In print in *Algebras, Groups and Geometries,* Volume 20, issue 1, 2003.

STUDIES ON THE TSAGAS-SOURLAS-SANTILLI ISOTOPOLOGY

Raúl M. Falcón and Juan Núñez

Dpto. Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas.
Universidad de Sevilla. Aptdo 1160. 41080-Sevilla (España).
E-mails: *rafalgan@us.es* *jnvaldes@us.es*

Abstract

Since his original proposals of 1978 to study Lie-isotopic and Lie-admissible liftings of conventional, local-differential Hamiltonian formulations of point particles, the physicist R. M. Santilli [4] suggested the construction of a new topology as the mathematical foundations for the representation of extended, nonspherical and deformable particles with conventional local-differential interactions plus new nonlocal-integral interactions as occurring, for instance, in molecular valence bonds. A first isotopic lifting of the conventional continuity was introduced by the physicist J. V. Kadeisvili [3] in 1992. In 1993 the mathematicians G. T. Tsagas and D. S. Sourlas [12,13] built the topology proposed by Santilli within the context of isotopic mathematics defined over fields of conventional numbers. In the same year, R. M. Santilli [8] constructed the fields isonumbers, namely numbers with a positive-definite but otherwise arbitrary multiplicative unit. As a necessary condition to achieve invariance of isotopic formulations under the action of their own time evolution group, R. M. Santilli [9] extended in 1996 the topology by G. T. Tsagas and D. S. Sourlas to isofields whose unit is a sufficiently smooth and positive definite, but otherwise arbitrary integro-differential expression representing extended particles with local-differential and nonlocal-integral interactions. This memoir is dedicated to the apparently first, comprehensive mathematical study and generalization of the Tsagas-Sourlas-Santilli isotopology and includes: a generalization of Kadeisvili's isocontinuity; the identification of the broadest possible isofields and isomanifolds; the systematic study of the broadest possible isotopology; and other topics. It is hoped that the isotopology emerging from this study does indeed fulfill Santilli's original suggestion of constituting the foundations of mathematical, physical and chemical studies on isotopic representations of extended, nonspherical and deformable particles with local-differential and nonlocal-integral interactions.

This paper is dedicated to the memory of

Professor GRIGORIOS T. TSAGAS

Editor of Algebras, Groups and Geometries and

Chairman, Department of Mathematics

Aristotle University, Thessaloniki, Greece

ESTUDIO DE LA ISOTOPOLOGÍA DE TSAGAS-SOURLAS-SANTILLI

Raúl M. Falcón and Juan Núñez

Dpto. Geometría y Topología.
Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.
Aptdo 1160. 41080-Sevilla (España).
E-mails: *rafalgan@us.es* *jnvaldes@us.es*

Resumen

En 1993, Tsagas y Sourlas definieron una isotopología en el caso en el que la proyección de un levantado isotópico de los números reales en el nivel convencional no coincida con dicho conjunto, es decir, en el caso en que se esté trabajando con un isocuerpo de los denominados por Santilli de primer tipo. El propio Santilli también trató, en 1996, el caso de una isotopología para los llamados isocuerpos de segundo tipo.

El objetivo principal de este artículo es profundizar en el estudio de esta segunda construcción, teniendo en cuenta los trabajos mencionados anteriormente de Tsagas, Sourlas y Santilli. Hemos optado para ello por definir un isoorden en el isocuerpo construido y realizar una generalización de la isocontinuidad de Kadeisvili para isocuerpos de segundo tipo.

Palabras claves: Isoteoría de Santilli, isotopía, isotopología, isocontinuidad.

A.M.S. 2000 Clasificación 03 H 05, 17 D 99.

Índice General

Índice General 4

1 Introducción 5

2 Preliminares 10

3 Niveles en un levantamiento isotópico 13

4 Mejora en la construcción de isoestructuras matemáticas respecto a la multiplicación 19

5 Isoespacios isotopológicos 24

6 Isopuntos isoadherentes 32

7 Isopuntos isointeriores 40

8 Isotopologías 52

9 Isoespacios de Hausdorff 58

10 Isocontinuidad de isofunciones 61

11 Isocontinuidad en isoespacios isotopológicos 80

12 Bibliografía 99

1 Introducción

En 1993, los matemáticos griegos Tsagas y Sourlas definen por primera vez el concepto de *isotopología* (véase **[12]**), al objeto de estudiar en ese mismo trabajo las llamadas *isovariedades diferenciables*.

Para ello consideran el isoespacio de clase I de los isorreales $(\widehat{\mathbf{R}}^m, \widehat{+}, \widehat{\times})$ de dimensión m, basado en el levantamiento isotópico con isounidad $\widehat{I} = diag(n_1^2, n_2^2, ..., n_m^2)$, con $n_k = n_k(x, \dot{x}, \ddot{x}, \tau, \delta, ...) \neq 0$, $\forall k \in \{1, ..., m\}$.

Introducen después una topología en el isoespacio $\widehat{\mathbf{R}}^m$, simplemente realizando una isotopía de la topología convencional en el espacio $\mathbf{R}^m$, dada por $T = \{\emptyset, \mathbf{R}^m, \cup_{i\in I} B_i\}$, donde cada B_i es de la forma:

$$B_i = \{P = (P_1, ..., P_m) : \alpha_{i_k} < P_k < \beta_{i_k}; \alpha_{i_k}, \beta_{i_k} \in \mathbf{R}, \forall k \in \{1, ..., m\}\},$$

que puede ser considerada como el producto Cartesiano de la topología de intervalos abiertos sobre la recta real, m veces. El espacio topológico $\{\mathbf{R}^m, T\}$ se denota por $T^m(\mathbf{R})$ y es llamado *espacio topológico real Cartesiano*.

En el isoespacio $\widehat{\mathbf{R}}^m$, consideran el levantado isotópico de la topología

T, definiéndolo como $\widehat{T} = \{\emptyset, \widehat{\mathbf{R}}^m, \cup_{i\in I}\widehat{B}_i\}$, donde cada $\widehat{B}_i$ es de la forma

$$\widehat{B}_i = \{\widehat{P} = (\widehat{P}_1, ..., \widehat{P}_m) : \widehat{\alpha}_{i_k} < \widehat{P}_k < \widehat{\beta}_{i_k}; \widehat{\alpha}_{i_k}, \widehat{\beta}_{i_k} \in \widehat{\mathbf{R}}_{n_k^2}, \forall k \in \{1, ..., m\}\}.$$

En el caso en que $\overline{\widehat{\mathbf{R}}} = \mathbf{R}$, Tsagas y Sourlas señalan que $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}_{n_k^2} \simeq \mathbf{R}$ y que $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}^m \simeq \mathbf{R}^m$. Por este motivo llaman al par $\{\widehat{\mathbf{R}}^m, \widehat{T}\}$ *espacio isotopológico real Cartesiano*, denotándolo por $\widehat{T}^m(\widehat{\mathbf{R}})$. Indican además que $T^m(\mathbf{R}) \equiv \widehat{T}^m(\widehat{\mathbf{R}})$, coincidiendo la nueva topología sobre $\widehat{\mathbf{R}}^m$ con la convencional sobre $\mathbf{R}^m$, excepto en $\widehat{I}$, que incorpora términos integrales. A la estructura resultante se le conoce actualmente con el nombre de *isotopología de Tsagas-Sourlas* o bien, *topología íntegro-diferencial*.

Ahora bien, en la topología propuesta por Tsagas y Sourlas, ambos consideraban $\overline{\widehat{\mathbf{R}}} = \mathbf{R}$, haciendo uso por tanto del orden usual en $\mathbf{R}$ únicamente en la definición de $\widehat{T}$.

En este artículo veremos que es conveniente generalizar el trabajo de Tsagas y Sourlas para el caso en que $\overline{\widehat{\mathbf{R}}} \neq \mathbf{R}$, caso que ya fue primero analizado por Santilli en **[9]** (véanse páginas 24-25).

De hecho, este último tipo de levantamiento isotópico ya había sido tratado por el propio Santilli en 1993 (véase **[8]**), cuando propuso por primera vez la distinción entre *isocuerpos de Santilli de Primer Tipo* e *isocuerpos de Santilli de Segundo Tipo*, realizando C.-X. Jiang un estudio más detallado en 2002 (véase **[2]**). De tal forma que, mientras que los isocuerpos de primer tipo $\widehat{K}_I$ son aquellos en los que la isounidad de Santilli $\widehat{I}$ es un posible elemento arbitrario del cuerpo original K, es decir, un número positivo, tal y como se usa en aplicaciones matemáticas como pueden ser los isocriptogramas; los isocuerpos de segundo tipo $\widehat{K}_{II}$, son aquellos en los que la isounidad de Santilli $\widehat{I}$ es también positiva, si bien no es un elemento de K, es decir, un operador definido-positivo íntegro-diferencial, tal y como se usa en aplicaciones físicas.

Es evidente por tanto que, como conjuntos, los isocuerpos de primer tipo coinciden con los cuerpos originales, notando así Santilli, $\widehat{K}_I \equiv K$. Sin embargo, también como conjuntos, los isocuerpos de segundo tipo no coinciden con los cuerpos originales y son sólo isomorfos localmente, en cuyo caso, Santilli escribe $\widehat{K}_{II} \neq K$ y $\widehat{K}_{II} \approx K$.

En estudios posteriores sobre la isoteoría de Santilli se ha hecho uso de la anterior distinción, desarrollándose trabajos tanto para isocuerpos de primer tipo como para los de segundo tipo.

Como ejemplo de estudio basado en isocuerpos de primer tipo se tiene de hecho el concepto de isotopología de Tsagas y Sourlas que hemos mencionado más arriba. También es de destacar a este respecto la definición de isovariedad $\mathcal{V}$ $(\widehat{\mathbf{R}}_I)$ que dan estos dos matemáticos en **[12]** (estudiada posteriormente en **[13]** y **[14]**) , dado que, como vimos anteriormente, ellos suponen en todo su trabajo que, como conjunto, los isocuerpos coinciden con los cuerpos originales.

Por su parte, como ejemplo de estudio basado en isocuerpos de segundo tipo se tiene el levantamiento isotópico de los espacios métricos introducidos originalmente por Santilli en **[5]** (ver también **[6]**), $M(x, m, \mathbf{R}) \rightarrow \widehat{M}(\widehat{x}, \widehat{m}, \widehat{\mathbf{R}}_{II})$, donde $\overline{\widehat{x}} = x \times \widehat{I}$, $\overline{\widehat{m}} = T \times \widehat{m}$ y $T = \widehat{I}^{-1}$ sobre el isocuerpo isorreal $\widehat{\mathbf{R}}$ de segundo tipo.

Por tanto, el objetivo principal de este artículo es analizar más detalladamente cómo se construye una isotopología basada en un isocuerpo de segundo tipo, teniendo en cuenta todos los trabajos de Tsagas, Sourlas y Santilli, mencionados anteriormente. Esta construcción es también muy importante por sus aplicaciones prácticas. Así por ejemplo, tenemos el hecho de que la cadena de valencias que caracteriza a toda molécula es estructuralmente no local-integral, debido a la penetración de los paquetes de onda de los electrones de valencia, lo cual requiere precisamente el uso de una topología no local-integral, que se obtendría a partir del análisis que nos proponemos. De hecho, el propio Santilli ha probado en **[11]** que el uso de una nueva isotopología integro-diferencial y de métodos isotópicos relacionados para una isounidad de Santilli $\widehat{I} = O \times exp^{-3r} \int \psi^{\dagger}(r) \times \psi(r)$, donde O es un operador y $\psi(r)$ es la función de onda del electrón de valencia, ha permitido por primera vez la obtención de una representación exacta e invariante de todas las características moleculares. En este sentido, es necesario el uso de isocuerpos de Santilli de segundo tipo para la obtención de los resultados de **[11]**.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, un primer aspecto que deberemos tratar en este artículo es la posibilidad de trabajar con cuerpos no ordenables. Necesitaremos por tanto disponer de una generalización del orden usual establecido en $\mathbf{R}$.

En todo caso, la generalización que nos proponemos realizar deberá hacerse en todo momento con el objetivo de que la definición de isotopología propuesta por Tsagas y Sourlas quede como caso particular de la propuesta aquí, pensando a su vez en una futura generalización de las isovariedades diferenciables de Tsagas-Sourlas en las llamadas *isovariedades isodiferenciables*, que hacen uso del cálculo isodiferencial introducido por Santilli en 1996 (véase **[9]**), es decir, de una herramienta posterior al trabajo monográfico de Tsagas y Sourlas.

Daremos así una serie de nociones básicas acerca del levantamiento isotópico de la topología convencional, generalizando las ideas propuestas por Tsagas y Sourlas y desarrollando nuestro estudio siempre desde el punto de vista de los diferentes elementos de isotopía utilizados. Señalemos además que los resultados que se van a dar se presentan para isoespacios vectoriales e isocuerpos respecto a la multiplicación, siendo análogos los resultados relativos a isoespacios vectoriales e isocuerpos respecto a la suma. Indiquemos también que cuando hablemos de un levantamiento isotópico respecto a unos elementos de isotopía, lo haremos refiriéndonos al modelo de construcción del isoproducto.

Para llevar a cabo tales construcciones se hará uso de las llamadas *isotopías de Santilli*, en particular, de las del tipo $\widehat{\widehat{X}} = X * \widehat{I}$, obtenidas a partir de una *isounidad* $\widehat{I}$ y de una operación $*$.

El origen de estas isotopías tiene lugar en 1978, con la presentación que hace R. M. Santilli de su nueva teoría, conocida hoy como *isoteoría* (véase **[4]**). Se trata de una generalización de la teoría convencional de Lie (basada esta última en términos lineales, locales y canónicos), que pretende, haciendo uso de un elemento unidad generalizado (isounidad de Santilli (o isounidad para simplificar)), levantar la teoría convencional a términos no lineales, no locales y no canónicos, lo más generales posibles, de tal forma que posteriormente se pueda reconstruir la linealidad, locacidad y canonicidad en ciertos espacios generalizados, dentro de las coordenadas fijadas por un observador inercial. En particular, levanta por medio de isotopías las llamadas Álgebras de Lie y más tarde los Grupos de Lie, dando lugar respectivamente a las Álgebras y Grupos de Lie-Santilli.

En los años siguientes, la isoteoría de Santilli se ha consolidado y ha comenzando a tener importantes aplicaciones en diversas ramas de la Física y la Ingeniería. Al mismo tiempo, Santilli y sus colaboradores han realizado el levantamiento isotópico de las estructuras matemáticas más importantes, dando lugar a las llamadas isoestructuras matemáticas (isogrupos, isoanillos, isocuerpos, isoespacios,...). Para una visión histórica del desarrollo de la isoteoría y una amplia bibiliografía al respecto, puede verse **[1]**.

Señalemos por último que, para simplificar la notación, evitaremos el uso de los subíndices I y II, referentes a los isocuerpos de primer y segundo tipo, si bien tendremos en todo momento presente esta distinción en el sentido mencionado anteriormente. De hecho, nuestro estudio intenta englobar ambos tipos de isocuerpos, para lograr así un análisis más coherente con la definición de isotopología de Tsagas-Sourlas en **[12]** y de su generalización en **[9]**.

2 Preliminares

Con el fin de facilitar una adecuada comprensión del presente estudio, se indican en esta sección las definiciones y propiedades más importantes de la isoteoría de Santilli, que necesitaremos más adelante. Para una mayor profundización en los conceptos aquí mencionados puede verse **[1]**.

Definición 2.1 *Dada una estructura matemática cualquiera, se define una* isotopía *o* levantamiento isotópico *de la misma como cualquier levantamiento suyo, que dé como resultado una nueva estructura matemática, tal que verifique los mismos axiomas básicos que caracterizan a la estructura primitiva. A esta nueva estructura se le dará el nombre de* estructura isotópica *o* isoestructura.

Definición 2.2 *Se denominan* isotopías de Santilli *a aquellas isotopías de una estructura lineal, local y canónica, que den como resultado una isoestructura en las formas no lineales, no locales y no canónicas más generales posibles y que sean capaces de reconstruir linealidad, locacidad y canonicidad en ciertos espacios generalizados, dentro de las coordenadas fijadas por un observador inercial.*

Definición 2.3 *Sea E una estructura matemática cualquiera, de carácter lineal, local y canónico, definida sobre un conjunto de elementos C. Sea $V \supseteq C$ un conjunto dotado de una ley de composición interna $*$, con elemento unidad I. A dicho conjunto V se le llamará* conjunto general de la isotopía. *Sea $\widehat{I} \in V$ tal que existe su inversa $T = \widehat{I}^{-I}$ respecto a la operación $*$ (donde el superíndice indica la unidad bajo la cual se calcula la inversa, es decir, tal que $\widehat{I} * T = T * \widehat{I} = I$). $\widehat{I}$ será entonces llamado* unidad isotópica *o* isounidad, *y será la unidad básica* *del levantamiento a seguir de la estructura E. Al elemento T se le llama* elemento isotópico. *Finalmente, el par de elementos $\widehat{I}$ y $*$ constituirán los* elementos de la isotopía.

Bajo las condiciones anteriores, Santilli propone en **[4]** pasar de la estructura E a una isoestructura $\widehat{E}$, mediante un levantamiento del tipo $X \in E \longrightarrow \widehat{X} = X * \widehat{I} \in \widehat{E}$. Además, si la estructura E está dotada de una operación $\bullet$, Santilli define en $\widehat{E}$ la isooperación $\widehat{\bullet} \equiv *T*$, siendo así $\widehat{X}\widehat{\bullet}\widehat{Y} = (X * \widehat{I}) * T * (Y * \widehat{I}) = \widehat{X * Y}$, siempre que $*$ sea asociativa. Obsérverse que entonces, $\widehat{X}\widehat{\bullet}\widehat{I} = (X * \widehat{I}) * T * \widehat{I} = X * \widehat{I} = \widehat{X} = \widehat{I}\widehat{\bullet}\widehat{X}$, con lo cual $\widehat{I}$ es el elemento unidad de $\widehat{E}$ respecto $\widehat{\bullet}$.

El anterior modelo de construcción recibe el nombre de *modelo de construcción del isoproducto.* Para dar coherencia a los resultados que daremos, definiremos la isooperación $\widehat{\bullet}$ a partir de ahora como $\widehat{X}\widehat{\bullet}\widehat{Y} = \widehat{X * Y}$, para todos $X, Y \in E$.

Definición 2.4 *Sea $K = K(a, +, \times)$ un cuerpo de elementos $\{a, b, \dots\}$. Se denomina* isocuerpo $\widehat{K}$ *a toda isotopía de K, dotada de dos nuevas operaciones $\widehat{+}$ y $\widehat{\times}$, verificando los axiomas de cuerpo.*

Proposición 2.5 *Sea $K = K(a, +, \times)$ un cuerpo asociativo y sean $\widehat{I}, \widehat{S}, *$ y $\star$ elementos de isotopía en las condiciones de la Definición 2.3, siendo I y S los elementos unidades respectivos de $*$ y $\star$. En estas condiciones, si $K(a, \star, *)$ tiene estructura de cuerpo con elementos unidades respectivos $S, I \in K$, entonces el levantamiento isotópico $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, realizado por el procedimiento del isoproducto, correspondiente a la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $*$ y secundarios $\widehat{S}$ y $\star$, con $\widehat{R} = \widehat{S}^{-S} = r * \widehat{I} \in \widehat{K}$, tiene estructura de isocuerpo respecto a la multiplicación, si y sólo si $a * r = r = r * a$, para todo $a \in K$.* $\square$

Definición 2.6 *Sea $(U, \circ, \bullet)$ un $K(a, +, \times)$-espacio vectorial. Sea $\widehat{K} = \widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ un isocuerpo asociado a K. Se dice que $\widehat{U}$ es un $\widehat{K}$*-isoespacio vectorial *si, siendo una isotopía de* U, *dotada de dos nuevas operaciones* $\widehat{\circ}$ *y* $\widehat{\bullet}$, $(\widehat{U},\widehat{\circ},\widehat{\bullet})$, *tiene estructura de* $\widehat{K}$*-espacio vectorial.*

A los elementos del isoespacio $\widehat{U}$ *se les denomina usualmente* isovectores.

Proposición 2.7 *Sea* $(U,\circ,\bullet)$ *un* $K(a,+,\times)$*- espacio vectorial. Sea* $\widehat{K}(\widehat{a},\widehat{+},\widehat{\times})$ *el isocuerpo respecto a la multiplicación asociado a* K, *correspondiente a la isotopía de elementos principales* $\widehat{I}$ *y* $*$ *(de elemento unidad* I*) y elementos secundarios* $\widehat{S}$ *y* $\star$ *(de elemento unidad* S, *siendo* $\widehat{R}=\widehat{S}^{-S}=R*\widehat{I}\in\widehat{K}$*), en las condiciones de la Proposición 2.5. Sean* $\Box$ *(de elemento unidad* I*),* $\widehat{S'}$ *y* $\diamond$ *(de elemento unidad* S', *siendo* $\widehat{R'}=\widehat{S'}^{-S'}=R'\Box\widehat{I}\in\widehat{U}$*), elementos de isotopía que junto a* $\widehat{I}$ *estén en las condiciones de la Definición 2.3, siendo el conjunto general* V' *asociado tal que* $K\cup U\subseteq V'$. *En estas condiciones, si* $(U,\diamond,\Box)$ *tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo* $K(a,\star,*)$, *siendo* $(U,\diamond)$ *un grupo con elemento unidad* $S'\in U$, *entonces el levantamiento isotópico* $(\widehat{U},\widehat{\circ},\widehat{\bullet})$, *correspondiente a la isotopía de elementos principales* $\widehat{I}$ *y* $\Box$ *y secundarios* $\widehat{S}$ *y* $\diamond$, *mediante el procedimiento del isoproducto, tiene estructura de isoespacio vectorial respecto a la multiplicación sobre* $\widehat{K}$, *si y sólo si* $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{R'}=\widehat{R'}$ *para todo* $\widehat{a}\in\widehat{K}$ *y* $\widehat{R}\widehat{\bullet}\widehat{X}=\widehat{R'}$ *para todo* $\widehat{X}\in\widehat{U}$. □

Proposición 2.8 *Consideremos los sistemas de vectores e isovectores* $\beta=\{e_1,\ldots,e_n\}$ *y* $\widehat{\beta}=\{\widehat{e_1}=e_1\Box\widehat{I},\ldots,\widehat{e_n}=e_n\Box\widehat{I}\}$*, respectivamente. En las condiciones de la Proposición 2.7, si se sigue un modelo de isotopía que, bajo el modelo de construcción del isoproducto, utilice isounidades actuando como constantes y mantenga como isooperaciones las operaciones de partida,entonces, si* β *es una base de* U, *resulta que* $\widehat{\beta}$ *es una isobase de* $\widehat{U}$. □

Definición 2.9 *En las condiciones de la Definición 2.3, un levantamiento isotópico de la estructura* E *se dice* inyectivo *(o bien que* corresponde a una isotopía inyectiva*) si se verifica que* $X=Y$, *para todos* $X,Y\in E$ *tales que* $\widehat{X}=\widehat{Y}$.

Definición 2.10 *Sea $U(X,g,K)$ un espacio vectorial métrico (con elementos X, Y, $Z,\ldots$) sobre un cuerpo $K(a,+,\times)$, con una métrica g asociada a una distancia métrica d. Se dice que $\widehat{U}(\widehat{X},\widehat{g},\widehat{K})$ es un* isoespacio vectorial métrico *si, siendo una isotopía de U , es un isoespacio vectorial sobre el isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a},\widehat{+},\widehat{\times})$, dotado de un orden $\leq$ y siendo $0\in\widehat{K}$ su elemento unidad respecto a $\widehat{+}$ (con propiedades usuales respecto al orden $\leq$), con elementos $\widehat{X},\widehat{Y},\widehat{Z},\ldots$ y dotado de una nueva* isométrica *$\widehat{g}$, que será una isotopía de la métrica g verificando las propiedades necesarias para ser una métrica en $\widehat{U}$; es decir, que $\widehat{g}$ está asociada a una isodistancia métrica $\widehat{d}$, que siendo una isotopía de la distancia métrica d verifica, para todos $\widehat{X},\widehat{Y},\widehat{Z}\in\widehat{U}$, las siguientes condiciones:*

1. $0\leq\widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Y}) \quad ; \quad \widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Y})=0\Leftrightarrow\widehat{X}=\widehat{Y}$.
2. $\widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Y})=\widehat{d}(\widehat{Y},\widehat{X})$.
3. *Desigualdad triangular:* $\widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Y})\leq\widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Z})\widehat{+}\widehat{d}(\widehat{Z},\widehat{Y})$.

3 Niveles en un levantamiento isotópico

Debemos comenzar señalando cómo vamos a desarrollar nuestro estudio sobre levantamientos isotópicos. En general, toda isotopía parte de una estructura matemática convencional y permite construir una isoestructura verificando los mismos axiomas que la inicial. Aparecen así varios niveles de construcción:

a) **Nivel convencional:** (**[4]**) Se trata de la estructura matemática de la que partimos, dotada de un conjunto de elementos y de una serie de operaciones que los relacionan. Se refiere en general a las estructuras matemáticas referidas a las unidades usualmente utilizadas: $E=E(a,+,\times,...)$.

b) **Nivel general:** Se trata del conjunto general V, que consta en particular de los elementos de isotopía utilizados en todo levantamiento isotópico que sigue el modelo de construcción del isoproducto. Esto es, $V = V(\alpha, *, \star, ...)$.

Un aspecto importante es la restricción de V a E. Esto es, $E_* = E(a, *, \star, ...)$, que sabemos debe verificar los mismos axiomas que la estructura inicial E.

Teóricamente es el nivel más importante en la construcción de isotopías de Santilli (véase **[1]**), aunque creemos que debe ser estudiado con más profundidad. De hecho, se trata del nivel en que se basa fundamentalmente nuestro trabajo.

c) **Nivel isotópico:** (**[4]**) Se trata de la isoestructura matemática que se obtiene tras realizar el levantamiento isotópico. Esto es, $\widehat{E} = \widehat{E}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times}, ...)$.

Está dotada de un conjunto isotópico y de una serie de isooperaciones que relacionan sus elementos. Dichos elementos, denotados con un gorro $\widehat{}$ superpuesto, se dan respecto a la isounidad de $\widehat{E}$. Así, para una isoestructura $(\widehat{E}, \widehat{\times})$, con isounidad $\widehat{I}$, sus elementos serán de la forma $\widehat{a} = \widehat{a}\widehat{\times}\widehat{I}$.

La aplicación $\mathbf{I} : E \to \widehat{E} : X \to \widehat{X}$ es entonces sobreyectiva por construcción.

d) **Nivel de proyección:** (**[9]**) Aparece cuando se considera la isoestructura matemática $\widehat{E}$ referida a los elementos de isotopía utilizados en su construcción. Se denotan sus elementos con una línea superpuesta al gorro $\widehat{}$ de los elementos de $\widehat{E}$, $\overline{\widehat{}}$. Así, si en la construcción de $\widehat{E}$ se utilizan los elementos de isotopía $*$ (de elemento unidad I) e $\widehat{I}$, se obtiene entonces en el nivel de proyección una estructura $\overline{\widehat{E}}$, cuyos elementos se dan respecto a la unidad I: $\overline{\widehat{a}} = a * \widehat{I} = (a * \widehat{I}) * I$.

La aplicación $\pi : \widehat{E} \to \overline{\widehat{E}} : \widehat{a} \to \pi(\widehat{a}) = \overline{\widehat{a}}$ recibe el nombre de *proyección* y en general, diremos que un elemento de $\widehat{E}$ *se proyecta* a su correspondiente elemento asociado en $\overline{\widehat{E}}$. Obsérvese que por construcción, π es una aplicación sobreyectiva.

Debe destacarse que en principio $\overline{\widehat{E}}$ sólo está dotado de operaciones cuando π sea lineal respecto a las isooperaciones asociadas a $\widehat{E}$. Así, para una isoestructura $(\widehat{E}, \widehat{\times})$, si π es lineal respecto a $\widehat{\times}$, se define en $\overline{\widehat{E}}$ la operación $\overline{\widehat{\times}}$ como $\overline{\widehat{a}}\overline{\widehat{\times}}\overline{\widehat{b}} = \overline{\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b}}$. En dicho caso se tiene que π es un morfismo sobreyectivo entre $(\widehat{E}, \widehat{\times})$ y $(\overline{\widehat{E}}, \overline{\widehat{\times}})$.

Éste es el nivel más importante en la práctica, pues se obtienen modelos matemáticos que bajo las unidades usuales no podrían darse.

Aún existe otro nivel que engloba los niveles convencional e isotópico. Se trata del *nivel axiomático* (**[4]**), que identifica toda estructura matemática que verifique unos mismos axiomas.

En definitiva, la relación existente entre los diferentes niveles de construcción en un levantamiento isotópico, pueden verse en el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Nivel convencional} & & \\
(E,+,\times,...) \arrow[rr, "\substack{\text{Nivel general}\\ (V,*,\star,...)}"] \arrow[d] & \sharp & (E,*,\star,...) \arrow[d] \\
\text{Nivel de Proyección} & & \text{Nivel isotópico} \arrow[ll, "\text{Proyección}"'] \\
(\overline{\widehat{E}}, \overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}, ...) & & (\widehat{E}, \widehat{+}, \widehat{\times}, ...)
\end{tikzcd}
$$

El presente estudio pretende desarrollar sus diferentes resultados en los diferentes niveles de construcción de un levantamiento isotópico. Es por ello por lo que se intentará establecer condiciones suficientes a las isotopías utilizadas para conseguir así llegar a resultados coherentes en el último de los niveles descritos, esto es, en el nivel de proyección. No obstante, a la hora de encontrar resultados prácticos, nuestro trabajo está basado en los resultados obtenidos en **[1]** para la construcción de los diferentes tipos de isoestructuras matemáticas. Dichos resultados se fundamentan en el uso del nivel general para la construcción de un levantamiento isotópico. Con ello pretendemos además dar consistencia a los diferentes usos prácticos que tanto Santilli como sus colaboradores han dado a la isoteoría de Santilli.

Con vista a lograr esta generalización de nuestro estudio al resto de niveles de construcción es conveniente comenzar mejorando la definición de levantamiento isotópico inyectivo, dada en la Definición 2.9:

Definición 3.1 *En las condiciones de la Definición 2.3, un levantamiento isotópico de la estructura E se dice* inyectivo *si se verifica que para todos $X, Y \in E$ tales que $\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{Y}}$, deba ser $X = Y$.*

Con este nuevo aspecto de la Definición queremos hacer hincapié en el hecho de que dados $X, Y \in E$ tales que $X \neq Y$, debe tenerse siempre en el nivel isotópico que $\widehat{X} \neq \widehat{Y}$, pues referidos a la isounidad $\widehat{I}$ de $\widehat{E}$, $\widehat{X} = \widehat{X}\widehat{\times}\widehat{I} \neq \widehat{Y}\widehat{\times}\widehat{I} = \widehat{Y}$; de la misma manera que en E, $X = X \times e \neq Y \times e = Y$, siendo e el elemento unidad de E respecto a $\times$. Se tiene de esta forma que la aplicación sobreyectiva $\mathbf{I} : E \to \widehat{E} : X \to \widehat{X}$ es también inyectiva, siendo por tanto una biyección. Así pues, los conjuntos de elementos de E y $\widehat{E}$ están relacionados biunívocamente.

Ahora bien, en el nivel de proyección sí puede darse que $\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{Y}}$ para $X \neq Y$. Por ejemplo, haciendo uso del modelo de construcción del isoproducto, si tenemos en el conjunto general V los elementos de isotopía $*$ (de elemento unidad I) e $\widehat{I}$, puede darse que $X * \widehat{I} = Y * \widehat{I}$, siendo así, $\overline{\widehat{X}} = X * \widehat{I} = (X * \widehat{I}) * I = (Y * \widehat{I}) * I = Y * \widehat{I} = \overline{\widehat{Y}}$.

Por otra parte, es evidente que en cualquier levantamiento isotópico, si $X = Y$, entonces $\widehat{X} = \widehat{Y}$ y $\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{Y}}$.

Tenemos además como consecuencia directa de las observaciones anteriores el siguiente resultado:

Proposición 3.2 *En las condiciones de la Definición 2.3, el levantamiento isotópico que construye $\widehat{E}$ es inyectivo si y sólo si la proyección $\pi : \widehat{E} \to \overline{\widehat{E}} : \widehat{a} \to \pi(\widehat{a}) = \overline{\widehat{a}}$ es una aplicación inyectiva. Como consecuencia, cuando el levantamiento isotópico mencionado sea inyectivo, π será un isomorfismo entre $\widehat{E}$ y $\overline{\widehat{E}}$.*

Demostración

Lo vemos por doble implicación:

a) Supongamos que el levantamiento isotópico que construye $\widehat{E}$ es inyectivo. Entonces, dados $X, Y \in E$ tales que $\pi(\widehat{X}) = \pi(\widehat{Y})$, se tiene por definición que $\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{Y}}$, siendo así $X = Y$ al ser inyectivo el levantamiento isotópico señalado. Pero entonces, $\widehat{X} = \widehat{Y}$ de manera inmediata. Al ser $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$ arbitrarios en $\widehat{E}$, llegamos finalmente a que π es inyectiva tal y como queríamos ver.

b) Supongamos ahora que π es inyectiva y veamos que también lo es el levantamiento isotópico que construye $\widehat{E}$. Tomemos así $X, Y \in E$ tales que $\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{Y}}$. Será entonces $\pi(\widehat{X}) = \pi(\widehat{Y})$ y así, $\widehat{X} = \widehat{Y}$, al ser π inyectiva por hipótesis. Ahora bien, tal y como ha quedado analizado en las observaciones previas a la presente proposición, lo anterior equivale a decir que $X = Y$. Dada la arbitrariedad de X e Y en E, llegamos finalmente a que el levantamiento isotópico que construye $\widehat{E}$ es inyectivo, como queríamos probar.

Veamos ahora la última parte del enunciado. Por construcción ya vimos que π era una aplicación sobreyectiva, con lo cual, teniendo en cuenta los resultados que acabamos de ver, está claro que en caso de que el levantamiento que construye $\widehat{E}$ sea inyectivo, π es una biyección.

Por otro lado, suponiendo que la isoestructura $\widehat{E}$ está dotada una isooperación $\widehat{\times}$, tendríamos que sería coherente definir la proyección de $\widehat{\times}$ en $\widehat{E}$, $\overline{\widehat{\times}}$, como $\overline{\widehat{X}}\overline{\widehat{\times}}\overline{\widehat{Y}} = \overline{\widehat{X}\widehat{\times}\widehat{Y}}$, para todos $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{E}$. Es coherente pues suponiendo que existe $\widehat{Z} \in \widehat{E}$ tal que $\overline{\widehat{Z}} = \overline{\widehat{X}}$, se tendrá que $Z = X$

al ser inyectivo el levantamiento que da lugar a $\widehat{E}$, siendo así $\widehat{Z} = \widehat{X}$ y por tanto, $\overline{\widehat{Z}}\,\overline{\widehat{\times}}\,\overline{\widehat{Y}} = \overline{\widehat{Z}\widehat{\times}\widehat{Y}} = \overline{\widehat{X}\widehat{\times}\widehat{Y}} = \overline{\widehat{X}}\,\overline{\widehat{\times}}\,\overline{\widehat{Y}}$. Análogamente, si se tiene que $\overline{\widehat{Z}} = \overline{\widehat{Y}}$, se tendrá que $\overline{\widehat{X}}\,\overline{\widehat{\times}}\,\overline{\widehat{Z}} = \overline{\widehat{X}}\,\overline{\widehat{\times}}\,\overline{\widehat{Y}}$.

Ahora bien, la proyección $\pi : (\widehat{E}, \widehat{\times}) \to (\overline{\widehat{E}}, \overline{\widehat{\times}})$ sería entonces lineal en $\widehat{\times}$, pues se tendría que $\pi(\widehat{X}\widehat{\times}\widehat{Y}) = \overline{\widehat{X}\widehat{\times}\widehat{Y}} = \overline{\widehat{X}}\,\overline{\widehat{\times}}\,\overline{\widehat{Y}} = \pi(\widehat{X})\overline{\widehat{\times}}\pi(\widehat{Y})$. Como esto se tendría para toda isooperación en $\widehat{E}$, llegamos finalmente a que π es una aplicación biyectiva lineal en todas las isooperaciones de la isoestructura $\widehat{E}$. Esto es, π es un isomorfismo de $\widehat{E}$ en $\overline{\widehat{E}}$. $\square$

De hecho, debido al resultado que acabamos de ver, alcanza a tener coherencia las dos formulaciones que tiene cualquier aspecto de la isoteoría de Santilli, tal y como se hace notar siempre en la literatura, en contraposición a la única formulación que tiene el nivel convencional. Estas dos formulaciones se ofrecen con los niveles isotópico y de proyección.

Finalmente, siguiendo con este aspecto de la isoteoría y teniendo en cuenta cómo hemos definido las isooperaciones en $\overline{\widehat{E}}$, llegamos al siguiente resultado:

Proposición 3.3 *Sea $\widehat{E}(\widehat{+}, \widehat{\times}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, ...)$ cualquier isoestructura matemática en las condiciones de la Definición 2.3, pudiendo ser por tanto considerada con su estructura matemática convencional correspondiente. Se tiene entonces que si el levantamiento isotópico que construye $\widehat{E}$ es inyectivo, se verifica que $\overline{\widehat{E}}(\overline{\widehat{+}}, \overline{\widehat{\times}}, \overline{\widehat{\circ}}, \overline{\widehat{\bullet}}, ...)$ es una estructura matemática del mismo tipo que $\widehat{E}$.*

Demostración

El resultado es inmediato teniendo en cuenta que $\pi : \widehat{E} \to \overline{\widehat{E}}$ es una biyección por la Proposición 3.2 y que por construcción, las isooperaciones en $\overline{\widehat{E}}$ se definen por linealidad a partir de las de $\widehat{E}$. En definitiva, $\overline{\widehat{E}}$ hereda por construcción la estructura matemática correspondiente de $\widehat{E}$. $\square$

4 Mejora en la construcción de isoestructuras matemáticas respecto a la multiplicación

Lo que nos proponemos con esta sección es dar una serie de observaciones que permiten mejorar los resultados vistos en la sección de preliminares acerca de la construcción de isoestructuras matemáticas a partir de isotopías que siguen el modelo de construcción del isoproducto. Estas mejoras consisten en aprovechar las propiedades que verifican los elementos de tales isoestructuras.

Veremos los casos particulares de isocuerpos e isoespacios vectoriales, que son los que nos interesan en el presente estudio, si bien un desarrollo análogo puede hacerse para el resto de isoestructuras matemáticas.

Comencemos tratando la construcción de isocuerpos respecto a la multiplicación. Para ello vemos una serie de lemas previos:

Lema 4.1 *En las condiciones de la Proposición 2.5, se tiene que* $S * a = S = a * S$, *para todo* $a \in K$.

Demostración

Fijado $a \in K$, tenemos que $S * a = (S \star S) * a = (S * a) \star (S * a)$, donde hemos usado que $(K, +, \times)$ debe tener en particular estructura de anillo. Ahora, $S = (S * a)^{-S} \star (S * a) = S * a$.

Análogamente se llega a que $a * S = S$, lo que termina de probar el resultado. $\square$

Lema 4.2 *En las condiciones de la Proposición 2.5,* $(\widehat{K}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *es un isocuerpo respecto a la multiplicación, si y sólo si* $\widehat{R} = \widehat{S}^{-S} = S * \widehat{I} = \widehat{S}$.

Demostración

Lo vemos por doble implicación:

a) $\Rightarrow$

Por la Proposición 2.5, $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ es un isocuerpo respecto a la isomultiplicación si y solo si $a * r = r = r * a$, para todo $a \in K$. En concreto, para $a = S$ tendremos haciendo uso del Lema 4.1 que $S = S * r = r = r * S$. Es decir, $r = S$, siendo así $\widehat{R} = S * \widehat{I}$.

En particular, se obtiene que la isosuma en $\widehat{K}$ queda definida en todo caso como $\widehat{a} \widehat{+} \widehat{b} = \widehat{a \star r \star b} = \widehat{a \star b}$, para todos $a, b \in K$. Con lo cual, el elemento unidad de K respecto a $\widehat{+}$ debe ser como buscábamos, $\widehat{S} = S * \widehat{I} = \widehat{R}$, pues de esta forma, $\widehat{a} \widehat{+} \widehat{S} = \widehat{a \star S} = \widehat{a} = \widehat{S \star a} = \widehat{S} \widehat{+} \widehat{a}$, para todo $a \in K$.

b) $\Leftarrow$

Basta probar que $a * r = r = r * a$, para todo $a \in K$. Ahora bien, en nuestro caso, $r = S$, con lo cual lo anterior se tiene sin más que aplicar el Lema 4.1. □

Obsérvese que en la construcción de un isocuerpo respecto a la multiplicación, la isosuma queda unívocamente determinada por la operación $\star$, que tendrá asociada el elemento unidad $S \in A$, del cual se levanta isotópicamente $\widehat{S}$. En definitiva llegamos al siguiente resultado:

Proposición 4.3 *Sea $K = K(a, +, \times)$ un cuerpo asociativo y sean $\widehat{I}, *$, $\widehat{S}$ y $\star$ elementos de isotopía en las condiciones de la Definición 2.3, siendo I y S los elementos unidades respectivos de $*$ y $\star$. En estas condiciones, si $K(a, \star, *)$ tiene estructura de cuerpo con elementos unidades respectivos $S, I \in K$, entonces el levantamiento isotópico $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, realizado por el procedimiento del isoproducto, correspondiente a la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $*$ y secundarios $\widehat{S}$ y $\star$, con $\widehat{R} = \widehat{S}^{-S} \in \widehat{K}$, tiene estructura de isocuerpo respecto a la multiplicación, si y sólo si $\widehat{R} = \widehat{S} = S * \widehat{I}$. En particular, se define $\widehat{a} \widehat{+} \widehat{b} = \widehat{a \star b}$ para todos $a, b \in K$.* □

Resultados análogos se alcanzan para la obtención de isoespacios vectoriales:

Lema 4.4 *En las condiciones de la Proposición 2.7, se cumple que:*

a) $S\Box X = S'$, *para todo* $X \in U$.

b) $\widehat{S}\widehat{\bullet}\widehat{X} = \widehat{S'}$, *para todo* $X \in U$.

c) $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{S'} = \widehat{S'}$, *para todo* $a \in K$.

Demostración

a) Fijado $X \in U$ tenemos que $S\Box X = (S\star S)\Box X = (S\Box X)\star(S\Box X)$, donde hemos usado que $(U, \diamond, \Box)$ es un $K(a, \star, *)$-espacio vectorial. Ahora, $S' = (S\Box X)^{-S'}\star(S\Box X) = S\Box X$, como queríamos ver.

b) Fijado $X \in U$ tenemos que $\widehat{S}\widehat{\bullet}\widehat{X} = (\widehat{S}\widehat{+}\widehat{S})\widehat{\bullet}\widehat{X} = (\widehat{S}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{+}(\widehat{S}\widehat{\bullet}\widehat{X})$, donde hemos usado que $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ es un $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$-isoespacio vectorial. Ahora, $\widehat{S'} = (\widehat{S}\widehat{\bullet}\widehat{X})^{-\widehat{S'}}\widehat{\circ}(\widehat{S}\widehat{\bullet}\widehat{X}) = \widehat{S}\widehat{\bullet}\widehat{X}$, como buscábamos.

c) Fijado $a \in U$ tenemos que $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{S'} = \widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{S'}\widehat{\circ}\widehat{S'}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{S'})\widehat{\circ}(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{S'})$, con lo cual, $S' = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{S'})^{-\widehat{S'}}\widehat{\circ}(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{S'}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{S'}$, como queríamos probar. $\Box$

Lema 4.5 *En las condiciones de la Proposición 2.7,* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *es un* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$*-isoespacio vectorial respecto a la multiplicación, si y sólo si* $\widehat{R'} = \widehat{S}^{-S'} = S'\Box\widehat{I} = \widehat{S'}$.

Demostración

Lo vemos por doble implicación:

a) $\Rightarrow$

Supuesto que $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ es un $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$-isoespacio vectorial respecto a la multiplicación, tendremos aplicando la Proposición 2.7 que $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{R'} = \widehat{R'}$ para todo $a \in K$. En particular, para $S \in K$ tendremos que $R'\Box\widehat{I} = \widehat{R'} = (S\Box\widehat{I})\widehat{\bullet}\widehat{R'} = (S\Box R')\Box\widehat{I}$. Con lo cual debe ser $R' = S\Box R'$. Ahora bien, haciendo uso del apartado (a) del

Lema 4.4, debe ser $R' = S\Box R' = S'$. Con lo cual, $R' = S'$ y así, $\widehat{R'} = S'\Box\widehat{I}$.

Por otra parte, teniendo en cuenta las observaciones anteriores y el apartado (b) del Lema 4.4, llegamos a que $S'\Box\widehat{I} = \widehat{R'} = \widehat{S}\Box\widehat{R'} = \widehat{S'}$, con lo cual, $\widehat{S'} = S'\Box\widehat{I}$, como buscábamos.

b) $\Leftarrow$

Bastará ver que $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{R'} = \widehat{R'}$ para todo $\widehat{a} \in \widehat{K}$ y $\widehat{R}\widehat{\bullet}\widehat{X} = \widehat{R'}$ para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Ahora bien, en nuestro caso, tenemos por hipótesis que $\widehat{R'} = \widehat{S}^{-S'} = S'\Box\widehat{I} = \widehat{S'}$ y por construcción, tenemos aplicando el Lema 4.3 que $\widehat{R} = \widehat{S}^{-S} = \widehat{S} = S * \widehat{I}$; con lo cual, basta aplicar respectivamente los apartados (c) y (b) del Lema 4.4 para obtener los resultados buscados. $\Box$

Llegamos en particular con el resultado anterior a que la isosuma $\widehat{\circ}$ en $\widehat{U}$ se define como $\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y} = X\Diamond\widehat{S'}\Diamond Y = \widehat{X\Diamond Y}$, para todos $X, Y \in U$.

Por otro lado, para $\widehat{R'} = \widehat{S}^{-S'} = S'\Box\widehat{I} = \widehat{S'}$, se tiene que $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{R'} =$

En definitiva llegamos al siguiente resultado:

Proposición 4.6 *Sea $(U, \circ, \bullet)$ un $K(a, +, \times)$-espacio vectorial. Sea $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ el isocuerpo respecto a la multiplicación asociado a K, correspondiente a la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $*$ (de elemento unidad I) y elementos secundarios $\star$ (de elemento unidad S) y $\widehat{S} = S * \widehat{I}$, en las condiciones de la Proposición 4.3. Sean $\Box$ (de elemento unidad I), $\widehat{S'}$ y $\diamond$ (de elemento unidad S'), elementos de isotopía que junto a $\widehat{I}$ estén en las condiciones de la Definición 2.3, siendo el conjunto general V' asociado tal que $K \cup U \subseteq V'$. En estas condiciones, si $(U, \diamond, \Box)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $K(a, \star, *)$, siendo $(U, \diamond)$ un grupo con elemento unidad $S' \in U$, entonces el levantamiento isotópico $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, correspondiente a la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $\Box$ y secundarios $\widehat{S'}$ y $\diamond$, con $\widehat{R'} = \widehat{S'}^{-S'} \in \widehat{U}$, mediante el procedimiento del isoproducto, tiene estructura de isoespacio vectorial respecto a la multi-*

plicación sobre $\widehat{K}$*, si y sólo si* $\widehat{R'} = \widehat{S'} = S' \Box \widehat{I}$*. En particular se define* $\widehat{X} \widehat{\circ} \widehat{Y} = X \Diamond \widehat{S'} \Diamond Y = \widehat{X \Diamond Y}$*, para todos* $X, Y \in U$*.* $\Box$

Acabaremos esta sección con un aspecto a destacar. Éste es que llegamos a la conclusión de que cualquier isotopía que se nos presente en la práctica puede estudiarse como un levantamiento isotópico que siga el modelo de construcción del isoproducto, con elementos de isotopía principales asociados a la multiplicación:

Proposición 4.7 *Toda isotopía* $\mathbf{I} : E(+, \times, \circ, \bullet, ...) \to \widehat{E}(\widehat{+}, \widehat{\times}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, ...)$ *puede ser estudiada como un levantamiento isotópico que siga el modelo de construcción del isoproducto, con elementos de isotopía principales asociados a la operación de la multiplicación. Esto es, cualquier isoestructura matemática es una isoestructura matemática respecto a la multiplicación.*

Demostración

Basta considerar en el nivel general el conjunto $E(\star, *, \Diamond, \Box, ...)$, donde cada operación $\sharp$ se asocia a la correspondiente $\widehat{\natural}$ en $\widehat{E}$, definiéndose como $a \sharp b = \mathbf{I}^{-1}(\widehat{\widehat{a} \widehat{\natural} \widehat{b}})$, lo cual tiene sentido, pues como ya vimos, la aplicación $\mathbf{I} : E \to \widehat{E} : a \to \widehat{a}$ es una biyección por construcción. Obtenemos así que la isooperación $\widehat{\natural}$ se defina a posteriori como $\widehat{a} \widehat{\natural} \widehat{b} = \mathbf{I}(a \sharp b) = \widehat{a \sharp b}$, que es la forma en que queda definida toda isooperación bajo el modelo de construcción del isoproducto, donde los elementos principales de isotopía están asociados a la multiplicación, según hemos visto en los resultados de la presente subsección.

Definiendo las operaciones de esta forma en el nivel general conseguimos además por linealidad dotar al conjunto $E(\star, *, \Diamond, \Box, ...)$ de una estructura matemática del mismo tipo que ambas $E(+, \times, \circ, \bullet, ...)$ y $\widehat{E}(\widehat{+}, \widehat{\times}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, ...)$. Más aún, el elemento unidad correspondiente a cada operación $\sharp$ será por construcción el elemento en E, del cual se levante isotópicamente la isounidad de la isooperación $\widehat{\natural}$ asociada.

Se cumplen por tanto para cada uno de los tipos de estructuras matemáticas que hemos estudiado, el conjunto de condiciones necesarias para poder aplicar el modelo del isoproducto mencionado, obteniendo por construcción la misma isoestructura matemática de la que disponíamos inicialmente, tal y como íbamos buscando. □

La anterior proposición resulta de esta forma de vital importancia en el estudio de las isotopías, pues permite restringir dicho estudio a las isoestructuras matemáticas respecto a la multiplicación, cuyo proceso de obtención ha quedado plenamente establecido con los resultados que hemos obtenido a lo largo de esta subsección.

En particular, las isotopías que siguen el modelo de construcción de la transformación no unitaria (véase **[10]**), que tiene una gran importancia en el campo de investigación de la Física moderna, pueden restringirse por tanto al modelo de construcción del isoproducto citado, lo cual creemos que puede favorecer un estudio más efectivo si cabe en dicho campo.

5 Isoespacios isotopológicos

Comenzamos ya en esta sección a estudiar una serie de nociones básicas acerca del levantamiento isotópico de la topología convencional, generalizando las ideas propuestas por Tsagas y Sourlas en **[12]** y desarrollando nuestro estudio siempre desde el punto de vista de los diferentes elementos de isotopía utilizados. Comenzaremos nuestra propuesta con la distinción entre isoespacios topológicos e isotopológicos, estudiando las diferencias existentes entre ellos. Estudiaremos para ello una serie de definiciones que creemos originales y que nos permitirán nuestro posterior avance en la materia.

Nuestro propósito en esta sección es poder dar una noción más general de la isotopología, bajo la cual la topología integro-diferencial de Tsagas-Sourlas sea un caso concreto para el isoespacio $\widehat{\mathbf{R}}^m$.

Para ello comenzamos viendo la noción de isoespacio isotopológico:

Definición 5.1 *Un* isoespacio topológico *es un par* $(\widehat{M}, \widehat{\aleph})$*, donde* $\widehat{M}$ *es un isoespacio asociado isotópicamente a un espacio* M *y* $\widehat{\aleph} = \cup_{\widehat{X} \in \widehat{M}} \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$*, de tal forma que cada* $\widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ *sea una familia no vacía de subconjuntos de* $\widehat{M}$ *tal que:*

a) Si $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, entonces $\widehat{X} \in \widehat{A}$.

b) Si $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ y $\widehat{A} \subseteq \widehat{B} \subseteq \widehat{M}$, entonces $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$.

c) Si $\{\widehat{A}, \widehat{B}\} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, entonces $\widehat{A} \cap \widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$.

d) Si $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, entonces existe $\widehat{K} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ tal que $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{Z}}$, para todo $\widehat{Z} \in \widehat{K}$.

A los elementos de $\widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ se les llaman *isoentornos de* $\widehat{X}$. A $\widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ se le denomina *sistema fundamental de isoentornos de* $\widehat{X}$. Por otro lado, cuando el espacio M del que se levante $\widehat{M}$ sea un espacio topológico, diremos que $\widehat{M}$ es un *isoespacio isotopológico*.

Obsérvese que por la definición anterior, todo isoespacio topológico tiene estructura de espacio topológico. Por otra parte, teniendo en cuenta que todo levantamiento isotópico puede estudiarse siguiendo el modelo de construcción del isoproducto con elementos de isotopía principales basados en la multiplicación, podemos restringir nuestro estudio a dicho modelo. Sabemos entonces que en el levantamiento isotópico utilizado, los niveles general e isotópico son isomorfos. Con lo cual, haciendo uso de este isomorfismo tendremos de forma inmediata el siguiente resultado:

Proposición 5.2 *Sea* M *un espacio cualquiera en el nivel convencional y sea* $\widehat{M}$ *un isoespacio asociado a él. Se tiene entonces que* $\widehat{M}$ *es un isoespacio topológico si y sólo si* M *es un espacio topológico. Como consecuencia, las nociones de isoespacio topológico e isoespacio isotopológico son equivalentes.*

Demostración

Lo vemos por doble implicación:

a) $\Leftarrow$

Sea $(M, \aleph)$ un espacio topológico cualquiera. Sea $\widehat{M}$ un isoespacio asociado a M y sea $\widehat{\aleph} = \cup\{\widehat{\aleph}_{\widehat{X}} : \widehat{\aleph}_{\widehat{X}} = \widehat{\aleph_X}$, donde $\aleph_X \in \aleph$, $\forall X \in M\}$, donde se ha aplicado la misma isotopía que la usada en la construcción de $\widehat{M}$. Veamos que $\widehat{\aleph}$ así definida es una familia que verifica las condiciones de la Definición 5.1:

a.1) Sea $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Tendremos entonces por construcción que $A \in \aleph_X$ y así, al ser $(M, \aleph)$ un espacio topológico, será $X \in A$. Resulta así por tanto que $\widehat{X} \in \widehat{A}$.

a.2) Sean $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ y $\widehat{A} \subseteq \widehat{B} \subseteq \widehat{M}$. Se tendrá entonces que $A \subseteq B \subseteq M$ y, por construcción, $A \in \aleph_X$. Así, al ser $(M, \aleph)$ un espacio topológico, llegamos a que $B \in \aleph_X$ y, por construcción, $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$.

a.3) Supongamos que tenemos $\{\widehat{A}, \widehat{B}\} \subseteq \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Será por construcción $\{A, B\} \subseteq \aleph_X$. Con lo cual, al ser $(M, \aleph)$ un espacio topológico, tendremos que $A \cap B \in \aleph_X$. Será así $\widehat{A \cap B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Pero como $\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$, llegamos a que $\widehat{A} \cap \widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$.

a.4) Sea $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Será por construcción $A \in \aleph_X$. Por ser $(M, \aleph)$ un espacio topológico tenemos que existe $K \in \aleph_X$ tal que $A \in \aleph_Z$, para todo $Z \in K$. O equivalentemente, existe $\widehat{K} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ tal que $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{Z}}$, para todo $\widehat{Z} \in \widehat{K}$.

De esta forma llegamos a que $\widehat{M}$ es un isoespacio topológico, como queríamos probar.

b) $\Rightarrow$

Para ver que M es un espacio topológico, bastará considerar la familia $\aleph = \cup_{X \in M}\{\aleph_X : \widehat{\aleph_X} = \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}\}$. Esto es, $\aleph$ es el conjunto formado por las familias $\aleph_X$ que se construyen tomando para cada $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, el conjunto $A \subseteq M$ del que se levanta isotópicamente $\widehat{A}$.

Veamos por tanto que el conjunto $\aleph$ que hemos definido verifica las condiciones necesarias para que $(M, \aleph)$ sea un espacio topológico, fijando para ello $X \in M$.

b.1) Sea $A \in \aleph_X$. Entonces, $\widehat{A} \in \widehat{\aleph_X} = \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Por tanto, al ser $\widehat{M}$ un isoespacio topológico, $\widehat{X} \in \widehat{A}$ y así, de nuevo por ser inyectiva la isotopía utilizada, llegamos a que $X \in A$.

b.2) Sea $A \in \aleph_X$ y sea $B \subseteq M$ tal que $A \subseteq B$. Serán entonces $\widehat{B} \subseteq \widehat{M}$ y $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$. Con lo cual, como $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ por definición de $\aleph$, resulta que, al ser $\widehat{M}$ un isoespacio topológico, se tiene que $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Así, por construcción llegamos a que $B \in \aleph_X$.

b.3) Sea $\{A, B\} \subseteq \aleph_X$. Será por tanto, $\{\widehat{A}, \widehat{B}\} \subseteq \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, con lo que se tendrá, al ser $\widehat{M}$ un isoespacio topológico, que $\widehat{A} \cap \widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Ahora bien, $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \widehat{A \cap B}$. Así pues, $\widehat{A \cap B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ y por tanto, $A \cap B \in \aleph_X$, por construcción.

b.4) Sea $A \in \aleph_X$. Será entonces $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, con lo cual, al ser $\widehat{M}$ un isoespacio topológico, se tiene que existe $\widehat{K} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ tal que $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{Z}}$, para todo $\widehat{Z} \in \widehat{K}$. Lo que equivale por construcción a decir que existe $K \in \aleph_X$ tal que $A \in \aleph_Z$, para todo $Z \in K$.

Así pues, dado que X era arbitrario en M, llegamos a que $(M, \aleph)$ es un espacio topológico. Con lo cual, $(\widehat{M}, \widehat{\aleph})$ es un isoespacio isotopológico, como queríamos probar.

La consecuencia mencionada en el enunciado es entonces inmediata atendiendo a lo que acabamos de ver y a la Definición 5.1. $\square$

Podemos preguntarnos a continuación qué ocurre en el nivel de proyección con el concepto de espacio topológico. Hágase notar en primer lugar que no es necesario a priori imponer que la proyección del nivel isotópico sea inyectiva, pues la noción de espacio topológico no requiere el uso de leyes en dicho espacio. Aparece así el concepto de isoespacio topológico en el nivel de proyección:

Definición 5.3 *Un* isoespacio topológico en el nivel de proyección *es un par* $(\widehat{\overline{M}}, \overline{\widehat{\aleph}})$*, donde* $\widehat{\overline{M}}$ *es un isoespacio en el nivel de proyección, asociado isotópicamente a un espacio* M *y* $\overline{\widehat{\aleph}} = \cup_{\overline{\widehat{X}} \in \widehat{\overline{M}}} \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$*, de tal forma que cada* $\overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$ *sea una familia no vacía de subconjuntos de* $\widehat{\overline{M}}$ *tal que:*

a) Si $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$, entonces $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{A}}$.

b) Si $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$ y $\overline{\widehat{A}} \subseteq \overline{\widehat{B}} \subseteq \widehat{\overline{M}}$, entonces $\overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$.

c) Si $\{\overline{\widehat{A}}, \overline{\widehat{B}}\} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$, entonces $\overline{\widehat{A}} \cap \overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$.

d) Si $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$, entonces existe $\overline{\widehat{K}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$ tal que $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{Z}}}$, para todo $\overline{\widehat{Z}} \in \overline{\widehat{K}}$.

A los elementos de $\overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$ se les llaman *isoentornos de* $\overline{\widehat{X}}$. A $\overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$ se le denomina *sistema fundamental de isoentornos de* $\overline{\widehat{X}}$. Por otro lado, cuando el espacio M del que se levante $\widehat{\overline{M}}$ sea un espacio topológico, diremos que $\widehat{\overline{M}}$ es un *isoespacio isotopológico en el nivel de proyección.*

Obsérvese que todo isoespacio topológico en el nivel de proyección tiene estructura de espacio topológico. Además se verifica la siguiente:

Proposición 5.4

a) Sea $(M, \aleph)$ *un espacio topológico cualquiera. Sea* $\overline{\widehat{\overline{M}}}$ *un isoespacio en el nivel de proyección asociado a* M *y sea* $\overline{\widehat{\aleph}} = \cup\{\overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}} : \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}} = \overline{\widehat{\aleph_X}}$*, donde* $\aleph_X \in \aleph$*,* $\forall X \in M\}$*, donde se ha aplicado la misma isotopía que la usada en la construcción de* $\widehat{M}$*. Se tiene entonces que* $(\overline{\widehat{\overline{M}}}, \overline{\widehat{\aleph}})$ *es un isoespacio isotopológico en el nivel de proyección.*

b) Sea $(\widehat{\overline{M}}, \overline{\widehat{\aleph}})$ *un isoespacio topológico en el nivel de proyección, asociado isotópicamente a un espacio* M*, a partir de una isotopía inyectiva. Se verifica entonces que* $\widehat{\overline{M}}$ *es un isoespacio isotopológico en el nivel de proyección.*

Demostración

Lo vemos por doble implicación:

a) Análogo al apartado (a) de la demostración de la Proposición 5.2, reescribiendo $\widehat{\overline{\ }}$ en lugar de $\widehat{\ }$.

b) Análogo al apartado (b) de la demostración de la Proposición 5.2, reescribiendo $\widehat{\overline{\ }}$ en lugar de $\widehat{\ }$, si bien aquí hay que tener en cuenta que $\aleph$ es el conjunto formado por las familias $\aleph_X$ que se construyen tomando para cada $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$, el conjunto $A' \subseteq M$ del que se levanta isotópicamente $\widehat{A}$ y que dado que imponemos que la isotopía utilizada sea inyectiva, resulta que $A' = A$. $\square$

Obsérvese que en el nivel de proyección, las nociones de isoespacio topológico e isoespacio isotopológico no son equivalentes en general. Sí lo son, como se deduce del resultado anterior, en el caso en que la isotopía utilizada sea inyectiva.

Un aspecto a destacar en la construcción que hemos realizado tanto en el nivel isotópico como en el de proyección es que cuando tengamos un espacio topológico $(M, \aleph)$, podemos obtener un isoespacio isotopológico sin más que levantar isotópicamente M a $\widehat{M}$ (a $\overline{\widehat{M}}$, respectivamente) y construir los isoentornos de $\widehat{M}$ ($\overline{\widehat{M}}$, respectivamente) como los levantados isotópicos (aplicando la misma isotopía que antes) de los entornos de M. Llegamos así a que la construcción realizada es coherente, pues mantiene la estructura de espacio topológico. De hecho, la relación dada por las familias $\aleph$ y $\widehat{\aleph}$ ($\overline{\widehat{\aleph}}$, respectivamente) en las construcciones anteriores será la que mantendremos de ahora en adelante, por resultar la más útil a nuestros propósitos, estando todos nuestros resultados supeditados por esta construcción.

También será necesario para nuestro desarrollo el siguiente resultado:

Proposición 5.5 *El producto topológico de isoespacios topológicos es un isoespacio topológico.*

Demostración

Comprobemos el resultado tanto en el nivel isotópico como en el de proyección:

a) Nivel isotópico:

Sean $(\widehat{M_1}, \widehat{\aleph_1})$ y $(\widehat{M_2}, \widehat{\aleph_2})$ dos isoespacios topológicos cualesquiera. Aplicando la Proposición 5.2 obtenemos que tales isoespacios son de hecho dos isoespacios isotopológicos, levantados isotópicos por tanto de dos espacios topológicos convencionales M_1 y M_2.

Consideremos el producto topológico usual

$$\widehat{M_1} \times \widehat{M_2} = \left\{ (\widehat{X}, \widehat{Y}) : \widehat{X} \in \widehat{M_1}, \widehat{Y} \in \widehat{M_2} \right\},$$

que puede considerarse como levantado isotópico del espacio producto $M_1 \times M_2$, mediante el levantamiento isotópico $(X, Y) \to \widehat{(X, Y)} = (\widehat{X}, \widehat{Y})$. Esto es, $\widehat{M_1} \times \widehat{M_2} \equiv M_1 \widehat{\times} M_2$ es un isoespacio en el nivel isotópico.

Aplicando entonces la Proposición 5.2 y teniendo en cuenta que en el nivel convencional el producto topológico de espacios topológicos es un espacio topológico, tenemos finalmente que en el nivel isotópico, $\widehat{M_1} \times \widehat{M_2} \equiv M_1 \widehat{\times} M_2$ es un isoespacio topológico, tal y como queríamos probar.

b) Nivel de proyección:

Sean $(\overline{\widehat{M_1}}, \overline{\widehat{\aleph_1}})$ y $(\overline{\widehat{M_2}}, \overline{\widehat{\aleph_2}})$ dos isoespacios topológicos en el nivel de proyección, cualesquiera, levantados isotópicos de dos espacios convencionales M_1 y M_2. Consideremos el producto topológico usual $\overline{\widehat{M_1}} \times \overline{\widehat{M_2}} \equiv \overline{\widehat{M_1} \times \widehat{M_2}} \equiv \overline{M_1 \widehat{\times} M_2}$, que es por construcción un isoespacio en el nivel de proyección. Construyamos además la familia $\overline{\widehat{\aleph}} = \overline{\widehat{\aleph_1}} \times \overline{\widehat{\aleph_2}} = \left\{ \overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{B}} : \overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph_1}}, \overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph_2}} \right\}$, siendo $\overline{\widehat{\aleph}}_{(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}})} =$

$\overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{X}}} \times \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Y}}} = \left\{ \overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{B}} : \overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{X}}}, \overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Y}}} \right\}$. Se tiene entonces que $\overline{\widehat{\aleph}}$ es un sistema fundamental de isoentornos en $\overline{\widehat{M_1}} \times \overline{\widehat{M_2}}$, pues fijado $(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}) \in \overline{\widehat{M_1}} \times \overline{\widehat{M_2}}$, se cumple que:

a) Si $\overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}})}$, será $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{X}}}$ y $\overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Y}}}$. Luego, al ser $\overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{X}}}$ y $\overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Y}}}$ sistemas fundamentales de isoentornos de $\overline{\widehat{X}}$ e $\overline{\widehat{Y}}$ respectivamente, deberá ser $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{A}}$ e $\overline{\widehat{Y}} \in \overline{\widehat{B}}$. Así pues, $(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}}) \in \overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{B}}$.

b) Sea $\overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}})}$ y $\overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{B}} \subseteq \overline{\widehat{C}} \times \overline{\widehat{D}} \subseteq \overline{\widehat{M_1}} \times \overline{\widehat{M_2}}$. Será entonces $\overline{\widehat{A}} \subseteq \overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{M_1}}$ y $\overline{\widehat{B}} \subseteq \overline{\widehat{D}} \subseteq \overline{\widehat{M_2}}$. Con lo cual, al ser $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{X}}}$ y $\overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Y}}}$, se tendrá que $\overline{\widehat{C}} \in \overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{X}}}$ y $\overline{\widehat{D}} \in \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Y}}}$. De esta forma, $\overline{\widehat{C}} \times \overline{\widehat{D}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}})}$.

c) Sea $\{(\overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{B}}), (\overline{\widehat{C}} \times \overline{\widehat{D}})\} \subseteq \overline{\widehat{\aleph}}_{(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}})}$. Será entonces $\{\overline{\widehat{A}}, \overline{\widehat{C}}\} \subseteq \overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{X}}}$ y $\{\overline{\widehat{B}}, \overline{\widehat{D}}\} \subseteq \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Y}}}$. Así pues, $\overline{\widehat{A}} \cap \overline{\widehat{C}} \in \overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{X}}}$ y $\overline{\widehat{B}} \cap \overline{\widehat{D}} \in \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Y}}}$; con lo cual, $(\overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{B}}) \cap (\overline{\widehat{C}} \times \overline{\widehat{D}}) = (\overline{\widehat{A}} \cap \overline{\widehat{C}}) \times (\overline{\widehat{B}} \cap \overline{\widehat{D}}) \in \overline{\widehat{\aleph}}_{(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}})}$.

d) Sea $\overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}})}$. Será $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{X}}}$ y $\overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Y}}}$. Luego, existe $\overline{\widehat{K_1}}$ tal que será $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{Z}}}$ para todo $\overline{\widehat{Z}} \in \overline{\widehat{K_1}}$ y existe $\overline{\widehat{K_2}} \in \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Y}}}$ tal que $\overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Z}}}$ para todo $\overline{\widehat{Z}} \in \overline{\widehat{K_2}}$. Así pues, tenemos la existencia de $\overline{\widehat{K_1}} \times \overline{\widehat{K_2}} \in \overline{\widehat{\aleph_1}}_{(\overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{Y}})}$ tal que $\overline{\widehat{A}} \times \overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph_1}}_{\overline{\widehat{Z_1}}} \times \overline{\widehat{\aleph_2}}_{\overline{\widehat{Z_2}}}$ para todo $(\overline{\widehat{Z_1}}, \overline{\widehat{Z_2}}) \in \overline{\widehat{K_1}} \times \overline{\widehat{K_2}}$.

Llegamos por tanto a que $(\overline{\widehat{M_1}} \times \overline{\widehat{M_2}}, \overline{\widehat{\aleph_1}} \times \overline{\widehat{\aleph_2}})$ es un isoespacio topológico, tal y como buscábamos. $\square$

Hagamos notar que en el apartado (b) de la anterior demostración, una vez visto que $\overline{\widehat{M_1}} \times \overline{\widehat{M_2}}$ es un isoespacio en el nivel de proyección, el resto de la prueba no es más que una reescritura de la prueba en el nivel convencional de que el producto topológico de espacios topológicos es otro espacio topológico. Esto es debido al hecho, como ya vimos con anterioridad, de que todo isoespacio topológico no es más que un espacio topológico que se obtiene por levantamiento isotópico de otro en el nivel convencional. Ahora bien, aunque esta prueba podría por tanto haberse reducido, esto no va a ser posible para todos los resultados relativos al nivel de proyección, puesto que a veces será necesario imponer la inyectividad de la isotopía utilizada en la construcción realizada. Es por ello por lo que creemos conveniente no pasar rápidamente por este tipo de pruebas, pese a ser a veces mera repetición de pruebas conocidas en el nivel convencional.

Señalemos además que al isoespacio $\widehat{M_1} \times \widehat{M_2}$ anterior se le dará el nombre de *isoespacio topológico producto*, siendo $\overline{\widehat{M_1}} \times \overline{\widehat{M_2}}$ un *isoespacio topológico producto en el nivel de proyección.* Se considerará por tanto a partir de ahora que todo isoespacio topológico producto que aparezca en nuestro estudio estará dotado de un sistema fundamental de isoentornos siguiendo el modelo de construcción dado en la demostración de la Proposición 5.5, a menos que se indique lo contrario.

6 Isopuntos isoadherentes

Pasamos a continuación a dar la definición de isopunto isoadherente en un isoespacio isotopológico. Lo vemos en primer lugar en el nivel isotópico:

Definición 6.1 *Sea $(\widehat{M}, \widehat{\aleph})$ un isoespacio topológico, levantado isotópico de un espacio topológico M. Se dice que un isopunto $\widehat{X} \in \widehat{M}$ es* adherente *a un conjunto $\widehat{C} \subseteq \widehat{M}$ si todo isoentorno de $\widehat{X}$ contiene isopuntos de $\widehat{C}$. Es decir, si $\widehat{A} \cap \widehat{C} \neq \emptyset$, para todo $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Esto es, si $\widehat{X}$ es adherente a $\widehat{C}$, considerando a $\widehat{M}$ como espacio topológico.*

Diremos que $\widehat{X}$ es isoadherente *a $\widehat{C}$ si siendo adherente a $\widehat{C}$ es además levantado isotópico de un punto adherente al conjunto $C \subseteq M$, del cual* *se levanta isotópicamente $\widehat{C}$.*

Se tiene entonces el resultado siguiente:

Proposición 6.2 *Sea $(\widehat{M}, \widehat{\aleph})$ un isoespacio topológico, levantado isotópico de un espacio topológico $(M, \aleph)$. Se verifica entonces que, dado un conjunto $\widehat{C} \subseteq \widehat{M}$, levantado isotópico de un conjunto $C \subseteq M$, y un isopunto $\widehat{X} \in \widehat{M}$, levantado isotópico de un punto $X \in M$, se cumple que X es adherente a C si y sólo si $\widehat{X}$ es adherente a $\widehat{C}$. Como consecuencia, las nociones de isopunto adherente e isopunto isoadherente en el nivel isotópico son equivalentes.*

Demostración

Lo vemos por doble implicación:

a) $\Rightarrow$

Supongamos que X es adherente a C. Para ver que $\widehat{X}$ es adherente a $\widehat{C}$ tomamos un isoentorno $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Por construcción tendremos $A \in \aleph_X$, que verificará que $A \cap C \neq \emptyset$, al ser X adherente a C. Con lo cual, $\widehat{A} \cap \widehat{C} \neq \emptyset$, pues $\widehat{A} \cap \widehat{C} \supseteq \widehat{A \cap C} \neq \emptyset$. Como $\widehat{A}$ era arbitrario en $\widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, llegamos a que $\widehat{X}$ es adherente a $\widehat{C}$.

b) $\Leftarrow$

Supongamos ahora que $\widehat{X}$ es adherente a $\widehat{C}$. Para ver que X es adherente a C tomamos un entorno $A \in \aleph_X$. Por construcción será $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ y así, al ser $\widehat{X}$ adherente a $\widehat{C}$, tenemos que $\widehat{A} \cap \widehat{C} \neq \emptyset$. Ahora bien, $\widehat{A} \cap \widehat{C} = \widehat{A \cap C}$. Con lo cual, $\widehat{A \cap C} \neq \emptyset$ y así, $A \cap C \neq \emptyset$. Como A era arbitrario en $\aleph_X$, llegamos a que X es adherente a C.

La consecuencia del enunciado es entonces evidente por lo anterior, atendiendo a la Definición 6.1. $\square$

A continuación vemos el mismo concepto en el nivel de proyección:

Definición 6.3 *Sea* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}})$ *un isoespacio (iso)topológico, levantado isotópico en el nivel de proyección de un espacio* M*. Se dice que un isopunto* $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{M}}$ *es* adherente en el nivel de proyección a un conjunto $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$ *si todo isoentorno de* $\overline{\widehat{X}}$ *contiene isopuntos de* $\overline{\widehat{C}}$*. Es decir, si* $\overline{\widehat{A}} \cap \overline{\widehat{C}} \neq \emptyset$*, para todo* $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$*. Esto es, si* $\overline{\widehat{X}}$ *es adherente a* $\overline{\widehat{C}}$*, considerando a* $\overline{\widehat{M}}$ *como espacio topológico.*

Diremos que $\overline{\widehat{X}}$ *es* isoadherente en el nivel de proyección a $\overline{\widehat{C}}$ *si siendo adherente a* $\overline{\widehat{C}}$ *es además levantado isotópico de un punto adherente al conjunto* $C \subseteq M$*, del cual se levanta isotópicamente* $\overline{\widehat{C}}$*.*

Obtenemos de esta forma el siguiente resultado:

Proposición 6.4 *Sea* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}})$ *un isoespacio isotopológico, levantado isotópico en el nivel de proyección de un espacio topológico* $(M, \aleph)$*. Se verifica entonces que, dado un conjunto* $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$*, levantado isotópico de un conjunto* $C \subseteq M$*, y un isopunto* $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{M}}$*, levantado isotópico de un punto* $X \in M$*, se tiene que:*

a) Si X *es adherente a* C*, entonces* $\overline{\widehat{X}}$ *es adherente a* $\overline{\widehat{C}}$*. Si además el levantamiento isotópico es inyectivo, entonces se tiene el recíproco.*

b) Si X *es adherente a* C*, entonces* $\overline{\widehat{X}}$ *es isoadherente a* $\overline{\widehat{C}}$*. Si además el levantamiento isotópico es inyectivo, entonces se tiene el recíproco.*

Demostración

a) Lo vemos por doble implicación:

a.1) $\Rightarrow$

Análogo al apartado (a) de la demostración de la Proposición 6.2, reescribiendo $\overline{\widehat{\ }}$ en lugar de $\widehat{\ }$.

a.2) $\Leftarrow$

Análogo al apartado (b) de la demostración de la Proposición 6.2, reescribiendo $\overline{\widehat{\ }}$ en lugar de $\widehat{\ }$, si bien aquí hay que tener en cuenta que $\overline{\widehat{A}} \cap \overline{\widehat{C}} = \overline{\widehat{A \cap C}}$ al ser inyectivo por hipótesis el levantamiento isotópico utilizado.

b) De nuevo por doble implicación:

b.1) $\Rightarrow$

Supongamos ahora que X es adherente a C. Aplicando el apartado anterior llegamos a que $\overline{\widehat{X}}$ es adherente a $\overline{\widehat{C}}$. Ahora bien, como $\overline{\widehat{X}}$ es además el levantado isotópico de un punto adherente a C, llegamos a que $\overline{\widehat{X}}$ es isoadherente a $\overline{\widehat{C}}$, como queríamos probar.

b.2) $\Leftarrow$

Por definición, si $\overline{\widehat{X}}$ es isoadherente a $\overline{\widehat{C}}$, entonces $\overline{\widehat{X}}$ es adherente a $\overline{\widehat{C}}$, con lo que, aplicando el apartado anterior, llegamos a que X es adherente a C. $\square$

La consecuencia más interesante del resultado que acabamos de ver es que en general, los conceptos de isopunto adherente e isopunto isoadherente en el nivel de proyección no son equivalentes, en contraposición a lo que ocurría en el nivel isotópico. Sí tendremos esta equivalencia en los casos en que el levantamiento isotópico con el que se esté trabajando sea inyectivo.

Podemos dar ahora la definición de cerrado de un isoespacio topológico:

Definición 6.5 *En las condiciones de la Definición 6.1, al conjunto de isopuntos adherentes a $\widehat{C}$ se le denomina* clausura de $\widehat{C}$ *y se denota por* $\mathbf{Cl}(\widehat{C})$.

Por otra parte, $\widehat{C}$ se dirá cerrado *de $\widehat{M}$ si coincide con su clausura, esto es, si $\widehat{C} = \mathbf{Cl}(\widehat{C})$.*

Observemos que según las definiciones que acabamos de ver, los conceptos de clausura de un conjunto isotópico y de cerrado de un isoespacio topológico coinciden con las nociones convencionales respectivas, considerando $\widehat{M}$ con su estructura de espacio topológico. Como tal, todas las propiedades y resultados convencionales acerca de estas nociones pueden referirse sin ningún problema al nivel isotópico. Así tenemos en particular, atendiendo a las Definiciones 6.1 y 6.5, el siguiente resultado:

Proposición 6.6 *En las condiciones de la Definición 6.1, se tiene que:*

a) $\widehat{C} \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{C})$.

b) Si $\widehat{C} \subseteq \widehat{D}$, para un cierto conjunto $\widehat{D} \subseteq \widehat{M}$, entonces $\mathbf{Cl}(\widehat{C}) \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{D})$.

Demostración

a) Dado $\widehat{X} \in \widehat{C}$, resulta que todo isoentorno $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ verifica que $\widehat{X} \in \widehat{A}$, con lo que $\widehat{A} \cap \widehat{C} \neq \emptyset$. Como $\widehat{A}$ era arbitrario en $\widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, llegamos a que $\widehat{X}$ es adherente a $\widehat{C}$ y así, al ser $\widehat{X}$ arbitrario en $\widehat{C}$, llegamos a que $\widehat{C} \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{C})$.

b) Sea $\widehat{X} \in \mathbf{Cl}(\widehat{C})$. Dado entonces $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, se tiene que $\widehat{A} \cap \widehat{C} \neq \emptyset$. Con esto, $\widehat{A} \cap \widehat{D} \neq \emptyset$, pues $\widehat{A} \cap \widehat{D} \supseteq \widehat{A} \cap \widehat{C} \neq \emptyset$, al ser $\widehat{C} \subseteq \widehat{D}$. Con lo cual, al ser $\widehat{A}$ arbitrario en $\widehat{\aleph}$, llegamos a que $\widehat{X}$ es adherente a $\widehat{D}$. Como $\widehat{X}$ era arbitrario en $\mathbf{Cl}(\widehat{C})$, obtenemos que $\mathbf{Cl}(\widehat{C}) \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{D})$. $\square$

Un nuevo aspecto que debemos estudiar es la relación existente entre los cerrados del espacio M de partida y los cerrados del isoespacio $\widehat{M}$.

Supondremos por tanto que $\widehat{M}$ se construye a partir de M, siguiendo el modelo de construcción que vimos en la demostración de la Proposición 5.2. Así llegamos al siguiente:

Corolario 6.7 *En las condiciones de la Definición 6.1, si* $\widehat{M}$ *es un isoespacio topológico asociado a un espacio topológico* M*, resulta que* $\widehat{\mathbf{Cl}(C)} = \mathbf{Cl}(\widehat{C})$*. Además, se tiene que* C *es un cerrado de* M *si y sólo si* $\widehat{C}$ *es un cerrado de* $\widehat{M}$*.*

Demostración

Aplicando la Proposición 6.2 y atendiendo a la definición de clausura, llegamos a que $\widehat{\mathbf{Cl}(C)} = \mathbf{Cl}(\widehat{C})$, teniéndose de esta forma la primera parte del enunciado.

Veamos ahora la segunda parte del resultado. Para ello tomemos en primer lugar un cerrado C de M. Se tendrá entonces que $C = \mathbf{Cl}(C)$. De esta forma, $\widehat{C} = \widehat{\mathbf{Cl}(C)} = \mathbf{Cl}(\widehat{C})$ y así, $\widehat{C} = \mathbf{Cl}(\widehat{C})$, siendo por tanto $\widehat{C}$ un cerrado de $\widehat{M}$.

Recíprocamente, si $\widehat{C}$ es un cerrado de $\widehat{M}$, será $\widehat{C} = \mathbf{Cl}(\widehat{C}) = \widehat{\mathbf{Cl}(C)}$. Con lo cual debe ser $C = \mathbf{Cl}(C)$, siendo así C es un cerrado de M, lo que termina de demostrar nuestro resultado. □

A continuación pasamos a ver el concepto análogo de isopunto adherente en el nivel de proyección:

Definición 6.8 *En las condiciones de la Definición 6.3, al conjunto de isopuntos adherentes a* $\overline{\widehat{C}}$ *se le denomina* clausura de $\overline{\widehat{C}}$ *y se denota por* $\mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$*. Al conjunto de isopuntos isoadherentes a* $\overline{\widehat{C}}$ *se le denomina* isoclausura de $\overline{\widehat{C}}$ *y se denota por* $\widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}})$*.*

Por otra parte, $\overline{\widehat{C}}$ *se dirá* cerrado de $\overline{\widehat{M}}$ *si coincide con su clausura, esto es, si* $\overline{\widehat{C}} = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$*.* $\overline{\widehat{C}}$ *se dirá* isocerrado de $\overline{\widehat{M}}$ *si coincide con su* *isoclausura, es decir, si* $\overline{\widehat{C}} = \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}})$.

Atendiendo a las Definiciones 6.3 y 6.8, llegamos al siguiente resultado:

Proposición 6.9 *En las condiciones de la Definición 6.3, se tiene que:*

a) $\overline{\widehat{C}} \cup \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$ y $\overline{\widehat{C}} \subseteq \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}})$.

b) Si $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{D}}$, para un cierto conjunto $\overline{\widehat{D}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$, entonces $\mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{D}})$. Si además el levantamiento isotópico que construye $\overline{\widehat{M}}$ es inyectivo, entonces $\widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{D}})$.

c) De hecho, si $\overline{\widehat{M}}$ es un isoespacio isotopológico construido por medio de una isotopía inyectiva, entonces $\widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}}) = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$ y así, el conjunto de cerrados de $\overline{\widehat{M}}$ coincide con el conjunto de isocerrados de $\overline{\widehat{M}}$.

Demostración

a) En primer lugar, está claro por definición que todo isopunto isoadherente a $\overline{\widehat{C}}$ es adherente a $\overline{\widehat{C}}$, con lo cual, $\widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$.

En segundo lugar, dado $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{C}}$, resulta que todo isoentorno $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$ verifica que $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{A}}$, con lo que $\overline{\widehat{A}} \cap \overline{\widehat{C}} \neq \emptyset$. Como $\overline{\widehat{A}}$ era arbitrario en $\overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$, llegamos a que $\overline{\widehat{X}}$ es adherente a $\overline{\widehat{C}}$ y así, al ser $\overline{\widehat{X}}$ arbitrario en $\overline{\widehat{C}}$, llegamos a que $\overline{\widehat{C}} \subseteq \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$.

Por otro lado, como además todo $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{C}}$ verifica que es el levantado isotópico de un punto $X \in C$, que sabemos que es adherente al propio C, llegaríamos a que $\overline{\widehat{X}}$ no sólo es adherente sino que es isoadherente a $\overline{\widehat{C}}$. Así pues llegamos a que $\overline{\widehat{C}} \subseteq \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}})$, como buscábamos.

b) La primera parte es análoga al apartado (b) de la demostración de la Proposición 6.6, reescribiendo $\overline{\widehat{\ }}$ en lugar de $\widehat{\ }$

Supongamos ahora que el levantamiento isotópico que construye $\overline{\widehat{M}}$ es inyectivo. De esta forma, si $\overline{\widehat{X}}$ es el levantado isotópico de un punto X adherente a C, este último será adherente a D, pues $C \subseteq D$, ya que $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{D}}$ y el levantamiento isotópico utilizado es inyectivo por hipótesis. Con lo cual, $\overline{\widehat{X}}$ es isoadherente a $\overline{\widehat{D}}$ y así tenemos finalmente que $\widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{D}})$.

c) Evidente por el apartado (b) de la Proposición 6.4, bajo cuyas condiciones nos encontramos al ser por hipótesis inyectivo el levantamiento isotópico que usamos, siendo así $\overline{\widehat{X}}$ isoadherente a $\overline{\widehat{C}}$ si y sólo si es adherente a $\overline{\widehat{C}}$.

En cuanto a los conjuntos de los cerrados y los isocerrados de $\overline{\widehat{M}}$, el resultado se tiene a partir de lo que acabamos de ver y de las definiciones de estos conjuntos. $\square$

Veamos por último la relación existente entre los cerrados del espacio M de partida y los cerrados e isocerrados del isoespacio $\overline{\widehat{M}}$. Para ello debemos tener que M sea un espacio topológico, para poder hablar así de sus cerrados. Tendremos pues que $\overline{\widehat{M}}$ será un isoespacio isotopológico. Supondremos por tanto que $\overline{\widehat{M}}$ se construye a partir de M, siguiendo el modelo de construcción que vimos en la demostración de la Proposición 5.4. Así llegamos al siguiente:

Corolario 6.10 *En las condiciones de la Definición 6.1, si $\overline{\widehat{M}}$ es un isoespacio isotopológico asociado a un espacio topológico M, mediante un levantamiento isotópico inyectivo, resulta que $\overline{\widehat{\mathbf{Cl}(C)}} = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}}) = \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}})$. Además, se tiene que C es un cerrado de M si y sólo si $\overline{\widehat{C}}$ es un cerrado de $\overline{\widehat{M}}$ (de hecho un isocerrado).*

Demostración

Según el apartado (c) de la Proposición 6.9, ya tenemos que $\mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}}) = \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}})$. Ahora, aplicando el apartado (a) de la Proposición 6.2, llegamos a que $\overline{\widehat{\mathbf{Cl}(C)}} = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$. Con lo cual, $\overline{\widehat{\mathbf{Cl}(C)}} = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}}) = \widehat{\mathbf{Cl}}(\overline{\widehat{C}})$, como queríamos probar.

El último resultado de la Proposición 6.9 permite probar ahora la segunda parte del enunciado, sólo viéndolo para cerrados de $\overline{\widehat{M}}$, teniéndose de forma inmediata para isocerrados de $\overline{\widehat{M}}$. Así, si C es un cerrado de M, será $C = \mathbf{Cl}(C)$. De esta forma, $\overline{\widehat{C}} = \overline{\widehat{\mathbf{Cl}(C)}} = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$ y así, $\overline{\widehat{C}} = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}})$, siendo por tanto $\overline{\widehat{C}}$ un cerrado de $\overline{\widehat{M}}$.

Recíprocamente, si $\overline{\widehat{C}}$ es un cerrado de $\overline{\widehat{M}}$, será $\overline{\widehat{C}} = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{C}}) = \overline{\widehat{\mathbf{Cl}(C)}}$. Entonces, dado que la isotopía utilizada es inyectiva, llegamos a que debe ser $C = \mathbf{Cl}(C)$, con lo cual C es un cerrado de M, lo que termina de demostrar nuestro resultado. $\square$

7 Isopuntos isointeriores

A continuación pasamos a estudiar el interior de un conjunto de un isoespacio (iso)topológico:

Definición 7.1 *Sea $(\widehat{M}, \widehat{\aleph})$ un isoespacio topológico, levantado isotópico de un espacio M. Se dice que un isopunto $\widehat{X} \in \widehat{M}$ es* interior *a un* conjunto *$\widehat{C} \subseteq \widehat{M}$ si existe un isoentorno de $\widehat{X}$ contenido en $\widehat{C}$, esto es, si existe $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ tal que $\widehat{A} \subseteq \widehat{C}$. Es decir, si $\widehat{X}$ es interior a $\widehat{C}$, considerando a $\widehat{M}$ como espacio topológico.*

Diremos que $\widehat{X}$ es isointerior a *$\widehat{C}$ si siendo interior a $\widehat{C}$ es además levantado isotópico de un punto interior al conjunto $C \subseteq M$, del cual se levanta isotópicamente $\widehat{C}$.*

Se tiene entonces la siguiente:

Proposición 7.2 *Sea $(\widehat{M}, \widehat{\aleph})$ un isoespacio isotopológico, levantado isotópico de un espacio topológico $(M, \aleph)$. Se verifica entonces que, dado un conjunto $\widehat{C} \subseteq \widehat{M}$, levantado isotópico de un conjunto $C \subseteq M$, y un isopunto $\widehat{X} \in \widehat{M}$, levantado isotópico de un punto $X \in M$, se cumple que X es interior a C si y sólo si $\widehat{X}$ es interior a $\widehat{C}$. Como consecuencia se deduce que las nociones de isopunto interior e isopunto isointerior en el nivel isotópico son equivalentes.*

Demostración

Lo vemos por doble implicación:

a) $\Rightarrow$

Supongamos que X es interior a C. Resulta entonces que existe $A \in \aleph_X$ tal que $A \subseteq C$. Será así $\widehat{A} \subseteq \widehat{C}$, siendo $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, por construcción. Así, $\widehat{X}$ es interior a $\widehat{C}$, como buscábamos.

b) $\Leftarrow$

Supongamos ahora que $\widehat{X}$ es interior a $\widehat{C}$. Entonces, existe $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ tal que $\widehat{A} \subseteq \widehat{C}$. Con lo cual, llegamos a que existe $A \in \aleph_X$, siendo $A \subseteq C$, por construcción. Obtenemos de esta forma que X es interior a C.

La consecuencia mencionada en el enunciado resulta evidente entonces a partir de lo anterior y de la Definición 7.1. $\square$

Estudiemos a continuación este mismo concepto en el nivel de proyección:

Definición 7.3 *Sea $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}})$ un isoespacio (iso)topológico, levantado isotópico de un espacio M. Se dice que un isopunto $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{M}}$ es* interior en el nivel de proyección a un conjunto $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$ *si existe un isoentorno de* $\overline{\widehat{X}}$ *contenido en* $\overline{\widehat{C}}$*, esto es, si existe* $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$ *tal que* $\overline{\widehat{A}} \subseteq \overline{\widehat{C}}$*. Es decir, si* $\overline{\widehat{X}}$ *es interior a* $\overline{\widehat{C}}$*, considerando a* $\overline{\widehat{M}}$ *como espacio topológico.*

Diremos que $\overline{\widehat{X}}$ *es* isointerior en el nivel de proyección a $\overline{\widehat{C}}$ *si siendo interior a* $\overline{\widehat{C}}$ *es además levantado isotópico de un punto interior al conjunto* $C \subseteq M$*, del cual se levanta isotópicamente* $\overline{\widehat{C}}$*.*

Se tiene entonces la siguiente:

Proposición 7.4 *Sea* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}})$ *un isoespacio isotopológico, levantado isotópico de un espacio topológico* $(M, \aleph)$*. Se verifica entonces que, dado un conjunto* $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$*, levantado isotópico de un conjunto* $C \subseteq M$*, y un isopunto* $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{M}}$*, levantado isotópico de un punto* $X \in M$*, se tiene que:*

a) Si X *es interior a* C*, entonces* $\overline{\widehat{X}}$ *es interior a* $\overline{\widehat{C}}$*. Si además la isotopía utilizada es inyectiva, se tiene el recíproco.*

b) Si X *es interior a* C*, entonces* $\overline{\widehat{X}}$ *es isointerior a* $\overline{\widehat{C}}$*. Si además la isotopía utilizada es inyectiva, se tiene el recíproco.*

Demostración

a) Lo vemos por doble implicación:

a.1) $\Rightarrow$

La demostración es análoga al apartado (a) de la prueba de la Proposición 7.2, simplemente reescribiendo $\overline{\widehat{\ }}$ en lugar de $\widehat{\ }$.

a.2) $\Leftarrow$

Supongamos ahora que $\overline{\widehat{X}}$ es interior a $\overline{\widehat{C}}$. Entonces, existe $\overline{\widehat{A}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{X}}}$ tal que $\overline{\widehat{A}} \subseteq \overline{\widehat{C}}$. Como la isotopía utilizada es inyectiva por hipótesis, llegamos a que $A \subseteq C$, siendo $A \in \aleph_X$, por construcción. Con lo cual, X es interior a C.

b) De nuevo por doble implicación:

b.1) $\Rightarrow$

Si X es interior a C, tenemos por el apartado anterior que $\overline{\widehat{X}}$ es interior a $\overline{\widehat{C}}$. Como además $\overline{\widehat{X}}$ es el levantado isotópico de un punto interior a C, llegamos finalmente a que $\overline{\widehat{X}}$ es isointerior a $\overline{\widehat{C}}$, como pretendíamos.

b.2) $\Leftarrow$

Si $\overline{\widehat{X}}$ es isointerior a $\overline{\widehat{C}}$, será interior a $\overline{\widehat{C}}$ por definición. Aplicando entonces el apartado anterior llegamos a que X es interior a C. $\square$

Cabe destacar el hecho de que en el nivel de proyección los conceptos de isopunto interior e isopunto isointerior no son equivalentes en general. Sí lo son por ejemplo, según se deduce del resultado anterior, cuando el levantamiento isotópico utilizado en la construcción sea inyectivo.

Damos ahora la definición de abierto de un isoespacio topológico:

Definición 7.5 *En las condiciones de la Definición 7.1, al conjunto de isopuntos interiores de $\widehat{C}$ se le denomina* interior de $\widehat{C}$ *y se denota por* $\mathbf{int}(\widehat{C})$ *o bien por* $\overset{\circ}{\widehat{C}}$.

Por otra parte, $\widehat{C}$ se dirá abierto de $\widehat{M}$ *si coincide con su interior, esto es, si $\widehat{C} = \mathbf{int}(\widehat{C})$.*

De forma análoga a como hicimos en la Definición 6.5, observamos que según las definiciones que acabamos de ver, los conceptos de interior de un conjunto isotópico y de abierto de un isoespacio topológico coinciden con las nociones convencionales respectivas, considerando $\widehat{M}$ con su estructura de espacio topológico. Como tal, todas las propiedades y resultados convencionales acerca de estas nociones pueden referirse sin ningún problema al nivel isotópico. Así tenemos por ejemplo el siguiente resultado:

Proposición 7.6 *En las condiciones de la Definición 7.1, se tiene que:*

a) $\mathbf{int}(\widehat{C}) \subseteq \widehat{C}$.

b) Si $\widehat{C} \subseteq \widehat{D}$, para un cierto conjunto $\widehat{D} \subseteq \widehat{M}$, entonces $\mathbf{int}(\widehat{C}) \subseteq \mathbf{int}(\widehat{D})$.

c) $\widehat{C}$ es abierto de $\widehat{M}$ si y sólo si es isoentorno de todos sus isopuntos.

Demostración

a) Dado $\widehat{X} \in \mathbf{int}(\widehat{C})$, existe $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ tal que $\widehat{A} \subseteq \widehat{C}$. Ahora bien, por ser $\widehat{A}$ un isoentorno de $\widehat{X}$, debe ser $\widehat{X} \in \widehat{A}$ y así, $\widehat{X} \in \widehat{C}$. Como $\widehat{X}$ era arbitrario en $\mathbf{int}(\widehat{C})$, llegamos a que $\mathbf{int}(\widehat{C}) \subseteq \widehat{C}$, como queríamos probar.

b) Sea $\widehat{X} \in \mathbf{int}(\widehat{C})$. Existe por definición $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ tal que $\widehat{A} \subseteq \widehat{C}$. Ahora, por ser $\widehat{C} \subseteq \widehat{D}$, será $\widehat{A} \subseteq \widehat{D}$; con lo cual $\widehat{X} \in \mathbf{int}(\widehat{D})$. Al ser $\widehat{X}$ arbitrario en $\mathbf{int}(\widehat{C})$, llegamos finalmente a que $\mathbf{int}(\widehat{C}) \subseteq \mathbf{int}(\widehat{D})$.

c) Lo vemos por doble implicación:

c.1) $\Rightarrow$

Sea $\widehat{X} \in \widehat{C}$. Por ser $\widehat{C}$ abierto de $\widehat{M}$ será $\widehat{C} = \mathbf{int}(\widehat{C})$. Así, $\widehat{X}$ es un isopunto interior de $\widehat{C}$. Con lo cual existe $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$ tal que $\widehat{A} \subseteq \widehat{C}$. Aplicando entonces la propiedad (b) de la Definición 5.1 de un isoespacio isotopológico, llegamos a que $\widehat{C} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. De esta forma, $\widehat{C}$ es un isoentorno de $\widehat{X}$ y como $\widehat{X}$ era arbitrario en $\widehat{C}$, llegamos finalmente a que $\widehat{C}$ es isoentorno de todos sus isopuntos.

c.2) $\Leftarrow$

Supongamos ahora que $\widehat{C}$ es isoentorno de todos sus isopuntos. Resulta entonces que para todo $\widehat{X} \in \widehat{C}$, se tiene que $\widehat{C} \subseteq \widehat{C}$, siendo $\widehat{C} \in \aleph_{\widehat{X}}$. De esta forma, todo isopunto de $\widehat{C}$ es interior a $\widehat{C}$. Con lo cual, $\widehat{C} \subseteq \mathbf{int}(\widehat{C})$. Ahora bien, por el apartado (a) tenemos que la otra inclusión se da siempre. Así, llegamos a que $\widehat{C} = \mathbf{int}(\widehat{C})$, siendo por tanto $\widehat{C}$ abierto de $\widehat{M}$. □

Nos interesará además el siguiente resultado para su posterior uso:

Proposición 7.7 *Los abiertos de un isoespacio topológico producto* $(\widehat{M_1} \times \widehat{M_2}, \widehat{\aleph_1} \times \widehat{\aleph_2})$ *coinciden con el conjunto de los productos topológicos de los abiertos de* $\widehat{M_1}$ *con los abiertos de* $\widehat{M_2}$.

Demostración

Sea $\widehat{U}$ un abierto de $\widehat{M_1} \times \widehat{M_2}$. Consideramos los conjuntos $\widehat{U}_{\widehat{M_1}} = \{\widehat{X} \in \widehat{M_1} : \exists\, \widehat{Y} \in \widehat{M_2} \text{ tal que } (\widehat{X}, \widehat{Y}) \in \widehat{U}\}$ y $\widehat{U}_{\widehat{M_2}} = \{\widehat{Y} \in \widehat{M_2} : \exists\, \widehat{X} \in \widehat{M_1}$ tal que $(\widehat{X}, \widehat{Y}) \in \widehat{U}\}$. Será así $\widehat{U} = \widehat{U}_{\widehat{M_1}} \times \widehat{U}_{\widehat{M_2}}$. Además, $\widehat{U}_{\widehat{M_1}}$ y $\widehat{U}_{\widehat{M_2}}$ son abiertos de $\widehat{M_1}$ y $\widehat{M_2}$ respectivamente. Veremos esto para $\widehat{U}_{\widehat{M_1}}$, siendo análogo el desarrollo para $\widehat{U}_{\widehat{M_2}}$. Fijamos así $\widehat{X} \in \widehat{U}_{\widehat{M_1}}$. Existe entonces $\widehat{Y} \in \widehat{M_2}$ tal que $(\widehat{X}, \widehat{Y}) \in \widehat{U}$. Ahora, al ser $\widehat{U}$ un abierto de $\widehat{M_1} \times \widehat{M_2}$, existe $\widehat{A} \times \widehat{B} \in \widehat{\aleph_1} \times \widehat{\aleph_2}$ tal que $(\widehat{X}, \widehat{Y}) \in \widehat{A} \times \widehat{B} \subseteq \widehat{U} = \widehat{U}_{\widehat{M_1}} \times \widehat{U}_{\widehat{M_2}}$. Así, existe $\widehat{A} \in \widehat{\aleph_1}$ tal que $\widehat{X} \in \widehat{A} \subseteq \widehat{U}_{\widehat{M_1}}$; con lo cual, $\widehat{X}$ es interior a $\widehat{U}_{\widehat{M_1}}$. Como $\widehat{X}$ era arbitrario en $\widehat{U}_{\widehat{M_1}}$, llegamos a que $\widehat{U}_{\widehat{M_1}} \subseteq \mathbf{int}(\widehat{U}_{\widehat{M_1}})$. Ahora bien, por el apartado (a) de la Proposición 7.6, tenemos que $\mathbf{int}(\widehat{U}_{\widehat{M_1}}) \subseteq \widehat{U}_{\widehat{M_1}}$, con lo que finalmente, $int(\widehat{U}_{\widehat{M_1}}) = \widehat{U}_{\widehat{M_1}}$, siendo así $\widehat{U}_{\widehat{M_1}}$ un abierto de $\widehat{M_1}$, como buscábamos.

Análogamente, si $\widehat{U}$ y $\widehat{V}$ son abiertos respectivos de $\widehat{M_1}$ y $\widehat{M_2}$, tendremos que $\widehat{U} \times \widehat{V}$ es un abierto de $\widehat{M_1} \times \widehat{M_2}$. Para ver esto basta comprobar que $\widehat{U} \times \widehat{V} \subseteq \mathbf{int}(\widehat{U} \times \widehat{V})$, pues la otra contención se tiene siempre, según hemos visto en la Proposición 7.6. Sea por tanto $(\widehat{X},\widehat{Y}) \in \widehat{U} \times \widehat{V}$. Tendremos que $\widehat{X} \in \widehat{U} = \mathbf{int}(\widehat{U})$ e $\widehat{Y} \in \widehat{V} = \mathbf{int}(\widehat{V})$, donde estas igualdades se tienen al ser $\widehat{U}$ y $\widehat{V}$ abiertos respectivos de $\widehat{M_1}$ y $\widehat{M_2}$. Así, existe $\widehat{A} \in \widehat{\aleph_1}$ tal que $\widehat{X} \in \widehat{A} \subseteq \widehat{U}$ y existe $\widehat{B} \in \widehat{\aleph_2}$ tal que $\widehat{Y} \in \widehat{B} \subseteq \widehat{V}$. Con lo cual tenemos la existencia de $\widehat{A}\times\widehat{B} \in \widehat{\aleph_1}\times\widehat{\aleph_2}$, tal que $(\widehat{X},\widehat{Y}) \in \widehat{A}\times\widehat{B} \subseteq \widehat{U}\times\widehat{V}$, siendo por tanto $(\widehat{X},\widehat{Y}) \in \mathbf{int}(\widehat{U}\times\widehat{V})$. La arbitrariedad de $(\widehat{X},\widehat{Y})$ en $\widehat{U}\times\widehat{V}$ hace que finalmente sea $\widehat{U}\times\widehat{V} \subseteq \mathbf{int}(\widehat{U}\times\widehat{V})$, como queríamos. $\square$

Estudiamos ahora la relación existente entre los abiertos del espacio M de partida y los del isoespacio $\widehat{M}$:

Corolario 7.8 *En las condiciones de la Definición 7.1, si $\widehat{M}$ es un isoespacio topológico, asociado a un espacio topológico M, resulta que $\widehat{\mathbf{int}(C)} = \mathbf{int}(\widehat{C})$. Además se tiene que C es un abierto de M si y sólo si $\widehat{C}$ es un abierto de $\widehat{M}$.*

Demostración

Aplicando la Proposición 7.2, llegamos a que $\widehat{\mathbf{int}(C)} = \mathbf{int}(\widehat{C})$.

Veamos ahora la segunda parte del enunciado. Para ello tomamos un abierto C de M, que verificará por definición de abierto que $C = \mathbf{int}(C)$, siendo de esta forma, $\widehat{C} = \widehat{\mathbf{int}(C)} = \mathbf{int}(\widehat{C})$ y por tanto, $\widehat{C} = \mathbf{int}(\widehat{C})$, con lo cual $\widehat{C}$ es un abierto de $\widehat{M}$.

Finalmente, dado $\widehat{C}$ un abierto de $\widehat{M}$, será $\widehat{C} = \mathbf{int}(\widehat{C}) = \widehat{\mathbf{int}(C)}$. Debe ser entonces $C = \mathbf{int}(C)$. Así, C es un abierto de M, lo que termina de probar nuestro resultado. $\square$

Seguidamente relacionaremos los cerrados y los abiertos de un isoespacio topológico. Lo vemos en la siguiente:

Proposición 7.9 *Sea $(\widehat{M},\widehat{\aleph})$ un isoespacio topológico. Se tiene entonces* *que:*

a) $\widehat{M} \setminus \mathbf{int}(\widehat{A}) = \mathbf{Cl}(\widehat{M} \setminus \widehat{A})$. *En consecuencia, el complementario de un abierto es un cerrado.*

b) $\widehat{M} \setminus \mathbf{Cl}(\widehat{A}) = \mathbf{int}(\widehat{M} \setminus \widehat{A})$. *En consecuencia, el complementario de un cerrado es un abierto.*

c) $\mathbf{int}(\mathbf{int}(\widehat{A})) = \mathbf{int}(\widehat{A})$. *En consecuencia, el interior de cualquier conjunto isotópico es abierto.*

d) $\mathbf{Cl}(\mathbf{Cl}(\widehat{A})) = \mathbf{Cl}(\widehat{A})$. *En consecuencia, la clausura de cualquier conjunto isotópico es cerrado.*

Demostración

El resultado es evidente si consideramos que $\widehat{M}$ tiene estructura de espacio topológico y que entonces los conceptos de clausura, interior, abierto y cerrado coinciden con el caso convencional. $\square$

Observemos que en el resultado anterior tiene perfecto sentido considerar $\mathbf{int}(\mathbf{int}(\widehat{A}))$ o $\mathbf{Cl}(\mathbf{Cl}(\widehat{A}))$, ya que $\mathbf{int}(\widehat{A})$ y $\mathbf{Cl}(\widehat{A})$ son subconjuntos de $\widehat{M}$ y así, levantados isotópicos de ciertos subconjuntos de M. Tenemos además el siguiente:

Corolario 7.10 *Sea $(\widehat{M}, \widehat{\aleph})$ un isoespacio topológico. Se tiene entonces que:*

a) Un conjunto isotópico es abierto si y sólo si su complemento es cerrado.

b) Un conjunto isotópico es cerrado si y sólo si su complemento es abierto.

Demostración

El resultado se tiene sin más que aplicar la proposición anterior y procediendo similarmente al caso convencional. $\square$

A continuación estudiaremos los conceptos anteriores en el nivel de proyección:

Definición 7.11 *En las condiciones de la Definición 7.3, al conjunto de isopuntos interiores de* $\overline{\widehat{C}}$ *se le denomina* interior de $\overline{\widehat{C}}$ *y se denota por* $int(\overline{\widehat{C}})$ *o bien por* $\mathring{\overline{\widehat{C}}}$*. Al conjunto de isopuntos isointeriores de* $\overline{\widehat{C}}$ *se le denomina* isointerior de $\overline{\widehat{C}}$ *y se denota por* $\widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}})$ *o bien por* $\widehat{\mathring{\overline{\widehat{C}}}}$*.*

Por otra parte, $\overline{\widehat{C}}$ *se dirá* abierto de $\overline{\widehat{M}}$ *si coincide con su interior, esto es, si* $\overline{\widehat{C}} = \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}})$*.* $\overline{\widehat{C}}$ *se dirá* isoabierto de $\overline{\widehat{M}}$ *si coincide con su isointerior, es decir, si* $\overline{\widehat{C}} = \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}})$*.*

Se obtiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 7.12 *En las condiciones de la Definición 7.1, se tiene que:*

a) $\widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \overline{\widehat{C}}$.

b) Si $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{D}}$, para un cierto conjunto $\overline{\widehat{D}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$, entonces $\mathbf{int}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \mathbf{int}(\overline{\widehat{D}})$. Si el levantamiento isotópico que construye $\overline{\widehat{M}}$ es inyectivo, se tendrá además que $\widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{D}})$.

c) $\overline{\widehat{C}}$ es abierto de $\overline{\widehat{M}}$ si y sólo si es isoentorno de todos sus isopuntos.

d) Si $\overline{\widehat{M}}$ es un isoespacio isotopológico, construido por medio de una isotopía inyectiva, entonces $\mathbf{int}(\overline{\widehat{C}}) = \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}})$ y así, el conjunto de los abiertos de $\overline{\widehat{M}}$ coincide con el conjunto de isoabiertos de $\overline{\widehat{M}}$.

Demostración

a) En primer lugar, tenemos por definición que todo isopunto isointerior a $\overline{\widehat{C}}$ es interior a $\overline{\widehat{C}}$, con lo que $\widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}})$.

   La segunda contención es análoga a la dada en el apartado (a) de la prueba de la Proposición 7.6, simplemente reescribiendo $\overline{\widehat{\ }}$ en lugar de $\widehat{\ }$.

b) La primera parte del resultado es análoga a la dada en el apartado (b) de la prueba de la Proposición 7.6, simplemente escribiendo $\overline{\widehat{\ }}$ en lugar de $\widehat{\ }$.

   Supongamos ahora que el levantamiento isotópico que construye $\overline{\widehat{M}}$ es inyectivo. Se tendrá entonces que si $\overline{\widehat{X}}$ es el levantado isotópico de un punto interior a C, este último será interior a D, pues $C \subseteq D$ al ser $\overline{\widehat{C}} \subseteq \overline{\widehat{D}}$ y ser inyectivo el levantamiento citado. Con lo cual, $\overline{\widehat{X}}$ será isointerior a $\overline{\widehat{D}}$ y así, $\widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}}) \subseteq \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{D}})$, como estábamos buscando.

c) Se demuestra análogamente a la prueba dada del apartado (c) de la Proposición 7.6, simplemente reescribiendo $\overline{\widehat{\ }}$ en lugar de $\widehat{\ }$.

d) Evidente a partir de la Proposición 7.4, al ser inyectiva por hipótesis la isotopía utilizada, siendo así $\overline{\widehat{X}}$ interior a $\overline{\widehat{C}}$ si y sólo si $\overline{\widehat{X}}$ es isointerior a $\overline{\widehat{C}}$.

   En cuanto a los abiertos e isoabiertos de $\overline{\widehat{M}}$, el resultado se deduce de lo que acabamos de ver y de las definiciones de estos conjuntos. $\square$

Observamos en el resultado anterior que en general todo isoabierto de $\overline{\widehat{M}}$ es un abierto de $\overline{\widehat{M}}$, pues, aplicando el apartado (a) tendremos que $\overline{\widehat{C}} = \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}}) \Rightarrow \overline{\widehat{C}} = \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}})$. El recíproco no lo tenemos en general, aunque ya hemos visto en el apartado (d) que sí se tiene cuando $\overline{\widehat{M}}$ es un isoespacio isotopológico.

También tenemos el siguiente resultado análogo al visto en el nivel isotópico:

Proposición 7.13 *Los abiertos de un isoespacio topológico producto* $(\overline{\widehat{M_1}} \times \overline{\widehat{M_2}}, \overline{\widehat{\aleph_1}} \times \overline{\widehat{\aleph_2}})$ *coinciden con el conjunto de los productos topológicos de los abiertos de* $\overline{\widehat{M_1}}$ *con los abiertos de* $\overline{\widehat{M_2}}$*.*

Demostración

Se demuestra análogamente a la prueba de la Proposición 7.7, simplemente reescribiendo $\overline{\widehat{\ }}$ en lugar de $\widehat{\ }$. $\square$

Estudiamos ahora la relación existente entre los abiertos del espacio M de partida y los abiertos e isoabiertos del isoespacio $\overline{\widehat{M}}$. Debemos imponer para ello que M sea un espacio topológico o equivalentemente, que $\overline{\widehat{M}}$ sea un isoespacio isotopológico. Obtenemos así el siguiente:

Corolario 7.14 *En las condiciones de la Definición 7.3, si* $\overline{\widehat{M}}$ *es un isoespacio isotopológico, asociado a un espacio topológico* M*, mediante un levantamiento isotópico inyectivo, resulta que* $\overline{\widehat{\mathbf{int}(\mathbf{C})}} = \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}}) = \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}})$*. Además se tiene que* C *es un abierto de* M *si y sólo si* $\overline{\widehat{C}}$ *es un abierto de* $\overline{\widehat{M}}$ *(de hecho un isoabierto).*

Demostración

Aplicando el apartado (d) de la Proposición 7.12, ya tenemos que $\mathbf{int}(\overline{\widehat{C}}) = \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}})$. Ahora, aplicando la Proposición 7.4, llegamos a que $\overline{\widehat{\mathbf{int}(\mathbf{C})}} = \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}})$. Así, $\overline{\widehat{\mathbf{int}}(C)} = \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}}) = \widehat{\mathbf{int}}(\overline{\widehat{C}})$, como queríamos probar.

El último resultado de la Proposición 7.12 permite probar ahora la segunda parte del enunciado, sólo viéndolo para abiertos de $\overline{\widehat{M}}$, teniéndose de forma inmediata para isoabiertos de $\overline{\widehat{M}}$. Así, si C es un abierto de M, será $C = \mathbf{int}(C)$, siendo de esta forma, $\overline{\widehat{C}} = \overline{\widehat{\mathbf{int}(C)}} = \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}})$ y por tanto, $\overline{\widehat{C}} = \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}})$, con lo cual $\overline{\widehat{C}}$ es un abierto de $\overline{\widehat{M}}$.

Finalmente, dado $\overline{\widehat{C}}$ un abierto de $\overline{\widehat{M}}$, será $\overline{\widehat{C}} = \mathbf{int}(\overline{\widehat{C}}) = \overline{\widehat{\mathbf{int}(C)}}$. Entonces, dado que la isotopía utilizada para construir $\overline{\widehat{M}}$ es inyectiva, tenemos que $\overline{\widehat{C}} = \overline{\widehat{\mathbf{int}(C)}} \Rightarrow C = \mathbf{int}(C)$. Así, C es un abierto de M, lo que termina de probar nuestro resultado. □

Seguidamente relacionaremos los cerrados y los abiertos de un isoespacio topológico en el nivel de proyección, mediante resultados cuya prueba se reduce a la dada en el nivel convencional, excepto en que es necesario la reescritura con $\overline{\widehat{\ }}$:

Proposición 7.15 *Sea* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}})$ *un isoespacio topológico. Se tiene entonces que:*

a) $\overline{\widehat{M}} \setminus \mathbf{int}(\overline{\widehat{A}}) = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{M}} \setminus \overline{\widehat{A}})$. *En consecuencia, el complementario de un abierto es un cerrado.*

b) $\overline{\widehat{M}} \setminus \mathbf{Cl}(\widehat{A}) = \mathbf{int}(\overline{\widehat{M}} \setminus \overline{\widehat{A}})$. *En consecuencia, el complementario de un cerrado es un abierto.*

c) $\mathbf{int}(\mathbf{int}(\overline{\widehat{A}})) = \mathbf{int}(\overline{\widehat{A}})$. *En consecuencia, el interior de cualquier conjunto isotópico es abierto.*

d) $\mathbf{Cl}(\mathbf{Cl}(\overline{\widehat{A}})) = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{A}})$. *En consecuencia, la clausura de cualquier conjunto isotópico es cerrado.* □

Corolario 7.16 *Sea* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}})$ *un isoespacio topológico. Se tiene entonces que:*

a) Un conjunto isotópico es abierto si y sólo si su complemento es cerrado.

b) Un conjunto isotópico es cerrado si y sólo si su complemento es abierto. □

8 Isotopologías

Todo isoespacio topológico puede dotarse de una topología considerando su estructura de espacio topológico. Cuando esta topología se obtiene a partir de una topología del espacio del que se levanta isotópicamente, se obtiene la noción de isotopología. Al igual que hemos visto anteriormente, esta noción puede estudiarse tanto en el nivel isotópico como en el nivel de proyección. Comenzaremos analizando el primero de estos niveles:

Definición 8.1 *Sea $\widehat{M}$ un isoespacio, levantado isotópico de un espacio M. En caso de que M sea un espacio topológico de topología $\Upsilon = \{\emptyset, M, \cup_{\alpha \in A} U_\alpha\}$, diremos que $\widehat{M}$ es un* isoespacio isotopológico de isotopología $\widehat{\Upsilon} = \{\emptyset, \widehat{M}, \cup_{\alpha \in A} \widehat{U_\alpha}\}$, *donde $\widehat{U_\alpha}$ se construye levantando isotópicamente cada punto de U_α, usando para ello la isotopía que levanta M a $\widehat{M}$.*

Veamos que la definición anterior es coherente en la siguiente:

Proposición 8.2 *La isotopología $\widehat{\Upsilon}$ es una topología sobre $\widehat{M}$.*

Demostración.

Basta ver que $\widehat{\Upsilon}$ verifica los axiomas necesarios para ser una topología sobre $\widehat{M}$:

a) $\emptyset, \widehat{M} \in \widehat{\Upsilon}$, por definición de $\widehat{\Upsilon}$.

b) Dados $\widehat{U}, \widehat{V} \in \widehat{\Upsilon}$, será $\widehat{U} \cap \widehat{V} \in \widehat{\Upsilon}$. Para verlo tomamos $\widehat{P} \in \widehat{U} \cap \widehat{V}$. Entonces $\widehat{P} \in \widehat{U}$ y $\widehat{P} \in \widehat{V}$, con lo cual, por construcción de $\widehat{U}$ y $\widehat{V}$, se tendrá que $P \in U$ y $P \in V$; es decir, $P \in U \cap V$ y así, $\widehat{P} \in \widehat{U \cap V}$. Como $\widehat{P}$ era arbitrario en $\widehat{U} \cap \widehat{V}$, llegamos a que $\widehat{U} \cap \widehat{V} \subseteq \widehat{U \cap V}$. De hecho, de forma análoga se comprueba la otra inclusión, teniéndose por tanto que $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \widehat{U \cap V}$. Ahora, por ser Υ topología, será $U \cap V \in \Upsilon$, pues U y V son dos abiertos de Υ. Llegamos finalmente por tanto a que $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \widehat{U \cap V} \in \widehat{\Upsilon}$, como queríamos probar.

c) Sea $\{\widehat{U_\alpha}\}_{\alpha \in A}$ una colección arbitraria en $\widehat{\Upsilon}$. Entonces $\cup_{\alpha \in A} \widehat{U_\alpha} \in \widehat{\Upsilon}$. Para verlo, tomamos $\widehat{P} \in \cup_{\alpha \in A} \widehat{U_\alpha}$. Entonces, existe $\alpha \in A$ tal que $\widehat{P} \in \widehat{U_\alpha}$. Así, $P \in U_\alpha$, siendo por tanto $P \in \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ y finalmente, $\widehat{P} \in \widehat{\cup_{\alpha \in A} U_\alpha}$. Como $\widehat{P}$ es arbitrario, llegamos a que $\cup_{\alpha \in A} \widehat{U_\alpha} \subseteq \widehat{\cup_{\alpha \in A} U_\alpha}$. La otra contención se obtiene de forma similar, con lo cual llegamos a que $\cup_{\alpha \in A} \widehat{U_\alpha} = \widehat{\cup_{\alpha \in A} U_\alpha}$. Ahora bien, por ser Υ una topología, se tiene que $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \Upsilon$. Así pues, $\cup_{\alpha \in A} \widehat{U_\alpha} = \widehat{\cup_{\alpha \in A} U_\alpha} \in \widehat{\Upsilon}$, como queríamos probar. □

De esta forma, $\widehat{\Upsilon}$ tiene estructura de topología, siendo por tanto $\widehat{\Upsilon}$-abiertos los subconjuntos que la forman. Además, al ser levantados isotópicos de abiertos de Υ, diremos que los subconjuntos de $\widehat{\Upsilon}$ son $\widehat{\Upsilon}$-*isoabiertos de la isotopología.*

Por otro lado, llamaremos $\widehat{\Upsilon}$-*isoentorno de un isopunto* $\widehat{X} \in \widehat{M}$ a todo subconjunto $\widehat{A}$ de $\widehat{M}$ que admita la existencia de un $\widehat{\Upsilon}$-isoabierto $\widehat{U}$, tal que $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{A}$.

Llegamos además al siguiente resultado:

Proposición 8.3

a) La familia de todos los (iso)abiertos de un isoespacio isotopológico $(\widehat{M}, \widehat{\aleph})$, levantado isotópico de un espacio topológico $(M, \aleph)$, es una isotopología $\widehat{\Upsilon}$ sobre $\widehat{M}$, de modo que $\widehat{\aleph}$ coincide con su familia de $\widehat{\Upsilon}$-isoentornos.

b) Recíprocamente, si $\widehat{\Upsilon}$ es una isotopología sobre un isoespacio $\widehat{M}$, su familia de $\widehat{\Upsilon}$-isoabiertos $\widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}$ define sobre $\widehat{M}$ una isoestructura de isoespacio isotopológico cuya familia de (iso)abiertos coincide con $\widehat{\Upsilon}$.

Demostración

a) En el nivel convencional sabemos que la familia de los abiertos del espacio topológico $(M, \aleph)$ es una topología Υ sobre M. Tendremos entonces por construcción que el levantado isotópico de Υ, que coincide con la familia de los (iso)abiertos de $\widehat{M}$ al aplicar el Corolario 7.8, es la isotopología $\widehat{\Upsilon}$ sobre $\widehat{M}$ del enunciado.

   Para la segunda parte del resultado tomamos $\widehat{X} \in \widehat{M}$ arbitrario y $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Por construcción será $A \in \aleph_X$. Ahora bien, en el nivel convencional, $\aleph$ coincide con la familia de Υ-entornos. Con lo cual, A será un Υ-entorno de X y así, existe un Υ-abierto U tal que $X \in U \subseteq A$. O equivalentemente, existe un $\widehat{\Upsilon}$-isoabierto $\widehat{U}$ tal que $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{A}$. Así pues, $\widehat{A}$ es un $\widehat{\Upsilon}$-isoentorno de $\widehat{X}$ y, al ser $\widehat{A}$ arbitrario en $\widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, llegamos a que todo isoentorno de $\widehat{M}$ es un $\widehat{\Upsilon}$-isoentorno.

   Recíprocamente, sea $\widehat{A}$ un $\widehat{\Upsilon}$-isoentorno de $\widehat{X} \in \widehat{M}$. Por definición, existe $\widehat{U} \in \widehat{\Upsilon}$ tal que $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{A}$. O equivalentemente, existe $U \in \Upsilon$ tal que $X \in U \subseteq A$. Con lo cual, A es un Υ-entorno de $X \in M$. Ahora bien, en el nivel convencional, $\aleph$ coincide con la familia de Υ-entornos. Así pues, $A \in \aleph_X$ y por tanto, por construcción, llegamos a que $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. Ahora, al ser $\widehat{A}$ arbitrario, llegamos a que todo $\widehat{\Upsilon}$-isoentorno es un isoentorno de $\widehat{M}$, tal y como queríamos probar.

b) Veamos que $(\widehat{M}, \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}})$ es un isoespacio isotopológico. Para ello bastará ver que se verifican las condiciones de la Definición 5.1:

b.1) Sea $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$. Existe entonces $\widehat{U} \in \widehat{\Upsilon}$ tal que $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{A}$. Luego, $\widehat{X} \in \widehat{A}$.

b.2) Sean $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$ y $\widehat{A} \subseteq \widehat{B} \subseteq \widehat{M}$. Por ser $\widehat{A}$ un $\widehat{\Upsilon}$-isoentorno de $\widehat{X}$, existe $\widehat{U} \in \widehat{\Upsilon}$, tal que $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{A}$. Ahora, al ser $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$, tenemos que $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{B}$, con lo que $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$.

b.3) Supongamos ahora que $\{\widehat{A}, \widehat{B}\} \subseteq \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$. Serán entonces $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$ y $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$. Así, existirán $\widehat{U}, \widehat{V} \in \widehat{\Upsilon}$, tales que $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{A}$ y $\widehat{X} \in \widehat{V} \subseteq \widehat{B}$. Así, $\widehat{X} \in \widehat{U} \cap \widehat{V} \subseteq \widehat{A} \cap \widehat{B}$. Ahora bien, por ser $\widehat{\Upsilon}$ una isotopología, tenemos que $\widehat{U} \cap \widehat{V} \in \widehat{\Upsilon}$ y así, $\widehat{A} \cap \widehat{B} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$.

b.4) Sea $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$. Existirá entonces $\widehat{U} \in \widehat{\Upsilon}$ tal que $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{A}$. Como será $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{U}$, tendremos que $\widehat{U} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$. Ahora, para todo $\widehat{Z} \in \widehat{U}$, $\widehat{Z} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{A}$; con lo cual, $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{Z}}$, para todo $\widehat{Z} \in \widehat{U} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$.

Así pues, $(\widehat{M}, \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}})$ es un isoespacio isotopológico.

Para ver la segunda parte del resultado, tomamos $\widehat{U}$ abierto de $\widehat{M}$. Fijado entonces $\widehat{X} \in \widehat{U}$, tendremos que es un isopunto interior de $\widehat{U}$. De esta forma, existe $\widehat{A}_{\widehat{X}} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$, tal que $\widehat{X} \in \widehat{A}_{\widehat{X}} \subseteq \widehat{U}$. Ahora, por ser $\widehat{A}_{\widehat{X}} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$, existe $\widehat{V}_{\widehat{X}} \in \widehat{\Upsilon}$ tal que $\widehat{X} \in \widehat{V}_{\widehat{X}} \subseteq \widehat{A}_{\widehat{X}} \subseteq \widehat{U}$. Como esto se tiene para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$, llegamos a que $\widehat{U} = \cup_{\widehat{X} \in \widehat{U}} \widehat{V}_{\widehat{X}}$; con lo que $\widehat{U} \in \widehat{\Upsilon}$ al ser unión arbitraria de $\widehat{\Upsilon}$-isoabiertos y ser $\widehat{\Upsilon}$ una isotopología. Ahora, al ser $\widehat{U}$ arbitrario en $\widehat{M}$, llegamos a que todo abierto de $\widehat{M}$ es un $\widehat{\Upsilon}$-isoabierto.

Recíprocamente, sea $\widehat{U} \in \widehat{\Upsilon}$ y sea $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Será entonces $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{U}$, con $\widehat{U} \in \widehat{\Upsilon}$; con lo cual, $\widehat{U} \in \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$. De nuevo se tiene entonces que $\widehat{X} \in \widehat{U} \subseteq \widehat{U}$, pero ahora consideramos $\widehat{U}$ como perteneciente a $\widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}}_{\widehat{X}}$; con lo cual, como esto se tendría para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$, llegamos a que $\widehat{U}$ es un isoentorno de todos sus isopuntos. Aplicando ahora el apartado (c) de la Proposición 7.6, llegamos a que $\widehat{U}$ es un isoabierto de $\widehat{M}$, que es lo que queríamos probar. $\square$

Teniendo en cuenta el resultado que acabamos de probar, cuando no haya posibilidad de confusión, llamaremos abierto o entorno de $\widehat{M}$ a los $\widehat{\Upsilon}$-isoabiertos o $\widehat{\Upsilon}$-isoentornos, respectivamente, donde $\widehat{\Upsilon}$ es la isotopología asociada a $\widehat{M}$. De hecho, en la práctica se identificará el par $(\widehat{M}, \widehat{\Upsilon})$ con $(\widehat{M}, \widehat{\aleph}^{\widehat{\Upsilon}})$.

Estudiemos a continuación los conceptos anteriores en el nivel de proyección. Como veremos en la siguiente definición, será necesario desde un principio imponer la inyectividad del levantamiento isotópico utilizado en la construcción del isoespacio en cuestión, para conseguir así una buena generalización del concepto convencional de topología en este nuevo nivel:

Definición 8.4 *Sea $\overline{\widehat{M}}$ un isoespacio, levantado isotópico en el nivel de proyección de un espacio M, mediante una isotopía inyectiva. En el caso de que M sea espacio topológico de topología $\Upsilon = \{\emptyset, M, \cup_{\alpha \in A} U_\alpha\}$, diremos que $\overline{\widehat{M}}$ es un* isoespacio isotopológico de isotopología *$\overline{\widehat{\Upsilon}} = \{\emptyset, \overline{\widehat{M}}, \cup_{\alpha \in A} \overline{\widehat{U_\alpha}}\}$, donde $\overline{\widehat{U_\alpha}}$ se construye levantando isotópicamente cada punto de U_α, usando para ello la isotopía que levanta M a $\overline{\widehat{M}}$.*

Veamos que la definición anterior es coherente en la siguiente:

Proposición 8.5 *La isotopología $\overline{\widehat{\Upsilon}}$ es una topología sobre $\overline{\widehat{M}}$.*

Demostración.

La demostración es análoga a la dada para la Proposición 8.2, si bien hay que reescribir $\widehat{\ }$ por $\overline{\widehat{\ }}$ y hay que tener en cuenta la inyectividad del levantamiento isotópico en el apartado (b) de la prueba, cuando se señale que $P \in U$ y $P \in V$ al ser $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{U}}$ y $\overline{\widehat{P}} \in \overline{\widehat{V}}$. $\square$

De esta forma, $\overline{\widehat{\Upsilon}}$ tiene estructura de topología, siendo por tanto $\overline{\widehat{\Upsilon}}$-abiertos los subconjuntos que la forman. Además, al ser levantados isotópicos de abiertos de Υ, diremos que los subconjuntos de $\overline{\widehat{\Upsilon}}$ son *$\overline{\widehat{\Upsilon}}$-isoabiertos de la isotopología.*

Por otro lado, llamaremos *$\overline{\widehat{\Upsilon}}$-isoentorno de un isopunto* $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{M}}$ a todo subconjunto $\overline{\widehat{A}}$ de $\overline{\widehat{M}}$ que admita la existencia de un $\overline{\widehat{\Upsilon}}$-isoabierto $\overline{\widehat{U}}$, tal que $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{U}} \subseteq \overline{\widehat{A}}$.

Llegamos además al siguiente resultado:

Proposición 8.6

a) La familia de todos los (iso)abiertos de un isoespacio isotopológico $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}})$, levantado isotópico de un espacio topológico $(M, \aleph)$ a partir de una isotopía inyectiva, es una isotopología $\overline{\widehat{\Upsilon}}$ sobre $\overline{\widehat{M}}$, de modo que $\overline{\widehat{\aleph}}$ coincide con su familia de $\overline{\widehat{\Upsilon}}$-isoentornos.

b) Recíprocamente, si $\overline{\widehat{\Upsilon}}$ es una isotopología sobre un isoespacio $\overline{\widehat{M}}$, su familia de $\overline{\widehat{\Upsilon}}$-isoabiertos $\overline{\widehat{\aleph}}^{\overline{\widehat{\Upsilon}}}$ define sobre $\overline{\widehat{M}}$ una isoestructura de isoespacio isotopológico cuya familia de (iso)abiertos coincide con $\overline{\widehat{\Upsilon}}$.

Demostración

La demostración es análoga a la dada para la Proposición 8.3, si bien hay que reescribir $\widehat{\ }$ por $\overline{\widehat{\ }}$ y hay que tener en cuenta la inyectividad del levantamiento isotópico en el apartado (a) de la prueba, cuando se señale que el levantado isotópico de Υ, que coincide con la familia de los (iso)abiertos de $\overline{\widehat{M}}$ es la isotopología $\overline{\widehat{\Upsilon}}$ sobre $\overline{\widehat{M}}$ del enunciado. $\square$

Teniendo en cuenta el resultado que acabamos de probar, cuando tengamos un levantamiento isotópico inyectivo y no haya posibilidad de confusión, llamaremos abierto o entorno de $\overline{\widehat{M}}$ a los $\overline{\widehat{\Upsilon}}$-isoabiertos o $\overline{\widehat{\Upsilon}}$-isoentornos, respectivamente, donde $\overline{\widehat{\Upsilon}}$ es la isotopología asociada a $\overline{\widehat{M}}$. De hecho, en la práctica se identificará el par $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\Upsilon}})$ con $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}}^{\overline{\widehat{\Upsilon}}})$, cuando se disponga de un levantamiento isotópico inyectivo.

9 Isoespacios de Hausdorff

Podemos definir ahora los axiomas de separación relativos a los isoespacios isotopológicos. Sólo daremos aquí el que nos interesa para la definición de isovariedad isodiferenciable. Comenzaremos como viene siendo habitual con el nivel isotópico:

Definición 9.1 *Sea $\widehat{M}$ un isoespacio topológico sobre un isocuerpo isorreal $\widehat{\mathbf{R}}$. Diremos que $\widehat{M}$ es un* isoespacio de Hausdorff *o* que satisface el axioma de separación T_2*, si lo satisface como espacio topológico sobre $\widehat{\mathbf{R}}$ como cuerpo.*

Llegamos entonces a la siguiente:

Proposición 9.2 *Todo isoespacio topológico $\widehat{M}$, que sea levantado isotópico de un espacio topológico M que sea T_2, es un isoespacio T_2.*

Demostración.

Sean $\widehat{P_1}, \widehat{P_2} \in \widehat{M}$, dos isopuntos distintos. Deben ser por tanto, $P_1, P_2 \in M$, dos puntos distintos. Entonces, por ser M un espacio T_2, existen dos abiertos disjuntos U y V en M, tales que $P_1 \in U$ y $P_2 \in V$. Así será $\widehat{P_1} \in \widehat{U}$ y $\widehat{P_2} \in \widehat{V}$, siendo a su vez $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$, al ser $U \cap V = \emptyset$;

con lo cual queda demostrado el resultado, pues $\widehat{U}$ y $\widehat{V}$ serían abiertos de $\widehat{M}$ por el Corolario 7.8. $\square$

Seguidamente damos la correspondiente definición de isoespacio segundo numerable:

Definición 9.3 *Sea $\widehat{M}$ un isoespacio topológico sobre un isocuerpo isoreal $\widehat{\mathbf{R}}$. Diremos que $\widehat{M}$ es un* isoespacio segundo numerable *($2^o N$), si lo es como espacio topológico sobre $\widehat{\mathbf{R}}$ como cuerpo.*

Señalemos que aunque los isoabiertos de la isotopología $\widehat{\Upsilon}$ son los levantados isotópicos de los abiertos de la topología Υ, los elementos de una isobase de $\widehat{\Upsilon}$ no tienen porqué coincidir con los levantados isotópicos de los elementos de una base de Υ. Esto es porque sabemos que las bases no se mantienen en general por isotopías. Sabemos por ejemplo que en general, la dimensión de una base no se conserva al pasar a la correspondiente isobase. De aquí que en general no podamos establecer una relación directa entre espacios segundo numerables en el nivel convencional e isoespacios segundo numerables en el nivel isotópico.

No obstante, conocemos también modelos de isotopías que conservan las bases en el sentido de que si $\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es una base de M, entonces $\widehat{\beta} = \{\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, ..., \widehat{e_n}\}$ es una isobase de $\widehat{M}$ (véase **[1]**). Está claro que en estos casos, todo levantado isotópico de un espacio $2^o N$, siguiendo estos modelos de isotopías, serán isoespacios $2^o N$.

Veamos los conceptos anteriores en el nivel de proyección:

Definición 9.4 *Sea $\overline{\widehat{M}}$ un isoespacio topológico sobre un isocuerpo isoreal $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$. Diremos que $\overline{\widehat{M}}$ es un* isoespacio de Hausdorff *o* que satisface el axioma de separación T_2*, si lo satisface como espacio topológico sobre $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$ como cuerpo.*

En el caso en que $\overline{\widehat{M}}$ *sea un isoespacio isotopológico, diremos que* $\overline{\widehat{M}}$ *es un* isoespacio de isohausdorff *o* que satisface el axioma de separación $\overline{\widehat{T}}_2$ *, si, siendo el levantado isotópico de un espacio de Hausdorff, es a su vez un isoespacio de Hausdorff, esto es, que dados dos isopuntos distintos cualesquiera en* $\overline{\widehat{M}}$*, podemos encontrar dos isoabiertos disjuntos de la isotopología asociada a* $\overline{\widehat{M}}$*, que los separe.*

En la definición anterior hemos hecho distinción entre isoespacio T_2 e isoespacio $\overline{\widehat{T}}_2$, para mantener la idea básica de la isoteoría de conservar axiomas. No obstante, se llega a la siguiente:

Proposición 9.5 *Todo isoespacio isotopológico* $\overline{\widehat{M}}$*, que sea levantado isotópico de un espacio topológico* M*, que sea* T_2*, mediante una isotopía inyectiva, es un isoespacio* $\overline{\widehat{T}}_2$*.*

Demostración.

La demostración es análoga a la dada para la Proposición 9.2, si bien hay que reescribir $\widehat{\ }$ por $\overline{\widehat{\ }}$ y hay que tener en cuenta la inyectividad del levantamiento isotópico cuando se señale que $\overline{\widehat{U}} \cap \overline{\widehat{V}} = \emptyset$, al ser ser $U \cap V = \emptyset$. □

Damos ahora la definición de isoespacio segundo numerable:

Definición 9.6 *Sea* $\overline{\widehat{M}}$ *un isoespacio isotopológico sobre un isocuerpo isorreal* $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$*. Diremos que* $\overline{\widehat{M}}$ *es un* isoespacio segundo numerable *(*2^oN*), si lo es como espacio topológico sobre* $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$ *como cuerpo. En el caso en que* $\overline{\widehat{M}}$ *sea un isoespacio isotopológico diremos que* $\overline{\widehat{M}}$ *es un* isoespacio isosegundo-numerable *(*$\overline{\widehat{2^oN}}$*), si, siendo el levantado isotópico de un espacio* 2^oN*, es a su vez un isoespacio* 2^oN*, es decir, posee una isobase numerable de isoabiertos.*

Al igual que ocurría en el nivel isotópico, no podemos establecer en general una relación directa entre espacios segundo numerables en el nivel convencional e isoespacios segundo numerables en el nivel de proyección. Pese a ello, el mismo modelo que citamos antes, dado en **[1]**, sirve para asegurar tal relación.

10 Isocontinuidad de isofunciones

Con vista a estudiar la isocontinuidad entre isoespacios isotopológicos, conviene dedicar una sección previa al estudio de las isofunciones en general. Para no alargar demasiado la extensión de nuestro estudio, no entraremos en detalles, dejando este aspecto para un futuro desarrollo teórico.

Comenzemos con las definiciones de función e isofunción sobre un isoespacio vectorial:

Definición 10.1 *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un isoespacio vectorial sobre el isocuerpo de los isorreales* $(\widehat{\mathbf{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times})$. *Toda aplicación* $f : \widehat{U} \to \mathbf{R}$, *tomando valores reales, se dice* función de $\widehat{U}$ sobre $\mathbf{R}$. *En caso de ser* $f : \widehat{U} \to \widehat{\mathbf{R}}$, *tomando valores isorreales, se dice* función isoescalar *o bien,* función de $\widehat{U}$ sobre $\widehat{\mathbf{R}}$.
Se dirá que una función $\widehat{f}$ *de* $\widehat{U}$ *sobre* $\widehat{\mathbf{R}}$ *es una* isofunción *si existe una función* $f : U \to \mathbf{R}$, *tal que se verifica que* $\widehat{f}(\widehat{X}) = \widehat{f(X)}$, *para todo* $X \in U$.

Podemos también dar la definición de función en el nivel de proyección:

Definición 10.2 *Sea* $\widehat{U}$ *un* $\widehat{\mathbf{R}}$*-isoespacio vectorial y sean* $\overline{\widehat{U}} = \pi(\widehat{U})$ *y* $\overline{\widehat{\mathbf{R}}} = \pi(\widehat{\mathbf{R}})$. *Toda aplicación* $f : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbf{R}}}$ *se llama* función de $\overline{\widehat{U}}$ sobre $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$.

Obsérvese que fijada una función $f : \widehat{U} \to \widehat{\mathbf{R}}$, podemos pasar al nivel de proyección obteniendo la correspondencia $\overline{f} : \overline{\widehat{U}} \to \mathbf{P}(\overline{\widehat{\mathbf{R}}}) : \overline{\widehat{X}} \to \overline{f}(\overline{\widehat{X}}) = \{\overline{f(\widehat{Y})} : \overline{\widehat{Y}} = \overline{\widehat{X}}\}$, donde $\mathbf{P}(\overline{\widehat{\mathbf{R}}})$ denota las partes de $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$. De esta forma, está claro que en general no podemos asegurar la asignación a cada elemento de $\overline{\widehat{U}}$ de un único elemento de $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$. Esto es, $\overline{f}$ no es en general una aplicación de $\overline{\widehat{U}}$ en $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$. Para que lo fuese debería ser $\overline{f}(\overline{\widehat{X}}) = \overline{f}(\overline{\widehat{Y}})$, para todos $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$, tales que $\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{Y}}$. Esto lo podemos conseguir por ejemplo imponiendo la inyectividad de la isotopía utilizada en la construcción de $\widehat{U}$:

Proposición 10.3 *Sea $\widehat{U}$ un $\widehat{\mathbf{R}}$-isoespacio vectorial. Si el levantamiento isotópico que construye $\widehat{U}$ es inyectivo, entonces, dada una función $f : \widehat{U} \to \widehat{\mathbf{R}}$, se tiene que $\overline{f} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbf{R}}} : \overline{\widehat{X}} \to \overline{f}(\overline{\widehat{X}}) = \overline{f(\widehat{X})}$ es una función de $\overline{\widehat{U}}$ sobre $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$.*
En caso de tener una isofunción $\widehat{f}$ de $\widehat{U}$ sobre $\widehat{\mathbf{R}}$, se definirá la función $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{U}} \to \overline{\widehat{\mathbf{R}}} : \overline{\widehat{X}} \to \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{X}}) = \overline{\widehat{f(X)}}$. En dicho caso, $\overline{\widehat{f}}$ se llamará isofunción de $\overline{\widehat{U}}$ sobre $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$.

Demostración

Basta comprobar la primera parte del enunciado. Para ello bastará ver que $\overline{f}$ es una aplicación de $\overline{\widehat{U}}$ sobre $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$, es decir, que a cada elemento $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{U}}$ sólo le corresponde un elemento de $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$. Ahora bien, dado $Y \in U$ tal que $\overline{\widehat{Y}} = \overline{\widehat{X}}$, se tendrá que $X = Y$ al ser inyectivo por hipótesis el levantamiento isotópico que construye $\widehat{U}$. Así, $f(X) = f(Y)$ y por tanto, $\overline{\widehat{f(X)}} = \overline{\widehat{f(Y)}}$ es un único elemento de $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$. Dada la arbitrariedad de $\overline{\widehat{X}}$ e $\overline{\widehat{Y}}$ en $\overline{\widehat{U}}$, llegamos a que $\overline{f}$ es efectivamente una aplicación de $\overline{\widehat{U}}$ sobre $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$, como buscábamos. $\square$

Debe señalarse que el resultado anterior puede verse también como consecuencia directa de la Proposición 3.2, pues al ser inyectiva la isotopía utilizada en la construcción de $\widehat{U}$, tendremos identificados de forma biunívoca los conjuntos $\overline{\widehat{U}}$ y $\widehat{U}$. De hecho es este el motivo por el que seguimos manteniendo las notaciones de función e isofunción que vimos para el nivel isotópico, también en el nivel de proyección.

Damos a continuación la definición de isomódulo de una isofunción:

Definición 10.4 *Sea $\widehat{f}$ una isofunción de un $\widehat{\mathbf{R}}$-isoespacio vectorial $\widehat{U}$ sobre $\widehat{\mathbf{R}}$. Se define el* isomódulo de $\widehat{f}$ *como* $\widehat{|}\widehat{f}(\widehat{X})\widehat{|} = \mathbf{I}(|f(X)|) = |\widehat{f(X)}|$.

En caso de que queramos trabajar en el nivel de proyección, nos interesará que $\overline{\widehat{f}}$ sea una función de $\overline{\widehat{U}}$ sobre $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$, que tenga sentido definir un isomódulo de $\overline{\widehat{f}}$ y que dicho isomódulo sea la proyección del isomódulo de $\widehat{f}$. Para ello debemos imponer algunas condiciones al levantamiento isotópico utilizado, pues en caso contrario encontraríamos una serie de incoherencias:

Definición 10.5 *Sea $\widehat{U}$ un $\widehat{\mathbf{R}}$-espacio vectorial, obtenido a partir de un levantamiento isotópico inyectivo. Sea $\widehat{f}$ una isofunción de $\widehat{U}$ sobre $\widehat{\mathbf{R}}$ y sea $\overline{\widehat{f}}$ su proyección correspondiente. Se define entonces el isomódulo de $\overline{\widehat{f}}$ como $\overline{\widehat{|}}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{X}})\overline{\widehat{|}} = \overline{|\widehat{f(X)}|}$, para cada $\widehat{X} \in \widehat{U}$.*

La definición es coherente, pues al ser inyectivo el levantamiento isotópico que construye $\widehat{U}$, tenemos aplicando la Proposición 10.2, que tiene sentido la isofunción $\overline{\widehat{f}}$. Además, dados $X, Y \in \widehat{U}$ tales que $\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{Y}}$, se tiene que $\overline{\widehat{|}}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{X}})\overline{\widehat{|}} = \overline{|\widehat{f(X)}|} = \overline{|\widehat{f(Y)}|} = \overline{\widehat{|}}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{Y}})\overline{\widehat{|}}$, pues $X = Y$ al ser inyectiva la isotopía que origina a $\widehat{U}$.

Veamos un par de ejemplos de lo visto hasta ahora:

Ejemplo 10.6 *Consideremos $(\mathbf{R}, +, \times)$ como espacio vectorial sobre sí mismo y tomemos su isoespacio vectorial asociado, referente a la isotopía de elementos principales $\frac{1}{2}$ y $\times$, y secundarios 0 y $+$, es decir,*

$\overline{(\widehat{\mathbf{R}}_{\frac{1}{2}}, \widehat{+}, \widehat{\times})} = (\mathbf{R}, +, \overline{\widehat{\times}})$, *definido sobre sí mismo (considerándolo como isocuerpo), que da lugar a un levantamiento inyectivo. Consideremos ahora la función* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *dada por* $f(x) = 2 \times x$. *Tenemos definido el módulo de* f *como* $|f(x)| = |2 \times x| = 2 \times |x|$. *Por otro lado, podemos construir la isofunción* $\widehat{f} : \widehat{\mathbf{R}}_{\frac{1}{2}} \to \widehat{\mathbf{R}}_{\frac{1}{2}}$, *dado por* $\widehat{f}(\widehat{x}) = \widehat{f(x)} = \widehat{2 \times x} = \widehat{2}\widehat{\times}\widehat{x}$. *Esto es,* $\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}}) = \overline{\widehat{f(x)}} = f(x) \times \frac{1}{2} = 2 \times x \times \frac{1}{2} = x = \overline{\widehat{2}}\overline{\widehat{\times}}\overline{\widehat{x}}$. *Resulta entonces que el isomódulo de* $\widehat{f}$ *queda definido como* $\widehat{|\widehat{f}(\widehat{x})|} = \widehat{|f(x)|} = \widehat{2 \times |x|} = \widehat{2}\widehat{\times}\widehat{|x|} = \widehat{2}\widehat{\times}\widehat{|}\widehat{x}\widehat{|}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, *siendo el módulo de* $\overline{\widehat{f}}$ *entonces,* $\overline{\widehat{|}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}})\widehat{|}} = \overline{\widehat{|}\widehat{f}(\widehat{x})\widehat{|}} = \overline{\widehat{2}\widehat{\times}\widehat{|}\widehat{x}\widehat{|}} = |2 \times x| \times \frac{1}{2} = |x| = \overline{\widehat{2}}\overline{\widehat{\times}}\overline{\widehat{|}}\overline{\widehat{x}}\overline{\widehat{|}}$. *Coincide así el isomódulo de* $\overline{\widehat{f}}$ *con su módulo convencional, considerando* $\overline{\widehat{f}}$ *como función real. Esto es,* $\overline{\widehat{|}}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}})\overline{\widehat{|}} = |\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}})| = |x|$. $\triangleleft$

Ejemplo 10.7 *Volvemos a considerar* $(\mathbf{R}, +, \times)$ *como espacio vectorial sobre sí mismo, tomando ahora como isoespacio vectorial asociado al correspondiente a la isotopía inyectiva de elementos principales* i *y* $\bullet$ *(el producto usual de complejos), y secundarios* 0 *y* $+$, *es decir,* $\overline{(\widehat{\mathbf{R}}_i, \widehat{+}, \widehat{\times})} = (Im(\mathbf{C}), +, \widehat{\times})$, *definido sobre sí mismo. Tomando entonces la misma función del ejemplo anterior,* $f(x) = 2 \times x$, *resulta que la isofunción* $\overline{\widehat{f}}$ *viene dada por* $\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}}) = f(x) \bullet i = 2 \times x \bullet i$. *De esta forma, el isomódulo queda definido en el nivel de proyección como* $\overline{\widehat{|}}\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}})\overline{\widehat{|}} = |f(x)| \bullet i = |2 \times x| \bullet i = 2 \times |x| \bullet i \neq 2 \times |x| = |2 \times x \bullet i| = |\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{x}})|$. $\triangleleft$

Vemos por tanto en el ejemplo anterior que en caso de conocerse el módulo convencional de una isofunción en la proyección de un isoespacio isorreal, éste no tiene porqué coincidir con el isomódulo de la isofunción en dicha proyección. De hecho, puede que el primero no tenga sentido al no estar definido convencionalmente un módulo en el conjunto $\overline{\widehat{\mathbf{R}}}$. Esto empieza a indicarnos ya que la noción convencional de continuidad, que hace uso en su versión euclídea del módulo en $\mathbf{R}$, no es consistente a nivel isotópico. De aquí que sea necesario pasar al concepto de isocontinuidad (véase **[3]**), que se dará a partir del de isomódulo.

No obstante, antes de dar la definición de isocontinuidad es necesario hacer una observación previa. En el nivel convencional, podemos definir la continuidad de una función real en un punto X usando el módulo de ésta en la definición, haciendo que en todo punto Y de un entorno reducido de X , la diferencia $|f(X)-f(Y)|$ sea suficientemente pequeña. Esto es, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|X-Y| < \delta$, entonces $|f(X) - f(Y)| < \epsilon$. Aparece por tanto un orden parcial en la definición de continuidad de una función, que de hecho es un orden total. Ahora bien, Santilli demostró en **[7]** que todo cuerpo de característica cero es levantado isotópico de $\mathbf{R}$, pero sin embargo sabemos que no todo cuerpo de característica cero tiene asociado un orden parcial (por ejemplo los números complejos). Por ello deberíamos en primer lugar poder dotar de un orden parcial al isocuerpo $\widehat{\mathbf{R}}$, para poder así considerar una definición análoga a la de continuidad para la isocontinuidad. Por ser un orden en el nivel isotópico, le daremos al nuevo orden el nombre de *isoorden*. Pero para que sea coherente con la isoteoría debe ser levantado isotópico del orden de partida de $\widehat{\mathbf{R}}$, $\leq$, y así lo notaremos por $\widehat{\leq}$, manteniendo el significado habitual para las notaciones $\widehat{<}, \widehat{\geq}$ y $\widehat{>}$.

Para encontrar dicho isoorden debemos tener en cuenta que para que sea un orden debe verificar en particular la propiedad antisimétrica, esto es, si $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{b}$, entonces $-\widehat{b}\widehat{\leq} - \widehat{a}$, donde el signo $-$ denota el opuesto del correspondiente isonúmero, respecto a la isosuma $\widehat{+}$. Con vista a las observaciones que acabamos de dar damos la siguiente:

Definición 10.8 *Sea $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ un isocuerpo asociado al cuerpo $K(a, +, \times)$ mediante un levantamiento isotópico que mantenga el elemento opuesto respecto a $+$ (es decir, tal que $\widehat{-a} = -\widehat{a}$), donde K está dotado de un orden $\leq$. Definimos entonces el* isoorden $\widehat{\leq}$ *como $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{b}$ si y sólo si $a \leq b$.*

Con la definición anterior tenemos en particular el carácter de $\widehat{\leq}$ como levantado isotópico de $\leq$, como íbamos buscando. Por otra parte, si en la obtención del isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ usamos el modelo de construcción del isoproducto, tendremos el siguiente resultado:

Proposición 10.9 *Sea $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ un isocuerpo asociado al cuerpo $K(a, +, \times)$, mediante una isotopía que sigue el modelo de construcción del isoproducto, haciendo uso por ello en el nivel general de un cuerpo $K(a, \widetilde{+}, \widetilde{\times})$. Entonces, tal isotopía mantiene el elemento opuesto respecto a $\widetilde{+}$. Esto es, $-\widehat{a} = \widehat{a^{-S}}$, siendo S el elemento unidad de K respecto a $\widetilde{+}$. Si además mantiene el elemento opuesto respecto a $+$, entonces, fijado $a \in K$, el elemento opuesto de a respecto a $+$ es también el elemento opuesto de a respecto a $\widetilde{+}$, es decir, $-a = a^{-S}$.*

Demostración

La primera parte del enunciado es evidente por construcción, pues fijado $a \in K$, se tiene que $\widehat{a}\widehat{+}\widehat{a^{-S}} = \widehat{a\widetilde{+}a^{-S}} = \widehat{S} = \widehat{a^{-S}}\widehat{+}\widehat{a}$, siendo $\widehat{S}$ el elemento unidad de $\widehat{K}$ respecto a $\widehat{+}$.

Para la segunda parte del enunciado, fijamos $a \in K$. Por hipótesis tenemos que $\widehat{-a} = -\widehat{a} = \widehat{a^{-S}}$. Esto es, $\widehat{-a} = \widehat{a^{-S}}$. Con lo cual, $-a = a^{-S}$, como queríamos probar. $\square$

Debido al resultado que acabamos de ver, cuando dispongamos de las condiciones mencionadas, fijado $a \in A$, notaremos $-\widehat{a} = \widehat{-a}$, identificando $-a$ con a^{-S} cuando convenga. Obsérvese además que como consecuencia directa se tiene también que si 0 y S son los elementos unidades de K respecto a $+$ y $\widetilde{+}$ respectivamente, entonces se cumple que $0 \star 0 = S$ y que $S + S = 0$.

Es interesante además observar que en el caso en que $K = \mathbf{R}$, podemos establecer propiedades específicas de la construcción isotópica realizada:

Proposición 10.10 *En las condiciones de la Definición 10.8, si* $K = \mathbf{R}$*, siendo* $\leq$ *el orden usual real y* $\widehat{S}$ *el elemento unidad de* $\widehat{\mathbf{R}}$ *respecto a* $\widehat{+}$*, entonces* $\widehat{S}$ *es únicamente el levantado isotópico de* 0*, el elemento unidad de* $\mathbf{R}$ *respecto a* $+$*. Esto es, si existe* $x \in \mathbf{R}$ *tal que* $\overline{\widehat{x}} = \overline{\widehat{S}}$*, entonces* $x = 0$*.*

Demostración

Si $\widehat{S}$ es el levantado isotópico de un número real $S \neq 0$, será $S \neq -S$. Ahora bien, dado que la isotopía utilizada en la construcción de $\widehat{\mathbf{R}}$ conserva el elemento opuesto por hipótesis, será $\widehat{-S} = -\widehat{S}$ y así, $\widehat{-S} = \widehat{S}\widehat{+}\widehat{-S} = \widehat{S} - \widehat{S} = \widehat{S}$. Pero esto quiere decir como ya vimos que $-S = S$, lo que es una contradicción con el hecho de ser $S \neq 0$. Así pues, $\widehat{S}$ debe ser únicamente el levantado isotópico de 0. $\square$

Obsérvese que en el caso en que $\widehat{\mathbf{R}}$ se obtenga a partir de una isotopía siguiendo el modelo de construcción del isoproducto, será por construcción $S = 0$ el elemento unidad de $\mathbf{R}$ respecto a $\widetilde{+}$, donde seguimos las notaciones usuales.

Si además queremos que el isoorden establecido en la Definición 10.8 tenga asociado una proyección en $\overline{\widehat{K}}$, deberemos imponer la inyectividad del levantamiento isotópico que construye $\widehat{\mathbf{R}}$:

Definición 10.11 *En las condiciones de la Definición 10.8, si se tiene además que el levantamiento isotópico que origina a* $\widehat{K}$ *es inyectivo, se define el isoorden* $\overline{\widehat{\leq}}$ *en* $\overline{\widehat{K}}$ *como* $\overline{\widehat{a}}\overline{\widehat{\leq}}\overline{\widehat{b}}$ *si y sólo si* $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{b}$*, o equivalentemente, si y sólo si* $a \leq b$*.*

El hecho de imponer que el levantamiento isotópico sea inyectivo es para que la definición sea coherente, pues así no puede darse el caso por ejemplo en que sea $\overline{\widehat{a}} = \overline{\widehat{c}}$, con $a \neq c$, siendo $a \leq b < c$.

Por otra parte, por conservarse el elemento opuesto en $\widehat{K}$ respecto a

+, tendremos por construcción que en $\overline{\widehat{K}}$ también se mantiene el elemento opuesto respecto a +, pues fijado $a \in K$, se tiene que $-\overline{\widehat{a}} = \overline{-\widehat{a}} = \overline{\widehat{-a}}$.

Finalmente, tenemos el siguiente resultado que relaciona los dos isoórdenes que acabamos de definir, con el orden inicial del cuerpo K:

Proposición 10.12 *Los isoórdenes* $\widehat{\leq}$ *y* $\overline{\widehat{\leq}}$ *son órdenes sobre* $\widehat{K}$ *y* $\overline{\widehat{K}}$. *Se verifica además que cualquiera de los dos isoórdenes anteriores es un orden parcial (total, respectivamente) si y sólo si lo es* $\leq$.

Demostración

Veremos nuestro resultado para el isoorden $\widehat{\leq}$ en $\widehat{K}$, siendo análogo el desarrollo para el isoorden $\overline{\widehat{\leq}}$ en $\overline{\widehat{K}}$.

Para ver que $\widehat{\leq}$ es un orden basta comprobar las propiedades que caracterizan a todo orden: propiedad reflexiva, propiedad antisimétrica y propiedad transitiva.

a) Reflexiva: Se tiene pues $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{a}$, para todo $\widehat{a} \in K$, al ser $a \leq a$, por ser $\leq$ un orden.

b) Antisimétrica: Dados $a, b \in K$, tales que $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{b}$, se tiene por definición de isoorden que $a \leq b$. Por ser $\leq$ un orden, verifica la propiedad antisimétrica y así, $-b \leq -a$, y por tanto, $\widehat{-b}\widehat{\leq}\widehat{-a}$. Ahora bien, como el levantamiento que tenemos por hipótesis mantiene el elemento opuesto, llegamos a que $\widehat{-a} = -\widehat{a}$ y $\widehat{-b} = -\widehat{b}$. Luego, $-\widehat{b}\widehat{\leq} - \widehat{a}$ y tenemos así que $\widehat{\leq}$ es antisimétrico.

c) Transitiva: Sean $a, b, c \in K$, tales que $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{b}$ y $\widehat{b}\widehat{\leq}\widehat{c}$. Por definición de isoorden tenemos que $a \leq b$ y $b \leq c$. Ahora, al ser $\leq$ transitivo al ser orden, resulta que $a \leq c$, y así, $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{c}$, con lo cual $\widehat{\leq}$ es transitivo.

Tenemos así que $\widehat{\leq}$ es un orden sobre $\widehat{K}$.

La segunda parte del enunciado se obtiene sin más que considerar la definición de $\widehat{K}$ y de $\widehat{\leq}$. La parcialidad es evidente, pues existen isonúmeros ordenables en $\widehat{K}$ si y sólo si existen números ordenables en K (aquellos de los que provienen). La totalidad se obtiene teniendo en cuenta que como ya vimos existe una correspondencia biyectiva entre los elementos de K y los de $\widehat{K}$. Por tanto, $\widehat{K}$ es totalmente ordenable por el isoorden $\widehat{\leq}$ sii lo es K respecto al orden $\leq$. $\square$

Antes de seguir adelante con nuestro estudio cabe plantearse la noción de isoigualdad en base al isoorden, esto es, cabe preguntarse si sería necesario tener que usar un signo $\widehat{=}$ en lugar de $=$. Sin embargo, ateniéndonos a la definición de isoorden que acabamos de dar, resulta que, dados $a, b \in K$, entonces $\widehat{a}\widehat{=}\widehat{b}$ equivaldría a decir que $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{b}$ y $\widehat{a}\widehat{\geq}\widehat{b}$, esto es, $a \leq b$ y $a \geq b$. Con lo cual sería $a = b$ y por tanto, $\widehat{a} = \widehat{b}$. De aquí que tenga pleno sentido identificar $\widehat{=}$ con $=$ y por ello siempre mantendremos la segunda notación. El mismo razonamiento que hemos seguido aquí se tendría para el isoorden $\overline{\widehat{\leq}}$, con lo cual también mantendremos el síbolo $=$ para la igualdad entre los elementos del nivel de proyección.

Buscamos a continuación particularizar todo lo anterior para conseguir alcanzar la noción de isocontinuidad. Para empezar, como ya hemos visto, si queremos extender el concepto de continuidad convencional, nos interesará que la isotopía utilizada mantenga el elemento opuesto respecto a la suma. Ahora bien, en general sabemos que la construcción de un isocuerpo no mantiene tal elemento opuesto, esto es, si $(\widehat{K}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ es un isocuerpo asociado a un cuerpo $(K, +, \times)$, entonces se tiene que en general $-\widehat{a} \neq \widehat{a^{-0}}$, donde 0 es el elemento neutro de K respecto $+$.

Un caso en que se conserva dicho elemento opuesto y que utilizaremos con asiduidad es aquel que hace uso de un levantamiento isotópico verificando que todos los levantamientos de las operaciones suma ($+$ en cuerpos y $\circ$ en espacios vectoriales) vengan dados por $\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b} = \widehat{a+b}$ y $\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y} = \widehat{X \circ Y}$. En particular, conseguimos con esta condición que los elementos neutros sean $\widehat{S} = \widehat{0}$ y $\widehat{S'} = \widehat{\overrightarrow{0}}$, respectivamente, conservándose por tanto los respectivos elementos opuestos, como buscábamos: $\widehat{a}\widehat{+}\widehat{-a} = \widehat{a-a} = \widehat{0} = \widehat{S}$ y $\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{-X} = \widehat{X-X} = \widehat{\overrightarrow{0}} = \widehat{S'}$.

Para poder referirnos al caso anterior damos la siguiente:

Definición 10.13 *Sea E una estructura matemática cualquiera dotada de una operación $\sharp$. Diremos que una isotopía de E es* compatible respecto a $\sharp$ *si se tiene que $\widehat{a}\widehat{\sharp}\widehat{b} = \widehat{a\sharp b}$, para todos $a, b \in E$.*

Tenemos por tanto que la condición a la que hacíamos referencia con anterioridad a la definición 10.13 equivale a decir que la isotopía utilizada es compatible respecto a $+$ y respecto a $\circ$.

Antes de continuar es conveniente destacar el siguiente resultado:

Proposición 10.14 *Dada una estructura matemática $E(+, \times, \circ, \bullet, ...)$, si bajo las condiciones de la Definición 2.3, el levantamiento isotópico utilizado para la construcción de una isoestructura matemática $\widehat{E}(\widehat{+}, \widehat{\times}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, ...)$ es compatible respecto a una operación $\sharp$ de la estructura inicial E, entonces, la isotopía $\mathbf{I} : E(+, \times, \circ, \bullet, ...) \to \widehat{E}(\widehat{+}, \widehat{\times}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, ...)$ es una biyección lineal en $\natural$.*

Demostración

Ya sabemos que $\mathbf{I}$ es una biyección por construcción. Por otra parte, la linealidad se tiene de forma inmediata, pues fijados $a, b \in E$, se cumple que $\mathbf{I}(a\sharp b) = \widehat{a\sharp b} = \widehat{a}\widehat{\sharp}\widehat{b} = \mathbf{I}(a)\widehat{\sharp}\mathbf{I}(b)$, dada la compatibilidad de $\mathbf{I}$ respecto a $\sharp$. $\square$

Como consecuencia directa se tiene entonces la siguiente:

Proposición 10.15 *Se verifica que:*

a) *Dado un isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a},\widehat{+},\widehat{\times})$ *asociado a un cuerpo* $K(a,+,\times)$*, siendo* 0 *y* $\widehat{S}$ *los elementos unidades respectivos de* K *y* $\widehat{K}$ *respecto a* $+$ *y* $\widehat{+}$*, se tiene que:*

   a.1) *En caso de que* $\widehat{K}$ *se haya obtenido mediante una isotopía compatible respecto a* $+$*, se cumple que* $\widehat{S}=\widehat{0}$ *y que se conserva el elemento opuesto respecto a* $+$.

   a.2) *En caso de que* $\widehat{K}$ *se haya obtenido a partir de una isotopía que siga el modelo de construcción del isoproducto, haciendo uso en el nivel general de un cuerpo* $K(a,\widetilde{+},\widetilde{\times})$*, se cumple que tal isotopía es compatible respecto a* $+$ *si y sólo si* $(K,\widetilde{+})\equiv(K,+)$.

b) *Dado un isoespacio vectorial* $(\widehat{U},\widehat{\circ},\widehat{\bullet})$ *asociado a un espacio vectorial* $(U,\circ,\bullet)$*, siendo* $\overrightarrow{0}$ *y* $\widehat{S'}$ *los elementos unidades respectivos de* U *y* $\widehat{U}$ *respecto a* $\circ$ *y* $\widehat{\circ}$*, se tiene que:*

   b.1) *En caso de que* $\widehat{U}$ *se haya obtenido mediante una isotopía compatible respecto a* $\circ$*, se cumple que* $\widehat{S'}=\widehat{\overrightarrow{0}}$ *y que se conserva el elemento opuesto respecto a* $\circ$.

   b.2) *En caso de que* $\widehat{U}$ *se haya obtenido a partir de una isotopía que siga el modelo de construcción del isoproducto, haciendo uso en el nivel general de un espacio vectorial* $(U,\diamond,\Box)$*, se cumple que tal isotopía es compatible respecto a* $\circ$ *si y sólo si* $(U,\diamond)\equiv(U,\circ)$.

Demostración

Los apartados (a.1) y (b.1) siguen inmediatamente de las observaciones dadas antes de la Definición 10.13.

Los apartados (a.2) y (b.2) se ven por doble implicación:

a) $\Leftarrow$

Evidente por construcción.

b) $\Rightarrow$

Fijados $a, b \in K$ y $X, Y \in U$, tendremos que $\widehat{a\widetilde{+}b} = \widehat{a}\widehat{+}\widehat{b} = \widehat{a+b}$ y que $\widehat{X \diamond Y} = \widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y} = \widehat{X \circ Y}$. De esta forma, $a\widetilde{+}b = a + b$ y $X \diamond Y = X \circ Y$.

La arbitrariedad de a, b en K y de X, Y en U, conlleva que sean $(K, \widetilde{+}) \equiv (K, +)$ y $(U, \diamond) \equiv (U, \circ)$. □

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos que en el caso en que usemos el modelo de construcción del isoproducto, la compatibilidad respecto a la suma equivale a identificar los niveles convencional y general en cuanto a dicha operación suma.

Por otra parte, otro aspecto a destacar de la compatibilidad de una isotopía respecto a las operaciones de partida es que su restricción a $\widehat{K}$ permite mejorar la Proposición 10.12, pues hace que la compatibilidad del orden con respecto a la suma se conserve por este tipo de levantamiento isotópico:

Proposición 10.16 *Sea $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ un isoc uerpo asociado a un cuerpo $K(a, +, \times)$ mediante una isotopía compatible respecto a $+$, para todo $a, b \in K$. Se cumple entonces que:*

a) Si K está dotado de un orden $\leq$ y $\widehat{\leq}$ es el isoorden asociado a $\widehat{K}$, entonces $\leq$ es compatible con la suma $+$ si y sólo si $\widehat{\leq}$ es compatible con la isosuma $\widehat{+}$.

b) $\leq$ es un buen orden si y sólo si lo es $\widehat{\leq}$.

c) En caso de ser además inyectivo el levantamiento isotópico utilizado en la construcción de $\widehat{K}$, se tendrá que $\leq$ es compatible con la suma $+$ (buen orden, respectivamente) si y sólo si $\overline{\widehat{\leq}}$ (el isoorden en $\overline{\widehat{K}}$) es compatible con la isosuma $\overline{\widehat{+}}$ (buen orden, respectivamente).

Demostración

a) Vemos la compatibilidad respecto $+$ y $\widehat{+}$:

a.1) $\Rightarrow$
Sean $a, b, c \in K$ tal que $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{b}$. Por definición de isoorden será $a \leq b$. Por ser $\leq$ compatible con la suma, $a + c \leq b + c$ y así, $\widehat{a+c}\widehat{\leq}\widehat{b+c}$. Ahora, aplicando la condición de la hipótesis, llegamos a que $\widehat{a}\widehat{+}\widehat{c}\widehat{\leq}\widehat{b}\widehat{+}\widehat{c}$, lo que demuestra que $\widehat{\leq}$ es compatible con respecto a la isosuma $\widehat{+}$.

a.2) $\Leftarrow$
Sean $a, b, c \in K$ tales que $a \leq b$. Será entonces $\widehat{a}\widehat{\leq}\widehat{b}$ y así, por ser $\widehat{\leq}$ compatible con $\widehat{+}$, $\widehat{a}\widehat{+}\widehat{c}\widehat{\leq}\widehat{b}\widehat{+}\widehat{c}$. Aplicando la hipótesis llegamos por tanto a que $\widehat{a+c}\widehat{\leq}\widehat{b+c}$, con lo cual $a+c \leq b+c$ y así $\leq$ es compatible con respecto a la suma $+$.

b) Por la Proposición 10.12 sabemos que $\leq$ es un orden total si y sólo si lo es $\widehat{\leq}$. Basta entonces tener en cuenta el apartado (a) y el hecho de que todo orden total compatible con la suma es un buen orden.

c) Por último, el resultado referente al nivel de proyección es evidente por definición de $\overline{\widehat{\leq}}$, teniendo en cuenta los apartados anteriores. □

Con todo lo anterior podemos dar ya la definición de isocontinuidad. Lo haremos en primer lugar referente a un isoespacio vectorial dotado de una norma. En la sección siguiente trataremos este concepto desde un punto de vista más general.

La norma de la que esté dotado nuestro isoespacio vectorial debe ser coherente con el isoorden que hemos definido. Por tal motivo, nos interesa que esté relacionado con una norma en el espacio de partida. Lo más sencillo es pues considerar un isoespacio vectorial isonormado. Esto es, dado un espacio vectorial $(U, \circ, \bullet)$ sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$, dotado de una norma $||.|| : U \rightarrow K$ y dado un isoespacio vectorial $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$

sobre un isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a},\widehat{+},\widehat{\times})$, podemos considerar entonces la isonorma $\widehat{||.||}:\widehat{U}\to\widehat{K}$, definida como $\widehat{||}\widehat{X}\widehat{||}=\widehat{||X||}$, para todo $X\in U$.

Siendo el levantado isotópico de la norma $||.||$ de partida, nos interesa que sea también una norma sobre $\widehat{U}$. Para ello debemos ver que verifica las condiciones necesarias para ser una norma. Es necesario por tanto considerar un orden en $\widehat{K}$. Por ello, lo que hacemos es imponer que K esté dotado de un orden $\leq$ y que el levantamiento isotópico que lleva K a $\widehat{K}$ mantenga el elemento opuesto, pues así, aplicando la Proposición 10.8, dotaremos a $\widehat{K}$ del isoorden $\widehat{\leq}$ asociado al orden $\leq$ de partida.

Por otro lado, con vista a que la isonorma verifique la desigualdad triangular de toda norma, deberemos imponer también que la isotopía que construye tanto $\widehat{K}$ como $\widehat{U}$ sea compatible respecto a $+$ y $\circ$. De esta forma tendremos además aplicando la Proposición 10.15, que $\widehat{S}=\widehat{0}$ es el elemento unidad de $\widehat{K}$ respecto $\widehat{+}$ y que $\widehat{S'}=\widehat{\overrightarrow{0}}$ es el elemento unidad de $\widehat{U}$ respecto $\widehat{\circ}$.

Por último, deberemos imponer también la compatibilidad de la isotopía utilizada respecto a las operaciones $\bullet$ y $\times$. Esto es, la isotopía utilizada en la construcción de $\widehat{U}$ y $\widehat{K}$ debe verificar que para todos $a,b\in K$ y $X\in U$, cumpla que $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}=\widehat{a\bullet X}$ y $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b}=\widehat{a\times b}$.

Observemos de paso que si realizamos un desarrollo similar a la demostración de la Proposición 10.15, llegamos a la siguiente:

Proposición 10.17 *Se verifica que:*

a) Dado un isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a},\widehat{+},\widehat{\times})$ asociado a un cuerpo $K(a,+,\times)$, siendo 1 e $\widehat{I}$ los elementos unidades respectivos de K y $\widehat{K}$ respecto a $\times$ y $\widehat{\times}$, se tiene que:

a.1) En caso de que $\widehat{K}$ se haya obtenido mediante una isotopía compatible respecto a $\times$, se cumple que $\widehat{I}=\widehat{1}$ y que se conserva el elemento opuesto respecto a $\times$.

a.2) En caso de que $\widehat{K}$ se haya obtenido a partir de una isotopía que siga el modelo de construcción del isoproducto, haciendo uso en el nivel general de un cuerpo $K(a, \widetilde{+}, \widetilde{\times})$, se cumple que si $\widehat{K}$ es un isocuerpo respecto a la multiplicación, tal isotopía es compatible respecto $\times$ si y sólo si $(K, \widetilde{\times}) \equiv (K, \times)$.

b) Dado un isoespacio vectorial $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ asociado a un espacio vectorial $(U, \circ, \bullet)$, siendo 1 e $\widehat{I}$ los elementos unidades respectivos de U y $\widehat{U}$ respecto a $\bullet$ y $\widehat{\bullet}$, se tiene que:

b.1) En caso de que $\widehat{U}$ se haya obtenido mediante una isotopía compatible respecto a $\bullet$, se cumple que $\widehat{I} = \widehat{1}$.

b.2) En caso de que $\widehat{U}$ se haya obtenido a partir de una isotopía que siga el modelo de construcción del isoproducto, haciendo uso en el nivel general de un espacio vectorial $(U, \diamond, \square)$, se cumple que tal isotopía es compatible respecto a $\bullet$ si y sólo si $(U, \widetilde{\square}) \equiv (U, \bullet)$.

Demostración

El razonamiento sería análogo al de la Proposición 10.15 sin más que cambiar $\widehat{S}$ por $\widehat{I}$, 0 por 1, $+$ por $\times$ y $\circ$ por $\bullet$ y las construcciones efectuadas en cada caso concreto. $\square$

Volviendo al resultado que nos ocupa, observemos que todas las condiciones que imponíamos a nuestro levantamiento isotópico con anterioridad a la Proposición 10.17, se engloban diciendo que la isotopía utilizada para la construcción de $\widehat{K}$ y $\widehat{U}$ debe ser compatible respecto a $+, \circ, \bullet$ y $\times$. En particular, la aplicación $\mathbf{I}_K : K(a, +, \times) \to \widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times}) : a \to \widehat{a}$ es un isomorfismo de anillos, siendo por otra parte una biyección lineal en $\circ$ y $\bullet$ la aplicación $\mathbf{I}_U : (U \circ, \bullet) \to (\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\times}) : X \to \widehat{X}$, según nos indica la Proposición 10.14. Finalmente, las proposiciones 10.15 y 10.17 nos señalan que si $\widehat{K}$ y $\widehat{U}$ son respectivamente un isocuerpo y un isoespacio vectorial respecto a la multiplicación, obtenidos mediante el modelo de construcción del isoproducto, entonces, manteniendo las notaciones usuales, estamos imponiendo que $K(a,+,\times) \equiv K(a,\star,*)$, $(U,\circ,\bullet) \equiv (U,\diamond,\Box)$, $\mathbf{I}_K = \mathbf{I}_{*K}$ e $\mathbf{I}_U = \mathbf{I}_{*U}$.

Con todo lo anterior tendremos que para todos $X,Y,Z \in U$ y $a \in K$:

a) $\widehat{S}\widehat{\leq}\widehat{||}\widehat{X}\widehat{||}$, pues: $0 \leq ||X|| \Rightarrow \widehat{0} = \widehat{S}\widehat{\leq}\widehat{||X||} = \widehat{||}\widehat{X}\widehat{||}$.

b) $\widehat{||}\widehat{X}\widehat{||} = \widehat{S} \Leftrightarrow \widehat{X} = \widehat{S'}$, pues:

b.1) $\Rightarrow$
Supongamos que $\widehat{||}\widehat{X}\widehat{||} = \widehat{S}$. Será entonces $\widehat{||X||} = \widehat{S} = \widehat{0}$, con lo cual debe ser $||X|| = 0$. Ahora, como $||.||$ es una norma sobre U, debe ser $X = \overrightarrow{0}$ y así, $\widehat{X} = \widehat{\overrightarrow{0}} = \widehat{S'}$.

b.2) $\Leftarrow$
Supongamos ahora que $\widehat{X} = \widehat{S'}$. Como $\widehat{S'}$ es únicamente el levantado isotópico de $\overrightarrow{0}$, debe ser $X = \overrightarrow{0}$. Así, $||X|| = 0 = S$ y por tanto, $\widehat{||}\widehat{X}\widehat{||} = \widehat{||X||} = \widehat{S}$.

c) $\widehat{||}\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}\widehat{||} = \widehat{|}\widehat{a}\widehat{|}\widehat{\times}\widehat{||}\widehat{X}\widehat{||}$, pues $\widehat{||}\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}\widehat{||} = \widehat{||}\widehat{a \bullet X}\widehat{||} = \widehat{||a \bullet X||} = \widehat{|a| \times ||X||} = \widehat{|a|}\widehat{\times}\widehat{||X||} = \widehat{|}\widehat{a}\widehat{|}\widehat{\times}\widehat{||}\widehat{X}\widehat{||}$.

d) <u>Desigualdad triangular</u>: $\widehat{||}\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y}\widehat{||}\widehat{\leq}\widehat{||}\widehat{X}\widehat{||}\widehat{+}\widehat{||}\widehat{Y}\widehat{||}$, pues $\widehat{||}\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y}\widehat{||} = \widehat{||}\widehat{X \circ Y}\widehat{||} = \widehat{||X \circ Y||}\widehat{\leq}\widehat{||X|| + ||Y||} = \widehat{||X||}\widehat{+}\widehat{||Y||} = \widehat{||}\widehat{X}\widehat{||}\widehat{+}\widehat{||}\widehat{Y}\widehat{||}$, donde hemos utilizado la desigualdad triangular de la norma $||.||$ en U.

Llegamos por tanto a que $\widehat{||}.\widehat{||}$ es una norma en $\widehat{U}$ y como tal, como se ha construido por medio de un levantamiento isotópico de la norma $||.||$ de partida, es coherente denotarla como isonorma de $\widehat{U}$. Llegamos en particular a que $\widehat{U}$ sería un isoespacio isonormado, como queríamos. Tenemos entonces probado el siguiente resultado:

Proposición 10.18 *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$*-isoanillo, levantado isotópico de un* $K(a, +, \times)$*-anillo normado* $(U, \circ, \bullet)$*, de norma* $||.||$*, mediante una isotopía compatible respecto a* $+, \circ, \bullet$ *y* $\times$*. Resulta entonces que la isonorma* $\widehat{||}.\widehat{||} \equiv \widehat{||.||}$ *es una norma sobre* $\widehat{U}$*.* $\square$

Si además la isotopía utilizada en la construcción de $\widehat{U}$ y $\widehat{K}$ es inyectiva, definiremos en $\widehat{\widehat{U}}$ la isonorma $\widehat{\widehat{||}}.\widehat{\widehat{||}} : \widehat{\widehat{U}} \to \widehat{\widehat{K}} : \widehat{\widehat{X}} \to \widehat{\widehat{||}}\widehat{\widehat{X}}\widehat{\widehat{||}} = \widehat{\widehat{||X||}}$, esto es, $\widehat{\widehat{||}}.\widehat{\widehat{||}} \equiv \widehat{\widehat{||.||}}$. Por construcción y haciendo uso de los resultados vistos para la isonorma en $\widehat{K}$, se tendrá entonces de forma inmediata el siguiente resultado:

Proposición 10.19 *En las condiciones de la Proposición 10.18, si la isotopía utilizada en la construcción de* $\widehat{K}$ *y* $\widehat{U}$ *es inyectiva, entonces la isonorma* $\widehat{\widehat{||}}.\widehat{\widehat{||}} \equiv \widehat{\widehat{||.||}}$ *es una norma sobre* $\widehat{\widehat{U}}$*.* $\square$

En el caso del isomódulo en $\widehat{\mathbf{R}}$ de la Definición 10.4, será necesario imponer también en dicha definición que la isotopía que construye $\widehat{\mathbf{R}}$ sea compatible respecto a $+, \circ, \bullet$ y $\times$, para que de forma análoga al caso general de una isonorma, el isomódulo $\widehat{|}.\widehat{|}$ en $\widehat{\mathbf{R}}$ verifique condiciones análogas al módulo $|.|$ en $\mathbf{R}$. Esto es, para todo $a, b \in \mathbf{R}$:

a) $\widehat{|}\widehat{a}\widehat{|}\widehat{\geq}\widehat{S}$, pues será $\widehat{|}\widehat{a}\widehat{|} = \widehat{|a|}\widehat{\geq}\widehat{S} = \widehat{0}$, al ser $|a| \geq 0$.

b) $\widehat{|}\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b}\widehat{|} = \widehat{|}\widehat{a}\widehat{|}\widehat{\times}\widehat{|}\widehat{b}\widehat{|}$, pues $\widehat{|}\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b}\widehat{|} = \widehat{|}\widehat{a \times b}\widehat{|} = \widehat{|a \times b|} = \widehat{|a| \times |b|} = \widehat{|a|}\widehat{\times}\widehat{|b|} = \widehat{|}\widehat{a}\widehat{|}\widehat{\times}\widehat{|}\widehat{b}\widehat{|}$.

c) $\widehat{|}\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b}\widehat{|}\widehat{\leq}\widehat{|}\widehat{a}\widehat{|}\widehat{+}\widehat{|}\widehat{b}\widehat{|}$, pues $\widehat{|}\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b}\widehat{|} = \widehat{|}\widehat{a + b}\widehat{|} = \widehat{|a + b|}\widehat{\leq}\widehat{|a| + |b|} = \widehat{|a|}\widehat{+}\widehat{|b|} = \widehat{|}\widehat{a}\widehat{|}\widehat{+}\widehat{|}\widehat{b}\widehat{|}$, donde se ha utilizado que en $\mathbf{R}$, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Análogamente, añadiendo además la inyectividad de la isotopía que construye $\widehat{\mathbf{R}}$, tendremos que el isomódulo $\widehat{\widehat{|}}.\widehat{\widehat{|}} \equiv \widehat{\widehat{|.|}}$ es por construcción un módulo en $\widehat{\widehat{\mathbf{R}}}$.

Con todo ello, pasando al caso $K = \mathbf{R}$, damos la siguiente:

Definición 10.20 *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un isoespacio vectorial isonormado sobre el isocuerpo isorreal* $(\widehat{\mathbf{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times})$*, levantado isotópico de un espacio vectorial normado* $(U, \circ, \bullet)$ *sobre el cuerpo real* $(\mathbf{R}, +, \times)$ *con norma* $||.||$*, a partir de una isotopía compatible respecto a* $+, \circ, \bullet$ *y* $\times$*. Sea* $\leq$ *el orden usual en* $\mathbf{R}$ *y* $\widehat{\leq}$ *el isoorden correspondiente en* $\widehat{\mathbf{R}}$*. Sea* $\widehat{f}$ *una isofunción de* $\widehat{U}$ *sobre* $\widehat{\mathbf{R}}$*. Se dirá que* $\widehat{f}$ *es una* isofunción isocontinua en $\widehat{X} \in \widehat{U}$*, si para todo* $\widehat{\epsilon} \widehat{>} \widehat{S}$*, existe* $\widehat{\delta} \widehat{>} \widehat{S}$ *tal que para todo* $\widehat{Y} \in \widehat{U}$ *con* $\widehat{||\widehat{X} - \widehat{Y}||} \widehat{<} \widehat{\delta}$*, se verifica que* $\widehat{|\widehat{f}(\widehat{X}) - \widehat{f}(\widehat{Y})|} \widehat{<} \widehat{\epsilon}$*.*

Se dirá que $\widehat{f}$ *es* isocontinua en $\widehat{U}$ *si es isocontinua en* $\widehat{X}$*, para todo* $\widehat{X} \in \widehat{U}$*.*

En caso de que la isotopía que construye $\widehat{\mathbf{R}}$ *y* $\widehat{U}$ *sea inyectiva, se dirá que* $\overline{\widehat{f}}$ *es* isocontinua en $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{U}}$ *si para todo* $\overline{\widehat{\epsilon}} \overline{\widehat{>}} \overline{\widehat{S}}$*, existe* $\overline{\widehat{\delta}} \overline{\widehat{>}} \overline{\widehat{S}}$ *tal que para todo* $\overline{\widehat{Y}} \in \overline{\widehat{U}}$ *con* $\overline{\widehat{||\overline{\widehat{X}} - \overline{\widehat{Y}}||}} \overline{\widehat{<}} \overline{\widehat{\delta}}$*, se verifica que* $\overline{\widehat{|\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{X}}) - \overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{Y}})|}} \overline{\widehat{<}} \overline{\widehat{\epsilon}}$*.*

Se dirá que $\overline{\widehat{f}}$ *es* isocontinua en $\overline{\widehat{U}}$ *si es isocontinua en* $\overline{\widehat{X}}$*, para todo* $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{U}}$*.*

De la anterior definición se deduce de forma inmediata por construcción la siguiente:

Proposición 10.21 *En las condiciones de la Definición 10.20, si la isotopía que construye* $\widehat{\mathbf{R}}$ *y* $\widehat{U}$ *es inyectiva, se verifica entonces que* $\widehat{f}$ *es isocontinua en* $\widehat{X} \in \widehat{U}$ *si y sólo si* $\overline{\widehat{f}}$ *es isocontinua en* $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{U}}$*. Como consecuencia,* $\widehat{f}$ *es isocontinua en* $\widehat{U}$ *si y sólo si* $\overline{\widehat{f}}$ *es isocontinua en* $\overline{\widehat{U}}$*.* □

Debido al resultado anterior, centraremos nuestro estudio en la isocontinuidad en $\widehat{U}$, puesto que la isocontinuidad en $\overline{\widehat{U}}$ se tendrá de forma inmediata cuando sea posible su estudio.

Centrándonos por tanto en la isocontinuidad en $\widehat{U}$, cabe señalar que el resultado fundamental que relaciona la continuidad convencional con la isocontinuidad que hemos definido es la siguiente:

Proposición 10.22 *Bajo las condiciones de la Definición 10.20, una isofunción $\widehat{f}$ es isocontinua en $\widehat{X} \in \widehat{U}$ si y sólo si la función f de la que proviene es continua en el sentido convencional en $X \in U$. Como consecuencia, $\widehat{f}$ es isocontinua en $\widehat{U}$ si y sólo si f es continua en U.*

Demostración

a) Supongamos que $\widehat{f}$ es isocontinua en $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Sea ahora $\epsilon \in \mathbf{R}$, con $\epsilon > 0$. Será entonces $\widehat{\epsilon}\widehat{>}\widehat{0} = \widehat{S}$. Por ser $\widehat{f}$ isocontinua en $\widehat{X}$, existirá $\widehat{\delta}\widehat{>}\widehat{S} = \widehat{0}$, tal que para todo $\widehat{Y} \in \widehat{U}$, con $\widehat{||\widehat{X} - \widehat{Y}||}\widehat{<}\widehat{\delta}$, se verifica que $\widehat{|\widehat{f}(\widehat{X}) - \widehat{f}(\widehat{Y})|}\widehat{<}\widehat{\epsilon}$. Ahora bien, dado que el levantamiento isotópico utilizado mantiene el elemento opuesto en $\widehat{U}$ y teniendo en cuenta cómo actúa $\widehat{\circ}$ al ser compatible la isotopía utilizada respecto a $\circ$, tenemos que $\widehat{X} - \widehat{Y} = \widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y}^{-\widehat{S}'} = \widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y^{-\overrightarrow{0}}} = \widehat{X \circ Y^{-\overrightarrow{0}}} = \widehat{X - Y}$, y así, $\widehat{||\widehat{X} - \widehat{Y}||} = \widehat{||\widehat{X - Y}||} = ||X - Y||$. Análogamente, dado que el levantamiento usado también conserva el elemento opuesto en $\widehat{K}$ y es compatible respecto a $+$, se tiene que $\widehat{|\widehat{f}(\widehat{X}) - \widehat{f}(\widehat{Y})|} = \widehat{|\widehat{f}(\widehat{X})\widehat{+}(\widehat{f}(\widehat{Y}))^{-\widehat{S}}|} = \widehat{|\widehat{f(X)}\widehat{+}(\widehat{f(Y)})^{-\widehat{S}}|} = \widehat{|\widehat{f(X)}\widehat{+}(\widehat{f(Y)})^{-0}|} = \widehat{|f(X) + \widehat{(f(Y))^{-0}}|} = \widehat{|f(X) - f(Y)|} = |f(X) - f(Y)|$. De esta forma, teniendo en cuenta las definiciones de isoorden e isomódulo, llegamos a que para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $Y \in U$ con $||X - Y|| < \delta$, se verifica que $|f(X) - f(Y)| < \epsilon$; es decir, f es continua en X, como buscábamos probar.

b) Supongamos ahora que f es continua en $X \in U$. Sea ahora $\widehat{\epsilon} \in \widehat{\mathbf{R}}$, tal que $\widehat{\epsilon}\widehat{>}\widehat{S} = \widehat{0}$. Tendremos por tanto el correspondiente $\epsilon \in \mathbf{R}$, tal que $\epsilon > 0$. Ahora bien, por ser f continua en X, existirá $\delta > 0$ tal que para todo $Y \in U$ con $||X - Y|| < \delta$, se tiene que $|f(X) - f(Y)| < \epsilon$. O equivalentemente, existe $\widehat{\delta}\widehat{>}\widehat{0} = \widehat{S}$, tal que para todo

$\widehat{Y} \in \widehat{U}$ con $\widehat{||}\widehat{X} - \widehat{Y}\widehat{||} = \widehat{||}X \widehat{-} Y\widehat{||} = ||X \widehat{-} Y||\widehat{<}\widehat{\delta}$, se verifica que $\widehat{|}\widehat{f}(\widehat{X}) - \widehat{f}(\widehat{Y})\widehat{|} = \widehat{|}f(X) \widehat{-} f(Y)\widehat{|}\widehat{<}\widehat{\epsilon}$; es decir, $\widehat{f}$ es isocontinua en $\widehat{X}$, como queríamos.

La consecuencia señalada en el enunciado es entonces inmediata por lo que acabamos de probar, atendiendo a las nociones de continuidad e isocontinuidad en U y $\widehat{U}$, respectivamente. □

Este resultado que acabamos de probar es de vital importancia en la isoteoría de Santilli, si bien hasta ahora se había trabajado siempre con la isocontinuidad de Kadeisvili (véase **[3]**).

11 Isocontinuidad en isoespacios isotopológicos

A continuación vamos a estudiar de nuevo el concepto de isocontinuidad. Lo veremos aquí en el caso general, donde sólo podemos hablar de isodistancias en lugar de isonormas. Posteriormente veremos que la nueva definición es equivalente a la que vimos en la sección anterior cuando tratamos con isoespacios isonormados. Esta nueva definición va a basarse en el concepto de adherencia visto anteriormente.

Comenzamos estudiando la isocontinuidad en el nivel isotópico:

Definición 11.1 *Se denomina* isoaplicación isocontinua *entre dos isoespacios topológicos* $(\widehat{M}, \widehat{\aleph}_{\widehat{M}})$ *y* $(\widehat{N}, \widehat{\aleph}_{\widehat{N}})$ *a toda isoaplicación* $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N}$*, que conserva las adherencias, esto es, tal que para todo subconjunto* $\widehat{A} \subseteq \widehat{M}$*, se tiene que* $\widehat{f}(\mathbf{Cl}(\widehat{A})) \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{f}(\widehat{A}))$.

Bajo esta definición llegamos de inmediato a la siguiente:

Proposición 11.2 *Sean* $(\widehat{M}, \widehat{\aleph}_{\widehat{M}})$ *y* $(\widehat{N}, \widehat{\aleph}_{\widehat{N}})$ *dos isoespacios isotopológicos, levantados isotópicos respectivos de* $(M, \aleph_M)$ *y* $(N, \aleph_N)$*. Sea* $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N}$ *una isoaplicación asociada a una aplicación* $f : M \to N$*. Se verifica entonces que* $\widehat{f}$ *es isocontinua si y sólo si* f *es continua.*

Demostración

Sea $\widehat{A} \subseteq \widehat{M}$, levantado isotópico de $A \subseteq M$. Suponiendo que $\widehat{f}$ es isocontinua se tendrá que $\widehat{f}(\mathbf{Cl}(\widehat{A})) \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{f}(\widehat{A})) = \mathbf{Cl}(\widehat{f(A)})$. Ahora bien, aplicando el Corolario 6.7, lo anterior equivale a decir que $\widehat{f}(\widehat{\mathbf{Cl}(A)}) \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{f(A)})$. Esto es, $f(\widehat{\mathbf{Cl}(A)}) \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{f(A)})$. Pero lo anterior equivale a decir que $f(\mathbf{Cl}(A)) \subseteq \mathbf{Cl}(f(A))$. Como esto se tendría para todo $A \subseteq M$, llegamos a que f es continua, lo cual prueba nuestro resultado, pues todas las implicaciones utilizadas son reversibles. □

También llegamos al siguiente resultado:

Proposición 11.3 *Dada la isoaplicación* $\widehat{f} : (\widehat{M}, \widehat{\aleph}_{\widehat{M}}) \to (\widehat{N}, \widehat{\aleph}_{\widehat{N}})$*, son equivalentes:*

i) $\widehat{f}$ *es isocontinua.*

ii) $\widehat{f}^{-1}(\widehat{C})$ *es cerrado de* $\widehat{M}$*, para todo cerrado* $\widehat{C}$ *de* $\widehat{N}$*.*

iii) $\widehat{f}^{-1}(\widehat{U})$ *es abierto de* $\widehat{M}$*, para todo abierto* $\widehat{U}$ *de* $\widehat{N}$*.*

iv) $\widehat{f}^{-1}(\widehat{B}) \in \widehat{\aleph}_{\widehat{M}_{\widehat{X}}}$*, para todos* $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{N}_{\widehat{f}(\widehat{X})}}$ *y* $\widehat{X} \in \widehat{M}$*.*

v) Para todos $\widehat{X} \in \widehat{M}$ *y* $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{N}_{\widehat{f}(\widehat{X})}}$*, existe* $\widehat{D} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{M}_{\widehat{X}}}$*, tal que* $\widehat{f}(\widehat{D}) \subseteq \widehat{B}$*.*

Demostración

a) $i \Rightarrow ii$
Sea $\widehat{C}$ un cerrado de $\widehat{N}$. Por el apartado (a) de la Proposición

6.6, tenemos ya que $\widehat{f}^{-1}(\widehat{C}) = \widehat{f^{-1}(C)} \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{f^{-1}(C)})$. Con lo cual basta probar la otra contención. Ahora bien, tenemos que $\widehat{f}(\mathbf{Cl}(\widehat{f^{-1}(C)})) \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{f}(\widehat{f^{-1}(C)}))$, por ser $\widehat{f}$ isocontinua por hipótesis. Esto es, $\widehat{f}(\mathbf{Cl}(\widehat{f^{-1}(C)}) \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{C})$, al ser $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. De esta forma, $\mathbf{Cl}(\widehat{f^{-1}(C)}) \subseteq \widehat{f}^{-1}(\mathbf{Cl}(\widehat{C})) = \widehat{f}^{-1}(\widehat{C})$, al ser $\widehat{C}$ un cerrado de $\widehat{N}$ por hipótesis. Así pues, llegamos a que $\mathbf{Cl}(\widehat{f}^{-1}(\widehat{C})) = \widehat{f}^{-1}(\widehat{C})$, siendo así $\widehat{f}^{-1}(\widehat{C})$ un cerrado de $\widehat{M}$, tal y como queríamos probar.

b) $ii \Rightarrow iii$
Sea $\widehat{U}$ un abierto de $\widehat{N}$. Aplicando el apartado (a) de la Proposición 7.9, llegamos a que $\widehat{N} \setminus \widehat{U}$ es un cerrado de $\widehat{N}$. De esta forma, tenemos por hipótesis que $\widehat{f}^{-1}(\widehat{N} \setminus \widehat{U})$ es un cerrado en $\widehat{M}$. Ahora bien, $\widehat{f}^{-1}(\widehat{N} \setminus \widehat{U}) = \widehat{f}^{-1}(\widehat{N}) \setminus \widehat{f}^{-1}(\widehat{U}) = \widehat{M} \setminus \widehat{f}^{-1}(\widehat{U})$. Con lo cual, aplicando ahora el apartado (b) de la Proposición 7.9, llegamos a que $\widehat{f}^{-1}(\widehat{U})$ debe ser abierto de $\widehat{M}$, que es lo que buscábamos.

c) $iii \Rightarrow iv$
Sea $\widehat{X} \in \widehat{M}$. Sea $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{N}_{\widehat{f}(\widehat{X})}}$. Podemos encontrar entonces un abierto $\widehat{U}$ de $\widehat{N}$ tal que $\widehat{f}(\widehat{X}) \in \widehat{U} \subseteq \widehat{B}$. Equivalentemente, $\widehat{X} \in \widehat{f}^{-1}(\widehat{U}) \subseteq \widehat{f}^{1}(\widehat{B})$. Entonces, por (iii), $\widehat{f}^{-1}(\widehat{U})$ es un abierto de $\widehat{M}$ y por tanto es un isoentorno de $\widehat{X}$. Esto es, $\widehat{f}^{-1}(\widehat{U}) \in \widehat{\aleph}_{\widehat{M}_{\widehat{X}}}$, con lo cual $\widehat{f}^{-1}(\widehat{B}) \in \widehat{\aleph}_{\widehat{M}_{\widehat{X}}}$, al ser $\widehat{f}^{-1}(\widehat{U}) \subseteq \widehat{f}^{1}(\widehat{B})$, como queríamos.

d) $iv \Rightarrow v$
Sea $\widehat{X} \in \widehat{M}$. Sea $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{N}_{\widehat{f}(\widehat{X})}}$. Por (iv), $\widehat{f}^{-1}(\widehat{B}) \in \widehat{\aleph}_{\widehat{M}_{\widehat{X}}}$. Basta tomar entonces $\widehat{D} = \widehat{f}^{-1}(\widehat{B})$, pues resulta que $\widehat{f}(\widehat{D}) = \widehat{f}(\widehat{f}^{-1}(\widehat{B})) = \widehat{f}(\widehat{f^{-1}}(\widehat{B}) = \widehat{f}(\widehat{f^{-1}(B)}) = \widehat{f(f^{-1}(B))} \subseteq \widehat{B}$, al ser $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

e) $v \Rightarrow i$
Sean $\widehat{A} \subseteq \widehat{M}$ e $\widehat{Y} \in \widehat{f}(\mathbf{Cl}(\widehat{A}))$. Para ver que $\widehat{Y} \in \mathbf{Cl}(\widehat{f}(\widehat{A}))$ hay que probar que $\widehat{B} \cap \widehat{f}(\widehat{A}) \neq \emptyset$, para todo $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{Y}}$. Ahora bien, $\widehat{Y} \in \widehat{f}(\mathbf{Cl}(\widehat{A}))$ implica que existe $\widehat{X} \in \mathbf{Cl}(\widehat{A})$ tal que $\widehat{f}(\widehat{X}) = \widehat{Y}$. Tomamos entonces $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{Y}}$. Resulta por (v) que existe $\widehat{D} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{M}_{\widehat{X}}}$ tal que $\widehat{f}(\widehat{D}) \subseteq \widehat{B}$. Ahora, por ser $\widehat{D} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{M}_{\widehat{X}}}$, tendremos que $\widehat{D} \cap \widehat{A} \neq \emptyset$, pues $\widehat{X} \in \mathbf{Cl}(\widehat{A})$. Así pues, $\emptyset \neq \widehat{f}(\widehat{D} \cap \widehat{A}) \subseteq \widehat{f}(\widehat{D}) \cap \widehat{f}(\widehat{A}) \subseteq$

$\widehat{B}\cap\widehat{f}(\widehat{A}) \Rightarrow \widehat{B}\cap\widehat{f}(\widehat{A}) \neq \emptyset \Rightarrow \widehat{Y} \in \mathbf{Cl}(\widehat{f}(\widehat{A}))$, ya que $\widehat{B}$ era arbitrario, lo cual termina de probar nuestro resultado. $\square$

Atendiendo a la caracterización anterior de isofunciones isocontinuas podemos dar la siguiente definición:

Definición 11.4 *Una isofunción* $\widehat{f} : (\widehat{M}, \widehat{\aleph}_{\widehat{M}}) \to (\widehat{N}, \widehat{\aleph}_{\widehat{N}})$ *entre dos isoespacios topológicos se dice* isocontinua *en* $\widehat{X} \in \widehat{M}$ *si* $\widehat{f}^{-1}(\widehat{B}) \in \widehat{\aleph}_{\widehat{M}_{\widehat{X}}}$, *para todo* $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{N}_{\widehat{f}(\widehat{X})}}$. $\widehat{f}$ *será entonces* isocontinua *si es isocontinua en todos los isopuntos de* $\widehat{M}$.

Estos conceptos tienen su desarrollo similar en el nivel de proyección, si bien hay que imponer desde un principio la inyectividad del levantamiento isotópico utilizado en la construcción del isoespacio en cuestión, para que así tenga sentido hablar de isofunciones en dicho nivel:

Definición 11.5 *Se denomina* isofunción isocontinua *entre dos isoespacios topológicos en el nivel de proyección* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{M}}})$ *y* $(\overline{\widehat{N}}, \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{N}}})$ *a toda isoaplicación* $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{N}}$, *que conserva las adherencias, esto es, tal que para todo subconjunto* $\overline{\widehat{A}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$, *se tiene que* $\overline{\widehat{f}}(\mathbf{Cl}(\overline{\widehat{A}})) \subseteq \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{A}}))$.

Llegamos entonces a la siguiente:

Proposición 11.6 *Sean* $(\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{M}}})$ *y* $(\overline{\widehat{N}}, \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{N}}})$ *dos isoespacios isotopológicos, levantados isotópicos respectivos de* $(M, \aleph_M)$ *y* $(N, \aleph_N)$. *Sea* $\overline{\widehat{f}} : \overline{\widehat{M}} \to \overline{\widehat{N}}$ *una isoaplicación asociada a una aplicación* $f : M \to N$. *Se verifica entonces que si las isotopías utilizadas en la construcción de* $\widehat{M}$ *y* $\widehat{N}$ *son inyectivas, entonces se tiene que* $\overline{\widehat{f}}$ *es isocontinua si y sólo si* f *es continua.*

Demostración

Sea $\overline{\widehat{A}} \subseteq \overline{\widehat{M}}$, levantado isotópico de $A \subseteq M$. Suponiendo que $\overline{\widehat{f}}$ es isocontinua se tendrá que $\overline{\widehat{f}}(\mathbf{Cl}(\overline{\widehat{A}})) \subseteq \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{A}})) = \mathbf{Cl}(\overline{\widehat{f(A)}})$. Ahora bien, dado que las isotopías utilizadas en la construcción de $\overline{\widehat{M}}$ y $\overline{\widehat{N}}$ son ambas inyectivas, resulta que, aplicando el Corolario 6.10, lo anterior equivale a decir que $\overline{\widehat{f}}(\widehat{\mathbf{Cl}(A)}) \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{f(A)})$. Esto es, $\widehat{f(\mathbf{Cl}(A))} \subseteq \mathbf{Cl}(\widehat{f(A)})$. Ahora bien, como la isotopía utilizada en la construcción de $\widehat{N}$ es inyectiva, lo anterior equivale a decir que $f(\mathbf{Cl}(A)) \subseteq \mathbf{Cl}(f(A))$. Como esto se tendría para todo $A \subseteq M$, llegamos a que f es continua, lo cual prueba nuestro resultado, pues todas las implicaciones utilizadas son reversibles. $\square$

También llegamos al siguiente resultado:

Proposición 11.7 *Dada la isoaplicación* $\overline{\widehat{f}} : (\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{M}}}) \to (\overline{\widehat{N}}, \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{N}}})$, *son equivalentes:*

i) $\overline{\widehat{f}}$ *es isocontinua.*

ii) $\overline{\widehat{f}}^{-1}(\overline{\widehat{C}})$ *es cerrado de* $\overline{\widehat{M}}$, *para todo cerrado* $\overline{\widehat{C}}$ *de* $\overline{\widehat{N}}$.

iii) $\overline{\widehat{f}}^{-1}(\overline{\widehat{U}})$ *es abierto de* $\overline{\widehat{M}}$, *para todo abierto* $\overline{\widehat{U}}$ *de* $\overline{\widehat{N}}$.

iv) $\overline{\widehat{f}}^{-1}(\overline{\widehat{B}}) \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{M}}_{\overline{\widehat{X}}}}$, *para todos* $\overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{N}}_{\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{X}})}}$ *y* $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{M}}$.

v) Para todos $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{M}}$ *y* $\overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{N}}_{\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{X}})}}$, *existe* $\overline{\widehat{D}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{M}}_{\overline{\widehat{X}}}}$, *tal que* $\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{D}}) \subseteq \overline{\widehat{B}}$.

Demostración

La demostración es análoga a la dada para la Proposición 11.3, si bien hay que reescribir $\widehat{\ }$ por $\overline{\widehat{\ }}$. $\square$

Atendiendo a la caracterización anterior de isofunciones isocontinuas podemos dar la siguiente definición:

Definición 11.8 *Una isofunción* $\overline{\widehat{f}} : (\overline{\widehat{M}}, \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{M}}}) \to (\overline{\widehat{N}}, \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{N}}})$ *entre dos isoespacios topológicos en el nivel de proyección se dice* isocontinua *en* $\overline{\widehat{X}} \in \overline{\widehat{M}}$ *si* $\overline{\widehat{f}}^{-1}(\overline{\widehat{B}}) \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{M}}_{\overline{\widehat{X}}}}$, *para todo* $\overline{\widehat{B}} \in \overline{\widehat{\aleph}}_{\overline{\widehat{N}}_{\overline{\widehat{f}}(\overline{\widehat{X}})}}$. $\overline{\widehat{f}}$ *será entonces* isocontinua *si es isocontinua en todos los isopuntos de* $\overline{\widehat{M}}$.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 11.9 *Sea* $\widehat{M}$ *un isoespacio topológico con* $\widehat{\aleph}$ *y* $\widehat{\aleph}'$ *dos familias de sistemas fundamentales de isoentornos. Consideramos la isoaplicación isoidentidad* $\widehat{Id} : \widehat{M} \to \widehat{M} : \widehat{X} \to \widehat{X}$. *Para ver si* $\widehat{Id}$ *es isocontinua fijamos* $\widehat{X} \in \widehat{M}$. *Se tiene entonces que, fijado* $\widehat{X} \in \widehat{M}$, $\widehat{Id}$ *es isocontinua en* $\widehat{X}$ *si para todo* $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}'_{\widehat{Id}(\widehat{X})}$ *se cumple que* $\widehat{Id}^{-1}(\widehat{B}) = \widehat{B} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$. *Esto es,* $\widehat{Id}$ *es isocontinua si y sólo si* $\widehat{\aleph}'_{\widehat{Id}(\widehat{X})} = \widehat{\aleph}'_{\widehat{X}} \subseteq \widehat{\aleph}_{\widehat{X}}$, *para todo* $\widehat{X} \in \widehat{M}$.

En conclusión, si $\widehat{\aleph}' = \widehat{\aleph}$, *llegamos a que la isoaplicación isoidentidad correspondiente es siempre isocontinua.*

Análogamente, si el levantamiento que da lugar a $\widehat{M}$ *es inyectivo, podemos asegurar un resultado similar al anterior en el nivel de proyección.* $\triangleleft$

Ejemplo 11.10 *Consideramos* $(\widehat{\mathbf{R}}, \widehat{+})$ *el isogrupo de los isorreales construido a partir de la isotopía inyectiva de elementos* $\widehat{I} = 2$ *y* $* \equiv +$. *Tomamos por una parte* $\overline{\widehat{T}}$ *la topología integro-diferencial de Tsagas-Sourlas en el nivel de proyección, esto es, la isotopología isoeuclídea que vimos al comienzo de esta sección. Por otro lado, consideramos* Υ_{ord} *la topología del orden en* $\mathbf{R}$, *donde* $\Upsilon_{ord_x} = \{U \subseteq \mathbf{R} : [x, +\infty) \subseteq U\}$, *y tomamos* $\widehat{\Upsilon_{ord}}$ *la isotopología correspondiente.*

Resulta entonces que $\overline{\widehat{Id}} : (\overline{\widehat{\mathbf{R}}}, \overline{\widehat{T}}) \to (\overline{\widehat{\mathbf{R}}}, \overline{\widehat{\Upsilon_{ord}}})$ *es isocontinua si y sólo si (según hemos visto en el ejemplo anterior)* $\overline{\widehat{\Upsilon}}_{ord\overline{\widehat{x}}} \subseteq \overline{\widehat{T}}_{\overline{\widehat{x}}}$, *para todo* $\overline{\widehat{x}} \in \overline{\widehat{\mathbf{R}}}$. *Ahora bien, tenemos que para* $x \in \mathbf{R}$ *cualquiera, resulta que* $[x+2, +\infty) = \overline{\widehat{[x, +\infty)}} \in \overline{\widehat{\Upsilon}}_{ord\overline{\widehat{x}}}$, *pues* $[x, +\infty) \in \Upsilon_{ordx}$. *Pero como* $[x, +\infty) \notin T_x$, *resulta que* $\overline{\widehat{[x, +\infty)}} \notin \overline{\widehat{T}}_{\overline{\widehat{x}}}$. *Así,* $\overline{\widehat{\Upsilon}}_{ord\overline{\widehat{x}}} \not\subseteq \overline{\widehat{T}}_{\overline{\widehat{x}}}$ *y por tanto, la isoaplicación isoidentidad anterior no es isocontinua.*

Consideramos ahora $\overline{\widehat{Id}} : (\overline{\widehat{\mathbf{R}}}, \overline{\widehat{\Upsilon_{ord}}}) \to (\overline{\widehat{\mathbf{R}}}, \overline{\widehat{T}})$. *Resulta entonces que fijado* $\epsilon > 0$, *será* $\overline{\widehat{\epsilon}}\,\overline{\widehat{>}}\,\overline{\widehat{0}} = 2$, *siendo* $(x-\epsilon+2, x+\epsilon+2) = \overline{\widehat{(x-\epsilon, x+\epsilon)}} \in \overline{\widehat{T}}_{\overline{\widehat{x}}}$. *Ahora bien, resulta que* $[x, +\infty) \not\subseteq (x-\epsilon, x+\epsilon)$, *con lo cual* $(x-\epsilon, x+\epsilon) \notin \Upsilon_{ordx}$ *y por tanto,* $(x-\epsilon+2, x+\epsilon+2) \notin \overline{\widehat{\Upsilon}}_{ord\overline{\widehat{x}}}$. *Así pues,* $\overline{\widehat{T}}_{\overline{\widehat{x}}} \not\subseteq \overline{\widehat{\Upsilon}}_{ord\overline{\widehat{x}}}$ *y así, la isoaplicación isoidentidad anterior tampoco es isocontinua.* $\lhd$

Obtenemos además el siguiente resultado:

Proposición 11.11 *Se tiene que:*

a) Cualquier isoaplicación isoconstante es isocontinua.

b) La composición de isoaplicaciones isocontinuas es isocontinua.

c) El producto topológico de isoaplicaciones isocontinuas es una isoaplicación isocontinua.

Demostración

Lo veremos en el nivel isotópico, siendo análoga la prueba en el nivel de proyección, si bien hay que imponer la inyectividad del levantamiento isotópico del espacio en cuestión:

a) Sean $(\widehat{M}, \widehat{\aleph}_{\widehat{M}})$ y $(\widehat{N}, \widehat{\aleph}_{\widehat{N}})$ dos isoespacios topológicos, donde $\widehat{N} = \{\widehat{X_0}\}$ es un conjunto unitario y así, $\widehat{\aleph}_{\widehat{N}} = \{\{\widehat{X_0}\}\}$. Consideremos la isoaplicación isoconstante $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N} : \widehat{X} \to \widehat{X_0}$, para todo $\widehat{X} \in$

$\widehat{M}$. Resulta entonces que para todo $\widehat{X} \in \widehat{M}$, el único isoentorno de $\widehat{f}(\widehat{X}) = \widehat{X_0}$ es $\{\widehat{X_0}\}$, siendo además $\widehat{f}^{-1}(\{\widehat{X_0}\}) = \widehat{M} \in \widehat{\aleph}_{\widehat{M}_{\widehat{X}}}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{M}$. Llegamos por tanto como queríamos a que $\widehat{f}$ es isocontinua aplicando la Proposición 11.3.

b) Sean $\widehat{f} : (\widehat{M_1}, \widehat{\aleph_1}) \to (\widehat{M_2}, \widehat{\aleph_2})$ y $\widehat{g} : (\widehat{M_2}, \widehat{\aleph_2}) \to (\widehat{M_3}, \widehat{\aleph_3})$ dos isoaplicaciones isocontinuas entre isoespacios topológicos. Para ver que $\widehat{g} \circ \widehat{f} = \widehat{g \circ f} : (\widehat{M_1}, \widehat{\aleph_1}) \to (\widehat{M_3}, \widehat{\aleph_3})$ es isocontinua, fijamos $\widehat{X} \in \widehat{M_1}$ y $\widehat{B} \in \widehat{\aleph_3}_{(\widehat{g} \circ \widehat{f})(\widehat{X})}$. Por ser $\widehat{g}$ isocontinua y ser $\widehat{f}(\widehat{X}) \in \widehat{M_2}$, tendremos que $\widehat{g}^{-1}(\widehat{B}) \in \widehat{\aleph_2}_{\widehat{f}(\widehat{X})}$. Ahora, por ser $\widehat{f}$ isocontinua y ser $\widehat{X} \in \widehat{M_1}$, tendremos que $\widehat{f}^{-1}(\widehat{g}^{-1}(\widehat{B})) \in \widehat{\aleph_1}_{\widehat{X}}$. Ahora bien, $\widehat{f}^{-1}(\widehat{g}^{-1}(\widehat{B})) = (\widehat{g} \circ \widehat{f})^{-1}(\widehat{B})$. Con lo cual, $(\widehat{g} \circ \widehat{f})^{-1}(\widehat{B}) \in \widehat{\aleph_1}_{\widehat{X}}$. Como lo anterior se tiene para todos $\widehat{X} \in \widehat{M_1}$ y $\widehat{B} \in \widehat{\aleph_3}_{(\widehat{g} \circ \widehat{f})(\widehat{X})}$, llegamos finalmente, aplicando la Proposición 11.3 a que $\widehat{g} \circ \widehat{f}$ es isocontinua, como pretendíamos probar.

c) Sean $\widehat{f} : (\widehat{M_1}, \widehat{\aleph_{M_1}}) \to (\widehat{N_1}, \widehat{\aleph_{N_1}})$ y $\widehat{g} : (\widehat{M_2}, \widehat{\aleph_{M_2}}) \to (\widehat{N_2}, \widehat{\aleph_{N_2}})$ dos isoaplicaciones isocontinuas entre isoespacios topológicos. Consideramos los isoespacios topológicos productos $\widehat{A} = (\widehat{M_1} \times \widehat{M_2}, \widehat{\aleph_{M_1}} \times \widehat{\aleph_{M_2}})$ y $\widehat{B} = (\widehat{N_1} \times \widehat{N_2}, \widehat{\aleph_{N_1}} \times \widehat{\aleph_{N_2}})$, donde usamos la construcción vista en la demostración de la Proposición 5.5. Veamos que se tiene entonces que $\widehat{f} \times \widehat{g} : \widehat{A} \to \widehat{B}$ es una isoaplicación isocontinua.

Tomamos para ello $\widehat{U_1} \times \widehat{U_2}$ un abierto de $\widehat{N_1} \times \widehat{N_2}$, donde haciendo uso de la Proposición 7.7 serán $\widehat{U_1}$ y $\widehat{U_2}$ abiertos respectivos de $\widehat{N_1}$ y $\widehat{N_2}$. Resulta entonces que $(\widehat{f} \times \widehat{g})^{-1}(\widehat{U_1} \times \widehat{U_2}) = \widehat{f}^{-1}(\widehat{U_1}) \times \widehat{g}^{-1}(\widehat{U_2})$, que es producto topológico de abiertos de $\widehat{M_1}$ y $\widehat{M_2}$ respectivamente, al ser $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ isoaplicaciones isocontinuas por hipótesis y aplicar entonces la Proposición 11.3. Así pues, la Proposición 7.7 nos asegura que $(\widehat{f} \times \widehat{g})^{-1}(\widehat{U_1} \times \widehat{U_2})$ es un abierto de $\widehat{M_1} \times \widehat{M_2}$, con lo cual, dado que $\widehat{U_1} \times \widehat{U_2}$ era un abierto arbitrario de $\widehat{N_1} \times \widehat{N_2}$, llegamos aplicando de nuevo la Proposición 11.3 a que $\widehat{f} \times \widehat{g}$ es una isoaplicación isocontinua, como queríamos ver. □

Hasta aquí no se ha hecho mención del modelo de construcción de isotopía que se deba realizar para obtener los resultados señalados, a excepción de la obtención de los isoentornos vista al comienzo de la presente sección. Por tanto, dichos resultados pueden aplicarse a cualquier tipo de isotopía verificando las restricciones oportunas en cada uno de los casos.

El siguiente paso en nuestro estudio va a ser comprobar que la definición de isocontinuidad que hemos dado ahora coincide con el concepto que vimos en la Definición 10.20, bajo las condiciones allí presentadas. Vamos a centrarnos para ello en el estudio del nivel isotópico, teniendo presente que un desarrollo análogo puede hacerse en el nivel de proyección, teniendo en cuenta que al hablar de isofunciones es necesario imponer la inyectividad del levantamiento isotópico con el que se esté trabajando y que, por este motivo, este último nivel es isomorfo al nivel isotópico.

En primer lugar lo veremos para un caso más general. Estudiaremos el caso en que tengamos un isoespacio vectorial dotado de una distancia (pseudo)métrica, cuya definición general sería la siguiente:

Definición 11.12 *Consideremos* $(M, \circ, \bullet)$ *un* $K(a, +, \times)$*-espacio vectorial, con elementos* $X, Y, Z, \ldots$. *Sea* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *un isocuerpo asociado a* $K(a, +, \times)$ *a partir de una isotopía de elementos principales* $\widehat{I}$ *(actuando como constante) y* $*$*, y secundarios* $\widehat{S}$ *y* $\star$*, siendo dicho levantamiento tal que conserve el elemento opuesto. Sea* $\widehat{\leq}$ *el isoorden en* $\widehat{K}$ *asociado al orden* $\leq$ *de* K*. Bajo una isotopía coherente a la anterior (basada en la isounidad* $\widehat{I}$*), se dice que* $(\widehat{M}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *es un* isoespacio vectorial dotado de una distancia pseudométrica *si, siendo una isotopía de* M*, es un isoespacio vectorial sobre el isocuerpo* $\widehat{K}$*, con elementos* $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}, \ldots$*, y está dotado de una distancia pseudométrica* $d' : \widehat{M} \times \widehat{M} \to \widehat{K}$*. Esto es, tal que para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{M}$*, se verifique que:*

a) $\widehat{S} \widehat{\leq} d'(\widehat{X}, \widehat{Y})$; $d'(\widehat{X}, \widehat{X}) = \widehat{S}$.

b) $d'(\widehat{X}, \widehat{Y}) = d'(\widehat{Y}, \widehat{X})$.

c) $d'(\widehat{X}, \widehat{Y}) \widehat{\leq} d'(\widehat{X}, \widehat{Z}) \widehat{+} d'(\widehat{Z}, \widehat{Y})$.

En el caso en que la distancia d' sea métrica (esto es, si se cumple que $d'(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \widehat{S} \Leftrightarrow \widehat{X} = \widehat{Y}$), se dirá que $\widehat{M}$ es un isoespacio vectorial dotado de una distancia métrica.

En el caso en que el espacio vectorial de partida M esté dotado de una distancia pseudométrica d, si la distancia d' es el levantado isotópico de la distancia pseudométrica d (esto es, $d'(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \widehat{d(X, Y)}$), siendo a su vez una distancia pseudométrica, se notará en dicho caso a la distancia d' por $\widehat{d}$, que se llamará a su vez isodistancia isopseudométrica.

Por último, en el caso en que el espacio vectorial de partida M esté dotado de una distancia métrica, si la distancia d' es el levantado isotópico de la distancia métrica d, siendo a su vez una distancia métrica, se notará en este caso a la distancia d' por $\widehat{d}$, que se llamará a su vez isodistancia isométrica.

En cualquiera de los casos anteriores se notará para simplificar $(\widehat{M}, d')$ al isoespacio vectorial en cuestión.

Observemos que bajo las condiciones de la Definición 10.20, tenemos un isoespacio vectorial isonormado que, como tal, puede ser considerado como isoespacio vectorial dotado de una distancia métrica, ya que provendría del levantamiento isotópico de un espacio vectorial normado, que convencionalmente puede ser dotado de la distancia métrica dada por $d(X, Y) = ||X - Y||$, con lo cual bastaría tomar como isodistancia isométrica la dada por $\widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \widehat{d(X, Y)} = \widehat{||}\widehat{X - Y}\widehat{||} = \widehat{||}\widehat{X} - \widehat{Y}\widehat{||}$, donde la última igualdad se tiene debido a que bajo las condiciones de la Definición 10.20, debe tenerse además la compatibilidad de la isotopía utilizada respecto a $\circ$. Bastaría comprobar para ver que $\widehat{d}$ así definida es efectivamente una isodistancia isométrica que verifica las condiciones necesarias para ser una distancia métrica en $\widehat{U}$. Pero estas condiciones se tienen de forma evidente al ser $\widehat{||}.\widehat{||}$ una isonorma en $\widehat{U}$, bajo las condiciones de la Definición 10.20, según las cuales recordemos que $\widehat{S}$ debe ser únicamente el levantado isotópico del vector $\overrightarrow{0} \in U$, que suponemos es el elemento unidad de U respecto a su suma $\circ$. Así, fijados $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$, llegamos a que:

a) $\widehat{S} \widehat{\leq} \widehat{||X - Y||} \Rightarrow \widehat{S} \widehat{\leq} \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y})$.
$\{\widehat{||\widehat{X - Y}||} = \widehat{S} \Leftrightarrow \widehat{X} = \widehat{Y}\} \Rightarrow \{\widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \widehat{S} \Leftrightarrow \widehat{X} = \widehat{Y}\}$.

b) $\widehat{||\widehat{X - Y}||} = \widehat{||-(\widehat{Y - X})||} = ||-(\widehat{Y - X})|| = ||\widehat{Y - X}|| = \widehat{||\widehat{Y - X}||}$
$\Rightarrow \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \widehat{d}(\widehat{Y}, \widehat{X})$.

c) $\widehat{||\widehat{X - Y}||} = \widehat{||X - \widehat{Z \circ Z} - Y||} = \widehat{||\widehat{X - Z}\widehat{\circ}\widehat{Z - Y}||} \widehat{\leq} \widehat{||\widehat{X - Z}||}$
$\widehat{+}\widehat{||\widehat{Z - Y}||} \Rightarrow \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \widehat{\leq} \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Z}) \widehat{+} \widehat{d}(\widehat{Z}, \widehat{Y})$.

No obstante, desde un punto de vista más general tenemos el siguiente resultado:

Proposición 11.13 *Sea $(\widehat{M}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ un $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$-isoespacio vectorial, levantado isotópico de un espacio vectorial (M, d), dotado de una distancia pseudométrica y definido sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$, dotado a su vez de un orden $\leq$; donde la isotopía utilizada para la construcción del isocuerpo mantiene el elemento opuesto y es compatible respecto a $+$. Se verifica entonces que la isofunción asociada a la distancia d es una isodistancia isopseudométrica. De hecho, si el espacio M de partida es un espacio vectorial métrico, entonces $\widehat{d}$ es una isodistancia isométrica.*

Demostración

Basta ver que $\widehat{d} : \widehat{M} \times \widehat{M} \rightarrow \widehat{K}$ verifica las condiciones necesarias para ser una distancia métrica en $\widehat{M}$. Para ello tengamos es cuenta que bajo las hipótesis señaladas en el enunciado podemos construir el isoorden $\widehat{\leq}$ sobre $\widehat{K}$ asociado al orden $\leq$ sobre K. También, aplicando la Proposición 10.15 tenemos que si $\widehat{S}$ es el elemento unidad de $\widehat{K}$ respecto $\widehat{+}$, entonces $\widehat{S}$ es únicamente el levantado isotópico del elemento unidad 0 de K respecto $+$. De esta forma, fijados $X, Y, Z \in K$, tenemos que:

a) $d(X,Y) \geq 0 \Rightarrow \widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Y}) = \widehat{d(X,Y)}\widehat{\geq}\widehat{0} = \widehat{S}$.
$d(X,X) = 0 \Rightarrow \widehat{d}(\widehat{X},\widehat{X}) = \widehat{d(X,X)} = \widehat{0} = \widehat{S}$.

b) $d(X,Y) = d(Y,X) \Rightarrow \widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Y}) = \widehat{d(X,Y)} = \widehat{d(Y,X)} = \widehat{d}(\widehat{Y},\widehat{X})$.

c) $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(z,Y) \Rightarrow \widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Y}) = \widehat{d(X,Y)}\widehat{\leq}$
$\widehat{d(X,Z) + d(Z,Y)} = \widehat{d(X,Z)}\widehat{+}\widehat{d(Z,Y)} = \widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Z})\widehat{+}\widehat{d}(\widehat{Z},\widehat{Y})$.

Así pues, $\widehat{d}$ es una distancia pseudométrica y así una isodistancia isopseudométrica.

En cuanto a la segunda parte del enunciado, si suponemos que la distancia d de partida es una distancia métrica, basta observar que para todos $X, Y \in M$, se tiene que:

a) $\widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Y}) = \widehat{S} = \widehat{0} \Rightarrow \widehat{d(X,Y)} = \widehat{0} \Rightarrow d(X,Y) = 0 \Rightarrow X = Y \Rightarrow \widehat{X} = \widehat{Y}$.

b) Supongamos ahora que $\widehat{X} = \widehat{Y}$. Entonces, por construcción debe ser $X = Y$. Así, $d(X,Y) = 0 \Rightarrow \widehat{d}(\widehat{X},\widehat{Y}) = \widehat{d(X,Y)} = \widehat{0} = \widehat{S}$.

Con lo cual, si unimos lo anterior a las propiedades vistas al comienzo de la demostración, llegamos por definición a que $\widehat{d}$ es una isodistancia isométrica, lo que termina de probar nuestro resultado. $\square$

Pasamos ya a ver la noción de isocontinuidad en isoespacios vectoriales dotados de una (iso)distancia (iso)(pseudo)métrica. Dado que trataremos con un isoorden sobre el isocuerpo con el que trabajemos, será necesario imponer a la isotopía que construye tal isocuerpo las condiciones de la Definición 10.8. En particular habrá que imponer que dicha isotopía mantenga el elemento opuesto. Damos así la siguiente definición previa:

Definición 11.14 *Sea $(\widehat{M}, d')$ un isoespacio vectorial dotado de una (iso)distancia (iso)(pseudo)métrica d' sobre un isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a},\widehat{+},\widehat{\times})$, levantados isotópicos de un espacio vectorial M sobre un cuerpo K dotado* *de un orden $\leq$, donde $\widehat{K}$ se ha construido a partir de una isotopía que mantiene el elemento opuesto y está dotado de un isoorden $\widehat{\leq}$. Se denomina* bola métrica *de centro $\widehat{X_0} \in \widehat{M}$ y radio $\widehat{\epsilon} \widehat{>} \widehat{S}$ (donde $\widehat{\epsilon} \in \widehat{K}$ y $\widehat{S}$ es el elemento unidad de $\widehat{K}$ respecto $\widehat{+}$), al subconjunto $B_{d'}(\widehat{X_0}, \widehat{\epsilon}) = \{\widehat{X} \in \widehat{M} : d'(\widehat{X}, \widehat{X_0}) \widehat{<} \widehat{\epsilon}\}$. En el caso en que el espacio M de partida sea un un espacio vectorial dotado de una distancia (pseudo)métrica d, siendo $\widehat{d} = d'$, se denomina* isobola métrica *en $\widehat{M}$ a toda bola métrica $B_{d'}$ en $\widehat{M}$ que sea levantada isotópica (mediante el levantamiento punto a punto que construye $\widehat{M}$) de una bola métrica B_d en M. Se notará en tal caso por $B_{d'} = B_{\widehat{d}} = \widehat{B_d}$.*

Observemos que es necesario indicar en el subíndice la distancia a la que nos referimos, para así mostrar si nos encontramos en el nivel convencional o en el nivel isotópico. Se tiene no obstante la siguiente:

Proposición 11.15 *Bajo las condiciones de la Proposición 11.13, el levantado isotópico de toda bola métrica en M es una isobola métrica en $\widehat{M}$. De hecho, si $B_d(X_0, \epsilon)$ es una bola métrica de centro X_0 y radio $\epsilon > 0$ en M, entonces $\widehat{B_d(X_0, \epsilon)} = B_{\widehat{d}}(\widehat{X_0}, \widehat{\epsilon})$ es una bola métrica de centro $\widehat{X_0}$ y radio $\widehat{\epsilon} \widehat{>} \widehat{S} = \widehat{0}$ en $\widehat{M}$.*

Demostración

Bastaría probar la segunda parte del enunciado. Sea $B_d(X_0, \epsilon)$ una bola métrica en M. se tiene que $\widehat{B_d(X_0, \epsilon)} = \{\widehat{X} \in \widehat{M} : X \in B_d(X_0, \epsilon)\} = \{\widehat{X} \in \widehat{M} : d(X, X_0) < \epsilon\} = \{\widehat{X} \in \widehat{M} : \widehat{d(X, X_0)} \widehat{<} \widehat{\epsilon}\} = \{\widehat{X} \in \widehat{M} : \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{X_0}) \widehat{<} \widehat{\epsilon}\} = B_{\widehat{d}}(\widehat{X_0}, \widehat{\epsilon})$, donde las igualdades tienen sentido pues $\epsilon > 0 \Leftrightarrow \widehat{\epsilon} \widehat{>} \widehat{0} = \widehat{S}$, siendo $\widehat{S}$ el único levantado isotópico de $0 \in K$. $\square$

Se verifica además la siguiente:

Proposición 11.16 *En las condiciones de la Definición 11.14, se verifica que:*

a) Dado $\widehat{X} \in B_{d'}(\widehat{X_0}, \widehat{\epsilon})$, *existe* $\widehat{\mu} \widehat{>} \widehat{S}$ *tal que* $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu}) \subseteq B_{d'}(\widehat{X_0}, \widehat{\epsilon})$.

b) Dadas $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$ *y* $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu})$, *se tiene que* $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \subseteq B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu})$, *o bien se verifica la inclusión contraria.*

c) Dado $\widehat{Z} \in B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \cap B_{d'}(\widehat{Y}, \widehat{\mu})$, *existe* $\widehat{\rho} \widehat{>} \widehat{S}$ *tal que* $B_{d'}(\widehat{Z}, \widehat{\rho}) \subseteq B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \cap B_{d'}(\widehat{Y}, \widehat{\mu})$.

Demostración

a) Sea $\widehat{X} \in B_{d'}(\widehat{X_0}, \widehat{\epsilon})$. Será $\widehat{S} \widehat{\leq} \widehat{\rho} = d'(\widehat{X}, \widehat{X_0}) \widehat{<} \widehat{\epsilon}$. Tomamos $\widehat{\mu} \in \widehat{K}$ tal que $\widehat{S} \widehat{<} \widehat{\mu} \widehat{<} \widehat{S} \widehat{+} \widehat{\epsilon} - \widehat{\rho} = \widehat{\epsilon} - \widehat{\rho}$. Bastará ver ahora que $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu}) \subseteq B_{d'}(\widehat{X_0}, \widehat{\epsilon})$. Ahora bien, tomando $\widehat{Y} \in B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu})$, será $d'(\widehat{Y}, \widehat{X}) \widehat{<} \widehat{\mu}$. Así, aplicando la desigualdad triangular para la distancia d', será $d'(\widehat{Y}, \widehat{X_0}) \widehat{\leq} d'(\widehat{Y}, \widehat{X}) \widehat{+} d'(\widehat{X}, \widehat{X_0}) \widehat{<} \widehat{\mu} \widehat{+} \widehat{\rho} = \widehat{\epsilon} - \widehat{\rho} \widehat{+} \widehat{\rho} = \widehat{\epsilon}$. Con lo cual, $\widehat{Y} \in B_{d'}(\widehat{X_0}, \widehat{\epsilon})$, lo que prueba el resultado.

b) Sean las bolas métricas $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$ y $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu})$. Podemos suponer que $\widehat{\epsilon} \widehat{\leq} \widehat{\mu}$, siendo análogo el razonamiento si $\widehat{\mu} \widehat{\leq} \widehat{\epsilon}$. Tomamos $\widehat{Y} \in B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$. Será entonces $d'(\widehat{Y}, \widehat{X}) \widehat{<} \widehat{\epsilon} \widehat{\leq} \widehat{\mu}$. Luego, $d'(\widehat{Y}, \widehat{X}) \widehat{<} \widehat{\mu}$ y así, $\widehat{Y} \in B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu})$. Con lo cual, dado que $\widehat{Y}$ era arbitrario en $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$, llegamos finalmente a que $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \subseteq B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu})$, como queríamos ver.

c) Sean las bolas métricas $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$ y $B_{d'}(\widehat{Y}, \widehat{\mu})$, tal que $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \cap B_{d'}(\widehat{Y}, \widehat{\mu}) \neq \emptyset$. Sea $\widehat{Z}$ un isopunto de tal intersección. Será entonces $\widehat{Z} \in B_d(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$ y $\widehat{Z} \in B_{d'}(\widehat{Y}, \widehat{\mu})$. Así, $d'(\widehat{Z}, \widehat{X}) \widehat{<} \widehat{\epsilon}$ y $d'(\widehat{Z}, \widehat{Y}) \widehat{<} \widehat{\mu}$. Aplicando el apartado (a) anterior podemos asegurar entonces que existen $\widehat{\rho}_1$, $\widehat{\rho}_2 \widehat{>} \widehat{S}$, tales que $B_{d'}(\widehat{Z}, \widehat{\rho}_1) \subseteq B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$ y $B_{d'}(\widehat{Z}, \widehat{\rho}_2) \subseteq B_{d'}(\widehat{Y}, \widehat{\mu})$. Ahora, aplicando el apartado (b) anterior, tendremos que $B_{d'}(\widehat{Z}, \widehat{\rho}_1) \subseteq B_{d'}(\widehat{Z}, \widehat{\rho}_2)$ o bien, $B_{d'}(\widehat{Z}, \widehat{\rho}_2) \subseteq B_{d'}(\widehat{Z}, \widehat{\rho}_1)$, dependiendo de si $\widehat{\rho}_1 \widehat{\leq} \widehat{\rho}_2$ o $\widehat{\rho}_2 \widehat{\leq} \widehat{\rho}_1$, respectivamente. En cualquier caso, si tomamos $\widehat{\rho} = \min_{\widehat{\leq}}\{\widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2\}$, tendremos que $B_{d'}(\widehat{Z}, \widehat{\rho}) \subseteq B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \cap B_{d'}(\widehat{Y}, \widehat{\mu})$, como queríamos probar. $\square$

Con todo lo anterior, ya estamos en condiciones de probar que los isoespacios dotados de (iso)distancias (iso)(pseudo)métricas tienen estructura de isoespacios topológicos. En primer lugar, damos la definición de entorno métrico:

Definición 11.17 *En las condiciones de la Definición 11.14, un* entorno métrico de un isopunto $\widehat{X} \in \widehat{M}$ *es un subconjunto* $\widehat{A} \subseteq \widehat{M}$ *tal que contiene una bola métrica centrada en* $\widehat{X}$. *Esto es, tal que existe* $\widehat{\epsilon} \widehat{>} \widehat{S}$ *verificando que* $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \subseteq \widehat{A}$.
Al conjunto de entornos métricos de $\widehat{X}$ *se le denotará por* $\widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$.
Por último, en el caso particular en que d' *sea la isodistancia isoeuclídea sobre* $\widehat{\mathbf{R}}^n$ *(es decir, la isodistancia asociada a la distancia euclídea usual), los entornos métricos asociados se denominan* entornos isoeuclídeos.

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 11.18 *Sean* d' *y* d'' *dos (iso)distancias (iso)(pseudo)métricas sobre un isoespacio vectorial* $\widehat{M}$, *en las condiciones de la Definición 11.14. Se verifica entonces que* $\widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}} = \widehat{\aleph}^{d''}_{\widehat{X}}$ *si y sólo si toda bola métrica* $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$ *contiene una bola* $B_{d''}(\widehat{X}, \widehat{\rho})$ *y toda bola* $B_{d''}(\widehat{X}, \widehat{\delta})$ *contiene una bola* $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu})$.

Demostración

a) $\Rightarrow$
Sea $\widehat{A} = B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$. Como por hipótesis tenemos que $\widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}} = \widehat{\aleph}^{d''}_{\widehat{X}}$, será $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{d''}_{\widehat{X}}$. Ahora, por definición de entorno métrico, existirá una bola métrica $B_{d''}(\widehat{X}, \widehat{\rho})$ tal que $B_{d''}(\widehat{X}, \widehat{\rho}) \subseteq \widehat{A} = B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$. De forma análoga, dado $\widehat{B} = B_{d''}(\widehat{X}, \widehat{\delta}) \in \widehat{\aleph}^{d''}_{\widehat{X}} = \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$, existirá $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu})$ tal que $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu}) \subseteq \widehat{B} = B_{d''}(\widehat{X}, \widehat{\delta})$.

b) $\Leftarrow$

Veamos que $\widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}} \subseteq \widehat{\aleph}^{d''}_{\widehat{X}}$, siendo análoga la otra contención. Para ello tomamos $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$. Por definición, existe una bola $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \subseteq \widehat{A}$. Como tal, tendremos por hipótesis que existe una bola $B_{d''}(\widehat{X}, \widehat{\rho}) \subseteq B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$. Así pues, existe una bola $B_{d''}(\widehat{X}, \widehat{\rho}) \subseteq \widehat{A}$, siendo por tanto por definición $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{d''}_{\widehat{X}}$. Como $\widehat{A}$ era arbitrario en $\widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$, será $\widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}} \subseteq \widehat{\aleph}^{d''}_{\widehat{X}}$, tal y como queríamos probar. $\square$

Llegamos finalmente al siguiente resultado:

Proposición 11.19 *Todo isoespacio dotado de una (iso)distancia (iso)-(pseudo)métrica es un isoespacio topológico.*

Demostración

Basta ver que en las condiciones de la Definición 11.17, si fijamos $\widehat{X} \in \widehat{M}$, la familia $\widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$ es un sistema fundamental de isoentornos. Para ello basta ver que sus elementos verifican las cuatro condiciones señaladas en la Definición 5.1:

a) Sea $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$. Por definición existe $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \subseteq \widehat{A}$. Ahora, como $d'(\widehat{X}, \widehat{X}) = \widehat{S} \widehat{<} \widehat{\epsilon}$, será $\widehat{X} \in B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$ y así, $\widehat{X} \in \widehat{A}$.

b) Sean $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$ y $\widehat{B} \subseteq \widehat{M}$ tal que $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$. Por ser $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$, existirá $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \subseteq \widehat{A}$. Ahora bien, por ser $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$, tendremos que $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \subseteq \widehat{B}$ y así, $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$.

c) Sea $\{\widehat{A}, \widehat{B}\} \subseteq \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$. Serán entonces $\widehat{A}, \widehat{B} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$, con lo cual, existen $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \subseteq \widehat{A}$ y $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\delta}) \subseteq \widehat{B}$. Consideramos ahora $\widehat{\mu} = \min_{\widehat{\leq}}\{\widehat{\epsilon}, \widehat{\delta}\}$. Será entonces $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu}) \subseteq B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \subseteq \widehat{A}$ y $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu}) \subseteq B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\delta}) \subseteq \widehat{B}$. Así pues, $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\mu}) \subseteq \widehat{A} \cap \widehat{B}$, con lo que será por definición $\widehat{A} \cap \widehat{B} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$.

d) Sea $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$. Existirá entonces $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) \subseteq \widehat{A}$. Basta tomar $\widehat{K} = B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$, pues de forma evidente $\widehat{K} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$ y fijado $\widehat{Z} \in \widehat{K}$, se tiene además que $\widehat{A} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{Z}}$, ya que al ser $\widehat{Z} \in \widehat{K} = B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon})$, tenemos aplicando el apartado (a) de la Proposición 11.16, que existe $\widehat{\delta} \widehat{>} \widehat{S}$ tal que $B_{d'}(\widehat{Z}, \widehat{\delta}) \subseteq B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}) = \widehat{K} \subseteq \widehat{A}$.

Así pues, $\widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$ es un sistema fundamental de isoentornos de $\widehat{X}$. Ahora bien, como $\widehat{X}$ era arbitrario en $\widehat{M}$, llegamos finalmente a que $(\widehat{M}, \widehat{\aleph}^{d'})$ es un isoespacio topológico, tal y como queríamos probar. $\square$

Como consecuencia inmediata se tiene el siguiente:

Corolario 11.20 *Todo isoespacio dotado de una isodistancia iso(pseudo)métrica es un isoespacio isotopológico.*

Demostración

Utilizando la proposición que acabamos de ver llegamos a que todo isoespacio dotado de una isodistancia iso(pseudo)métrica es un isoespacio topológico. Además, debe ser el levantado isotópico de un espacio dotado de una distancia pseudométrica, que en el nivel convencional sabemos que es un espacio topológico. Por tanto, todo isoespacio dotado de una isodistancia iso(pseudo)métrica es el levantado isotópico de un espacio topológico, teniendo a su vez estructura de isoespacio topológico. Resulta así que es un isoespacio isotopológico, como queríamos probar. $\square$

Si además atendemos a la observación que hicimos tras la Definición 11.12, llegamos a que bajo las condiciones de la Definición 10.20, todo isoespacio vectorial isonormado es un isoespacio dotado de una isodistancia isométrica y como tal es también un isoespacio isotopológico. Llegamos así a que podemos aplicarle la noción de isocontinuidad de la Definición 11.1, siendo válidas todas sus consecuencias.

De hecho, en el caso de dos isoespacio métricos cualesquiera obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 11.21 *Sea* $\widehat{f} : (\widehat{M}, d') \to (\widehat{N}, d'')$ *una isoaplicación entre isoespacios dotados de (iso)distancias (iso)(pseudo)métricas sobre el mismo isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$. *Sea* $\widehat{X} \in \widehat{M}$. *Se tiene entonces que* $\widehat{f}$ *es isocontinua en* $\widehat{X}$ *si y sólo si para todo* $\widehat{\epsilon} \widehat{>} \widehat{S}$ *(donde* $\widehat{\epsilon} \in \widehat{K}$ *y* $\widehat{S}$ *es el elemento unidad de* $\widehat{K}$ *respecto* $\widehat{+}$*), existe* $\widehat{\delta} \in \widehat{K}$ *tal que* $\widehat{\delta} \widehat{>} \widehat{S}$ *y si tenemos* $\widehat{Y} \in B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\delta})$, *entonces se cumple que* $\widehat{f}(\widehat{Y}) \in B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}), \widehat{\epsilon})$.

Demostración

a) $\Rightarrow$
Sean $\widehat{X} \in \widehat{M}$ y $\widehat{\epsilon} \widehat{>} \widehat{S}$. Tenemos por definición que $B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}), \widehat{\epsilon}) \in \widehat{\aleph}^{d''}_{\widehat{f}(\widehat{X})}$. Aplicando ahora la Proposición 11.3, teniendo en cuenta que $\widehat{f}$ es isocontinua por hipótesis, llegamos a que $\widehat{f}^{-1}(B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}), \widehat{\epsilon}) \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$. Por definición tendremos entonces que existe $\widehat{\delta} \widehat{>} \widehat{S}$ tal que $B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\delta}) \subseteq \widehat{f}^{-1}(B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}, \widehat{\epsilon}))$. Con lo cual, dado $\widehat{Y} \in B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\delta})$, resulta que $\widehat{Y} \in \widehat{f}^{-1}(B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}), \widehat{\epsilon}))$ y así, $\widehat{f}(\widehat{Y}) \in B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}), \widehat{\epsilon})$, como buscábamos.

b) $\Leftarrow$
Sean $\widehat{X} \in \widehat{M}$ y $\widehat{B} \in \widehat{\aleph}^{d''}_{\widehat{f}(\widehat{X})}$. Por definición, existe $\widehat{\epsilon} \widehat{>} \widehat{S}$ tal que $B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}), \widehat{\epsilon}) \subseteq \widehat{B}$. Ahora, por hipótesis, para este $\widehat{\epsilon} \widehat{>} \widehat{S}$ existe $\widehat{\delta} \widehat{>} \widehat{S}$ tal que si $\widehat{Y} \in B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\delta})$, entonces $\widehat{f}(\widehat{Y}) \in B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}), \widehat{\epsilon})$ o, de forma equivalente, tal que $\widehat{f}(B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\delta})) \subseteq B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}), \widehat{\epsilon}) \subseteq \widehat{B}$. Con lo cual, si llamamos $\widehat{D} = B_{d'}(\widehat{X}, \widehat{\delta})$, resulta que $\widehat{D} \in \widehat{\aleph}^{d'}_{\widehat{X}}$ de forma evidente y que $\widehat{f}(\widehat{D}) \subseteq \widehat{B}$, lo que equivale a decir, teniendo en cuenta que $\widehat{X}$ y $\widehat{B}$ eran arbitrarios y aplicando la Proposición 11.3, que $\widehat{f}$ es isocontinua, lo que termina de probar nuestro resultado. □

Si ahora nos situamos en las condiciones de la Definición 10.20, resulta que si consideramos la isodistancia d' asociada a la isonorma $\widehat{||.||}$ en $\widehat{U}$

y la isodistancia isoeuclídea d'' en $\widehat{\mathbf{R}}$, tenemos que $\widehat{Y} \in B_{d'}(\widehat{X},\widehat{\delta}) \Leftrightarrow \widehat{||}\widehat{X} - \widehat{Y}\widehat{||}\widehat{<}\widehat{\delta}$ y $\widehat{f}(\widehat{Y}) \in B_{d''}(\widehat{f}(\widehat{X}),\widehat{\epsilon}) \Leftrightarrow \widehat{|}\widehat{f}(\widehat{X}) - \widehat{f}(\widehat{Y})\widehat{|}\widehat{<}\widehat{\epsilon}$. Así pues, bajo las condiciones citadas resulta, aplicando la Proposición 11.21, que $\widehat{f}$ es isocontinua en $\widehat{X}$ si y sólo si para todo $\widehat{\epsilon}\widehat{>}\widehat{S}$ existe $\widehat{\delta}\widehat{>}\widehat{S}$ tal que si $\widehat{||}\widehat{X} - \widehat{Y}\widehat{||}\widehat{<}\widehat{\delta}$, entonces $\widehat{|}\widehat{f}(\widehat{X}) - \widehat{f}(\widehat{Y})\widehat{|}\widehat{<}\widehat{\epsilon}$. Es decir, llegamos a la noción de isocontinuidad que dimos en la Definición 10.20, siendo por tanto coherente todo el desarrollo que hemos venido haciendo hasta ahora.

Es interesante observar así por ejemplo que la Proposición 10.22 resulta una consecuencia inmediata de la Proposición 11.2.

De hecho, las condiciones de la Definición 10.20 nos aseguran la utilización de isobolas métricas en lugar de únicamente bolas métricas, que es lo que ocurre cuando se trabaja de forma general con la isocontinuidad de Kadeisvili. De esta forma tenemos como isoentornos métricos los levantados isotópicos de los entornos métricos de partida, con lo cual seguimos la construcción del comienzo de la presente sección, pudiendo utilizar coherentemente los resultados obtenidos.

En particular, bajo estas condiciones llegamos al siguiente resultado:

Proposición 11.22 *En las condiciones de la Definición 5.1, sea* $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N}$*, una isoaplicación entre dos isoespacios isotopológicos* $\widehat{M}$ *y* $\widehat{N}$*. Se verifica que si estamos en las condiciones de la Definición 10.20, entonces* $\widehat{f}$ *es isocontinua si y sólo si se tiene que* $\widehat{f}^{-1}(\widehat{U})$ *es un isoabierto de* $\widehat{M}$*, para todo isoabierto* $\widehat{U}$ *de* $\widehat{N}$*.*

Demostración

Según la Proposición 10.22, bajo cuyas condiciones nos encontramos, tenemos que $\widehat{f}$ es isocontinua $\Leftrightarrow$ f es continua en el sentido convencional. Ahora bien, f es continua $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)$ es abierto en M, para todo U abierto en N, lo cual equivale por construcción a que $\widehat{f^{-1}(U)} = \widehat{f}^{-1}(\widehat{U})$ sea un isoabierto de M, para todo isoabierto $\widehat{U}$ de $\widehat{N}$. Uniendo las equivalencias anteriores llegamos a nuestro resultado. □

12 Bibliografía

Referencias

[1] R. M. Falcón Ganfornina, La isoteoría de Santilli, Tesis de Licenciatura (2001).

[2] Chun-Xuan Jiang, Foundations of Santilli's Isonumber Theory, with Applications to New Cryptograms, Fermat's Theorem and Goldbach's Conjecture, *International Academic Press* (2002).

[3] J. V. Kadeisvili, Elements of functional isoanalysis, *Algebras, Groups and Geometries* **9** (1992), 283-318.

[4] R. M. Santilli, On a possible Lie-admissible covering of the Galilei Relativity in Newtonian Mechanics for nonconservative and Galilei noninvariant systems, *Hadronic J.* **1** (1978), 223-423. Addendum, ibid, **1** (1978), 1279-1342.

[5] R. M. Santilli, Lie-isotopic lifting of the special relativity for extended-deformable particles, *Letter Nuovo Cimento* **37** (1983), 545-555.

[6] R. M. Santilli, Isotopic Generalizations of Galilei's and Einstein's Relativities, Vol. I: Mathematical Foundations, Hadronic Press, 1991.

[7] R. M. Santilli, Isotopies of contemporary mathematical structures, I: Isotopies of fields, vector spaces, transformation theory, Lie algebras, analytic mechanics ans space-time symmetries, *Algebras, Groups and Geometries* **8** (1991), 169-266.

[8] R. M. Santilli, Isonumbers and genonumbers of dimension 1,2,4,8, their isoduals and pseudoisoduals, and hidden numbers of dimension 3, 5, 6, 7, *Algebras, Groups and Geometries* (1993), 273-322.

[9] R. M. Santilli, Nonlocal-integral isotopies of differential calculus, mechanics and geometries, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* Serie II, Supl. 42 (1996), 7-82.

[10] R. M. Santilli, Invariant Lie-admissible Formulation of Quantum Deformations, *Found. Phys.* **27** (1997), 1159-1177.

[11] R. M. Santilli, Foundations of Hadronic Chemistry with Applications to New Clean Energies and Fuels, *Kluwer Academic Publishers* (2001).

[12] G. T. Tsagas and D. S. Sourlas, Mathematical Foundations of the Lie-Santilli Theory, Hadronic Press (1993).

[13] G. T. Tsagas and D. S. Sourlas, Isomanifolds, *Algebras, Groups and Geometries* **12** (1995), 1-65.

[14] G. T. Tsagas and D. S. Sourlas, Isomappings between isomanifolds, *Algebras, Groups and Geometries* **12** (1995), 67-88.