, no se ha llegado a avanzar en este problema. De hecho, incluso algunos expertos, como Shalev y Zelmanov [8], ya han manifestado que es imposible obtener en forma explícita la clasificación de

Avances en Matemática Discreta en Andalucía Vol. III, M. Cera, P. García, R. Moreno y J. C. Valenzuela (ed.), 147-156. ISBN: 978-84-15881-46-9

las álgebras de Lie nilpotentes de dimensiones superiores. Ésta es la razón por la que actualmente, además de estar considerándose problemas que se dirigen más a la búsqueda de nuevas propiedades de estas álgebras que a la clasificación en sí de las mismas, también se están centrando los esfuerzos en buscar resultados parciales en estas clasificaciones, como pudieran ser los de clasificar determinadas familias particulares de álgebras de Lie o álgebras de Lie definidas sobre cuerpos finitos, a diferencia de sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Así, en esta comunicación se clasifican las álgebras de Lie filiformes de dimensión pequeña sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, con p primo, no sólamente por isomorfismos, que es el criterio habitualmente usado, sino también por *isotopismos*, con la doble idea de, por un lado, introducir la clasificación de álgebras de Lie por estos últimos objetos y por otro, comparar ambas clasificaciones, al objeto de establecer diferencias entre ambas y ver cuál de las dos aporta mejores resultados. Y todo ello, como se ha indicado, ayudándonos de la utilización de objetos propios de la Matemática Discreta, con la consiguiente posibilidad de trasladar posteriomente propiedades de estas álgebras a los mismos y recíprocamente, lo cual permite facilitar el estudio inicialmente abordado.

2 Preliminares

Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ de dimensión n sobre un cuerpo K es un K-espacio vectorial de dimensión n dotado de una segunda ley interna, llamada *producto corchete*, que es bilineal, anti-conmutativa y tal que verifica la *identidad de Jacobi*:

$$J(u,v,w) = [[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v] = 0, \forall u,v,w \in \mathfrak{g}. \tag{1}$$

Se define la *sucesión de resolubilidad* de $\mathfrak{g}$ según:

$$\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},\ \mathcal{C}_2(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}), \mathcal{C}_1(\mathfrak{g})],\ \ldots,\ \mathcal{C}_k(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}_{k-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{C}_{k-1}(\mathfrak{g})],\ \ldots \tag{2}$$

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}_m(\mathfrak{g}) \equiv 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se denomina *resoluble*. Asimismo, se define la *sucesión de nilpotencia* de $\mathfrak{g}$ según:

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}],\ \ldots,\ \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}],\ \ldots \tag{3}$$

El álgebra $\mathfrak{g}$ se denomina *nilpotente* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}^m(\mathfrak{g}) \equiv 0$. En particular, toda álgebra de Lie nilpotente es resoluble. Un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión n se dice *filiforme*, si se verifica que:

$$\dim\, \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = n-k, \forall k \in \{2,\ldots,n-1\} \text{ y } \dim\, \mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = 0. \tag{4}$$

Toda álgebra de Lie filiforme tiene una *base adaptada* $\{e_1,\ldots,e_n\}$, verificando que:

$$[e_1,e_2]=0,\ [e_1,e_h]=e_{h-1},\ [e_2,e_h]=[e_3,e_h]=0, \forall h\in\{3,\ldots,n\}. \tag{5}$$

Los productos anteriores se denominan *productos debido a la filiformidad del álgebra* y no aparecen habitualmente en la definición de la ley de un álgebra de Lie filiforme, ya que se consideran supuestos. Con respecto a la base adaptada, se verifica:

$$\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})\equiv\{e_2,\ldots,e_{n-1}\},\ \ldots,\mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g})\equiv\{e_2\},\ \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})\equiv\{0\}. \tag{6}$$

Un álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}$ se dice *modelo*, si los únicos productos no nulos con respecto a una base adaptada son los siguientes:

$$[e_1,e_h]=e_{h-1},\ \forall h\in\{3,\ldots,n\}. \tag{7}$$

En el presente trabajo nos centramos en el estudio de la familia $\mathcal{F}_n^p$ de álgebras de Lie filiformes n-dimensionales, con base adaptada sobre el cuerpo finito $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Suponemos además $n>5$, puesto que 5 es la dimensión mínima en la que aparecen productos corchetes diferentes a los debidos a la filiformidad. En efecto:

- Si $n=2,3$ ó 4, todos los productos corchetes son nulos. La única álgebra de Lie es la abeliana en cada dimensión.
- Si $n=5$, el único producto corchete no trivial en $\mathfrak{g}$ es $[e_4,e_5]=c_{45}^2e_2$. Las únicas álgebras de Lie son entonces la modelo y el álgebra con este producto corchete $[e_4,e_5]=c_{45}^2e_2$.

3 Isotopismos de Álgebras de Lie

Se denomina *isotopismo* entre dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ de dimensión n sobre un mismo cuerpo K a toda terna (f,g,h) de aplicaciones lineales biyectivas entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, tales que $h([x,y])=[f(x),g(y)]$, para todos $x,y\in\mathfrak{g}$. Se dice entonces que $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son *isotópicas*. Si $f=g=h$, entonces la correspondiente terna es un *isomorfismo* de álgebras de Lie y se denota únicamente por f. Puede consultarse [1] para mayor información.

Lema 1. *Todo isotopismo (f,g,h) entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ verifica que $f=g$.*

Demostración. Por las propiedades del producto corchete, dados $x,y\in\mathfrak{g}$, se tiene $[f(x),g(y)]=h[x,y]=h(-[y,x])=-h[y,x]=-[f(y),g(x)]=[g(x),f(y)]$. En particular, tomando $x=y$, se tiene que $[f(x),g(x)]=[g(x),f(x)]$, de lo que se deduce por anti-conmutatividad que $f(x)=g(x),\forall x\in\mathfrak{g}$. □

Sea (f, f, h) un isotopismo entre dos álgebras de Lie filiformes $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ de dimensión n sobre un mismo cuerpo K y bases adaptadas respectivas $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Sean $F = (f_{ij})$ y $H = (h_{ij})$ las matrices de orden n asociadas a f y h, respectivamente. Se cumple en particular que $h(e_i) = h([e_1, e_{i+1}]) = [f(e_1), f(e_{i+1})] \in \langle e'_2, \ldots, e'_{n-1}\rangle$, para todo $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Además, como los valores que tomen $h(e_1)$ y $h(e_n)$ no influyen en el hecho de ser (f, f, h) un isotopismo, podemos suponer, por ejemplo, que $h(e_1) = e'_1$ y $h(e_n) = e'_n$. Se tiene el siguiente resultado:

Lema 2. *En las matrices F y H se verifican:*

a) $f_{2i} = 0$, *para todo* $i \neq 2$.

b) $f_{11} \neq 0$.

c) $h_{1i} = h_{nj} = 0$, *para todo* $i \neq 1$ *y para todo* $j \neq n$.

d) $\exists \alpha \in K\backslash\{0\}$ *tal que* $h_{22} = f_{33} \cdot f_{11}$, $h_{32} = f_{43} \cdot f_{11}, ..., h_{(n-1)2} = f_{n3} \cdot f_{11}$.

e) $f_{13} = 0$.

f) El álgebra abeliana sólo es isotópica a ella misma.

g) $h_{(n-1)k} = f_{11} f_{n(k+1)} - f_{n1} f_{1(k+1)}, k \geq 3$.

h) $f_{1k} \cdot f_{n3} = 0$, *para todo* $k \geq 4$.

i) Si $c^{3'}_{4n} \neq 0$, *entonces* $f_{n3} = f_{(n-1)3} = 0$. *Si* $c^{3'}_{4n} = 0$ *pero* $c^{2'}_{4n} \neq 0$, *entonces* $f_{n3} = 0$.

Demostración. Por razones de extensión, demostramos únicamente el apartado (a), siendo análogas las pruebas del resto de afirmaciones. Se tiene que $[f(e_2), e'_1] = [f(e_2), f(f^{-1}(e'_1))] = h([e_2, f^{-1}(e_1)]) = h(0) = 0$. Luego, $0 = [f(e_2), e'_1] = [\sum_{j=1}^{n} f_{2j} e'_j, e'_1] = \sum_{j=1}^{n} f_{2j}[e'_j, e'_1]$. Por filiformidad, $f_{2j} = 0$ para todo $j \geq 3$. Además, $0 = h(0) = h([e_2, f^{-1}(e'_3)]) = [f(e_2), e'_3] = [f_{21}e'_1 + f_{22}e'_2, e'_3] = [f_{21}e'_1, e'_3] = f_{21}e'_2$, por lo que $f_{21} = 0$. □

Puede suponerse además que $f_{j2} = 0$, para todo $j \neq 2$, dado que si e'_2 aparece como factor en un corchete de algún sumando de la identidad de Jacobi, este corchete siempre se anula, por lo que el valor de f_{j2} es irrelevante. Por tanto, como consecuencia de todo lo anterior, las matrices F y H son de la forma:

$$F=\begin{pmatrix} f_{11} & 0 & 0 & \dots & f_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{31} & 0 & f_{33} & \dots & f_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & 0 & f_{n3} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}, \qquad H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & f_{11}f_{33} & h_{23} & \dots & h_{2(n-1)} & 0 \\ 0 & f_{11}f_{43} & h_{33} & \dots & h_{3(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & f_{11}f_{n3} & h_{(n-1)3} & \dots & h_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Con vistas a distribuir los elementos de $\mathcal{F}_n^p$ en clases de isotopismos, nos interesa determinar el conjunto $\mathfrak{I}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ de isotopismos entre dos álgebras de Lie cualesquiera $\mathfrak{g},\mathfrak{h}\in\mathcal{F}_n^p$. Es necesario para ello determinar las posibles matrices $F=(f_{ij})$ y $H=(h_{ij})$ asociadas a tales isotopismos, lo cual puede hacerse de forma algebraica atendiendo al siguiente resultado, cuya prueba se basa en la Proposición 2.7 y el Teorema 2.10 de [2].

Teorema 1. *El conjunto $\mathfrak{I}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ se puede identificar con el conjunto de ceros del ideal cero-dimensional en $\mathbb{Q}[f_{11},...,f_{nn},h_{11},...,h_{nn}]$:*

$$I=\langle f_{ij}^p-f_{ij}\mid i,j\in[n]\rangle+\langle h_{ij}^p-h_{ij}\mid i,j\in[n]\rangle+\langle\prod_{i\in[p-1]}(\det(F)-i)\rangle+$$

$$\langle\prod_{i\in[p-1]}(\det(H)-i)\rangle+\langle\sum_{k\in[n]}c_{ij}^k\cdot h_{kl}-\sum_{u,v\in[n]}f_{iu}\cdot f_{jv}\cdot c_{uv}^l\mid i,j,l\in[n]\rangle,$$

donde, para todo natural m, denotamos por $[m]$ al conjunto $\{1,\dots,m\}$. Además, $|\mathfrak{I}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})|=\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[f_{11},...,f_{nn},h_{11},...,h_{nn}]/I)$. □

La variedad afín $V(I)$ del Teorema 1 y su dimensión pueden obtenerse a partir de cualquier base de Gröbner de I. En este sentido, ha sido implementado en Singular [5] un procedimiento llamado *IsoFla*, que ha sido incluido en la librería *lie.lib* [6] y que contempla los distintos resultados expuestos en la presente sección, con vistas a determinar si dos álgebras de Lie filiformes son isotópicas o no.

4 Enumeración y clasificación de $\mathcal{F}_6^p$

Como aplicación de los resultados expuestos en la anterior sección, nos centramos a continuación en la primera dimensión de álgebras de Lie filiformes a analizar, esto es, $n=6$. En concreto, toda álgebra $\mathfrak{g}\in\mathcal{F}_6^p$ con base adaptada $\{e_1,\dots,e_6\}$ está unívocamente determinada por los siguientes productos corchetes:

$$[e_i,e_j]=\sum_{h=2}^{4}c_{ij}^h e_h\,,\quad \text{para}\quad 4\le i<j\le 6, \tag{9}$$

El álgebra $\mathfrak{g}$ puede identificarse con la terna $(c_{45}^2, c_{46}^2, c_{56}^2) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$, puesto que, debido a (5) y a la identidad de Jacobi, se verifica que:

$$\begin{cases} c_{45}^2 = c_{46}^3 = c_{56}^4, \\ c_{46}^2 = c_{56}^3, \\ c_{45}^3 = c_{45}^4 = c_{46}^4 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

En particular, haciendo uso de los resultados expuestos con anterioridad en el presente trabajo, mostramos en la Tabla 1 la distribución en clases isomórficas e isotópicas de $\mathcal{F}_6^p$, para $p \in \{2, 3\}$.

p	Isomorfismos	Isotopismos
2	$\{(0,0,0)\}$ $\{(0,0,1)\}$ $\{(0,1,0)\}$ $\{(0,1,1)\}$ $\{(1,0,0),(1,0,1)\}$ $\{(1,1,0),(1,1,1)\}$	$\{(0,0,0)\}$ $\{(0,0,1)\}$ $\{(0,1,0),(0,1,1)\}$ $\{(1,0,0),(1,0,1)\}$ $\{(1,1,0),(1,1,1)\}$
3	$\{(0,0,0)\}$ $\{(0,0,1),(0,0,2)\}$ $\{(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2)\}$ $\{(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2)\}$ $\{(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2),$ $(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2)\}$ $\{(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),$ $(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2),$ $(2,1,0),(2,1,1),(2,1,2),$ $(2,2,0),(2,2,1),(2,2,2)\}$	$\{(0,0,0),$ $\{(0,0,1),(0,0,2)\}$ $\{(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),$ $(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2)\}$ $\{(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2),$ $(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2)\}$ $\{(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),$ $(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2),$ $(2,1,0),(2,1,1),(2,1,2),$ $(2,2,0),(2,2,1),(2,2,2)\}$

Tabla 1: Clases isotópicas de $\mathcal{F}_6^p$

5 Grafos asociados a $\mathcal{F}_n^2$

La distribución en clases isomórficas e isotópicas de los elementos de $\mathcal{F}_n^p$ puede simplificarse una vez identificada cada álgebra de Lie filiforme con unos determinados grafos, cuyos invariantes podrían utilizarse a la hora de elaborar dicha clasificación. Para poner de manifiesto esta relación, nos centramos a continuación en el caso $p = 2$. Para ello, identificamos cada álgebra filiforme $\mathfrak{g} \in \mathcal{F}_n^2$ con base adaptada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ con dos grafos $\mathcal{G}_1^{\mathfrak{g}}$ y $\mathcal{G}_2^{\mathfrak{g}}$, cuyos respectivos conjuntos de vértices son:

$$V(\mathcal{G}_1^{\mathfrak{g}}) = \{v_{\{i,j,k\}} \mid i,j,k \in \mathfrak{g} \text{ tal que } i+j=k\} \cup \{v_i \mid i \in \mathfrak{g}\} \cup \\ \{v_{\{i,j\}} \mid i,j \in \mathfrak{g} \text{ tal que } i \neq j\}.$$

$$V(\mathcal{G}_2^{\mathfrak{g}}) = V(\mathcal{G}_1^{\mathfrak{g}}) \cup \\ \{w_i \mid i \in \langle e_2, \ldots, e_{n-1}\rangle\} \cup \{w_{\{i,j,k\}} \mid i,j,k \in \langle e_2, \ldots, e_{n-1}\rangle \text{ tal que } i+j=k\}.$$

Sus respectivos conjuntos de aristas se definen de la siguiente forma:

$$E(\mathcal{G}_1^{\mathfrak{g}}) = \{v_{\{i,j,k\}}v_i \mid i,j,k \in \mathfrak{g} \text{ tal que } i+j=k\} \cup \{v_i v_{\{i,j\}} \mid i,j \in \mathfrak{g}\} \cup \\ \{v_{\{i,j\}}v_k \mid i,j,k \in \mathfrak{g} \text{ tal que } [i,j]=k\}.$$

$$E(\mathcal{G}_2^{\mathfrak{g}}) = \{v_{\{i,j,k\}}v_i \mid i,j,k \in \mathfrak{g} \text{ tal que } i+j=k\} \cup \{v_i v_{\{i,j\}} \mid i,j \in \mathfrak{g}\} \cup \\ \{v_{\{i,j\}}w_k \mid i,j,k \in \mathfrak{g} \text{ tal que } [i,j]=k\} \cup \{w_i w_{\{i,j,k\}} \mid i,j,k \in \mathfrak{g} \text{ tal que } i+j=k\}.$$

Atendiendo a la anterior construcción y a la definición de isomorfismo e isotopismo de álgebras de Lie filiformes de $\mathcal{F}_n^2$, se verifica en particular el siguiente resultado:

Teorema 2. *Dos álgebras de Lie filiformes $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in \mathcal{F}_n^2$ son isomorfas (respectivamente, isotópicas) si y sólo si sus grafos asociados $\mathcal{G}_1^{\mathfrak{g}_1}$ y $\mathcal{G}_1^{\mathfrak{g}_2}$ (respectivamente, $\mathcal{G}_2^{\mathfrak{g}_1}$ y $\mathcal{G}_2^{\mathfrak{g}_2}$) son isomorfos.* □

Las Figuras 1 y 2 muestran, como ejemplo, parte de los grafos $\mathcal{G}_1^{\mathfrak{g}}$ y $\mathcal{G}_2^{\mathfrak{g}}$ asociados al álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g} \in \mathcal{F}_6^2$, cuya ley viene dada por:

$$[e_4, e_5] = e_2,\ [e_4, e_6] = e_3,\ [e_5, e_6] = e_2 + e_4. \tag{11}$$

6 Futuras líneas de investigación

Se plantean las siguientes dos futuras líneas de investigación:

a) El estudio de propiedades e invariantes de los grafos definidos en la anterior sección, lo que permitirá caracterizar y simplificar la distribución en clases isotópicas e isomórficas del conjunto de álgebras de Lie filiformes de $\mathcal{F}_n^2$.

b) El desarrollo de un estudio similar para el caso de grafos asociados al conjunto $\mathcal{F}_n^p$, con p primo impar.

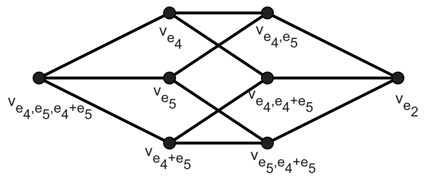

Fig. 1: Subgrafo de $\mathcal{G}_1^{\mathfrak{g}}$.

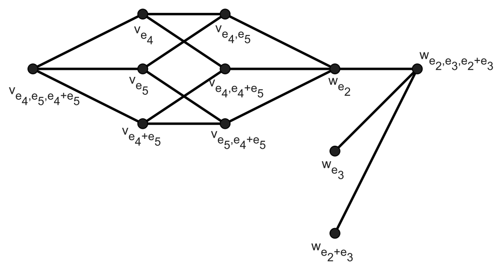

Fig. 2: Subgrafo de $\mathcal{G}_2^{\mathfrak{g}}$.

Referencias

[1] Albert, A. A. Non-associative algebras, *Ann. Math.* **2** (1942), no. 43, 685–723.

[2] Cox, D., Little, J., y O'Shea, D. Using Algebraic Geometry, Springer, New York, 1998.

[3] Ancochea et M. Goze, J.M. Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7, *C.R. Acad.Sci. París I* **17**:302 (1986), 611–613.

[4] Boza, L., Fedriani, E. M. y Núñez, J. A new method for classifying complex filiform Lie algebras, *Applied Mathematics and Computations*, **2**:3 (2001), 169–175.

[5] Decker, W., Greuel, G.-M., Pfister, G. y Schönemann, H. SINGULAR 3-1-6. A computer algebra system for polynomial computations, 2013. `http://www.singular.uni-kl.de`.

[6] Falcón, O. J., Falcón, R. M., Núñez, J. `http://personal.us.es/raufalgan/LS/lie.lib`.

[7] Boza, L., Fedriani, E.M., Núñez, J. y Tenorio, A. F. A historical review of the classifications of Lie algebras, *Revista de la Unión Matemática Argentina*. In press, 2013.

[8] Shalev A. y Zelmanov E.I. Narrow Lie algebras: A coclass theory and a characterization of the Witt algebra, *Journal of Algebra* **189** (1997), 294–331.