FACULTAD DE CIENCIAS

ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Teoría de Juegos. Juegos de Suma Cero

Trabajo Fin de Grado presentado por David Duwison Pérez, siendo el tutor del mismo el profesor Jesús Muñoz San Miguel.

Vº. Bº. del Tutor: Alumno:

D. Jesús Muñoz San Miguel D. David Duwison Pérez

Sevilla. Junio de 2017

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

TRABAJO FIN DE GRADO

CURSO ACADÉMICO [2016-2017]

TÍTULO:

TEORÍA DE JUEGOS. JUEGOS DE SUMA CERO

AUTOR:

DAVID DUWISON PÉREZ

TUTOR:

D. JESUS MUÑOZ SAN MIGUEL

DEPARTAMENTO:

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA I

ÁREA DE CONOCIMIENTO:

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONIMÍA Y LA EMPRESA

RESUMEN:

El objetivo del presente Trabajo Fin de Grado es conocer cómo la teoría de juegos es capaz de modelar y analizar las situaciones de conflicto.

El trabajo comienza introduciendo al lector en el campo de estudios de la teoría de juegos, explicando de forma breve los conceptos básicos de un juego. Posteriormente, se explica en que consiste un juego en forma normal y se analizan las estrategias puras y mixtas de éste. Además, se estudia el equilibrio de Nash tanto en estrategias puras como mixtas. A continuación, se estudian detenidamente los juegos de suma cero, así como los puntos maximín y minimax en estrategias puras y mixtas. Y en último lugar, se analiza una aplicación real de lo estudiado anteriormente sobre una batalla por la cuota de mercado.

PALABRAS CLAVE:

Teoría de juegos; juego de suma cero; batalla por la cuota de mercado.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Actualmente, vivimos en un mundo donde existen gran variedad de conflictos, la Teoría de Juegos se distingue por el hecho de ser una de las disciplinas cuyo ámbito de aplicación es de mayor amplitud, siendo las relaciones entre seres humanos en la sociedad, el principal objetivo a estudiar desde un punto de vista estratégico.

Con el paso del tiempo, la Teoría de Juegos ha adquirido una gran importancia bastante significativa. Aplicándose en muchos aspectos de la vida cotidiana donde las personas deben hacer frente a diferentes situaciones, y en las que es necesario tomar una decisión que está influenciada por acciones que otras personas lleven a cabo, es decir, estudia situaciones de conflicto y cooperación donde interactúan individuos racionales, analizando los comportamientos y los resultados que pueden obtenerse, siempre que las decisiones de los individuos se tomen de forma racional. La Teoría de Juegos, se encarga de estudiar estos conflictos a los que comúnmente llamamos juegos, de forma que cada persona o jugador pueda conseguir el mejor resultado posible.

De entre el gran número de matemáticos que han estudiado y tratado de desarrollar la Teoría de Juegos, destacan las figuras de John Von Neumann, que cuenta con significativas aportaciones como la Teorema Minimax, y John Forbes Nash, al que se le atribuye el conocido “Equilibrio de Nash”. Actualmente, Nash es el único matemático que ha recibido tanto el Premio Nobel de Economía, como la medalla Abel. Su contribución a las matemáticas va más allá de lo teórico. Fue capaz de desarrollar un estilo de modelización económica innovador, que mantenía la sencillez y representaba de forma fiel los aspectos principales de la situación que se analiza.

Los problemas estudiados por la Teoría de Juegos están bien definidos por objetos matemáticos. Un juego consiste en varios jugadores, con una serie de estrategias, y una serie de recompensas para cada combinación de estrategias. Una vez que se han establecido las normas de representación de un juego, pasamos a solucionarlo.

Este trabajo, se centra principalmente en los juegos de suma cero, y pretende mostrar que los problemas de decisión múltiple, llamados juegos, tienen una solución óptima en un sentido bien determinado para cada una de las partes.

El presente trabajo se ha planteado como un acercamiento a la Teoría de Juegos y se estructura en cinco capítulos. El primer capítulo es una introducción a la Teoría de Juegos, en la que incluimos conceptos y definiciones básicas. El capítulo 2 introduce la teoría de juego y los juegos en forma normal, así como el concepto de Equilibrio de Nash. El capítulo 3 se centra en los juegos de suma cero, en el cual se define que son estos juegos, y se explican las estrategias puras y mixtas de maximín y minimax. En el capítulo 4, se muestra una aplicación práctica sobre una situación real de una batalla por la cuota de mercado. Y por último, en el capítulo 5, obtenemos la conclusión obtenida con este trabajo.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS (TEORÍA DE JUEGOS)

2.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Cuando hablamos de juego, nos estamos refiriendo a una actividad donde los participantes intentan ganar siguiendo unas reglas, aunque también puede darse el caso de que el resultado sea la derrota. En un juego, cada jugador intenta conseguir el mejor resultado posible, es decir, maximizar su utilidad, teniendo en cuenta que el resultado depende no solo de tus propias acciones, sino que también depende de las acciones de los demás jugadores.

Antes de profundizar, utilizaremos como ejemplo el juego de las monedas para explicar la terminología básica de un juego:

Tabla 2.1. Juego de las monedas

		Jugador 2	
		Cara	**Cruz**
Jugador 1	**Cara**	1, -1	-1, 1
	Cruz	-1, 1	1, -1

Fuente: elaboración propia a partir de Cerdá et al. (2004, pp. 100)

En este juego de dos jugadores, ambos eligen poner simultáneamente dos monedas de euro sobre una mesa. Si las dos son caras o las dos son cruces, el jugador 1 gana los dos euros, mientras si una es cara y la otra es cruz, el jugador 2 gana los dos euros. De aquí podemos estudiar los siguientes términos:

- Jugadores: son los participantes del juego que toman una decisión con la intención de maximizar su utilidad. (Jugadores 1 y 2).
- Acciones de cada jugador: son las decisiones que cada jugador puede tomar cuando le toque jugar. (Sacar cara o sacar cruz).
- Resultados del juego: son las formas en las que puede terminar un juego. Cada resultado puede tener unas consecuencias diferentes para los jugadores. (Gana o pierde).
- Pagos: cada jugador recibe un pago al terminar el juego, dependiendo del resultado del juego. Este pago es la utilidad que cada jugador da al resultado, es decir, la valoración que para el jugador tienen las consecuencias de alcanzar una solución en el juego. (Gana los 2 euros o pierde el que había utilizado).
- Estrategia. Perfiles de estrategias: una estrategia de un jugador es un plan de acciones con las que éste podría proponerse participar en el juego o no. Un perfil de estrategias es un conjunto de estrategias, una por jugador del juego.
- Forma estratégica y forma extensiva: son formas de describir un juego. En ellas se especifican los jugadores, acciones y pagos. La forma estratégica (forma normal normal) organiza la descripción en forma rectangular, centrando su énfasis en las estrategias de los jugadores, mientras que la forma extensiva lo

hace en forma de árbol. (En el ejemplo del juego de las monedas, podemos ver claramente que se trata de un juego en forma estratégica).

Una vez desarrollados los conceptos de un juego, pasamos a analizar la Teoría de Juegos, que es la teoría que se ocupa de realizar el análisis de las consecuencias de la toma de decisiones que llevan a cabo los jugadores racionales y que tratan de maximizar su función de utilidad, considerando las posibles decisiones del resto de los jugadores. Suele aplicarse a diferentes áreas como la Sociología, Psicología, Filosofía, Biología, Economía, etc. con el objetivo de resolver diferentes situaciones. Además, según López Fidalgo, J., esta teoría está muy relacionada con la teoría de la decisión.

Según Cerdá et al. (2004), fue en 1994, cuando se considera el nacimiento de la teoría de juegos como una disciplina. Aunque en los años cincuenta, Nash aporta conceptos muy importantes como el equilibrio de Nash y la solución de negociación de Nash para una amplia gama de juegos. En los años más recientes, la teoría de juegos ha recibido un gran respaldo académico, al recibir el Premio Nobel de Economía algunos de sus pioneros y practicantes (en 1994 Nash, Selten y Harsanyi, y Vickrey y Mirlees en 1996).

Aunque actualmente, aún existen problemas sobre los fundamentos, la relevancia y metodología de esta disciplina, sus métodos y conceptos se aplican con éxito a otros campos aparte de la economía, como la sociología.

En la teoría de juegos encontramos diversos enfoques básicos a la hora de analizar un juego: cooperativos y no cooperativos. El enfoque cooperativo analiza las posibilidades de que los jugadores lleguen a un acuerdo sobre las decisiones a tomar por cada uno, mientras que en el enfoque no cooperativo se analizan las decisiones que cada jugador tomaría en ausencia de un acuerdo previo.

En los juegos no cooperativos distinguimos entre juegos estáticos o dinámicos y juegos con o sin información completa. En los juegos estáticos, los jugadores toman sus decisiones de manera simultánea, mientras que en los dinámicos puede que ya se conozcan las decisiones de los otros jugadores antes de decidir. Mientras en los juegos en los que la información es completa, los jugadores saben cuáles serán las consecuencias de las decisiones, y en los de información incompleta, algún jugador no sabe cuáles serán estas consecuencias.

Dentro de los juegos no cooperativos, los autores desarrollan los llamados juegos de suma cero, en los que la ganancia de un jugador es exactamente lo mismo que la pérdida del otro, siendo en estos en los que nos vamos a centrar.

A continuación se analizará detalladamente la forma normal o estratégica de un juego, así como el equilibrio de Nash.

2.2. FORMA NORMAL DE UN JUEGO

Un juego en forma normal o forma estratégica, tiene como punto de referencia las estrategias de cada jugador, representadas normalmente de manera matricial.

Un juego en forma normal viene determinado por un conjunto de jugadores, un conjunto de estrategias para cada jugador y unos pagos (o utilidades) que reciben los jugadores para cada combinación de estrategias. Es decir, formalmente:

$$G = \{J, (S_i)_{i \in J}, (u_i)_{i \in J}\}$$

Siendo J los jugadores participantes del juego, S_i las estrategias disponibles para el jugador i y u_i los pagos que recibe el jugador i. En los juegos que se representan de forma normal, se presupone que los jugadores actúan simultáneamente sin conocer la decisión que toma el resto de jugadores.

Si partimos de un juego $G = \{N = \{1,2\}; S_1,S_2; u_1,u_2\}$ donde S_1 y S_2 son los conjuntos de estrategias puras del Jugador *I* y *II* respectivamente y $u_1(s_1,s_2)$ y $u_2(s_1,s_2)$ las funciones de utilidad de cada uno de los jugadores, siendo:

- $u_1(s_1,s_2)$, el pago que se recibe del jugador *I* cuando juega la estrategia s_1 y el jugador *II* juega la s_2.
- Y $u_2(s_1,s_2)$, el pago que se recibe del jugador *II* cuando juega la estrategia s_2 y el jugador *I* juega la s_1.

Definimos *G* como un juego bipersonal de suma cero si para todo par de estrategias puras de ambos jugadores, la suma de los pagos que a ambos corresponde es nula.

En un juego en forma normal, los jugadores eligen sus estrategias simultáneamente, es decir, sin saber cuál será la jugada elegida por el otro jugador, dependiendo de la estrategia elegida el pago de cada jugador.

Como ejemplo de un juego en forma normal o estratégica destacan los juegos con dos jugadores, donde cada jugador tiene un número finito de estrategias, por lo que las funciones de pago pueden representarse en una doble matriz. Estos juegos se suelen llamar bimatriciales.

Podemos poner como ejemplo el juego del dilema del prisionero, uno de los problemas más conocidos que estudia la Teoría de Juegos. La interpretación de este juego según Adrián Paenza en su artículo en el diario Página 12, se otorga a Albert William Tuckern, matemático que dirigió la tesis de John Nash sobre los juegos no cooperativos. Sin embargo, el modelo en que se basa este juego fue planteado en los años 50 por Merrill Flood y Melvin Dresher tomando como patrón las relaciones de cooperación y conflicto que acaecían entre los jugadores.

A pesar de no ser un juego de suma cero, vamos a considerar un juego que representa una situación de conflicto con una solución, en cierto sentido, paradójica. Así, el dilema del prisionero es un juego de suma no nula, es decir, que no se suprimen los pagos de los jugadores entre sí. En él, se produce el conflicto entre los intereses individuales y colectivos de cada jugador, ya que intentan maximizar su utilidad sin depender de la decisión del oponente.

Este juego está muy presente en diversas situaciones de la vida real, en la que se presentan fuertes incentivos para la no cooperación mientras que la situación socialmente eficiente es la de la cooperación.

El juego dice lo siguiente: “Dos sospechosos de haber cometido un delito son interrogados por la policía, cada uno por separado. Se les pregunta sobre si el otro sospechoso es culpable. Dependiendo de su respuesta y de la respuesta del otro sospechoso a esta misma pregunta, se definen las penas de cárcel para cada uno de ellos. Si un sospechoso se confiesa autor del delito y su cómplice no, el cómplice será condenado a una pena de “x” años y él será puesto en libertad. Si ninguno de los dos confiesa, ambos son condenados a una pena de “y” años tal que y < x. Si los dos sospechosos confiesan, la condena que deberán cumplir asciende a “t” años tal que y < t < x”. Expresando el juego en forma matricial:

Tabla 2.2. Juego del dilema del prisionero

	Confesar	**Callar**
Confesar	t, t	0,x
Callar	X,0	y, y

Fuente: Elaboración propia a partir de Cerdá et al. (2004, pp. 64))

La estrategia dominante para ambos jugadores es confesar, debido a que siempre van a obtener mejor pago (menos pena de cárcel) con independencia de la decisión del otro. Pero esta solución es únicamente óptima desde el punto de vista de los intereses del conjunto de jugadores, mientras que no es óptima desde el punto de vista individual, ya que ambos tendrían que estar una temporada en la cárcel. El Equilibrio de Nash sería que ambos confesasen. Aquí se encuentra el punto de inflexión principal del dilema del prisionero, la contraposición entre los intereses individuales y colectivos.

Una estrategia dominante es aquella que es mejor que la otra, a la que llamamos dominada, para cada posible perfil de estrategias que eligen los otros jugadores.

Desde un punto de vista general, el dilema del prisionero puede representar una imagen del mundo donde las personas priorizan su interés obteniendo resultados menos beneficiosos que si cooperasen de forma conjunta.

2.3. ESTRATEGIAS PURAS Y MIXTAS

Las estrategias que aparecen en el juego con forma normal reciben el nombre de estrategias puras para diferenciarlas de las estrategias mixtas, que son los que vamos a introducir ahora.

Mientras en una estrategia pura se elegían acciones con un 100% de probabilidad, en las estrategias mixtas, se lleva a cabo una extensión de estrategia pura que permitirá que los jugadores puedan elegir acciones aleatorias, sin un 100% de certeza, ya que son asignadas distintas probabilidades a las estrategias puras. Se puede afirmar que una estrategia pura también es mixta.

Si se mira desde un punto de vista formal, se parte de un juego finito $G = \{N, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\}$ con $S_i = (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)$ estrategias puras del jugador i.

Una estrategia mixta del jugador i es la distribución de probabilidad $\sigma_i\,(s_i)$ sobre las estrategias de S_i tal que $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

Resulta esencial especificar sobre que subconjunto de estrategias puras han sido definidas las estrategias mixtas, es decir, a cuales de las estrategias puras se les otorga una probabilidad positiva. Al subconjunto de estrategias puras con probabilidad positiva se le llama soporte de una estrategia mixta. De manera formal:

$$sop\ (\sigma_i) = \{s_i \in S_i \,/\, \sigma_i\,(s_i) > 0\}.$$

En el supuesto de que el soporte de una estrategia mixta coincida con el conjunto de estrategias puras de un jugador tal que: $sop\ (\sigma_i) = S_i = (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)$, se considera que dicha estrategia mixta es completa. Por otro lado, las estrategias mixtas que no son puras se las denomina estrategias mixtas propias.

Respecto a los pagos que cada jugador recibe, se usan funciones de pago esperado, ya que a cada estrategia pura se le otorga una probabilidad aleatoria. Formalmente:

$$E_i\,(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \sum_{s_1,\ldots,s_n \in S} \sigma_1\,(s_1) \ldots \sigma_n\,(s_n)\; u_1\,(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Partiendo de un juego finito: $G = \{N, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\}$, se define como extensión mixta de G al juego $\Delta G = \{N, \Delta(S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\}$, siendo relevante el hecho de que el conjunto sea convexo y compacto. También, las funciones de pago esperadas se dice que son cóncavas en ΔG.

Tabla 2.3. Juego de las monedas

		Jugador 2	
		Cara	**Cruz**
Jugador 1	**Cara**	1, -1	-1, 1
	Cruz	-1, 1	1, -1

Fuente: elaboración propia a partir de Cerdá et al. (2004, pp. 100)

En el juego de las monedas no encontramos punto de equilibrio en estrategias puras, pero veremos que si en estrategias mixtas. Imaginemos que cada jugador tiene una moneda, y debe elegir mostrar una cara de la moneda. Si ambas coinciden, el jugador 1 gana la moneda del jugador 2, pero si no coinciden, entonces el jugador 2 será el ganador de la moneda del jugador 1.

Pues bien, para el jugador i, una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre algunas estrategias en S_i. Una estrategia mixta para el jugador i es la distribución de probabilidad (q, 1-q), donde q es la probabilidad de elegir "cara" y 0≤q≤1, siendo la otra opción de probabilidad (p, 1-p), donde p es la probabilidad de elegir "cruz".

Los pagos que reciben corresponden al pago esperado. Por ejemplo:

El jugador 1 cree que el jugador 2 elegirá "cara" con probabilidad q y "cruz" con probabilidad 1-q. Es decir, 1 supone que 2 elegirá la estrategia mixta (q, 1-q).

Bajo este supuesto, las ganancias esperadas del jugador 1 son q* (-1) + (1-q)*1 → 1-2q, eligiendo "cara" y , q* (1) + (1-q)*(-1) → 2q-1, eligiendo "cruz".

El jugador 2 cree que el jugador 1 elegirá "cara" con probabilidad p y "cruz con probabilidad 1-p. Es decir, supone que 1 elegirá la estrategia mixta (p, 1-p).

Por lo que análogamente, bajo este supuesto, las ganancias esperadas del jugador 2 son p* (-1) + (1-p)*1 → 1-2p, eligiendo "cruz" y , p* (1) + (1-p)*(-1) → 2p-1, eligiendo "cara".

2.4. EQUILIBRIO DE NASH

El equilibrio de Nash quizá sea el concepto de solución más importante. Según él, sería razonable esperar que los jugadores jueguen un perfil de estrategias que constituya un equilibrio de Nash. Se intenta que este nuevo término de solución sea un refinamiento, constituido por modos razonables de jugar, de los conceptos de solución que se basan en la eliminación de estrategias dominadas.

Podemos definir el Equilibrio de Nash en estrategias puras tal como define Cerdá et al. (2004):

"En el *juego* $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, decimos que el perfil de estrategias puras $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$ es un Equilibrio de Nash (EN) si para cada jugador i, $u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ para todo s_i de S_i. Es decir, para cada jugador i, s_i^* es una solución del problema. $Max\ u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ donde s_i es la variable de decisión y pertenece a S_i. O dicho de otro modo, para cada jugador i, s_i^* es una respuesta óptima a s^*_{-i}."

De esta definición se puede deducir que un Equilibrio de Nash es un perfil de estrategias del que ningún jugador desearía desviarse unilateralmente, es decir, que ninguno se arrepiente de la decisión que ha tomado, dadas las estrategias decididas por el resto de los jugadores. Un Equilibrio de Nash está formado por estrategias óptimas para cada jugador dadas las estrategias del resto de jugadores.

En palabras de Bernard Guerrien (1998), es una combinación de estrategias (una por jugador) que está en equilibrio de Nash si ningún jugador puede aumentar sus ganancias por un cambio unilateral de estrategia.

Esto no quiere decir que en un Equilibrio de Nash, los jugadores estén alcanzando el mejor resultado posible individualmente, sino el mejor resultado condicionado por el hecho de que los demás jugadores juegan las estrategias indicadas para ellos en ese perfil.

Podemos poner como ejemplo para explicar el Equilibrio de Nash el juego de las monedas, pero sin embargo, nos topamos con que este juego no tiene ningún Equilibrio de Nash en estrategias puras, ya que su matriz de pagos es:

Tabla 2.4. Juego de las monedas con pagos subrayados

		Jugador 1	
		Cara	**Cruz**
Jugador 2	**Cara**	$\underline{1}$, -1	-1, $\underline{1}$
	Cruz	-1, $\underline{1}$	$\underline{1}$, -1

Fuente: elaboración propia a partir de Cerdá et al. (2004, pp. 100)

Si el jugador 2 juega "Cara", se comparan los pagos 1 y -1 del jugador 1 y si su respuesta óptima será "Cara". Cuando el jugador 2 juega "Cruz", se comparan los pagos -1 y 1 del jugador 1, y su respuesta óptima será "Cruz". Por lo que si ocurriese igual con los pagos del jugador 2, se concluye que no existen Equilibrios de Nash, ya que no existe ningún perfil cuyos ambos componentes de su vector de pagos estén subrayados.

Por lo tanto, al no encontrar ningún Equilibrio de Nash en el juego de las monedas en estrategias puras, podríamos utilizar el juego del dilema del prisionero para dar explicación a este:

Tabla 2.5. Juego del dilema del prisionero

		Preso 2	
		Callar	**Confesar**
Preso 1	**Callar**	3, 3	1, 10
	Confesar	10, 1	2, 2

Fuente: elaboración propia a partir de Cerdá et al. (2004, pp. 90)

El dilema del prisionero nos presenta cuatro perfiles como soluciones posibles de Equilibrio de Nash del juego. Bien pues analicémoslo detenidamente:

- Si analizamos (Callar, Callar), si el preso 1 prevé que el preso 2 jugará Callar, al preso 1 no le interesaría seguir jugando callar, ya que si supiese que va a elegir callar, al jugar confesar, estaría ganando un mayor pago (10>3). Esto también lo podemos aplicar al jugador 2, ya que es un juego simétrico.
- Si suponemos que el Equilibrio de Nash es (Confesar, Callar), si el preso 2 sabe que el otro va a jugar confesar, a él le convendría jugar confesar, ya que maximiza la utilidad en este caso (2>1). Por tanto este punto tampoco sería un Equilibrio de Nash.
- En el caso (Callar, Confesar) ocurre lo mismo que en el anterior, solo que hay que intercambiar la posición de los jugadores.
- Por último, en el caso (Confesar, Confesar). Este sí que es un perfil de Equilibrio de Nash, ya que ningún jugador tiene como incentivo saber lo que el otro jugador va a jugar, por lo que si alguno decidiera *Callar* de forma solitaria,

perdería utilidad en relación al perfil (Confesar, Confesar), ya que eligiendo ambos la estrategia *Confesar*, ya que 1<3 en el caso de que uno confesase y otro callase.

En la siguiente tabla, utilizaremos flechas para señalar cual es el sentido de la desviación deseada por cada jugador desde cada perfil de estrategias. El único Equilibrio de Nash es (Confesar, Confesar), que es del único del que no sale ninguna flecha.

Tabla 2.6. Juego del dilema del prisionero (desviaciones deseadas)

		Preso 2		
		Callar		**Confesar**
Preso 1	**Callar**	3, 3	⇨	1, 10
		⇩		⇩
	Confesar	10, 1	⇨	2, 2

Fuente: elaboración propia a partir de Cerdá et al. (2004, pp. 91)

También hay otra forma sencilla y eficaz de visualizar en la representación bimatricial de un juego, la búsqueda y obtención de los Equilibrios de Nash. Se trata de comparar, para cualquier combinación de estrategias de sus contrincantes, los pagos que un jugador obtiene si juega cada una de sus estrategias, y se subraya el pago máximo alcanzable, correspondiente a la estrategia de respuesta óptima a dicha combinación. Un perfil de estrategias es Equilibrio de Nash solo si el vector de pagos correspondiente tiene todos los pagos subrayados. En el cuadro podemos ver el ejemplo:

Tabla 2.7. Juego del dilema del prisionero (pagos subrayados)

		Preso 2	
		Callar	**Confesar**
Preso 1	**Callar**	3, 3	1, $\underline{10}$
	Confesar	$\underline{10}$, 1	$\underline{2}$, $\underline{2}$

Fuente: elaboración propia a partir de Cerdá et al. (2004, pp. 91)

Suponiendo que el segundo preso juegue *Callar*, se comparan los pagos 3 y 10 del preso 1, y se subraya el máximo, que es 10, indicando que la repuesta óptima es *Confesar*. Si el preso 2 jugase *Confesar*, se comparan los pagos 0 y 1 del preso 1, y se subraya el máximo, es decir, 1, indicando que la respuesta óptima también es *Confesar*. Procediendo de forma similar con los pagos del preso 2, llegamos a concluir que el único Equilibrio de Nash es el perfil (*Confesar*, *Confesar*), único perfil en el cual el vector de pagos tiene todos los pagos subrayados. Por lo tanto, S^{EN} = {(*Confesar*, *Confesar*)}.

Por otro lado, pueden existir múltiples equilibrios de Nash en un juego, por lo que llamaremos S^{EN} al conjunto de perfiles que son equilibrios de Nash. Un ejemplo de este tipo de juegos con más de un Equilibrio de Nash es el conocido “Juego de la Gallina”, en el que dos coches se acercan por una calle muy estrecha, si uno se espanta y frena, es un gallina, y pierde su autoestima, mientras que si el otro aguanta, gana autoestima, y su representación matricial es:

Tabla 2.8. Juego de la gallina

		Jugador 2	
		Girar	**Aguantar**
Jugador 1	**Girar**	2, 2	-1, 5
	Aguantar	5, -1	-4, -4

Fuente: elaboración propia a partir de Fernando Fernández Rodriguez (2005, pp. 5)

Si el Jugador 2 juega “Girar”, se comparan los pagos 2 y 5 del Jugador 1, y se subraya el máximo que es 5, indicando como respuesta óptima “Aguantar”. Si el Jugador 2 juega “Aguantar”, se comparan los pagos -1 y -4 del Jugador 1, y se subraya el máximo que es -1 indicándonos como respuesta óptima “Girar”. Si hacemos lo mismo con los pagos del jugador 2, llegamos a la conclusión de que existen dos Equilibrios de Nash, los perfiles (Aguantar, Girar) y (Girar, Aguantar) ya que ambos tienen los dos componentes de su vector de pagos subrayados.

Si nos referimos a una respuesta óptima, el proceso del cálculo del Equilibrio de Nash en estrategias puras de un juego, dependerá de las características del juego. En juegos finitos y de reducido tamaño, como el dilema del prisionero, es más fácil comprobar con detalles todas las posibilidades, sin embargo, en los juegos infinitos, necesitaríamos un planteamiento más analítico, que requiere resolver varios problemas de optimización simultáneos (uno por jugador).

A pesar de todo, conviene realizar la búsqueda de los equilibrios de Nash en todos los casos de forma sistemática, calculando estrategias óptimas que los jugadores podrían elegir como respuesta a las combinaciones de estrategias que pudiesen elegir los demás jugadores.

Así, se busca, dado un jugador i y para cada combinación s_{i} de estrategias de los demás jugadores, un conjunto de estrategias de éste, que denominaremos $R_i(s\_{i})$. La regla que a cada s_{i} (lo que pueden hacer los demás) le asigna $R_i(s\_{i})$ (lo que le conviene hacer a él) recibe el nombre de correspondencia de respuesta óptima del jugador i.

Según Cerdá et al. (2004), podemos definirlo formalmente de la siguiente forma: “en el juego $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, y para cada jugador i, llamamos correspondencia de respuesta óptima de dicho jugador a la regla o correspondencia que asigna, a cualquier combinación de estrategias $s_{-1} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, el conjunto $R_i(s_{-i})$ de estrategias de i que son respuesta óptima a s_{-i}, es decir, que cumplen:

$$s'_i \in R_i(s_{-i}) \text{ si y solo si}$$

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \geq u_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \text{ para todo } s_i \text{ de } S_i.”$$

El equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego de las monedas queda representado de la siguiente forma, siendo la línea azul la función de reacción del jugador 1, y la naranja la del jugador 2:

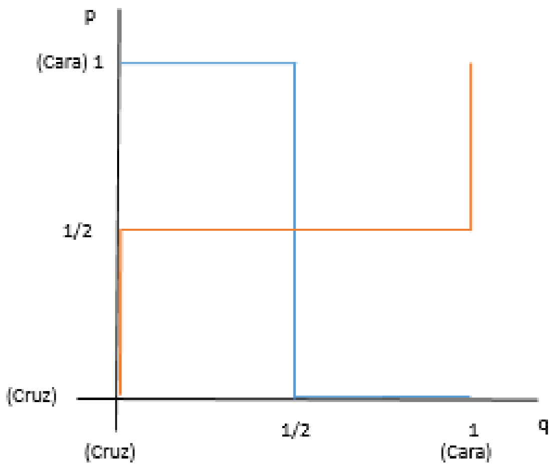

Figura 2.1. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego de las monedas.

Fuente: Elaboración propia

Como *1-2q > 2q-1*, si y solo si *q<1/2*, la mejor respuesta en estrategias puras del jugador 1 es "cara" si *q<1/2* y "cruz" si *q>1/2*, y el jugador 1 será indiferente entre "cara" y "cruz" si *q = ½.*

Como *1-2p > 2p-1*, si y solo si *p<1/2*, la mejor respuesta en estrategias puras del jugador 1 es "cruz" si *p<1/2* y "cara" si *p>1/2*, y el jugador 2 será indiferente entre "cara" y "cruz" si *p = ½.*

Ya que si un jugador *i* elige (1/2, 1/2), (1/2, 1/2) es la mejor respuesta del jugador *j*.

A partir de esta definición, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado:

En el juego $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, el perfil de estrategias

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$$

es un equilibrio de Nash si y solo si $s_i^* \in R_i(s^*_{-1})$ para cada jugador *i.*

Podemos automatizar el cálculo de los equilibrios de Nash en dos etapas:

- Para cada jugador *i,* y para cualquier conjetura que pueda formarse sobre la actuación de los demás jugadores, se calcula una estrategia de respuesta óptima de *i.* De esta forma, tendremos la correspondencia de respuesta óptima de cada jugador.
- Identificamos los Equilibrios de Nash como los perfiles estratégicos que son puntos de intersección de todas las correspondencias de respuesta óptima.

Si analizamos la definición de Equilibrio de Nash tranquilamente, encontramos dos requisitos que son indispensables:

- Cada jugador tiene que jugar una respuesta óptima ante una conjetura que es relativa al comportamiento de los demás jugadores.
- Las conjeturas de cada jugador sobre el comportamiento de los demás jugadores deben ser correctas.

Utilizando otras palabras, el equilibrio de Nash necesita que la estrategia que cada jugador utiliza sea una respuesta que maximice los pagos de dicho jugador, dadas las estrategias que se predigan que van a usar los demás jugadores, y que éstas sean además correctas.

El equilibrio de Nash debe ser consistente sobre la forma en que se jugará el juego, es decir, si los jugadores predijesen un equilibrio de Nash definido va a ser jugado, ninguno de los jugadores debería tener incentivos para jugar de forma distinta, ni debe querer desviarse de la predicción.

De esta forma, solo un perfil que sea equilibrio de Nash tiene la primacía de que los jugadores puedan predecirlo, de predecir que lo predecirán los demás jugadores, etc. Sin embargo, una predicción sobre cualquier perfil que no sea Equilibrio de Nash, implica que por lo menos un jugador tomará una decisión distinta a la prevista, de forma que sea porque no está de acuerdo con la predicción hecha sobre el juego del resto de jugadores, o porque los pagos no se estaban optimizando.

Como vemos en Cerdá et al. (2004), Kreps (1994 y 1995) considera el Equilibrio de Nash como una condición necesaria para la existencia de un modo evidente de jugar el juego, porque se puede ver muy entorpecida cuando tenemos multiplicidad de equilibrios (como en el juego de la gallina), a que en ese caso no es tan evidente cuál es la solución del juego, siendo necesario apelar a una condición más fuerte para determinar ese evidente forma de jugar. Otro tipo de situación que se da, son los casos problemáticos, como el juego de las monedas, donde no existe ningún equilibrio de Nash en estrategias puras que ya hemos mencionado anteriormente.

2.5. EFICIENCIA DE PARETO Y CRÍTICA AL EQUILIBRIO DE NASH

Cerdá et al. (2004), define:

“Dado el juego $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$,

- Decimos que el perfil de estrategias $s = (s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$ está dominado en el sentido de Pareto por el perfil $s' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_i, \ldots, s'_n)$ si y solo si la desigualdad $u_i(s'_1, \ldots, s'_n) \geq u_i(s_1, \ldots, s_n)$ se cumple para todo jugador i, y para alguno de ellos se cumple de modo estricto.
- Decimos que el perfil de estrategias $s = (s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$ es un óptimo de Pareto (o que es eficiente en sentido de Pareto) si y solo si no está dominado en el sentido de Pareto por ningún otro perfil. Diremos que es ineficiente en el sentido de Pareto si algún otro lo domina.”

Es decir, si un perfil de estrategias es eficiente no se puede cambiar a otro perfil, ya que así, ningún jugador sale perdiendo y alguno seguramente gane.

El concepto de dominación hace referencia a perfiles completos que aluden a todos los jugadores, mientras que el concepto de estrategia dominada hacía referencia a cada jugador individual. Mientras la dominación de Pareto es un concepto a analizar de la eficiencia social es relevante para los jugadores como grupo, la dominación de estrategias sirve de análisis para la eficiencia individual, relevante para cada jugador individualmente. No sería extraño que estos conceptos sean independientes.

Por ejemplo, en el juego del dilema del prisionero, el equilibrio de Nash, que es (confesar, confesar), es ineficiente en el sentido de Pareto. En el sentido de Pareto, el perfil (callar, callar) sería el que domina.

Tabla 2.9. Juego del dilema del prisionero en el sentido de Pareto

		Preso 2	
		Callar	**Confesar**
Preso 1	**Callar**	3, 3	1, 10
	Confesar	10, 1	2, 2

Fuente: elaboración propia a partir de Cerdá et al. (2004, pp. 64)

El análisis del dilema del prisionero muestra lo que puede ser una debilidad del concepto de solución Equilibrio de Nash. El perfil propuesto como solución no es eficiente en el sentido de Pareto. Ya que si juegan (callar, callar) en vez de (confesar, confesar) como prescribe la solución Equilibrio de Nash, conseguirían un mayor pago, tal y como vemos en la tabla anterior.

La clave para entender esta paradoja reside en comprender que el resultado (callar, callar), es el mejor desde un punto de vista social, mientras que jugar (confesar, confesar) sería lo apropiado desde un punto de vista individual.

Es sorprendente, sin embargo, este juego manifiesta contradicción entre lo individual y lo social.

El resultado predecible sería el perfil equilibrio de Nash, pero sin embargo, solo habría que cambiar alguna suposición anterior para que ganara posibilidades el resultado cooperativo. Particularmente, si lo jugasen un padre y un hijo, el resultado predecible sería (callar, callar).

Por tanto, al proponer el Equilibrio de Nash como solución a un juego encontramos diversas ventajas e inconvenientes. La ventaja radica en que es más resolutivo, ya que el conjunto de los perfiles equilibrio de Nash es un subconjunto del conjunto de perfiles que sobreviven a la iterativa eliminación de estrategias rigurosamente dominadas. El inconveniente lo encontramos en que se pierde seguridad al proponer como razonable que el resultado del juego va a coincidir con algún equilibrio de Nash.

Un perfil que es equilibrio de Nash es más que un perfil que no lo es. Pensemos varios contextos donde un resultado equilibrio de Nash es más probable que uno que no lo sea:

- Cuando un árbitro que es neutro informa a los jugadores anticipadamente de las intenciones de los demás, y el resultado según las intenciones es un Equilibrio de Nash, esta información adicional los anima a cumplir sus intenciones. Precisamente, si un espectador honesto y respetado dijera a ambos jugadores de la batalla de los sexos que sabe que la otra persona pretende ir al cine, se jugaría (Cine, Cine). Pero, si les dijera que sabe que el chico querrá ir al fútbol y la mujer al cine, no sería tan probable que se jugara (Fútbol, Cine), ya que se sentirían insatisfechos con la solución prevista. Es esa propiedad sostenible de las estrategias en los equilibrios de Nash que les distingue de otros perfiles.
- Cuando varios jugadores ya han jugado a un juego varias veces y les toca repetir juego, es previsible que si la última vez jugaron un equilibrio de Nash, lo volverán a jugar, ya que todos los jugadores pensarán que si los demás repiten a ellos también les conviene repetir. Pero si lo que jugaron la última vez no fue un equilibrio de Nash, no lo repetirán porque alguno pensará que si los demás repiten, a él no le conviene repetir. De esta manera, sería razonable pensar que los perfiles equilibrios de Nash tienen un plus de predictibilidad que otros perfiles no tienen.

CAPÍTULO 3

SUMA CERO

Los juegos bipersonales de suma cero representan situaciones de conflicto puro entre dos jugadores, donde un jugador gana exactamente lo mismo que pierde su contrincante. Analizar este tipo de juegos en su forma normal o estratégica nos lleva generalmente a resultados y predicciones más precisos que los de otros juegos, y la estructura de sus soluciones de equilibrio es muy precisa también. Por este motivo, el estudio de estos juegos ha supuesto una etapa inicial importante de la aplicación de la teoría de juegos a la economía, a pesar de que los ejemplos de aplicaciones económicas relevantes de juegos de suma cero son más la excepción que la regla. Un claro ejemplo de juego de suma cero es el "juego de las monedas" que vemos a continuación y del cual ya hemos hablado anteriormente, en el que un jugador gana exactamente lo que el otro jugador pierde.

Tabla 3.1. Juego de las monedas

		Jugador 2	
		Cara	**Cruz**
Jugador 1	**Cara**	1, -1	-1, 1
	Cruz	-1, 1	1, -1

Fuente: elaboración propia a partir de Enrique A. Bour (Marzo 2011, pp. 7)

Una característica bastante especial de los juegos de suma cero es que las soluciones de equilibrio de estos juegos se basan en el comportamiento de cada jugador como decisor racional individual, sin requerir una coordinación adicional, que si es necesaria en equilibrios de Nash de otros juegos diferentes.

Además, en los juegos bipersonales de suma cero finitos, como los pagos del segundo jugador son los contrarios a los pagos del primer jugador, la matriz de pagos del primero se limita a definir el juego y a realizar su análisis. Por ello, a los juegos bipersonales finitos de suma cero, a veces, se les denomina juegos matriciales. Comenzaremos entonces este capítulo conociendo con más detalles algunos conceptos de una matriz, como son los valores maximín y minimax de una matriz.

3.1. VALORES MAXIMÍN Y MINIMAX

Una matriz A_1 con valores reales, m filas y n columnas. Imagina que A_1 es la matriz de pagos del jugador 1 en un juego bipersonal finito cualquiera G = {S_1, S_2; u_1, u_2}, donde $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m\}$ y $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^n\}$. Por tanto, las filas de A_1 corresponden a las estrategias puras del jugador 1 mientras sus columnas corresponden a estrategias puras de su contrincante. Así, el término a_{ij} de A_1, es el pago $u_1(s_1^i, s_1^j)$. Teniendo en cuenta que

$$\max_{s_1^i \in S_1} u_1(s_1^i, s_2^j) \quad \text{y} \quad \min_{s_2^j \in S_2} u_1(s_1^i, s_2^j)$$

Son respectivamente, el máximo de los términos de la columna j-ésima, y el mínimo de los términos de la fila i-ésima, definiendo los valores maximín y minimax de la matriz A_1 de la siguiente forma:

- El valor maximín, al que denotamos como $\underline{m}$, es el valor máximo de los valores mínimos de todas las filas de A_1 tal que $\underline{m} = \max_{s_1^i \in S_1} \{\min_{s_2^j \in S_2} u_1(s_1^i, s_2^j)\}$.
- El valor minimax, al que denotamos como $\overline{m}$, es el valor mínimo de los valores máximos de todas las filas de A_1 tal que $\overline{m} = \min_{s_2^j \in S_2} \{\max_{s_1^i \in S_1} u_1(s_1^i, s_2^j)\}$

Para verlo mejor, utilizaremos como ejemplo el juego de las monedas:

Tabla 3.2. Juego de las monedas

		Jugador 2	
		Cara	**Cruz**
Jugador 1	**Cara**	1, -1	-1, 1
	Cruz	-1, 1	1, -1

Fuente: elaboración propia a partir de Enrique A. Bour (Marzo 2011, pp. 7)

En este juego, la matriz de pagos del jugador 1 es la siguiente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1^* & -1_* \\ -1_* & 1^* \end{pmatrix}$$

En dicha matriz, vemos que los números señalados con un asterisco subíndice los mínimos de cada fila, y con un asterisco superíndice los máximos de cada columna.

Como podemos ver, todos los mínimos de fila valen -1, por lo que el valor maximín de A_1 es $\underline{m} = \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2\}} \{\min_{s_2^j \in \{s_1^1, s_1^2\}} u_1(s_1^i, s_2^j)\} = \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2\}} \{-1, -1\} = -1$

De la misma forma, como todos los máximos de columna valen 1, tenemos que el valor de minimax de A_1 es $\overline{m} = \min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2\}} \{\max_{s_1^i \in \{s_2^1, s_2^2\}} u_1(s_1^i, s_2^j)\} = \min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2\}} \{1, 1\} = 1$

Encontramos también otro término interesante de definir, que es el término $u_1(s_1^{io}, s_2^{jo})$, que ocupa la fila i_0 y la columna j_0 de A_1, al que denominamos punto de silla de A_1 si es el valor máximo de su columna y el mínimo de su fila, tal que:

$$u_1(s_1^{io}, s_2^{jo}) = \max_{s_1^i \in S_1} u_1(s_1^i, s_2^{jo}) = \min_{s_2^j \in S_2} u_1(s_1^{io}, s_2^j)$$

Por tanto, si $\underline{m} = \overline{m}$, existe un punto de silla en la matriz. Sin embargo, en este caso concreto, como no tenemos ningún término señalado doblemente, podemos determinar que A_1 no tiene punto de silla.

Supongamos que la matriz A_1 sea una matriz de pagos $(u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1, \dots, m;\ j=1, \dots, n}$ para el jugador 1, del juego $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, donde S_1 $\{s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^m\}$ y $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, \dots, s_2^n\}$. Las filas de A_1 corresponden, por tanto, a las estrategias puras de J1 mientras que sus columnas serían las estrategias puras de J2. Sea $\underline{m} = (s_1^s, s_2^t)$ el valor maximín de A_1. A la estrategia pura s_1^s de J1 en cuya fila se alcanza dicho valor se le llama estrategia pura maximín. El valor maximín de A_1 puede interpretarse como el nivel de seguridad del jugador 1, es decir, el valor que puede estar seguro J1 de conseguir al jugar una estrategia pura en el juego, por más que J2 pueda intentar impedirlo. Podemos decir, que jugando su estrategia se asegura la consecución de un pago al menos tan grande como $\underline{m}$.

Ya que el juego G determina dos matrices de pagos, $A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n}$, y $A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j))_{i=1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n}$ para los jugadores 1 y 2 respectivamente, podríamos definir a partir de A_2, las estrategias puras maximín y el nivel de seguridad que corresponde al jugador 2. La única diferencia es que ahora las estrategias puras de J2 identifican columnas de A_2 y no filas. A los valores maximín de J1 y J2 los denominaremos, respectivamente, v_1 y v_2.

Aunque los conceptos de estrategias puras de maximín y valores de seguridad son válidos para cualquier juego, sus propiedades nos interesan solo en los juegos de suma cero. Por otro lado, las propiedades son especialmente interesantes al introducirlas en el análisis de las estrategias mixtas. Por lo que a continuación veremos las estrategias mixtas de maximín y minimax de los juegos de suma cero.

3.2. EQUILIBRIO DE NASH Y ESTRATEGIAS DE SEGURIDAD.

Según Cerdá et al. (2004):

“Sea el juego bipersonal finito de suma cero $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, donde

$$S_1\ \{s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m\} \text{ y } S_2 = \{s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^n\}$$

cuyas matrices de pagos son

$$A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n}, \text{ y } A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j))_{i=1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n} = -A_1$$

Sea σ_1 una estrategia mixta genérica de J1, representable mediante un vector fila con *m* componentes positivas o nulas que suman la unidad. Análogamente, sea σ_2 una estrategia mixta genérica de J2, representable mediante un vector fila con *n* componentes positivas o nulas que suman la unidad.

- Llamamos valor maximín del juego G, y lo denotamos v_1, al pago máximo que puede asegurarse el jugador 1 suponiendo que J2 responde a la estrategia σ_1 de J1 con una estrategia σ_2 que le permite maximizar su pago, y por tanto minimizar el de J1. Es decir,

$$v_1 = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{\min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t\}$$

- Llamamos valor minimax del juego G al número

$$v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t\}$$

Si el valor maximín se alcanza en las estrategias mixtas concretas σ_1^* de J1 y σ_2^* de J2, decimos que σ_1^* es una estrategia maximín de J1. Análogamente, si el valor minimax se alcanza en las estrategias mixtas concretas $\sigma_2^{\prime *}$ de J2 y $\sigma_1^{\prime *}$ de J1, decimos que $\sigma_2^{\prime *}$ es una estrategia minimax de J2.

El valor maximín v_1 es el valor de seguridad del jugador J1, es decir, el pago más alto que J1 puede asegurarse suponiendo un "comportamiento de peor caso" por parte de J2.

El siguiente ejemplo nos ilustra la obtención y comparación de los valores que acabamos de definir.

Tabla 3.3. Juego de las monedas

	CARA	CRUZ
CARA	1	-1
CRUZ	-1	1

Fuente: elaboración propia a partir de Cerdá et al. (2004, pp. 100)

En nuestro ya conocido juego de las monedas, tanto la estrategia pura Cara, como la estrategia pura Cruz del jugador 1 son maximín en el contexto de estrategias puras, y ambas le proporcionan en este contexto un nivel de seguridad de -1. A pesar de esto, en el contexto de estrategias mixtas, el valor maximín es:

$$v_1 = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = \max_{0 \le \alpha \le 1} \{ \min_{0 \le \beta \le 1} (\alpha \; 1-\alpha) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1-\beta \end{pmatrix} \} =$$

$$= \max_{0 \le \alpha \le 1} \{ \min_{0 \le \beta \le 1} 1 - 2\alpha + 2(2\alpha - 1)\beta \}$$

Supongamos que el jugador 1 usa estrategias mixtas y que p indica la probabilidad con la que juega cara. Si el jugador 2 juega cara el pago esperado del jugador 1 es $p-(1-p)=2p-1$, mientras que si el jugador 2 juega cruz su pago esperado es $-p+(1-p)=1-2p$.

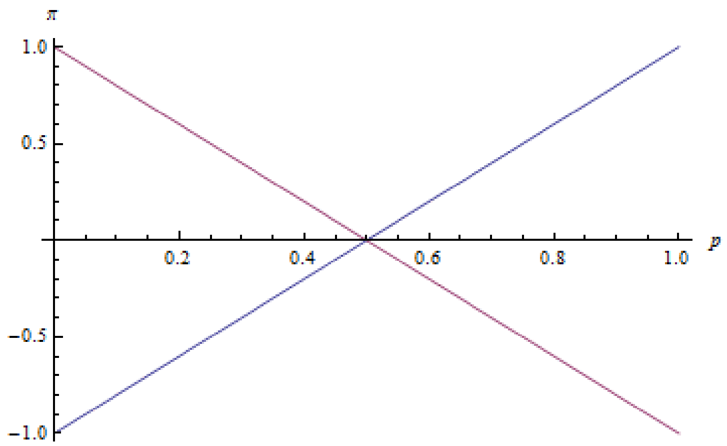

Figura 3.1. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el jugador 1.

Fuente: Elaboración propia

Ambos conjuntos de pagos esperados se representan gráficamente y el pago mínimo es el menor de los dos pagos (envolvente inferior de las dos líneas de pago esperado). El mayor beneficio mínimo se obtiene donde se cruzan las dos líneas de pago esperado que corresponde a p* = ½ y el valor maximín es 0.

En lugar de jugar para protegerse de los resultados en el peor de los casos, el jugador 1 puede jugar de forma más agresiva y jugar mejores respuestas contra las estrategias del jugador 2. Se podría pensar en esto como un enfoque más optimista. Hay que intentar predecir el juego del adversario y hacer lo mejor en su contra. El concepto asociado se llama pago minimax, y es el peor de los mejores pagos.

De forma análoga al cálculo anterior, el valor del minimax sería:

$$v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = \min_{0 \le \beta \le 1} \{ \max_{0 \le \alpha \le 1} 1 - 2\beta + 2(2\beta - 1)\alpha \}$$

El valor minimax en el juego de las monedas, cuando el jugador 2 usa estrategias puras, los pagos del jugador 1 son como máximo 1, por lo que el minimax sería 1.

Tabla 3.4. Juego de las monedas

	CARA	CRUZ
CARA	1	-1
CRUZ	-1	1

Fuente: elaboración propia a partir de Cerdá et al. (2004, pp. 100)

Si ahora suponemos que el jugador 2 utiliza estrategias mixtas y que q indica la probabilidad con la que juega cara. Si el jugador 1 juega cara el pago esperado del jugador 1 es q-(1-q)=2q-1, mientras que si el jugador 1 juega cruz su pago esperado es –q+(1-q)=1-2q.

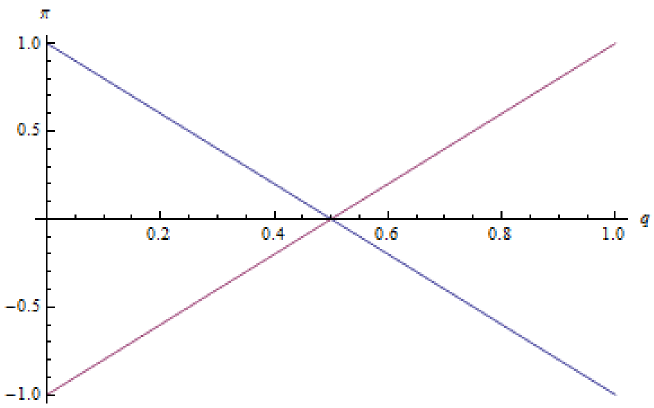

Figura 3.2. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el jugador 2.

Fuente: Elaboración propia

Ambos conjuntos de pagos esperados se representan gráficamente y el máximo pago es el mayor de los dos pagos. El menor beneficio máximo se obtiene donde se cruzan las dos líneas de pago esperado que corresponde a q* = ½ y el valor minimax es 0.

Podemos decir que el minimax es mejor que el maximín, cuando el valor minimax del jugador 1 es por lo menos tan alto como su valor maximín ($m_1 \le M_1$).

Cabe destacar que el valor minimax de un jugador sea al menos tan alto como su valor maximín se cumple en todos los juegos, sean o no de suma cero y haya el número de jugadores que haya.

También podemos decir que el minimax de un jugador es el maximín del otro, ya que la recompensa minimax del jugador 1 es la recompensa maximín del jugador 2, es decir, $m_1 = -M_2$.

Una caracterización de los equilibrios de Nash en juegos de suma cero que encontramos es que un par de estrategias mixtas es un equilibrio de Nash de un juego de suma cero si para todas las estrategias s_1 y s_2 puras,

$$u(s_1, q^*) \le u(p^*, q^*) \le u(p^*, s_2)$$

Debemos aclarar que la primera desigualdad dice que p* es una mejor respuesta que q*. Por otra parte, la segunda desigualdad dice que los pagos del jugador 1 se reducen al mínimo, entre todas las posibles estrategias de jugador 2, por la elección de q*. Esta afirmación, por supuesto, es lo mismo que decir que q* es una mejor respuesta para el jugador 2 en contra de p*.

Si (p*, q*) constituyen un equilibrio de Nash de un juego de suma cero se tiene que q* y p* son estrategias de seguridad y los valores maximín y minimax son iguales entre sí y a $u(p^*, q^*)$. Recíprocamente, si los pagos minimax y maximín son iguales entonces las estrategias de seguridad constituyen un equilibrio de Nash del juego.

Según Cerdá et al. (2004), el siguiente resultado, y el más importante para este tipo de juegos, fue el obtenido por Von Neumann, en 1928, y que recibe el nombre de teorema del minimax. Este teorema nos dice que: dado un juego bipersonal finito de suma cero, cualquiera $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, dicho juego tiene un valor. Es decir, existe un $v \in R$ tal que $v_1 = v_2 = v$, siendo v_1 y v_2 los valores maximín y minimax. El juego de las monedas satisface este teorema, y el valor del juego es 0.

Por otro lado, si establecemos una relación entre los equilibrios de Nash y las estrategias maximín, diremos que en los juegos bipersonales finitos de suma cero, existe una gran relación entre ambos, según la cual forman parte de los equilibrios las estrategias maximín y solo ellas. Podemos ver de forma precisa esta relación a continuación en el siguiente teorema:

Sea el juego bipersonal finito de suma cero $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, donde

$$S_1 \{s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m\} \text{ y } S_2 = \{s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^n\}$$

cuyas matrices de pagos son

$$A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n} \text{ y } A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j))_{i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n} = -A_1$$

Sea σ_1 una estrategia mixta genérica de J1, y σ_2 una estrategia mixta genérica de J2.

- Si (σ_1^*, σ_2^*) es un equilibrio de Nash, σ_1^* y σ_2^* son estrategias maximín de J1 y J2, y el pago que J1 recibe en dicho equilibrio coincide con el valor del juego.
- Si σ_1^* y σ_2^* son estrategias maximín de J1 y J2, el perfil (σ_1^*, σ_2^*) es un equilibrio de Nash.

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN PRÁCTICA. BATALLA POR LA CUOTA DE MERCADO

En la actualidad, la competitividad es muy importante, y cada vez más, desde que el proceso de globalización económica se ha acentuado. La cuota de mercado se suele considerar como un indicador de competitividad. La cuota de mercado es el porcentaje de mercado, definida en unidades o como ingresos, de algún producto específico.

Su cálculo permite conocer en la cantidad de tarta de mercado que tiene la empresa y poder establecer previsiones de crecimiento. La cuota de mercado nos permite saber si estamos acaparando el mercado de la competencia o si por otro lado es la competencia la que nos lo está acaparando a nosotros.

La cuota de mercado en unidades puede calcularse dividiendo las unidades vendidas entre el total de unidades vendidas en el mercado, mientras la cuota de mercado en función de los ingresos se calcula dividiendo las ventas entre las ventas totales del mercado. Gracias a ambos datos, podemos evaluar cuál es el crecimiento del mercado.

Definir el mercado de forma precisa es muy importante al calcular las cuotas de mercado, ya que un error al definir el mercado, puede traer una desviación en el cálculo de la cuota.

Todas las empresas están interesadas en ganar cuota de mercado, ya que esto derivará en un aumento de clientes, ventas y por consiguiente, de ingresos, por lo que las empresas están continuamente en una batalla de mercado por conseguir la mayor cuota de mercado posible.

Un claro ejemplo de una batalla por cuota de mercado es el de los grupos de distribución:

Tabla 4.1. Cuota de mercado de las empresas de distribución

Empresa	**Cuota de mercado**
Mercadona	22.8%
Carrefour	8.6%
Grupo DIA	8%
Eroski	5.7%
Lidl	4.2%
Auchan	3.6%
E-commerce	1.2%

Fuente: elaboración propia con datos obtenidos de Kantar Media España

En este segmento del mercado observamos como Mercadona se sitúa como empresa líder en el sector de la distribución. En este segmento, las empresas intentan dar más por menos, es decir, que sus clientes salgan con más satisfacción de su establecimiento que del de los competidores. Por ello, estas empresas intentan continuamente captar al máximo número posible de clientes.

Este ejemplo es bastante significativo para nuestra teoría de juegos bipersonales de suma cero, ya que la cuota de mercado que un grupo de distribución gana, es porque otro la ha perdido.

En España, las cadenas locales y pequeñas empresas de distribución se reparten aproximadamente un 40% de la cuota de mercado. Por ello, en este sector se libra una guerra de precios y una reducción del número de hogares que está acelerando la concentración. Las grandes empresas como Mercadona o Lidl, han tenido recientemente grandes planes de expansión para acaparar más clientes. Y lo han conseguido, ya que ambos grupos han sido los grupos de distribución que más han crecido el pasado año. Sin embargo, en países como Portugal, las cinco mayores empresas de supermercados controlan casi un 90% del mercado.

Aunque resulta caro, comprar a la competencia es la forma más rápida de ganar clientes en un sector en el que pelean diariamente por cada décima del mercado. La mayor cadena de España, Mercadona, controla según el último estudio de Kantar World Pannel, un 22,8% de cuota de mercado, un 0,5% más que el pasado año.

La competencia es muy grande, y como nos hemos visto envueltos en una larga crisis, los presupuestos familiares han disminuido, por lo que han contribuido a que se desarrolle una guerra de precios en el sector.

Si nos centramos un en un caso particular, podemos analizar la guerra de los baguels, que tiene lugar entre dos compañías: Columbia Bagels y H&H Bagels. Ambas empresas tienen que elegir entre establecer unos precios más altos o más bajos, para cuidar su cuota de mercado.

Tabla 4.2. Aplicación a dos empresas de Bagels

		H&H BAGELS (Empresa 2)	
		ALTO (F)	**BAJO (B)**
COLUMBIA BAGELS (Empresa 1)	**ALTO (f)**	60, 40	30, 70
	BAJO (b)	80, 20	50, 50

Fuente: elaboración propia a partir de Prajit K. Dutta (1999, pp. 100)

Este ejemplo se trata de un juego de suma constante en el que los pagos de todos los jugadores suman una constante, llamada *b*, sin importar que estrategia vector es jugada. Esto es, para todas las estrategias s_1 y s_2, $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = b$.

En este caso, la suma de la constante es 100. Tenemos en cuenta que si restásemos la constante de los pagos, el juego se convertiría en un juego de suma cero. Además, los jugadores jugarían esta transformación de suma cero exactamente de la misma forma que un juego de suma constante.

Para ver todo esto, restamos la constante b a cada ganancia del jugador 1. Con otras palabras, supongamos que los nuevos pagos son $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2)-b$ para cada par de estrategias (s_1, s_2). Evidentemente, este nuevo juego es de suma cero, ya que nos daría un resultado de 0.

Si empezamos a trabajar con este ejemplo, podemos determinar, el equilibrio de Nash, analizando los diferentes perfiles, y llegando a la conclusión de que el perfil (Bajo, Bajo) sería el perfil de equilibrio, ya que ningún jugador tiene como incentivo saber que jugará el otro jugador, por lo que si alguno eligiese Alto de forma solitaria, perdería utilidad en relación con el perfil (Bajo, Bajo), ya que eligiendo ambos la estrategia Bajo salen con un mayor beneficio.

La matriz de pagos de Columbia Bagels es la siguiente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 60 & 30_* \\ 80^* & 50^*_* \end{pmatrix}$$

En dicha matriz, vemos que los números señalados con un asterisco subíndice los mínimos de cada fila, y con un asterisco superíndice los máximos de cada columna.

La estrategia pura maximín muestra que el pago es 50, ya que es el mayor de los mínimos pagos. De otra forma, supongamos que la empresa Columbia Bagels juega *f* con probabilidad *p*.

Respecto a la estrategia mixta de pagos, podemos ver que el pago esperado por el la empresa Columbia cuando la empresa H&H juega F y B son por supuesto, respectivamente, *60p + 80(1-p)* y *30p + 50(1-p).*

La siguiente gráfica nos muestra estas dos líneas de pagos esperadas. Como antes, la envolvente inferior representa el beneficio mínimo esperado para cada *p*. Está claro que el mayor pago mínimo se logra en la intersección de las dos líneas de pago esperadas:

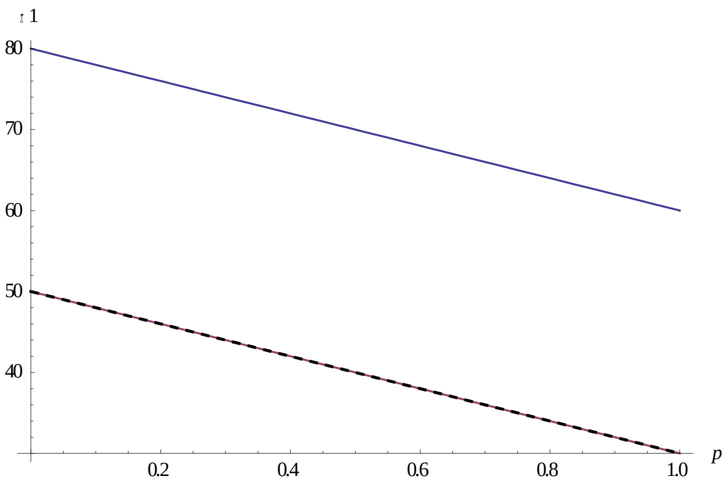

Figura 4.1. Pagos esperados en estrategias mixtas para el maximín Columbia.

Fuente: Elaboración propia a través de Wolfram Mathematica 9.0

Hasta ahora nos hemos centrado en el pago maximín y la estrategia de seguridad de Columbia Bagels. Sin embargo, para H&H se determina de forma análoga.

Por otro lado, encontramos otro tipo de estrategia llamada minimax, en la cual en lugar de jugar para protegerse de los peores resultados, la empresa Columbia podría jugar de forma más agresiva, jugando mejores respuestas contra las estrategias de H&H. Se podría pensar que este es un enfoque más optimista, intentando predecir el juego del oponente y hacer lo mejor contra él. Estamos ante el peor de los mejores pagos para Columbia Bagels.

Ahora, sería $u(s_1, q)$ el pago esperado por Columbia Bagels cuando juega la estrategia pura s_1 y su rival, H&H, juega estrategias mixtas.

La estrategia pura minimax nos muestra que en este caso, el pago minimax es 60.

Ahora suponemos que H&H juega estrategias mixtas. Lo vemos por pasos. Primero demostraremos que las dos estrategias puras para la empresa Columbia, f y b, le dan a la empresa las ganancias respectivamente esperadas: 60q + 30 (1 – q) y 80q + 50 (1 – q).

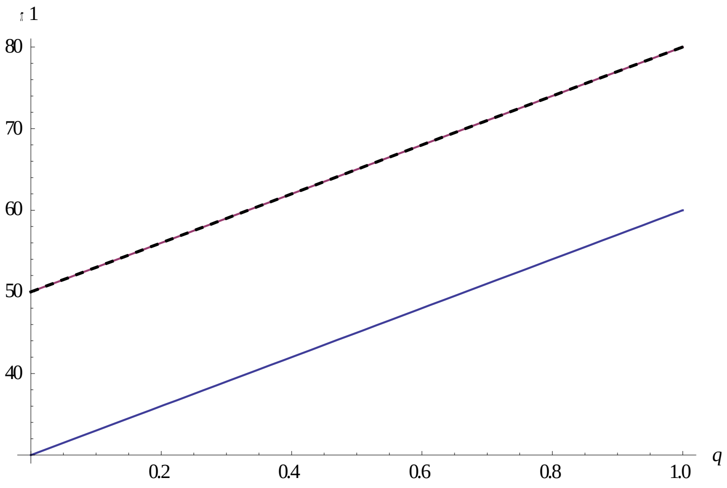

Figura 4.2. Pagos esperados en estrategias mixtas para el minimax Columbia.

Fuente: Elaboración propia a través de Wolfram Mathematica 9.0

Columbia consige su pago minimax jugando su estrategia de seguridad, y su pago minimax cuando la empresa rival, H&H, juega su estrategia de seguridad.

Por otro lado, la matriz de pagos de H&H Bagels es la siguiente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 40^*_* & 70^* \\ 20_* & 50 \end{pmatrix}$$

En dicha matriz, vemos que los números señalados con un asterisco subíndice los mínimos de cada fila, y con un asterisco superíndice los máximos de cada columna.

La estrategia pura maximín muestra que el pago es 40, ya que es el mayor de los mínimos pagos. De otra forma, supongamos que la empresa H&H Bagels juega *f* con probabilidad *p*.

Respecto a la estrategia mixta de pagos, podemos ver que el pago esperado por el la empresa H&H cuando la empresa Columbia juega F y B son por supuesto, respectivamente, -60q - 30(1-q) y -80q – 50(1-q).

La siguiente gráfica nos muestra estas dos líneas de pagos esperadas. Como antes, la envolvente inferior representa el beneficio mínimo esperado para cada p. Está claro que el mayor pago mínimo se logra en la intersección de las dos líneas de pago esperadas:

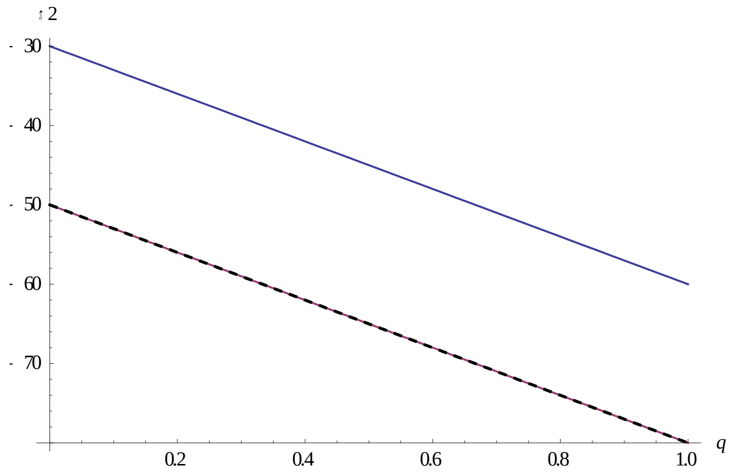

Figura 4.3. Pagos esperados en estrategias mixtas para el maximín H&H.

Fuente: Elaboración propia a través de Wolfram Mathematica 9.0

Por otro lado, encontramos otro tipo de estrategia llamada minimax, en la cual en lugar de jugar para protegerse de los peores resultados, la empresa H&H podría jugar de forma más agresiva, jugando mejores respuestas contra las estrategias de Columbia. Se podría pensar que este es un enfoque más optimista, intentando predecir el juego del oponente y hacer lo mejor contra él. Estamos ante el peor de los mejores pagos para H&H Bagels.

Ahora, sería $u(s_2, q)$ el pago esperado por H&H Bagels cuando juega la estrategia pura s_2 y su rival, Columbia, juega estrategias mixtas.

La estrategia pura minimax nos muestra que en este caso, el pago minimax es 50.

Ahora suponemos que H&H juega estrategias mixtas. Lo vemos por pasos. Primero demostraremos que las dos estrategias puras para la empresa Columbia, f y b, le dan a la empresa las ganancias respectivamente esperadas: - 60p - 80 (1 – p) y - 30p - 50 (1 – p).

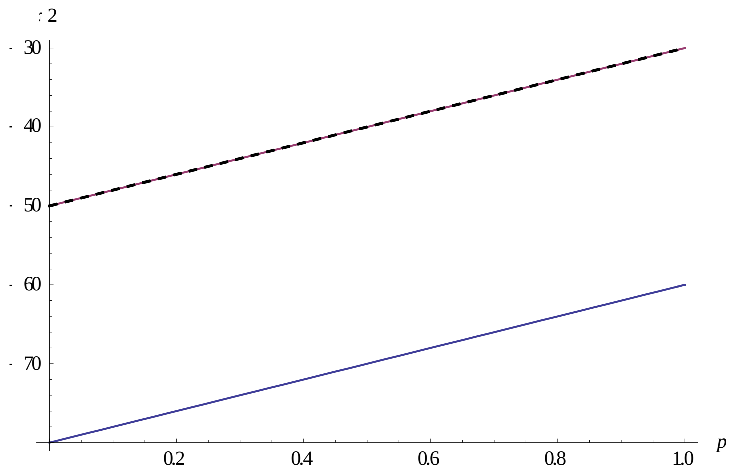

Figura 4.4. Pagos esperados en estrategias mixtas para el minimax H&H.

Fuente: Elaboración propia a través de Wolfram Mathematica 9.0

H&H consige su pago minimax jugando su estrategia de seguridad, y su pago minimax cuando la empresa rival, Columbia, juega su estrategia de seguridad.

Es decir, finalmente encontramos como equilibrio de Nash en estrategias mixtas que el equilibrio estará en (0,0), lo que nos lleva a concluir que no debemos realizar una guerra de precios.

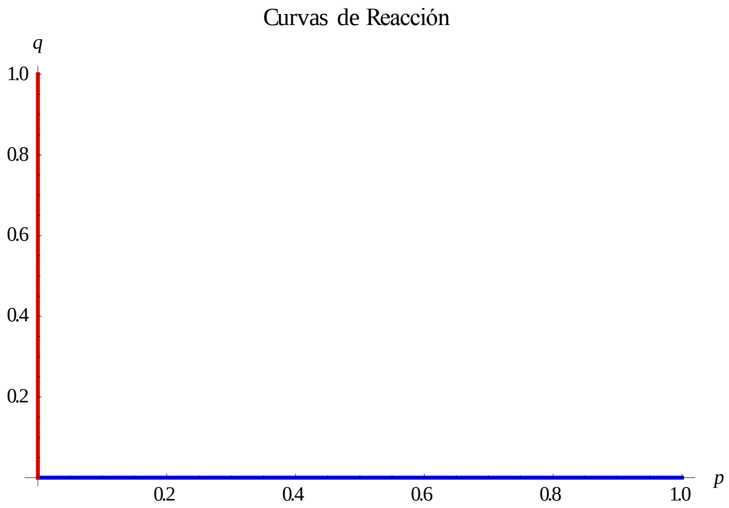

Figura 4.5. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para los precios.

Fuente: Elaboración propia a través de Wolfram Mathematica 9.0

En el siguiente caso, realizamos el análisis en referencia a los gastos publicitarios:

Tabla 4.2. Aplicación a dos empresas de Bagels

		H&H BAGELS	
		ALTO	**BAJO**
COLUMBIA BAGELS	**ALTO**	0, 100	70, 30
	BAJO	40, 60	30, 70

Fuente: elaboración propia a partir de Prajit K. Dutta (1999, pp. 100)

En este caso también se trata de un juego de suma constante en el que los pagos de todos los jugadores suman una constante, llamada *b*, sin importar que estrategia vector es jugada. Esto es, para todas las estrategias s_1 y s_2, $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = b$.

En este caso, la suma de la constante vuelve a ser 100. Tenemos en cuenta que si restásemos la constante de los pagos, el juego se convertiría en un juego de suma cero. Además, los jugadores jugarían esta transformación de suma cero exactamente de la misma forma que un juego de suma constante.

Para ver todo esto, restamos la constante b a cada ganancia del jugador 1. Con otras palabras, supongamos que los nuevos pagos son $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2)-b$ para cada par de estrategias (s_1, s_2). Evidentemente, este nuevo juego es de suma cero, ya que nos daría un resultado de 0.

En este caso solo analizaremos los puntos maximín de cada empresa, así como el equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

La matriz de gastos de Columbia Bagels es la siguiente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0_* & 70^* \\ 40^* & 30_* \end{pmatrix}$$

En dicha matriz, vemos que los números señalados con un asterisco subíndice los mínimos de cada fila, y con un asterisco superíndice los máximos de cada columna.

La estrategia pura maximín muestra que el pago es 30, ya que es el mayor de los mínimos pagos. De otra forma, supongamos que la empresa Columbia Bagels juega *f* con probabilidad *p*.

Respecto a la estrategia mixta de pagos, podemos ver que el pago esperado por el la empresa Columbia cuando la empresa H&H juega F y B son por supuesto, respectivamente, 0p + 40(1-p) y 70p + 30(1-p).

La siguiente gráfica nos muestra estas dos líneas de pagos esperadas. Como antes, la envolvente inferior representa el beneficio mínimo esperado para cada p. Está claro que el mayor pago mínimo se logra en la intersección de las dos líneas de pago esperadas:

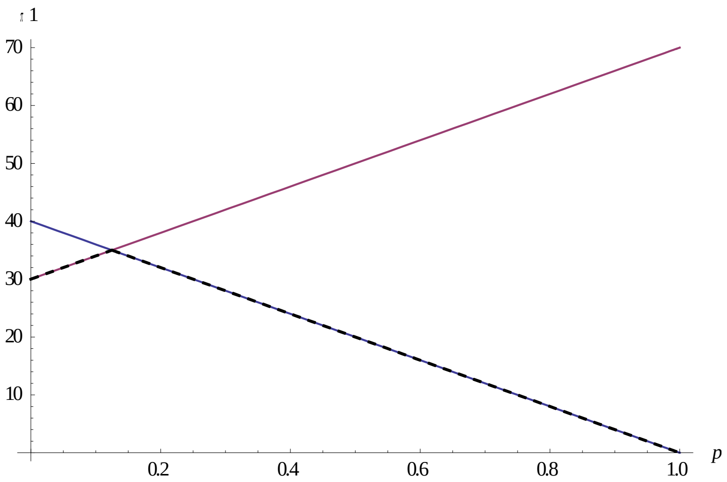

Figura 4.6. Gastos esperados en estrategias mixtas para el maximín Columbia.

Fuente: Elaboración propia a través de Wolfram Mathematica 9.0

Hasta ahora nos hemos centrado en el pago maximín y la estrategia de seguridad de Columbia Bagels. Sin embargo, para H&H se determina de forma análoga.

La matriz de gastos de H&H Bagels es la siguiente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 100^{*} & 30_{*} \\ 60_{*} & 70^{*} \end{pmatrix}$$

En dicha matriz, vemos que los números señalados con un asterisco subíndice los mínimos de cada fila, y con un asterisco superíndice los máximos de cada columna.

La estrategia pura maximín muestra que el pago es 60, ya que es el mayor de los mínimos pagos. De otra forma, supongamos que la empresa H&H Bagels juega *f* con probabilidad *p*.

Respecto a la estrategia mixta de pagos, podemos ver que el pago esperado por el la empresa H&H cuando la empresa Columbia juega F y B son por supuesto, respectivamente, -70(1-q) y 40q - 30(1-q).

La siguiente gráfica nos muestra estas dos líneas de pagos esperadas. Como antes, la envolvente inferior representa el beneficio mínimo esperado para cada p. Está claro que el mayor pago mínimo se logra en la intersección de las dos líneas de pago esperadas:

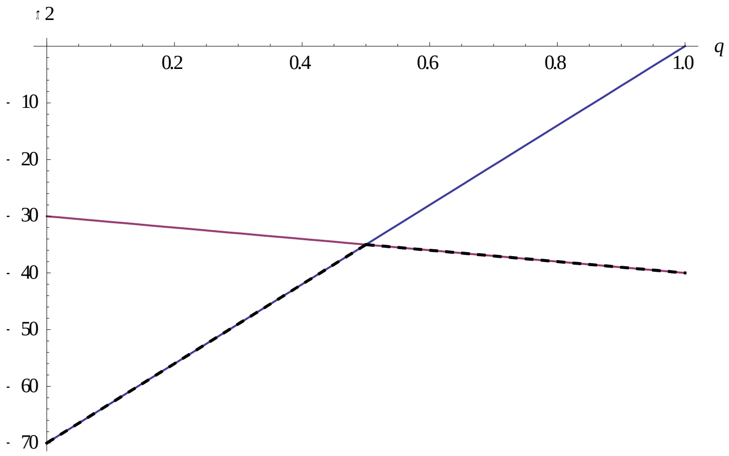

Figura 4.7. Gastos esperados en estrategias mixtas para el maximín H&H.

Fuente: Elaboración propia a través de Wolfram Mathematica 9.0

Por lo que H&H consige su pago maximín jugando su estrategia de seguridad.

Si analizamos detenidamente el equilibrio de Nash, sea q, la probabilidad de que H&H juegue Alto, pasamos a calcular las utilidades de Columbia:

- Utilidad de Columbia (A,q) = 0q + 70(1-q) = 70 – 70q
- Utilidad de Columbia (B,q) = 40q + 30(1-q) = 30 + 10q

siendo 70 – 70q = 30 + 10q → q = 1/2

Sea p la probabilidad de que Columbia elige Alto, pasamos a calcular las utilidades de H&H:

- Utilidad de H&H (A,p) = 100p + 60(1-p) = 60 + 40p
- Utilidad de H&H (B,p) = 30p + 70(1-p) = -40p + 70

Siendo 60 + 40p = - 40p + 70 → p = 1/8

Nos queda un punto de equilibrio (1/8 [A] + 1/2 [B], 1/2 [A] + 1/8 [B])

Por tanto, la función de equilibrio de Columbia nos debe decir cual es su punto de equilibrio para cada posible estrategia mixta de H&H. Observamos que:

- q < 1/2 → La mejor respuesta de Columbia = A (p = 1)
- q = 1/2 → La mejor respuesta de Columbia = p ∈ [0, 1]
- q > 1/2 → La mejor respuesta de Columbia = B (p = 0)

análogamente, las mejores respuestas para H&H serían:

- p < 1/2 → La mejor respuesta de H&H = B (q = 1)
- p = 1/2 → La mejor respuesta de H&H = q ∈ [0, 1]
- p > 1/2 → La mejor respuesta de H&H = A (q = 0)

El equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el caso de las empresas de los Bagels queda representado de la siguiente forma:

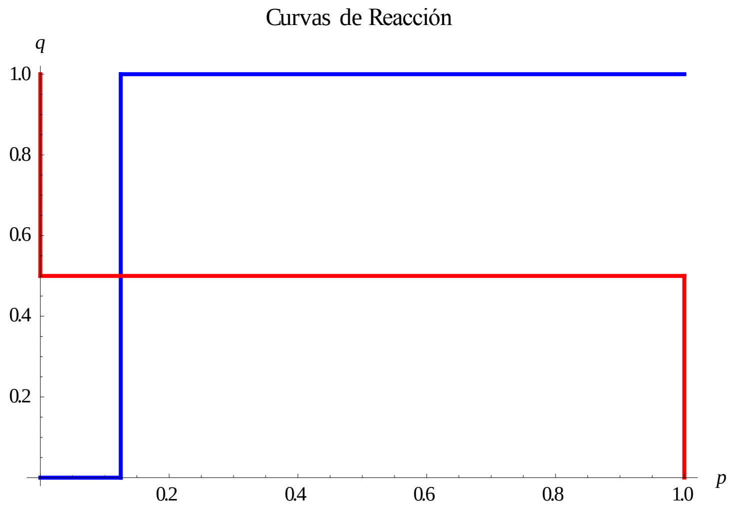

Figura 4.8. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para los gastos publicitarios.

Fuente: Elaboración propia a través de Wolfram Mathematica 9.0

Ya que si un jugador *i* elige (1/8, 1/2), (1/2, 1/8) es la respuesta óptima respecto a la decisión que tienen que tomar ambas empresas.

Podemos concluir este capítulo, haciendo una comparativa entre las estrategias analizadas (bajada de precios, e inversión en publicidad). En esta comparación podemos concluir que ante una batalla de precios, se ven mermados los beneficios, debido a que ambas empresas disminuyen sus precios a cambio de conseguir cuota de mercado, lo que finalmente afectará negativamente a la empresa.

Por otro lado, al estudiar la batalla en inversión publicitaria, vemos que es más interesante de analizar, puesto que ambas empresas realizan un gasto en publicidad, sin repercutir en los precios de los productos, y que ambas pueden aumentar sus cuotas de mercado sin inferir directamente en los beneficios de las empresas.

En definitiva, es preferible para ambas empresas que la guerra que se lleve a cabo sea la del gasto en inversión publicitaria, puesto que es lo más óptimo para las dos.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

La Teoría de Juegos se basa en el estudio de los comportamientos estratégicos de los jugadores. Con el tiempo, ha ido alcanzando un mayor grado de especialización matemática, ofreciendo varias soluciones para los diferentes problemas. De modo que hemos analizado los diferentes conceptos básicos de un juego.

Existen diferentes formas de un juego, pero nosotros nos hemos centrados en los juegos en forma estratégica, a raíz de ellos hemos analizado como determinar el equilibrio de Nash en los diferentes juegos, así tanto en estrategias puras como mixtas. Por su parte, analizamos como averiguar las propiedades que deben tener los perfiles de estrategia para encontrar la solución del juego, de modo que ningún jugador tenga incentivos para cambiar su decisión una vez dadas las estrategias de los demás.

Por otro lado, nos hemos centrado en el eje principal de nuestro trabajo, que son los juegos de suma cero. Así, hemos analizado el concepto de juego de suma cero y los diferentes conceptos relacionados como el valor maximín y minimax tanto en estrategias puras como en estrategias mixtas.

Y para finalizar, hemos llevado a cabo una aplicación práctica sobre una batalla por la cuota de mercado, en la que en primer lugar analizamos los conceptos que están relacionados con la cuota de mercado, y analizamos un ejemplo sobre una guerra de precios en el sector de la distribución alimenticia para conseguir una mayor cuota de mercado. Y en segundo lugar, aplicamos los conocimientos a un caso real como el de los bagels, en el que analizamos dos empresas en competencia por sus precios y sus gastos en publicidad, y estudiamos cuáles serían los puntos maximín y minimax para ambas empresas en los dos distintos casos así como sus equilibrios de Nash.

Con este trabajo podemos concluir que ante una batalla por la cuota de mercado, al realizar una guerra de precios, las empresas involucradas en ella, acaban finalmente estableciendo unos precios más bajos de los que podrían tener establecidos, por lo que acaban perdiendo beneficios a cambio de conseguir cuota de mercado. Esto es un error, ya que los beneficios de ambas empresas se verían reducidos. La mejor opción sería llevar a cabo una guerra por la cuota de mercado en inversión publicitaria, en la que los precios no se ven repercutidos, y la cuota de mercado se ve incrementada.

Bibliografía

Delgado, C. (2015): "Batalla por el control del supermercado", economia.elpais.com, 8 de marzo de 2015,

http://economia.elpais.com/economia/2015/03/07/actualidad/1425732436_222011.html

Dutta, Prajit K. (1999): *Strategies and Games: Theory and Practice*, MIT Press,England.

Enrique A. Bour (2011): "Introducción a Teoría de los Juegos", ebour.com.ar, Marzo, http://ebour.com.ar/ensayos_meyde/Una%20Introduccion%20a%20las%20Aplicaciones%20de%20Teor%C3%ADa%20de%20los%20Juegos%20(Gibbons).pdf

Fernández Rodriguez, F (2005): "Teoría de juegos: análisis matemático de conflictos", imarrero.webs.ull.es, https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo1lp/5/ffernandez.pdf

García, F. (2017): "Lidl y Mercadona, los grupos de distribución que más crecen", *kantar.com*, 7 de abril, http://es.kantar.com/empresas/consumo/2017/abril-2017-cuota-de-mercado-de-supermercados-en-espa%C3%B1a/

Guerrien, B. (1998): "La Microeconomía", eumed.net,

http://www.eumed.net/cursecon/libreria/bg-micro/5b.htm

Lopez Fidalgo, J.: "Teoría de juegos", previa.uclm.es,

https://previa.uclm.es/profesorado/jesuslopezfidalgo/juegos.pdf

Paenza A.: "Dilema del Prisionero", pagina12.com, 2 de Mayo de 2006, https://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-66312-2006-05-02.html

Pérez Navarro, J.; Jimeno Pastor, J. L.; Cerdá Tena, E. (2004): *Teoría de Juegos*, Pearson Educación, S.A., Madrid.

Sevilla Arias, A.: "Teoría de juegos", economipedia.com,

http://economipedia.com/definiciones/teoria-de-juegos.html