Suavidad, convexidad, dualidad y renormamientos.

Pedro Pablo Pérez Velasco

Trabajo Fin de Grado en Matemáticas dirigido por
D. Tomás Domínguez Benavides.

Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

Septiembre de 2017

"Wir müssen wissen, wir werden wissen".
David Hilbert.

Agradecimientos

Al volver la vista atrás, tras estos aos de aprendizaje, son muchas las personas que me vienen a la memoria, las que han aportado su valiosa parte en este proyecto, desde sus conocimientos, experiencia o ánimo. Gracias a ellas, el esfuerzo de estos aos puede culminar al fin con esta memoria.

Entre ellas y en primer lugar, quisiera darle las gracias al profesor Tomás Domínguez Benavides. Su servicial disposición, sus observaciones clarificadoras y su buen hacer han supuesto una guía amable y precisa, junto a la que hemos podido salvar dificultades y profundizar en el conocimiento del Análisis Funcional.

Igualmente, me gustaría transmitir mi gratitud al profesorado de la Universidad de Sevilla, que desde un trato cercano, ha sabido inculcarnos al mismo tiempo la pasión y el rigor por este fascinante campo del saber.

Quisiera darle las gracias tambin a toda mi familia, que siempre me han alentado y acompaado, desde el primer momento en el que decidí decantarme por esta profesión. A mi hermano Álvaro, por su paciencia conmigo y a mi hermana Elena, por su cariño y comprensión. Especialmente me gustaría agradecerles a mis padres todo el esfuerzo e ilusión, todas las enseanzas, la fe y el amor que siempre han puesto en mí.

Quiero agradecer del mismo modo a los amigos con los que he podido compartir dificultades y alegrías durante estos cuatro aos, que han resultado un firme apoyo y activos partícipes de este proyecto.

Por último, quiero darle las gracias a Dios por todo el bien recibido, la vocación que me ha dado y la oportunidad que desde ésta cada da Él me brinda, para hacer de este un mundo mejor.

Índice general

Índice general **4**

Abstract **6**

Introduction **7**
- 0.1. Filtros en espacios topológicos . . . 9
- 0.2. Producto de espacios de Banach . . . 12

1. Convexidad y suavidad estricta **13**
- 1.1. Convexidad estricta . . . 13
- 1.2. Suavidad . . . 14

2. Convexidad y suavidad uniforme **18**

3. Renormamiento estrictamente convexo de un espacio separable **24**

4. Representabilidad finita y ultrapotencias de espacios de Banach **30**
- 4.1. Representabilidad finita . . . 30
- 4.2. Superpropiedades de los espacios de Banach . . . 36
- 4.3. Teorema de Enflo-Pisier . . . 37

5. Normas estrictamente convexas y residualidad **38**

Bibliografía **42**

Abstract

The goal of this Bachelor thesis is to study some specifical geometric properties, which are related to the convexity and smoothness of Banach spaces. More precisely we will go over the definitions of strict convexity, uniform convexity, smoothness and uniform smoothness. We will study some duality relationships between strict convexity and smoothness, namely that the strict convexity (smoothness) of the dual norm implies the smoothness (strict convexity) of the norm. We show an example proving that the converse of this duality results do not hold. However, we will prove that there is a complete duality relationship between uniform convexity and uniform smoothness through Lindenstrauss' formula.

With regard to renorming theory, it will be also showed that every separable space can be renormed in order to be strictly convex. We will go also over Enflo's Theorem: a space is superreflexive if and only if it admits an uniform convex renorming. In the last chapter we improve the above results. In fact, almost all renormings of a separable space are strictly convex and almost all renomings of a superreflexive space are uniformly convex.

Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio y la comprensión de los conceptos geométricos de convexidad y suavidad aplicados a los espacios normados, la relación entre ellas y los posibles renormamientos que tienen dichas propiedades.

Con este fin, introducimos en el capítulo de preliminares el uso de filtros, una forma más general de tratar la proximidad en espacios topológicos que la empleada en cursos iniciales de topología, que suele ser por sucesiones. Entre otras cuestiones, se expone la definición y caracterización de ultrafiltro, así como la convergencia de filtros, el límite de una función con respecto a un filtro y otros resultados de compacidad, espacios Hausdorff, etc. que generalizan lo estudiado en cursos anteriores. Asimismo, se incluye la definición y algunos resultados sobre el espacio de Banach generado por el producto de espacios de Banach dotados con una determinada norma.

En el capítulo 1, se define el concepto de convexidad estricta de un espacio de Banach y se presenta un par de caracterizaciones, así como se muestran varios ejemplos de espacios estrictamente convexos (ℓ_p, L_p, $p \geq 1$) y espacios no estrictamente convexos (c_0, ℓ_1).

Igualmente se da una definición de suavidad y se prueba que ambas propiedades (convexidad estricta y suavidad) son en cierto modo duales, es decir, que dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, si el espacio dual tiene una propiedad, $(X, \|\cdot\|)$ tiene la otra. Esto supone que si un espacio X es reflexivo, X es estrictamente convexo o suave si y solo si X^* es suave o estrictamente convexo y recíprocamente. Sin embargo, existen espacios no reflexivos en los que esta total equivalencia no se alcanza, lo que se demuestra con un contraejemplo, incluido al final del capítulo: el espacio ℓ_1 con la norma $|||\cdot||| = (\|\cdot\|_1^2 + \|\cdot\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$, donde $\|\cdot\|_1$ es la norma de ℓ_1 y $\|\cdot\|_2$ la euclídea.

En el segundo capítulo, se define en primer lugar la convexidad uniforme, de la que se da una caracterización y se demuestra que esta propiedad implica que es el espacio sea reflexivo. De igual manera se define el módulo de suavidad de un espacio normado, a partir del cual se da una definición de suavidad uniforme y se prueba que la suavidad uniforme implica suavidad y que la convexidad uniforme (suavidad uniforme) de un espacio y la suavidad uniforme (convexidad uniforme) de su espacio dual son son propiedades equivalentes, lo que supone una mejora con respecto a los resultados obtenidos para convexidad estricta y suavidad no uniforme.

En el capítulo tercero, se define el concepto de convexidad uniforme en cada dirección (UCED), de la que se muestra un teorema con varias caracterizaciones. Se prueba igualmente que dicho tipo de convexidad implica convexidad estricta y que un espacio tiene un renormamiento con una norma equivalente UCED si existe una aplicación inyectiva, lineal y continua de dicho espacio en un espacio que sea UCED.

En el cuarto capítulo, se introduce el concepto de representabilidad finita, ultrapotencias de un espacio de Banach y el de superpropiedad. En primer lugar, se da la definición de representabilidad finita y se demuestra que dicha propiedad preserva la convexidad uniforme. Por el contrario, si un espacio de Banach es reflexivo y existe otro finitamente representable en él, este no tiene por qué ser reflexivo. Esto se muestra en un contraejemplo, tomando $E = (\Pi_{n\in\mathbb{N}} l_1^{(n)})_2$

que es reflexivo y comprobando que el espacio no reflexivo ℓ_1 es finitamente representable en él.

En segundo lugar se realiza una construcción de una amplia colección de espacios de Banach finitamente representables en un espacio de Banach determinado E, que no es otra que la dada por las ultrapotencias $\tilde{E} = E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}$ es ultrafiltro de $\mathbb{N}$. Se demuestra entonces que $\tilde{E}$ es un espacio de Banach, que es finitamente representable en E y que $\tilde{E}$ contiene un subespacio isométrico a E. Se muestra además que si E es infinito dimensional, entonces $\tilde{E}$ no es separable, con lo que queda claro que el tamaño dimensional de un espacio con respecto a otro no es relevante para que este sea finitamente representable en el otro o no.

A continuación, se da una definición de superpropiedad en un espacio de Banach E y una caracterización de la misma: que todas las ultrapotencias $E^I/\mathcal{U}$ con $\mathcal{U}$ ultrafiltro de un conjunto arbitrario I satisfagan dicha propiedad. Se dan además algunos ejemplos de superpropiedades. Al final del capítulo se enuncia el teorema de Enflo-Pisier, que nos permite establecer la equivalencia entre convexidad uniforme y superreflexividad sobre un espacio de Banach.

En el último capítulo, se define los conceptos de espacio de Baire, conjuntos raro, de primera categoría y residual. Asimismo, dado un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se definen la aplicación $\|\cdot\| \mapsto \|\cdot\|^*$ entre dos espacios métricos: el espacio (P, ϱ) de normas equivalentes a $\|\cdot\|$ sobre X y el espacio (P^*, ϱ^*) de normas duales equivalentes a $\|\cdot\|^*$ sobre X^*. Dicha aplicación es un homeomorfismo, pero nunca isomorfismo si X no es reflexivo. Se define también la convexidad uniforme local, que nos ayudará en la demostración de dos resultados que afirman la existencia de un conjunto vacío o residual de renormamientos estrictamente convexos, localmente uniformemente convexos o uniformemente convexos en (P, ϱ); y la existencia de un conjunto vacío o residual de renormamientos en (P, ϱ) cuya norma dual sea estrictamente convexa, localmente uniformemente convexa o uniformemente convexa, en cada caso. Como consecuencia de estos dos teoremas se obtiene un tercero, que afirma la existencia de una norma en (P, ϱ) localmente uniformemente convexa cuya norma dual también lo sea, dada la existencia de dos normas en (P, ϱ) tales que una sea localmente uniformemente convexa y que la norma dual de la otra también lo sea. De forma equivalente se prueba para convexidad estricta o uniforme.

Se obtienen igualmente dos corolarios, conclusión de esta memoria: Que si X o su predual es superreflexivo, el conjunto de normas estrictamente convexas en (P, ϱ) es residual y que si X es superreflexivo, el conjunto de normas uniformemente convexas y uniformemente suaves es residual en (P, ϱ).

Preliminares

0.1. Filtros en espacios topológicos

Al trabajar uno con topologías no metrizables, es necesario generalizar el concepto de sucesiones convergentes lo que puede hacerse mediante filtros.

Definición 0.1. Si I es un conjunto, una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de I es llamado filtro si se verifica:
(a) Si $X \in \mathcal{F}$, $X \subset Y$, entonces $Y \in \mathcal{F}$.
(b) Dados $X, Y \in \mathcal{F}$, entonces $X \cap Y \in \mathcal{F}$.
(c) $I \in \mathcal{F}$.
(d) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ejemplo 0.1. Definimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{F} = \{X \subset \mathbb{N} : |\mathbb{N} \setminus X| < \infty\}$$

Veamos que se trata de un filtro, conocido generalmente como filtro de Fréchet.
En efecto, si $X \in \mathcal{F}$, $X \subset Y$, entonces $\mathbb{N} \setminus Y \subset \mathbb{N} \setminus X$ que es finito, por lo que $Y \in \mathcal{F}$. Si $X, Y \in \mathcal{F}$, $\mathbb{N} \setminus (X \cap Y) = \mathbb{N} \setminus X \cap \mathbb{N} \setminus Y$, que es finito al ser unión de finitos. Asimismo, $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathcal{F}$.

Definición 0.2. Se dice que $\mathcal{F}$ es un filtro más fino que $\mathcal{F}'$ si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

Observación 0.1. La relación 'ser más fino que' es claramente una relación de orden sobre el conjunto de filtros generados a partir de un conjunto I, al ser la inclusión una relación de orden.

Definición 0.3. Sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X tales que:
(a) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.
(b) $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{B}$.
$\mathcal{B}$ se denomina entonces base de un filtro. El filtro $\mathcal{F}$ que genera $\mathcal{B}$ es el siguiente:

$$\mathcal{F} = \{X \in I : \exists A \in \mathcal{B}, A \subset X\}$$

Así como sobre filtros se puede establecer una relación de orden sobre los filtros, también se puede establecer una relación de equivalencia entre bases.

Definición 0.4. Dos bases de filtros se dicen equivalentes si generan el mismo filtro.

Teorema 0.1. *$\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ son equivalentes si y solo si $\mathcal{F}_1$ es más fino que $\mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ siendo $\mathcal{F}_i$ el filtro generado por la base $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$.*

Definición 0.5. Denominamos como ultrafiltro aquel filtro, para cual no existe otro filtro que sea más fino que él, es decir, que lo contenga estrictamente.

Observación 0.2. Sigue del lema de Zorn que cada filtro está contenido en un ultrafiltro.

Definición 0.6. Se denomina a un ultrafiltro $\mathcal{U}$ fijo si todos los conjuntos $F \in \mathcal{U}$ tienen al menos un elemento en común. En el caso contrario, se denomina a $\mathcal{U}$ ultrafiltro libre.

Teorema 0.2. *Un filtro es un ultrafiltro si y solo si $A \cup B \in \mathcal{F}$ implica que o bien $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.*

Demostración. En efecto, supongamos que existe $\mathcal{F}$ ultrafiltro, $A \notin \mathcal{F}$, $B \notin \mathcal{F}$ y que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Sea

$$G = \{Z \in X : A \cup Z \in \mathcal{F}\}$$

Es trivial ver que G es un filtro más fino que $\mathcal{F}$. En particular $\emptyset \notin G$ sigue de que $A \notin \mathcal{F}$. Pero como $B \in G$ y $B \notin \mathcal{F}$, G es distinto de $\mathcal{F}$. Esto contradice la hipótesis de que $\mathcal{F}$ sea un ultrafiltro.
Recíprocamente supongamos por reducción al absurdo que $A \cup B \in \mathcal{F}$ implica que $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$. Sea G un filtro más fino que $\mathcal{F}$ y sea $Z \in G$. Entonces $X \setminus Z \notin G$ y $X \setminus Z \notin \mathcal{F}$. Como $X = Z \cup (X \setminus Z) \in \mathcal{F}$, debemos tener que $Z \in \mathcal{F}$, es decir, $G = \mathcal{F}$.

□

Indicamos un par de resultados que nos serán de utilidad en el capítulo 1.

Proposición 0.1. *Si un filtro está incluido en un único ultrafiltro, entonces él mismo es un ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro que no es ultrafiltro. Entonces $\exists A$ tal que $A \notin \mathcal{F}$ y $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Considérese entonces:

$$G_1 = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$$
$$G_2 = \{F \cap (X \setminus A) : F \in \mathcal{F}\}$$

Es fácil probar que ambos conjuntos son las bases de dos filtros $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ ambos más finos que $\mathcal{F}$. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ dos ultrafiltros conteniendo a $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, respectivamente. Se tiene que son ultrafiltros distintos pues $A \in \mathcal{U}_1$, $(X \setminus A) \in \mathcal{U}_2$ y ningún filtro puede contener a $A, X \setminus A$, ya que entonces también contendría a $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$.

□

Ejemplo 0.2. El filtro de Frechet no es ultrafiltro, ya que no contiene ni el conjunto de los pares ni el de los impares, cada uno complementario del otro, ya que ninguno de ellos es finito.

Corolario 0.1. *Existen dos ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$.*

Demostración. Como el filtro de Fréchet no es ultrafiltro, existen por la proposición 0.1. dos ultrafiltros distintos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$, con $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$. Dichos ultrafiltros deben ser libres, ya que si fueran fijos $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \supset \bigcap_{G \in \mathcal{U}_k} G \neq \varnothing$ para $k = 1, 2$, lo cual es falso, al ser el filtro de Frechet libre.

□

Introducimos ahora un ejemplo útil para definir la convergencia de un filtro.

Ejemplo 0.3. Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces,

$$\mathcal{F}V_{x_0} = \{X \in \mathcal{T} : x_0 \in X\}$$

es el filtro de los entornos de x_0. En efecto, $\emptyset \neq \mathcal{F}V_{x_0}$, $x_0 \in E \subset \mathcal{F}V_{x_0}$ y la intersección de dos conjuntos está en $\mathcal{F}V_{x_0}$ pues ambos conjuntos contienen a x_0. Si $X \subset Y$ y $x_0 \in X$, entonces $Y \subset \mathcal{F}V_{x_0}$.

Definición 0.7. Sea $(E, \mathcal{T})$ espacio topológico. Se dice que $\mathcal{F}$ converge hacia $x_0 \in E$ si $\mathcal{F}$ es más fino que $\mathcal{F}V_{x_0}$, es decir, para cada V entorno de x_0, $\exists X \in \mathcal{F}$ con $X \subset V$.

La convergencia también se puede trasladar al concepto de base de filtro.

Definición 0.8. Decimos que una base $\mathcal{B}$ de filtro converge hacia x si el filtro generado por $\mathcal{B}$ converge hacia x.

A partir de esta definición se pueden generalizar otros conceptos y proposiciones ya definidos y probados para topologías definidas por sucesiones convergentes. A continuación generalizaremos algunos de los resultados más generales que ya han sido vistos en cursos introductorios de topología.

Definición 0.9. Dado un espacio métrico E, $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists X \in \mathcal{F}$ tal que $diam(X) \leq \epsilon$.

Definición 0.10. Se dice que x_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$ si x_0 es un punto de acumulación para todos los elementos $X \in \mathcal{F}$.

Proposición 0.2. *Un punto $x \in X$, espacio topológico pertenece a la adherencia de un conjunto A si y solo si existe un filtro base en A que converja hacia x.*

Demostración. Sea $x \in \overline{A}$, entonces los conjuntos $U \cap A$, donde U es entorno de x, forman una base de filtro en A que converge hacia x. Recíprocamente, si existe un filtro base en A que converja hacia x, entonces cada entorno de x debe intersecar a A.

□

Proposición 0.3. *Um espacio topológico es Hausdorff si y solo si cada filtro converge como máximo hacia un único límite.*

Demostración. Si X es Hausdorff y existe un filtro $\mathcal{F}$ que converge a dos puntos distintos $x \neq y$, debe contener a dos entornos distintos disjuntos de x e y, respectivamente y esto contradice la definición de filtro.
Recíprocamente si X no es Hausdorff, entonces existen dos puntos distintos x, y tales que cada entorno U de x intersecta cada entorno V de y. En este caso, los conjuntos $U \cap V$ forman una base de filtro que converge hacia x e y.

□

Proposición 0.4. *Sea E un conjunto compacto en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces se tiene:*
(a) Todo filtro tiene como mínimo un punto de acumulación.
(b) Cada ultrafiltro es convergente.
(c) Cada filtro de Cauchy converge.

Por último indicamos el límite de una función con respecto a un filtro.

Definición 0.11. Sea X un conjunto, Y un espacio topológico, $f : X \to Y$, $\mathcal{F}$ un filtro en X. Decimos que f converge hacia y, cuando $\mathcal{F}$ converge hacia x si la base del filtro $f(\mathcal{F})$ converge hacia y.

Esta definición nos permite dar una caracterización de continuidad de una función.

Proposición 0.5. *Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ dos espacios topológicos. La aplicación $f : X \to Y$ una función continua en $x \in X$ si y solo si para cada base de filtro $\mathcal{B}$ que converja hacia x, la base de filtro $f(\mathcal{B})$ converge hacia $f(x) \in Y$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro que converge hacia x y supongamos que f es continua en $x \in X$. Si W es un entorno de $f(x)$, $f^{-1}(W)$ es un entorno de x y contiene por tanto un conjunto $A \in \mathcal{B}$. Por tanto, $f(A) \subset f(W)$ y $f(B)$ converge hacia $f(x)$.
Recíprocamente, si para cada base de filtro $\mathcal{B}$ que converge hacia x, el filtro $f(\mathcal{B})$ converge hacia $f(x)$, por lo que $f(\mathcal{B}(x))$ converge hacia $f(x)$ donde $\mathcal{B}(x)$ es el filtro de entornos de x. Cada entorno W de $f(x)$ contiene un subconjunto $f(V)$ donde V es un entorno de x, es decir, f es continua en x.

□

0.2. Producto de espacios de Banach

A continuación definimos y damos algunos resultados conocidos sobre espacios de Banach y su producto que nos serán de gran utilidad en el cuarto capítulo.

Definición 0.12. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios de Banach con $p \in [1, +\infty)$. Definimos la suma ℓ_p de espacios $(E_n)n \in \mathbb{N}$ de Banach como:

$$(\Pi_{n\geq 1} E_n)_p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi_{n\geq 1} E_n : (\sum_{n\geq 1} \|x_n\|^p_{E_n})\frac{1}{p} < +\infty\}$$

Observación 0.3. La suma ℓ_p es un espacio de Banach. En efecto, si tomamos una sucesión de Cauchy $(x_n)_n$ y un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$,

$$\|x_n - x_m\|_p = (\|x_n\|^p_{E_n} + \|x_m\|^p_{E_m})^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

con lo cual la sucesión es convergente a 0.

Corolario 0.2. *El espacio $(\ell_1^{(n)})_p$ es reflexivo, para todo $p \in [1, +\infty)$*

Demostración. Basándonos un resultado de [2] (p. 62), se tiene que dada una sucesión de espacios de Banach $(E_n)_n$, $(\Pi_{n\geq 1} E_n)^*_p$=$(\Pi_{n\geq 1} E^*_n)_q$. Como cada espacio $\ell_1^{(n)}$ es de dimensión finita y por tanto, isomorfo a $\mathbb{R}^n$, se tiene que el dual de $\ell_1^{(n)}$ es $\ell_\infty^{(n)}$ y viceversa. Así:

$$(\Pi_{n\geq 1} \ell_1^{(n)})^{**}_p = (\Pi_{n\geq 1} \ell_1^{(n)*})^*_q = (\Pi_{n\geq 1} \ell_\infty^{(n)})^*_q = (\Pi_{n\geq 1} \ell_1^{(n)})_p$$

□

Capítulo 1

Convexidad y suavidad estricta

1.1. Convexidad estricta

Definición 1.1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Decimos que E es entonces estrictamente convexo si para todo par de vectores x, y no alineados $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$.

Ejemplo 1.1. Utilizando la siguiente proposición y la convexidad de la función $t \to t^p$ es fácil deducir que los espacios ℓ_p, L_p son estrictamente convexos para todo $p \in (1, \infty)$.

Los espacios c_0 y l_1 no son estrictamente convexos. En efecto, tomando los vectores $x = e_1 + e_2$, $y = e_1 - e_2$ y $x = e_1$, $y = e_2$ en cada caso, se alcanza la igualdad $\|x\| + \|y\| = \|x+y\|$.

Proposición 1.1. *Sea E un espacio de Banach. E es estrictamente convexo sii* $\forall x,\ y \in E$, $x \neq y$ *se verifica una de las dos siguientes propiedades:*
a) $\|x\| = \|y\| = 1 \implies \|\frac{x+y}{2}\| < 1$
b)$\forall p \in (1, \infty) \implies \|\frac{x+y}{2}\|^p < \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)$

Demostración. a) Sea E estrictamente convexo. Entonces se tiene por definición que $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$ si x e y no están alineados. Si x e y están alineados y tienen norma 1 , entonces $x = -y$, y la desigualdad es obvia. Recíprocamente, supongamos que existen dos vectores no alineados x, y tales que

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

Supongamos que $\|x\| \leq \|y\| = 1$. Definimos las funciones $\varphi_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, 2$, dadas por $\varphi_1(t) = \|tx + y\|$, $\varphi_2(t) = t\|x\| + \|y\|$. Entonces se tiene $\forall t > 0$ $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$. Tenemos que $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ y que $\varphi_1(1) = \varphi_2(1)$. Como φ_1 es convexo y φ_2 es lineal, se tiene que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ $\forall t \geq 0$. Esto implica que $\|\frac{x}{\|x\|} + y\| = 2$ y por tanto (a) no se verifica.

b) Sea E un espacio de Banach estrictamente convexo y $x, y \in E$ no colineales. Debido a la convexidad de la función $t \mapsto t^p$ se tiene que $\|\frac{x+y}{2}\|^p \leq (\frac{\|x\|+\|y\|}{2})^p < \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)$. Ahora, escogemos $x, y \in E$ alineados, tales que $y = tx$. En tal caso, tenemos que $\|\frac{x+y}{2}\|^p = \|\frac{x+tx}{2}\|^p = |\frac{1+t}{2}|^p \|x\|^p$. Para $t > 0$, se tiene que $|\frac{1+t}{2}| < \frac{1}{2}(1 + |t|^p)$ $\forall t \neq 1$, ya que $p > 1$ (recordemos que para $t > 0$ la función $t \longmapsto t^p$ es derivable y tiene derivada positiva. Para $t \leq 0$, basta considerar que $|\frac{1+t}{2}|^p \leq |\frac{1-t}{2}|^p$. Recíprocamente, nos basta tomar distintos $x, y \in E$ con norma 1. Entonces se tiene que:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p < \frac{1}{2}(1^p + 1^p) \iff \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$$

y por la caracterización de (a) queda probado (b).

□

Ejemplo 1.2. Probamos a continuación la convexidad estricta de los espacios ℓ_p, $\mathcal{L}_p$, con $p \in (1, \infty)$. Para ℓ_p, debido a la convexidad de la función $t \longmapsto t^p$, se tiene que para cada par de vectores distintos $\{x_k\}, \{y_k\} \subset \ell_p$ con $p \in (1, \infty)$,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k+y_k}{2}\right|^p < \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right) \leq \frac{1}{2}(\|x_k\|^p + \|y_k\|^p)$$

ya que $p > 1$, por lo que $\forall p \in (1, \infty) \implies \|\frac{x+y}{2}\|^p < \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)$ y por la proposición anterior el espacio es estrictamente convexo. Para L_p el razonamiento es análogo:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p = \int_\Omega \left|\frac{x(\omega)+y(\omega)}{2}\right|^p d\omega < \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |x(\omega)|^p\, d\omega + \int_\Omega |y(\omega)|^p\, d\omega\right) < \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

1.2. Suavidad

Definición 1.2. Sea E un espacio de Banach. Decimos que E es suave si $\forall x \in E$ no nulo, existe un único funcional lineal $f \in E^*$ con $\|f\| = 1$ tal que $f(x) = \|x\|$.

A continuación introduciremos un par de resultados que relacionan los conceptos de suavidad y convexidad estricta entre un espacio y su espacio dual.

Proposición 1.2. *Dado E un espacio de Banach, si E^* es suave (estrictamente convexo), entonces E es estrictamente convexo (suave).*

Demostración. Si E es un espacio no estrictamente convexo, existen dos puntos a y b distintos tales que $\|a\| = \|b\| = \|\frac{a+b}{2}\| = 1$. Por tanto, el segmento que une los puntos a, b es disjunto con la bola $B(0, 1)$. Por el teorema de Hahn-Banach (la versión geométrica), existe un hiperplano disjunto de la bola unidad abierta que contiene al segmento $[a, b]$. Este hiperplano es de la forma $\{x \in E; f(x) = 1\}$, donde $f \in E^*$ y $\|f\| = 1$. Pero entonces a, $b \in E^{**}$ son dos funcionales lineales distintos en E^* con norma f (es decir, $T_a(f) = T_b(f) = \|f\|$, con $T_a, T_b \in E^{**}$ funcionales definidos a partir de la identificación entre $a, b \in E$ y T_a, T_b), y por tanto E^* no es suave.

Suponiendo ahora que E es un espacio de Banach no suave, existen dos funcionales $f, g \in E^*$ con norma 1, tales que para cierto punto $x \neq 0$, se tiene que $f(x) = g(x) = \|x\|$, luego $\frac{f+g}{2}(x) = \|x\|$. Como $\|\frac{f+g}{2}\| \leq 1$, se tiene que $\|\frac{f+g}{2}\| = 1$, por lo que E^* no es un espacio estrictamente convexo.

□

Corolario 1.1. *Sea E un espacio de Banach reflexivo. Entonces se tiene que E es estrictamente convexo (suave) si y solo si E^* es suave (estrictamente convexo).*

En el siguiente ejemplo se introduce un espacio de Banach en el que se muestra que en ausencia de reflexividad el recíproco de la proposición 1,2 no es cierto.

Ejemplo 1.3. Consideraremos el espacio ℓ_1, sobre el que definimos la siguiente norma, dada la sucesión $x = (x_n)_n$,

$$\|x\|_* = \sqrt{\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2} \tag{1.1}$$

A continuación probaremos que la norma es equivalente a la norma de ℓ_1 y es estrictamente convexa. La equivalencia de la nueva norma se deduce del conocido resultado $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_* = \sqrt{\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2} \leq \sqrt{2}\|x\|_1$$

Por otra parte, la nueva norma es estrictamente convexa en ℓ_1 debido a la identidad del paralelogramo, que verifica la norma euclídea $\|\cdot\|_2$ en ℓ_2 y por ello en ℓ_1, debido a la inclusión de este último en ℓ_2. En efecto, dados dos vectores no alineados x, y con norma 1, debemos probar que:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_* < 1 \tag{1.2}$$
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_*^2 < 1 \tag{1.3}$$
$$\|x+y\|_*^2 < 4 \tag{1.4}$$

Desarrollando $\|x+y\|_*^2$ y aplicando la identidad del paralelogramo, tenemos que:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_*^2 &= \|x+y\|_1^2 + \|x+y\|_2^2 \\ &= \|x+y\|_1^2 + 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2) - \|x-y\|_2^2 \\ &< \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 + 2\|x\|_1\|y\|_1 + 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)\end{aligned}$$

ya que $\|x-y\|_2^2 > 0$, al no ser vectores alineados Sabiendo que $\|x\|_1^2+\|x\|_2^2 = 1$ y $\|y\|_1^2+\|y\|_2^2 = 1$, para que se verifique (1,3) queda por probar que:

$$\begin{aligned}2 &\geq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_1\|y\|_1 \\ &= 1 - \|x\|_1^2 + 1 - \|y\|_1^2 + 2\|x\|_1\|y\|_1\end{aligned}$$

lo cual se verifica ya que la siguiente desigualdad es siempre cierta.

$$0 \geq -(\|x\|_1 - \|y\|_1)^2$$

En el siguiente paso, trataremos ℓ_∞ con la norma dual $\|\cdot\|^*$ de la norma anteriormente definida sobre ℓ_1, $\|\cdot\|_*$. Esta norma es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$. No daremos una fórmula explícita para la norma dual pero necesitaremos conocer su valor en ciertos vectores de ℓ_∞. Probaremos que la sucesión constante $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, con $y_k = 1$ verifica que $\|y\|^* = 1$.

En efecto sea la sucesión $(y)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y $f_y : \ell_1 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$|f_y(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\right| x_k| = \|x\|_1 \leq \|x\|_* = \sqrt{\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2} \tag{1.5}$$

A continuación tomaremos el vector x^n con las primeras n componentes iguales a $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Es fácil comprobar que $\|x^n\|_* = 1$. Por otra parte, haciendo tender n a infinito, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|_1^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$

Así se obtiene que para el vector x^n, $\lim_{n\in\mathbb{N}} |f_y(x^n)| = \lim_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|_*$ y la norma dual $\|y\|^* = \sup\{\frac{\|f_y(x)\|}{\|x\|_*} : x \in \ell_1 \setminus \{0\}\} = 1$.

Ahora dada una sucesión $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\|z\|^* = 1$, $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tomando $\forall n \in \mathbb{N}$ la misma sucesión ligeramente modificada $x^n = (\frac{sgn(z_1)}{\sqrt{n^2+n}}, \frac{sgn(z_2)}{\sqrt{n^2+n}}, ...)$ con las primeras n tuplas iguales a $\frac{sgn(z_k)}{\sqrt{n^2+n}}$ obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \left| \sum_{k=1}^{n} z_k x_k \right| = |f_z(x^n)| \leq \|z\|^* \|x^n\|_* = \|x^n\|_* = 1 \tag{1.6}$$

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$. Definimos en ℓ_∞ un funcional lineal $\xi_\mathcal{U}$ dado por:

$$z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim_{n\in\mathcal{U}} z_n$$

Vamos a deducir a partir de los resultados anteriores

$$\|\xi_\mathcal{U}\| = 1 \tag{1.7}$$

Sea $\|z\|^* = 1$. Considérese el ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre los naturales. Queremos probar que $\|\xi_\mathcal{U}\| = 1$. En primer lugar, demostremos que $\xi_\mathcal{U} z \leq 1$, $\forall z \in \ell_\infty$ con norma 1. Veremos que basta probar entonces que para cualquier $\epsilon > 0$ el conjunto de elementos $|z^k| \geq 1+\epsilon$ es finito. Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una reordenación cualquiera y $\tilde{z} = (z^{\varphi(k)})$. Si $|\tilde{z}(x)| > 1$ para algún $x = (x^k)$ con $\|x\| = 1$ obtenemos:

$$1 < \left| \sum_{k\in\mathbb{N}} z^{\varphi(k)x^k} \right| = \left| \sum_{k\in\mathbb{N}} z^k x^{\varphi^{-1}(k)} \right|$$

lo cual no puede ser, ya que $\|(x^{\varphi^{-1}(k)})\| = \|(x^k)\| = 1$. Si el conjunto de elementos $|z_k| > 1+\epsilon$ fuera infinito, podemos elegir una biyección $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que induzca una reordenación del vector z en el vector $(z^{\varphi_1(k)})$, de tal forma que para cada n existiría una reordenación en la que las primeras n coordenadas son mayores que $1+\epsilon$. Esto entra en contradicción con lo expuesto en el paso anterior, ya que entonces:

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \sum_{k=1}^{n} |z_k| \geq \frac{(1+\epsilon)n}{\sqrt{n^2+n}} \longrightarrow 1+\epsilon$$

Veamos que lo anterior implica $\|\xi_\mathcal{U}(z)\| \leq 1$ para cada ultrafiltro U libre, esto es, para cada ultrafiltro que verifique $\bigcap_{F\in\mathcal{U}} F = \varnothing$.Para ello, recordemos la convergencia para filtros aplicada a los naturales.

Sea X un espacio normado, $\mathcal{F}$ un filtro de $\mathbb{N}$. Decimos que una sucesión x_n converge a $x \in X$ si $\forall\epsilon > 0$ $\exists F \in \mathcal{F}$ tal que $\forall n \in F$

$$\|x_n - x\| < \epsilon$$

En nuestro caso sabemos que

$$\forall\epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathcal{N} : |z_k - 1| \leq \epsilon, \forall k \geq k_0 \tag{1.8}$$

Tomando cualquier ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ existe $F \in \mathcal{U}$ con $\min_{n\in F} n \geq k_0$ sa partir del cual se obtiene una subsucesión $(x_{n_k})_{n_k\in F}$ que verifica la expresión anterior. La existencia de dicho conjunto $F \in \mathcal{U}$ se deduce de las propiedades del ultrafiltro libre. En efecto, si no existiera tal F,

$$\forall F \in \mathcal{U}, \exists l_0 < k_0 : l_0 \in F \tag{1.9}$$

y $\mathcal{U}$ sería un ultrafiltro trivial, lo cual es una contradicción.
Basta ahora por tanto solo probar que existe un $z \in \ell_\infty$ con el que se alcanza la igualdad en la siguiente acotación:

$$|\xi_\mathcal{U} z| = |\lim_{k \in \mathcal{U}} z_k| \leq 1$$

Para ello basta tomar el vector $z = (1, 1, ...)$, que como se ha probado anteriormente, satisface que $\|z\| = 1$.

Por último, gracias al corolario 0,1 la existencia de dos ultrafiltros libres distintos $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ en $\mathbb{N}$. En ese caso $\xi_{\mathcal{U}_1}$ y $\xi_{\mathcal{U}_2}$ son dos funcionales distintos con norma 1 tales que $\xi_{\mathcal{U}_1}(y) = \xi_{\mathcal{U}_2}(y) = 1$, con $y = (1, 1, ...) \in \ell_\infty$ y por la definición (1,2.), el espacio E no es suave. Por tanto queda probado así la existencia de espacios no reflexivos en los que el recíproco de la proposición 1,2 no se verifica.

Capítulo 2

Convexidad y suavidad uniforme

En el capítulo anterior, hemos definido la convexidad estricta de un espacio de Banach E de la siguiente forma $\forall x, y \in E, x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1$ se tiene que $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$. Sin embargo, en ningún momento dicha definición implica que la diferencia $1 - \|\frac{x+y}{2}\|$ debe tener una cota inferior. Es por ello que introducimos el concepto de convexidad uniforme.

Definición 2.1. Decimos que un espacio de Banach E es uniformemente convexo si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x, y \in E$, con $\|x\| = \|y\| = 1$

$$\|x - y\| \geq \epsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \tag{2.1}$$

Denominamos a $\delta(\epsilon) = \{1 - \|\frac{x+y}{2}\|; \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \epsilon\}$ como el módulo de convexidad de E.

A partir de la definición queda claro que E es unifomemente convexo si y solo si $\forall \epsilon > 0, \delta(\epsilon) > 0$. También se deduce de la definición que $\delta(0) = 0$ y que si $\epsilon_1 < \epsilon_2$, entonces $\delta(\epsilon_1) < \delta(\epsilon_2)$.

Introducimos a continuación una caracterización homogénea de convexidad uniforme en la que relajamos la condición $\|x\| = \|y\| = 1$ por $\|x\|, \|y\| \leq 1$:

Proposición 2.1. *Sea $p \in (1, +\infty)$. E es uniformemente convexo si y solo si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_p(\epsilon) > 0$ tal que $\forall x, y \in E$, se cumple que:*

$$\|x\| \ \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \epsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p \leq (1 - \delta_p(\epsilon)) \left[\frac{1}{2} (\|x\|^p + \|y\|^p) \right] \tag{2.2}$$

Por consiguiente, E es uniformemente convexa si y solo si $\forall x, y \in E$

$$\|\frac{x+y}{2}\|^p \leq \left[1 - \delta_p \left(\frac{\|x - y\|}{sup(\|x\|, \|y\|)} \right) \right] \frac{1}{2} (\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{2.3}$$

Antes de comenzar con la prueba, introducimos dos lemas auxiliares.

Lema 2.1. *Sean x,y dos puntos distintos con norma 1 en un espacio E uniformemente convexo. Sea $\epsilon' = \|x - y\|$. Entonces $\forall t \in [0, 1]$*

$$\left\| \frac{x + ty}{2} \right\| \leq \frac{1-t}{2} + t(1 - \delta(\epsilon')) = \frac{1+t}{2} - t\delta(\epsilon') \tag{2.4}$$

Demostración. Sea z la itersección entre x, y y la semirrecta $(0, \frac{x+ty}{2})$. Entonces $\exists \lambda > 1$ y $\mu \in [0,1]$ tales que

$$z = \lambda \frac{x+ty}{2}$$
$$z = \mu x + (1-\mu)\frac{x+y}{2}$$

Luego,

$$\lambda \frac{x+ty}{2} = \mu x + (1-\mu)\frac{x+y}{2}$$
$$x\left(\frac{\lambda}{2} - \mu - \frac{1-\mu}{2}\right) = y\left(\frac{1-\mu}{2} - t\frac{\lambda}{2}\right)$$

Por tanto,

$$\frac{\lambda}{2} - \mu - \frac{1-\mu}{2} = 0$$
$$\frac{1-\mu}{2} - \frac{t\lambda}{2} = 0$$

de lo que se deduce que $\lambda = \frac{2}{1+t}$ y $\mu = \frac{1-t}{1+t}$. Pero como $z = \mu x + (1-\mu)\frac{x+y}{2}$

$$\|z\| \leq \frac{1-t}{1+t} + \left(1 - \frac{1-t}{1+t}\right)(1-\delta(\epsilon')) = \frac{1-t}{1+t} + \frac{2t}{1+t}(1-\delta(\epsilon')) = 1 - \frac{2t}{1+t}\delta(\epsilon')$$

Por consiguiente:

$$\left\|\frac{x+ty}{2}\right\| = \lambda^{-1}\|z\| = \frac{1+t}{2}\left(1 - \frac{2t}{1+t}\delta(\epsilon')\right) = \frac{1+t}{2} - t\delta(\epsilon')$$

y el lema queda probado.

□

Lema 2.2. *La función $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi_1(t) = \frac{(\frac{1+t}{2})^p}{\frac{1}{2}(1+t^p)}$ es estrictamente monótona creciente $\forall t \in [0,1]$ y alcanza su máximo dentro de ese intervalo en $t = 1$*

Demostración. Basta con calcular la derivada de φ.

□

Demostración. Consideremos de nuevo la prueba de la proposición (2,1). Sea $p \in (1, +\infty)$. Como el resultado (2,3) es homogéneo, podemos suponer que $\|x\| = 1$, $\|y\| \leq 1$. Tomamos $\tilde{y} = \frac{y}{\|y\|}$, $t = \|y\|$ con lo que $t \in [0,1]$. Supongamos también que $\|x - y\| > \epsilon$ y fijamos $\epsilon' = \|x - \tilde{y}\|$. Aplicando el lema (2,1) a $x, \tilde{y}$ resulta que:

$$\|\frac{x+t\tilde{y}}{2}\| \leq \frac{1+t}{2} - t\delta(\epsilon')$$

y por tanto

$$\frac{\|\frac{x+y}{2}\|^p}{\frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)} \leq \frac{(\frac{1+t}{2} - t\delta(\epsilon'))^p}{\frac{1}{2}(1+t^p)} =: \varphi(t)$$

Pueden ocurrir dos casos:
(1) Que $\epsilon' < \frac{\epsilon}{2}$, lo que implica que $\|x - \tilde{y}\| < \frac{\epsilon}{2}$ y entonces se tiene:

$$1 - t = \|y - \tilde{y}\| \geq \|y - x\| - \|x - \tilde{y}\| \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$$

y por tanto, $t < 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Usando que

$$\varphi(t) \leq \frac{(\frac{1+t}{2})^p}{\frac{1}{2}(1+t^p)}$$

y aplicando el lema (2,2), obtenemos:

$$\varphi(t) \leq \frac{(1-\frac{\epsilon}{4})^p}{\frac{1}{2}(1+(1-\frac{\epsilon}{2})^p)}$$

$$1-\varphi(t) \geq 1 - \frac{(1-\frac{\epsilon}{4})^p}{\frac{1}{2}(1+(1-\frac{\epsilon}{2})^p)}$$

Si $\epsilon' > \frac{\epsilon}{2}$, entonces $\delta(\epsilon') \geq \delta(\frac{\epsilon}{2})$ y

$$\varphi(t) \leq \frac{(\frac{1+t}{2} - t\delta(\frac{\epsilon}{2}))^p}{\frac{1}{2}(1+t^p)} =: \psi(t)$$

Denotaremos a partir de ahora $\delta := \delta(\frac{\epsilon}{2})$. El máximo de ψ se alcanza cuando $t^{p-1} = 1 - 2\delta$ y su valor es:

$$\psi((1-2\delta)^{\frac{1}{p-1}}) \leq \frac{[\frac{1}{2}(1-2\delta)^{\frac{1}{p-1}} - (1-2\delta)^{\frac{1}{p-1}}\delta]^p}{\frac{1}{2}(1+(1-2\delta)^{\frac{p}{p-1}})}$$

En ambos casos se obtiene que:

$$\delta_p(\epsilon) \geq \text{mín}\{1 - \frac{(1-\frac{\epsilon}{4})^p}{\frac{1}{2}(1+(1-\frac{\epsilon}{2})^p)}, 1 - \frac{[\frac{1}{2}(1+[1-2\delta(\frac{\epsilon}{2})]^{\frac{1}{p-1}}) - (1-2\delta(\frac{\epsilon}{2}))^{\frac{1}{p-1}}\delta(\frac{\epsilon}{2})]^p}{\frac{1}{2}[1+(1-2\delta(\frac{\epsilon}{2}))^{\frac{p}{p-1}}]}\}$$

□

El cálculo directo ofrece la ventajosa posibilidad de comparar el comportamiento de $\delta(\epsilon)$ y $\delta_p(\epsilon)$ cuando $\epsilon \to 0$. El primer término en el mínimo es entonces igual a $\frac{p(p-1)\epsilon^2}{32}$ y el segundo a $p\delta(\frac{\epsilon}{2})$. Si admitimos que para cada espacio de Banach $\delta(\epsilon) \leq C\epsilon^2$, obtenemos que $\delta_p(\epsilon) \geq c_p\delta(\epsilon)$ con c_p una constante que solo depende de p.

Consideramos a continuación la posibilidad de que existan propiedades específicas de espacios uniformemente convexos que permanezcan invariantes por isomorfismo. Una respuesta inicial viene dada por la siguiente proposición, cuya prueba no incluimos por lo avanzado de los resultados que se requieren para su resolución, que superan los conocimientos correspondientes a cursos de grado de Análisis Funcional:

Proposición 2.2. *Un espacio de Banach uniformemente convexo es siempre reflexivo.*

Ejemplo 2.1. Si $p \in (1, +\infty)$, los espacios $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ son uniformemente convexos, siendo μ cualquier medida sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. No incluimos la demostración de este resultado por lo técnico de la misma. Puede encontrarse en las páginas 198-203 de [4].

A continuación introducimos el concepto de suavidad uniforme en un espacio de Banach.

Definición 2.2. Sea E espacio de Banach. Pongamos, para $\tau > 0$ que:

$$\rho_E(\tau) = sup\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) - 1; \|x\| = 1, \|y\| \leq \tau\} \tag{2.5}$$

La función $\rho_E(\tau)$ se llama módulo de suavidad de E. Diremos que E es uniformemente suave si $\frac{\rho_E(\tau)}{\tau} \to 0$ cuando $\tau \to 0$.

A fin de exponer mejor el concepto de módulo de suavidad de E y su relación con la definición de suavidad que exponemos en el capítulo anterior,introducimos la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Si un espacio E es uniformemente suave, entonces E es también suave.*

Demostración. Si E no es suave, existen dos funcionales f, g con norma 1, tales que $f(x) = g(x) = \|x\|$. Tomando $\|y\| = 1$ tal que $f(y) \neq g(y)$ y $\tau \in (0, 1]$, tenemos la siguiente acotación del módulo de suavidad:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|) - 1 &\geq \frac{1}{2}\left(f(x+\tau y) + g(x-\tau y)\right) - 1 \\ &\geq \frac{1}{2}\left(f(x) + \tau f(y) + g(x) - \tau g(y)\right) - 1 \\ &\geq \frac{\tau}{2}\left(f(y) - g(y)\right) \neq 0\end{aligned}$$

Por lo que $\rho_E(\tau)/\tau \nrightarrow 0$ y E no es uniformemente suave.

□

Proposición 2.4. *Sea E un espacio de Banach. Entonces se tiene:*
a) E es uniformemente convexo si y solo si E^* es uniformemente suave.
b) E es uniformemente suave si y solo si E^* es uniformemente convexo.

Demostración. Nos basta con probar las siguientes implicaciones:
1) E es uniformemente convexo implica que E^* es uniformemente suave.
2) E es uniformemente suave $\Rightarrow$ E^* es uniformemente convexo.

En efecto tanto 1) por la proposición (2,2) como 2) implican que E es reflexivo. Por tanto, se pueden obtener las otras implicaciones aplicando 1) y 2) a E^* y $E^{**} = E$, en lugar de aplicárselas a E y a E^*.
La implicación 1) se deduce del siguiente lema también conocido como dualidad de Lindenstrauss.

Lema 2.3. *Para todo espacio de Banach E, $\forall \tau > 0$:*

$$\rho_{E^*}(\tau) = \sup_{0\leq\epsilon\leq 2}\left(\frac{\tau\epsilon}{2} - \delta_E(\epsilon)\right) \tag{2.6}$$

Demostración. Probemos en primer lugar, que $\forall \epsilon > 0$ y $\forall \tau > 0$

$$\delta_E(\epsilon) + \rho E^*(\tau) \geq \frac{\tau\epsilon}{2} \tag{2.7}$$

Sean $x, y \in E$, con $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geq \epsilon$, y sean los funcionales $f, g \in E^*$, con $\|f\| = \|g\| = 1$ y tales que $f(x + y) = \|x + y\|, g(x - y) = \|x - y\|$, cuya existencia queda asegurada por el teorema de Hahn-Banach. Entonces:

$$\begin{aligned}2\rho_{E^*}(\tau) &\geq \|f + \tau g\| + \|f - \tau g\| - 2 \\ &\geq (f + \tau g)(x) + (f - \tau g)(y) - 2 \\ &\geq f(x + y) + \tau g(x - y) - 2 \\ &\geq \|x + y\| + \tau\epsilon - 2\end{aligned}$$

que es

$$2 - \|x + y\| \geq \tau\epsilon - 2\rho_{E^*}(\tau)$$

de la cual se deduce (2,7).

$\square$

Pero (2,7) implica que $\forall \tau > 0$:

$$\rho_{E^*}(\tau) \geq \sup_{0 \leq \epsilon \leq 2} \left(\frac{\tau}{2}\epsilon - \delta_E(\epsilon) \right)$$

Ahora sean $f, g \in E^*$, con $\|f\| = 1$, $\|g\| = \tau$. Sea $\eta > 0$. Podemos encontrar $x, y \in E$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ tales que:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &\geq \|f + g\| - \eta \\ (f - g)(y) &\geq \|f - g\| - \eta\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\|f + g\| + \|f - g\| &\leq f(x) + g(x) + f(y) - g(y) + 2\eta \\ &\leq f(x + y) + g(x - y) + 2\eta \\ &\leq \|x + y\| + \tau\|x - y\| + 2\eta\end{aligned}$$

Fijemos $\epsilon = \|x - y\|$. Entonces $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta_E(\epsilon)$, y

$$\begin{aligned}\|f + g\| + \|f - g\| &\leq 2 - 2\delta_E(\epsilon) + \tau\epsilon + 2\eta \\ &\leq 2 + 2\left(\frac{\tau\epsilon}{2} - \delta_E(\epsilon)\right) + 2\eta\end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos que:

$$\|f + g\| + \|f - g\| \leq 2 + 2 \sup_{0 \leq \epsilon \leq 2} \left(\frac{\tau\epsilon}{2} - \delta_E(\epsilon)\right) + 2\eta$$

de lo que se deduce que:

$$\rho_{E^*}(\tau) \leq \sup_{0 \leq \epsilon \leq 2} \left(\frac{\tau\epsilon}{2} - \delta_E(\epsilon)\right)$$

y así la fórmula queda establecida. Observemos que no se requiere ninguna hipótesis sobre E o E^*.

Demostramos a continuación que E^* es uniformemente suave, cuando E es uniformemente convexo. Para ello debemos probar que si $\delta_E(\epsilon) > 0, \forall \epsilon > 0$, entonces $\frac{\rho_{E^*}(\tau)}{\tau} \to 0$, cuando $\tau \to 0$.

Por el lema, tenemos que

$$\frac{\rho_{E^*}(\tau)}{\tau} = \sup_{0 \leq \epsilon \leq 2} \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\delta_{E^*}(\epsilon)}{\tau}\right)$$

El segundo miembro es una función monótona creciente que depende de la variable $\tau > 0$. Supongamos que $\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_{E^*}\tau}{\tau} = a > 0$. Para una sucesión $\tau \to 0$, sea ϵ_τ tal que:

$$\frac{\epsilon_\tau}{2} - \frac{\delta_{E^*}(\epsilon_\tau)}{\tau} > \frac{a}{2}$$

Entonces

$$\frac{\epsilon_\tau}{2} - \frac{a}{2} > \frac{\delta_{E^*}(\epsilon_\tau)}{\tau} > 0$$

y por ello $\epsilon_\tau > a$ y la sucesión no puede tender a 0. Pero $\frac{\tau\epsilon_\tau}{2} - \frac{a\tau}{2} > \delta_{E^*}(\epsilon_\tau)$, lo que supone que $\delta_{E^*}(\epsilon_\tau) \to 0$, si $\tau \to 0$, y E no es uniformemente convexo.

Observemos que la implicación inversa también deriva del lema de una forma más obvia: si $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que $\delta(\epsilon_0) = 0$, entonces $\frac{\rho(\tau)}{\tau} \geq \frac{\epsilon_0}{2}, \forall \tau$ y E^* no es uniformemente suave.
Para el apartado 2) basta aplicar la segunda fórmula de dualidad y aplicar el mismo razonamiento a $E*$ en lugar de a E:

$$\rho_E(\tau) \leq \sup_{0 \leq \epsilon \leq 2} \left(\frac{\tau\epsilon}{2} - \delta_{E^*}(\epsilon) \right) \tag{2.8}$$

$\square$

Capítulo 3

Renormamiento estrictamente convexo de un espacio separable

Si el concepto de convexidad uniforme está basado en la condición geométrica de que para dos elementos distintos de la bola unidad su punto medio está incluido en el interior de esta, consideraremos en este capítulo una generalización de este concepto cuya idea geométrica sería que todas las cuerdas paralelas a una dirección dada y cuya longitud está acotada inferiormente, su punto medio está en el interior de dicha bola. Dicha propiedad es la convexidad uniforme en cada dirección, más conocida por su acrónimo en inglés (UCED). Este concepto fue introducido por primera vez por A. L. Garkovi con el objetivo de caracterizar espacios lineales normados.

Definición 3.1. Se dice que un espacio lineal normado X es UCED si y solo si $\forall z \in X \setminus \{0\}$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si
a) $\|x\| = \|y\| = 1$
b) $x - y = \lambda z$
c) $\|\frac{x+y}{2}\| > 1 - \delta$
entonces $|\lambda| < \epsilon$.

Teorema 3.1. *Cada uno de los siguientes es una condición necesaria y suficiente para que un espacio X normado y lineal sea UCED.*
(I) Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$
  (a) $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, *para todo* n
  (b) $x_n - y_n = \alpha_n z$, $\forall n$
  (c) $\|x_n + y_n\| \longrightarrow 2$
se tiene que $\alpha_n \longrightarrow 0$
(II) Si existen sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *tales que:*
  (α) $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1, \forall n$.
  (β) $x_n - y_n \longrightarrow z$
  (γ) $\|x_n + y_n\| \longrightarrow 2$
entonces $z = 0$.
(III-p) Para todo elemento $z \in X \setminus \{0\}$ *no existe ninguna sucesión acotada* $\{x_n\}$ *en X tal que*

$$2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p \longrightarrow 0$$

  (p puede ser cualquier número real mayor que 2).
(IV)Para cada $z \in X \setminus \{0\}$, *existe un número positivo* Δ *tal que si* $\|x\|, \|x + z\| \leq 1$

$$\left\| x + \frac{z}{2} \right\| < 1 - \Delta$$

Demostración. Supongamos que X es UCED y que x_n, y_n, z satisfacen las condiciones $(a)-(c)$ de la primera caracterización. Si n es lo suficientemente grande, como $\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\| \to 1$, para cualquier $\delta > 0$ se tiene que $\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\| < 1-\delta$ y por tanto se obtiene que para cualquier ϵ, $|\alpha_n| < \epsilon$, luego $\alpha_n \to 0$. Por lo que (I) queda implicado por la UCED.

(I⇒II)Supongamos por reducción al absurdo que se satisface (I) y que tanto $\{x_n\}, \{y_n\}$ como z verifican $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ pero $z \neq 0$. Para cada n, sea θ_n el menor de 1 y $\|x_n - z\|^{-1}$.

Sean $\xi_n = \theta_n x_n$, $\eta_n = \theta_n(x_n - z)$. Entonces $\theta_n \in (0,1]$ y se deduce de (α) y (β) que $\theta_n \to 1$, ya que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|^{-1} = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|^{-1} \geq 1$. Por tanto, tanto $\|\xi_n\| = \theta_n\|x_n\|$ como $\|\eta_n\| = \theta_n\|x_n - z\|$ son menores que 1, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\xi_n - \eta_n = \theta_n z$$
$$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n + \eta_n\| = 2$$

Sea para cada n,

$$u_n = \xi_n + \alpha_n z$$
$$v_n = \eta_n - \beta_n z$$

donde α_n, β_n son números no negativos tales que:

$$\|u_n\| = \|v_n\| = 1 \tag{3.1}$$

Entonces

$$0 \leq \alpha_n = \frac{\|u_n - \xi_n\|}{\|z\|} \leq \frac{2}{\|z\|} \tag{3.2}$$
$$0 \leq \beta_n = \frac{\|\eta_n - v_n\|}{\|z\|} \leq \frac{2}{\|z_n\|} \tag{3.3}$$
$$u_n - v_n = (\theta_n + \alpha_n + \beta_n)z \tag{3.4}$$

y donde $\liminf_{n\to\infty}(\theta_n + \alpha_n + \beta_n) \geq 1$

$$\begin{aligned} u_n + v_n &= \xi_n + \eta_n + (\alpha_n + \beta_n)z && (3.5)\\ &= \theta_n x_n + \theta_n(x_n - z) + (\alpha_n - \beta_n)z && (3.6)\\ &= x_n + y_n + (\alpha_n - \beta_n)(x_n - y_n) && (3.7)\\ &+ \left[(\theta_n - 1)\,x_n + (\theta_n x_n - \theta_n z - y_n) + (\alpha_n - \beta_n)\,(z - x_n + y_n)\right] && (3.8) \end{aligned}$$

Si $\alpha_n \geq \beta_n$ y $\|x_n + y_n\| > 2 - \Delta$ por (γ) entonces

$$\begin{aligned} \|x_n + y_n + (\alpha_n - \beta_n)\,(x_n - y_n)\,\| &= \|\,(1 + \alpha_n - \beta_n)\,(x_n + y_n) - 2\,(\alpha_n - \beta_n)\,y_n\| && (3.9)\\ &> (1 + \alpha_n - \beta_n)\,(2 - \Delta) - 2\,(\alpha_n - \beta_n) && (3.10)\\ &= 2 - \Delta\,(1 + \alpha_n - \beta_n) && (3.11) \end{aligned}$$

Como la expresión en (3.8) tiende a 0, sigue de (3.9), (3.10) y de una desigualdad similar para el caso $\alpha_n \leq \beta_n$, que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n + v_n\| = 2 \tag{3.12}$$

Tenemos entonces una contradicción pues (3.1)-(3.4) y (3.12) implican que el espacio no cumple la propiedad (I), ya que $\liminf(\theta_n + \alpha_n + \beta_n) \geq 1$

(II)⇒(III$-p$) Introducimos previamente un lema auxiliar para la prueba de dicha implicación:

Lema 3.1. *Sean a, b, p tres números reales tales que $a \leq b \leq 0$ y $p \geq 2$. Entonces se cumple que:*

$$2^{p-1}(a^p + b^p) \geq (a-b)^p + (a+b)^p \tag{3.13}$$

Demostración. Es claro que para $a = b$ se alcanza la igualdad en (3.13). Definamos ahora la función dada por $f(a) = 2^{p-1}(a^p + b^p) - [(a-b)^p + (a+b)^p]$. Veamos que $f'(a) \geq 0$. Si dividimos entre pa^{p-1} y sustituimos $\epsilon = \frac{b}{a}$, tenemos que $f'(a) = 2^{p-1}pa^{p-1} - p[(a-b)^{p-1} + (a+b)^{p-1}] \geq 0$ sii:

$$g(\epsilon) = 2^{p-1} - [(1-\epsilon)^{p-1} + (1+\epsilon)^{p-1}] \geq 0$$

Como g es decreciente, ya que $g'(\epsilon) = (p-1)[(1-\epsilon)^{p-2} - (1+\epsilon)^{p-2}] < 0$ $\forall \epsilon \in (0,1)$ y $g(1) = 0$, se tiene por tanto que $f'(a) \geq 0$ y que la desigualdad se tiene para todo $a \geq b \geq 0$.

□

Si (III$-p$)no se satisface hay un elemento z no nulo y una sucesión acotada $\{x_n\}$ tal que:

$$2^{p-1}\left(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p\right) - \|2x_n + z\|^p \longrightarrow 0 \tag{3.14}$$

Como $z \neq 0$, la sucesión $\|x_n\|$ no puede tender a 0 y no hay pérdida de generalidad al suponer que $\|x_n\| \to 1$, ya que se puede tomar una subsucesión cuya norma converja a un número positivo.

Sigue del lema auxiliar que si:

$$\begin{aligned} 2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p &\geq 2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - (\|x_n + z\| + \|x_n\|)^p \\ &\geq (\|x_n + z\| - \|x_n\|)^p \end{aligned}$$

entonces $\|x_n + z\| - \|x_n\| \to 0$ y $\|x_n + z\| \to 1$. Sigue de (3.13) por tanto que $\|2x_n + z\| \to 2$. Si $\xi_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \eta_n = \frac{x_n + z}{\|x_n + z\|}$, entonces z y las sucesiones $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ satisfacen $(\alpha) - (\gamma)$ tal que $z = 0$.
(III-$p \Rightarrow$ IV) Sigue de (III-p) que para cada elemento no nulo z, $\exists \Delta > 0$ tal que $\Delta \in (0, \frac{1}{2})$ y

$$2^{p-1}(\|x + z\|^p + \|x\|^p) - \|2x + z\|^p > 2^p p\Delta$$

si $\|x\| \leq 1$.
Si $\|x\| \leq 1$ y $\|x + z\| \leq 1$, se tiene que

$$\|2x + z\|^p < 2^p - 2^p p\Delta$$

entonces $\|x + \frac{z}{2}\| < (1 - p\Delta)^{\frac{1}{p}} < 1 - \Delta$.

Para completar la prueba del teorema 1, necesitamos probar que (IV) implica que el espacio es UCED. Supongamos que $z \neq 0$ y $\epsilon > 0$. Usemos (IV) para obtener el número positivo Δ tal que

$$\left\|\xi + \frac{1}{2}\epsilon z\right\| < 1 - \Delta$$
$$\|\xi\| \leq 1$$
$$\|\xi + \epsilon z\| \leq 1$$

Sean x, y tales que $\|x\|, \|y\| = 1$, $x - y = \lambda z$. Si $|\lambda| \geq \epsilon$, sea $\xi = -sign\lambda x$.
Entonces $\|\xi\| = 1$ y $\|\xi + |\lambda| z\| = \|y\| = 1$, por lo que:

$$\|\xi + \epsilon z\| = \left\|(1 - |\frac{\epsilon}{\lambda}|)\xi + |\frac{\epsilon}{\lambda}|(\xi + |\lambda| z)\right\| \leq 1.$$

y $\|\xi + \frac{1}{2}\epsilon z\| < 1 - \Delta$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| &= \left\|x - \frac{1}{2}\lambda z\right\| \\
&= \left\|\xi + \frac{1}{2}|\lambda| z\right\| \\
&\leq \frac{|\lambda|}{2|\lambda|-\epsilon}\left\|\xi + \frac{1}{2}\epsilon z\right\| + \frac{|\lambda|-\epsilon}{2|\lambda|-\epsilon}\|\xi + |\lambda| z\| \\
&< \frac{|\lambda|(1-\Delta)}{2|\lambda|-\epsilon} + \frac{|\lambda|-\epsilon}{2|\lambda|-\epsilon} \\
&= \frac{(2-\Delta)|\lambda|-\epsilon}{2|\lambda|-\epsilon}
\end{aligned}$$

Esto y $\Delta > 0$ implican que $\|\frac{1}{2}(x+y)\| < 1 - \frac{1}{2}\Delta$, y podemos tomar el δ de la definición como $\frac{1}{2}\Delta$.

□

Si X es UCED, entonces X es estrictamente convexo. El recíproco no es cierto. Por ejemplo, el espacio $\mathcal{C}([0,1])$ de todas las funciones reales continuas en el intervalo unidad con la norma:

$$\|f\| = \sup(|f(t)|) + \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

es estrictamente convexo, pero no es UCED como podemos probar en [8].

Indicamos ahora un teorema que nos permite abordar la principal cuestión que nos ocupa en este capítulo. Que todo espacio separable pueden renormarse para que sean UCED y por tanto estrictamente convexo.

Teorema 3.2. *Un espacio normado lineal X es isomorfo a un espacio que es UCED si B^* contiene un conjunto numerable total sobre B.*

Demostración. Seguimos la demostración dada en [12]. Veamos que un espacio X puede ser renormado en un espacio UCED si existe una inyección lineal continua T entre X y un espacio UCED que denominaremos Y.

Para ello definamos una nueva norma equivalente como:

$$|||x||| = (\|x\|^2 + \|Tx\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Probamos primero que ambas normas son equivalentes, puesto que T es continua y por tanto $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ para cada vector x. Entonces,

$$\|x\| \leq (\|x\|^2 + \|Tx\|^2)^{\frac{1}{2}} = |||x||| \leq (1 + \|T\|)\|x\|$$

Empleamos ahora el apartado $(III-2)$ del teorema 1 de caracterización de espacios UCED, suponiendo que existe un $z \neq 0$ y una sucesión acotada $\{x_n\}$ en X para la cual:

$$2(|||x_n + z|||^2 + |||x_n|||^2) - |||2x_n + z|||^2 \longrightarrow 0 \qquad (3.15)$$

Veamos que que $\{Tx_n\}$ es una sucesión acotada en Y tal que:

$$2(\|Tx_n + Tz\|^2 + \|Tx_n\|^2) - \|2Tx_n + Tz\|^2 \longrightarrow 0 \qquad (3.16)$$

En efecto, si existiera una subsucesión $(Tx_{n_k})_k$ divergente, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{\|Tx_{n_k}\|}[(\|x_{n_k}+z\|^2+\|Tx_{n_k}+Tz\|^2)^{\frac{1}{2}}+(\|x_{n_k}\|^2+\|Tx_{n_k}\|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{1}{\|Tx_{n_k}\|}(\|2x_{n_k}+z\|^2+\|2Tx_{n_k}+Tz\|^2)^{\frac{1}{2}}]=1$$

lo cual es una contradicción puesto que el límite debería tender a 0, según (3.14).
Por (3.15) y la caracterización $III-p$ dada en el teorema 3.1, resulta que Y no es UCED.

En vista del resultado anterior es suficiente probar, en cada caso, que existe una aplicación continua lineal e inyectiva de B en un espacio de Hilbert. Definimos para ello $Tx = \{f_i(x)/2^i\}$, donde $\{f_i\}$ es una familia total de vectores normalizados en B.

En efecto, si $x \in B$:

$$\|Tx\|_2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k(x)^2}{2^{2k}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|f_k\|^2\|x\|^2}{2^{2k}}\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|$$

con lo que obtenemos que T está bien definida y es continua. Veamos ahora su linealidad. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y \in B$,

$$T(\alpha x+\beta y) = \left\{\frac{f_k(x)\alpha x+\beta y}{2^k}\right\} = \left\{\frac{\alpha f_k(x)+\beta f_k(y)}{2^k}\right\} = \alpha\left\{\frac{f_k(x)}{2^k}\right\}+\beta\left\{\frac{f_k(y)}{2^k}\right\} = \alpha Tx+\beta Ty$$

T es también un operador inyectivo, ya que si $Tx = Ty \implies \left\{\frac{f_k(x)}{2^k}\right\} = \left\{\frac{f_k(y)}{2^k}\right\}$, luego $\left\{\frac{f_k(x-y)}{2^k} = 0\right\}$, por lo que por ser el sistema total, $x = y$.

□

Corolario 3.1. *Todo espacio X normado lineal que sea separable o cuyo predual sea separable es isomorfo a un espacio que es UCED.*

Demostración. Sea X el espacio separable predual de un espacio normado lineal X'. Sea D numerable y denso en X y consideremos la aplicación $\varphi : X \longrightarrow X''$, tal que para todo $f \in X'$, $\varphi(x)(f) = f(x)$. Veamos que $\varphi(D)$ es un conjunto total sobre X'. Sabemos que para cada $f \in X' \setminus \{0\}$, $\exists x \in D$ tal que $f(x) \neq 0$. Para todo $x \in X$, $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$ que converge hacia x. Por tanto si $\forall f \in X'$, $f(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = 0$. Por tanto existe n tal que $f(x_n) \neq 0$, luego $\varphi(D)$ es conjunto total sobre X. Como $\varphi(D)$ es numerable al ser D numerable y φ inyectiva, podemos aplicar el teorema 3.2 y X' se puede renormar en un espacio UCED.

Si $Y = X'$ fuera el espacio separable, también contiene un conjunto total numerable. Para demostrarlo nos basaremos en la prueba de [5]. Sea un conjunto numerable denso $\{d_n\}$ de $B = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ y escojamos $d'_n \in Y'$ con $d'_n(d_n) = 1$ para cada n, cuya existencia queda asegurada por el teorema de Hahn-Banach. Supongamos ahora por reducción al absurdo que $\{d'_n\}$ no es total sobre Y. Entonces existe $y \in Y \setminus \{0\}$ tal que $d'_n(y) \neq 0$, para todo n. Entonces como $\{d_n\}$ es denso sobre B y los funcionales $\{d'_n\}$ tienen norma 1, se tiene que:

$$1 = |d'_n(y-d_n)| \leq \|y-d_n\| < \epsilon \tag{3.17}$$

con lo que tomando $\epsilon \leq 1$, tenemos una contradicción y queda probado que $\{d'_n\}$ es un conjunto total sobre B y obviamente numerable, por lo que, gracias al teorema 3.2, se tiene que Y puede ser renormado en un espacio UCED.

□

Corolario 3.2. *Todo espacio separable B puede ser renormado para que con la nueva norma sea estrictamente convexo, ya que todo espacio separable B puede ser renormado con una norma UCED.*

Aunque el corolario es válido para todo espacio separable, y para algunos, como ℓ_∞ que no es separable pero es dual del espacio separable ℓ_1, no se verifica para cualquier espacio normado.

En efecto, basándonos en un resultado de [3], (pp.225-226), que no probaremos por lo complejo de la demostración, mostramos el siguiente contrajemplo.

Proposición 3.1. *Sea $\|\cdot\|$ una norma equivalente sobre $\ell_\infty \setminus c_0$. Entonces $\|\cdot\|$ no es una norma estrictamente convexa.*

Capítulo 4

Representabilidad finita y ultrapotencias de espacios de Banach

4.1. Representabilidad finita

Definición 4.1. Sean E, F dos espacios de Banach. Diremos que F es finitamente representable en E (F f.r. E) si $\forall \epsilon > 0$, para cada subespacio $F^1 \subset F$ con dimensión finita $m < \infty$, existe un subespacio de dimensión finita E^1 en E con $m = \dim F^1 = \dim E^1$ y un isomorfismo $T : F^1 \longrightarrow E^1$ que verifica:

$$\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon \tag{4.1}$$

Observación 4.1. Una condición equivalente a (4.1) es la existencia de un isomorfismo $T : F^1 \longrightarrow E^1$ tal que $\forall \eta > 0$

$$(1 - \eta)\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1 + \eta)\|x\|$$

para todo $x \in F^1$. En efecto, en tal caso $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \frac{1+\eta}{1-\eta}$ y F es finitamente representable en E.

Observación 4.2. Es claro que tanto E, como cada subespacio de E es finitamente representable en E. Asimismo, es fácil comprobar que la relación finitamente representable es transitiva. En efecto si G, F, E son tres espacios de Banach tales que G f.r. F y F f.r. E, dado un subespacio F^1 de dimensión finita de F existe $E^1 \subset E$, subespacio de la misma dimensión que F^1 y un isomorfismo $T_{F,E} : F^1 \to E^1$ tal que $\forall \delta > 0$,

$$\|T_{F,E}\|\|T_{F,E}^{-1}\| < 1 + \delta$$

Análogamente existe un subespacio G^1 de G y un isomorfismo $T_{G,F} : G^1 \to F^1$ tal que $\forall \delta > 0$:

$$\|T_{G,F}\|\|T_{G,F}^{-1}\| < 1 + \delta$$

por lo que tomando $\epsilon = \delta^2 + 2\delta$ y definiendo el isomorfismo $T_{G,E} : G^1 \to E^1$ dado por $T_{G,E} = T_{G,F} \circ T_{F,E}$, se tiene:

$$\|T_{G,E}\|\|T_{G,E}^{-1}\| \leq \|T_{G,F}\|\|T_{G,F}^{-1}\|\|T_{G,F}\|\|T_{F,E}^{-1}\| < 1 + \delta^2 + 2\delta = 1 + \epsilon$$

y G es finitamente representable en E.

Ejemplo 4.1. Sea $E = (\Pi_{n \geq 1} \ell_1^{(n)})_2$ (ver definición en preliminares). Entonces ℓ_1 es finitamente representable en E.
En efecto, sea $\epsilon > 0$ y $F^1 \subset \ell_1$ espacio de dimensión $m < \infty$. Sea $f_1, ..., f_m$ una base algebraica

de F^1, con $\|f_i\|_1, i = 1, ..., m$. Como todas las normas son equivalentes en espacios de dimensión finita, la norma inducida en F^1 por la norma usual de ℓ_1 es equivalente a la norma $\|\sum_{i=1}^m a_i f_i\|$. Entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que para toda sucesión $a_1, ..., a_m$:

$$\delta \sum_{i=1}^m |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_1$$

Elegimos $f_i' \in \ell_1 \ \forall i \in \{1, ..., m\}$ con un nmero finito de componentes no nulas, tal que $\|f_i - f_i'\|_1 < \alpha$, con α satisfaciendo que

$$\frac{1 + \frac{\alpha}{\delta}}{1 - \frac{\alpha}{\delta}} < 1 + \epsilon$$

Entonces obtenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i (f_i - f_i') \right\|_1 \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_1 + \alpha \sum_{i=1}^m |a_i| \left(1 + \frac{\alpha}{\delta}\right) \tag{4.2}$$

y asimismo

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i' \right\|_1 \geq \left(1 - \frac{\alpha}{\delta}\right) \left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_1$$

que junto resulta

$$(1 - \frac{\alpha}{\delta}) \left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_1 \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i' \right\|_1 \leq (1 + \frac{\alpha}{\delta}) \left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_1$$

Esto conduce a que el operador $U : F^1 \longrightarrow span\{f_1', ..., f_m'\}$ dado por $Uf_i = f_i', \forall i = 1, ..., m$, cumpla que:

$$\|U\| \leq 1 + \frac{\alpha}{\delta}$$
$$\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\delta}}$$

Sea u_k el índice del último término no nulo de f_k', $k = 1, .., m$ y $n = \max_{1 \leq k \leq m} n_k$. Entonces $span\{f_1', ..., f_m'\}$ es isométrico a un subespacio de $\ell_1^{(n)}$, que es un subespacio de E. Por tanto, U compuesto con estas inclusiones, es el isomorfismo buscado.
El uso de la norma ℓ_2 para la definición de E no reviste importancia alguna, ya que con cualquier norma sobre el producto $\Pi_{n \geq 1} \ell_1^{(n)}$ habríamos obtenido el mismo resultado. Pero con la norma ℓ_2 o con una norma ℓ_p $(1 < p < \infty)$, E es un espacio reflexivo lo que nos permite afirmar que la reflexividad no es una propiedad que se transmite a través de la representabilidad finita.

Proposición 4.1. *Si E es uniformemente convexo y F es finitamente representable en E, entonces F es uniformemente convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in F$ con $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geq \epsilon$. Para cada $\eta > 0$, sea E^1 un espacio de dimensión 2 y $T : span\,\{x, y\} \to E^1$ un isomorfismo con $\|T\| \leq 1 + \eta$, $\|T^{-1}\| \leq 1$. Pongamos $x' = Tx$, $y' = Ty$. Entonces

$$\|x'\| \leq 1 + \eta$$
$$\|y'\| \leq 1 + \eta$$
$$\|x' - y'\| = \|T(x - y)\| \geq \|x - y\| \geq \epsilon$$

Como E es un espacio uniformemente convexo, tenemos que:

$$\left\|\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{1+\eta}+\frac{y'}{1+\eta}\right)\right\| \leq 1-\delta_E\left(\frac{\epsilon}{1+\eta}\right)$$

o bien

$$\left\|\frac{x'+y'}{2}\right\| \leq (1+\eta)\left(1-\delta_E\left(\frac{\epsilon}{1+\eta}\right)\right)$$

Al final para cada $\eta > 0$ obtenemos que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \left\|\frac{x'+y'}{2}\right\| \leq (1+\eta)\left(1-\delta_E\left(\frac{\epsilon}{1+\eta}\right)\right) \tag{4.3}$$

y así queda probado que F es uniformemente convexo y que

$$\delta_F(\epsilon) \geq \lim_{\eta\to 0} \delta_E\left(\frac{\epsilon}{1+\eta}\right) \geq \delta_E\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

(El límite previo no es necesariamente igual a $\delta_E(\varepsilon)$, ya que δ_E no tiene por qué ser continuo. Sin embargo, como $\delta(\cdot)$ es creciente, resulta que el límite previo es mayor que $\delta_E\left(\frac{\varepsilon}{1+\alpha}\right)$ para todo $\alpha > 0$, en particular para $\alpha = 1$.

□

Mostraremos a continuación un método general para producir espacios de Banach finitamente representables en un espacio de Banach E dado. En dicha construcción será clave el concepto de ultrapotencia, que introduciremos en la misma.
Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no trivial sobre $\mathbb{N}$, es decir, un ultrafiltro que no sea el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contienen a un determinado natural k_0.
Consideremos el producto $E^{\mathbb{N}}$ y el subespacio $\mathcal{F} \subset E^{\mathbb{N}}$ formado por las sucesiones acotadas de dicho espacio:

$$\mathcal{F} = \{\bar{x} \in E^{\mathbb{N}} : \bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\}$$

En este subespacio, la aplicación $p : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(\bar{x}) = \text{lím}_{\mathcal{U}} \|x_n\|$ define una seminorma. (Si el ultrafiltro fuera trivial $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \|x_{k_0}\|$).En efecto, dado un escalar α, tal que $p(\bar{\alpha x}) = \text{lím}_{\mathcal{U}} \|\alpha x_n\| = |\alpha| \text{lím}_{\mathcal{U}} \|x_n\| = |\alpha|\|p(\bar{x})\|$, por lo que la homogeneidad absoluta queda probada. Veamos que la subaditividad queda probada ya que $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{F}$:

$$p(\bar{x}+\bar{y}) = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| + \lim_{\mathcal{U}} \|y_n\| = p(\bar{x}) + p(\bar{y})$$

El límite existe pues todo ultrafiltro en un conjunto compacto es convergente y las sucesiones $\|x_n\|, \|y_n\|$ están contenidas en un compacto sobre $\mathbb{R}$ al ser acotadas.
Denominamos como $\mathcal{N}$ al kernel de la seminorma:

$$\mathcal{N} = \{\bar{x} \in E^{\mathbb{N}} : \bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| = 0\} \tag{4.4}$$

Definimos el cociente $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ como $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ o simplemente $\tilde{E}$. En dicho cociente, la aplicación $q : E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $q(\tilde{x}) = \text{lím}_{\mathcal{U}} \|x_n\|$ es una norma, con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento de la clase $\tilde{x}$. Veamos que se verifican las tres propiedades de la norma:

$$q(\tilde{x}) = 0 \implies \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| = 0 \implies \bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N} \implies \tilde{x} = 0$$

Como $q(\tilde{x}) = p(\bar{x})$, si $\bar{x}$ es un elemento de la clase $\tilde{x}$, la subaditividad y la homogeneidad de q quedan probadas al haber sido ya demostradas para p. Por definición de cociente, recordemos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos representantes de una clase $\tilde{x} \in E$, entonces $\lim_{\mathcal{U}} \|x_n - x'_n\|=0$, luego $\lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x'_n\|$.
Si E es de dimensión finita, las bolas cerradas son compactas y para toda sucesión acotada en E, (x_n), existe el límite $\lim_{\mathcal{U}} x_n$ en E para la norma anteriormente definida. Si $x = \lim_{\mathcal{U}} x_n$, entonces $\|x\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\|$ y $\tilde{E}$ es isométrico a E: no se obtiene nada más con este proceso si E es de dimensión finita.

Proposición 4.2. *$\tilde{E}$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(f^{(n)}n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\tilde{E}$. Para demostrar la convergencia de la misma, basta probar que existe una subsucesión convergente. Por lo tanto, supongamos que $\|f^{(n)} - f^{(n-1)}\|_{\tilde{E}} < \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sean:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= f^{(1)} \\ u^{(2)} &= f^{(2)} - f^{(1)} \\ &\vdots \\ u^{(n)} &= f^{(n)} - f^{(n-1)} \end{aligned}$$

entonces $f^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} u^{(j)}$, $\|u^{(n)}\|_{\tilde{E}} < \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq 1$ y queremos probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u^{(n)}$ es convergente en $\tilde{E}$.
Para cada $n \geq 1$, elijamos un representante $(u_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $u^{(n)}$ (esto es, un elemento de la clase $u^{(n)}$). Esto puede hacerse con $\|u_k^{(n)}\| < \frac{1}{2^n}$. En efecto, si $(v_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ es un representante cualquiera de $u^{(n)}$, tenemos que $\lim_{\mathcal{U}} \|v_i^{(n)}\| < \frac{1}{2^n}$ por lo que elegimos $u_i^{(n)} = v_i^{(n)}$ si $\|v_i^{(n)}\| < \frac{1}{2^n}$ y $u_i^{(n)} = 0$ en caso contrario.
Definimos $u_i = \sum_{j=1}^{\infty} u_i^{(j)}$ que converge normalmente pues $\sum_{j=1}^{\infty} \|u_i^{(j)}\| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty$, luego $u_i \in E$. Sea u la clase de $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $\tilde{E}$. Veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} u^{(n)}$ converge a u. En efecto $\forall i \in \mathbb{N}, \forall n \geq 1$.

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} u_i^{(j)} - u_i\right\| \leq \left\|\sum_{j\geq n+1} u_i^{(j)}\right\| \leq \sum_{j\geq n+1} \|u_i^{(j)}\| \leq \frac{1}{2^n}$$

Pero $\left(\sum_{j=1}^{n} u_i^{(j)}\right)$, por lo que:

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} u^{(j)} - u\right\| \leq \frac{1}{2^n} \tag{4.5}$$

con lo que se prueba la convergencia.

□

Proposición 4.3. *$\tilde{E}$ contiene un subespacio isométrico a E.*

Demostración. Para cada $x \in E$ sea la sucesión constante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\dot{x}$ la clase de equivalencia de dicha sucesión. Entonces la aplicación $\varphi : E \longrightarrow \tilde{E}$ dada por $\varphi(x) = \dot{x}$ es una isometría ya que $\|x\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| = \|\dot{x}\|$.

□

Proposición 4.4. *$\tilde{E}$ es finitamente representable en E.*

Demostración. Sea $\tilde{E}^1$ un espacio de dimensión finita de $\tilde{E}$ y $\varepsilon > 0$. En $\tilde{E}^1$ elegimos una base algebraica $(z^{(1)}, ..., z^{(m)})$, $(m = \dim \tilde{(E)}^1)$ con $\|z^{(1)}\|_{\tilde{E}} = ... = \|z^{(m)}\|_{\tilde{E}} = 1$. Como $\tilde{E}^1$ es finito dimensional, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall a_1, a_2, \cdots, a_m$ escalares se tiene:

$$\delta \sum_{j=1}^{m} |a_j| \leq \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}} \leq \sum_{j=1}^{m} |a_j| \tag{4.6}$$

Como la esfera unidad de ${\ell_1}^{(m)}$ es compacta, para cada $\eta > 0$, puede ser recubierta por un número finito, digamos L, de bolas de radio η. Por tanto, para todo $\eta > 0$ existe una η-red en esta esfera unidad, esto es, un número finito L de sucesiones finitas $(a_1^{(l)}, \cdots, a_m^{(l)})_{l=1,...,L}$, tales que $\sum_{j=1}^{m} |a_j^{(l)}| = 1$ para cada $l = 1, ..., L$ y tal que cada sucesión $a_1, ..., a_m$ con $\sum_{j=1}^{m} |a_j| = 1$ está a distancia como máximo de η a uno de los $(a_j^{(l)})_{1 \leq j \leq m}$, para $l = 1, ..., L$. Elegiremos $\eta > 0$ tal que $\frac{\delta + 3\eta(1+\eta)}{\delta - 3\eta(1+\eta)} < 1 + \epsilon$. Podemos suponer asimismo que la base canónica de $\ell_1^{(m)}$ está incluida en la η-red.

Sea $(z_i^{(j)})$ un representante de $z^{(j)}$ para cada $j = 1, ..., m$. Tenemos entonces, por definición de $\tilde{E}$ para cada $l = 1, ..., L$:

$$\lim_{\mathcal{U}} \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(l)} z_i^{(l)} \right\|_E = \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(l)} z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}}$$

Por tanto, podemos encontrar un índice i_0 para el cual $\forall l = 1, ..., L$:

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(l)} z_{i_0}^{(j)} \right\|_E - \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(l)} z(j) \right\|_{\tilde{E}} \right| < \eta$$

En particular, como hemos supuesto que la base canónica de $\ell_1^{(m)}$ está incluida en la η-red:

$$\|z_{i_0}^{(j)}\| \leq 1 + \eta, j = 1, ..., m$$

Si $(a_j)_{j=1,...,m}$ es una sucesión con $\sum_{j=1}^{m} |a_j| = 1$, como se tiene que para algún $l \in \{1, ..., L\}$, $\sum_{j=1}^{m} |a_j - a_j^{(l)}| < \eta$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z_{i_0}^{(j)} \right\|_E - \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}} \right| &< \eta + \sum_{j=1}^{m} |a_j - a_j^{(l)}| \|z_{i_0}^{(j)}\|_E + \sum_{j=1}^{m} |a_j - a_j^{(l)}| \|z^{(j)}\|_{\tilde{E}} \\ &< \eta + \eta(1+\eta) + \eta < 3\eta(1+\eta) \end{aligned}$$

ya que sumando y restando $\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(l)} z_{i_0}^{(j)} \|_E$ y $\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(l)} z^{(j)} \|_{\tilde{E}}$, tenemos por la desigualdad triangular inversa que:

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z_{i_0}^{(j)} \right\|_E - \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(l)} z_{i_0}^{(j)} \right\|_E \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^{m} (a_j - a_j^{(l)}) z_{i_0}^{(j)} \right\|_E \leq \sum_{j=1}^{m} |a_j - a_j^{(l)}| \|z_{i_0}^{(j)}\|_E$$

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}} - \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(l)} z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}} \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j - a_j^{(l)} z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}} \leq \sum_{j=1}^{m} |a_j - a_j^{(l)}| \|z^{(j)}\|_{\tilde{E}}$$

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(l)} z_{i_0}^{(j)} \right\|_E - \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(l)} z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}} \right| \leq \eta$$

Como $\sum_{j=1}^{m} |a_j| = 1$, la expresión anterior puede reescribirse con ayuda de (4.6) como:

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z_{i_0}^{(j)} \right\|_E - \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}} \right| < \frac{3\eta(1+\eta)}{\delta} \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}}$$

luego

$$\left(1 - \frac{3\eta(1+\eta)}{\delta}\right) \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}} \leq \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z_{i_0}^{(j)} \right\|_E \leq \left(1 + \frac{3\eta(1+\eta)}{\delta}\right) \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j z^{(j)} \right\|_{\tilde{E}}$$

Estas desigualdades implican que el operador $T : \tilde{E}^1 \longrightarrow span\{z_{i_0}^{(1)}, ..., z_{i_0}^{(m)}\}$, dado por $Tz^{(1)} = z_{i_0}^{(1)}, ..., Tz^{(m)} = z_{i_0}^{(m)}$ es un isomorfismo con:

$$\|T\| \leq 1 + \frac{3\eta(1+\eta)}{\delta}$$
$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{3\eta(1+\eta)}{\delta}}$$

□

Así obtenemos una clase muy importante de espacios de Banach finitamente representables en E. Esto es una clase ya que se puede considerar cualquier ultrafiltro en $\mathbb{N}$, aunque nuestra notación $\tilde{E}$ no lo demuestra. Para la conclusión final solo necesitaremos este tipo de ultrapotencias, pero se puede definir asimismo ultrapotencias de forma más general $\frac{E^I}{\mathcal{U}}$ donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en el conjunto I. Con esta definición más general se puede probar que cada espacio F finitamente representable en E es un subespacio de una ultrapotencia E.

Proposición 4.5. *Si E es un espacio de dimensión infinita, la ultrapotencia $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ no es separable.*

Demostración. Antes de comenzar la prueba introducimos un resultado auxiliar.

Lema 4.1. *Sea E un espacio normado de dimensión infinita. Se puede encontrar en E una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$\|x_n\| = 1$$
$$dist(x_{n+1}, span(x_1, ..., x_n)) \geq 1$$

La última condición implica por supuesto que $\|x_n - x_m\| \geq 1$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$ distintos.

Demostración. Supongamos que $x_1, ..., x_n$ ha sido construido. Sea $F_n = span(x_1, ..., x_n)$ y sea $a \in E$, $a \notin F_n$. Sea $G = span(a, x_1, ..., x_n)$. Entonces F_n es un hiperplano de G y así existe un funcional f_n con norma 1, definido en G_n tal que $f_n = 0$ en F_n.

Sea ahora x_{n+1} tal que $\|x_{n+1}\| = 1$ y $f_n(x_{n+1}) = 1$. La existencia de dicho punto queda asegurada por la compacidad de la bola unidad G_n. Entonces, para cada sucesión de escalares $a_1, ..., a_n$:

$$\left\| x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| > f_n(x_{n+1} - \sum_{i=1} a_i x_i) = 1$$

lo que significa que $dist(x_{n+1}, span(x_1, ..., x_n)) \geq 1$ y el lema queda probada.

□

Sea por tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E con $\|x_n\| = 1$, $\|x_n - x_m\| = 1$ si $n \neq m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.
Consideramos una familia no numerable $\mathcal{F}_0$ de subsucesiones de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que dos elementos distintos en $\mathcal{F}_0$ tengan solo un número finito de términos en común. Entonces, si $y_1, y_2 \in \mathcal{F}_0$ con $y_1 = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}, y_2 = (x_{n'_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\|y_1 - y_2\|_{\tilde{E}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_{n_k} - x_{n'_k}\|_E = 1$. Veamos a continuación que $\mathcal{F}_0$ es no numerable.
En efecto, supongamos que $\mathcal{F}_0$ es numerable. Entonces podemos escribir en una lista todas las subsucesiones $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tienen un número finito de términos en común.

$$\begin{aligned} y_1 &= (y_{1,1}, y_{1,2}, y_{1,3}, ...) \\ y_2 &= (y_{2,1}, y_{2,2}, y_{2,3}, ...) \\ y_3 &= (y_{3,1}, y_{3,2}, y_{3,3}, ...) \\ &\vdots \\ y_n &= (y_{n,1}, y_{n,2}, y_{n,3}, ...) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dicha lista es infinita, puesto que si consideramos la sublista de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de todas las subsucesiones que no tienen ningún término en común, vemos claramente por construcción que es infinita:

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1, x_3, x_6, ...) \\ z_2 &= (x_2, x_4, x_7, ...) \\ z_3 &= (x_5, x_8, ...) \\ z_4 &= (x_9, ...) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sin embargo, la sucesión $(\tilde{y}) = (y_{k_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que comparte un número de elementos finito con los otros elementos de la lista de subsucesiones que tiene un número finito de términos en comn pero que no se encuentra en la misma, por lo que tenemos una contradicción y $\mathcal{F}$ no se puede numerar.
Como $\mathcal{F}$ no es numerable se deduce que $\tilde{E}$ no es separable.

□

4.2. Superpropiedades de los espacios de Banach

Definición 4.2. Sea $(\mathcal{P})$ una propiedad definida para espacios de Banach. Decimos que el espacio de Banach E tiene la propiedad super$(\mathcal{P})$ si cada espacio de Banach finitamente representable en E tiene la propiedad $(\mathcal{P})$.

Observación 4.3. Si E es un espacio con la propiedad super$(\mathcal{P})$, como E es finitamente representable en sí mismo, E tiene la propiedad $(\mathcal{P})$.

Corolario 4.1. *E tiene super($\mathcal{P}$) si y solo si todas sus ultrapotencias $E^I/\mathcal{U}$ tienen la propiedad ($\mathcal{P}$).*

Demostración. Si E tiene super-($\mathcal{P}$) , toda ultrapotencia verifica ($\mathcal{P}$) porque es finitamente representable en E. Recíprocamente todo espacio finitamente representable en E es subespacio de una ultrapotencia de E y, por tanto, verifica ($\mathcal{P}$).

□

Ejemplo 4.2. Un espacio de Banach E será superreflexivo si cada espacio de Banach F es finitamente representable en E es reflexivo.
Por tanto, un espacio superreflexivo es reflexivo, aunque el recíproco no sea cierto, como se prueba con el espacio $\left(\Pi_{n\geq 1}\ell_1^{(n)}\right)_2$

Ejemplo 4.3. Otra superpropiedad sería la no representabilidad finita de ℓ_1 en E. Esta es una superpropiedad debido a la transitividad de la representabilidad finita.
Se denomina a esta superpropiedad como B-convexidad y puede ser definida sobre cualquier espacio además de ℓ_1, pero es especialmente interesante el análisis sobre dicho espacio. Obviamente superreflexividad implica B-convexidad, porque ℓ_1 no es reflexivo.

Como último resultado de esta sección mostramos el siguiente corolario.

Corolario 4.2. *Sean ($\mathcal{P}_1$), ($\mathcal{P}_2$) dos propiedades tales que:*

$$super(\mathcal{P}_1) \implies (\mathcal{P}_2) \implies (\mathcal{P}_1)$$

Entonces son equivalentes super($\mathcal{P}_1$) y super($\mathcal{P}_2$)

Demostración. En primer lugar, $super(\mathcal{P}_2) \implies super(\mathcal{P}_1)$, puesto que $(\mathcal{P}_2) \implies (\mathcal{P}_1)$.
Por otra parte si $super(\mathcal{P}_1) \implies (\mathcal{P}_2)$, entonces $super(super(\mathcal{P}_1)) \implies s.uper(\mathcal{P}_2)$

□

Como aplicación de estas definiciones, indicamos que la proposición 4.1 del párrafo anterior implica que la superconvexidad uniforme y convexidad uniforme son equivalentes. Como un espacio uniformemente convexo es reflexivo, obtenemos que dicho espacio es también superreflexivo.

4.3. Teorema de Enflo-Pisier

Por último indicamos un teorema que asegura el renormamiento de un espacio superreflexivo con una norma estrictamente convexa.

Teorema 4.1. *Sea E un espacio de Banach superreflexivo. Entonces, existe $p > 2$,$C > 0$ y una norma equivalente en E uniformemente convexa y con módulo de convexidad $\delta(\varepsilon)$ que cumple:*

$$\delta(\varepsilon) \geq C\varepsilon^p, \forall \varepsilon > 0 \tag{4.7}$$

Como consecuencia del teorema anterior se puede deducir el siguiente corolario.

Corolario 4.3. *Un espacio de Banach puede tener un renormamiento uniformemente convexo si y solo si es superreflexivo.*

Demostración. Por la proposición 4.1 y el corolario 4.2, se tiene que si un espacio uniformemente convexo es superreflexivo. El recíproco se obtiene del teorema anterior.

□

Capítulo 5

Normas estrictamente convexas y residualidad

Introducimos a continuación una serie de definiciones preliminares a los resultados que mostramos en este último capítulo, que nos permitirán llegar a las conclusiones finales del trabajo.

Definición 5.1. Sea T un espacio topológico. Decimos que dicho espacio es de Baire si la unión numerable de abiertos densos en T es también densa en T.

Definición 5.2. Sea T un espacio topológico y $S \subset T$.

(a) Se denomina a A como conjunto raro o denso en ninguna parte, si $\overline{int(A)} = \emptyset$.

(b) Se dice que B es un conjunto de primera categoría si es una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

(c) S es residual si es el complementario de un conjunto de primera categoría.

Observación 5.1. Una definición equivalente de conjunto residual S es la siguiente: S es residual si contiene un subconjunto G_δ que sea denso en T.

En efecto, si G es un conjunto G_δ denso en S, el complementario es F_σ, es decir una unión numerable de cerrados. El recíproco se obtiene por el teorema de categorías de Baire, que afirma que el interior de un conjunto de primera categoría es vacío. Veamos que si S es residual, entonces su residual es unión de conjuntos densos en ninguna y por tanto está contenido en un conjunto F_σ.

Definición 5.3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Designamos con (Q, ϱ) al espacio métrico completo de todas las seminormas continuas sobre $(X, \|\cdot\|)$ con la distancia inducida por la norma ϱ dada por, $\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in B_1\}$, con B_1 la bola unidad cerrada, para cada par de seminormas $f, g \in Q$.
Llamamos (P, ϱ) al espacio métrico de todas las normas equivalentes en $(X, \|\cdot\|)$.
Si $(X^*, \|\cdot\|^*)$ es el dual de $(X, \|\cdot\|)$, (P^*, ϱ^*) es el espacio métrico de todas las normas duales equivalentes con $\|\cdot\|^*$.

Observación 5.2. (Q, ϱ) es un espacio métrico completo, ya que al ser toda sucesión de Cauchy, uniformemente de Cauchy, esta converge uniformemente. Es fácil ver también que el límite de una sucesión de seminormas si existe, es siempre otra seminorma.
Como es completo, también es de Baire. Dado que P es abierto en (Q, ϱ), (P, ϱ) es igualmente de Baire. Veamos que P es abierto en (Q, ϱ).
Sea $p \in P$. Existe al ser p equivalente con la norma $\|\cdot\|$, un $m > 0$ tal que $\forall x \in X$, $p(x) > m\|x\|$.

Sea $q \in P$ norma distinta de p. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in S(x, 1)$ $|p(x) - q(x)| > \delta = \delta\|x\|$. Luego

$$q(x) \geq p(x) - \delta\|x\| \geq m\|x\| - \delta\|x\| \geq (m - \delta)\|x\| > 0$$

Tomando $\delta < m$ se tiene que $q(x) = 0$ si y solo si $x = 0$, luego q es una norma y P es por tanto abierto.

Observación 5.3. Existe un homeomorfismo $\phi : (P, \varrho) \longrightarrow (P^*, \varrho^*)$ tal que si p es una norma en P y $p^* \in P^*$ es su dual, entonces $\phi(p) = p^*$. La demostración de la existencia de dicho homeomorfismo puede encontrarse en [7].

Sin embargo, si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach no reflexivo, este admite una norma equivalente, con la cual X no es isométrico a un espacio dual, resultado probado en [4] y [11]. Por tanto, si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, existe un homeomorfismo entre $(P, varrho)$ y (P^*, ϱ^*), pero este nunca es un isomorfismo.

En los teoremas y en sus respectivas demostraciones designaremos a la convexidad estricta, a la convexidad localmente uniforme y a la convexidad uniformemente convexa en cada dirección como SC, LUC, UC respectivamente.

Teorema 5.1. *Sea $(X, |\cdot|)$ un espacio de Banach. Entonces el conjunto $\mathcal{R}$ de todas las normas SC equivalentes sobre $(X, |\cdot|)$ es vacío o residual en (P, ϱ). Se obtiene una afirmación análoga para normas UC o LUC.*
En el caso de normas uniformemente convexas, $\mathcal{R}$ es G_δ en (P, ϱ) o vacío.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Para $u \in P$, $j, k \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned} G(u, j) &= int\left\{v \in P : \left|u^2(y) + \frac{r^2(y)}{j} - v^2(y)\right| < \frac{1}{j^2}, \forall y \in B_1\right\} \\ G_k &= \bigcup\{G(u, j); j \geq k, u \in P\} \end{aligned}$$

Es claro que para cada $k \in \mathbb{N}$, G_k es abierto en (P, ϱ). Veamos que G_k es también denso en (P, ϱ). Para ello, tomemos $z \in P$. Entonces $(z^2 + \frac{r^2}{j})^{\frac{1}{2}} \in G(z, j) \subset G_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$ y $\varrho((z^2 + \frac{r^2}{j})^{\frac{1}{2}}, z) \to 0$ si $j \to \infty$. Por tanto, como (P, ϱ) es un espacio de Baire la intersección de abiertos es densa y así, $\bigcap G_k$ es G_δ y denso en (P, ϱ). Por tanto, basta ver que $\bigcap G_k \subset \mathcal{R}$.

Para probar esto, sea $s \in \bigcap G_k$ y sean $x, x_i \in X$ con $|x_i|, |x| \leq 1$ tales que $\lim(2s^2(x_i) + 2s^2(x) - s^2(x + x_i)) = 0$. Veamos que $\lim |x_i - x| = 0$. Como $s \in G_k$ tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $j_k \geq k$ y $s_k \in P$ tales que $|s_k^2(y) + \frac{r^2(y)}{j_k} - s^2(y)| \leq \frac{1}{j_k^2}$ para todo $y \in B_1$. Por la convexidad de s_k^2 se tiene que para cada $i, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{j^k}(2r^2(x_i) + 2r^2(x) - r^2(x + x_i)) &\leq 2\left(s_k^2 + \frac{r^2}{j_k}\right)(x_i) + 2\left(s_k^2 + \frac{r^2}{j_k}\right)(x) - \left(s_k^2 + \frac{r^2}{j_k}\right)(x + x_i) \\ &< \frac{8}{j_k^2} + 2s^2(x_i) + 2s^2(x) - s^2(x_i + x) \end{aligned}$$

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{j_k} \limsup(2r^2(x_i) + 2r^2(x) - r^2(x_i + x)) \leq \frac{8}{j_k^2} + \limsup(2s^2(x_i) + 2s^2(x) - s^2(x_i + x))$$

Por lo supuesto sobre x, x_i y s, tenemos que $\limsup(2s^2(x_i) + 2s^2(x) - s^2(x_i + x)) = 0$ y por tanto

$$\limsup(2r^2(x_i) + 2r^2(x) - r^2(x_i + x)) \leq \frac{8}{j_k} \leq \frac{8}{k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.
Entonces por convexidad de r^2, $\lim(2r^2(x_i) + 2r^2(x) - r^2(x_i + x)) = 0$ y por la convexidad localmente uniforme de r, $\lim |x_i - x| = 0$.

Para probar que el conjunto $\mathcal{R}$ de todas las normas UC equivalentes en X es un conjunto G_δ en X, basta observar que para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$G_n = \left\{ r \in P : \inf \left\{ 2r^2(x) + 2r^2(y) - r^2(x+y) : |x|, |y| \leq 1, |x-y| > \frac{1}{n} \right\} > 0 \right\}$$

es abierto en (P, ϱ) y $\bigcap G_n = \mathcal{R}$. Como además $\mathcal{R}$ es denso o vacío en (P, ϱ) (si $r \in \mathcal{R}$ y $z \in P$, entonces $(r^2 + z^2)\frac{1}{2} \in \mathcal{R}$) este argumento provee una prueba del teorema con norma UC.

□

Teorema 5.2. *Sea $(X, |\cdot|)$ un espacio de Banach. Entonces si $\mathcal{T}$ es el conjunto de todas las normas equivalentes en X cuyas normas duales en X^* son LUC es o bien vacío o residual en el espacio métrico (P, ϱ). Se obtiene igualmente un resultado análogo para normas SC o UC. En el caso de normas uniformemente convexas, $\mathcal{T}$ es G_δ en (P, ϱ).*

Demostración. La prueba del teorema 5.2 puede ser realizada de forma análoga a la del teorema 5.1 realizando el mismo razonamiento en el espacio (P^*, ϱ^*) y empleando posteriormente el homeomorfismo entre $(P\ \varrho)$ y (P^*, ϱ^*) señalado en la observación 5.2.

□

Como consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores se tiene este resultado obtenido por vez primera en [1].

Teorema 5.3. *Sea $(X, |\cdot|)$ un espacio de Banach. Supongamos que existe una norma equivalente $|\cdot|_1$ en X que es LUC y otra norma equivalente en X cuya norma dual es LUC. Entonces existe una norma equivalente $|\cdot|_3$ en X que es LUC y cuya norma dual $|\cdot|_3^*$ en X^* es LUC.*

Como conclusión podemos enunciar los siguientes corolarios sobre cierto tipo de espacios.

Corolario 5.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, lineal separable. Entonces el conjunto de normas SC equivalentes a $\|\cdot\|$ es residual en el espacio métrico (P, ϱ).*

Demostración. Se tiene por el corolario 3.2 y el teorema 5.1.

□

Corolario 5.2. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es superreflexivo, entonces el conjunto de normas equivalentes a $\|\cdot\|$ que sean uniformemente convexas y uniformemente suaves es residual en (P, ϱ).*

Demostración. Por el teorema de Enflo, se tiene que si $(X, \|\cdot\|)$ es superreflexivo, entonces existe un renormamiento con una norma UC, equivalente a $\|\cdot\|$. Veamos que además, $(X^*, \|\cdot\|)$ es superreflexivo. En efecto, teniendo en cuenta el corolario 4.1, si para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ las ultrapotencias $X^{\mathbb{I}}/\mathcal{U}$ son reflexivas entonces $(X, \|\cdot\|)$ es superreflexivo. Se tiene por el teorema 2.3 de [10], que $(X^{\mathbb{I}}/\mathcal{U})^* = (X^*)^{\mathbb{I}}/\mathcal{U}$, para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$. Luego $(X^*, \|\cdot\|^*)$ es también superreflexivo, por lo que existe un renormamiento UC de $(X^*, \|\cdot\|^*)$ con una norma equivalente a $\|\cdot\|^*$.
Como todas las normas en (P^*, ϱ^*) son duales de (P, ϱ) , se tiene por el teorema 5.2 que el conjunto de normas con norma dual UC es residual en (P, ϱ).
Dado que existe un renormamiento UC en (P, ϱ), por el teorema de Enflo, tenemos que por el teorema 5.1 el conjunto de normas UC es residual en (P, ϱ).
Emplearemos ahora un lema auxiliar sobre conjuntos residuales:

Lema 5.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* D_1, $D_2 \subset X$ *dos conjuntos residuales. Entonces* $D_1 \cap D_2$ *es también residual.*

Demostración. En efecto, sean $C_i = X \setminus D_i$ conjunto de primera categoría, es decir existe una colección numerable de conjuntos raros $\{K_l^i\}_{l \in \mathbb{N}}$, con la clausura de $int(K_l^i)$ vacía para $i = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}$.
La intersección $D_1 \cap D_2 = X \setminus (C_1 \cap C_2)$. Tenemos por tanto que:

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} K_l^1 \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^2 = \bigcup_{j,l=1}^{\infty} K_l^1 \cap K_j^2$$

y como $\overline{int(K_l^1 \cap K_j^2)} = \overline{int(K_l^1)} \cap \overline{int(K_j^2)} = \emptyset$, el complementario de $D_1 \cap D_2$ es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, es decir, que es de primera categoría y por tanto $D_1 \cap D_2$ es residual.

□

Al ser residual la intersección de dos conjuntos residuales, y ser un espacio uniformemente suave si y solo si su norma dual es uniformemente convexa, se tiene que el conjunto de renormamientos con normas UC y US en $(X, \|\cdot\|)$, es residual en (P, ϱ).

□

Bibliografía

[1] E. Asplund, Averaged norms, Israel J. Math. 5, 227-233 (1967)

[2] B.Beauzamy, Introduction to Banach spaces and their geometry, North-Holland Publishing Company (1982)

[3] J. Bourgain, $\ell_{\infty \setminus c_0}$ has no equivalent strictly convex norm, Proc. Amer. Math. Soc. 78, 1980

[4] W. J. Davis y W. B. Johnson, A renorming of non-reflexive Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973), 486488. MR 46:9693

[5] J. Diestel, Sequences and Series in Banach Space, Springer Verlag. (1984)

[6] P. Enflo, Banach spaces, which can be given an equivalent uniformly convex norm. Israel J. Math. Vol 13 (1972)

[7] M. Fabian Zajíček and V. Zizler, Math. Ann. 258, 349-351 (1982)

[8] L. Garkavi, The best possible net and the best possible cross-section of a set in a normed space, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 26, (1962) 87-106; Amer. Math. Soc. Transi., Ser. 2, 39, (1964) 111-132., pp. 126-127

[9] J. Horváth, Topological Vector Spaces and Distributions, Addison-Wesley Publishing Company (1966)

[10] J. Stern, Ultrapowers and local properties of Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 240 (1978) 231252.

[11] L. Veselý, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999) 2807-2809

[12] V. Zizler, On some rotundity and smoothness properties of Banach spaces, Dissertationes Math. Rozprawy Mat. 87 (1971)