ESTUDIO SOBRE UN PROBLEMA DE LA XXIV OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES

Manuel Amaro Parrado
I.E.S. Jándula (Andújar, Jaen)

Raúl Manuel Falcón Ganfornina
E. U. de Arquitectura Técnica (Universidad de Sevilla)

Francisco Miguel González Ternero
I.E.S. Litoral (Málaga)

María Peñas Troyano
I.E.S. Luis Bueno Crespo (Armilla, Granada)

Resumen

En el presente artículo nos proponemos analizar uno de los problemas propuestos al alumnado de 2º de E.S.O. que participó en la vigésimo cuarta edición de la fase regional de la Olimpiada Matemática Thales, la cual ha tenido lugar en Jaén en 2008.

Abstract

In this paper, we analyze one of the problems proposed to those students of 2nd year of E.S.O. who participated in the 24th regional edition of the Mathematical Olympiad Thales, which was celebrated in Jaén in 2008.

1. Introducción

La importancia de la resolución de problemas en el aula de Matemáticas no es tan sólo un principio deseable, sino que debe convertirse en una realidad a tener en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. En los diferentes documentos curriculares se destacan como un objetivo general (MEC, 2006). En especial, el currículum andaluz establece la resolución de problemas como un núcleo temático transversal con entidad propia, destacando que dicha resolución debe convertirse en un eje vertebrador de la enseñanza de las Matemáticas a lo largo de la enseñanza secundaria. Además la LOE establece un nuevo concepto: competencias básicas, entendidas como un saber aplicado a un contexto que deben ser desarrolladas por el alumnado. En especial, la competencia en razonamiento matemático conlleva la capacidad del alumnado para resolver cuestiones en el ámbito de la vida cotidiana. El énfasis en la enseñanza de resolución de problemas surge del consenso de la comunidad de educadores matemáticos, que percibe este elemento como un campo de trabajo con autonomía propia. Los Estándares del NCTM (2004) recogen que la resolución de problemas debe incidir en:

- Construir un nuevo conocimiento matemático.
- Desarrollar la disposición para formular, representar, abstraer y generalizar situaciones.

En este artículo planteamos una serie de estrategias seguidas por el alumnado de 2º curso de E.S.O. (13-14 años) participante en la fase regional de la XXIV Olimpiada Matemática Thales, con la intención de potenciar la resolución de problemas. Específicamente, la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales crea en 2005 el Grupo de Trabajo "Seminario de Elaboración de Problemas", con la intención de elaborar problemas destinados en concreto a una actividad consagrada como es el caso de la Olimpiada Matemática que organiza la propia Sociedad. Los puntos que tiene en cuenta este grupo de profesionales son:

- Adecuar los enunciados de los problemas al nivel cognitivo del alumnado.
- Atender a la normativa vigente.
- Tener en cuenta las distintas heurísticas.
- Asimilar los diferentes contenidos curriculares.
- Potenciar la creatividad.
- Incentivar que los problemas supongan un verdadero reto para el alumnado participante.

2. Estrategias para la resolución de problemas

La importancia concedida desde los diferentes ámbitos a la resolución de problemas plantea una nueva cuestión: cómo resolver problemas. En la literatura encontramos estudios sobre estrategias que ayudan al alumnado cuando éste tiene que enfrentarse a un problema matemático (Polya, 1982; Mason, Burton y Stacey, 1988; Brandsford y Stein, 1993). Estos trabajos muestran diversas formas de afrontar el problema y actuar de acuerdo al contexto. Entre las distintas estrategias que encontramos sobre resolución de problemas en Matemáticas podemos destacar las siguientes (Polya, 1982):

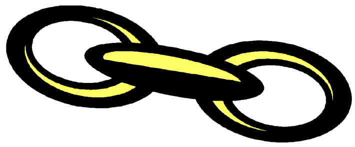
- Comprender el problema estableciendo cuál es la meta, los datos y condiciones de partida.
- Idear un plan de actuación que permita llegar a la solución, conectando los datos con la meta.
- Llevar a cabo el plan ideado previamente.
- Volver atrás para comprobar el resultado y revisar el procedimiento a utilizar.

Vamos a utilizar el modelo de Polya (1982) para analizar las posibles soluciones del problema que hemos elegido.

3. Planteamiento y análisis del problema.

El problema elegido para su análisis fue propuesto en el Grupo de Trabajo anteriormente mencionado por nuestra compañera Carolina Ruiz Aguaded, profesora del Departamento de las Ciencias y Filosofía de la Universidad de Huelva, siendo su enunciado el siguiente:

Problema nº 5: ***PUEBLO DE FIESTA***



Para la celebración de la Jornada Matemática se ha construido una caseta con forma de prisma regular donde puedan desarrollarse todas las actividades y juegos previstos. La parte superior de la caseta se ha adornado con cadenetas de colores de distinto tamaño que unen todos sus vértices entre sí y para ello han sido necesarias 4 cajas de 10 cadenetas cada una, si bien han sobrado de una de ellas. Para decorar el suelo, se van a colocar alfombras triangulares que unan dos vértices consecutivos y que confluyan en el centro de la misma. La empresa que nos confeccionará las alfombras nos pide las medidas de los ángulos de las mismas. ***Ayuda a los organizadores a calcular las medidas de estos ángulos.***

Algunos de los motivos por lo que se ha elegido este problema para el presente análisis han sido:

- Dificultad del enunciado y el consecuente conflicto de comprensión del mismo por parte del alumnado.
- Confusión en el dibujo, relacionado con el concepto de cadeneta, que ha podido ser tratado como cadena rígida en lugar de como material flexible.

3.1 Comprender el problema

El primer paso para afrontar un problema es la comprensión del enunciado. El alumno debe ser capaz de identificar los datos del problema y la cuestión que debe resolver. Esta tarea se complica cuando el alumno se encuentra con un problema de enunciado largo, en el que hay gran cantidad de datos y la respuesta a la cuestión no es una consecuencia inmediata de los datos presentes en la redacción del enunciado. Otro elemento a tener en cuenta son los datos enmascarados, datos que no aparecen a simple vista pero que son derivados de alguna información que aparece en el enunciado o bien datos que no parecen tales por no estar expresados en lenguaje matemático.

En este problema los datos son los siguientes:

- Polígono Regular.
- Los vértices se unen entre sí.
- Cuatro cajas de 10 cadenetas (es necesario identificar este dato como 40 cadenetas).
- Sobran cadenetas de una caja (dato que plantea nuevas posibilidades: que sobren 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9 cadenetas; es decir, que en total haya 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 o 39 cadenetas).
- Las alfombras son triángulos iguales.
- Un vértice de la alfombra está situado en el centro del polígono regular.

La cuestión que se pide a los alumnos es calcular cuánto miden los ángulos de las alfombras, pero es evidente que para calcular las medidas de los ángulos con anterioridad se debe averiguar cuál es el polígono de las bases de la caseta de feria.

Luego se observan muchos datos que deben ser utilizados para contestar a la cuestión planteada.

3.2 Idear un plan.

Trabajamos con polígonos regulares, con lo que la primera idea que los alumnos suelen plantear es dibujar éstos y ver cuántas uniones entre vértices hay. Esas uniones serán las cadenetas utilizadas. Así comenzamos a considerar el polígono más simple, el triángulo, y observamos que sólo necesitamos tres cadenetas. A continuación el cuadrado y observamos 6 cadenetas (4 de los lados y las 2 de las diagonales). Si continuamos el proceso deberíamos llegar a un polígono que nos permita utilizar un número de cadenetas entre 31 y 39.

El problema que se nos plantea es contar diagonales y aristas sin tener que dibujar todos los polígonos y todas las diagonales, ya que el número de cadenetas es igual al número de lados más el número de diagonales.

Observemos casos particulares como medio para obtener pautas con vistas a generalizar. Ésta es la estrategia que intentan algunos de los alumnos y que nosotros vamos a explorar. Será nuestro plan de actuación, si bien no debemos olvidar que averiguar con qué polígono estamos trabajando sólo es la primera fase del problema, ya que nuestro objetivo es calcular los ángulos de las alfombras.

3.3. Llevar a cabo el plan.

3.3.1. Conteo de diagonales.

El conteo de diagonales se puede realizar de diversas formas:

- Contar sistemáticamente las líneas nuevas, que parten desde cada punto (vértice).
- Multiplicar y hallar la mitad: (líneas que pasan por un punto · nº de puntos) / 2.
- Contar desde un punto de vista diferente: contar líneas saltando un punto, saltando dos puntos,...).
- Buscar patrones (inducción).

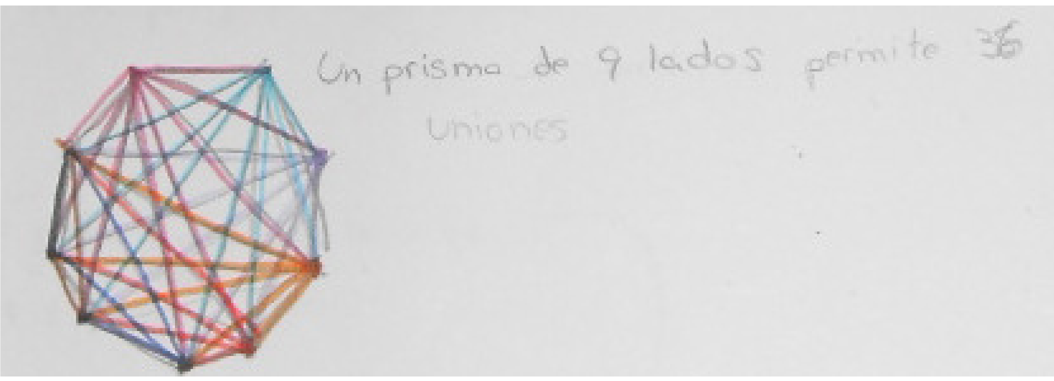
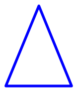
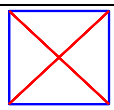
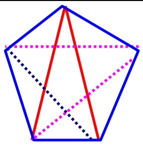
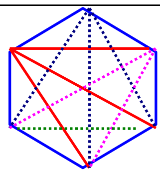
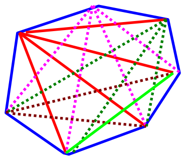


Figura 1: Respuesta alumno - Dibuja el polígono y realiza conteo

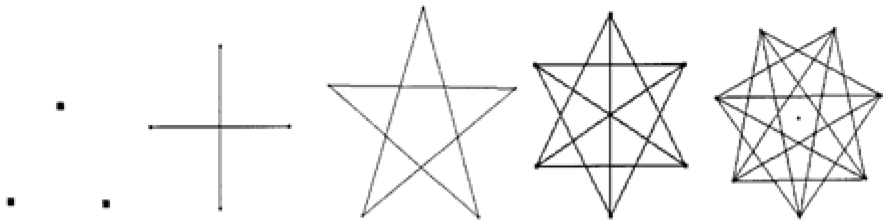
Veamos algunos procedimientos concretos:

PROCEDIMIENTO 1:

Organizar la información por medio de *tablas* es también una estrategia que puede ayudar a la resolución del problema, así como *utilizar representaciones* diversas (imágenes, diagramas, símbolos, notación,...) que permitan la visualización y simplificación del problema. La mejor manera de empezar es abordar un caso concreto y seguir con algunos *casos particulares*. Así, el menor polígono que se puede construir tiene 3 lados (triángulo), por lo que se puede comenzar con él viendo el número de diagonales que posee. Usaremos la notación: n = número de lados del polígono, d = número de diagonales.

n=3		d=0
n=4		d=2
n=5		d=5
n=6		d=9
n=7		d=14
n=8	…	…

En nuestro caso, otra forma de representar los gráficos puede consistir en considerar sólo los vértices del polígono, con lo que tendríamos polígonos estrellados:



Si trazamos las diagonales siguiendo un orden nos damos cuenta de:

n	Conteo	Total Diagonales	Lados + Diagonales
3	0	0	3
4	1+1	2	6
5	2+2+1	5	10
6	3+3+2+1	9	15
7	4+4+3+2+1	14	21
…	…	…	...

Generalizar constituye el verdadero nervio de la matemática. El proceso de generalización comienza en cuanto se intuye un cierto esquema general subyacente, aunque todavía no se pueda expresar claramente (Mason, Burton y Stacey, 1988).

Luego, para generalizar es necesario *conjeturar*. Así, suponemos que el conteo para n lados sería:

$$(n-3) + (n-3) + (n-4) + (n-5) +\ldots+ 1 = (n-3) + (n-3) + \sum_{i=1}^{n-4} i =$$

$$= 2n - 6 + \frac{(n-4+1)(n-4)}{2} = 2n - 6 + \frac{(n-3)(n-4)}{2} =$$

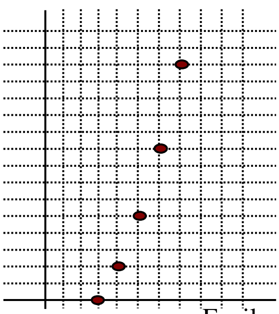
$$= \frac{4n - 12 + n^2 - 4n - 3n + 12}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

En la resolución de un problema es importante *comprobar* cualquier intuición con algunos ejemplos (particularización), así como comprobar inmediatamente los cálculos o razonamientos hechos y si dicha solución resuelve de hecho el problema planteado. En nuestro caso, probamos si funciona para un número de términos conocido:

n	Fórmula	Diagonales
3	$\frac{3(3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0$	0
4	$\frac{4(4-3)}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$	2
5	$\frac{5(5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$	5
6	$\frac{6(6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$	9
…	…	…
n	$\frac{n(n-3)}{2}$	

PROCEDIMIENTO 2:

Podemos llegar a la última fórmula de otra manera, mediante la *utilización de gráficos*, representando los primeros puntos gráficamente y buscando la curva que mejor se aproxima a estos puntos.



Parece que es una función cuadrática: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. En concreto:

$$\text{Si } x = 3 \Rightarrow 9 \cdot a + 3 \cdot b + c = 0$$

$$\text{Si } x = 4 \Rightarrow 16 \cdot a + 4 \cdot b + c = 2$$

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow 25 \cdot a + 5 \cdot b + c = 5$$

Resolviendo el sistema: $a = 1/2$, $b = -3/2$, $c = 0$. Entonces:

$$f(x) = 1/2 \cdot x^2 - 3/2 \cdot x + 0 = \frac{x^2 - 3x}{2} = \frac{x(x - 3)}{2}$$

PROCEDIMIENTO 3:

Veamos ahora otra forma de hallar las diagonales de un polígono utilizando la estrategia de *organizar la información y utilizar tablas*. En este caso elaboramos una tabla con las diferencias entre el número de diagonales de un polígono de n lados y el número de diagonales del anterior (n-1 lados).

n	d	Diferencias
3	0	-
4	2	2 – 0 = 2
5	5	5 – 2 = 3
6	9	9 – 5 = 4
7	14	14 – 9 = 5
…	…	…
n-1	$d_{n-1} = \frac{(n - 1)(n - 4)}{2}$	-
n	$d_n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$	n-2 (*)

$$(*) \quad \frac{n(n - 3)}{2} - \frac{(n - 1)(n - 4)}{2} = \frac{n^2 - 3n - (n^2 - 4n - n + 4)}{2} = \frac{2n - 4}{2} = n - 2$$

Observamos así que el número de diagonales de un polígono de n lados coincide con la suma del número de diagonales de uno de n -1 lados más (n - 2). Es decir:

$$d_n = d_{n-1} + (n-2)$$

Lo comprobamos en los primeros términos:

n	$d_n = d_{n-1} + (n-2)$
3	0
4	0 + (4 - 2) = 2
5	2 + (5 - 2) = 5
6	5 + (6 - 2) = 9
7	9 + (7 - 2) = 14
…	…
n	$d_n = d_{n-1} + (n-2)$

Así por ejemplo, si n=10:

$d_{10} = d_9 + (10 - 2) = d_9 + 8 = (d_8 + 7) + 8 = (d_7 + 6) + 7 + 8 = (d_6 + 5) + 6 + 7 + 8 =$
$= \ldots = (d_3 + 2) + 3 + 4 + \ldots + 8 = d_3 + (2 + 3 + \ldots + 8) = d_3 + \frac{(8+2)\cdot 7}{2} = 0 + \frac{70}{2} = 35$

Obsérvese que coincide con el resultado de aplicar la fórmula de los procedimientos anteriores:

$$d_{10} = 35 = \frac{10 \cdot (10 - 3)}{2}$$

El razonamiento anterior podría obtenerse también con una tabla del siguiente tipo:

Nº lados	3	4	5	6	7	8		…
Diferencias	2	3	4	5	6	7		…
Nº de diagonales	0	2	5	9	14	20	27	…

Las flechas indican la suma del número de diagonales con las diferencias situadas en la vertical en dicha tabla y que da como resultado el número de diagonales del polígono siguiente (ej. 0 diagonales en tres lados + 2 diferencias = 2 diagonales en cuatro lados). Otra posible tabla sería:

Lados	3		4		5		6		7		8	…
Diagonales	0		2		5		9		14		20	…
1ª Diferencias		2		3		4		5		6		
2ª Diferencias			1		1		1		1			

3.3.2. Cálculo del número de cadenetas.

Hemos resuelto ya el problema de las diagonales, pero nuestro problema inicial era el de las cadenetas. Debemos volver a él eliminando las restricciones que hemos realizado al resolver el problema de las diagonales. Basta con sumar por tanto el número de lados al número de diagonales obtenidas anteriormente:

Polígono	Lados+Diagonales
Triángulo	3
Cuadrado	6
Pentágono	10
Hexágono	15
Heptágono	21
.	.
n-ágono	$n + \frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Otra posibilidad para resolver un problema matemático es *aplicar fórmulas matemáticas*. En este caso nuestro problema puede resolverse de forma directa por combinatoria:

$$C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Nosotros queremos destacar que nuestros alumnos son de 2º ESO y por lo tanto la generalización y las estrategias aquí planteadas pueden no estar a su alcance. No obstante, queremos destacar la solución de un alumno que percibe la similitud de la pauta con los números triangulares:

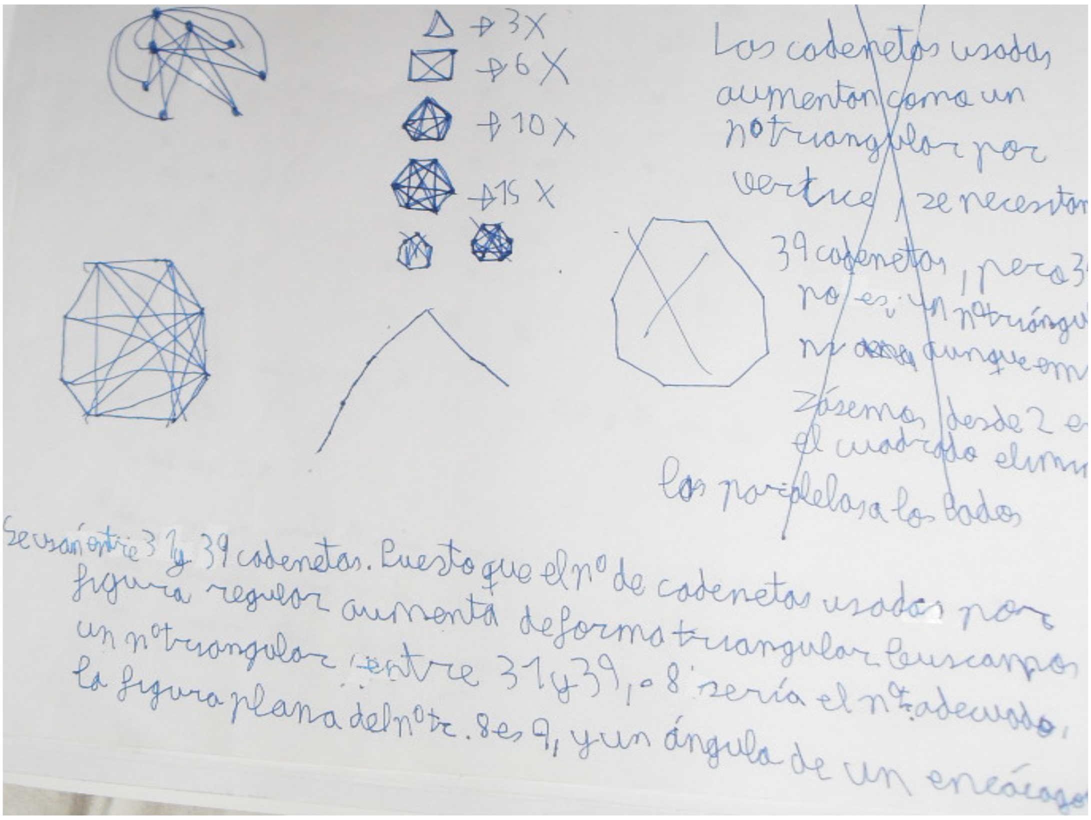


Figura 2: Respuesta alumno con números triangulares

También hay quien intenta generalizar una fórmula del proceso:

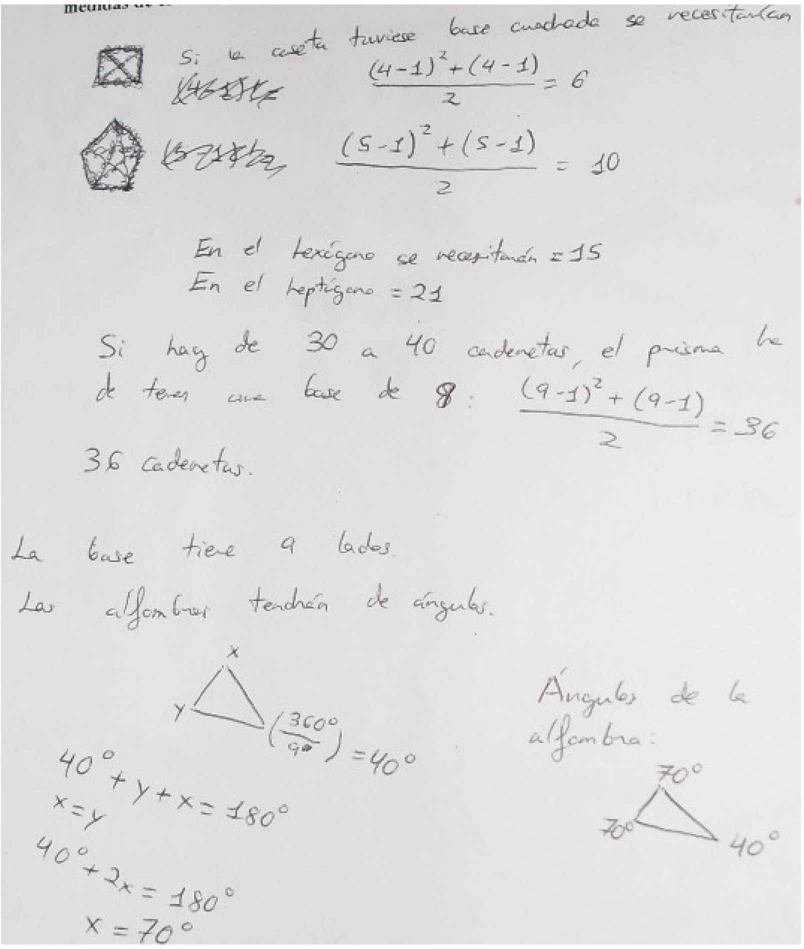


Figura 3: Respuesta de un alumno (generalización)

En cualquier caso, sea cual sea la estrategia utilizada al final el alumno deberá comprobar qué resultado nos da un número de cadenetas entre 31 y 39, observando que:

$$\text{Octógono: } 8 + 20 = 28 < 31$$
$$\text{Eneágono: } 9 + 27 = 36$$
$$\text{Decágono: } 10 + 35 = 45 > 39$$

Luego el polígono regular buscado es un ENEÁGONO.

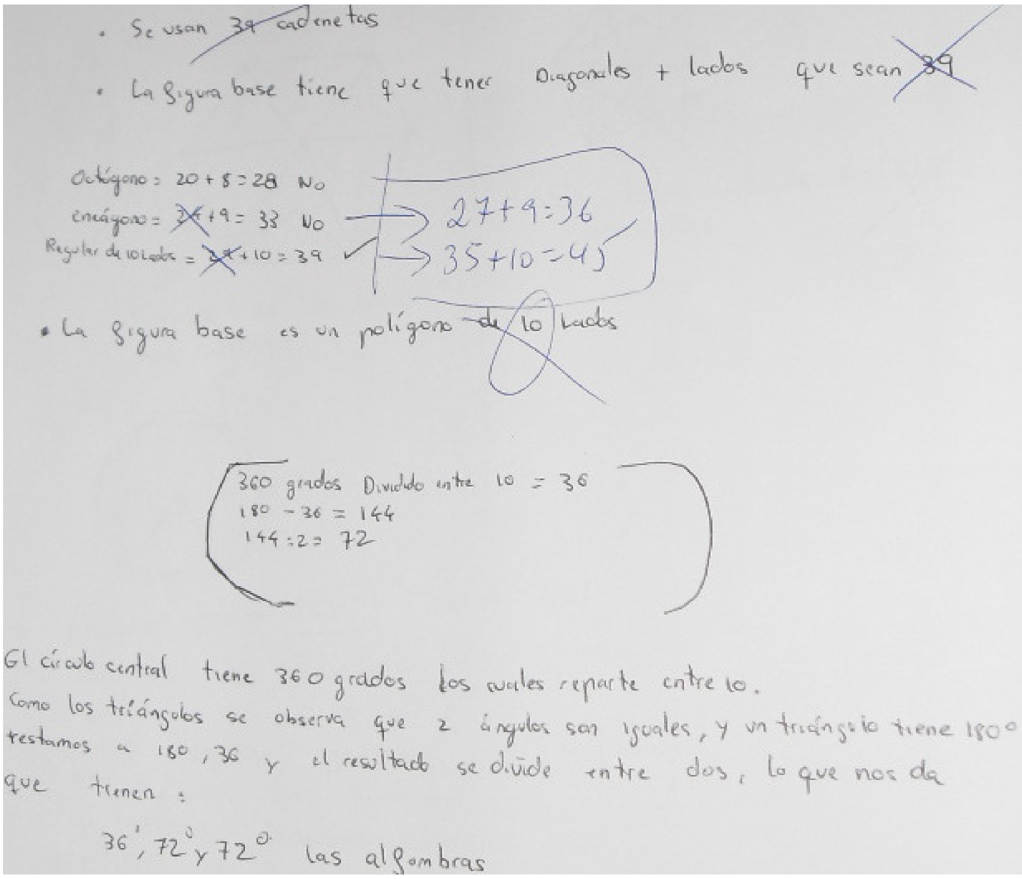
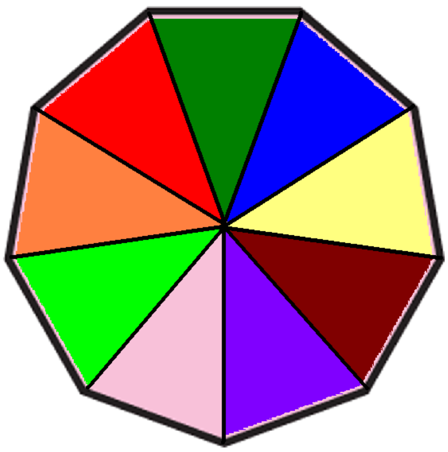


Figura 4: Respuesta alumno - Comprueba distintos polígonos

3.3.3. Cálculo de los ángulos.

Pero recordemos que aún tenemos que buscar los ángulos de las alfombras y es aquí donde se utiliza que el polígono es regular. La regularidad no era un dato determinante para la detección del polígono pero sí para poder calcular los ángulos de las alfombras.



Esta fase tiene menos complicación que la anterior ya que podemos solucionar el problema dibujando el polígono regular y las alfombras y observando las características de los ángulos dibujados. Muchos alumnos deciden dibujar una figura más fácil (el eneágono regular no es sencillo de dibujar) como ayuda para determinar el cálculo de los ángulos.

La mayoría de los alumnos resuelven el problema siguiendo uno de estos procesos:

1. a) Conocer cuánto mide el ángulo central de un polígono regular (360º / nº de lados).
   b) Utilizar que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

   Solución: 360º / 9=40º → 40º + x + x = 180º → x = (180º – 40º) / 2 = 70º.

2. a) Calcular un ángulo del eneágono regular.
   b) Dividir el ángulo obtenido por la mitad para hallar la medida de los ángulos iguales del triángulo isósceles que es la alfombra.
   c) Utilizar que la suma de los ángulos del triángulo es 180º para calcular el tercer ángulo.

   Solución: 180·(n-2) / n=180º · (9-2) / 9 = 180º · 7 / 9 = 140º
   140º / 2 = 70º
   70º + 70º + x = 180 → x = 180º - 140º = 40º

   Luego, los ángulos son: 40º, 40º y 70º.

3.4 Revisión de las respuestas obtenidas.

En primer lugar queremos destacar dos de las respuestas más originales dadas por los alumnos:

1. **Números triangulares** (Figura 2): El alumno se da cuenta de la relación que existe entre el número de vértices (puntos) y el número de segmentos con los que se pueden unir.

   2 puntos----------1
   3 puntos----------3
   4 puntos----------6
   5 puntos---------10
   6 puntos----------15

   Saca como conclusión que la cantidad de segmentos que se pueden trazar coincide con la serie de números triangulares y lo que hace es continuar la serie: 21, 28, 36 y 45. De esta forma averigua que el número buscado es el 36, que es el único que está comprendido entre 30 y 40 A continuación asocia dicho número con el polígono de 9 vértices.

2. **Generalización** (Figura 3): El alumno, tras observar lo que ocurre en el cuadrado y el pentágono, generaliza y construye la fórmula $\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$ para calcular la suma de lados y diagonales de un polígono. Con ella averigua que el número de cadenetas utilizadas es de 36 y corresponde al eneágono.

La fórmula utilizada por el alumno es equivalente a $n+\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ y a $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ que son más conocidas y que resultaría más fácil de que el alumno la hubiese visto en clase o en algún libro.

Durante la corrección del problema, se han observado las siguientes dificultades con las que se ha encontrado el alumnado:

- Desconocimiento del concepto de figura regular. Así por ejemplo se ha dado el caso de participantes que han basado su resolución en una figura rectangular.
- Dificultad en la segunda parte del enunciado (proceso inductivo/deductivo), donde se pasa de trabajar en la parte superior de un prisma regular (cadenetas) a trabajar en la parte inferior del mismo (alfombras).
- Interpretación equívoca respecto al hecho de que cada cadeneta por separado tiene sus dos extremos colocados en vértices del prisma, pudiéndose entrecruzar distintas cadenetas entre sí.

De hecho, consultando directamente a los propios participantes, estos han indicado las siguientes dificultades con las que se han encontrado:

- Mala expresión del problema: "Han sobrado" / "Ha sobrado".
- Más de un alumno pensó que sólo había sobrado una cadeneta.
- Darse cuenta del polígono que se usa.
- Intento de usar un hexágono, un cuadrado o un triángulo equilátero en vez de calcular que era un eneágono.
- Confundir una cadeneta con el eslabón de una cadena.
- No saber que había que calcular la figura.
- No saber computar el número de lados y diagonales para hallar el polígono.
- No saber qué relación tienen las distintas cadenetas entre sí.
- No saber por qué no aparecen explícitamente las longitudes de las distintas cadenetas.
- No saber que hay que usar lados iguales para formar una figura regular.
- Confundir prisma regular con poliedro regular.
- Falta de tiempo para calcular los ángulos.
- Dificultades para percibir que deben unir con cadenetas las diagonales. Piensan que sólo se tenía que unir los vértices contiguos (lados).

4. Conclusiones

En la resolución de este problema hemos observado la importancia de comprensión del problema (datos y cuestiones) como primera fase para resolverlo. Las dificultades que aparecen en la resolución de los alumnos provienen de la longitud del enunciado, la falta de comprensión de términos pero también de la existencia de datos enmascarados que son fundamentales en el proceso.

Una vez comprendido el problema, determinados los datos y la cuestión a resolver los alumnos tienden a la particularización como principal estrategia con vistas a resolver el problema. Las dificultades vienen cuando intentan hacer el proceso contrario, deducir a partir de casos particulares. Son muchas las estrategias que se pueden utilizar pero inferir comportamientos es complicado en alumnos de estas edades. Ante estas dificultades los alumnos prefieren continuar la serie de particularizaciones para lograr alcanzar la solución del problema, a pesar de lo engorroso de los cálculos.

Por último, queremos destacar cómo este problema planteado en el contexto de una Olimpiada Matemática engloba numerosas estrategias de resolución y gran número de conceptos, si bien su principal riqueza es plantear un reto a los alumnos desde diversas perspectivas de la resolución de problemas. Es éste un problema claro en que las heurísticas de resolución de problemas se convierten en una estrategia en sí misma necesaria para su resolución.

5. Agradecimientos

Los autores agradecemos la labor realizada por todas y cada una de las personas integrantes del Grupo de Trabajo “Seminario de Elaboración de Problemas”, sin cuyo esfuerzo y dedicación desinteresada a la hora de preparar los problemas de cada edición de la Olimpiada Matemática Thales no hubiera sido posible el presente artículo.

6. Referencias Bibliográficas

Abrantes, P. (2002) *El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular*. En P. Abrantes y otros: *La resolución de problemas en matemáticas*. (pp. 95-110). Barcelona: Graó.

Bransford, J.D. y Stein, B. S. (1993) *Solución ideal de problemas.* Barcelona: Ed. Labor

Junta de Andalucía (2007). Decreto 231/2007 de 31 de julio por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.

Mason, J.; Burton, L. y Stacey, K. (1988) *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Ed. Labor

MEC (2006) Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

NCTM (2004) *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: SAEM THALES

Peñas, M. (2002) *Análisis de las estrategias a utilizar en la resolución del “Problema de los apretones de manos”*. En J. Cardeñoso y otros: *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas.* (pp. 215-222) Granada: SAEM THALES.

Polya, G. (1982) *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Ed. Trillas