

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE FÍSICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA ATÓMICA, MOLECULAR Y
NUCLEAR.



Introducción a la Mezcla de Configuraciones.

Realizado por: Jesús González Rosa.

Titulación: Doble Grado Física e Ingeniería de Materiales.

Tutora: M^a Victoria Andres Martin.

Sevilla, 2017.

A mis padres por hacerlo posible, a mis compañeros por su apoyo, a mis profesores por los conocimientos necesarios y a M^a Victoria por guiarme y ayudarme a lo largo de estos meses.

Índice general

Resumen	VII
Objetivos y metodología	VII
Introducción	1
1. Modelo de partículas independientes	2
1.1. Estructura del núcleo	2
1.2. Números Cuánticos Monoparticulares.	5
1.3. Hamiltoniano monoparticular autofunciones y autovalores.	6
1.4. Autofunciones y autovalores del hamiltoniano del núcleo.	12
2. Interacción separable: Delta de superficie.	15
2.1. Representación matricial del hamiltoniano. Organización interna de la matriz.	15
2.2. Interacción delta de superficie. Consideraciones de isoespín.	18
2.3. Cálculo del elemento de matriz sin antisimetrizar.	20
3. Partículas Idénticas.	23
3.1. Elemento de matriz de partículas idénticas.	23
3.2. Núcleo ${}^6\text{He}$	24
3.2.1. Evaluación del momento angular.	25
3.2.2. Esquema de energía de ${}^6\text{He}$ y funciones de onda.	27
3.2.3. Resolución acoplado a $M=1$	29
3.3. Núcleo ${}^{18}\text{O}$	30
3.4. Huecos idénticos.	32

4. Partículas diferentes.	34
4.1. Elemento de matriz del potencial: sistema de dos nucleones diferentes. . . .	34
4.2. Núcleo ${}^6\text{Li}$	35
4.2.1. Momento angular total.	36
4.2.2. Esquema de energías de ${}^6\text{Li}$	37
4.2.3. Resolución usando Esquema J.	38
4.3. Núcleo ${}^{18}\text{F}$	41
4.4. Huecos diferentes.	41
5. Interacciones no separables.	43
5.1. Potencial de tipo gaussiano.	43
5.2. Potencial tipo Delta de Dirac.	45
Conclusiones	47
Bibliografía	49
Anexo A	51
Anexo B	52
Anexo C	52
Anexo D	53

Resumen

En esta memoria vamos a usar el modelo de partículas independientes para obtener los niveles de energía y autofunciones monoparticulares de un hamiltoniano monoparticular suma del término energía cinética, el potencial de Woods-Saxon, un término coulombiano y el término espín-órbita. Después, obtendremos las energías y las funciones de onda del núcleo a partir de las del hamiltoniano monoparticular.

A continuación, estudiaremos los autovalores y autofunciones de la representación matricial del hamiltoniano cuando los nucleones están sometidos a una interacción residual delta de superficie. Estudiaremos los niveles de energía y funciones de onda de núcleos en cuyas capas incompletas hay dos nucleones idénticos (${}^6\text{He}$, ${}^{18}\text{O}$), dos nucleones diferentes (${}^6\text{Li}$, ${}^{18}\text{F}$), dos huecos idénticos (${}^{14}\text{O}$, ${}^{38}\text{Ca}$) y dos huecos diferentes (${}^{14}\text{N}$, ${}^{38}\text{K}$).

Por último, estudiaremos los cambios en los niveles de energía (y su dependencia con el alcance de la interacción) del núcleo ${}^{18}\text{O}$ cuando está sometido a interacciones residuales de tipo gaussiano o de tipo delta de Dirac.

Objetivos y metodología

Los objetivos de esta exposición son:

- Reproducir y explicar mediante el modelo de partículas independientes los primeros números mágicos.
- Aprender a resolver numéricamente la ecuación de Schrödinger para potenciales fenomenológicos realistas en dicho modelo.
- Introducir el concepto de isoespín y su uso en la interacción residual.
- Observar en diversos núcleos los cambios en los niveles de energía y las funciones de onda respecto al modelo de partículas independientes provocados por una interacción residual al considerar los efectos en primer orden la teoría de perturbaciones.
- Observar en diversos núcleos esos cambios provocados por una interacción residual al llevar a cabo la diagonalización de la matriz completa.
- Introducir el concepto de huecos y su uso en los cálculos del modelo de capas.

- Observar el efecto del alcance de la interacción residual.

Queremos cumplir estos objetivos haciendo uso de los conceptos de Física Cuántica y Física Nuclear impartidas en el Grado de Física de modo que esta memoria resulte legible para un alumno que termine dicho grado.

El énfasis se establece en introducir los conceptos y herramientas que permitan hacer cálculos de estructura nuclear teniendo el conocimiento de álgebra de momentos angulares al nivel del grado.

En el capítulo 1, usaremos el modelo de partículas independientes para reproducir los números mágicos y obtener los niveles de energía y las autofunciones monoparticulares asociadas a un Z y A concreto, para ello propondremos un hamiltoniano que emule las interacciones del núcleo y se resolverá la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

En el capítulo 2, aprenderemos a trabajar con la interacción delta de superficie.

En el capítulo 3, describiremos la forma de los elementos de matriz cuando las partículas de valencia son idénticas y actúa el principio de Pauli. Mostraremos ejemplos de la interacción residual de algunos núcleos, cuyos niveles se obtienen usando la representación en esquema M.

En el capítulo 4, estudiaremos la forma de los elementos de matriz de la interacción residual cuando las partículas de valencia son diferentes. Mostraremos ejemplos de algunos núcleos y veremos qué cambios supone usar el esquema J.

En el capítulo 5, usaremos interacciones residuales tipo gaussiano y delta de Dirac y observaremos los cambios en los niveles de energía de un núcleo concreto según el alcance de la interacción.

Introducción

El primer modelo usado para estudiar el núcleo atómico fue el modelo de la gota líquida. Este modelo establecía una semejanza entre un líquido y el núcleo atómico debido a que el núcleo posee densidad aproximadamente constante, presenta fenómenos que recuerdan los de evaporación y condensación, y las fuerzas nucleares son de corto alcance. Este modelo fenomenológico permite calcular aproximadamente la masa nuclear y ciertas propiedades como la energía necesaria para separar un nucleón del núcleo. Sin embargo, posee ciertas limitaciones, pues aunque permite obtener efectos producidos por las interacciones, no es posible obtener las interacciones en sí mismas. [[1].a]

Una aproximación al núcleo diferente es la del modelo de gas de Fermi con dos pozos infinitos de potencial (uno para cada tipo de nucleón: protón y neutrón), cuyos niveles se iban llenando respetando el principio de exclusión de Pauli. El número de niveles depende del número de partículas del núcleo.. Este fue el primer modelo de partículas independientes que se ideó, pero no era capaz de predecir con exactitud la estructura del núcleo. [[1].b]

Actualmente se utiliza el modelo de capas [[1].c] para describir la estructura nuclear. Se parte de un modelo de partículas independientes más realista y capaz de reproducir los números mágicos y se va más allá incorporando efectos de la interacción residual. Las funciones de onda obtenidas pueden utilizarse después para obtener propiedades núcleo y describir su estructura en los cálculos de reacciones nucleares.

En esta memoria introducimos el modelo de partículas independientes y aprendemos a resolverlo. Seguidamente consideraremos algunas formas al uso para la interacción residual y veremos su efecto en los niveles nucleares de algunos núcleos tipo.

Capítulo 1

Modelo de partículas independientes

1.1. Estructura del núcleo

Así como el átomo tiene una estructura de capas regida por la interacción de Coulomb también el núcleo atómico tiene una estructura interna que dependerá de la fuerza nuclear fuerte y de la coulombiana. Estudiando la evolución de las propiedades nucleares, como por ejemplo la energía mínima necesaria para extraer un nucleón, se observan discontinuidades al pasar por núcleos con ciertos números de protones o neutrones. En el caso de extraer el último neutrón del ^{38}Ca o del ^{40}Ca debemos proporcionar una energía de unos 16 MeV, mientras que en ^{42}Ca y ^{44}Ca solo se precisan unos 11 MeV [2]. Este salto se produce al pasar por 20 neutrones. En física nuclear los números de protones o neutrones para los que las propiedades presentan saltos abruptos se conocen como números mágicos y son 2, 8, 20, 28, 50, 82 y 126^1 [[1].c] . En física atómica el número de electrones en los gases nobles juega un papel similar, como se observa en el comportamiento de la energía de ionización.

En principio, para estudiar la estructura del núcleo se opta por una metodología similar a la del estudio del átomo. Hemos de resolver la ecuación de Schrödinger correspondiente al hamiltoniano de Z protones y $A-Z$ neutrones que se hallan bajo el efecto de la interacción nuclear fuerte y la interacción coulombiana. Sin embargo, esto conlleva un problema de A cuerpos cuya solución analítica nos es desconocida. En primera aproximación, consideraremos que las partículas que conforman el núcleo están sometidas a un potencial de campo medio, es decir que un nucleón estará sometido a un potencial efectivo que

¹Este último solo para neutrones.

emulará todas las interacciones que las demás partículas ejercen sobre él. Esto nos permite escribir un hamiltoniano nuclear [[1].d] donde todas las partículas son independientes entre sí.

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \hat{U}(\vec{r}_i) \right) = \sum_{i=1}^A \hat{h}_i \quad (1.1)$$

El núcleo no tiene un centro natural de fuerzas, posee elevada densidad y las interacciones entre los nucleones son fuertes. Estas características no parecen las más adecuadas para considerarlo un sistema de partículas independientes. No obstante, el principio de exclusión de Pauli impide a dos nucleones del mismo tipo ocupar el mismo estado cuántico monoparticular, limitando los posibles efectos de la interacción residual y garantizando que el modelo de partículas independientes (MPI) como punto de partida en la descripción de la estructura nuclear. Existen métodos para obtener el potencial de campo medio, sin embargo, este no es el propósito de esta memoria. En lugar de ello, trataremos con potenciales fenomenológicos más o menos realistas. Potenciales como el oscilador armónico, el pozo finito o el potencial de Woods-Saxon son bastante utilizados en este contexto. Consideremos un hamiltoniano monoparticular con un potencial monoparticular central,

$$\hat{h} = \frac{-\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{l}^2 \hbar^2}{2mr^2} + \hat{U}(|\vec{r}|) \quad (1.2)$$

Las autofunciones asociadas a este hamiltoniano factorizan en una parte radial, específica del potencial del potencial considerado, y una parte angular que viene dada por los armónicos esféricos[3],

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi) = \mathcal{R}_{n,l}(r) Y_{l,m_l}(\theta, \phi) \quad (1.3)$$

y los autovalores de $\hat{h}, \epsilon_{n,l}$, no dependen del número cuántico m_l .

En el modelo de partículas independientes la energía total del sistema es la suma de las energías individuales de cada nucleón y la función de onda global característica del sistema es el producto de funciones de ondas individuales, siempre que ignoremos la antisimetrización.

$$E = \sum_{i=1}^A \epsilon_i \quad ; \quad \Psi = \prod_{i=1}^A \psi_i \quad (1.4)$$

El estado fundamental del núcleo se obtiene ocupando las funciones de onda monoparticulares en orden creciente de energía, teniendo en cuenta el principio de exclusión de

Pauli. Los autovalores del hamiltoniano monoparticular se organizan en capas diferenciadas por "gaps" de energía entre ellas. Ahora bien, con los potenciales usuales el número de nucleones asociados a capas llenas no concuerda con los números mágicos obtenidos experimentalmente. Para poder reproducir los números mágicos debemos incluir un término adicional en el hamiltoniano [[1].c]: el término espín órbita.

$$\hat{v}_{SO} = v_{LS}(r) \hat{l} \cdot \hat{s} = \frac{v_{LS}(r)}{2} (\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2) \quad (1.5)$$

Donde \vec{j} es el momento angular total del nucleón. Este termino es responsable de que los estados de mayor momento angular total disminuyan su energía, incluso hasta valores característicos de la capa inferior, como se observa en la Figura 1.1. La existencia de estos niveles permite reproducir los números mágicos conocidos experimentalmente.

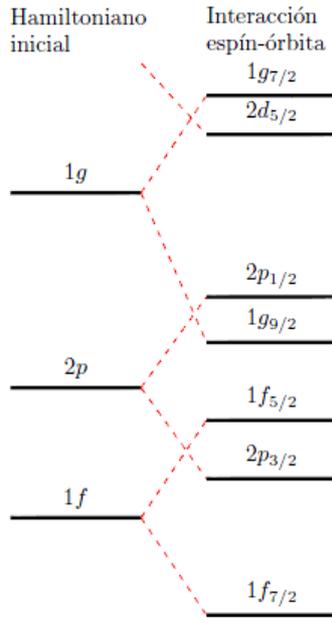


Figura 1.1: Efecto del término espín-órbita.

Si queremos profundizar más en la estructura del núcleo, deberemos usar el modelo de capas, donde se incluyen interacciones residuales que cambian los niveles de energía y las propiedades del sistema. El hamiltoniano viene dado por,

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A \hat{h}_i + \sum_{i<j}^A V(i, j) \quad (1.6)$$

En el siguiente capítulo especificaremos las interacciones con las que vamos a trabajar.

1.2. Números Cuánticos Monoparticulares.

El hamiltoniano monoparticular correspondiente a un potencial central no dependiente de espín, [3] satisface,

$$[\hat{h}, \hat{s}] = 0 \quad ; \quad [\hat{h}, \hat{l}] = 0 \quad (1.7)$$

A pesar de ello, no podemos construir autofunciones de \hat{h} y las tres componentes del momento angular orbital (o de espín) pues no conmutan entre sí. Sin embargo, podemos obtener autofunciones de \hat{h} , \hat{l}^2 , \hat{l}_z , \hat{s}^2 y \hat{s}_z pues estos operadores conmutan entre sí.

En notación de Dirac, nuestros estados monoparticulares vendrían representados por $|n, l, m_l, s, m_s\rangle$ siendo (1.3) la función de onda asociada a $\langle \vec{r} | n, l, m_l \rangle$.

Por otro lado, el hamiltoniano monoparticular es invariante bajo la acción del operador inversión espacial o paridad (\hat{P}). Además [7],

$$[\hat{l}, \hat{P}] = 0; \quad [\hat{s}, \hat{P}] = 0 \quad (1.8)$$

Por tanto, podemos tener autoestados de paridad bien definida. De hecho,

$$\hat{P}Y_{l,m_l}(\theta, \phi) = Y_{l,m_l}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_{l,m_l}(\theta, \phi) \quad (1.9)$$

Así, un estado $|n, l, m_l, s, m_s\rangle$ tendrá una paridad $(-1)^l$. Los correspondientes autovalores de \hat{h} en (1.2), dependen solo de los números cuánticos n y l , así tendrán degeneración $2(2l + 1)$.

Otro concepto que debemos tener en cuenta es el de isoespín[[6].a], el cuál se introduce debido que existen partículas de masa similar y propiedades muy similares entre sí. En este caso, el multiplete que nos ocupa es el formado por el protón y el neutrón. Ambos tienen isoespín $t = 1/2$, pero su tercera componente varía,

$$t_3 |p\rangle = 1/2 |p\rangle \quad t_3 |n\rangle = -1/2 |n\rangle \quad (1.10)$$

En capítulos posteriores distinguiremos entre protones y neutrones por medio de este número cuántico.

Si el hamiltoniano monoparticular incluye término espín-órbita deja de cumplirse (1.7) [[1].e] con lo cual el hamiltoniano monoparticular ya no es diagonal en la base

$|n, l, m_l, s, m_s\rangle$; no obstante se cumple que

$$[\hat{h}, \hat{j}^2] = 0; \quad [\hat{h}, \hat{j}_z] = 0; \quad [\hat{h}, \hat{s}^2] = 0; \quad [\hat{h}, \hat{l}^2] = 0 \quad (1.11)$$

En la base acoplada $|n, (l\frac{1}{2}), j, m\rangle$, \hat{h} será diagonal.

Los números cuánticos asociados a un estado de la base acoplada serán: n , asociado a la energía; l , asociado al momento angular orbital; s , asociado al momento intrínseco o de espín (el cual sabemos que al tratarse de protones y neutrones será siempre 1/2); j , asociado al momento angular total del nucleón y m , asociado a una proyección del momento angular total del nucleón. Dicho estado también tiene una paridad definida y cuando resulte conveniente consideraremos el isoespín t y una proyección de isoespín m_t .

1.3. Hamiltoniano monoparticular autofunciones y autovalores.

Vamos a proponer un hamiltoniano monoparticular razonable para el caso del núcleo atómico y obtener sus autofunciones y autovalores. Este desarrollo viene detallado en [[8].a].

Consideramos un hamiltoniano monoparticular,

$$\hat{h} = \frac{\hat{p}^2}{2m_n} + \hat{v}_{WS} + \hat{v}_C + \hat{v}_{SO} \quad (1.12)$$

cuyo potencial es suma de un Woods-Saxon (v_{WS}), el término coulombiano (v_C) y el término espín órbita (v_{SO}).

El potencial de Wood-Saxon es muy usado en estructura nuclear. Tiene una dependencia radial similar a la de la densidad de nucleones de núcleos estables, medios y pesados. Se puede escribir como:

$$v_{WS} = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (1.13)$$

Existen diversas parametrizaciones posibles para la profundidad del pozo, V_0 , el radio central del potencial, R , y la difusividad, a . En esta exposición, se ha utilizado [[8].a], el siguiente conjunto de parámetros:

$$V_0 = (51 \pm 33 \frac{N-Z}{A}) \text{ MeV} \quad R = r_0 A^{1/3} = 1,27 A^{1/3} \text{ fm}; \quad a = 0,67 \text{ fm.} \quad (1.14)$$

El signo negativo en la profundidad corresponde a protones y el negativo a neutrones. En la Figura 1.2. está representado el potencial Woods-Saxon.

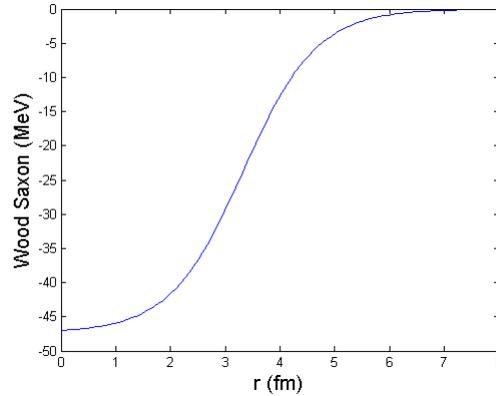


Figura 1.2: Potencial Woods-Saxon ($Z=8$, $A=18$)

El término coulombiano solo afecta a protones y da cuenta de la repulsión que siente al estar cerca de otras partículas de igual carga. Lo consideraremos como la repulsión que siente un protón en presencia de una distribución uniforme de carga $(Z - 1)e$ y radio R .

$$v_C(r) = (Z - 1)k \begin{cases} \frac{3 - (r/R)^2}{2R} & r \leq R \\ \frac{1}{r} & r > R \end{cases} \quad (1.15)$$

donde $k = 1,44 \text{ MeV fm}$ [9]

Por último, el término espín-órbita es de la forma,

$$\hat{v}_{SO} = 0,44V_0 \left(\frac{r_0}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} \frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}}\right] \hbar^2 \hat{\vec{l}} \cdot \hat{\vec{s}} = v_{LS}(r) \hat{\vec{l}} \cdot \hat{\vec{s}} \quad (1.16)$$

El operador $\hat{\vec{l}} \cdot \hat{\vec{s}}$ es diagonal en la base acoplada,

$$\hat{\vec{l}} \cdot \hat{\vec{s}} |(l \frac{1}{2}) j m\rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] |(l \frac{1}{2}) j m\rangle \quad (1.17)$$

Este término es responsable de que los autovalores del hamiltoniano dependan de j . Como el espín de los nucleones es $1/2$ los únicos valores posibles son

$$j_+ = l + 1/2 \quad j_- = l - 1/2 \quad (1.18)$$

Los niveles ϵ_{nlj_+} disminuyen su energía respecto al valor sin espín-órbita, ϵ_{nl} , mientras que ϵ_{nlj_-} aumenta. Este desdoblamiento es más significativo para niveles con mayor l

permitiendo así obtener los números mágicos, tal y como se comentó anteriormente. Los efectos de estos términos vienen recogidos en las Figuras 1.3. y 1.4a. En la primera se incluye el potencial central de protones y neutrones, vemos que la profundidad del pozo de neutrones es mayor que en el pozo de protones, debido al potencial coulombiano. También se aprecia la estructura de capas y los desdoblamientos por efectos del término espín-órbita.

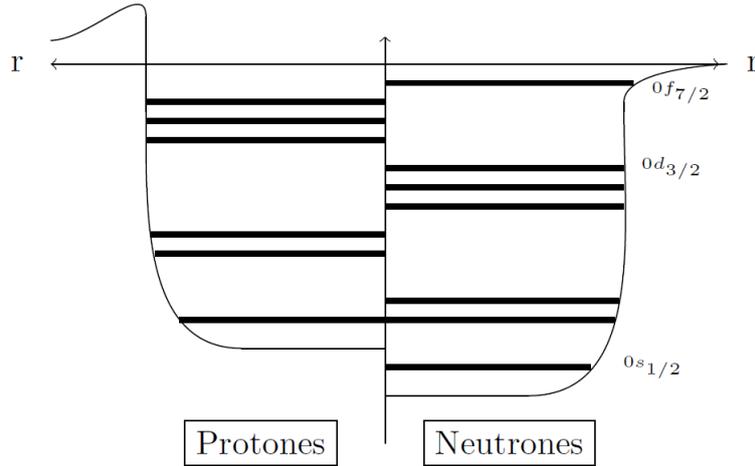


Figura 1.3: Esquema de niveles de energía del hamiltoniano.

La acción de \hat{h} sobre $|n(l\frac{1}{2})jm\rangle$ dependerá de los valores de l y j

$$\hat{h} |n(l\frac{1}{2})jm\rangle = \epsilon_{nlj} |n(l\frac{1}{2})jm\rangle \quad (1.19)$$

Si multiplicamos por la izquierda por el bra $\langle(l\frac{1}{2})jm|$ (integramos sobre la parte angular en ambos lados de la ecuación),

$$\langle(l\frac{1}{2})jm| \hat{h} |n(l\frac{1}{2})jm\rangle = \epsilon_{nlj} \langle(l\frac{1}{2})jm|n(l\frac{1}{2})jm\rangle \quad (1.20)$$

obtendremos, la ecuación radial de Schrödinger,

$$h_{lj}(r)f_{nlj}(r) = \epsilon_{nlj}f_{nlj}(r) \quad (1.21)$$

En lugar de resolver la ecuación diferencial integrando numéricamente obtendremos los coeficientes que permiten escribir la función radial como combinación lineal de las funciones de onda radiales del oscilador armónico, $g_{\nu l}(r)$.

$$f_{nlj}(r) = \sum_{\nu} A_{\nu}^{nlj} g_{\nu l}(r) \quad (1.22)$$

Las condiciones de normalización implican,

$$\sum_{\nu} |A_{\nu}^{nlj}|^2 = 1 \quad (1.23)$$

Las funciones $g_{nl}(r)$ son conocidas [[1].f]

$$g_{nl}(r) = \sqrt{\frac{2n!}{b^3 \Gamma(n + l + \frac{3}{2})}} \left(\frac{r}{b}\right)^l e^{-(\frac{r}{\sqrt{2}b})^2} L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2/b^2) \quad (1.24)$$

donde $L_n^{l+\frac{1}{2}}(x)$ es el polinomio asociado de Laguerre. La longitud de oscilador, b , [[8].a] viene dada por

$$b = \frac{\hbar c}{\sqrt{(m_N c^2)(\hbar \omega)}} \quad (1.25)$$

donde $\hbar c$ vale 197,33 MeV fm, m_N sería 939,566 MeV c^2 para neutrones y 938,272 MeV c^2 para protones [10] y el valor de $\hbar \omega$ vendrá dado por la fórmula de Blomqvist-Molinari[11]

$$\hbar \omega = (45A^{-1/3} - 25A^{-2/3}) \text{ MeV} \quad (1.26)$$

Para cada conjunto de l y j construiremos la matriz del hamiltoniano usando las funciones de oscilador como base y, al diagonalizarla, obtendremos los autovalores y autofunciones del hamiltoniano propuesto. En primer lugar, debemos evaluar los elementos de matriz

$$\langle \nu' | h_{lj} | \nu \rangle = \int_0^{\infty} dr r^2 g_{\nu'l}(r) h_{lj}(r) g_{\nu l}(r) \quad (1.27)$$

Para evitar hacer la derivada al evaluar la parte asociada a la energía cinética, usaremos propiedades de las funciones del oscilador armónico [[1].f].

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_N} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + \frac{1}{2} m_N \omega^2 r^2 \right] g_{nl}(r) = \left[2n + l + \frac{3}{2} \hbar \omega \right] g_{nl}(r) \quad (1.28)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$. De este modo haciendo uso de la ecuación (1.28) el elemento de matriz vendrá dado por,

$$\begin{aligned} \langle \nu | h_{lj} | \nu \rangle = \int_0^{\infty} dr r^2 g_{\nu l}(r) g_{\nu l}(r) & \left[\frac{\hbar^2 c^2}{2m_N c^2} \left(\frac{4\nu + 2l + 3}{b^2} - \frac{r^2}{b^4} \right) + v_{WS}(r) + \right. \\ & \left. + v_C(r) + \frac{1}{2} (j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}) v_{LS}(r) \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

La matriz sería,

$$\begin{pmatrix} \langle 0 | h_{lj} | 0 \rangle & \langle 0 | h_{lj} | 1 \rangle & \cdots & \langle 0 | h_{lj} | \nu_{max} \rangle \\ \langle 1 | h_{lj} | 0 \rangle & \langle 1 | h_{lj} | 1 \rangle & \cdots & \langle 1 | h_{lj} | \nu_{max} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \nu_{max} | h_{lj} | 0 \rangle & \langle \nu_{max} | h_{lj} | 1 \rangle & \cdots & \langle \nu_{max} | h_{lj} | \nu_{max} \rangle \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Estamos trabajando en una base infinita, mas para poder diagonalizar hemos de reducir su tamaño. Para cada l y j nos quedamos con los primeros $\nu_{max} + 1$ estados de la base y comprobamos la convergencia de los resultados obtenidos para los estados ligados del núcleo incrementando el tamaño de la base. El programa se ha comprobado comparando los resultados para el ^{16}O con los obtenidos en [[8].a]. Observamos que en los casos analizados el término dominante en las funciones de onda radiales f_{nlj} es el correspondiente al g_{nl} del oscilador armónico. En los cuadros 1.1. y 1.2. se recogen los primeros niveles monoparticulares de energía para neutrones y protones con $\nu_{max} = 10$.

Las energías monoparticulares protónicas obtenidas para $Z = 8$ y $A = 18$ y un ejemplo de las funciones de onda radiales pueden observarse en la figura 1.4.

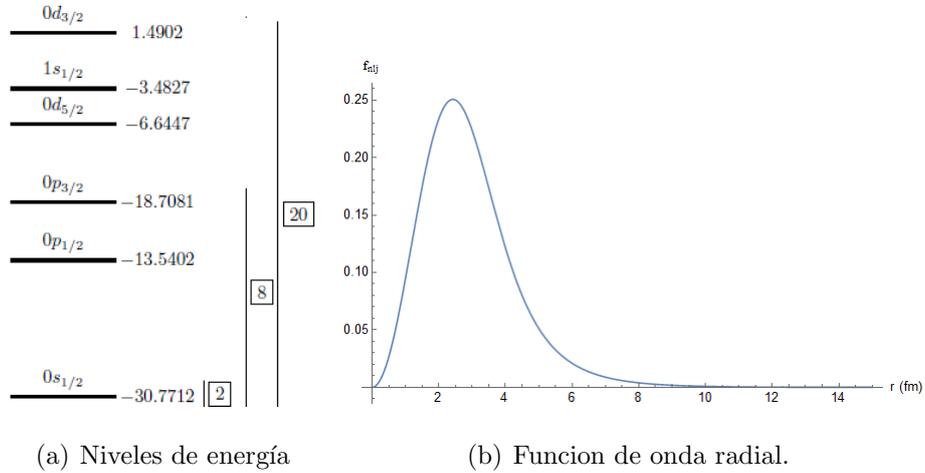


Figura 1.4: Esquema de niveles monoparticulares de energía y función de onda radial $0d_{5/2}$ asociados a protones para $Z=8$ y $A=18$.

Los niveles que tengan energía negativa serán estados ligados y discretos. Por otro lado, los niveles de energía positivos pertenecen al continuo, en esta exposición nos centraremos en el estudio de los estados ligados.

nlj	ϵ_{nlj} (MeV)	$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$	$\nu = 6$	$\nu = 7$	$\nu = 8$	$\nu = 9$	$\nu = 10$
$0s_{1/2}$	-29,1626	0,9998	-0,0129	0,0009	-0,0162	-0,0024	-0,0014	0,0007	0,0004	0,0004	0,0001	0,0001
$0p_{3/2}$	-17,4272	0,9989	-0,2102	0,0312	-0,0274	0,0003	-0,0056	0,0016	-0,0005	0,0010	0,0000	0,0003
$0p_{1/2}$	-12,9597	0,9273	-0,0276	0,0608	-0,0293	0,0064	-0,0089	0,0026	-0,0022	0,0013	-0,0005	0,0005
$0d_{5/2}$	-5,8550	0,9900	-0,0809	0,0963	-0,0596	0,0226	-0,0223	0,0112	-0,0078	0,0056	-0,0027	0,0017
$1s_{1/2}$	-3,6432	0,0153	0,9347	-0,2362	0,1979	-0,1353	0,0799	-0,0620	0,0398	-0,0268	0,0165	-0,0072
$0d_{3/2}$	0,7873	0,9063	-0,2385	0,2394	-0,1650	0,1248	-0,1010	0,0750	-0,0576	0,0404	-0,0257	0,0125

Cuadro 1.1: Primeros seis niveles monoparticulares de energía y amplitudes A_{ν}^{nlj} (1.23) para neutrones (A=18, Z=8).

11

nlj	ϵ_{nlj} (MeV)	$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$	$\nu = 6$	$\nu = 7$	$\nu = 8$	$\nu = 9$	$\nu = 10$
$0s_{1/2}$	-30,7712	0,9998	0,0127	-0,0024	-0,0160	-0,0038	-0,0015	0,0005	0,0005	0,0005	0,0002	0,0001
$0p_{3/2}$	-18,7081	0,9992	0,0196	0,0246	-0,0238	-0,0031	-0,0050	0,0007	-0,0001	0,0009	0,0002	0,0003
$0p_{1/2}$	-12,9597	0,9273	-0,0276	0,0608	-0,0293	0,0064	-0,0089	0,0026	-0,0022	0,0013	-0,0005	0,0005
$0d_{5/2}$	-6,6447	0,9956	-0,0176	0,0775	-0,0440	0,0107	-0,0159	0,0058	-0,0045	0,0033	-0,0013	0,0012
$1s_{1/2}$	-3,4827	-0,0103	0,9643	-0,1610	0,1638	-0,1044	0,0552	-0,0456	0,0268	-0,0183	0,0112	-0,0046
$0d_{3/2}$	1,4902	0,9445	-0,1690	0,2061	-0,1271	0,094	-0,0762	0,0546	-0,0424	0,0292	-0,0186	0,0091

Cuadro 1.2: Primeros seis niveles de energía monoparticular y amplitudes A_{ν}^{nlj} (1.23) para protones (A=18, Z=8).

1.4. Autofunciones y autovalores del hamiltoniano del núcleo.

Una vez obtenidos los niveles monoparticulares ϵ_{nlj} y las correspondientes funciones de onda radiales $f_{nlj}(r)$ según el procedimiento descrito previamente estamos en disposición de obtener las energías y funciones de onda del núcleo en el modelo de partículas independientes. Las funciones de onda con A nucleones, de los cuales Z son protones y N son neutrones vienen dadas por,

$$\Psi = \hat{A} \left[\prod_{i=1}^Z \phi_{\alpha_i}^{m_t=1/2}(\mathbf{x}_i) \right] \hat{A} \left[\prod_{k=1}^N \phi_{\beta_k}^{m_t=-1/2}(\mathbf{x}_k) \right] \quad (1.31)$$

donde $\phi_{\alpha_i}^{m_t=1/2}(\mathbf{x}_i)$ representa la función de onda monoparticular protónica con números cuánticos $\alpha_i = (n_i, l_i, j_i, m_i)$ dependiente de las coordenadas espaciales e internas (\mathbf{x}_i) del protón i-ésimo. Del mismo modo el $\phi_{\beta_k}^{m_t=-1/2}(\mathbf{x}_k)$ representa la función neutrónica del neutrón k-ésimo con los números cuánticos $\beta_k = (n_k, l_k, j_k, m_k)$. El operador \hat{A} actuando sobre un estado nos da el determinante de Slater asociado a ese estado.

La energía nuclear se obtiene como,

$$E = \sum_{i=1}^Z \epsilon_{\bar{\alpha}_i}^{m_t=1/2} + \sum_{j=1}^N \epsilon_{\bar{\beta}_k}^{m_t=-1/2} \quad (1.32)$$

con $\bar{\alpha}_i = (n_i l_i j_i)$ y $\bar{\beta}_k = (n_k l_k j_k)$. Las energías monoparticulares no dependen de los números cuánticos asociados a j_z . Por lo tanto, para conocer la energía del núcleo basta dar su configuración protónica y neutrónica.

$$m_t = +1/2 : (n_1 l_1 j_1)^{w_1} \cdots (n_i l_i j_i)^{w_i} \quad (1.33)$$

$$m_t = -1/2 : (n_1 l_1 j_1)^{y_1} \cdots (n_k l_k j_k)^{y_k} \quad (1.34)$$

siendo w_i es el número de protones con los números cuánticos $(n_i l_i j_i)$ e y_k el número de neutrones con números cuánticos $(n_k l_k j_k)$ en el núcleo. Las subcapas tienen una degeneración $2j + 1$.

El nivel fundamental del núcleo se obtendrá ocupando completamente los niveles monoparticulares hasta que el principio de Pauli impida que haya más nucleones del tipo considerado en orden creciente de energía. Por lo tanto, en el nivel fundamental todas las subcapas (nlj) protónicas o neutrónicas estarán llenas salvo, en algunos casos, la última de cada tipo de nucleones.

Una vez conocidas las propiedades de los estados monoparticulares podemos ver qué propiedades tiene el núcleo. El hamiltoniano de un núcleo aislado conmuta con el momento angular total del sistema, \vec{J} , y en particular:

$$[\hat{H}, \hat{J}^2] = 0 \quad [\hat{H}, \hat{J}_z] = 0 \quad (1.35)$$

Podemos construir funciones de onda con momento angular total bien definido, lo mismo ocurre con una proyección del momento angular. Sin embargo, ni L^2 ni S^2 conmutan con el hamiltoniano. El operador paridad \hat{P} conmuta con el hamiltoniano, al igual que con \hat{J} , podemos construir funciones de onda con paridad definida. La paridad del núcleo vendrá dada por $(-1)^{\sum_i l_i}$.

Cuando todos los estados disponibles de un nivel de energía se encuentran completos decimos que tenemos una subcapa completa. Podemos obtener el valor de proyección de momento angular total, momento angular total y paridad asociados a estas subcapas.

La suma, M , de todos los valores de m_i en una misma capa será cero, pues como los valores son de $-j$ a j en la suma siempre tendremos valores de signos contrarios que se anulan entre sí.

Existe un único estado asociado a una subcapa completa y este tiene $M = 0$. Podemos inferir que este estado tiene momento angular total cero, $J = 0$, pues es el único momento disponible que solo tenga proyección $M=0$. Si actuáramos con \hat{J}_+ sobre este estado obtendríamos cero pues el valor máximo de momento angular total disponible en este estado.

En una subcapa completa habrá $2j + 1$ nucleones con momento angular l . Teniendo en cuenta que j siempre es un número semientero, $(-1)^{(2j+1)l} = (-1)^{Par} = +1$. La paridad de una subcapa completa es $+1$.

En el caso de tener un solo nucleón en una subcapa incompleta se puede deducir que el momento angular total coincidirá con el momento angular total del nucleón \vec{j} , y la proyección del momento angular total será la proyección del momento angular del nucleón, m ,

$$\vec{J} = \vec{j} + \vec{0} = \vec{j}; \quad M = m + 0 = m \quad (1.36)$$

Este es el caso de $^{17}_8\text{O}$, cuya configuración fundamental $[[1].e]$ es

$$\begin{aligned} m_t = +1/2 : & (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4 (0p_{1/2})^2 \\ m_t = -1/2 : & (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4 (0p_{1/2})^2 \quad (0d_{5/2})^1 \end{aligned} \quad (1.37)$$

,todas las capas están completas salvo la última subcapa neutrónica, por lo tanto, este núcleo tendrá un momento angular $J = 5/2$.

Cuando tenemos dos nucleones en subcapas incompletas la predicción no es inmediata. Si los nucleones son de distinto tipo o bien están en dos subcapas distintas:

$$\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 \quad M = m_1 + m_2 \quad (1.38)$$

siendo J un número entero entre $|j_1 - j_2|$ y $j_1 + j_2$

En el caso de dos nucleones del mismo tipo en la misma subcapa, la función de onda debe ser antisimétrica bajo intercambio de ambas partículas.

$$\phi_{((nlj)^2; JM)} = N \sum_{m_1, m_2} \langle j, m_1; j, m_2 | J, M \rangle [\phi_{n,l,j,m_1}(\mathbf{x}_1)\phi_{n,l,j,m_2}(\mathbf{x}_2) - \phi_{n,l,j,m_2}(\mathbf{x}_1)\phi_{n,l,j,m_1}(\mathbf{x}_2)] \quad (1.39)$$

y,por tanto, [[4].a],[5],

$$\begin{aligned} \phi_{(nlj)^2; JM} &= |N|^2 \sum_{m_1, m_2} \sum_{m'_1, m'_2} \langle j, m_2; j, m_1 | J, M \rangle \langle j, m'_2; j, m'_1 | J, M \rangle 2[\delta_{m'_1, m_1} \delta_{m'_2, m_2} - \delta_{m'_1, m_2} \delta_{m'_2, m_1}] = \\ &= 2|N|^2 \sum_{m_1, m_2} \langle j, m_1; j, m_2 | J, M \rangle^2 [1 - (-1)^{J-2j}] \end{aligned} \quad (1.40)$$

la función de onda solo puede normalizarse a la unidad si $(-1)^{J-2j} \neq 1$, es decir si $J - 2j$ es impar y puesto que $2j$ es impar, J debe ser par. Añadiendo la limitación del Clebsch-Gordan, J debe tomar valores pares entre 0 y $2j$. Por ejemplo, en el caso del ^{18}O , cuya configuración neutronica fundamental es $(0s_{1/2})^2(0p_{3/2})^4(0p_{1/2})^2(0d_{5/2})^2$ [[1].e], tenemos que el momento angular total puede valer 0, 2 ó 4.

Capítulo 2

Interacción separable: Delta de superficie.

2.1. Representación matricial del hamiltoniano. Organización interna de la matriz.

El modelo de partículas independientes nos permite reproducir los números mágicos, sin embargo, los niveles energéticos presentan una elevada degeneración en configuraciones donde, por ejemplo, existen varias subcapas incompletas. Esta degeneración no coincide con los datos experimentales [[8].d]. Para ir más allá del modelo de partículas independientes usamos el modelo de capas. Introducimos una interacción residual, la cuál puede romper la degeneración en J , pero no en M , si el sistema está aislado, es decir, si el hamiltoniano total conmuta con el momento angular total, como se comprueba a continuación.

El operador escalera se define como[3]:

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y \quad (2.1)$$

Conocemos que

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_+] = 0 \quad ; \quad [\hat{H}, \hat{J}_+] = 0 \quad (2.2)$$

Suponiendo que la energía depende del valor de la proyección del momento angular total,

$$\hat{H}\hat{J}_+ |J, M\rangle = C(J, M)\hat{H} |J, M + 1\rangle = C(J, M)E(J, M + 1) |J, M + 1\rangle \quad (2.3)$$

$$\hat{J}_+ \hat{H} |J, M\rangle = E(J, M) \hat{J}_+ |J, M\rangle = C(J, M) E(J, M) |J, M+1\rangle \quad (2.4)$$

Usando (2.2), concluimos que,

$$E(J, M) = E(J, M+1) \quad \forall M \quad (2.5)$$

Por lo tanto, la energía del núcleo será independiente de la proyección de momento angular total.

Consideremos que el hamiltoniano del sistema viene dado por,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (2.6)$$

donde \hat{H}_0 es el hamiltoniano del modelo de partículas independientes, mientras que \hat{V} es la interacción residual entre partículas. Ambos operadores pueden ser representados como matrices, así denotaremos H como la matriz del hamiltoniano, \hat{H} , en la base escogida. Del mismo modo, definimos H_0 como la matriz asociada a \hat{H}_0 , la cual vendrá dada por los posibles niveles de energía del núcleo en el modelo de partículas independientes y V como la matriz asociada a \hat{V} , la cual contendrá los efectos de la interacción residual. Como en el capítulo anterior será necesario limitar el tamaño de la base con la que obtenemos la matriz del hamiltoniano.

$$H = \begin{pmatrix} \langle \gamma_1 | \hat{H}_0 | \gamma_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle \gamma_2 | \hat{H}_0 | \gamma_2 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \gamma_p | \hat{H}_0 | \gamma_p \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \gamma_1 | \hat{V} | \gamma_1 \rangle & \langle \gamma_1 | \hat{V} | \gamma_2 \rangle & \cdots & \langle \gamma_1 | \hat{V} | \gamma_p \rangle \\ \langle \gamma_2 | \hat{V} | \gamma_1 \rangle & \langle \gamma_2 | \hat{V} | \gamma_2 \rangle & \cdots & \langle \gamma_2 | \hat{V} | \gamma_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \gamma_p | \hat{V} | \gamma_1 \rangle & \langle \gamma_p | \hat{V} | \gamma_2 \rangle & \cdots & \langle \gamma_p | \hat{V} | \gamma_p \rangle \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Al diagonalizar esta matriz obtendremos los niveles de energía y las funciones de onda del núcleo.

Estas matrices se pueden construir usando el esquema M [12], donde organizamos la matriz según la proyección del momento angular total que puede tener el núcleo, M . En este caso siendo $M = \sum_i m_i$ podemos trabajar en la base desacoplada $|\bar{\alpha}_1 m_1 \dots \bar{\alpha}_i m_i \dots\rangle$ y

Por otro lado, la interacción nuclear fuerte no cambia el tipo de nucleones conservando la tercera componente de isoespín. Experimentalmente[[6].a], se observa que en el caso de dispersión de dos nucleones con momento angular relativo $L = 0$,

$$\frac{V_{nn} - V_{pp}}{\frac{1}{2}(V_{nn} + V_{pp})} = (0,0 \pm 0,8) \% \quad (2.12)$$

Con lo cuál no existe prácticamente una diferencia entre interacciones nucleares protón-protón y neutrón-neutrón. Sin embargo, existe una pequeña diferencia en las interacciones nucleares entre partículas idénticas y la interacción protón-neutrón para estados con $L = 0$, $T = 1$.

$$\frac{V_{np} - V_{nn}}{\frac{1}{2}(V_{np} + V_{nn})} = (2,13 \pm 0,52) \% \quad (2.13)$$

Observamos que la interacción entre partículas diferentes es aproximadamente un 2 % más fuerte que la interacción entre partículas idénticas. En esta memoria, esta diferencia en la interacción se ignorará. Sin embargo, debemos tener en cuenta que el sistema neutrón-protón puede acoplarse a $T = 0$, en este caso la interacción es diferente con respecto al caso neutrón-protón asociado a $T = 1$. Esta diferencia puede emularse incluyendo términos dependientes del isoespín,

$$\hat{V}_{SDI} = \hat{V}_{sdi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)(A + C\hat{\tau}_1 \cdot \hat{\tau}_2) \quad (2.14)$$

siendo $\hat{\tau}$ el equivalente a las matrices de Pauli en el caso del isoespín. Este término no conserva la proyección de isoespín monoparticular.

Consideremos el siguiente estado de dos partículas, con isoespín total bien definido

$$|n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle |T, M_T\rangle \quad (2.15)$$

Para calcular un elemento de matriz de V_{SDI} necesitamos evaluar,

$$\langle n_3 l_3 j_3 m_3; n_4 l_4 j_4 m_4 | \hat{V}_{sdi} |n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle \langle T', M_{T'} | (A + C\hat{\tau}_1 \cdot \hat{\tau}_2) |T, M_T\rangle \quad (2.16)$$

Sabemos, por definición, que los operadores $\hat{\tau}$ usados se definen igual que las matrices de Pauli para el espín [[6].a],

$$\langle T', M_{T'} | \hat{\tau}_1 \cdot \hat{\tau}_2 |T, M_T\rangle = 4 \langle T', M_{T'} | \hat{t}_1 \cdot \hat{t}_2 |T, M_T\rangle = 4 \langle T', M_{T'} | [\hat{T}^2 - \hat{t}_1^2 - \hat{t}_2^2] |T, M_T\rangle \quad (2.17)$$

En nuestro caso, $t_1 = t_2 = 1/2$, con lo cual, si acoplamos ambos obtenemos dos posibilidades $T = 1$ y $T = 0$. Usando la expresión (2.17.) en (2.16.), obtenemos que, el elemento de matriz de \hat{V}_{SDI}

$$\langle n_3 l_3 j_3 m_3; n_4 l_4 j_4 m_4 | \hat{V}_{SDI} | n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2 \rangle (A + C(-3\delta_{T,0} + \delta_{T,1})) \delta_{T,T'} \delta_{M_{T'}, M_T} \quad (2.18)$$

depende del isoespín total. Dos nucleones idénticos, solo pueden acoplarse a $T = 1$

$$|t_1 = 1/2, m_{t1} = 1/2\rangle |t_2 = 1/2, m_{t2} = 1/2\rangle = |T = 1, M_t = 1\rangle \quad (2.19)$$

$$|t_1 = 1/2, m_{t1} = -1/2\rangle |t_2 = 1/2, m_{t2} = -1/2\rangle = |T = 1, M_T = -1\rangle \quad (2.20)$$

Dos nucleones diferentes, pueden acoplarse a $T = 1$ y $T = 0$.

$$|t_1 = 1/2, m_{t1} = -1/2\rangle |t_2 = 1/2, m_{t2} = +1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|T = 1, M_T = 0\rangle + |T = 0, M_T = 0\rangle) \quad (2.21)$$

2.3. Cálculo del elemento de matriz sin antisimetrizar.

En esta exposición, trataremos con núcleos donde solo interaccionarán dos partículas. Las bases vendrán dadas por una combinación de los siguientes estados,

$$|n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle |T, M_T\rangle \quad (2.22)$$

Así pues, conociendo la interacción podemos proceder a calcular una integral que interviene en el cálculo de cualquier elemento de matriz que tengamos que hallar posteriormente. Usamos los coeficientes de Clebsch-Gordan para transformar la base $|n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle |T, M_T\rangle$ a otra en la que el momento angular orbital y el espín estén desacoplados

$|n_1, l_1, m_{l_1}, s_1, m_{s_1}; n_2, l_2, m_{l_2}, s_2, m_{s_2}\rangle |T, M_T\rangle$. Si la interacción no depende del espín,

$$\begin{aligned} \langle T', M_{T'} | \langle n_3 l_3 j_3, m_3, n_4 l_4 j_4 m_4 | \hat{V} | n_1 l_1 j_1 m_1, n_2 l_2 j_2 m_2 \rangle |T, M_T\rangle = \\ \sum_{m_{l_1}, m_{s_1}} \sum_{m_{l_2}, m_{s_2}} \sum_{m_{l_3}, m_{s_3}} \sum_{m_{l_4}, m_{s_4}} \langle l_1, m_{l_1}; s_1, m_{s_1} | j_1, m_1 \rangle \langle l_2, m_{l_2}; s_2, m_{s_2} | j_2, m_2 \rangle \\ \langle l_3, m_{l_3}; s_3, m_{s_3} | j_3, m_3 \rangle \langle l_4, m_{l_4}; s_4, m_{s_4} | j_4, m_4 \rangle \langle s_3, m_{s_3} | s_1, m_{s_1} \rangle \langle s_4, m_{s_4} | s_2, m_{s_2} \rangle \\ \langle T', M_{T'} | \langle n_3, l_3, m_{l_3}, n_4, l_4, m_{l_4} | \hat{V} | n_1, l_1, m_{l_1}, n_2, l_2, m_{l_2} \rangle |T, M_T\rangle \end{aligned} \quad (2.23)$$

no puede cambiar sus componentes, por lo que,

$$m_{s_1} = m_{s_3} \quad ; \quad m_{s_2} = m_{s_4}. \quad (2.24)$$

Al trabajar con nucleones $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1/2$. Por las características de la base escogida,

$$m = m_l + m_{s_1} \quad (2.25)$$

y podemos escribir,

$$\begin{aligned} \langle T', M_{T'} | \langle n_3 l_3 j_3 m_3, n_4 l_4 j_4 m_4 | \hat{V} | n_1 l_1 j_1, m_1, n_2 l_2 j_2 m_2 \rangle | T, M_T \rangle &= \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} \langle l_1, m_1 - m_{s_1}; s_1, m_{s_1} | j_1, m_1 \rangle \\ &\langle l_2, m_2 - m_{s_2}; s_2, m_{s_2} | j_2, m_2 \rangle \langle l_3, m_3 - m_{s_1}; s_3, m_{s_3} | j_3, m_3 \rangle \langle l_4, m_4 - m_{s_4}; s_4, m_{s_4} | j_4, m_4 \rangle \\ \langle T', M_{T'} | \langle n_3, l_3, m_3 - m_{s_1}, n_4, l_4, m_4 - m_{s_2} | \hat{V} | n_1, l_1, m_1 - m_{s_1}, n_2, l_2, m_2 - m_{s_2} \rangle | T, M_T \rangle & \quad (2.26) \end{aligned}$$

En particular para la interacción delta de superficie (2.14.) y las funciones de onda (1.3.)

$$\begin{aligned} \langle T', M_{T'} | \langle n_3, l_3, m_{l_3}, n_4, l_4, m_{l_4} | V_{SDI} | n_1, l_1, m_{l_1}, n_2, l_2, m_{l_2} \rangle | T, M_T \rangle &= V_0(T; T') \delta_{M_T, M_{T'}} \\ &R^2 \mathcal{R}_{n_1, l_1}(R) \mathcal{R}_{n_2, l_2}(R) \\ \mathcal{R}_{n_3, l_3}^*(R) \mathcal{R}_{n_4, l_4}^*(R) \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \text{sen}(\theta) Y_{l_3 m_{l_3}}^*(\theta, \phi) Y_{l_4 m_{l_4}}^*(\theta, \phi) Y_{l_2, m_{l_2}}(\theta, \phi) Y_{l_1, m_{l_1}}(\theta, \phi) & \quad (2.27) \end{aligned}$$

donde $V_0(T, T') = (A + C(-3\delta_{T,0} + \delta_{T,1}))\delta_{T,T'}$ Esta expresión puede reescribirse usando la ortogonalidad de los armónicos esféricos y que el producto de dos armónicos esféricos [13] es

$$Y_{l, m_l}(\theta, \phi) Y_{l', m_{l'}}(\theta, \phi) = \sum_{L, M_L} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2L+1)}} \langle l, m; l', m' | L, M_L \rangle \langle l, 0; l', 0 | L, 0 \rangle Y_{L, M_L}(\theta, \phi) \quad (2.28)$$

En (2.27) L y M_L representan los números cuánticos asociados al momento angular total y su proyección, los cuales se obtienen acoplando los momentos orbitales individuales.

En la Figura 2.1. se dibujan ejemplos de las funciones de onda radiales, el valor absoluto de dichas funciones radiales es aproximadamente constante, independiente de n y l , en la superficie del núcleo, por eso es habitual [[6].b] la sustitución,

$$V_0(T; T') \delta_{M_T, M_{T'}} R^2 \mathcal{R}_{n_1, l_1}(R) \mathcal{R}_{n_2, l_2}(R) \mathcal{R}_{n_3, l_3}^*(R) \mathcal{R}_{n_4, l_4}^*(R) = -4\pi(-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4} A_T \delta_{T, T'} \delta_{M_T, M_{T'}} \quad (2.29)$$

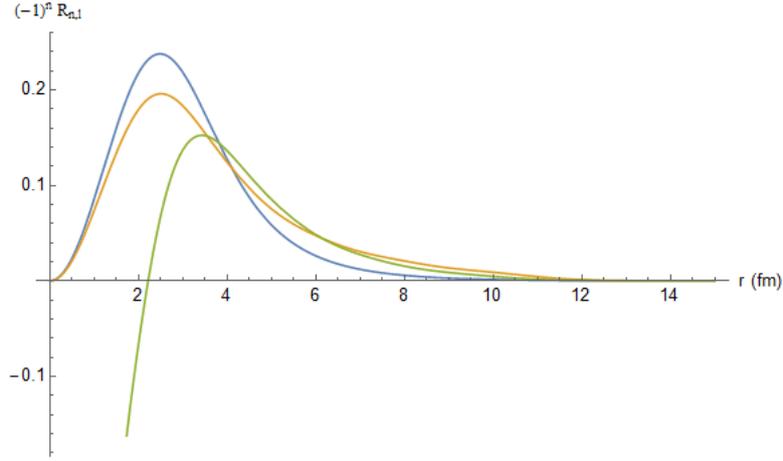


Figura 2.1: Representación de funciones proporcionales a la función de onda radial asociados a los niveles monoparticulares neutrónicos $0d_{5/2}$ (Azul), $0d_{3/2}$ (Naranja) y $1s_{1/2}$ (Verde).

El término $(-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4}$ da cuenta del signo de la funciones radiales. La dependencia de la interacción con el isoespín, vendrá reflejada en el valor de la constante A_T

Por lo cual, la expresión final del elemento de matriz de la interacción delta de superficie viene dada por,

$$\begin{aligned}
\langle T', M_{T'} | \langle n_3 l_3 j_3 m_3, n_4 l_4 j_4 m_4 | V_{SDI} | n_1 l_1 j_1 m_1, n_2 l_2 j_2, m_2 \rangle | T, M_T \rangle = & -(-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4} A_T \delta_{T,T'} \delta_{M_T, M_{T'}} \\
& \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} \sum_L \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)(2l_4+1)}{(2L+1)^2}} \langle l_1, m_1 - m_{s_1}; s_1, m_{s_1} | j_1, m_1 \rangle \\
& \langle l_2, m_2 - m_{s_2}; s_2, m_{s_2} | j_2, m_2 \rangle \langle l_3, m_3 - m_{s_1}; s_3, m_{s_3} | j_3, m_3 \rangle \langle l_4, m_4 - m_{s_4}; s_4, m_{s_4} | j_4, m_4 \rangle \\
& \langle l_1, m_1 - m_{s_1}; l_2, m_2 - m_{s_2} | L, m_1 + m_2 - m_{s_1} - m_{s_2} \rangle \langle l_1, 0; l_2, 0 | L, 0 \rangle \langle l_3, 0, l_4, 0 | L, 0 \rangle \\
& \langle l_3, m_3 - m_{s_1}; l_4, m_4 - m_{s_2} | L, m_3 + m_4 - m_{s_1} - m_{s_2} \rangle \quad (2.30)
\end{aligned}$$

una expresión que es esencialmente una suma de productos de coeficientes de Clebsch-Gordan. En los próximos capítulos necesitaremos estos elementos para obtener la matriz del hamiltoniano del modelo de capas para núcleos considerados.

Capítulo 3

Partículas Idénticas.

Consideraremos en este capítulo que las partículas que se hallan en las capas incompletas son idénticas.

3.1. Elemento de matriz de partículas idénticas.

Si los dos nucleones considerados son idénticos la función de onda de ambos nucleones debe ser antisimétrica pues tanto los protones como los neutrones son fermiones. En este caso, el isospín total de estas dos partículas es $T = 1$ (2.19), (2.20) y $M_T = \pm 1$, siendo positivo para protones y negativo para neutrones. Estos valores de T y M_T no cambiarán, por lo tanto, no se incluirán en los estados que se escriban a continuación. El estado de ambas partículas, viene dado por,

$$\begin{aligned} |\alpha_1; \alpha_2\rangle_A &= |n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle_A = \hat{A} |n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle - |n_2 l_2 j_2 m_2; n_1 l_1 j_1 m_1\rangle) \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde el operador \hat{A} nos da el determinante de Slater asociado al estado sobre el que actúa. El elemento de matriz de la interacción residual,

$$\begin{aligned} {}_A\langle\alpha_3; \alpha_4| \hat{V} |\alpha_1; \alpha_2\rangle_A &= \frac{1}{2} (\langle\alpha_3; \alpha_4| \hat{V} |\alpha_1; \alpha_2\rangle + \langle\alpha_4; \alpha_3| \hat{V} |\alpha_2; \alpha_1\rangle - \langle\alpha_3; \alpha_4| \hat{V} |\alpha_2; \alpha_1\rangle - \\ &- \langle\alpha_4; \alpha_3| \hat{V} |\alpha_1; \alpha_2\rangle) = \langle\alpha_3; \alpha_4| \hat{V} |\alpha_1; \alpha_2\rangle - \langle\alpha_3; \alpha_4| \hat{V} |\alpha_2; \alpha_1\rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

En el caso de la interacción delta de superficie los elementos en (3.2.) pueden obtenerse de (2.30).

3.2. Núcleo ${}^6\text{He}$.

Analicemos el caso concreto de ${}^6_2\text{He}$, cuya configuración en el estado fundamental según el MPI es

$$m_t = +1/2 : \quad (0s_{1/2})^2 \quad (3.3)$$

$$m_t = -1/2 : \quad (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^2 \quad (3.4)$$

Consideraremos que el nivel perteneciente al "core" será $0s_{1/2}$ y los niveles $0p_{3/2}$ y $0p_{1/2}$ nos darán el espacio de diagonalización de la interacción residual, los niveles superiores tienen una gran diferencia de energía con respecto al último nivel ocupado (pasamos por un número mágico) y la probabilidad de que los nucleones se exciten a estos niveles es despreciable.

La ocupación de los niveles $0p$ neutrónicos para el estado fundamental y los primeros niveles excitados viene recogida en la Figura 3.1.

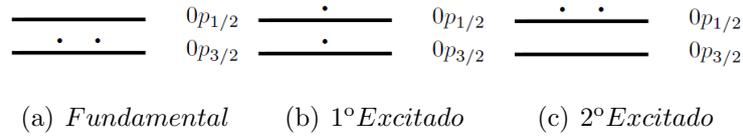


Figura 3.1: Ocupación de los niveles $0p$ en los estados fundamental y excitados del ${}^6\text{He}$

Ahora vamos a suponer que ambos nucleones interactúan entre sí por medio del potencial descrito en el capítulo anterior. La matriz del hamiltoniano que se obtenga se organizará según esquema M y supondremos que ambos neutrones tienen una proyección de momento angular total $M = 0$. Los estados son,

$$\begin{aligned}
 &|0p_{1/2,1/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_A, & |0p_{1/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A, & |0p_{1/2,-1/2}; 0p_{3/2,1/2}\rangle_A, \\
 &|0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_A, & & |0p_{3/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Recordemos que los estados de la base en la que trabajamos no tienen momento angular total bien definido.

Consideramos que el origen de la energía monoparticular está en el último nivel neutrónico ocupado, $\epsilon_{0p_{3/2}} = 0$, y consideramos que el siguiente nivel tiene una energía ϵ ,

$\epsilon_{0p_{1/2}} = \epsilon$. La matriz H_0 será,

$$H_0 = \begin{pmatrix} 2\epsilon_{0p_{1/2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{0p_{3/2}} + \epsilon_{0p_{1/2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{0p_{3/2}} + \epsilon_{0p_{1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\epsilon_{0p_{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\epsilon_{0p_{3/2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

En esta exposición vamos a obtener los niveles de energía considerando a) primer orden de teoría de perturbaciones degenerada [[4].b] y b) mediante diagonalización en el espacio $M = 0$. Usando (2.30), (3.2) y (3.5), obtenemos la matriz para $M=0$ en primer orden de teoría de perturbaciones, en el cuáles conectan solo autoestados de H_0 con la misma energía,

$$H = H_0 + V = \begin{pmatrix} 2\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Para la diagonalización, en el espacio $M = 0$, donde se conectan autoestados de H_0 con diferente energía obtenemos,

$$H = H_0 + V = \begin{pmatrix} 2\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{5} \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

3.2.1. Evaluación del momento angular.

Según el modelo de partículas independientes, los posibles valores, J^π , de momento angular y paridad compatibles con el nivel fundamental, 0^+ y 2^+ . La degeneración del nivel energético es 6.

En el primer excitado, J^π puede valer 1^+ y 2^+ . La degeneración del nivel energético es 8.

En el segundo excitado, J^π solo puede tomar el valor 0^+ . La degeneración del nivel energético es 1.

Por otro lado, en el modelo de capas, una vez diagonalizada la matriz del hamiltoniano obtenemos sus autofunciones. Estas tienen asociado un valor de J concreto que tendremos que identificar. En el caso de dos partículas idénticas se puede obtener la base acoplada usando Clebsch-Gordan y la antisimetrización adecuada. No será el procedimiento que seguiremos.

Iniciamos con la expresión del cuadrado del momento angular total,

$$\hat{J}^2 = (\hat{j}_1 + \hat{j}_2)^2 = \hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + 2\hat{j}_{z1}\hat{j}_{z2} + \hat{j}_{1-}\hat{j}_{2+} + \hat{j}_{2-}\hat{j}_{1+} \quad (3.9)$$

en función de los operadores escalera monoparticulares $j_{i\pm}$ para obtener la acción de \hat{J}^2 sobre la base desacoplada:

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 |a_1, j_1, m_1; a_2, j_2, m_2\rangle &= (j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1) + 2m_1m_2) |a_1, j_1, m_1; a_2, j_2, m_2\rangle + \\ &+ \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 + 1)}\sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 - 1)} |a_1, j_1, m_1 + 1; a_2, j_2, m_2 - 1\rangle + \\ &+ \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 - 1)}\sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 + 1)} |a_1, j_1, m_1 - 1; a_2, j_2, m_2 + 1\rangle \end{aligned} \quad (3.10)$$

Las autofunciones del hamiltoniano son combinaciones lineales de los estados básicos desacoplados. Haciendo uso de (3.10.) podríamos llegar a identificar el número cuántico J de dicha autofunción, pero no es el procedimiento más cómodo de programación.

En primer lugar, construimos la matriz del operador J^2 en la base (3.1). Los elementos de matriz vienen dados por,

$$\begin{aligned} &{}_A\langle\alpha_3; \alpha_4 | \hat{J}^2 | \alpha_1; \alpha_2 \rangle_A = \\ &= \langle a_3, j_3, m_3, a_4, j_4, m_4 | J^2 | a_1, j_1, m_1, a_2, j_2, m_2 \rangle - \langle a_3, j_3, m_3, a_4, j_4, m_4 | J^2 | a_2, j_2, m_2, a_1, j_1, m_1 \rangle = \\ &= [2m_1m_2 + j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1)](\delta_{\alpha_1, \alpha_3} \delta_{\alpha_2, \alpha_4} - \delta_{\alpha_1, \alpha_4} \delta_{\alpha_2, \alpha_3}) + \\ &+ \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 - 1)}\sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 + 1)}(\delta_{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_3} \delta_{\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_4} \delta_{m_1-1, m_3} \delta_{m_2+1, m_4} - \\ &- \delta_{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_4} \delta_{\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3} \delta_{m_4, m_1-1} \delta_{m_3, m_2+1}) + \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 + 1)}\sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 - 1)} \\ &(\delta_{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_3} \delta_{\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_4} \delta_{m_1+1, m_3} \delta_{m_2-1, m_4} - \delta_{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_4} \delta_{\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3} \delta_{m_1+1, m_4} \delta_{m_2-1, m_3}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Así, para el caso de ${}^6\text{He}$, usando la base (3.5.) y los elementos de matriz de J^2 (3.11.)

obtenemos

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Diagonalizando obtenemos los autovalores y autofunciones asociados al operador \hat{J}^2 con un momento angular total bien definido y conocido.

Así, proyectando las autofunciones del hamiltoniano sobre las autofunciones del operador \hat{J}^2 tendremos un resultado diferente de cero solo si la autofunción del hamiltoniano tiene el mismo momento angular total que el asociado a la autofunción de \hat{J}^2 en la que estemos proyectando¹.

$$\langle \Psi(J_1) | \gamma(J_2) \rangle \neq 0 \rightarrow J_1 = J_2 \quad (3.13)$$

Podemos identificar entonces el momento angular de las funciones de onda que obtenemos tras diagonalizar el hamiltoniano. Del mismo modo si hubieran varios momentos angulares degenerados este método también serviría para identificar qué momento angular total participa en la función de onda.

3.2.2. Esquema de energía de ${}^6\text{He}$ y funciones de onda.

Los niveles de energía asociados al núcleo de ${}^6\text{He}$ vienen recogidos en la Figura 3.2. Se han comparado los resultados del programa utilizado con los expuestos en [[8].d] para los parámetros

$$\epsilon_{0p_{3/2}} = 0,0 \text{ MeV}, \quad \epsilon_{0p_{1/2}} = 6,0 \text{ MeV}, \quad A_1 = 1,0 \text{ MeV}. \quad (3.14)$$

Observamos que no existe gran diferencia de energía entre lo obtenido en el primer orden de teoría de perturbaciones (Figura 3.2.b) y diagonalización (Figura 3.2.c). Ahora estudiemos las funciones de onda que hemos obtenido, los cuales se denotan como $|J_i^{\text{Paridad}}\rangle$ siendo $i = 1, 2..$ en orden creciente de energía.

¹Es posible que incluso si tienen el mismo momento angular el resultado de proyectar la función de onda sobre la autofunción de \hat{J}^2 sea cero, sin embargo, no puede ser cero en todas las autofunciones que forman la base completa.

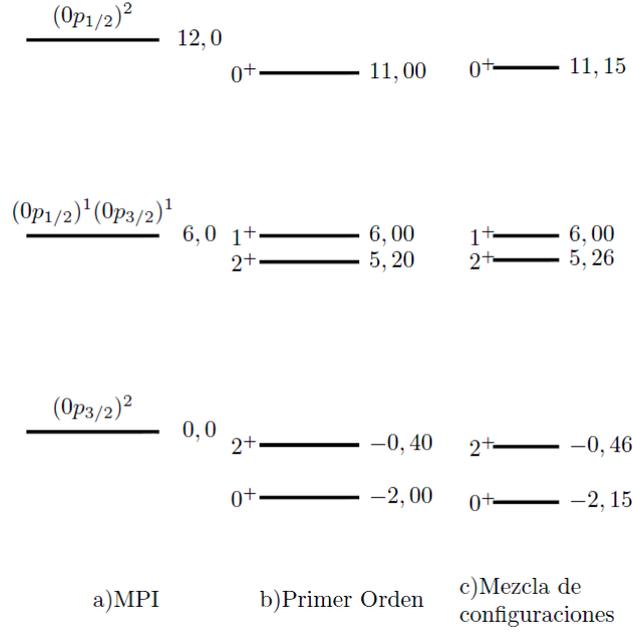


Figura 3.2: Esquema de Energías, en MeV, para ${}^6\text{He}$

En el primer orden, tenemos que

$$|0_2^+\rangle = |0p_{1/2,1/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_A \quad (3.15)$$

$$|1_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0p_{1/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A + |0p_{1/2,-1/2}; 0p_{3/2,1/2}\rangle_A) \quad (3.16)$$

$$|2_2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0p_{1/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A + |0p_{1/2,-1/2}; 0p_{3/2,1/2}\rangle_A) \quad (3.17)$$

$$|0_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_A + |0p_{3/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A) \quad (3.18)$$

$$|2_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_A + |0p_{3/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A) \quad (3.19)$$

Podemos observar que las funciones de onda se obtienen combinando los estados degenerados en energía de forma simétrica y antisimétrica. Los coeficientes asociados a los estados coinciden con los obtenidos por la tabla de Clebsch-Gordan.

Por otro lado, al incluir ordenes superiores, en la diagonalización.

$$|0_2^+\rangle = 0,994 |0p_{1/2,1/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_A - 0,076 |0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_A + 0,076 |0p_{3/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A \quad (3.20)$$

$$|1_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(- |0p_{1/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A + |0p_{1/2,-1/2}; 0p_{3/2,1/2}\rangle_A) \quad (3.21)$$

$$|2_2^+\rangle = 0,704 |0p_{1/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A + 0,704 |0p_{1/2,-1/2}; 0p_{3/2,1/2}\rangle_A + 0,070 |0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_A + 0,070 |0p_{3/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A \quad (3.22)$$

$$|0_1^+\rangle = -0,107 |0p_{1/2,1/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_A - 0,703 |0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_A + 0,703 |0p_{3/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A \quad (3.23)$$

$$|2_1^+\rangle = -0,704 |0p_{1/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A + -0,704 |0p_{1/2,-1/2}; 0p_{3/2,1/2}\rangle_A + 0,070 |0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_A + 0,070 |0p_{3/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A \quad (3.24)$$

Observamos que $J = 1$ no se modifica pues solo se puede obtener para la configuración $(0p_{3/2})^1(0p_{1/2})^1$, mientras que los momentos angulares $J = 0, 2$ presentan mezcla de configuraciones aunque no muy significativa.

3.2.3. Resolución acoplando a $M=1$.

Del mismo modo, podemos realizar el cálculo considerando la caja con $M=1$, en lugar de la de $M=0$.

Construyendo la nueva base,

$$|0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A; |0p_{3/2,3/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_A; |0p_{3/2,1/2}, 0p_{1/2,1/2}\rangle_A \quad (3.25)$$

Obtenemos que,

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} + A_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{5} & -\frac{\sqrt{6}}{5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{\sqrt{3}}{5} \\ -\frac{\sqrt{6}}{5} & -\frac{\sqrt{3}}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Para los parámetros previos, al diagonalizar e identificar los momentos angulares obtenemos.

$$E(2_2^+) = 5,26 \text{ MeV}, \quad E(2_1^+) = -0,46 \text{ MeV}, \quad E(1_1^+) = 6,00 \text{ MeV} \quad (3.27)$$

Podemos comprobar que son los mismos valores que obtuvimos anteriormente (Figura 3.2.), pero no aparecen los valores asociados a $J = 0$, pues al imponer que $M \neq 0$ estos estados no pueden aparecer.

Las funciones de ondas cuando existe el efecto de mezcla de configuraciones son,

$$|1_1^+\rangle = -0,866 |0p_{3/2,3/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_A + 0,500 |0p_{3/2,1/2}, 0p_{1/2,1/2}\rangle_A \quad (3.28)$$

$$|2_2^+\rangle = 0,100 |0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A - 0,498 |0p_{3/2,3/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_A \\ -0,862 |0p_{3/2,1/2}, 0p_{1/2,1/2}\rangle_A \quad (3.29)$$

$$|2_1^+\rangle = -0,100 |0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_A - 0,498 |0p_{3/2,3/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_A \\ -0,862 |0p_{3/2,1/2}, 0p_{1/2,1/2}\rangle_A \quad (3.30)$$

Ahora si aplicásemos el operador J_- sobre una de estas funciones de ondas recuperaríamos las funciones de ondas asociadas a $M=0$, a excepción de un factor proporcional.

3.3. Núcleo ^{18}O .

Utilizando el mismo método podemos analizar el ^{18}O , cuya configuración fundamental según MPI es

$$m_t = +1/2 : (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4 (0p_{1/2})^2 \\ m_t = -1/2 : (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4 (0p_{1/2})^2 \quad (0d_{5/2})^2 \quad (3.31)$$

Consideramos que el "core" está formado por $(1s_{1/2})^2 \quad (1p_{3/2})^4 \quad (1p_{1/2})^2$ y los nucleones afectados por la interacción estarán en los niveles $0d_{5/2}$, $0d_{3/2}$ y $1s_{1/2}$ neutrónicos, al igual que antes no consideraremos los niveles superiores a estos.

La realización del cálculo es exactamente igual que en el caso anterior, salvo que tenemos una base más amplia con lo cuál la matriz tiene un mayor tamaño. Hemos realizado los cálculos de estructura para el mismo conjunto de energías monoparticulares e interacción que en [[8].d]. Se han usado los parámetros:

$$\epsilon_{0d_{5/2}} = 0,00 \text{ MeV}, \quad \epsilon_{0d_{3/2}} = 5,08 \text{ MeV}, \quad \epsilon_{1s_{1/2}} = 0,87 \text{ MeV}, \quad A_1 = 0,50 \text{ MeV} \quad (3.32)$$

Analizando, las funciones de onda obtenidas en primer orden de teoría de perturbaciones,

$$|0_3^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0d_{3/2,3/2}; 0d_{3/2,-3/2}\rangle_A - |0d_{3/2,1/2}; 0d_{3/2,-1/2}\rangle_A) \quad (3.33)$$

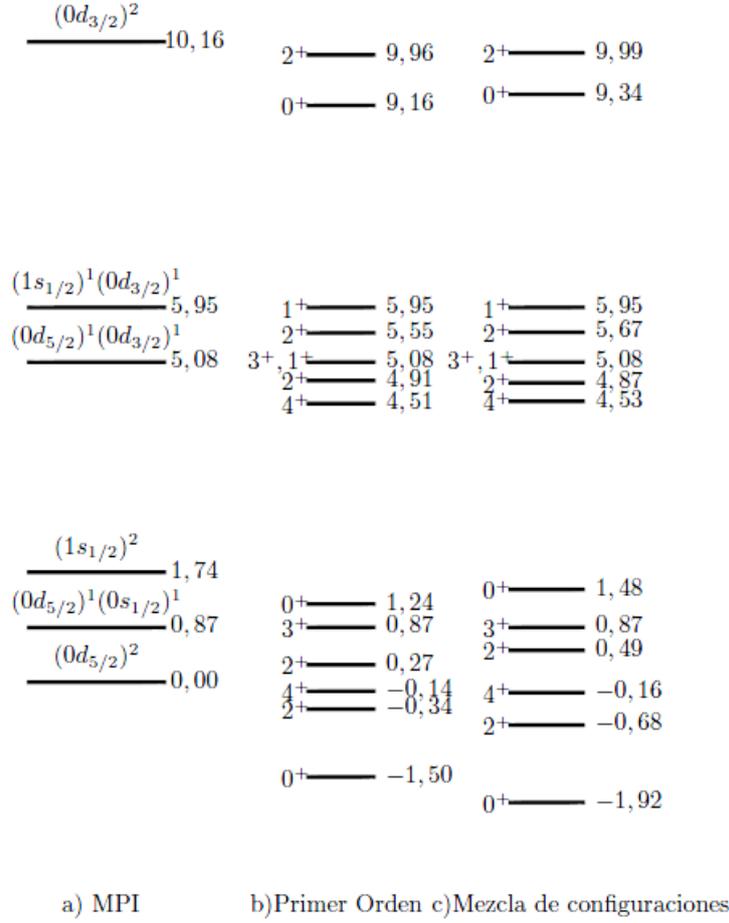


Figura 3.3: Esquema de Energía, en MeV, de ^{18}O

Por otro lado, en el caso de la diagonalización.

$$\begin{aligned}
|0_3^+\rangle = & 0,061 |0d_{5/2,5/2}; 0d_{5/2,-5/2}\rangle_A - 0,061 |0d_{5/2,3/2}; 0d_{5/2,-3/2}\rangle_A + \\
& + 0,061 |0d_{5/2,1/2}; 0d_{5/2,-1/2}\rangle_A - 0,701 |0d_{3/2,3/2}; 0d_{3/2,-3/2}\rangle_A + \\
& + 0,701 |0d_{3/2,1/2}; 0d_{3/2,-1/2}\rangle_A + 0,075 |1s_{1/2,1/2}; 1s_{1/2,-1/2}\rangle_A
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Observamos que existe participación de todos los estados disponibles que se acoplan al mismo momento angular total aunque los más relevantes son los que provienen de estados con energía similar a la energía final. En este caso, existe una pequeña probabilidad que el momento angular total de un nucleón sea $1/2$ o $5/2$ lo cual no se contempla en la función de onda (3.36.)

En principio, según el modelo de partículas independientes y el primer orden de teoría de perturbaciones las transiciones gamma entre el estado de mayor energía, 2_4^+ , y el nivel fundamental, 0_1^+ , estarían prohibidas pues habría que cambiar el estado de dos partículas, sin embargo, estas transiciones sí estarían permitidas cuando se da la mezcla de configura-

ciones [[8].e]. Observamos entonces un cambio significativo en las propiedades del núcleo al incluir ordenes superiores.

3.4. Huecos idénticos.

En el caso de existir una gran cantidad de nucleones en un mismo nivel de energía es conveniente tratar con huecos. La descripción por huecos es complementaria y excluyente de la descripción con nucleones. Algunas de las características ([[8].b], [15], [16]) que tienen los huecos son:

$$\text{Energía} \quad \epsilon_n = -\epsilon_h \quad (3.35)$$

$$\text{Carga} \quad q_n = -q_h \quad (3.36)$$

$$\text{Momento Angular} \quad j_n = j_h \quad (3.37)$$

$$\text{Proyección Momento Angular} \quad m_n = -m_h \quad (3.38)$$

Se puede escribir [[8].b] que,

$$\langle n_3 l_3 j_3 - m_3; n_4 l_4 j_4 - m_4 | \hat{V} | n_1 l_1 j_1 - m_1; n_2 l_2 j_2 - m_2 \rangle = \langle n_3 l_3 j_3 m_3; n_4 l_4 j_4, m_4 | \hat{V} | n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2 \rangle \quad (3.39)$$

No existen cambios en los elementos de matriz si trabajamos con dos huecos idénticos teniendo la misma base disponible y los mismos parámetros que en dos nucleones idénticos, la matriz V no cambiará. Sin embargo, la energía de los niveles monoparticulares será de signo contrario (3.35.).

Así, analizando el núcleo de ^{14}O la configuración protónica y neutrónica fundamental según el MPI,

$$m_t = +1/2 : \quad (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4 (0p_{1/2})^2 \quad (3.40)$$

$$m_t = -1/2 : \quad (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4 \quad (3.41)$$

Faltarían dos neutrones para completar la última subcapa. Lo tratamos como dos huecos neutrónicos que interaccionan entre sí y realizamos un tratamiento idéntico a la interacción entre dos partículas idénticas. Considerando que las energías de los niveles monoparticulares son idénticas a las recogidas en (3.14) , teniendo en cuenta (3.35) y considerando $A_1 = 0,5 \text{ MeV}$ [[8].b] , se obtiene la Figura 3.4.

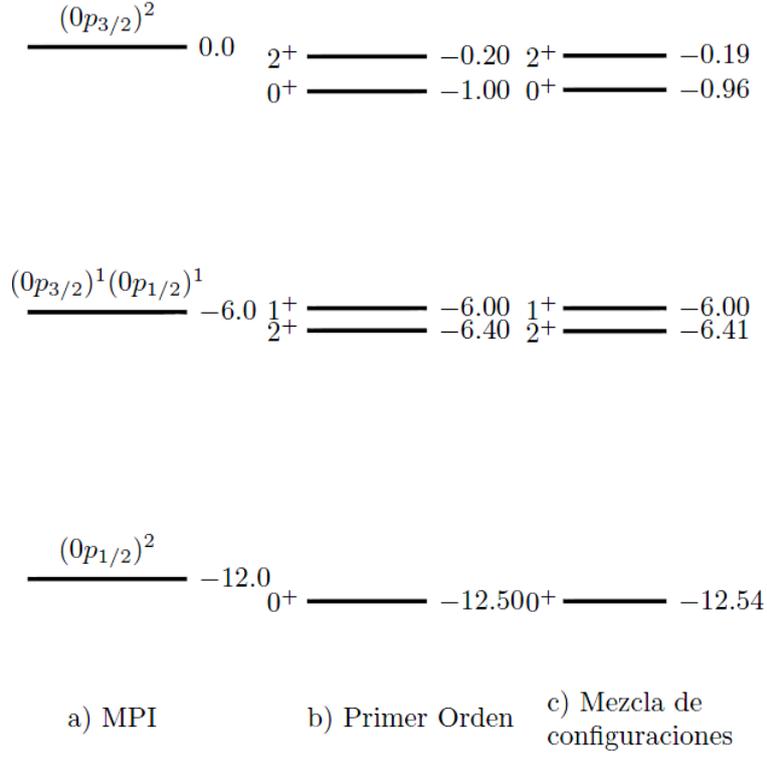


Figura 3.4: Esquema de Energía, en MeV, para ^{14}O

Por otro lado, en el caso de ^{38}Ca analizando sus configuración protónica y neutrónica fundamental según MPI,

$$\begin{aligned}
 m_t = +1/2 : & (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4(0p_{1/2})^2 \quad (0d_{5/2})^6(0d_{3/2})^4 \quad (1s_{1/2})^2 \\
 m_t = -1/2 : & (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4(0p_{1/2})^2 \quad (0d_{5/2})^6(0d_{3/2})^4
 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Tenemos la interacción de dos huecos neutrónicos, realizamos la resolución con los parámetros [[8].b]

$$\epsilon_{0d_{5/2}} = 0,0 \text{ MeV}, \quad \epsilon_{1s_{1/2}} = 1,5 \text{ MeV}, \quad \epsilon_{0d_{3/2}} = 4,0 \text{ MeV}, \quad A_1 = 0,9 \text{ MeV}. \quad (3.43)$$

Los niveles de energía de este núcleo se pueden ver en el Anexo B. La interpretación de estos niveles de energía y de las funciones de onda es idéntica a la anterior.

Capítulo 4

Partículas diferentes.

Ahora vamos a tratar con casos donde tengamos dos partículas diferentes en las capas externas, es decir, casos donde un protón interacciona con un neutrón o bien un hueco protónico con un hueco neutrónico.

4.1. Elemento de matriz del potencial: sistema de dos nucleones diferentes.

Dos nucleones diferentes pueden acoplarse a isoespín $T = 0$ y $T = 1$ con proyección $M_T = 0$ (2.21.). Si ambas partículas se acoplan a $T = 1$ la función de onda asociada al isoespín será simétrica, con lo cuál, para satisfacer el principio de Pauli, la función de onda restante debe ser antisimétrica. El estado del sistema vendrá dado por,

$$|n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle_A |T = 1, M_T = 0\rangle \quad (4.1)$$

con el determinante de Slater expresado en la notación de (3.1.).

Si se acoplan a $T = 0$, la parte de isoespín es una función antisimétrica con lo que es necesario que la función de onda restante sea simétrica para que la función de onda global sea antisimétrica. Nuestro estado será,

$$\begin{aligned} |\alpha_1; \alpha_2\rangle_S |T = 0, M_T = 0\rangle &= \hat{S} |n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle |T = 0, M_T = 0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle + |n_2 l_2 j_2 m_2, n_1 l_1 j_1 m_1\rangle) |T = 0; M_T = 0\rangle \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde el operador \hat{S} simetriza el estado sobre el que actúa y no actúa sobre la parte de isoespín.

Denotamos por α_i el conjunto de números cuánticos (n_i, l_i, j_i, m_i) e introducimos el operador \hat{D} para expresar el estado del sistema de dos nucleones diferentes como:

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \alpha_2\rangle_D &= \hat{D} |\alpha_1; \alpha_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha_1; \alpha_2\rangle_A |T = 1, M_T = 0\rangle + |\alpha_1; \alpha_2\rangle_S |T = 0, M_T = 0\rangle] = \\ &= \frac{1}{2} (|n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle |T = 1, M_T = 0\rangle - |n_2 l_2 j_2 m_2, n_1 l_1 j_1 m_1\rangle |T = 1, M_T = 0\rangle \\ &\quad + |n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2\rangle |T = 0, M_T = 0\rangle + |n_2 l_2 j_2 m_2, n_1 l_1 j_1 m_1\rangle |T = 0, M_T = 0\rangle) \end{aligned} \quad (4.3)$$

El elemento de matriz del potencial en la base (4.3.) viene dado por,

$$\begin{aligned} &{}_D \langle \alpha_3; \alpha_4 | \hat{V} | \alpha_1; \alpha_2 \rangle_D = \\ &= \frac{1}{2} (\langle \alpha_3; \alpha_4; T = 1, M_T = 0 | \hat{V} | \alpha_1; \alpha_2; T = 1, M_T = 0 \rangle - \\ &\quad - \langle \alpha_3; \alpha_4; T = 1, M_T = 0 | \hat{V} | \alpha_2; \alpha_1; T = 1, M_T = 0 \rangle + \\ &\quad + \langle \alpha_3; \alpha_4; T = 0, M_T = 0 | \hat{V} | \alpha_1; \alpha_2; T = 0, M_T = 0 \rangle + \\ &\quad + \langle \alpha_3; \alpha_4; T = 0, M_T = 0 | \hat{V} | \alpha_2; \alpha_1; T = 0, M_T = 0 \rangle) \end{aligned} \quad (4.4)$$

El valor de estos elementos de matriz para la interacción residual introducida en el Capítulo 2, V_{SDI} y se evalúa con la ecuación (2.30.).

4.2. Núcleo ${}^6\text{Li}$

Analicemos el caso concreto del ${}^6\text{Li}$. La configuración protónica y la neutrónica de ${}^6\text{Li}$ en su estado fundamental según el MPI es,

$$m_t = +1/2 : \quad (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^1 \quad (4.5)$$

$$m_t = -1/2 : \quad (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^1 \quad (4.6)$$

Si despreciamos el efecto del potencial de Coulomb, los niveles de energía monoparticulares asociados a protones y neutrones están degenerados. Al igual que en el caso descrito en el apartado 3.2 consideraremos que el "core" está formado por el nivel energético $0s_{1/2}$. Nuestro espacio de trabajo serán las subcapas incompletas $0p_{1/2}$ y $0p_{3/2}$. Según el modelo de partículas independientes tendremos un nivel fundamental y dos niveles excitados (Figura 4.1.).

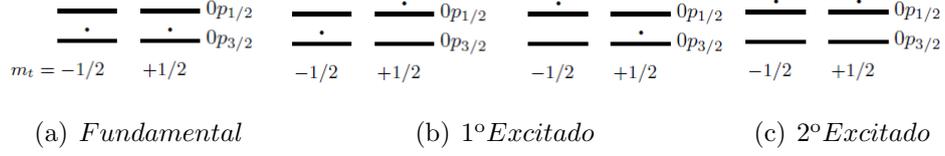


Figura 4.1: Ocupación de los niveles 0p en algunos estados del ${}^6\text{Li}$

En primer lugar, construiremos la base a partir de la cuál obtendremos las matrices H_0 y V . El espacio de trabajo tiene las mismas subcapas consideradas para el ${}^6\text{He}$ en (3.2) pero en el ${}^6\text{Li}$, al ser los nucleones fuera del "core" de distinto tipo, el tamaño de la base es mayor. Los estados correspondientes a $M = 0$ son:

$$\begin{aligned}
&|0p_{1/2,1/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_D; |0p_{1/2,-1/2}; 0p_{1/2,1/2}\rangle_D; |0p_{1/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_D; |0p_{1/2,-1/2}; 0p_{3/2,1/2}\rangle_D; \\
&|0p_{3/2,1/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_D; |0p_{3/2,-1/2}; 0p_{1/2,1/2}\rangle_D; |0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_D; |0p_{3/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_D; \\
&|0p_{3/2,-1/2}; 0p_{3/2,1/2}\rangle_D; |0p_{3/2,-3/2}; 0p_{3/2,3/2}\rangle_D
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Contamos con diez estados básicos con $M = 0$, frente a los cinco disponibles para el ${}^6\text{He}$. La diferencia del tamaño de la base es una manifestación del principio de Pauli. Los estados de la base (4.3.) no tienen momento angular total bien definido ni tampoco isoespín bien definido.

4.2.1. Momento angular total.

Los nucleones del "core" están en subcapas llenas por lo que se acoplan a momento angular cero. El momento angular total vendrá, entonces, determinado por los dos nucleones de valencia. En el caso del ${}^6\text{Li}$ estos dos nucleones son de distinto tipo, por lo que, no hay restricciones adicionales debidas al principio de Pauli respecto a los valores permitidos al momento angular total. Por tanto, el número cuántico J podrá tomar valores de $|j_1 - j_2|$ a $j_1 + j_2$ de unidad en unidad si j_1 y j_2 son los números cuánticos asociados al momento angular total de los dos nucleones de valencia.

Construimos la matriz del hamiltoniano teniendo en cuenta los elementos de matriz (4.4) de la interacción residual (2.14) en la base (4.3) y diagonalizamos. Las funciones de onda obtenidas tendrán buen momento angular total. Para identificarlo usaremos un método análogo al descrito en 3.2.1 por su facilidad de programación. Construimos la matriz \hat{J}^2 en la base (4.3), diagonalizamos y proyectamos los autoestados del hamiltoniano

sobre los autoestados de \hat{J}^2 para identificar el momento angular total de las funciones de hamiltoniano. Como \hat{J}^2 no depende del isoespín los elementos de matriz serán,

$$\begin{aligned}
{}_D\langle\alpha_3; \alpha_4 | \hat{J}^2 ket \alpha_1; \alpha_2 \rangle_D &= \frac{1}{2} [{}_A\langle\alpha_3; \alpha_4 | \hat{J}^2 | \alpha_1; \alpha_2 \rangle_A + {}_S\langle\alpha_3; \alpha_4 | \hat{J}^2 | \alpha_1; \alpha_2 \rangle_S] = \langle\alpha_3; \alpha_4 | \hat{J}^2 | \alpha_1; \alpha_2 \rangle = \\
&= \delta_{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2} ((2m_1 m_2 + j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1)) \delta_{m_1, m_3} \delta_{m_2, m_4} + \\
&+ \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 + 1)} \sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 - 1)} \delta_{m_3, m_1+1} \delta_{m_4, m_2-1} + \\
&+ \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 - 1)} \sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 + 1)} \delta_{m_3, m_1-1} \delta_{m_4, m_2+1}) \quad (4.8)
\end{aligned}$$

y se han obtenido haciendo uso de la ecuación (3.10.)

4.2.2. Esquema de energías de ${}^6\text{Li}$.

Obtendremos las energías del ${}^6\text{Li}$ con los mismos parámetros que [[8].d]. Las energías monoparticulares serán las ya usadas (3.14.) para ${}^6\text{He}$. No tendremos en cuenta efectos coulombianos adicionales. Los parámetros A_T de la interacción residual (2.29) son $A_1 = 0,5$ MeV y $A_0 = 2,4$ MeV.

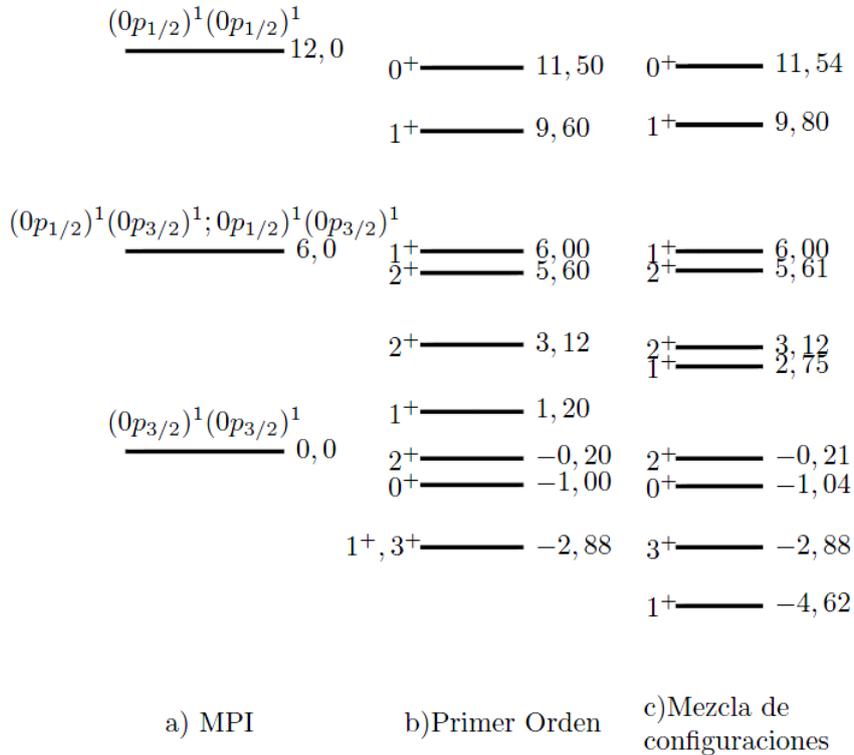


Figura 4.2: Esquema de Energía, en MeV, de ${}^6\text{Li}$

En la figura 4.2 podemos observar a la izquierda niveles de energía en el modelo de partículas independientes, en el centro los obtenidos en primer orden de teoría perturbaciones y, a la derecha, los obtenidos por diagonalización en el espacio de valencia. Observando los estados fundamentales de ^{18}O , Figura 3.3., y ^6He , Figura 3.2., observamos que el momento angular total asociado a tal estado es $J = 0$, sin embargo, en el caso del ^6Li el estado fundamental tiene asociado un momento angular total $J = 1$, aún cuando el estado $J = 0$ son posibles. El momento angular total del estado fundamental de los núcleos con Z y N par conocido experimentalmente es $J = 0$. En el caso de los núcleos Z y N impar, J puede tomar diversos valores.

Analizando las funciones de onda en primer orden de teoría de perturbaciones,

$$|1_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_D + |0p_{3/2,-3/2}; 0p_{3/2,3/2}\rangle_D) = |0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_S |T = 0; M_T = 0\rangle \quad (4.9)$$

Apreciamos que aunque partimos de estados donde el isoespín está degenerado al añadir el efecto de la interacción obtenemos estados con isoespín total bien definido. En el caso de la diagonalización,

$$\begin{aligned} |1_1^+\rangle = & -0,067 |0p_{1/2,1/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_D - \\ & -0,067 |0p_{1/2,-1/2}; 0p_{1/2,1/2}\rangle_D + 0,230 |0p_{1/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_D - \\ & -0,230 |0p_{1/2,-1/2}; 0p_{3/2,1/2}\rangle_D - 0,230 |0p_{3/2,1/2}; 0p_{1/2,-1/2}\rangle_D + \\ & +0,230 |0p_{3/2,-1/2}; 0p_{1/2,1/2}\rangle_D + 0,592 |0p_{3/2,3/2}; 0p_{3/2,-3/2}\rangle_D - \\ & -0,197 |0p_{3/2,1/2}; 0p_{3/2,-1/2}\rangle_D - 0,197 |0p_{3/2,-1/2}; 0p_{3/2,1/2}\rangle_D + \\ & +0,592 |0p_{3/2,-3/2}; 0p_{3/2,3/2}\rangle_D \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2.3. Resolución usando Esquema J.

Otro modo de abordar este problema sería utilizar el esquema J, es decir, organizar la matriz del hamiltoniano usando, además de M , el momento angular total¹.

En este caso trabajamos en la base acoplada, de forma que los estados básicos vienen dados por

$$\begin{aligned} |\bar{\alpha}_1; \bar{\alpha}_2\rangle_D = \hat{D} |\alpha_1; \bar{\alpha}_2; J0\rangle = \hat{D} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J0\rangle |\bar{\alpha}_1, m_1; \bar{\alpha}_2, m_2\rangle = \\ = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J0\rangle \hat{D} |\alpha_1; \alpha_2\rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

¹Consideramos que la proyección del momento angular total es cero para no perder información.

donde \hat{D} es el operador descrito en (4.3)

Los elementos de matriz de la interacción residual se obtienen como:

$${}_D\langle\bar{\alpha}_3; \bar{\alpha}_4; J' | \hat{V} | \bar{\alpha}_1; \bar{\alpha}_2; J \rangle_D = \sum_{m_1, m_3} \langle j_3 m_3; j_4 - m_3 | J' 0 \rangle \langle j_1 m_1; j_2 - m_1 | J 0 \rangle \\ {}_D\langle\bar{\alpha}_3 m_3; \bar{\alpha}_4 - m_3 | \hat{V} | \bar{\alpha}_1 m_1; \bar{\alpha}_2 - m_1 \rangle_D \delta_{J, J'} \quad (4.12)$$

y se evalúan haciendo uso de (4.4.) Construimos la siguiente base, donde tendremos estados con momento angular total bien definido,

$$\begin{aligned} &|0p_{3/2}; 0p_{3/2}, 0^+\rangle_D, |0p_{3/2}; 0p_{3/2}, 1^+\rangle_D; |0p_{3/2}; 0p_{3/2}, 2^+\rangle_D; \\ &|0p_{3/2}; 0p_{3/2}, 3^+\rangle_D; |0p_{3/2}; 0p_{1/2}, 1^+\rangle_D; |0p_{3/2}; 0p_{1/2}, 2^+\rangle_D; \\ &|0p_{1/2}; 0p_{1/2}, 0^+\rangle_D; |0p_{1/2}; 0p_{1/2}, 1^+\rangle_D, |0p_{1/2}; 0p_{3/2}, 1^+\rangle_D; \\ &|0p_{1/2}; 0p_{3/2}, 2^+\rangle_D \end{aligned} \quad (4.13)$$

Usando la base (4.13.) podemos construir las matrices H_0 y V . Para ello, tomamos $A_0 = A_1 = 1,0$ MeV [[8].d] y las mismas energías monparticulares que en ${}^6\text{He}$ (3.14)²

La matriz completa es diagonal por cajas, por lo tanto, basta con diagonalizar las submatrices asociadas a un valor de momento angular concreto y $M = 0$ sin perder información. Obtenemos para $J = 1$, con los elementos de matriz en MeV,

$$H = H_0 + V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12,0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,20 & 0,89 & -0,89 & 0,63 \\ 0,89 & -1,00 & 1,00 & 0 \\ -0,89 & 1,00 & -1,00 & 0 \\ 0,63 & 0 & 0 & -1,00 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Al diagonalizar obtenemos,

$$E(1_4^+) = 11,03 \text{ MeV}; \quad E(1_3^+) = 6,00 \text{ MeV}; \quad E(1_2^+) = 4,29 \text{ MeV}; \quad E(1_1^+) = -1,52 \text{ MeV} \quad (4.15)$$

²Estos parámetros difieren de los usados en la sección 4.2.2. para poder comparar los resultados del programa con los aparecidos en [[8].d]. Sin embargo, también se ha resuelto el problema en el esquema M con estos nuevos parámetros y comprobado que los niveles coinciden.

Las funciones de ondas obtenidas,

$$\begin{aligned}
|1_4^+\rangle &= 0,053 |0p_{3/2}; 0p_{3/2}, 1^+\rangle_D + 0,007 |0p_{3/2}; 0p_{1/2}, 1^+\rangle_D - \\
&\quad - 0,007 |0p_{1/2}; 0p_{3/2}, 1^+\rangle_D + 0,999 |0p_{1/2}; 0p_{1/2}, 1^+\rangle_D \\
|1_3^+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|0p_{3/2}; 0p_{1/2}, 1^+\rangle_D + |0p_{1/2}; 0p_{3/2}, 1^+\rangle_D) \\
|1_2^+\rangle &= -0,222 |0p_{3/2}; 0p_{3/2}, 1^+\rangle_D - 0,689 |0p_{3/2}; 0p_{1/2}, 1^+\rangle_D + \\
&\quad + 0,689 |0p_{1/2}; 0p_{3/2}, 1^+\rangle_D + 0,021 |0p_{1/2}; 0p_{1/2}, 1^+\rangle_D \\
|1_1^+\rangle &= -0,974 |0p_{3/2}; 0p_{3/2}, 1^+\rangle_D + 0,158 |0p_{3/2}; 0p_{1/2}, 1^+\rangle_D - 0,158 |0p_{1/2}; 0p_{3/2}, 1^+\rangle_D \\
&\quad + 0,049 |0p_{1/2}; 0p_{1/2}, 1^+\rangle_D \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Al igual que antes, apreciamos que los estados con energía similar a la energía final son los más probable y las demás contribuciones tienen una probabilidad cercana a cero.

En el caso de $J = 2$, la submatriz es de diferente tamaño y viene dada por,

$$H = H_0 + V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,40 & -0,40 & 0,40 \\ -0,40 & -1,00 & -0,20 \\ -0,40 & -0,20 & -1,00 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

cuando sus elementos de matriz se dan en MeV, al diagonalizarlo obtenemos,

$$E(2_3^+) = 5,26 \text{ MeV}; \quad E(2_2^+) = 4,80 \text{ MeV}; \quad E(2_1^+) = -0,46 \text{ MeV} \quad (4.18)$$

En el caso de $J = 0$, siguiendo el mismo procedimiento,

$$E(0_2^+) = 11,15 \text{ MeV}; \quad E(0_1^+) = -2,15 \text{ MeV} \quad (4.19)$$

Y, por último, para $J = 3$

$$E(3_1^+) = -1,20 \text{ MeV} \quad (4.20)$$

En este ultimo caso no fue necesario diagonalizar la matriz pues ya era diagonal. Los resultados reproducen los expuestos en [[8].d]. Hemos presentado dos métodos de trabajo, esquema M y esquema J, para obtener las autofunciones y autovalores del hamiltoniano. Ambos métodos se usan en la actualidad y sus resultados son equivalentes.

4.3. Núcleo ^{18}F

También podemos analizar el caso del ^{18}F , su configuración protónica y neutrónica fundamental según MPI es,

$$\begin{aligned} m_t = +1/2 : & (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4(0p_{1/2})^2 \quad (0d_{5/2})^1 \\ m_t = -1/2 : & (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4(0p_{1/2})^2 \quad (0d_{5/2})^1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Consideramos que el "core" es idéntico al descrito para el caso de ^{18}O , sin embargo, en este caso tenemos dos partículas diferentes fuera del "core" al igual que en el ^6He , por lo tanto, no aplicamos el principio de Pauli. Los nucleones que participan en la interacción son un neutrón que se puede encontrar en los niveles $0d_{5/2}$, $0d_{3/2}$ o $1s_{1/2}$ y un protón que se encuentre en los niveles $0d_{5/2}$, $0d_{3/2}$ o $1s_{1/2}$. Usando los niveles monoparticulares (3.32) expuestos para ^{18}O y la parametrización $A_1 = 0,9$ MeV y $A_0 = 0,5$ MeV [[8].d] podemos obtener el esquema de energía de este núcleo. Los resultados se recogen en el Anexo A y se han comparado con los dados en [[8].d].

En estos resultados hemos considerado que el término de Coulomb no afecta a los resultados, por lo tanto, los niveles monoparticulares asociados a protones y neutrones están degenerados en energía. Sin embargo, al incluirse el término coulombiano estos niveles no estarían degenerados.

El efecto del potencial de Coulomb es responsable de una dilatación de las funciones radiales monoparticulares protónicas respecto a las neutrónicas. Una discusión sobre como ello afecta a la mezcla de isospines puede encontrarse en [[6].a], con la conclusión que dicha mezcla es en general pequeña, especialmente en núcleos ligeros. Esto nos permite, especialmente en esos núcleos ligeros, etiquetar los niveles energéticos con un isospin total si bien nosotros no lo incluimos en nuestros esquemas de energías.

4.4. Huecos diferentes.

En el caso de tratar con subcapas que están próximas a ser subcapas completas volvemos a recurrir a la descripción con huecos realizada en el apartado 3.4. En este caso, estamos considerando que ambos huecos no son idénticos (ausencia de un protón y de un neutrón) seguimos el mismo procedimiento que el descrito en ese capítulo.

Un núcleo de este tipo es el ^{14}N , cuya configuración fundamental según MPI será,

$$m_t = +1/2 : \quad (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^5 \quad (4.22)$$

$$m_t = -1/2 : \quad (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^5 \quad (4.23)$$

Tenemos la interacción entre un hueco protónico y un hueco neutrónico. Hacemos las mismas consideraciones de "core" y de espacio de valencia que para ^6Li . Usando la parametrización, $A_0 = 2,4 \text{ MeV}$ y $A_1 = 0,5 \text{ MeV}$ [[8].b], conociendo que los niveles involucrados son los $0p$ (3.14.) y que debemos usar las relaciones entre huecos y partículas en (3.35.) obtenemos el esquema de energía del Anexo C.

Por último, en el caso del ^{38}K , tenemos una configuración fundamental según el MPI,

$$\begin{aligned} m_t = +1/2 : & \quad (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4(0p_{1/2})^2 \quad (0d_{5/2})^6(0d_{3/2})^4(1s_{1/2})^1 \\ m_t = -1/2 : & \quad (0s_{1/2})^2 \quad (0p_{3/2})^4(0p_{1/2})^2 \quad (0d_{5/2})^6(0d_{3/2})^4(1s_{1/2})^1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Usando la parametrización $A_0 = A_1 = 0,9 \text{ MeV}$ [[8].b] y los mismos niveles monoparticulares de energía descritos en (3.43) obtenemos el esquema de ^{38}K recogido en el Anexo D.

Las funciones de onda y los niveles de energía tienen un comportamiento similar a los casos comentados anteriormente.

Capítulo 5

Interacciones no separables.

Ahora vamos a tratar potenciales de contactos para obtener los niveles de energía nucleares: potencial del tipo gaussiano y potencial delta de Dirac. Estas interacciones no cambiarán momento angular ni la paridad. Se tratan de interacciones no separables donde no podemos tratar independientemente las coordenadas asociadas a cada nucleón. Se cumplen las mismas consideraciones de isoespín que en el apartado 2.2.

5.1. Potencial de tipo gaussiano.

Consideremos que las partículas interactúan entre sí por medio de una interacción que decae según las partículas se alejan como

$$\hat{V} = V_0 e^{-\alpha \frac{(r_1 - r_2)^2}{\mu^2}} \quad (5.1)$$

Al evaluar el elemento de matriz debemos tener en cuenta que,

$$\begin{aligned} & \langle n_3 l_3 j_3 m_3; n_4 l_4 j_4 m_4 | \hat{V} | n_1 l_1 j_1 m_1, n_2 l_2 j_2 m_2 \rangle = \\ & = \sum_{m_{s1}, m_{s2}} \langle l_1, m_1 - m_{s1}; 1/2, m_{s1} | j_1, m_1 \rangle \langle l_2, m_2 - m_{s2}; 1/2, m_{s2} | j_2, m_2 \rangle \\ & \quad \langle l_3, m_3 - m_{s1}; 1/2, m_{s1} | j_3, m_3 \rangle \langle l_4, m_4 - m_{s2}; 1/2, m_{s2} | j_4, m_4 \rangle \\ & V_0 \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 r_1^2 r_2^2 \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) e^{-\alpha \frac{(r_1 - r_2)^2}{\mu^2}} \\ & f_{n_3, l_3, j_3}^*(r_1) f_{n_4, l_4, j_4}^*(r_2) f_{n_1, l_1, j_1}(r_1) f_{n_2, l_2, j_2}(r_2) Y_{l_3, m_3}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{l_4, m_4}^*(\theta_2, \phi_2) Y_{l_1, m_1}(\theta_1, \phi_1) Y_{l_2, m_2}(\theta_2, \phi_2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Con el fin de simplificar la expresión, escribimos la gaussiana como desarrollo en serie en base a los armónicos esféricos[17] y usamos una solución particular del teorema de

Wigner-Eckhart[14]

$$e^{-\alpha \frac{r_1^2 + r_2^2}{\mu^2}} j_l\left(\frac{2\alpha i r_1 r_2}{\mu^2}\right) Y_{l,m}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{l,m}(\theta_2, \phi_2) \quad (5.3)$$

donde j_l es la función esférica de Bessel.

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Y_{l_f, m_f}^*(\theta, \phi) Y_{l, m}(\theta, \phi) Y_{l_i, m_i}(\theta, \phi) = \\ & = \langle l_i, m_i; l, m | l_f, m_f \rangle \langle l_i, 0; l, 0 | l_f, 0 \rangle \sqrt{\frac{(2l_i + 1)(2l + 1)}{4\pi(2l_f + 1)}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Lo anterior permite escribir el elemento de matriz en la base $|\alpha_1; \alpha_2\rangle$ como

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_3, \alpha_4 | \hat{V} | \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle n_3 l_3 j_3 m_3; n_4 l_4 j_4 m_4 | V | n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2 \rangle = \\ & = \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}, l} \langle l_1, m_1 - m_{s_1}; 1/2, m_{s_1} | j_1, m_1 \rangle \langle l_2, m_2 - m_{s_2}; 1/2, m_{s_2} | j_2, m_2 \rangle \\ & \quad \langle l_3, m_3 - m_{s_1}; 1/2, m_{s_1} | j_3, m_3 \rangle \langle l_4, m_4 - m_{s_2}; 1/2, m_{s_2} | j_4, m_4 \rangle \\ & \quad \langle l_3, m_3 - m_{s_1}; l, m_1 - m_3 | l_1, m_1 - m_{s_1} \rangle \langle l_3, 0; l, 0 | l_1, 0 \rangle \\ & \quad \langle l_2, m_2 - m_{s_2}; l, m_1 - m_3 | l_4, m_4 - m_{s_2} \rangle \langle l_2, 0; l, 0 | l_4, 0 \rangle V_0 i^{-l} \\ & \quad \sqrt{\frac{(2l_3 + 1)(2l_2 + 1)}{(2l_1 + 1)(2l_4 + 1)}} (2l + 1) \int_0^\infty dr_1 r_1^2 e^{-\alpha \frac{r_1^2}{\mu^2}} \int_0^\infty dr_2 r_2^2 e^{-\alpha \frac{r_2^2}{\mu^2}} j_l\left(\frac{2i\alpha r_1 r_2}{\mu^2}\right) \\ & \quad f_{n_3, l_3, j_3}^*(r_1) f_{n_4, l_4, j_4}^*(r_2) f_{n_1, l_1, j_1}(r_1) f_{n_2, l_2, j_2}(r_2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Vemos que la dependencia con la función esférica de Bessel impide reescribir la doble integral como un producto de integrales, por eso se dice que la interacción no es separable. En este caso estudiaremos el núcleo de $^{18}\text{O}^1$, usaremos las funciones de onda y los niveles monopatóculares recogidos en el Cuadro 1.1.

El método de trabajo es igual que en los apartados anteriores, como es habitual en esta exposición trabajaremos en Esquema M considerando $M=0$. Usamos la base (3.1.) para construir las matrices, diagonalizamos y obtenemos los autovalores y autofunciones asociados al hamiltoniano.

En este caso, vamos a estudiar la dependencia de la diferencia de energía entre niveles con el radio efectivo del potencial que estamos estudiando. Para ello, vamos a variar el valor del parámetro α incluido en la expresión (5.1.).

Los resultados se encuentran recogidos en el Cuadro 5.1. Observamos que los niveles de menor energía son los asociados a $J = 0$ (como ^6He y ^{18}O). Podemos observar como el

¹En este caso, el único isoespín posible es 1

valor de $\frac{E(4_1^+ - E(2_1^+))}{E(4_1^+) - E(0_1^+)}$ pasa de un 23 % a un 40 % al aumentar el alcance de la interacción haciendo disminuir α de 2 a 0,5. No solo obtenemos un cambio de escala de los estados, también cambia la separación relativa entre ellos. También se observa un cambio de orden entre el 1_1^+ y el 4_2^+ .

5.2. Potencial tipo Delta de Dirac.

Consideramos que las partículas interaccionan entre sí solo cuando están en el mismo punto:

$$\hat{V} = V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (5.6)$$

Desarrollando la delta de Dirac usando productos de los armónicos esféricos; cada uno dependiente de las coordenadas de una partícula, como base [17].

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1^2} \sum_{l,m} Y_{l,m}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{l,m}(\theta_2, \phi_2) \quad (5.7)$$

Usando este desarrollo y la integral de tres armónicos esféricos dada en (5.3) podemos evaluar el elemento de matriz en la base $|\alpha_1; \alpha_2\rangle$

$$\begin{aligned} & \langle n_3 l_3 j_3 m_3; n_4 l_4 j_4 m_4 | \hat{V} | n_1 l_1 j_1 m_1; n_2 l_2 j_2 m_2 \rangle = \\ & = \sum_{m_{s1}, m_{s2}, l} \langle l_1, m_1 - m_{s1}; 1/2, m_{s1} | j_1, m_1 \rangle \langle l_2, m_2 - m_{s2}; 1/2, m_{s2} | j_2, m_2 \rangle \\ & \quad \langle l_3, m_3 - m_{s1}; 1/2, m_{s1} | j_3, m_3 \rangle \langle l_4, m_4 - m_{s2}; 1/2, m_{s2} | j_4, m_4 \rangle \\ & \quad \langle l_3, m_3 - m_{s1}; l, m_1 - m_3 | l_1, m_1 - m_{s1} \rangle \langle l_3, 0; l, 0 | l_1, 0 \rangle \\ & \quad \langle l_2, m_2 - m_{s2}; l, m_1 - m_3 | l_4, m_4 - m_{s2} \rangle \langle l_2, 0; l, 0 | l_4, 0 \rangle \frac{V_0}{4\pi} \\ & \quad \sqrt{\frac{(2l_3 + 1)(2l_2 + 1)}{(2l_1 + 1)(2l_4 + 1)}} (2l + 1) \int_0^\infty dr_1 r_1^2 f_{n_3, l_3, j_3}^*(r_1) f_{n_4, l_4, j_4}^*(r_1) f_{n_1, l_1, j_1}(r_1) f_{n_2, l_2, j_2}(r_1) \end{aligned} \quad (5.8)$$

La delta de Dirac es responsable de que la doble integral radial se transforme en una sólo integral. Para el ^{18}O , los resultados se recogen en el cuadro 5.1. Observamos que los niveles de energía se encuentran próximos entre sí, habiendo un "gap" mayor asociado a los niveles con $J = 0$ sería un caso extremo de un potencial de tipo gaussiano donde μ tendería a cero ó α tendería a infinito.

Una interacción de este tipo en configuraciones $(nlj)^2$ separa el nivel $J = 0$ de los siguientes $J = 2, 4, \dots, 2j - 1$ y suele utilizarse para comentar los efectos de apareamiento que son responsables de que los estados fundamentales de núcleos con N y Z par tengan $J = 0$.

Energía Inicial (MPI)		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 1$		$\alpha = 2$		Delta de Dirac	
$(0d_{3/2})^2$	13,274	2 ⁺	10,539	2 ⁺	12,361	2 ⁺	12,969	2 ⁺	13,233
		0 ⁺	7,834	0 ⁺	10,796	0 ⁺	12,227	0 ⁺	13,071
$(1s_{1/2})^1(0d_{3/2})^1$	8,844	1 ⁺	5,810	1 ⁺	7,901	1 ⁺	8,598	1 ⁺	8,844
		2 ⁺	5,190	2 ⁺	7,512	2 ⁺	8,386	2 ⁺	8,787
$(0d_{5/2})^1(0d_{3/2})^1$	6,637	3 ⁺	3,437	3 ⁺	5,740	3 ⁺	6,425	3 ⁺	6,637
		2 ⁺	1,988	2 ⁺	4,877	2 ⁺	6,065	1 ⁺	6,637
		4 ⁺	1,495	1 ⁺	4,570	1 ⁺	6,048	2 ⁺	6,590
		1 ⁺	0,951	4 ⁺	4,458	4 ⁺	5,755	4 ⁺	6,479
$(1s_{1/2})^2$	4,414	0 ⁺	-0,381	0 ⁺	2,207	0 ⁺	3,374	0 ⁺	4,150
$(0d_{5/2})^1(1s_{1/2})^1$	2,207	3 ⁺	-1,934	3 ⁺	0,874	3 ⁺	1,855	3 ⁺	2,207
		2 ⁺	-3,187	2 ⁺	0,190	2 ⁺	1,485	2 ⁺	2,102
$(0d_{5/2})^2$	0,000	4 ⁺	-5,077	4 ⁺	-1,747	4 ⁺	-0,543	4 ⁺	-0,055
		2 ⁺	-7,197	2 ⁺	-2,899	2 ⁺	-1,023	2 ⁺	-0,133
		0 ⁺	-10,412	0 ⁺	-5,545	0 ⁺	-2,607	0 ⁺	-0,579

Cuadro 5.1: Momentos y energías (MeV) del ^{18}O para un potencial de tipo gaussiano ($V_0 = -70$ MeV, $\mu = 1,5$ fm)[[8].f] y potencial delta de Dirac($V_0 = -70$ MeV).

Conclusiones

En esta memoria hemos introducido las herramientas que permiten resolver numéricamente el modelo de partículas independientes para el caso de potenciales de campo medio fenomenológicos. Dichos potenciales, al incluir el término espín-órbita, permiten reproducir los números mágicos nucleares.

Más adelante, considerando la interacción delta de superficie entre partículas y aplicando el modelo de capas para varios núcleos se ha podido observar el fenómeno de mezcla de configuraciones observando que en la función de onda participan en mayor o menor medida todas las combinaciones posibles de los estados con el mismo momento angular total y proyección M . La existencia de dicha mezcla de configuraciones es la responsable de que se puedan observar efectos que estarían prohibidos en primer orden. Por ejemplo, ciertas transiciones electromagnéticas.

En los casos estudiados en esta exposición hemos visto las diferencias cualitativas y cuantitativas de trabajar con dos nucleones idénticos o con dos nucleones diferentes. Entre las diferencias apreciadas está la menor cantidad de estados disponibles a la hora de abordar el problema en el caso de partículas idénticas como consecuencia de Pauli.

Otro aspecto a tener en cuenta es la posibilidad de describir el núcleo por medio de huecos en lugar de nucleones, se observan que las propiedades de ambos son muy parecidas y en ocasiones resulta más conveniente el uso de huecos en el caso de tener subcapas cercanas a completarse.

Por último, al utilizar potenciales de contacto hemos visto que el radio de la interacción influye en la diferencia de niveles de energía y en la degeneración de estos. Observamos que un potencial que solo actúa cuando ambas partículas estén en el mismo punto permite comentar los efectos de apareamiento del núcleo, en el caso de aumentar el alcance del potencial provoca una mayor diferenciación de energía entre niveles.

En esta memoria se han considerado casos con dos nucleones o dos huecos de valencia,

fuera del "core", y se ha limitado el espacio de estados básicos en los que considerar el efecto de la interacción residual. Si bien en general el modelo de capas incluye cualquier número de nucleones de valencia en un espacio de trabajo limitado por las capacidades de los ordenadores actuales, los conceptos introducidos de esquema M y esquema J, forma de antisimetrizar las funciones de onda, elementos de matriz de la interacción residual etc... siguen siendo de utilidad en núcleos con tratamiento más complejo.

Bibliografía

- [1] Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics, K. Heyde, Second Edition (1999) Editor: IoP. ISBN: 0 7503 0534 7. [a]Chapter 7.[b]Chapter 8.[c] Chapter 9; subsection 9.1. [d]Chapter 9; subsection 9.6. [e] Chapter 9; subsection 9.5. [f]Chapter 9; subsection 9.4.
- [2] Mass differences and neutron pairing in Ca, Sn and Pb isotopes. B. S. Ishkhanov, S.V. Sidorov. CPC(HEP and NP), 2009, 33 (X): 1-7.
- [3] Angular Momentum. B. Zwiebach. December 16, 2013.https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-05-quantum-physics-ii-fall-2013/lecture-notes/MIT8_05F13_Chap_09.pdf Última visita: 25-06-2017.
- [4] Introduction to Quantum Mechanics. David J. Griffiths, First Edition (1995) Editor: Prentice Hall. ISBN:0-13-124405-1. [a]Chapter 5 ; subsection 5.1. [b]Chapter 6.
- [5] Quantum Mechanics. K. T. Hecht, First Edition (2000) Editor: Springer. ISBN: 978-1-4612-7072-0. Chapter 28 ; subsection 1.
- [6] Theory of the Nuclear Shell Model. R. D. Lawson, First Edition, (1980) Editor:Oxford Clarendon Press ISBN: 0198515162. [a]Chapter 2; subsection 1. [b]Chapter 2. Appendix.
- [7] Introduction to High Energy Physics. Donald H. Perkins,Fourth Edition (2000) Editor: Cambridge University Press. ISBN: 0-521-62196-8 Chapter 3; subsection 3.2.
- [8] From Nucleons to Nucleus: Concepts of microscopic nuclear theory. Jouni Suhoenen, First Edition (2007). Editor: Springer. ISBN:9783540488590; 3540488596.

- [a]Chapter 3.[b]Chapter 8; subsection 4. [c]Chapter 8; subsection 1. [d] Chapter 8; subsection 3.[e] Chapter 8; subsection 5. [f] Chapter 8; subsection 2.
- [9] Se ha obtenido el valor de https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Cottingham/Cott1_10.html Última visita: 24/06/2017
- [10] Los valores se han tomado: <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/> Última visita: 24/06/2017.
- [11] J. Blomqvist and A. Molinari, Nucl. Phys.A 106, 545 (1968).
- [12] Shell Structure of Exotic Nuclei. T. Osuka, (2009) https://www.euroschoolonexoticbeams.be/site/files/nlp/LNP764_contrib1.pdf. Última visita: 10/08/2017
- [13] Angular Momentum Theory. Paul E.S Wormer.<http://www.theochem.ru.nl/~pwormer/teachmat/angmom.pdf>. Última visita:25-06-2017.
- [14] Modern Quantum Mechanics. J.J. Sakurai, Revised edition (1994). Editor:Addisson-Wesley. ISBN:0-201-53929-2. Chapter 3 ; subsection 3.7.
- [15] Solid State Physics for Electronics, André Moliton, First Edition (2009).Editor: isTE, Wiley ISBN: 978-1-84821-062-2. Chapter 4; subsection 4.2.
- [16] Nuclear and Particle Physics, R.J Blin Stoye, First edition (1991). Editor: Springer. ISBN: 978-0-412-38320-5. Chapter 4; subsection 4.2
- [17] Angular Momentum. D.M. Brink and G.R. Satchler (1999). Editor:Oxford Clarendon Press. ISBN:0-19-851759-9. Appendix IV, VI.

Anexo A: Momento, paridad y energía del ^{18}F .

Primer Orden		Diagonalización	
2 ⁺	9,96	2 ⁺	10,00
0 ⁺	9,16	1 ⁺	9,46
1 ⁺ , 3 ⁺	9,08	0 ⁺	9,34
1 ⁺	5,95	3 ⁺	9,13
2 ⁺	5,55	1 ⁺	5,95
1 ⁺ , 3 ⁺	5,08	2 ⁺	5,67
2 ⁺	4,91	2 ⁺	5,64
2 ⁺	4,87	1 ⁺ , 3 ⁺	5,08
4 ⁺	4,51	2 ⁺	4,87
3 ⁺	4,41	3 ⁺	4,55
1 ⁺	4,15	4 ⁺	4,53
2 ⁺ , 4 ⁺	3,79	1 ⁺	4,48
1 ⁺	1,84	4 ⁺	3,79
0 ⁺	1,24	2 ⁺	3,52
3 ⁺	0,87	1 ⁺	2,72
1 ⁺	0,84	0 ⁺	1,48
2 ⁺	0,27	3 ⁺	0,87
2 ⁺	0,15	1 ⁺	0,80
4 ⁺	-0,14	2 ⁺	0,49
2 ⁺	-0,34	3 ⁺	0,30
3 ⁺	-0,82	4 ⁺	-0,16
3 ⁺	-0,93	2 ⁺	-0,35
5 ⁺	-1,29	2 ⁺	-0,68
1 ⁺	-1,47	5 ⁺	-1,29
0 ⁺	-1,50	0 ⁺	-1,92
		3 ⁺	-2,24
		3 ⁺	-3,02

Tabla A.1: Niveles de Energía, en MeV, de ^{18}F .

Anexo B: Niveles de energía de ^{38}Ca

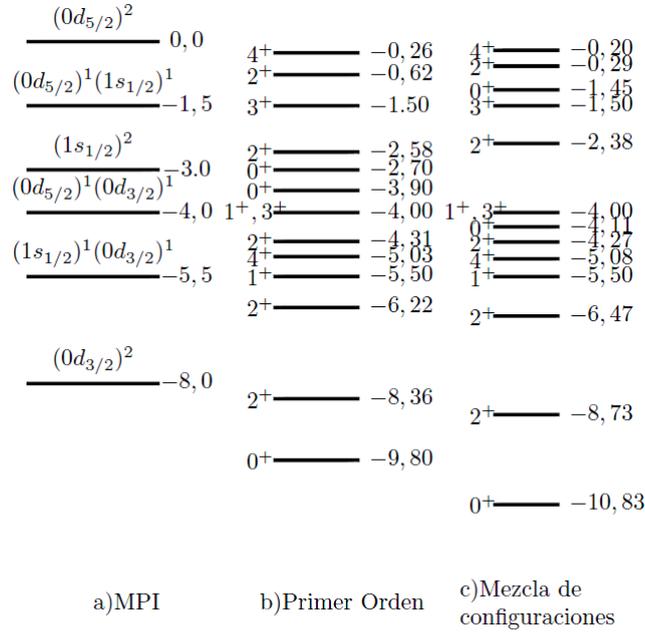


Figura B.1: Esquema de Energía, en MeV, del ^{38}Ca

Anexo C: Niveles de energía de ^{14}N

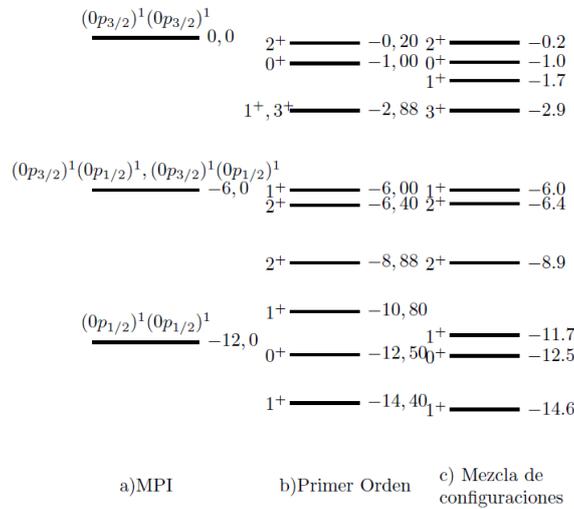


Figura C.1: Esquema de Energía, en MeV, de ^{14}N

Anexo D: Momento, paridad y energía del ^{38}K .

Primer Orden		Diagonalización	
4 ⁺	-0,26	4 ⁺	-0,20
2 ⁺	-0,62	2 ⁺	-0,28
3 ⁺	-0,82	3 ⁺	-0,33
5 ⁺	-1,29	1 ⁺	-0,75
1 ⁺	-1,47	5 ⁺	-1,29
3 ⁺	-1,50	0 ⁺	-1,45
2 ⁺	-2,22	3 ⁺	-1,50
2 ⁺	-2,58	2 ⁺	-1,88
0 ⁺	-2,70	2 ⁺	-2,38
3 ⁺	-3,30	3 ⁺	-3,05
1 ⁺ , 0 ⁺	-3,90	1 ⁺	-3,24
1 ⁺ , 3 ⁺	-4,00	1 ⁺ , 3 ⁺	-4,00
2 ⁺	-4,31	1 ⁺ , 0 ⁺	-4,11
3 ⁺	-4,67	2 ⁺	-4,27
4 ⁺	-5,03	2 ⁺	-4,63
2 ⁺ , 4 ⁺	-5,29	4 ⁺	-5,08
1 ⁺	-5,50	4 ⁺	-5,29
2 ⁺	-6,22	3 ⁺	-5,37
2 ⁺	-6,58	1 ⁺	-5,50
1 ⁺	-7,24	1 ⁺	-6,34
1 ⁺	-7,30	2 ⁺	-6,42
2 ⁺	-8,36	2 ⁺	-7,57
1 ⁺ , 3 ⁺	-9,08	1 ⁺	-8,60
0 ⁺	-9,80	2 ⁺	-8,73
		3 ⁺	-9,12
		1 ⁺	-10,06
		0 ⁺	-10,83

Tabla D.1: Niveles de energía, en MeV, del ^{38}K .