

AleatorioEntre[m,M]

Raúl Manuel Falcón Ganformina¹ rafalgan@us.es
Ricardo Ríos Collantes de Terán² profesofricardo@yahoo.es

¹E.T.S. de Ingeniería de Edificación. Universidad de Sevilla. Dpto. Matemática Aplicada I.

²I.E.S. Sofía. (Jerez de la Frontera - Cádiz)

Resumen

Uno de los comandos más versátiles a la hora de trabajar y elaborar material didáctico con GeoGebra es *AleatorioEntre[m,M]*. En esta comunicación se exponen algunas de las aplicaciones que tiene este comando a partir de diferentes ejemplos relacionados tanto con contenidos de Estadística y Probabilidad, como de Análisis o Geometría.

1. Introducción

A la hora de experimentar en el aula contenidos de Estadística y Probabilidad haciendo uso de herramientas informáticas, se hace necesaria y recomendable la utilización de comandos aleatorios. Estos comandos existen prácticamente en todas las aplicaciones informáticas relacionadas con las Matemáticas. Así, por citar un par de ejemplos en software libre, el comando *random(n)* devuelve en wxMaxima un número aleatorio entre 0 y $n - 1$. Por su parte, la hoja de Cálculo de OpenOffice dispone de los comandos *ALEATORIO*, que genera un número aleatorio comprendido entre 0 y 1, y *ALEATORIO.ENTRE(Menor;Mayor)*, que cumple la misma función pero entre dos números fijados. La aplicación GeoGebra también dispone de comandos análogos a los dos últimos citados: *random()* y *AleatorioEntre[m,M]*. Estos comandos son muy utilizados a la hora de trabajar o elaborar, no sólo actividades de Probabilidad y Estadística, sino de cualquier bloque de Matemáticas en general. Cabe destacar en este sentido dos tipos de ejercicios. Por una parte, actividades de investigación donde el alumnado tiene que sacar conclusiones a través de la experimentación, desarrollando al mismo tiempo la competencia de Aprender a Aprender y, por otra, tareas de repetición donde tiene que practicar una determinada técnica para desarrollar la competencia matemática en cuestión. En la presente comunicación se muestran algunos ejemplos de ambos tipos de actividades.

2. Actividades de Estadística y Probabilidad.

GeoGebra posibilita diseñar experimentos aleatorios basados en las distribuciones binomial, normal y de Poisson, al disponer de comandos que generan números aleatorios siguiendo dichas distribuciones: *BinomialAleatorio[n,p]*, *NormalAleatorio[media, desviación típica]* o *PoissonAleatorio[media]*. Así por ejemplo, si queremos generar un experimento aleatorio con 300 individuos basada en una distribución normal $N(\mu,\delta)$, podríamos proceder de dos modos:

1. Generando una lista: *Secuencia[NormalAleatorio[μ,δ],i,1,300]*.
2. Utilizando la hoja de cálculo, escribiendo para ello *NormalAleatorio[μ,δ]* en las celdas A1, A2 y A3, y arrastrando el control de relleno hasta la celda A300 (vease Figura 1).

En ambos casos se puede comprobar el ajuste obtenido haciendo uso de los comandos *Media[<lista>]* y *Varianza[<lista>]*. Este procedimiento es muy útil a la hora de generar muestras aleatorias que siguen el patrón teórico de una determinada población, sin necesidad de proceder a un estudio muestral de campo, con el consecuente ahorro de tiempo que conlleva. Cabe mencionar el posible uso de GeoGebra en este sentido en niveles educativos superiores. Así por ejemplo, desde el Curso Académico 2009-2010, en los Másteres de

Seguridad y de Gestión de la Edificación de la Universidad de Sevilla, el alumnado viene realizando simulaciones estadísticas y probabilísticas en GeoGebra en asignaturas tales como Ergonomía, Control de Accidentes y Control de Calidad.

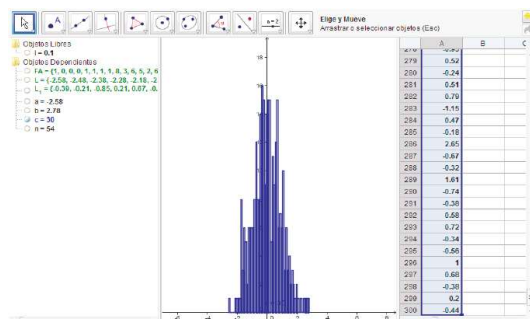


Figura 1: Experimento aleatorio en GeoGebra siguiendo una distribución normal.

GeoGebra tiene incorporada la función `random()` que genera un número aleatorio entre 0 y 1. Una posible aplicación de este comando es el cálculo aproximado de áreas haciendo uso del Método de Monte Carlo como se describe a continuación (véase Figura 2). Así por ejemplo, para aproximar el área de $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ entre $x = 1$ y $x = 4$, seguimos los siguientes pasos:

1. Introducimos $f(x)$ en la barra de entrada. Creamos los puntos $A = (1,0)$, $B = (4,0)$, $C = (4, 2.25)$ y $D = (1, 2.25)$ y los unimos mediante la herramienta *Polígono*.
2. Creamos un deslizador n asociado al número de puntos aleatorios, en el intervalo $[1,500]$, con incremento 1.
3. Creamos la lista de puntos aleatorios introduciendo en la barra de entrada:
 $L1 = \text{Secuencia}[1 + 3 \cdot \text{random}(), 2.25 \cdot \text{random}(), i, 1, n]$
4. Obtenemos el número de puntos que quedan por debajo de la gráfica, introduciendo:
 $L = \text{Secuencia}[\text{Si}[f(x(\text{Elemento}[L1, i])) > y(\text{Elemento}[L1, i])], 1, 0], i, 1, n]$
 $N = \text{Suma}[L]$
5. Obtenemos el valor exacto del área, calculando la integral: $\text{Integral}[f(x), 1, 4]$
6. Obtenemos la aproximación escribiendo: $\text{Aprox} = (4 - 1) \cdot 2.25 \cdot N/n$
7. Desplazamos el deslizador para determinar el número de puntos aleatorios o pulsamos *F9* para generar otra secuencia de puntos.

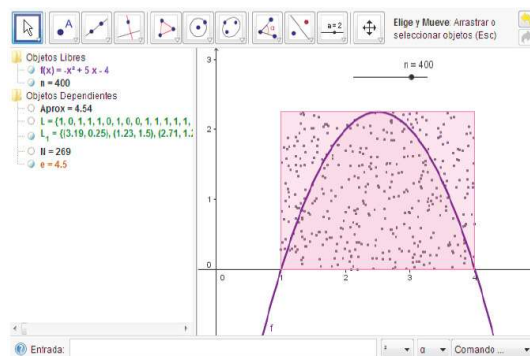



Figura 2: Cálculo aproximado de áreas en GeoGebra usando el método de Monte Carlo.

3. Visualizando la aleatoriedad.

GeoGebra también puede utilizarse para generar presentaciones visuales de problemas matemáticos (Barrena et al., 2010). En este sentido, el comando *AleatorioEntre*[*m,M*] puede ser de gran utilidad. Así por ejemplo, la recreación del lanzamiento de una ruleta puede realizarse complementándose dicho comando con una de las nuevas herramientas que aparecen en la versión 4 de GeoGebra. Concretamente la herramienta  **Inserta Botón** situada junto a la herramienta *deslizador* y *casilla de control*. Con esta herramienta se inserta un Botón en la ventana de GeoGebra que puede realizar las mismas funciones que los botones que aparecen en las páginas webs.

A continuación se describe el proceso de generación de una ruleta en GeoGebra con movimiento aleatorio (véase Figura 3):

1. Desactivamos los **ejes** y la **cuadrícula**. La construcción consiste en utilizar el movimiento de rotación de una imagen cuyo ángulo dependa de un deslizador. Fijamos primero el número de grados que va a recorrer desde que empieza a moverse hasta que se para. Por ejemplo, $n = \text{AleatorioEntre}[4, 10] \cdot 360 + \text{AleatorioEntre}[0, 359]$. Es decir, dará entre 4 y 10 vueltas completas y después se parará en un determinado ángulo entre 0 y 359.
2. Creamos el **deslizador** *a* desde 0 hasta 1000, con un **incremento** de 0.001 y una **velocidad de animación** de 0.001 que **repite incrementando**. Ponemos 1000 para que tarde bastante en empezar la repetición.
3. Insertamos la imagen de una ruleta construida con GeoGebra y la insertamos en la zona gráfica.
4. Con la herramienta correspondiente, rotamos la imagen con respecto a su centro $f(a)^\circ$ donde *f* es la siguiente función: que se introduce en la barra de entrada como:
$$f(x) = \text{Si}[x < 1, n \cdot (x - 1) + 1 + n, n]$$
5. A continuación creamos el botón. Ponemos como **subtítulo** *Lanza* y en el cuadro de **Guión (Script) GeoGebra**:
$$a = 0$$
$$n = \text{AleatorioEntre}[4, 10] \cdot 360 + \text{AleatorioEntre}[0, 359]$$
Escribiendo esto estamos indicando que cuando se pulse el botón *Lanza* con el modo **Elige y Mueve**, el deslizador pasará a valer 0 y el número de grados que gira la ruleta se recalculará de manera aleatoria.
6. Finalmente activamos la **animación automática** y ocultamos la función, la imagen inicial, el centro de la imagen y el deslizador. Cada vez que pulsemos el botón *Lanza* estaremos haciendo un simulacro de lanzamiento.

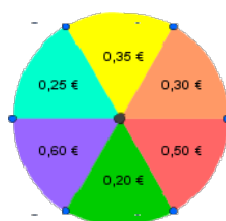


Figura 3: Ruleta generada en GeoGebra con movimiento aleatorio.

Una última aplicación que veremos en esta sección es la generación de un camino aleatorio tridimensional, cuyos tramos sean paralelos a los ejes coordenados. Nos basamos para ello en una plantilla 3D que proyecte ortográficamente en GeoGebra puntos del espacio en el plano a partir de los ángulos de Euler (Losada, 2009). La construcción en GeoGebra (Figura 4) se puede hacer siguiendo estos pasos:

1. Creamos un deslizador *t* para determinar los tramos del camino.
2. Generamos una lista de *t* números aleatorios del 1 al 6, correspondientes a cada uno de los seis sentidos posibles: $S = \text{Secuencia}[\text{AleatorioEntre}[1, 6], i, 1, t]$

3. Creamos una matriz con los seis sentidos posibles, $M=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1)\}$, y generamos la lista de vectores aleatorios asociados a $S: V = \text{Secuencia}[\text{Elemento}[M, \text{Elemento}[S, i]], i, 1, t]$.
4. Generamos por último una matriz con los t puntos del camino aleatorio: $\{\text{Secuencia}[\text{Suma}[\text{Secuencia}[\text{Elemento}[\text{Elemento}[V, i], 1], i, 1, j]], j, 1, t], \text{Secuencia}[\text{Suma}[\text{Secuencia}[\text{Elemento}[\text{Elemento}[V, i], 2], i, 1, j]], j, 1, t], \text{Secuencia}[\text{Suma}[\text{Secuencia}[\text{Elemento}[\text{Elemento}[V, i], 3], i, 1, j]], j, 1, t]\}$

Cada columna de la última matriz corresponde a un punto tridimensional que puede proyectarse ortográficamente en nuestra plantilla. Pulsando $F9$ o moviendo el deslizador t conseguiremos nuevos caminos aleatorios.

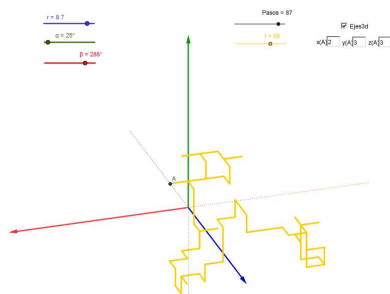


Figura 4: Camino aleatorio tridimensional en GeoGebra.

4. Otras actividades.

A la hora de generar una actividad en GeoGebra es usual crear una plantilla genérica que posibilite realizar cambios posteriores para crear actividades similares. La posibilidad de generar números aleatorios en GeoGebra facilita este hecho si previamente definimos una base de datos con los posibles objetos a estudiar. Así por ejemplo, en el estudio analítico de funciones es posible crear una base de datos de funciones aleatorias en una misma hoja de trabajo (Barrena et al., 2011), como se ilustra en la Figura 5. Esto permite generar fácilmente actividades a partir de una única plantilla, como por ejemplo, hacer el estudio analítico completo de una función que surge de forma aleatoria entre varias¹. De esta forma, todo el alumnado trabaja con el mismo archivo, pero cada cual con su propia función.

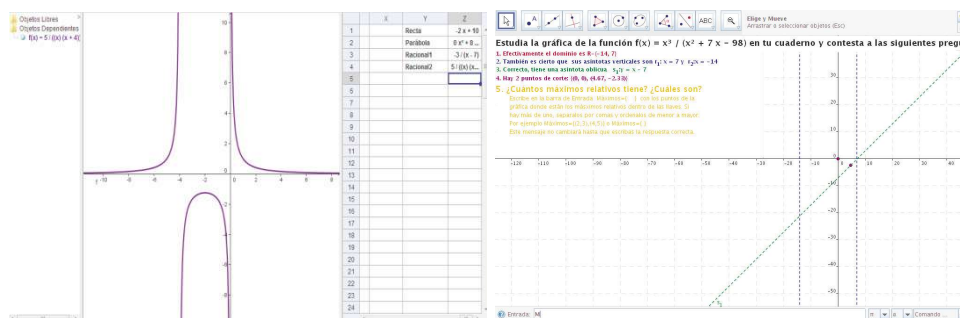


Figura 5: Base de datos de funciones aleatorias.

En la red se pueden encontrar muchas actividades de investigación creadas con GeoGebra. Con estas actividades se pretende que el alumnado, experimentando sobre una ventana de GeoGebra y con unas preguntas guiadas, sea capaz de extraer conclusiones por sí

¹<http://www.geogebra.org/en/upload/index.php?action=downloadfile&filename=Analisis.ggb&directory=spanish/omthales/JornadasGeoGebra2011&>

mismo. Por ejemplo, en “El problema de los cumpleaños”² (Sada, 2010), el autor combina el comando *Secuencia[]* con *AleatorioEntre[]* para obtener n fechas aleatorias de cumpleaños: $Secuencia[AleatorioEntre[1, 365], k, 1, n]$. En este sentido, en la siguiente actividad que presentamos, se ha construido una página web en donde están definidos tres puntos A , B y C con el comando aleatorio y se pretende que el alumnado encuentre, al hacer las actividades de la página, la condición analítica que tienen que cumplir las coordenadas de tres puntos para que estén alineados.

A la hora de definir entre qué valores varía, posiblemente hay que tener en cuenta distintos aspectos de las variables aleatorias. En este caso se ha tenido en cuenta que la probabilidad de que salgan alineados sea cerca del 50% y además se quería que los puntos no salieran de la zona gráfica. Teniendo en cuenta esto se definieron las variables aleatorias $a=AleatorioEntre[1, 4]$, $b=AleatorioEntre[2, 5]$ y $c=AleatorioEntre[1, 4]$ y el punto aleatorio $A = (AleatorioEntre[-4, 1], AleatorioEntre[-4, 1])$. A partir de ahí se definen los puntos $B = A+(a,b)$ y $C = B + (Máximo[Cociente[c a, b]+AleatorioEntre[0, 1], 1], c)$. El resultado es la página web³ de la Figura 7.

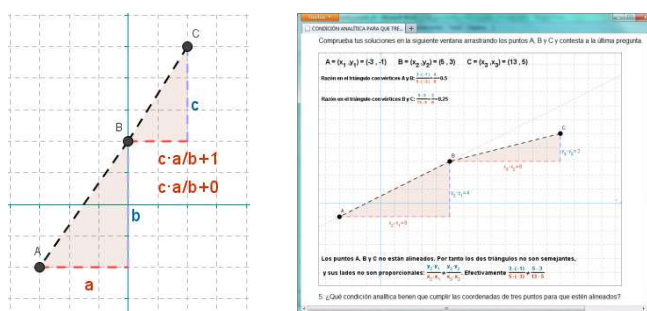


Figura 7: Análisis de puntos aleatorios alineados.

5. Conclusiones

Se han mostrado con ejemplos las distintas utilidades del comando *AleatorioEntre[]* que, en resumen, podemos clasificarlas en: estadística y probabilidad, bases de datos para que el alumnado practique una determinada técnica matemática y actividades de investigación donde el alumnado pueda llegar a extraer conclusiones.

Cabe indicar que, con la nueva versión de GeoGebra 4.2, donde se incorpora el CAS, se podrán generar polinomios con coeficientes aleatorios con el comando *PolinomioAleatorio[n,a,b]*. Este comando generará un polinomio de grado n con coeficientes entre a y b .

Referencias

1. E. BARRENA, R.M. FALCÓN, R. RAMÍREZ y R. RÍOS. *Presentación y resolución dinámica de problemas mediante GeoGebra*. Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática 25 (2011), pp. 161-174.
2. E. BARRENA, R.M. FALCÓN, R. RAMÍREZ y R. RÍOS. *Aplicaciones de GeoGebra al Análisis*, Actas de las II Jornadas sobre Geogebra de Andalucía. Huelva, 2011.
3. R. LOSADA. *GeoGebra avanzado*, Seminario Intergeo/GeoGebra. Castro-Urdiales, 2009.
4. M. SADA. *Ejemplos diversos de webs interactivas de Matemáticas*. 2010. [En línea] <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm> [Consulta: 17 de marzo de 2012].

² http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/azar_cumple.htm

³ http://personal.us.es/raufalgan/geogebra_OMT_archivos/puntos_alineados.html