# Las raíces bohemias de Bolzano

Raúl Manuel Falcón Ganfornina[1] rafalgan@us.es


## Resumen

Las distintas herramientas que ofrece GeoGebra pueden ser aprovechadas a la hora de abordar de una forma visual y dinámica problemas no necesariamente geométricos, como pueden ser por ejemplo los vinculados al análisis de funciones. A través de un viaje por la Historia que comienza con los resultados del bohemio Bernard Bolzano (1781-1848), se mostrarán diferentes técnicas a la hora de calcular las raíces de una función continua, así como el área encerrada por su gráfica. Diversos métodos numéricos y probabilísticos serán pues visualizados de una forma dinámica, con vistas a facilitar al alumnado la asimilación de conceptos tradicionalmente vinculados a una enseñanza teórico-algorítmica.

## Abstract

The set of tools of GeoGebra can be used to study, from a visual and dynamical point of view, non-geometrical problems as, for instance, those focused on calculus. A journey through History which starts with the results of the bohemian Bernard Bolzano (1781-1848) will show several techniques to be used in order to obtain the roots of a continuous function and the area bounded by its graph. Several numerical and probabilistic methods will be studied in order to make students easier to assimilate concepts which are traditionally related with a theoretical and algorithmic learning.


## 1. Introducción.

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano nació en 1781 en Praga, capital de la región de Bohemia. Filósofo, teólogo y matemático, en 1817 escribe su tratado *"Rein analytischer…"* (Bolzano, 1817), donde plantea el siguiente resultado:

*"Dadas dos funciones continuas $f$ y $g$ en un intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $f(a)< g(a)$ y $f(b) > g(b)$, existe al menos un valor $c$ en el intervalo abierto $(a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$".*

Como consecuencia, se obtiene el conocido teorema que lleva su nombre:

*"Si $f$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe al menos un valor $c$ en el intervalo abierto $(a,b)$ tal que $f(c) = 0$".*

El valor $c$ es pues una posible raíz de la función $f$ y el Teorema de Bolzano se convierte de forma inmediata en la base del estudio de las raíces de funciones continuas. Visualmente, ambos resultados son fáciles de representar, pues la continuidad suele caracterizarse como la gráfica de una función que resulta al unir dos puntos de la

[1] ETS de Ingeniería de Edificación. Dpto. de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla.

misma, sin levantar el lápiz del papel. En el caso de GeoGebra, bastaría pues *Activar el Trazo* de algún punto (Fig. 1) para visualizar ambos teoremas.

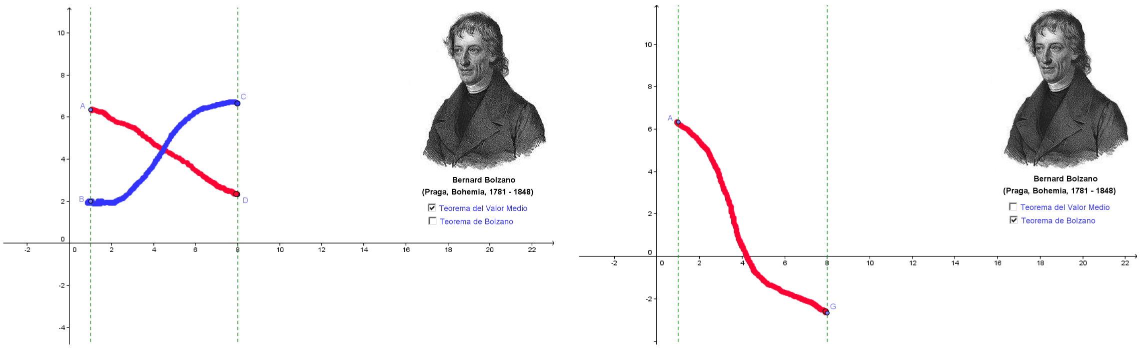


Figura 1: Representación del Teorema del Valor Medio y del Teorema de Bolzano en GeoGebra, moviendo directamente puntos que tienen activados sus rastros.

Normalmente, cuando se plantea el Teorema de Bolzano al alumnado, éste suele unir ambos puntos dando lugar a una única raíz. Cuando se pregunta si pueden existir más raíces, suele dibujar una gráfica con un número impar de raíces (Fig. 2, izquierda). La consulta sobre la existencia de un número par de raíces suele costar más trabajo, pero finalmente se alcanza una representación del tipo mostrado a la derecha en la Figura 2, donde una raíz se consigue sea un máximo o un mínimo de la función.

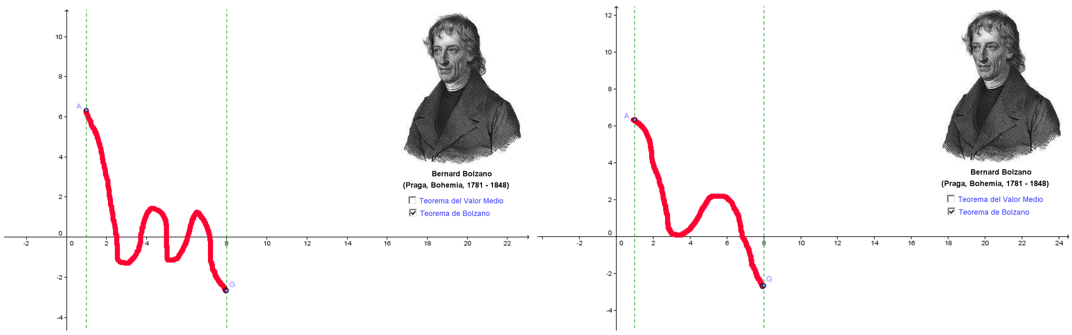


Figura 2: Número impar y "par" de raíces.

Realmente existe un número impar de raíces, puesto que la raíz que hace tangente a la gráfica con el eje OX es doble, ya que, al ser un mínimo de la función, también es raíz de su función derivada. Para analizar este hecho, fijamos sobre el eje OX los dos puntos donde se encuentran el mínimo y el máximo de la gráfica. Dado que la derivada de la función debe anularse en dichos valores, definimos la función $f(x) = -(x-x(P))\ (x-x(Q))$, donde el signo negativo ajusta el crecimiento de la traza. *F = Integral[f]* sería entonces una primitiva de $f$, cuyo mínimo se ajusta definiendo la función $g(x)=F(x)-F(x(P))$. Un mejor ajuste se puede lograr haciendo uso de un deslizador que sea factor multiplicador sobre $g$. La función resultante es un polinomio de grado 3, que consta pues de tres raíces, atendiendo al Teorema Fundamental del Álgebra, probado por primera vez de forma constructiva por Karl Weierstrass (1815-1897) en 1891, quien estableció de hecho los conceptos actuales de límite, continuidad y derivabilidad. En concreto, cabe observar que fue Weierstrass el primero en probar el teorema de Bolzano y es por ello que realmente dicho resultado se establece con el nombre de Teorema de Bolzano-Weierstrass.

## 2. Raíces bohemias.

Cabe destacar el hecho de que GeoGebra no trabaja por ahora con un motor de cálculo simbólico, sino que lo hace con algoritmos y métodos numéricos. Esta circunstancia queda patente a la hora de obtener las raíces de una función continua. Si bien GeoGebra posibilita obtener dichas raíces a partir de la intersección de su gráfica con el eje OX, resulta que, dependiendo de la función, a veces es necesario realizar la intersección en zonas cercanas a la raíz, como puede ser el caso por ejemplo de $f(x) = sin(x)$, procedimiento a veces complejo, como puede comprobarse con la función $f(x) = x/sin(x) - 10$. Si bien este hecho llama ya la atención, la sorpresa llega cuando modificamos las opciones del programa para lograr el máximo redondeo de 15 cifras decimales: la intersección no es exacta (Fig. 3, izquierda). Más aún, si volvemos a intentar la intersección, resultan nuevos valores cada vez, con la curiosidad añadida de que algunas veces se obtiene el valor simbólico de π (Fig. 3, derecha).

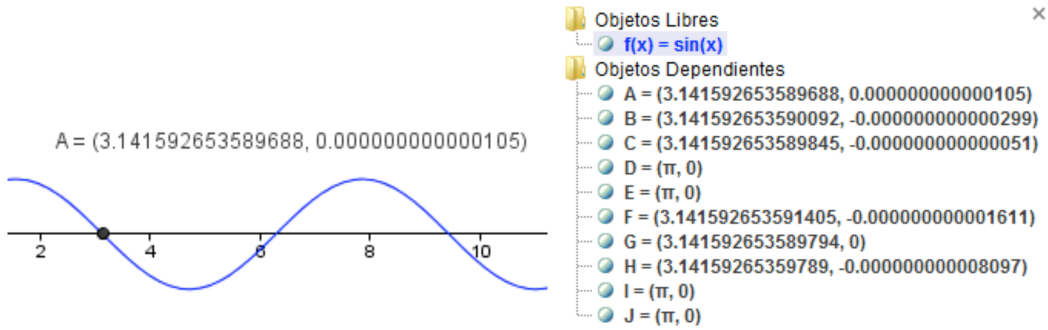


Figura 3: Aproximación numérica de raices realizada por GeoGebra.

¿De qué depende este hecho? ¿Por qué aparece este comportamiento bohemio en las raíces de la función? Evidentemente, para lograr responder de forma exacta a estas cuestiones habría que analizar el código del programa, que, por otra parte, es abierto y permite por tanto su estudio. Sin embargo, resulta interesante analizar el problema de forma genérica. Indudablemente, a la hora de realizar las intersecciones, es muy complicado pinchar dos veces consecutivas en el mismo píxel, por lo que podríamos conjeturar que los puntos que se seleccionan con el ratón son determinantes en el proceso de calcular la raíz. Este hecho se corrobora cuando en lugar de hacer clic sobre la gráfica, se realiza la intersección de la función $f(x) = sin(x)$ e $y = 0$ en la vista algebraica de GeoGebra. De forma invariante se obtiene siempre el mismo valor, salvo que se desplace la vista gráfica, momento a partir del cual vuelve a repetirse un nuevo valor. Este carácter aproximativo y aparentemente aleatorio suele despertar el interés al alumnado hacia los métodos numéricos de obtención de raíces.

## 3. Métodos numéricos para aproximar el valor de una raíz.

El primer paso es aislar la raíz a estudiar, imponiendo la inexistencia de máximos o mínimos en el intervalo *[a,b]*, al combinar el Teorema de Bolzano-Weierstrass con el Teorema de Michel Rolle (1652 – 1719):

*“Si f es una función continua en un intervalo [a,b] y diferenciable en (a,b), con derivada continua, tal que f(a) = f(b), entonces existe al menos un valor c en el intervalo abierto (a,b) tal que f ’(c) = 0”.*

Como corolario resulta el siguiente resultado:

*“Si f es una función continua en [a,b], diferenciable en (a,b), con derivada continua, tal que f(a)·f(b)<0 y f ‘ (x) ≠ 0 para todo x en (a,b), existe entonces exactamente una única raíz de f en (a,b)”.*

Una vez aislada una raíz de la función, existen diversos métodos iterativos que permiten ir aproximándonos a dicha raíz y que, por su base geométrica, pueden representarse fácilmente en GeoGebra, conjuntamente a su parte analítica. Entre dichos métodos destacan los métodos cerrados de la bisección, de la secante y de Regula Falsi y los métodos abiertos de Newton y del punto fijo (Fig. 4). En este último, el proceso iterativo permite visualizar la convergencia o divergencia del mismo, dependiendo del cumplimiento de las condiciones necesarias para ello. En concreto, el estudiante comprueba visualmente la aproximación en forma de espiral a la raíz de la función a estudiar. La comprensión de los conceptos utilizados mejora a través de este proceso activo y visual que complementa el desarrollo analítico llevado a cabo habitualmente.

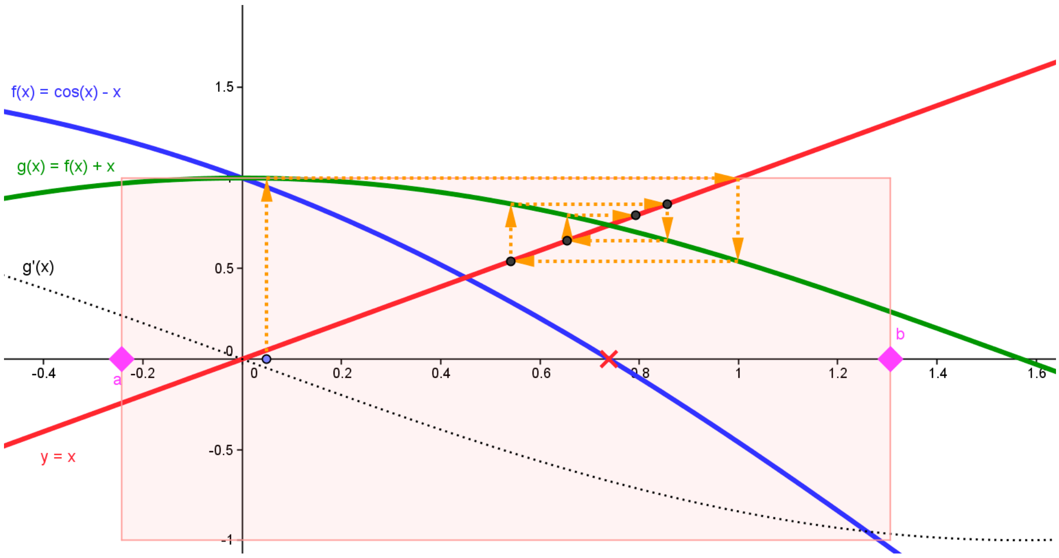


Figura 4: Método del punto Fijo en GeoGebra.

## 4. Integración numérica y probabilística.

El motor de cálculo de GeoGebra también puede ser utilizado para introducir la integración numérica. Se puede comprobar por ejemplo que el programa no calcula la integral indefinida de la función $f(x) = exp(-x^2)$, si bien sí muestra la integral definida de dicha función entre un par de valores dados. Este hecho justifica la presentación de métodos numéricos, como trapecios, Simpson o Simpson compuesto, cuya base geométrica además posibilita una representación dinámica en GeoGebra (Fig. 5).

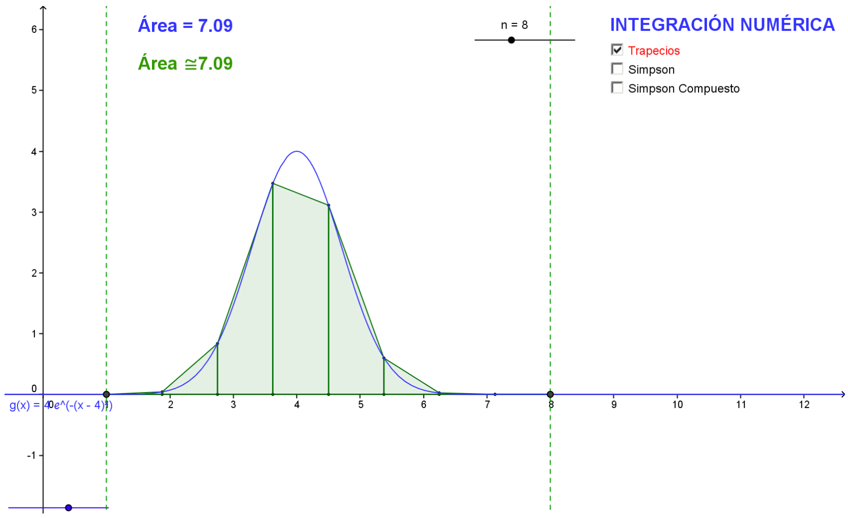


Figura 5: Integración numérica en GeoGebra.

GeoGebra tiene incorporada la función *random( )* que genera un número aleatorio entre 0 y 1. Una de las aplicaciones de este comando es el cálculo aproximado de áreas haciendo uso del Método de Monte Carlo (Fig. 6).

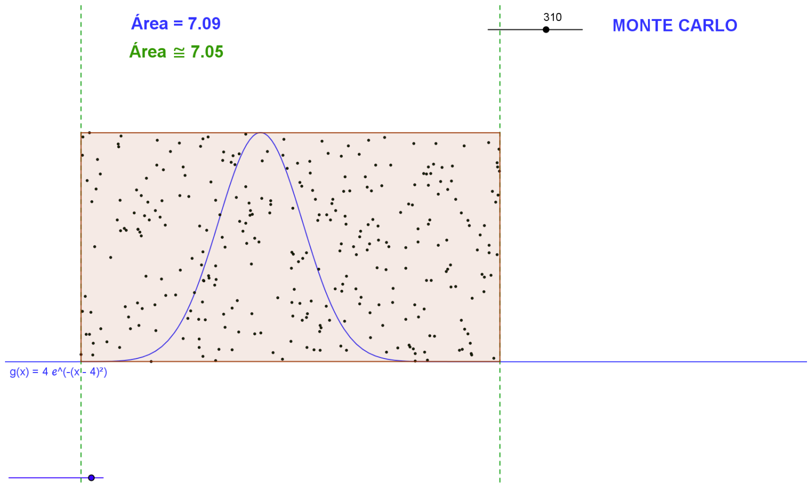


Figura 6: Cálculo aproximado de área usando el Método de Monte Carlo.

## 5. Conclusiones.

En el presente trabajo se ha comprobado que las herramientas geométricas de GeoGebra posibilitan visualizar de una forma intuitiva métodos numéricos que habitualmente son resueltos en el aula únicamente a nivel analítico. La propia programación interna de este software hace ver al alumnado la necesidad e importancia de dichos métodos.

## Referencias

Bernard Bolzano (1817): *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die einentgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.*