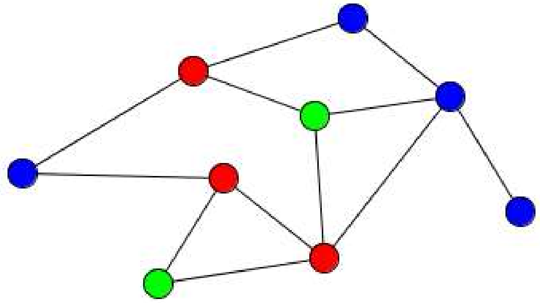
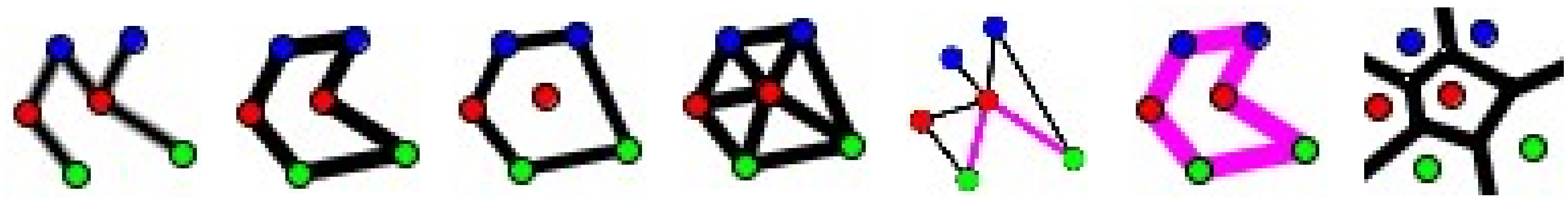


Matemática Discreta con GeoGebra

Raúl M. Falcón Ganfornina
Ricardo Ríos Collantes de Terán
rafalgan@us.es
profesofricardo@yahoo.es

IV Encuentro en Andalucía GeoGebra en el aula

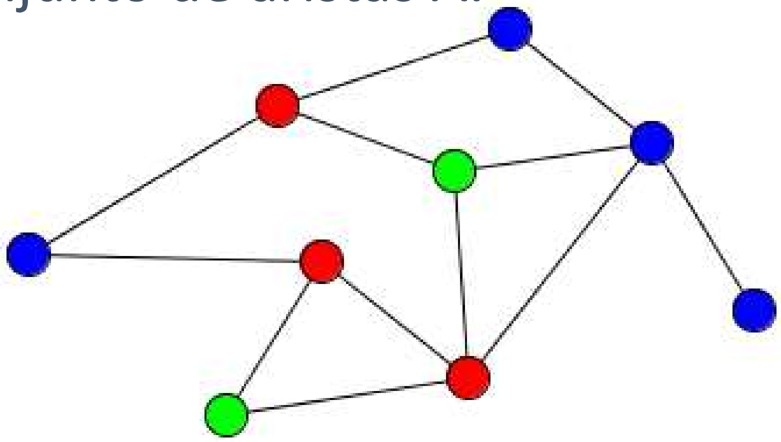
Sevilla, 2 de abril de 2016



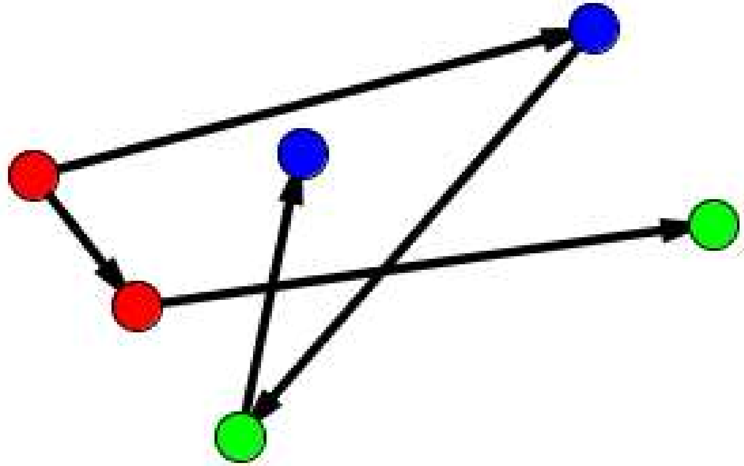
INDICE

NOCIONES BASICAS

- **Grafo G = (V,A):** Par formado por un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas A.

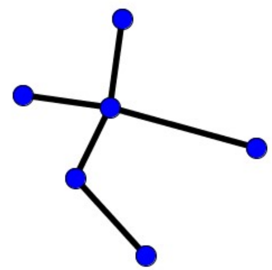


Grafo no dirigido



Grafo dirigido

- **Grafo conexo:** Todo par de vértices se puede conectar por aristas.
- **Grafo ponderado:** Sus vértices y/o aristas tienen asociados pesos.
- **Valencia de un vértice:** Número de aristas que inciden en el vértice.
- **Árbol**: Grafo con vértices de valencia menor o igual a dos.



PROBLEMAS

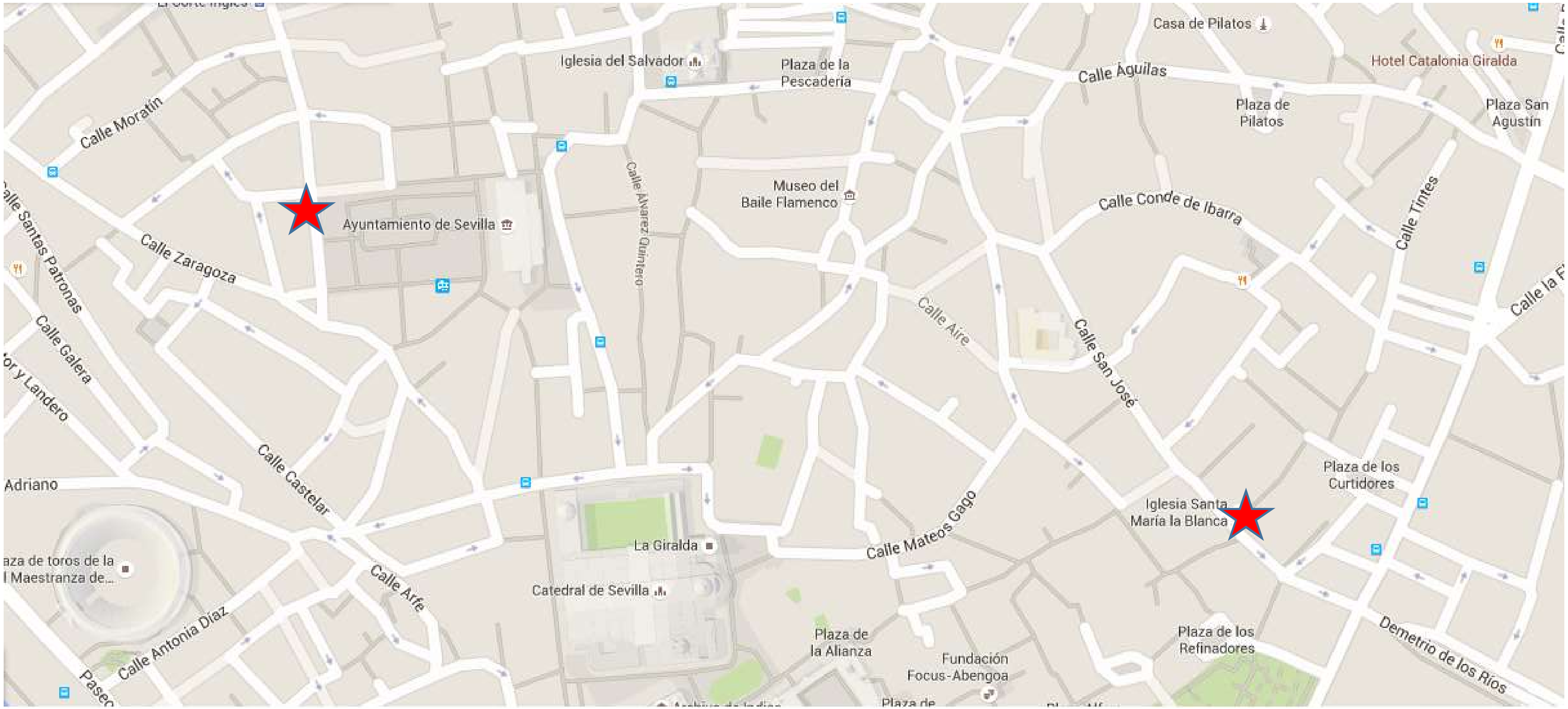
RED DE COSTE MÍNIMO

Se quiere crear una red optimizada de carreteras que una las siguientes poblaciones de la provincia de Sevilla. **¿Cuál sería la longitud total de dicha red?**

PROBLEMAS

LA RUTA MÁS CORTA

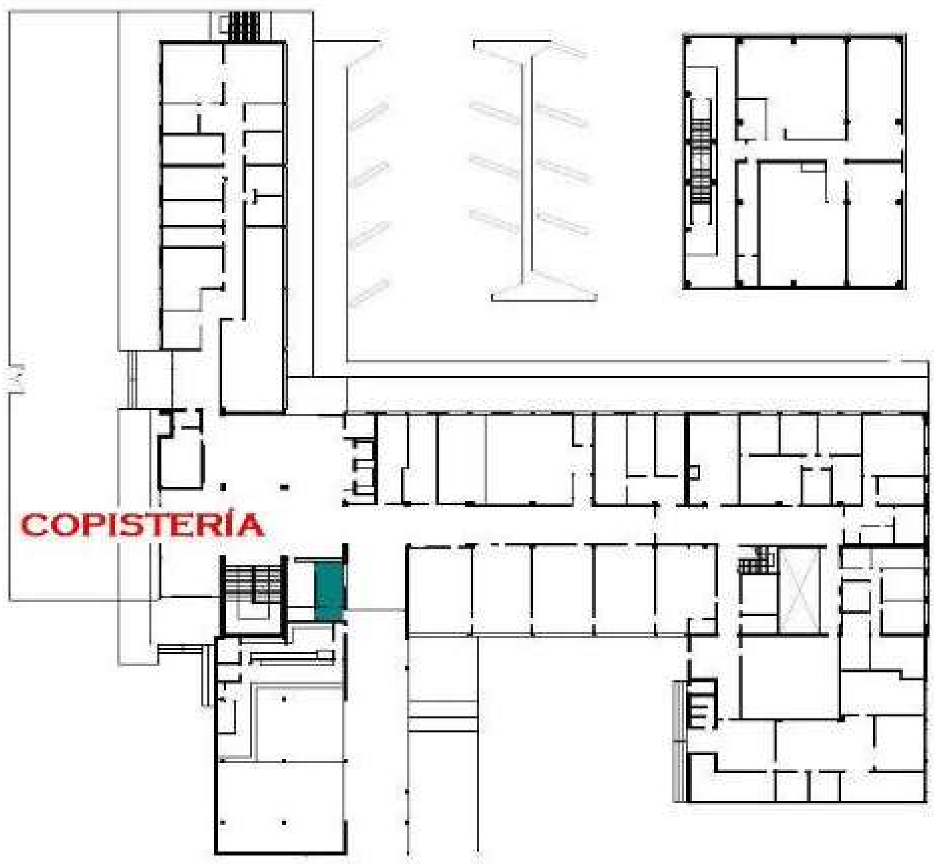
¿Cuál es la ruta más corta para ir desde el Ayuntamiento de Sevilla hasta la Iglesia de Santa María la Blanca?



PROBLEMAS

RECORRIDOS DE EVACUACIÓN

¿Cómo diseñar un plan de evacuación de forma interactiva?



PROBLEMAS

EL VIAJANTE

Un representante de comercio, con sede en una ciudad A, debe visitar una serie de clientes establecidos en distintas ciudades de manera que su itinerario tenga como principio y fin la ciudad de residencia.

¿Que ruta deberá seguir con el fin de minimizar costes, es decir pasar una sola vez por cada ciudad haciendo el menor número de kilómetros?

PROBLEMAS

LA CENTRAL DE RESIDUOS

Se quiere colocar una central incineradora de residuos sólidos urbanos que recoja la basura de una serie de poblaciones.

¿Cuál sería el punto más justo para colocar la central?

PROBLEMAS

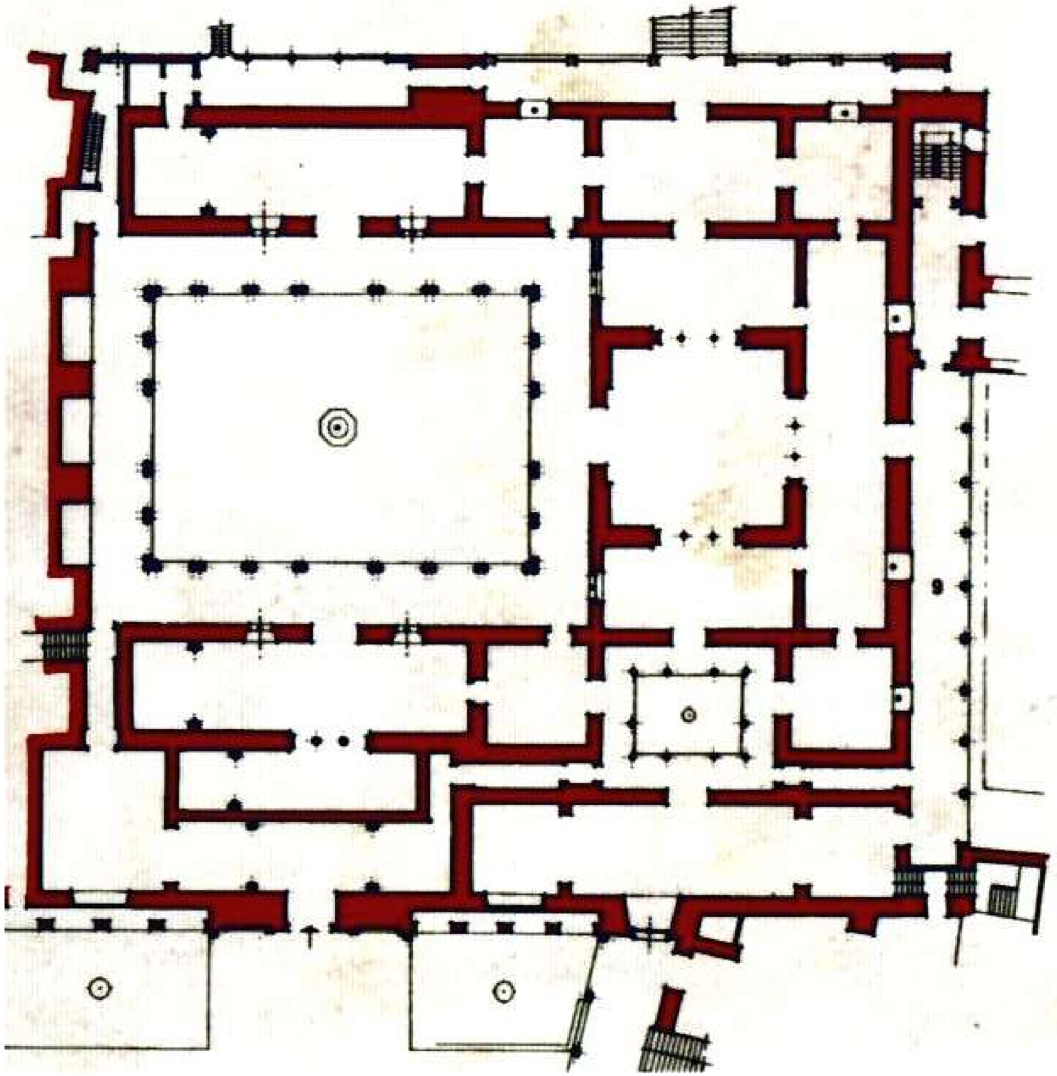
LOS CUATRO COLORES

¿Se puede colorear el mapa de España usando cuatro colores sin que dos provincias que sean limítrofes estén coloreadas con el mismo color?

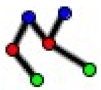
PROBLEMAS

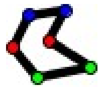
LA GALERÍA DE ARTE

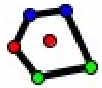
¿Cuántos guardianes son suficientes para cubrir la vigilancia del interior del Palacio del Rey Don Pedro en el Alcázar de Sevilla?

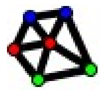


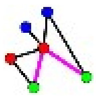
HERRAMIENTAS DE GEOGEBRA

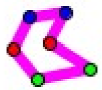
 Árbol Recubridor Mínimo.

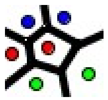
 Cierre.

 Cierre convexo.

 Delaunay.

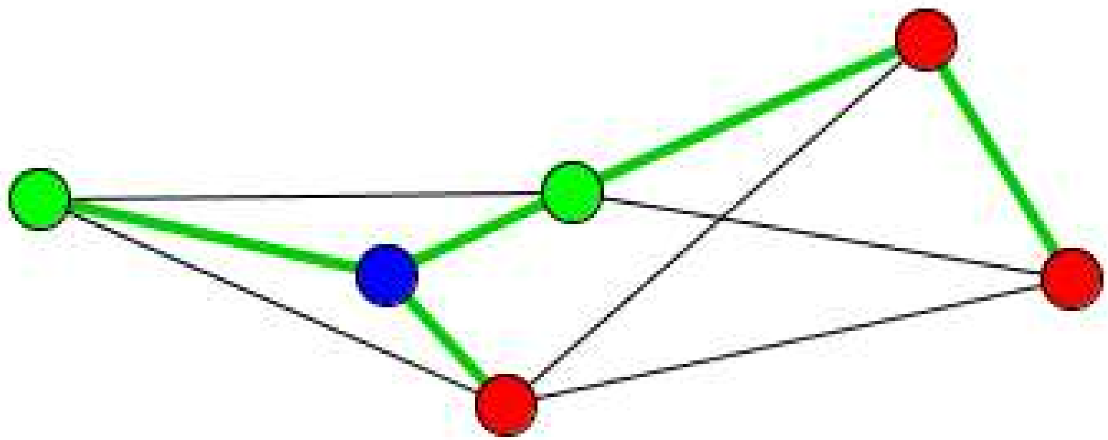
 Menor Distancia.

 Viajante.

 Voronoi.

Arbol recubridor mínimo

Un **árbol** contenido en un *grafo conexo y no dirigido* se denomina **recubridor** si contiene a todos los vértices del grafo. Si el grafo tiene aristas ponderadas, entonces un **árbol recubridor** es **mínimo** si la suma de los pesos de sus aristas es la menor posible.



ÁrbolRecubridorMínimo[<Lista de puntos>]

- Utiliza como peso la distancia euclídea.
- Genera un árbol desde un conjunto de puntos, no desde un grafo.

PROBLEMAS

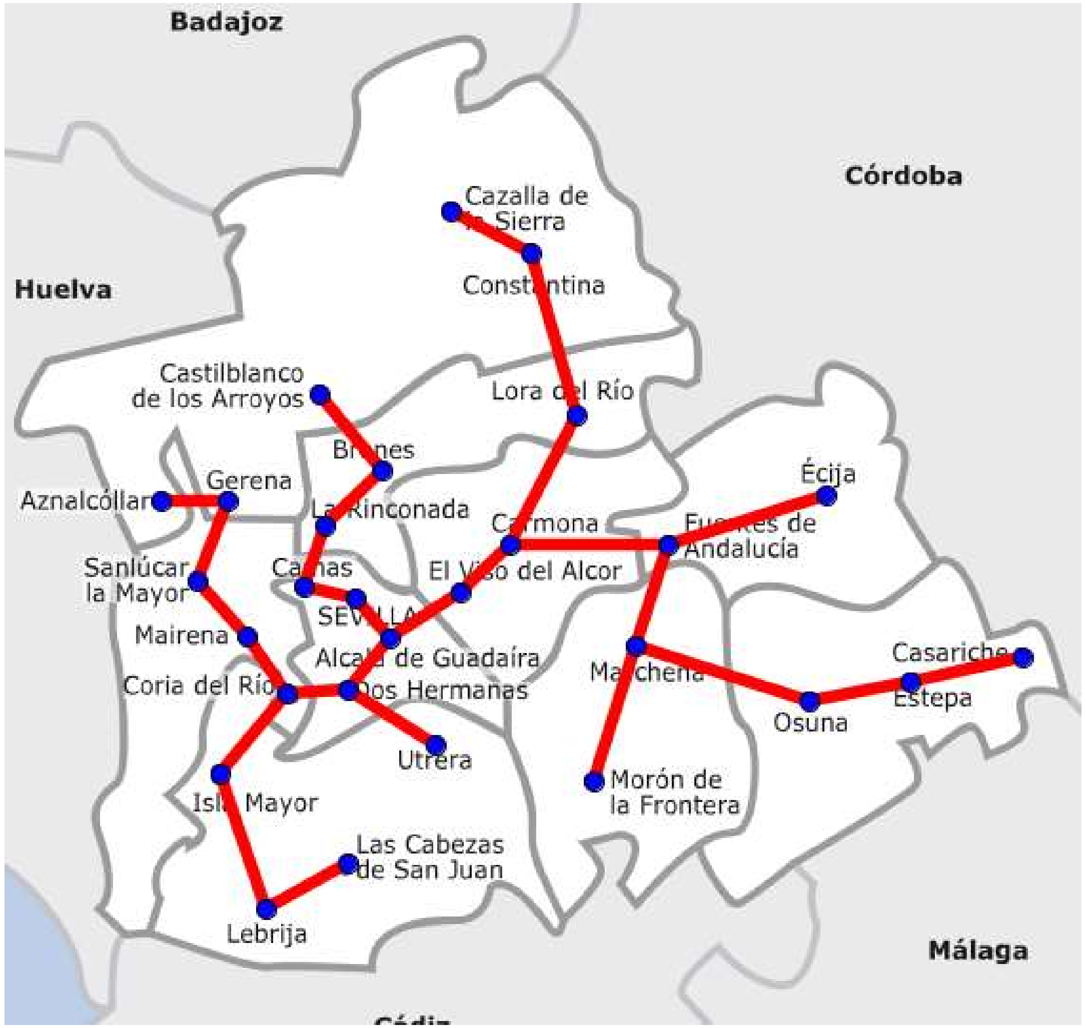
RED DE COSTE MÍNIMO

Se quiere crear una red optimizada de carreteras que una las siguientes poblaciones de la provincia de Sevilla. **¿Cuál sería la longitud total de dicha red?**

PROBLEMAS

RED DE COSTE MÍNIMO

Se quiere crear una red optimizada de carreteras que una las siguientes poblaciones de la provincia de Sevilla. **¿Cuál sería la longitud total de dicha red?**

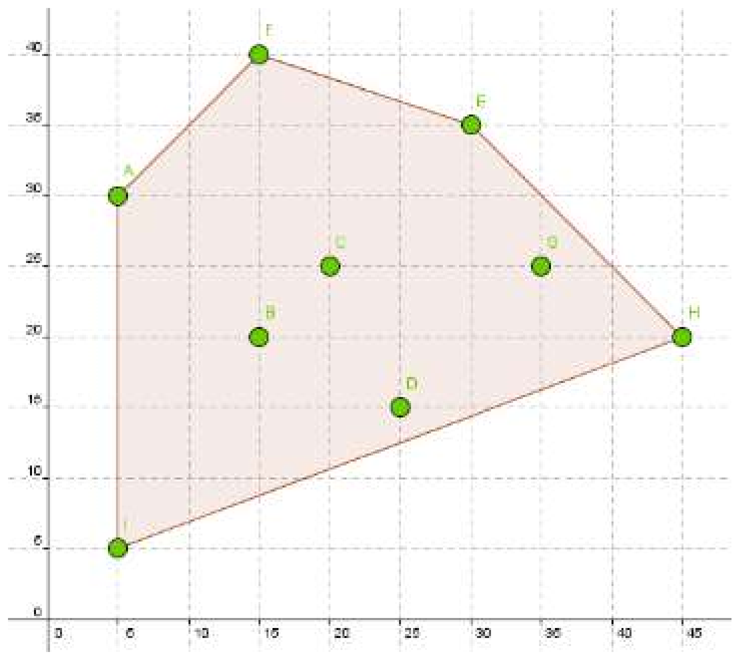


Cierre convexo

La **envolvente convexa** del conjunto de puntos $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ es el polígono convexo de menor área que contiene todos estos puntos.

Cierre[<Lista de Puntos>, <Porcentaje>]

Muestra una envolvente cuya área depende del porcentaje indicado.



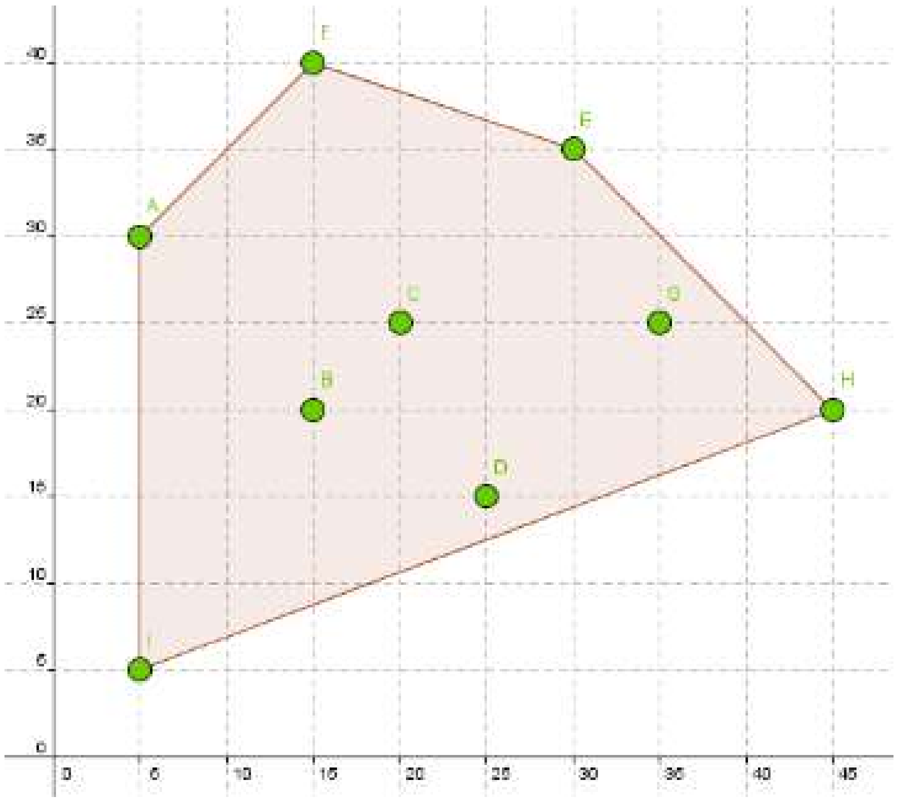
CierreConvexo[<Lista de Puntos>]

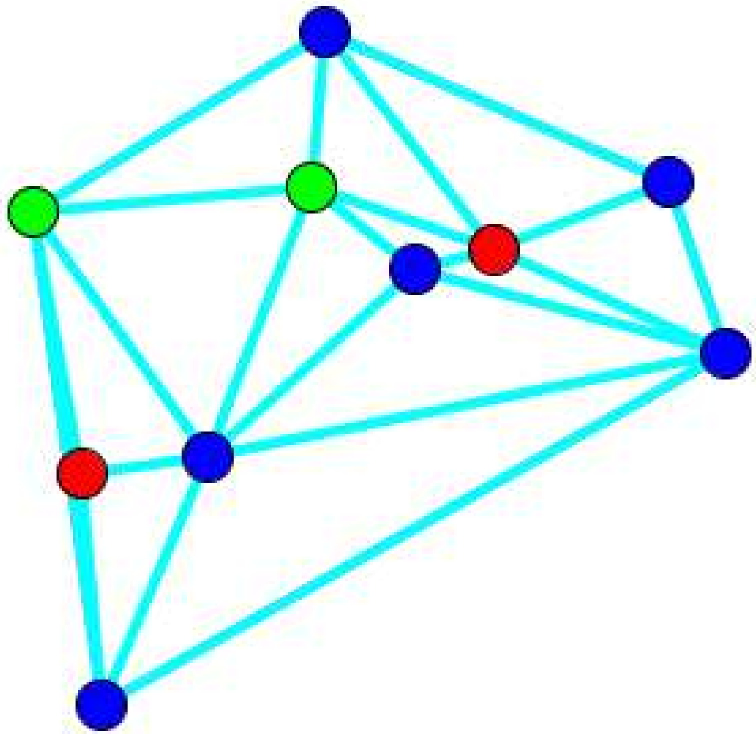
Muestra la envolvente convexa de un conjunto de puntos.

Triangulación de Delaunay

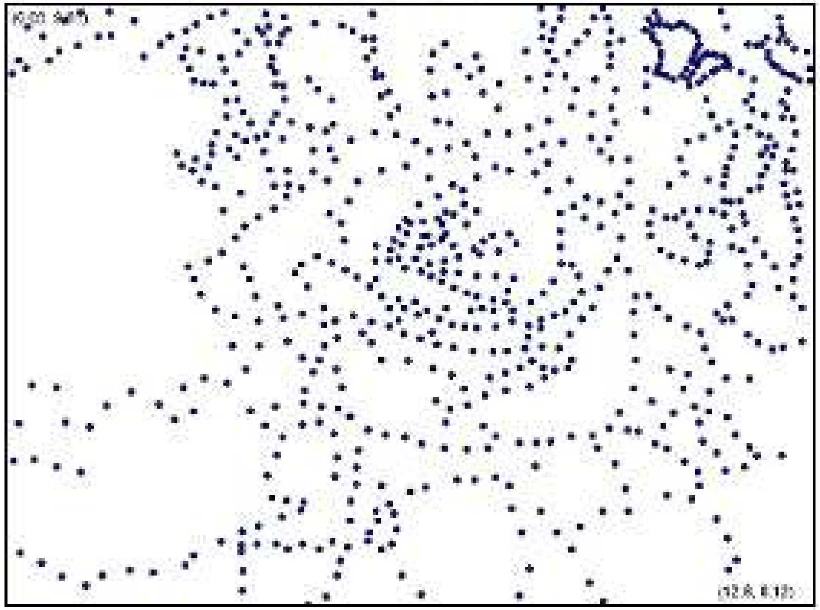
Se llama **triangulación de Delaunay** de un conjunto de puntos en el plano a una subdivisión en triángulos de la envolvente convexa de dicho conjunto, de tal forma que ninguna circunferencia circunscrita a uno de esos triángulos contiene un vértice de otro de los triángulos.

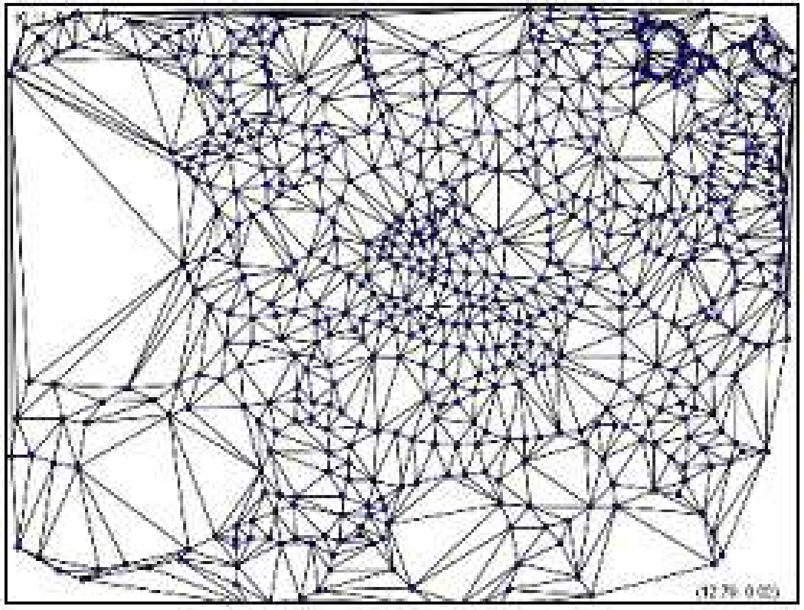
Delaunay[<Lista de Puntos>]





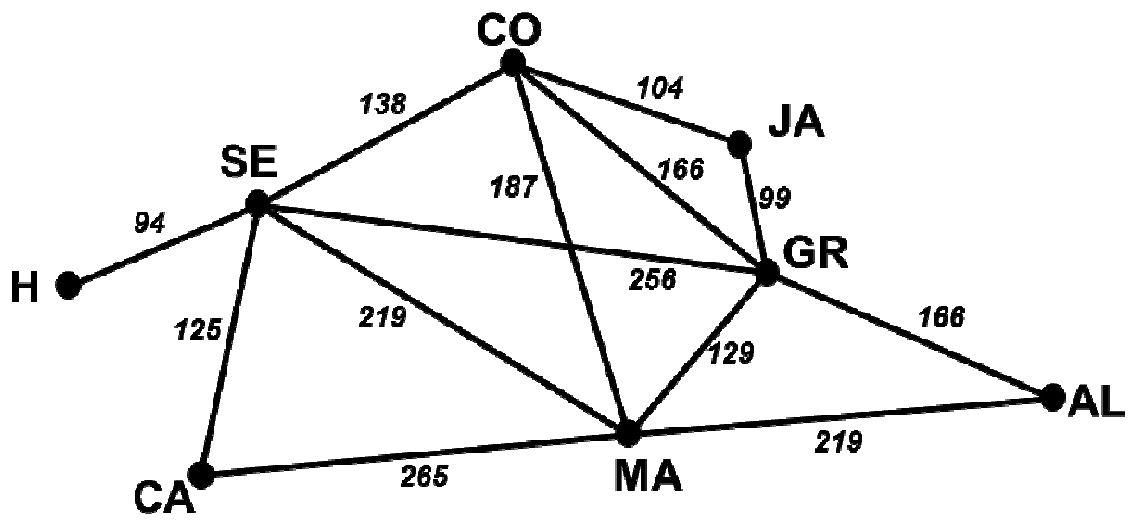
Triangulación de Delaunay





Menor distancia

Dada una red de transporte, hallar la ruta óptima entre un determinado par de elementos de la misma.



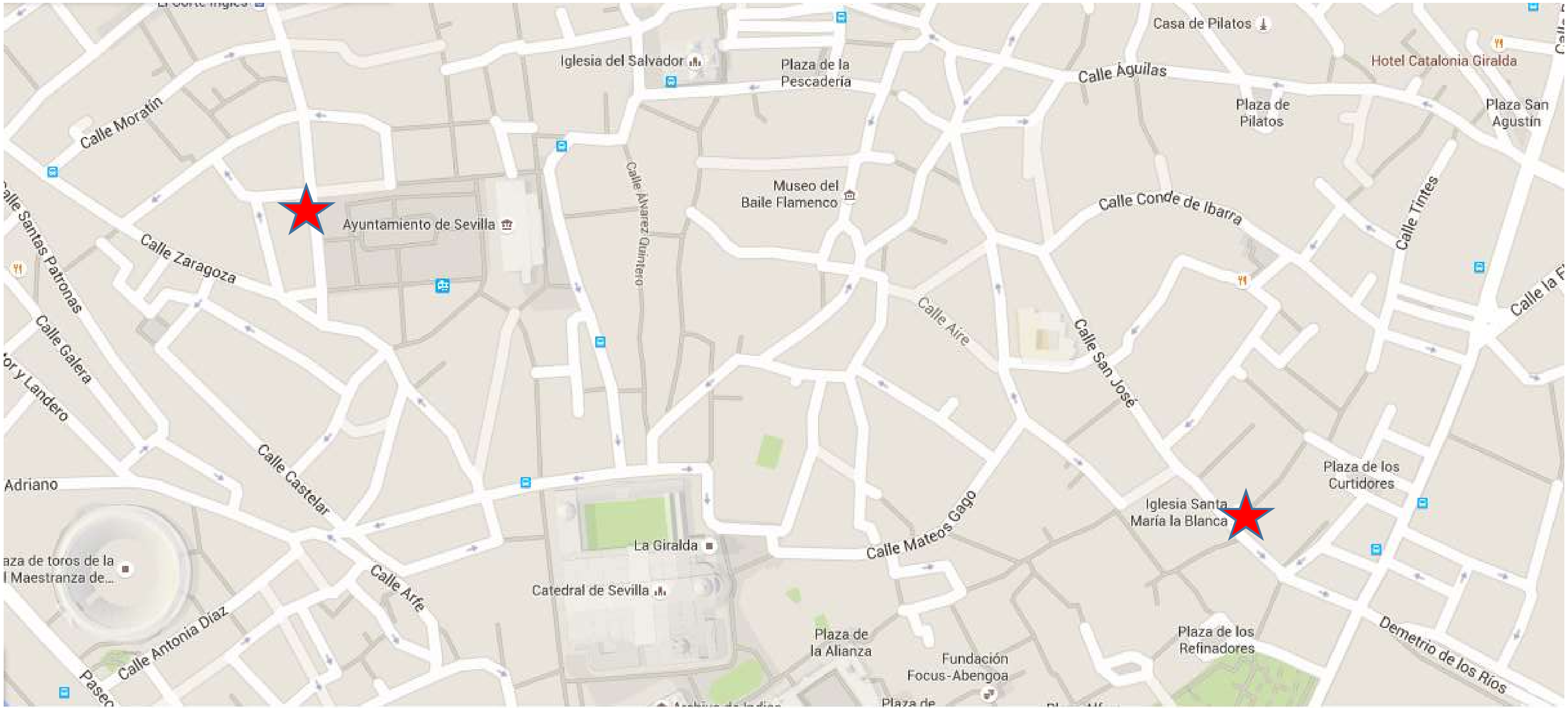
MenorDistancia[<Lista de segmentos>, <Punto inicial>, <Punto final>, <Baremado o no (true/false)>]

- **True**: Se tiene en cuenta la distancia entre aristas.
- **False**: El peso de cada arista es 1, con lo que se tiene en cuenta el número total entre aristas entre vértices.

PROBLEMAS

LA RUTA MÁS CORTA

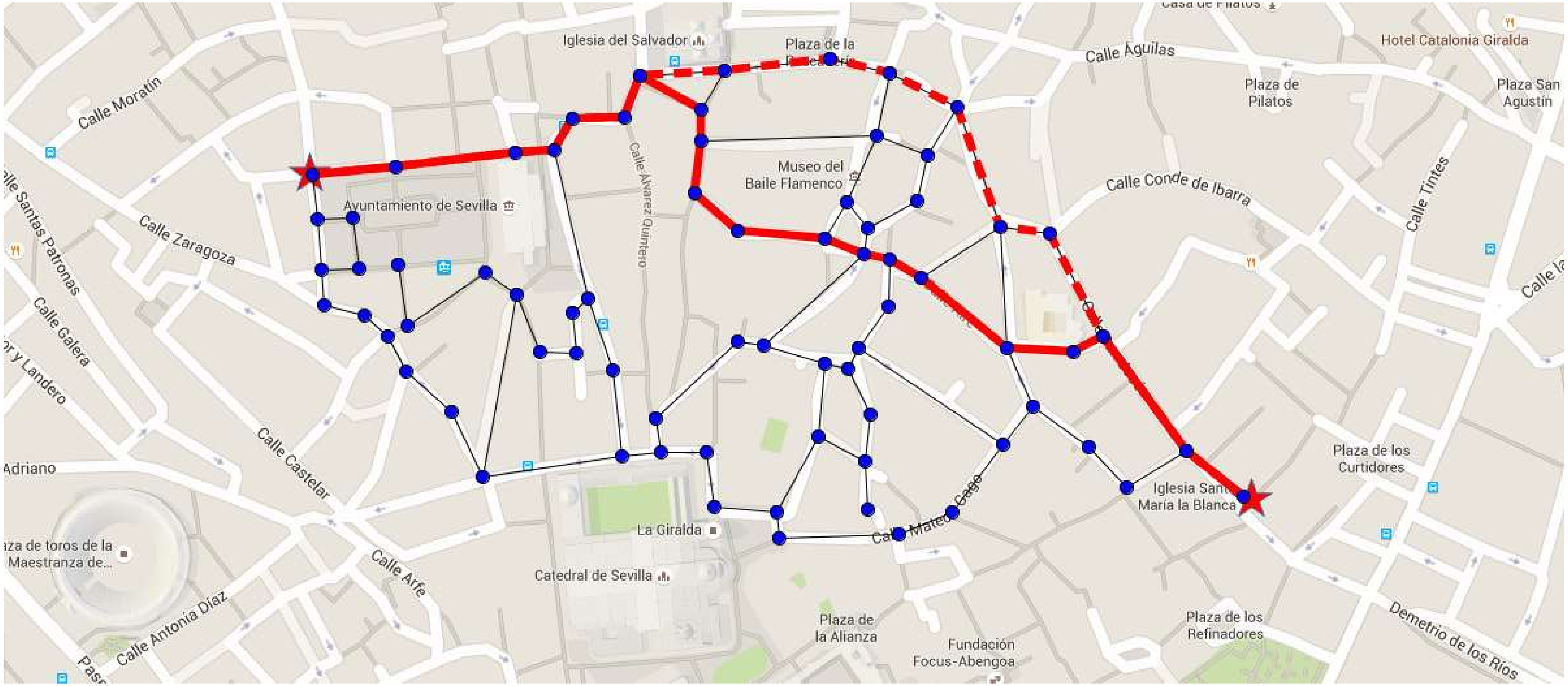
¿Cuál es la ruta más corta para ir desde el Ayuntamiento de Sevilla hasta la Iglesia de Santa María la Blanca?



PROBLEMAS

LA RUTA MÁS CORTA

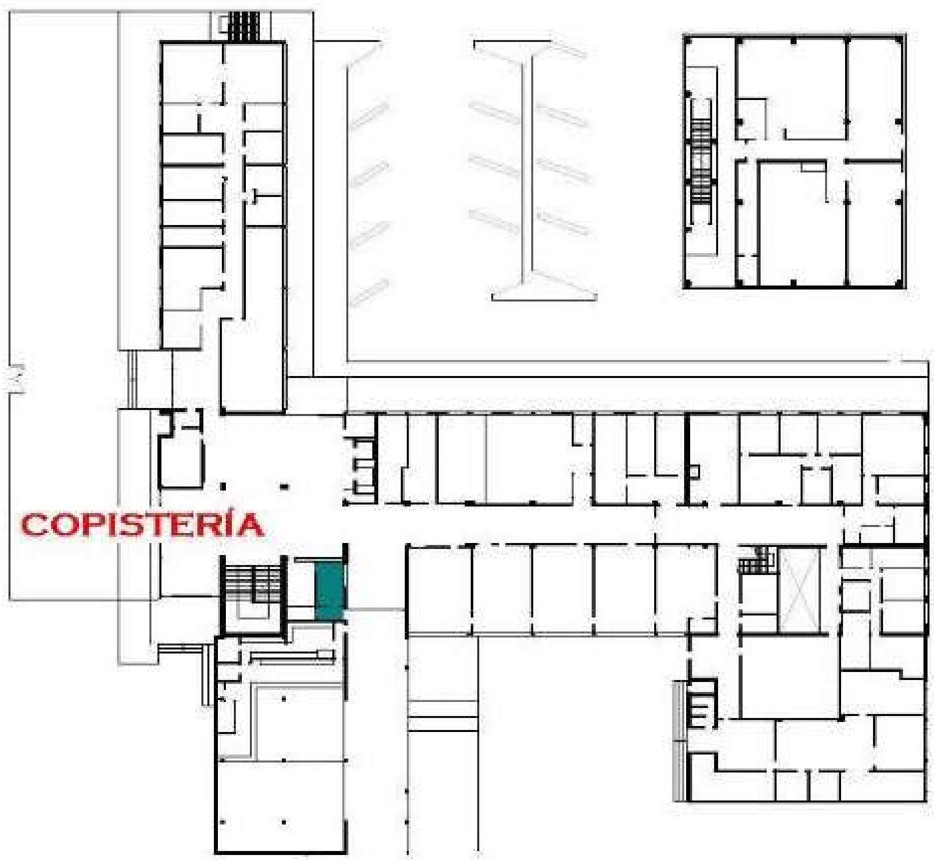
¿Cuál es la ruta más corta para ir desde el Ayuntamiento de Sevilla hasta la Iglesia de Santa María la Blanca?



PROBLEMAS

RECORRIDOS DE EVACUACIÓN

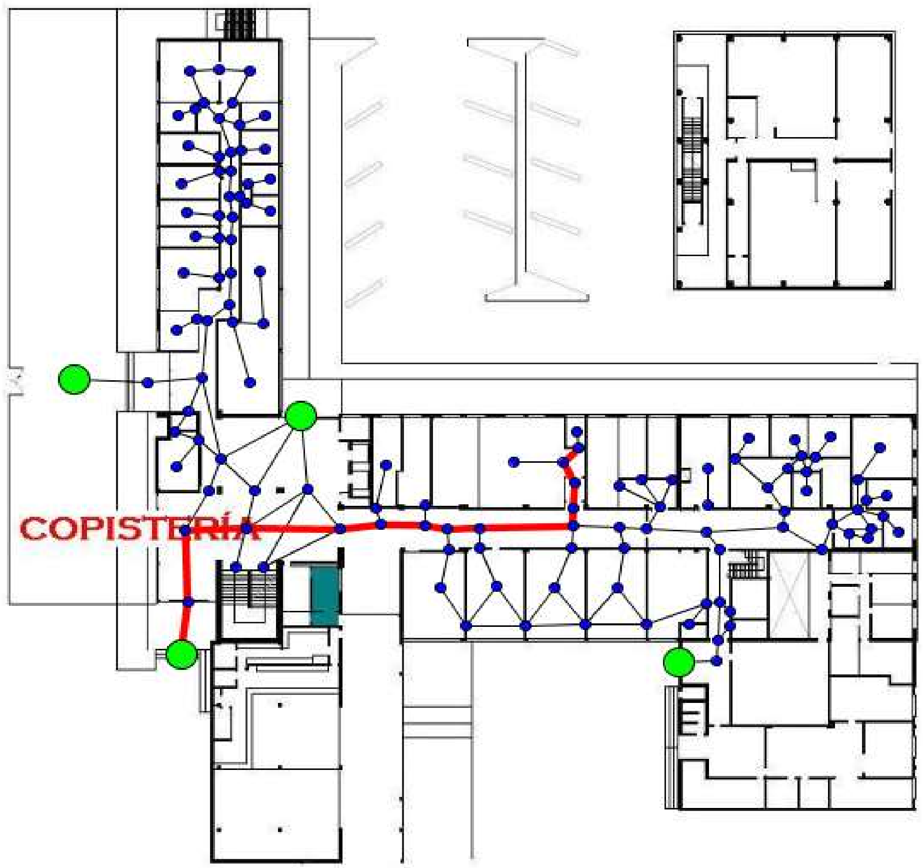
¿Cómo diseñar un plan de evacuación de forma interactiva?



PROBLEMAS

RECORRIDOS DE EVACUACIÓN

¿Cómo diseñar un plan de evacuación de forma interactiva?



Problema del viajante

EL VIAJANTE

Un representante de comercio, con sede en una ciudad A, debe visitar una serie de clientes establecidos en distintas ciudades de manera que su itinerario tenga como principio y fin la ciudad de residencia.

¿Que ruta deberá seguir con el fin de minimizar costes, es decir pasar una sola vez por cada ciudad haciendo el menor número de kilómetros?

Viajante[<Lista de Puntos>]

Problema del viajante

EL VIAJANTE

Un representante de comercio, con sede en una ciudad A, debe visitar una serie de clientes establecidos en distintas ciudades de manera que su itinerario tenga como principio y fin la ciudad de residencia.

¿Que ruta deberá seguir con el fin de minimizar costes, es decir pasar una sola vez por cada ciudad haciendo el menor número de kilómetros?

Viajante[<Lista de Puntos>]

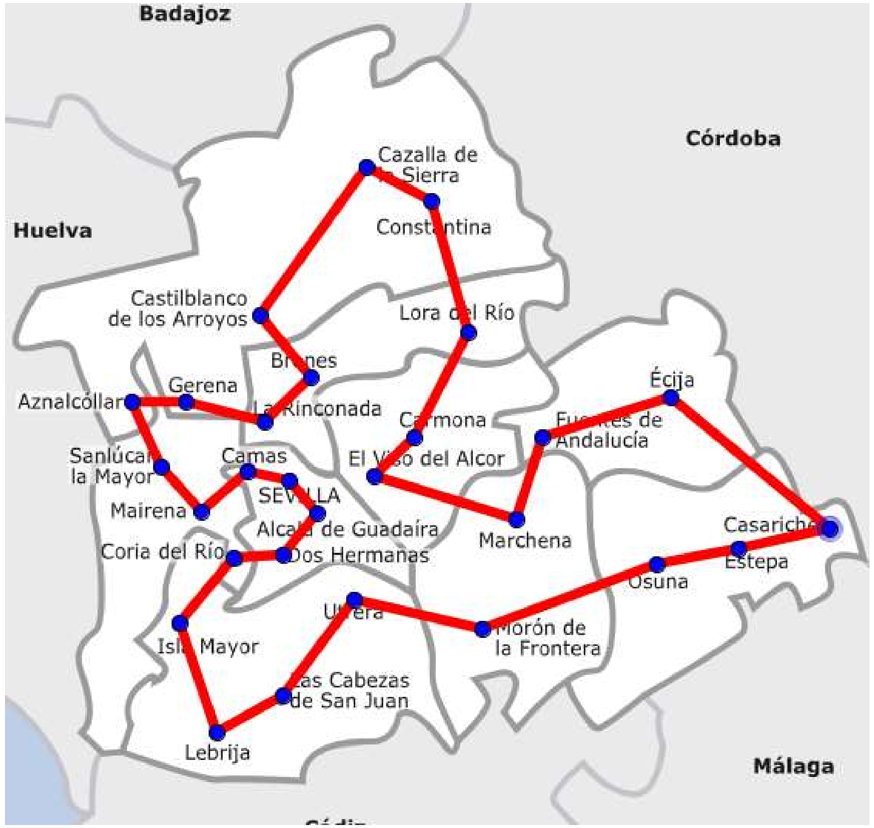


Diagrama de Voronoi

LA CENTRAL DE RESIDUOS

Se quiere colocar una central incineradora de residuos sólidos urbanos que recoja la basura de una serie de poblaciones.

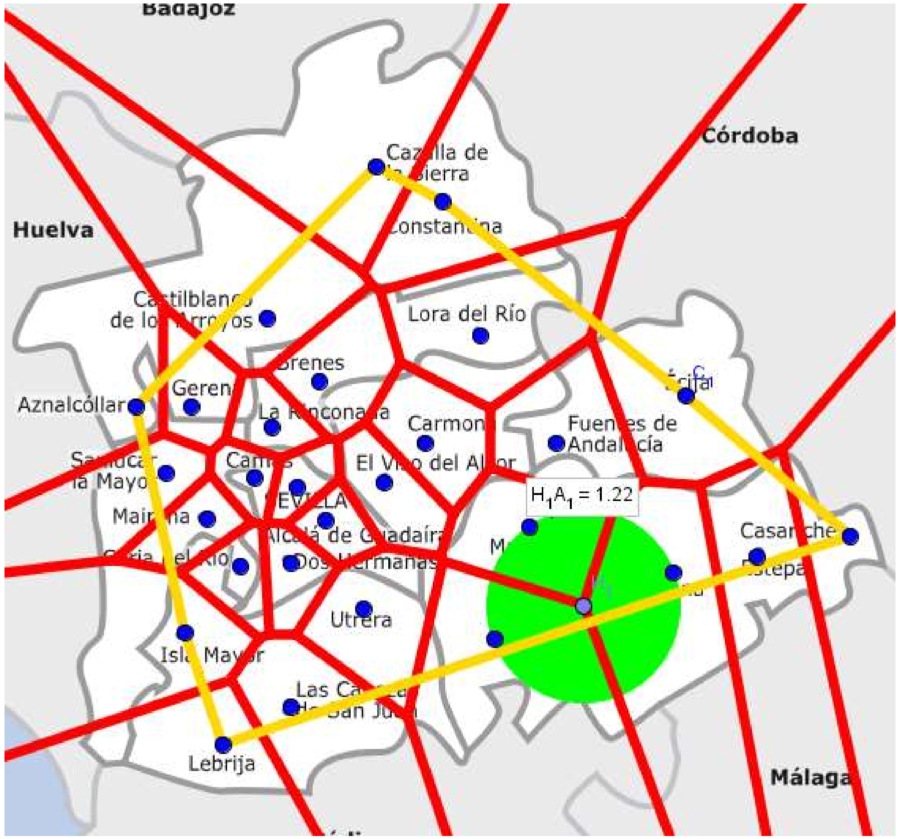
¿Cuál sería el punto más justo para colocar la central?

Diagrama de Voronoi

LA CENTRAL DE RESIDUOS

Se quiere colocar una central incineradora de residuos sólidos urbanos que recoja la basura de una serie de poblaciones.

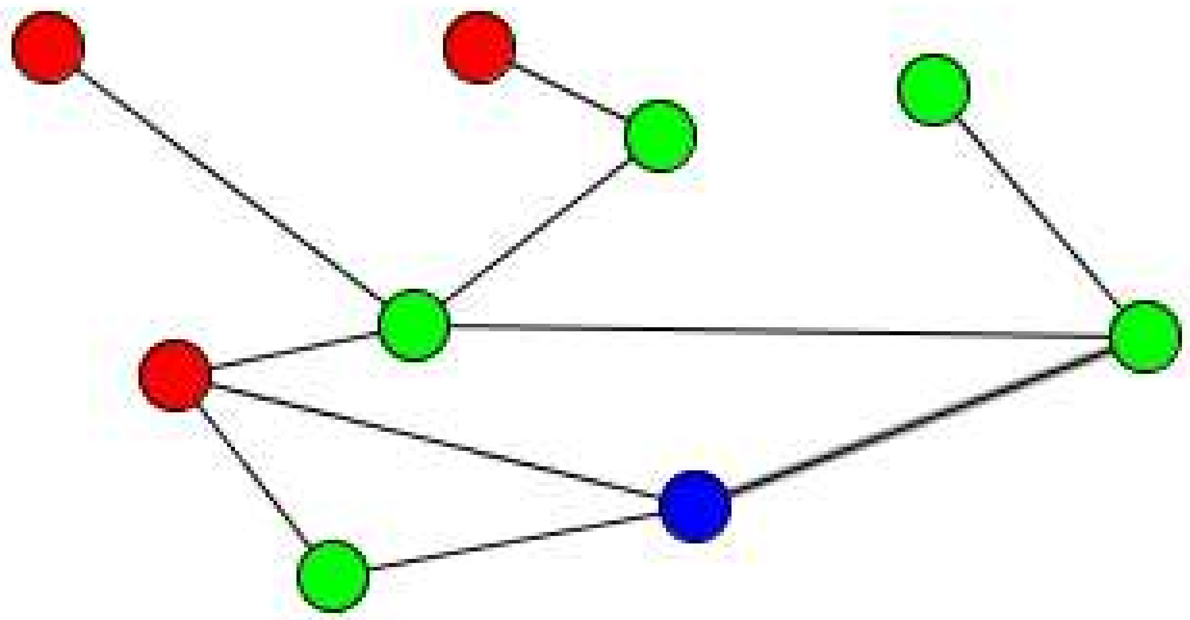
¿Cuál sería el punto más justo para colocar la central?



GENERANDO NUEVAS HERRAMIENTAS

- Coloreado de grafos.
- Grafos aleatorios.
- Curvas de Bézier.
- Algoritmo de Dijkstra.

COLOREADO DE GRAFOS



PROBLEMAS

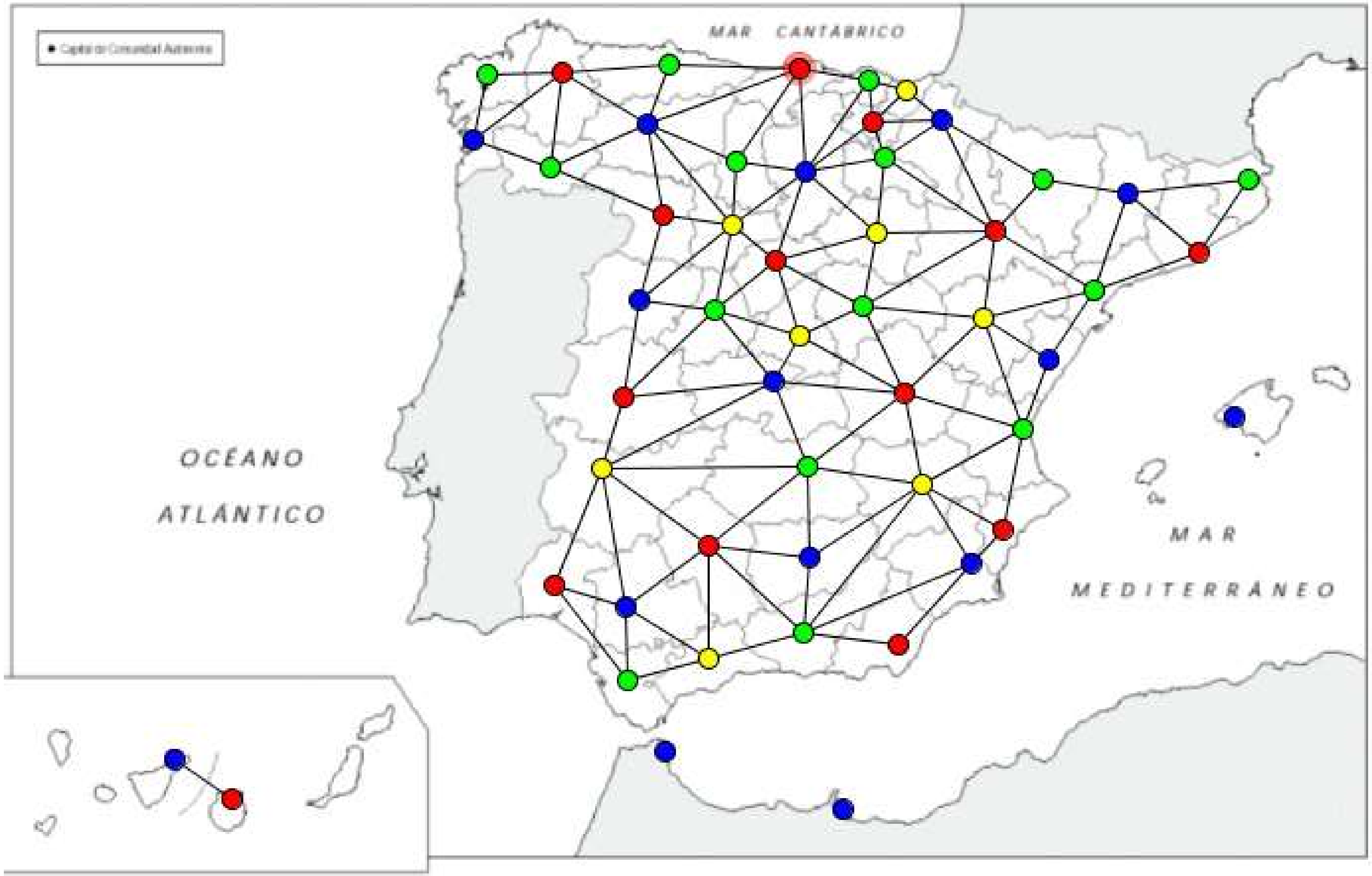
LOS CUATRO COLORES

¿Se puede colorear el mapa de España usando cuatro colores sin que dos provincias que sean limítrofes estén coloreadas con el mismo color?

PROBLEMAS

LOS CUATRO COLORES

¿Se puede colorear el mapa de España usando cuatro colores sin que dos provincias que sean limítrofes estén coloreadas con el mismo color?

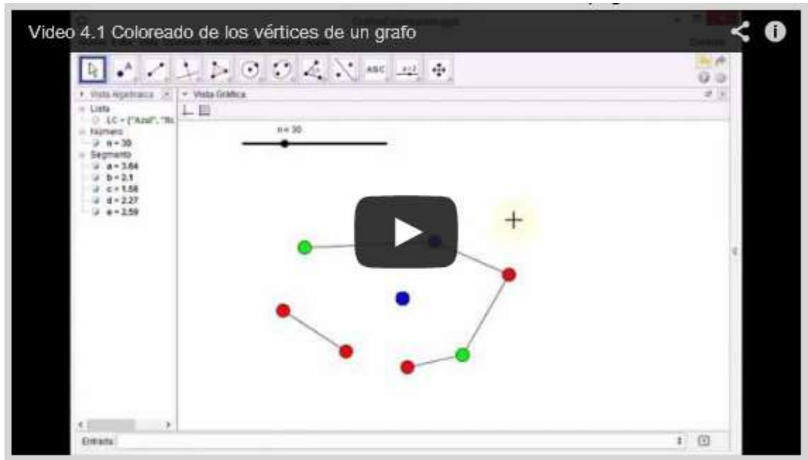


COLOREADO DE GRAFOS

- Crear un deslizador ***n*** con enteros de **1** a **100**.
- Definir el punto **(0,0)** en la casilla **A1** de la hoja de cálculo.
- Escribir el valor **0** en la casilla **B1**.
- Crear una lista **LC={"Azul", "Rojo", "Verde"}** .
- En la solapa "Al hacer clic" del punto **A1** escribir el guión scripting

B1=Resto[B1+1,Longitud[LC]]
Color[A1,Elemento[LC,B1+1]]

- Seleccionar las casillas **A1** y **B1** y estirar el control de relleno hasta la fila **100**.

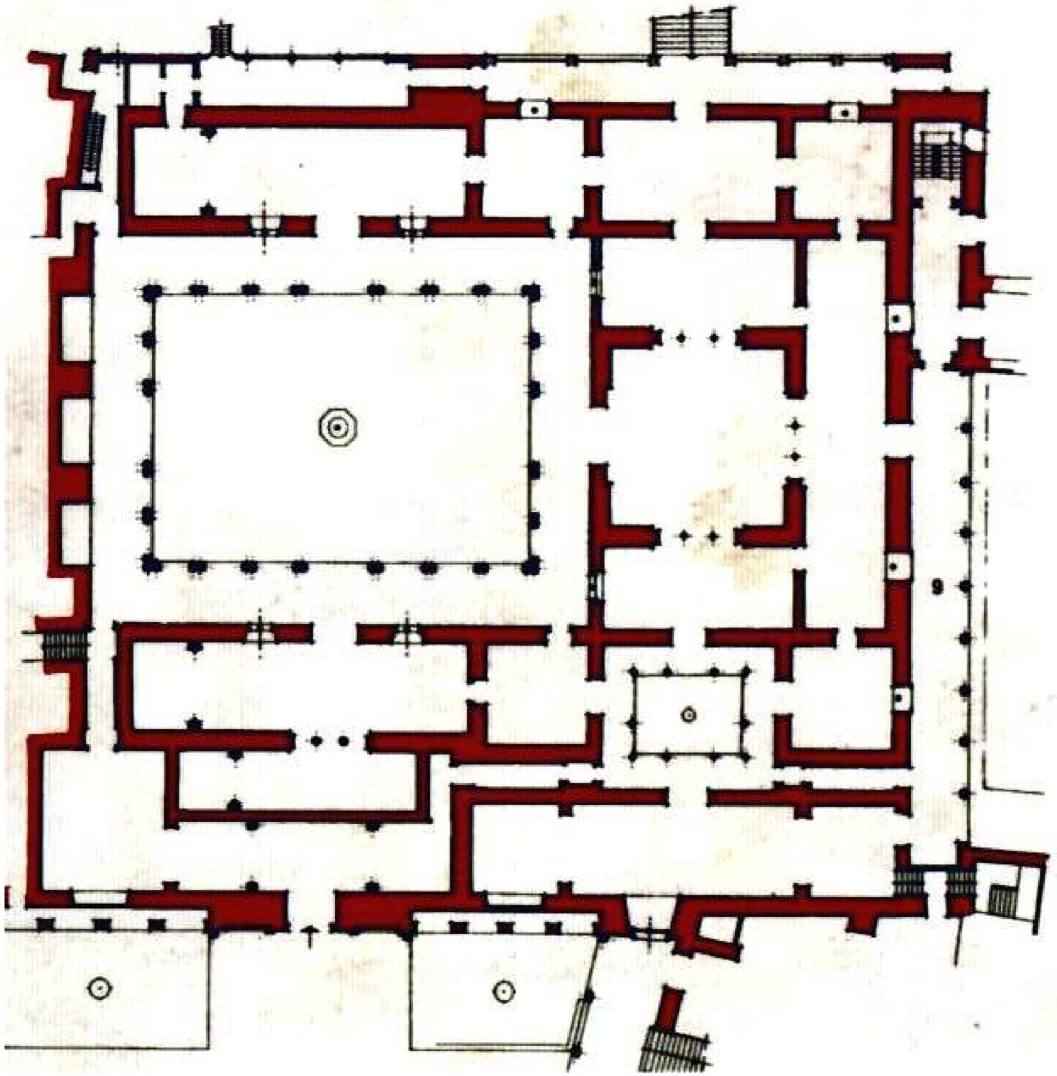


https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=Ltf6sGoxntI

PROBLEMAS

LA GALERÍA DE ARTE

¿Cuántos guardianes son suficientes para cubrir la vigilancia del interior del Palacio del Rey Don Pedro en el Alcázar de Sevilla?

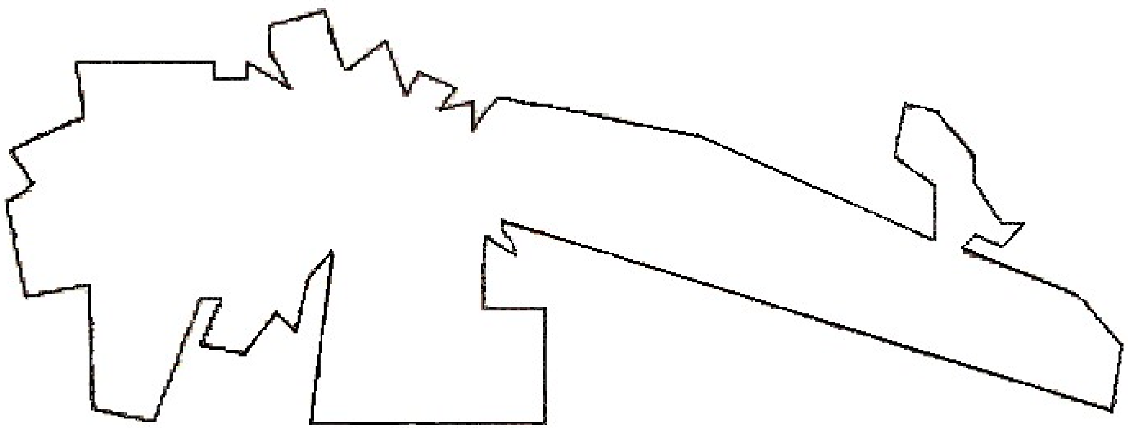


PROBLEMAS

LA GALERÍA DE ARTE

Teorema de la Galería de Arte:

Son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardianes para ver todo el interior de un polígono de n lados.

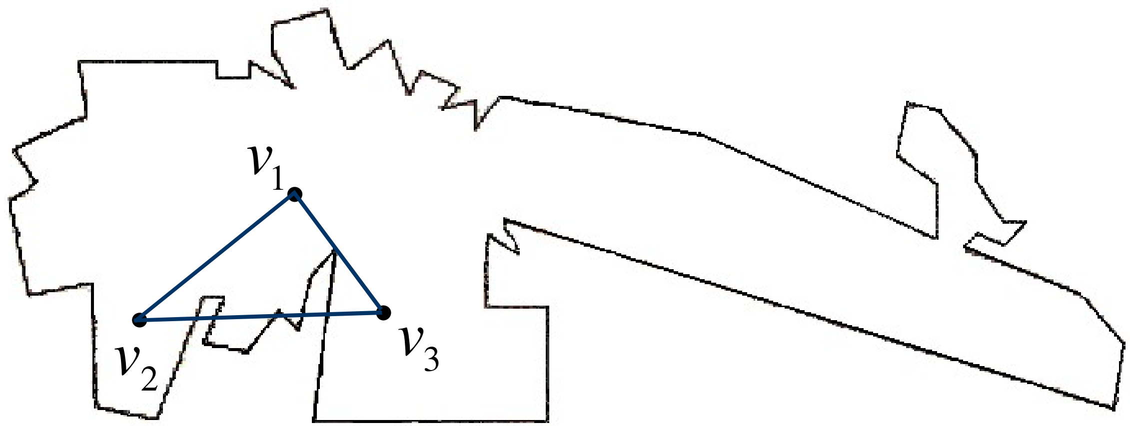


PROBLEMAS

LA GALERÍA DE ARTE

Teorema de la Galería de Arte:

Son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardianes para ver todo el interior de un polígono de n lados.



v_1 y v_2 se ven

v_1 y v_3 se ven

v_2 y v_3 no se ven

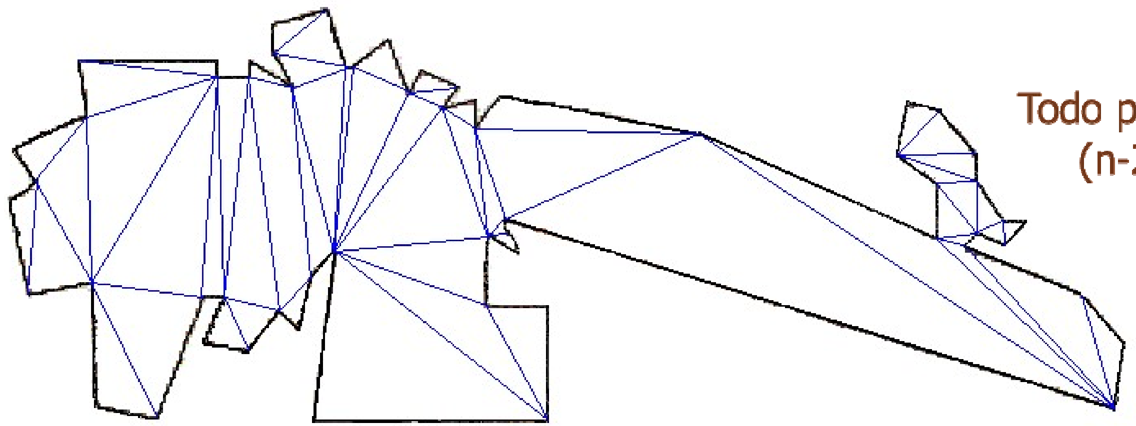
PROBLEMAS

LA GALERÍA DE ARTE

Teorema de la Galería de Arte:

Son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardianes para ver todo el interior de un polígono de n lados.

a) Triangulación del polígono.



Todo polígono admite una triangulación
(n-2 triángulos y n-3 diagonales)

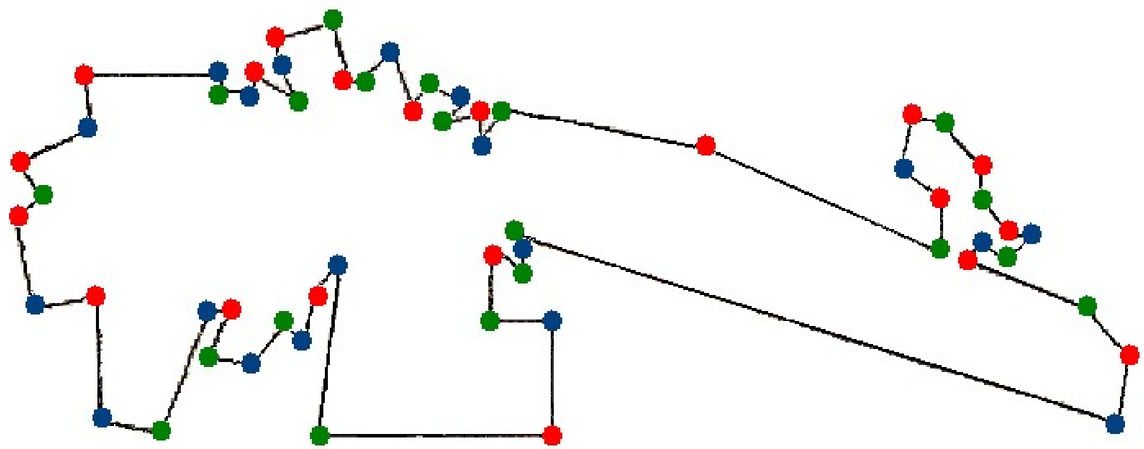
En el ejemplo, polígono de 59 vértices

LA GALERÍA DE ARTE

Teorema de la Galería de Arte:

Son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardianes para ver todo el interior de un polígono de n lados.

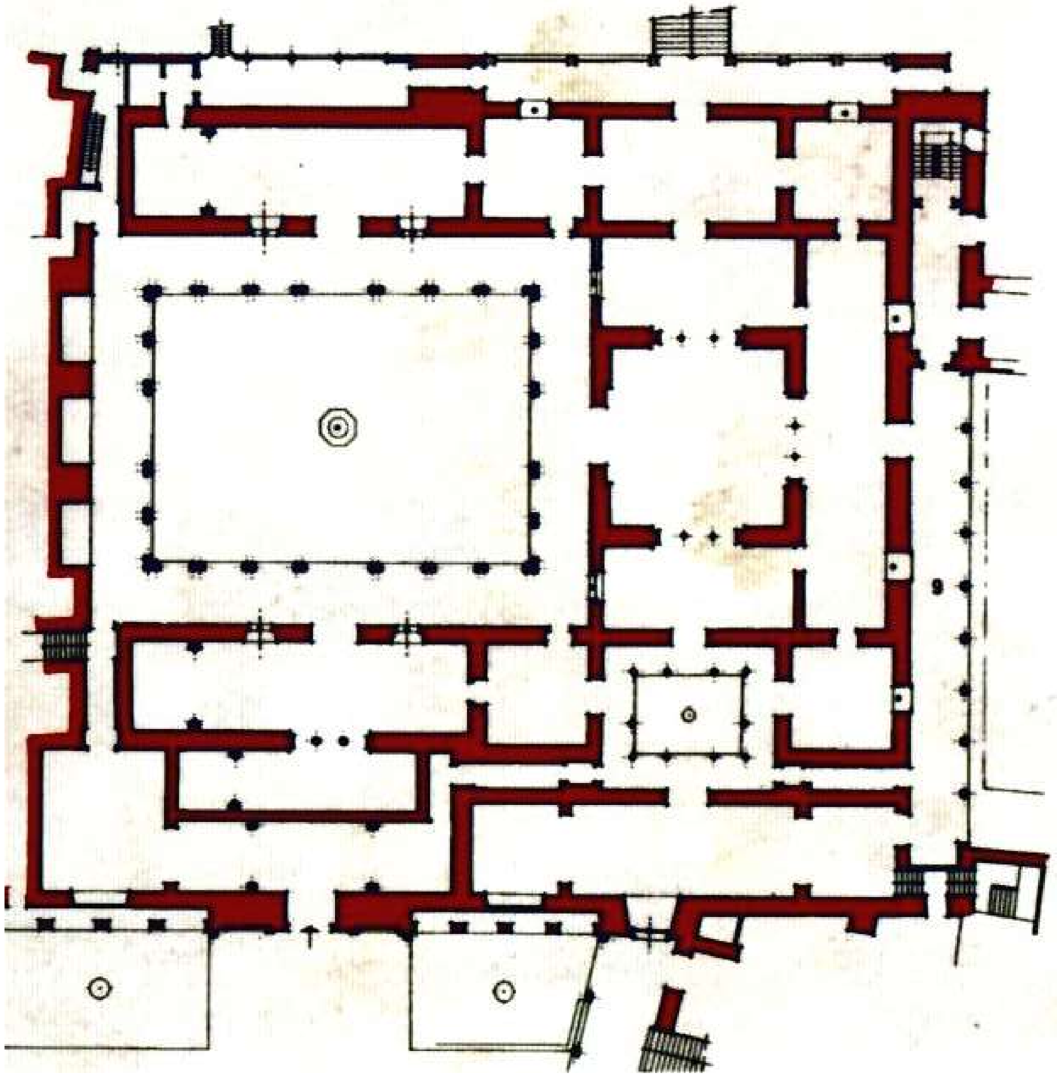
b) 3-vértice-coloración del grafo de triangulación del polígono.



PROBLEMAS

LA GALERÍA DE ARTE

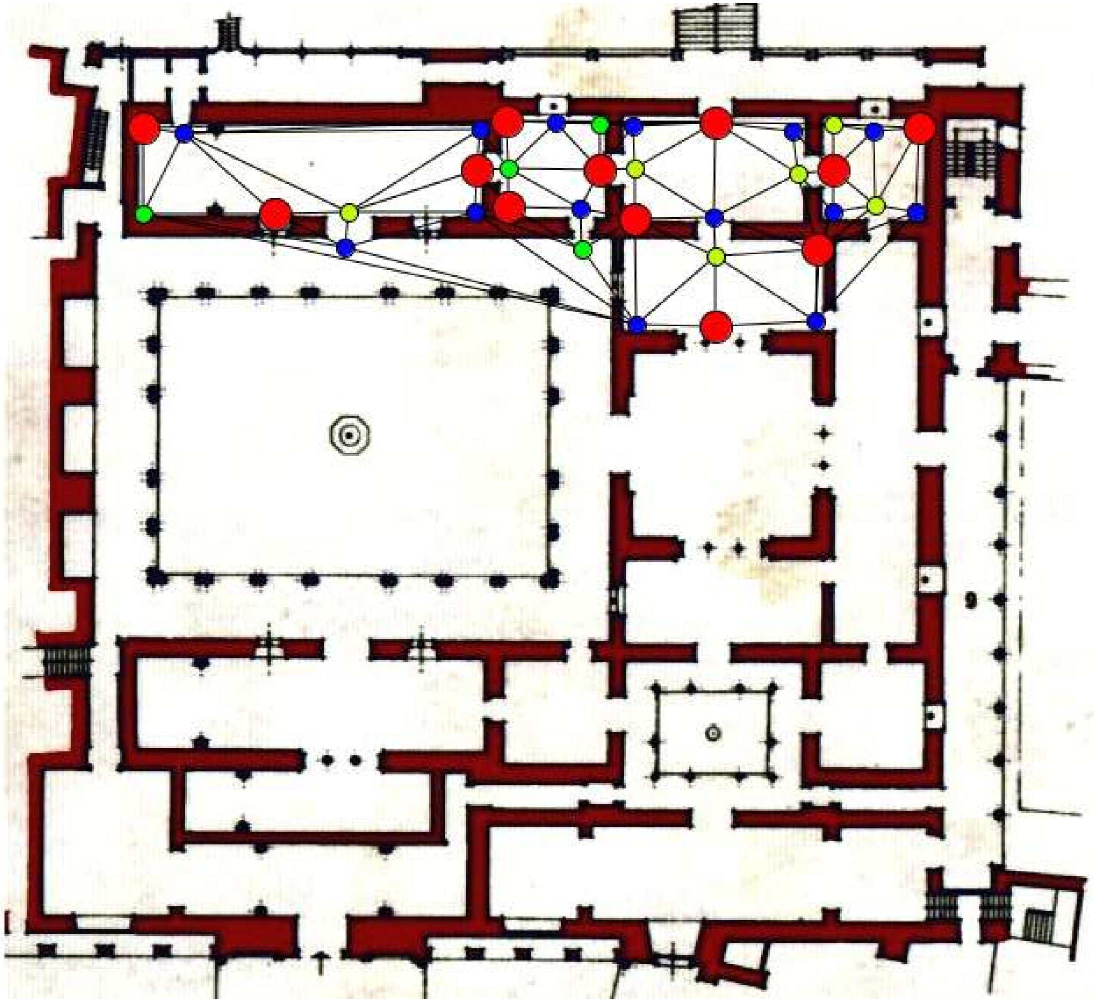
¿Cuántos guardianes son suficientes para cubrir la vigilancia del interior del Palacio del Rey Don Pedro en el Alcázar de Sevilla?



PROBLEMAS

LA GALERÍA DE ARTE

¿Cuántos guardianes son suficientes para cubrir la vigilancia del interior del Palacio del Rey Don Pedro en el Alcázar de Sevilla?

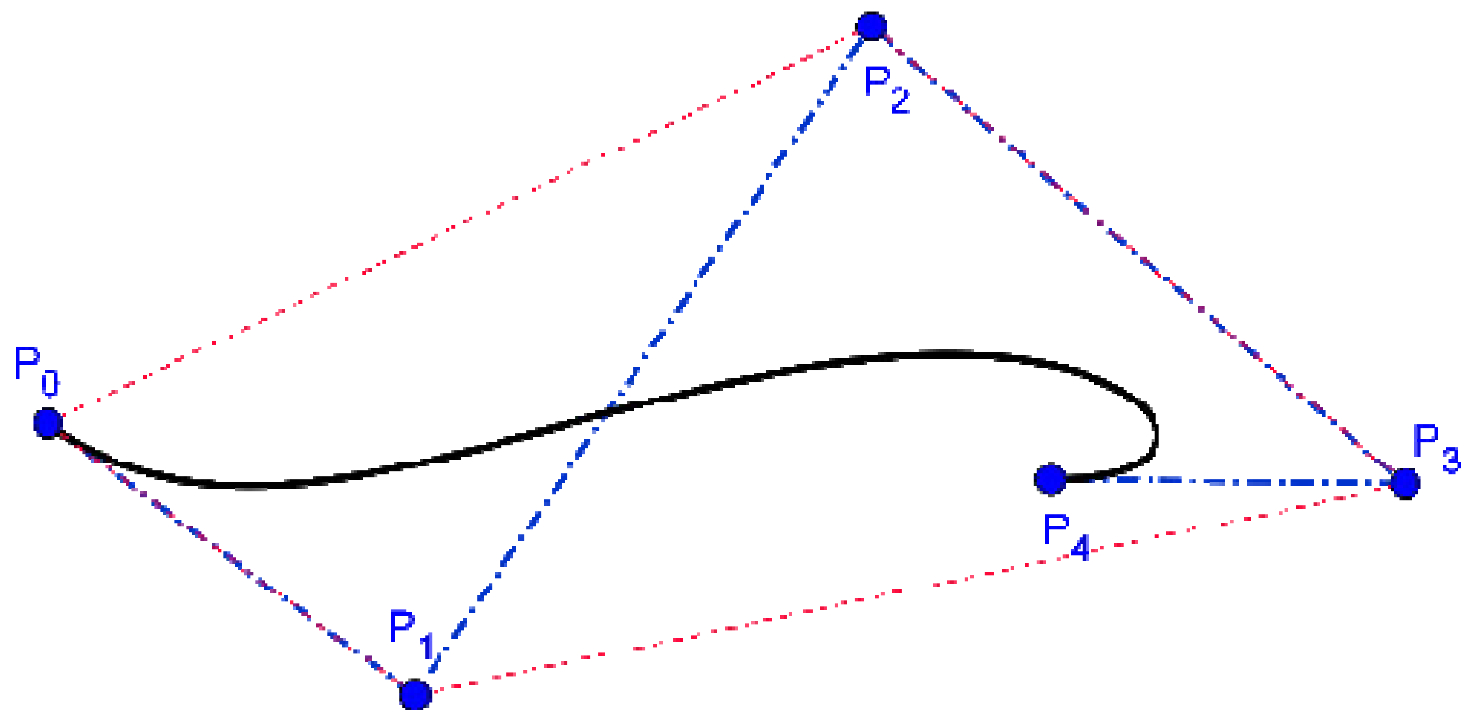


Curvas de Bézier

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

En los sistemas CAD se hace uso de las denominadas **curvas de Bézier**, que son un tipo de curvas *splines* o curvas definidas a trozos mediante polinomios, basadas en unos puntos de control tales que cualquier transformación afín de la curva coincide con la curva de Bézier de los transformados de estos puntos.

Las curvas de Bézier se encuentran en la envolvente convexa de sus puntos de control.



Curvas de Bézier

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

- Definir una lista de puntos: **Puntos={A,B,...}**

- Definir el número **n = Longitud[Puntos]**

- Definir las listas siguientes:

T = Secuencia[NúmeroCombinatorio[n - 1, i] x^i (1 - x)^(n - 1 - i), i, 0, n - 1]

Px = Secuencia[x(Elemento[Puntos, i]) Elemento[T, i], i, 1, n]

Py = Secuencia[y(Elemento[Puntos, i]) Elemento[T, i], i, 1, n]

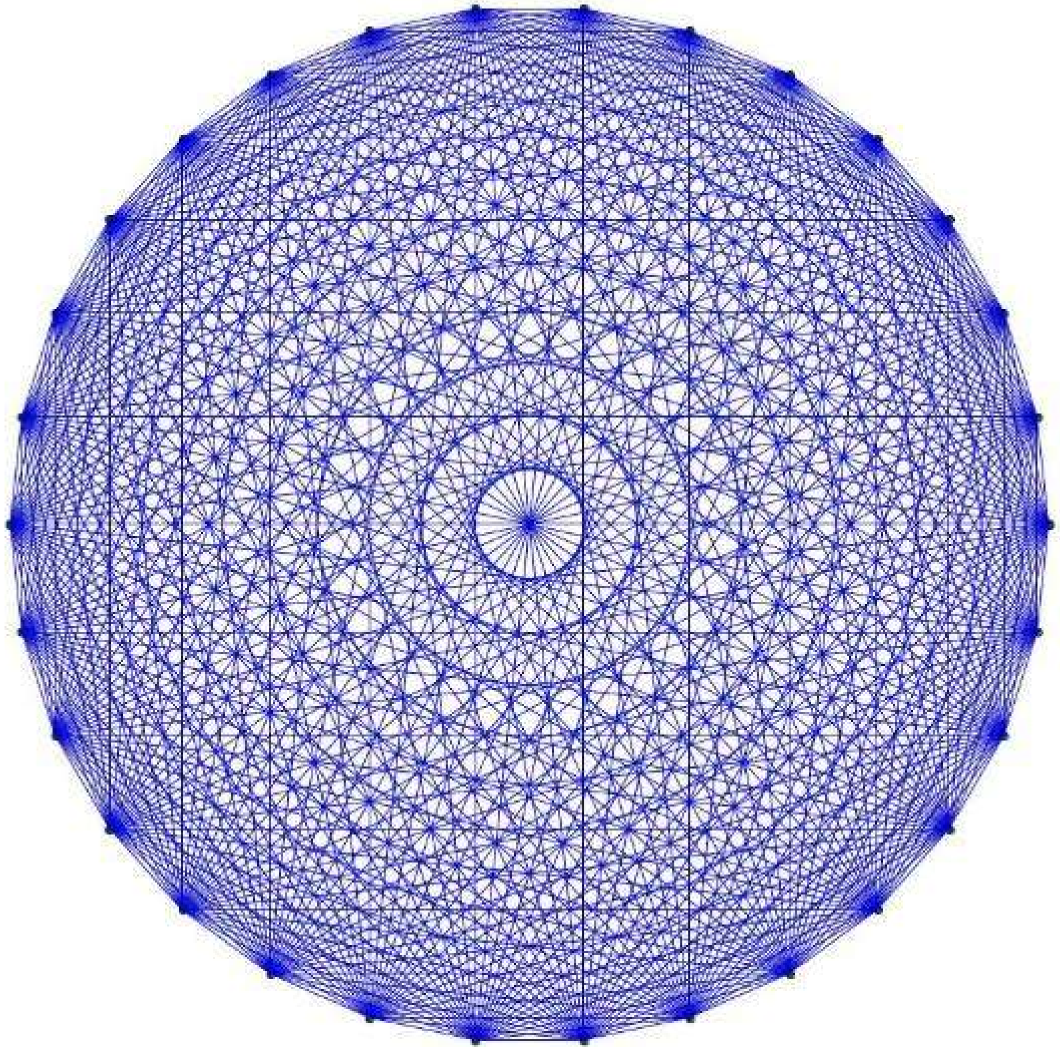
- Definir las funciones siguientes:

Sx(x) = Suma[Px]

Sy(x) = Suma[Py]

- Definir la curva de Bézier: **b=Curva[Sx(t), Sy(t), t, 0, 1]**

Generación de grafos aleatorios



Generación de grafos aleatorios

- Crear un deslizador **n** asociado al número de vértices.

- Definir la secuencia de vértices:

  V = Secuencia[cos(2k π / n) + ί sen(2k π / n), k, 0,n].

- Crear un deslizador **p** con valores en [0,1], asociado a la probabilidad de que exista una arista entre un par de vértices dado.

- Definir las secuencia aleatoria asociada a la matriz de:

  M=Secuencia[Secuencia[Si[i==j,0,BinomialAleatoria[1,p]],j,1,n],i,1,n]

- Definir las secuencia de aristas del grafo:

  A = Secuencia[Secuencia[Si[Elemento[M,i,j]≠0,Vector[Elemento[V,i], Elemento[V,j]]],j,1,n],i,1,n]

REFERENCIAS

- R. M. Falcón y R. Ríos. ***Usando GeoGebra en teoría de grafos***. Actas del II Encuentro en Andalucía de GeoGebra en el Aula. Córdoba, 2013.

- R. M. Falcón, Á. Moreno, R. Ríos, ***Designing evacuation routes with GeoGebra***. GeoGebra : The New Language for the Third Millennium (GeoGebra International Journal of Romania), Vol. 4, No. 2 (2015), 25-38.

- R. M. Falcón, R. Ríos, ***The use of GeoGebra in Discrete Mathematics***. GeoGebra : The New Language for the Third Millennium (GeoGebra International Journal of Romania), Vol. 4, No. 1 (2015), 39-50.