

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Continuación en Matlab de sistemas lineales a trozos

Autor: Miguel Ángel Lavado García

Tutor: Francisco Javier Ros Padilla

Dep. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Aeroespacial

Continuación en Matlab de sistemas lineales a trozos

Autor:

Miguel Ángel Lavado García

Tutor:

Francisco Javier Ros Padilla
Profesor Titular de Universidad

Dep. de Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Trabajo Fin de Grado: Continuación en Matlab de sistemas lineales a trozos

Autor: Miguel Ángel Lavado García

Tutor: Francisco Javier Ros Padilla

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

A mi familia y amigos

A mis maestros

Agradecimientos

En primer lugar, agradecer a todos los profesores que he tenido durante estos años en la Escuela que me han ayudado a conseguir mis objetivos, especialmente a mi tutor Javier, por darme la oportunidad de realizar este proyecto y, sobre todo por haberme tutorado en la realización del mismo, pues sin su ayuda habría sido prácticamente imposible realizar el mismo.

En segundo lugar, agradecer a mis amigos, tanto a aquellos que conocía antes de venir a Sevilla como a aquellos que he conocido aquí, sin todos ellos seguramente esto no hubiera sido posible, mención especial a mis compañeros de piso José Luis y Álvaro por todos estos años que llevamos conviviendo y que, sin duda, han hecho que me sea menos duro estos años de estudios en la Universidad.

Agradecer también a Celia por hacer que este último curso sea inmejorable, por todo el apoyo y cariño que me ha dado este último curso, y por demostrarme en tan poco tiempo que nada es imposible.

Por último, y para mi lo más importante, agradecer a mis familiares, a mis hermanos Francisco Javier y Estrella María, y especialmente a mis padres Francisco y María del Carmen, por todo el apoyo y la confianza que me han brindado siempre, especialmente en los momentos menos buenos, así como por el esfuerzo que han realizado para que pueda realizar estos estudios. Mencionar también a mi padrino Juani por meterme el gusanillo de la ingeniería y animarme a conseguir mis objetivos, como él dice, “Ingeniero viene de ingenio”.

Gracias a todos, de corazón.

Miguel Ángel Lavado García

Sevilla, 2017

Resumen

Se pretende en este Trabajo Fin de Grado la continuación numérica de ciclos límites obtenidos de la resolución de sistemas lineales a trozos. Mediante dicha continuación numérica se pretende detectar bifurcaciones y continuar las curvas de bifurcación para así obtener el diagrama de bifurcación asociado a un sistema. Dicha continuación se realizará mediante código programado en Matlab desde cero.

En los dos primeros capítulos, se realiza un pequeño estudio acerca de los sistemas dinámicos y de la estabilidad de los mismos.

En el tercer capítulo, se define los sistemas lineales a trozos y se resuelven analíticamente, tanto para ciclos límites trizionales como para bizonales. Posteriormente se introduce un sistema lineal a trozo concreto, asociado al oscilador electrónico de Bonhoeffer-Van der Pol.

En el cuarto capítulo, se explican los métodos de continuación numérica que nos permiten resolver nuestro problema, tanto teóricamente como en Matlab.

En el quinto capítulo, se describen los algoritmos de los códigos que hemos programado en Matlab para realizar la continuación numérica.

En el sexto capítulo, se presentan las simulaciones y resultados que hemos llevado a cabo empleando los códigos programados en Matlab, que se encuentran en el ANEXO B.

Abstract

It is intended in this project the numerical continuation of limit cycles obtained from the resolution of piecewise linear dynamical systems. With the numerical continuation, we try to detect bifurcations and to continue the bifurcation curves in order to obtain the bifurcation diagram associated to a system. The numerical continuation will be done by code programmed in Matlab from scratch.

In the first two chapters, we do a small study about dynamical systems and their stability.

In the third chapter, we define piecewise linear systems and try to solve them analytically for both trizonal and bi-zonal limit cycles. Later we introduce a specific piecewise linear system, associated with the electronic oscillator of Bonhoeffer-Van der Pol.

In the fourth chapter, we explain the methods of numerical continuation that allow us to solve our problem, both theoretically and in Matlab.

In the fifth chapter, we describe the algorithms of the codes that we have programmed in Matlab to perform the numerical continuation.

In the sixth chapter, we present the simulations and results that we have obtained using the codes programmed in Matlab, found in ANNEX B.

Índice

Agradecimientos	<i>i</i>
Resumen	<i>iii</i>
Abstract	<i>v</i>
Índice	<i>vii</i>
Índice de Figuras	<i>ix</i>
1 Sistemas Dinámicos	1
1.1 Definición y clasificación	1
1.2 Soluciones de sistemas dinámicos autónomos no lineales	2
2 Estabilidad Y Bifurcaciones	5
2.1 Estabilidad	5
2.2 Bifurcaciones	10
3 Sistemas Lineales A Trozos	21
3.1 Descripción del sistema	21
3.2 Ciclos límites trizionales simétricos	22
3.3 Ciclos límites trizionales no simétricos	24
3.4 Ciclos límites bizonales	26
3.5 Oscilador de Bonhoeffer-Van der Pol	27
4 Continuación Numérica	31
4.1 Descripción de la continuación numérica	31
4.2 Continuación numérica en Matlab	36
5 Algoritmos En Matlab	39
5.1 Main (B.1. main.m)	39
5.2 Continuación ciclo (B.2. contin_ciclo.m)	39
5.3 Método de Newton (B.4. newton.m)	41
5.4 Ecuaciones de cierre (B.6. ecucierre.m)	42
5.5 Jacobiano numérico (B.7. jacnum.m)	42
5.6 Gráficas	42
5.7 Sistema (B.8. sistema.m)	43

6	<i>Simulaciones Y Resultados En Matlab</i>	45
6.1	Caso 1	45
6.2	Caso 2	48
6.3	Caso 3	50
6.4	Caso 4	54
6.5	Caso 5	56
6.6	Caso 6	59
7	<i>Conclusiones y Futuras mejoras</i>	63
7.1	Conclusiones	63
7.2	Trabajo futuro	63
<i>ANEXO A: Eliminación Rama Espurea Ciclos Límites Trizionales No Simétricos</i>		65
<i>ANEXO B: Códigos Matlab</i>		69
B.1.	main.m	69
B.2.	contin_ciclo.m	70
B.3.	contin_curvabif.m	75
B.4.	newton.m	78
B.5.	newton_keller.m	78
B.6.	ecucierre.m	79
B.7.	jacnum.m	81
B.8.	sistema.m	82
B.9.	comprueba_autovalores.m	82
B.10.	tipo_bifurcacion.m	82
B.11.	gamma_alpha.m	83
B.12.	dibuja_orbitas.m	84
B.13.	representa_vector_estado.m	85
B.13.	dbloop.m	86
<i>Referencias</i>		87

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1 Solución temporal y espacio de fases de la trayectoria de un sistema dinámico	2
Fig. 1.2 Diagrama de fases de un sistema dinámico	3
Fig. 1.3 Campo vectorial y diagrama de fases asociado de un sistema dinámico	3
Fig. 2.1 Ciclo límite atractor y ciclo límite repulsor.	6
Fig. 2.2 Atractor de Lorenz y toro límite.	6
Fig. 2.3 Clasificación puntos de equilibrios	7
Fig. 2.4 Sección de Poincaré y mapa de Poincaré	8
Fig. 2.5 Representación en polares de los autovalores asociados a la matriz de monodromía	9
Fig. 2.6 Diagrama de fases de sistema estructuralmente estable y de sistema estructuralmente inestable	10
Fig. 2.7 Diagrama de fases en una bifurcación silla-nodo. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$	11
Fig. 2.8 Diagrama de bifurcación silla-nodo	12
Fig. 2.9 Diagrama de fases en una bifurcación transcritical. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$	12
Fig. 2.10 Diagrama de bifurcación transcritical	13
Fig. 2.11 Diagrama de fases en una bifurcación pitchfork supercritical. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$	13
Fig. 2.12 Diagrama de bifurcación Pitchfork	14
Fig. 2.13 Diagrama de fases en una bifurcación pitchfork subcritical. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$	14
Fig. 2.14 Diagrama de bifurcación Pitchfork subcritical	14
Fig. 2.15 Evolución de los autovalores del jacobiano en una bifurcación Hopf	15
Fig. 2.16 Diagrama de fases en una bifurcación hopf supercritical. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$	15
Fig. 2.17 Diagrama de bifurcación hopf supercritical	16
Fig. 2.18 Diagrama de fases en una bifurcación Hopf subcritical. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$	16
Fig. 2.19 Diagrama de bifurcación Hopf subcritical	17
Fig. 2.20 Representación en polares de autovalores asociados a la matriz de monodromía con criterios de inestabilidad para las bifurcaciones en soluciones periódicas	17
Fig. 2.21 Diagrama de bifurcación silla-nodo de ciclos límites	18
Fig. 2.22 Diagrama de bifurcación flip de ciclos límites	18
Fig. 2.23 Diagrama de bifurcación toro de ciclos límites	18
Fig. 2.24 Órbita heteroclina (en rojo) en un diagrama de fases	19
Fig. 2.25 Diagrama de fases bifurcación homoclina	19
Fig. 2.26 Órbita homoclínica	19
Fig. 2.27 Diagrama de bifurcación Takens-Bogdanov	20
Fig. 3.1 Gráfica de la función saturación de x_1	21
Fig. 3.2 Órbita periódica de tres zonas	23
Fig. 3.3 Órbita periódica de dos zonas	26
Fig. 3.4 Oscilador electrónico de Bonhoeffer-Van der Pol	28
Fig. 3.5 Diagrama $\gamma = \gamma(\alpha)$ que nos muestra los ciclos límites, puntos de equilibrio y bifurcaciones en el oscilador de Bonhoeffer-Van der Pol con $\beta = 0.2$	28
Fig. 4.1 Errores de truncamiento, de redondeo y global frente a h en el método de diferencias avanzadas	33
Fig. 4.2 Errores de truncamiento, de redondeo y global frente a h en el método de diferencias centradas	34

Fig. 4.3 Continuación natural de la solución de una ecuación	35
Fig. 4.4 Interpretación gráfica método de Keller	35
Fig. 4.5 Cálculo del vector t_0 para comenzar la continuación numérica en Matlab	37
Fig. 6.1 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite	46
Fig. 6.2 Ciclo límite trizonal simétrico	46
Fig. 6.3 Curva de bifurcación Silla-Nodo	47
Fig. 6.4 Diagrama de bifurcación con curva de bifurcación Silla-Nodo	47
Fig. 6.5 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Silla-Nodo	47
Fig. 6.6 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite	48
Fig. 6.7 Ciclo límite trizonal simétrico	48
Fig. 6.8 Curva de bifurcación Silla-Nodo	49
Fig. 6.9 Diagrama de bifurcación con curva de bifurcación Silla-Nodo	49
Fig. 6.10 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Silla-Nodo	50
Fig. 6.11 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite	50
Fig. 6.12 Ciclo límite trizonal no simétrico	51
Fig. 6.13 Aproximación órbita homoclínica tipo Shilnikov	51
Fig. 6.15 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Flip	52
Fig. 6.16 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Silla-Nodo	52
Fig. 6.17 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Toro	53
Fig. 6.18 Diagrama de bifurcación con las tres bifurcaciones detectadas	53
Fig. 6.19 Curvas de bifurcaciones detectadas	53
Fig. 6.20 Aproximación de la órbita homoclínica en la continuación de la curva de bifurcación toro	54
Fig. 6.21 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite	54
Fig. 6.22 Ciclo límite bizonal	55
Fig. 6.23 Curva de bifurcación Silla-Nodo	55
Fig. 6.24 Diagrama de bifurcación con curva de bifurcación Silla-Nodo	55
Fig. 6.25 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Silla-Nodo	56
Fig. 6.26 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite	56
Fig. 6.27 Ciclo límite bizonal	57
Fig. 6.28 Curva de bifurcación Flip	57
Fig. 6.29 Diagrama de bifurcación con curva de bifurcación Flip	57
Fig. 6.30 Ciclo límite de 2 zonas y planta del ciclo límite	58
Fig. 6.31 Ciclo límite de 3 zonas no simétrico y planta del ciclo límite	58
Fig. 6.32 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Flip para ciclos límites bizontales	59
Fig. 6.33 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Flip para ciclos límites trizontales	59
Fig. 6.34 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite	60
Fig. 6.35 Ciclo límite bizonal	60
Fig. 6.36 Curva de bifurcación Toro	61
Fig. 6.37 Diagrama de bifurcación con curva de bifurcación Toro	61
Fig. 6.38 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Silla-Nodo	61
Fig. 6.39 Aproximación de la órbita homoclínica	62
Fig. 7.1 Ejemplo interfaz GUI Matlab	64

1 SISTEMAS DINÁMICOS

Se trata en este apartado dar una visión detallada de los sistemas dinámicos. En primer lugar, en la sección 1.1 se definen los sistemas dinámicos y se hace clasificaciones de ellos. A continuación, en la sección 1.2 se da una visión cualitativa de las soluciones que nos aparecen en los sistemas dinámicos y se ven las posibles soluciones que se pueden encontrar en el espacio de fases.

1.1 Definición y clasificación

Se denomina sistema dinámico a aquel sistema que varía con el tiempo (dinámico). Un sistema dinámico viene descrito por un espacio de estados $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto de ecuaciones diferenciales $F = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$, donde n es el número de ecuaciones y que, para sistemas determinados, coincidirá con el número de variables de estado.

Los sistemas dinámicos pueden ser **discretos** o **continuos** en función de si el tiempo varía discreta o continuamente. Se considera de ahora en adelante que todos los sistemas con los que se trabaja aquí son continuos a menos que se indique lo contrario. Un sistema dinámico continuo de n ecuaciones y n variables de estado se puede representar como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1.1)$$

La solución de dicho sistema dinámico no es más que obtener la evolución de las variables de estado con el tiempo dadas unas condiciones iniciales, es decir, hallar $X(t)$ dado $X(t=0)$. Para cada solución inicial proporcionada se tiene una solución única.

Los sistemas dinámicos que se usan en este proyecto son sistemas **deterministas**, pues permiten conocer el estado del sistema en el futuro a partir del estado actual. En un sistema dinámico determinista el espacio de estados X varía de acuerdo a las ecuaciones que rigen su movimiento de forma que se puede conocer $X(t)$ en función de $X(t < T)$.

Por otra parte, los sistemas dinámicos pueden clasificarse en **autónomos** o **no autónomos** en función de si la variable independiente t aparece o no de forma explícita en las funciones f_i . En caso de que no aparezca t explícitamente se habla de sistemas autónomos y se representa como $\dot{X} = F(X)$, mientras que en caso contrario se habla de sistemas no autónomos y se representa como $\dot{X} = F(X, t)$. Consideramos a partir de ahora que los sistemas dinámicos con los que se trata en este trabajo son autónomos.

Finalmente, los sistemas dinámicos pueden ser **lineales** o **no lineales**. Se dice que un sistema es lineal si se cumple que $\dot{X} = F(ax + by) = aF(x) + bF(y)$. Los sistemas lineales son, en general, fáciles de solucionar, pues se pueden resolver por superposición de otras soluciones del mismo sistema, sin embargo, la mayoría de

sistemas que describen fenómenos físicos e ingenieriles son no lineales, cuya solución no es sencilla. Un ejemplo de la importancia de los sistemas no lineales son las ecuaciones de Naviera-Stokes.

1.2 Soluciones de sistemas dinámicos autónomos no lineales

Como se ha comentado anteriormente, la mayoría de fenómenos físicos están asociados a sistemas dinámicos no lineales. Aunque no es fácil hallar una solución exacta de estos sistemas, se trata en este apartado de dar una visión cualitativa de las soluciones que nos aparecen en estos sistemas.

El comportamiento dinámico del sistema va íntimamente ligado al comportamiento de las variables de estado del sistema. Dicho comportamiento de las variables de estado puede observarse bien, en **espacio temporal** ($X(t)$), o bien, en **espacio de fases** ($\dot{X} = F(X)$). En espacio temporal se representa la evolución de las variables de estado con respecto al tiempo, mientras que en espacio de fases se representa la proyección de los posibles estados sobre el plano de las variables de estado.

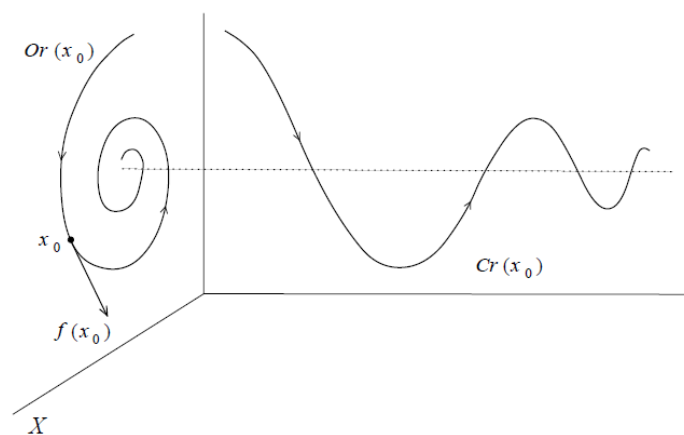


Fig. 1.1 Solución temporal y espacio de fases de la trayectoria de un sistema dinámico

Ahora bien, la no linealidad de los sistemas dinámicos va asociada en muchos casos a la aparición de comportamiento impredecible e incluso caótico. Normalmente no se puede encontrar soluciones exactas en el espacio temporal para estos sistemas ($X(t)$), por lo que es importante realizar un análisis cualitativo de la dinámica del sistema a través del espacio de fases ($\dot{X} = F(X)$).

Así pues, el espacio de fases se convierte en una herramienta fundamental para comprender las soluciones en estos sistemas. Es importante tener en cuenta que la representación en el espacio de fases tiene sentido únicamente en sistemas autónomos, en los que \dot{X} es únicamente función de la posición y no del tiempo, que son los sistemas que se tratan en este proyecto.

En el espacio de fases se representa todas las posibles trayectorias del sistema dinámico siendo el tiempo un parámetro implícito. Cada trayectoria dibujada está asociada a una condición inicial y representa un posible estado del sistema, siendo esta una solución única para un conjunto dado de valores iniciales de X . Así pues, cada trayectoria representada es la proyección de una solución $X(t)$ dada unas condiciones iniciales $X(0)$ sobre el espacio de fases. A la representación de todas las trayectorias asociadas a las soluciones del sistema dinámico se le llama **diagrama de fases**.

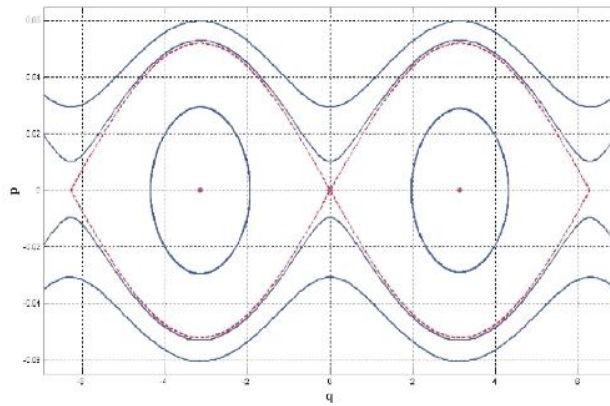


Fig. 1.2 Diagrama de fases de un sistema dinámico

La representación en el espacio de fases se obtiene eliminando la variable t del sistema por lo que en principio no es posible conocer el sentido en el que se recorren las soluciones, sin embargo, esto es posible introduciendo el **campo vectorial** del sistema dinámico (\vec{v}), de forma que la dirección de este campo vectorial nos dará el sentido de las órbitas.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Otro aspecto a tener en cuenta del campo vectorial es que está íntimamente ligado a la representación de las órbitas, pues los vectores que se obtienen son los vectores tangentes a las órbitas en el espacio de fases, de forma que si se conoce el campo vectorial se conocerán las órbitas y el sentido en que se recorren.

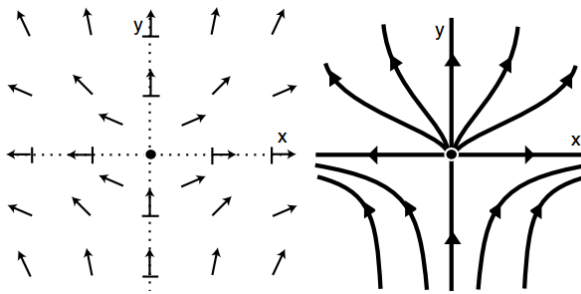


Fig. 1.3 Campo vectorial y diagrama de fases asociado de un sistema dinámico

Las soluciones en el espacio de fases no pueden cruzarse unas a otras, y solo pueden ser de 3 tipos:

- **Puntos de equilibrio:** Son las soluciones más simples, pues se pueden encontrar fácilmente sin más que hacer $\dot{X} = 0$, que corresponde a la trayectoria de una solución constante ($X = cte.$). En el espacio de fases se reduce a un punto que se llama también punto crítico o fijo. Conocer los puntos de equilibrio es sumamente importante pues estos determinan el comportamiento cualitativo de las soluciones.
- **Órbitas periódicas:** Son aquellas soluciones que se caracterizan por ser periódicas, es decir, aquellas en las que se cumple $X(t+T) = X(t)$, donde se llama T al período de la órbita. En el espacio de fases se caracterizan porque son aquellas órbitas que se cortan a sí mismas (curvas cerradas simples). Si esta órbita periódica es aislada, es decir, no existen más órbitas cerradas a su alrededor hablamos entonces

de ciclo límite.

- **Órbitas no periódicas:** Estas soluciones son las más complejas y corresponden a aquellas trayectorias que no se cortan a sí mismas (curvas abiertas).

Comentar que las órbitas de dos soluciones, o bien no tienen ningún punto en común, o bien coinciden completamente. Además, varias órbitas pueden cortarse en un punto crítico, sin violar esto la unicidad de las soluciones. Este caso corresponde a órbitas que tienden para tiempos muy grandes ($t \rightarrow \infty$) a soluciones constantes, pero que no se dan en tiempo finito.

2 ESTABILIDAD Y BIFURCACIONES

Se trata en este apartado de dar las nociones básicas acerca de la **estabilidad** y **bifurcación** en sistemas dinámicos. En primer lugar, en la sección 2.1 se hace una introducción al concepto de estabilidad, tanto de puntos críticos como de ciclos límites. En el apartado 2.1.1 se definen los criterios matemáticos de estabilidad en puntos críticos para sistemas lineales, se hace una clasificación de los mismos, y finalmente se hacen varias consideraciones para extrapolar estos resultados a sistemas no lineales. Por otro lado, en el apartado 2.1.2 se define la estabilidad de soluciones periódicas mediante los mapas de Poincaré y posteriormente se introducen los criterios matemáticos de estabilidad para ciclos límites a través de la matriz de monodromía. Finalmente, en el apartado 2.1.3 se habla de la estabilidad estructural, que está estrechamente relacionada con las bifurcaciones.

En segundo lugar, en la sección 2.2 se define el concepto de bifurcaciones y se hace una clasificación de las mismas. En el apartado 2.2.1 se introduce el concepto de diagramas de bifurcación. A continuación, en el apartado 2.2.2 se estudian las posibles bifurcaciones locales que pueden aparecer en puntos de equilibrio y en ciclos límites. Y finalmente, en el apartado 2.2.3 se definen qué son las bifurcaciones globales y se nombran cuales son algunas de las más usuales.

2.1 Estabilidad

La **estabilidad** es, probablemente, la propiedad de los sistemas dinámicos más importante. La base para esta afirmación estriba en que un sistema debe actuar de forma estable para tener interés y utilidad. En caso contrario, la respuesta del sistema no está acotada y su estudio carece de relevancia en la Ingeniería. Así pues, un aspecto primordial en el estudio de los sistemas dinámicos es el estudio de la estabilidad del mismo.

Como se ha comentado anteriormente, resulta de gran interés conocer los puntos de equilibrio y el comportamiento de las órbitas que se encuentran alrededor de estos puntos, pues estos nos dan un conocimiento importante acerca de la estabilidad y las bifurcaciones de las soluciones del sistema dinámico. Así pues, se trata en este apartado de realizar un análisis cualitativo de las soluciones de un sistema dinámico.

En el sentido de la estabilidad, un importante concepto a tener en cuenta es el de **atractor**. Se dice que un atractor es un conjunto cerrado y acotado del espacio de fases hacia el que se aproximan las órbitas de las soluciones cercanas conforme transcurre el tiempo. De esta forma, los atractores describen la evolución del sistema para tiempos muy grandes. Los dos principales atractores son:

- **Punto crítico:** Un punto crítico se puede comportar de forma que las trayectorias cercanas converjan al mismo, o bien que el punto crítico diverja a otras órbitas. En el primer caso se dice que el punto de equilibrio se comporta como atractor y es estable. Este caso describe el sistema más sencillo posible, pues todas las órbitas cercanas convergen a un solo punto, teniendo así el mismo estado para tiempos muy grandes.
- **Ciclo límite:** Como se ha dicho anteriormente, un ciclo límite es una órbita periódica que se caracteriza por estar aislada. Al no existir órbitas cerradas en su entorno, las órbitas abiertas cercanas se moverán alejándose o acercándose a dicho ciclo límite. En caso de que estas órbitas cercanas se muevan acercándose al ciclo límite entonces diremos que este es un atractor y se comportan como estable. Existe

la posibilidad también de que haya órbitas vecinas que se alejen y otras que se acerquen, en este caso diremos que el ciclo límite es semiestable. Finalmente, si todas las órbitas cercanas se mueven alejándose se dice que el ciclo límite es inestable.

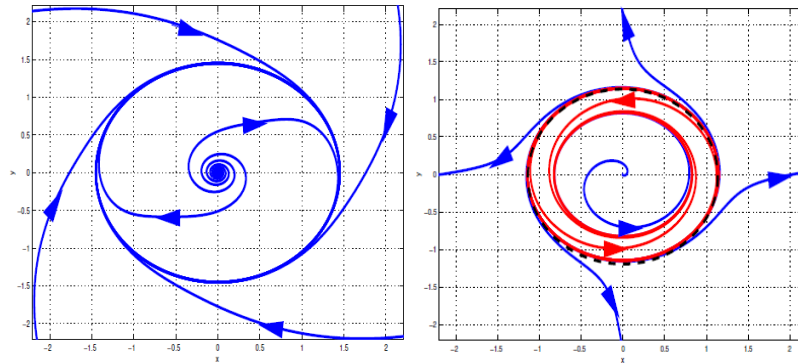


Fig. 2.1 Ciclo límite atractor y ciclo límite repulsor.

Además de estos dos atractores existen otros más complejos como **el toro límite**, asociada a la bifurcación toro, o el **atractor de Lorenz**, relacionado con la dinámica caótica.

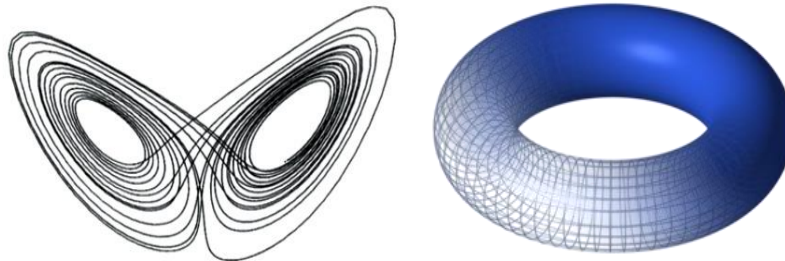


Fig. 2.2 Atractor de Lorenz y toro límite.

En esta sección se han dado criterios cualitativos para la estabilidad de puntos críticos y ciclos límites, sin embargo, no se han dado criterios matemáticos para determinar si dichos puntos son estables o inestables. Así pues, a continuación, se dan estos criterios para poder identificar la estabilidad en las singularidades comentadas.

2.1.1 Estabilidad de puntos críticos.

Sea un sistema dinámico **lineal** definido por $\dot{X} = F(X)$, donde X es el vector de estado del sistema y F es suave, y sea X_0 un punto de equilibrio ($F(X_0)=0$). Se puede decir que la solución X_0 es estable si, sometida a una pequeña perturbación, el movimiento resultante no difiere mucho del original. Sí, además, el efecto de la perturbación es eliminado conforme pasa el tiempo y converge a la solución inicial (X_0), la solución será asintóticamente estable.

Sea el sistema presentado anteriormente, y sea A la matriz jacobiana asociada a $F(X)$ evaluada en X_0 , $A = F_X(X_0)$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores asociados a la matriz A , entonces se dice que X_0 es **estable** si $Re(\lambda_i) \leq 0, \forall i$, en caso contrario, el sistema se comportará como **inestable**. Si además se cumple que son todos los autovalores estrictamente menor que 0 se dice que es **asintóticamente estable**. Ahora bien, en función de dichos autovalores puede haber distintos tipos de estabildades o inestabildades. Si se cumple que la parte real de todos los autovalores asociados a la matriz A es distinta de cero ($Re(\lambda_i) \neq 0, \forall i$), se dice que X_0 es un **punto de equilibrio hiperbólico**. En caso contrario, si los autovalores se encuentran sobre el eje imaginario se habla de **equilibrio no hiperbólico**.

- **Nodo o sumidero:** Se da cuando todos los autovalores tienen parte real negativa de forma que se comporta como estable. Se cumple que todas aquellas órbitas que comienzan cerca del punto de equilibrio se aproximan al mismo para $t \rightarrow \infty$.
- **Fuente:** Se dice que el punto de equilibrio se comporta como una fuente cuando todos los autovalores tienen parte real positiva. En este caso las órbitas cercanas al equilibrio tienden a alejarse al infinito, de manera que es inestable.
- **Puntos de silla:** Se da cuando hay autovalores con parte real positiva y otros con parte real negativa. En sistemas lineales, cuando $t \rightarrow +\infty$, se cumple que dos trayectorias rectas se acercan al origen y otras dos trayectorias rectas se separan del origen, por lo que concluimos que todo punto de silla es inestable.
- **Foco o espiral:** Se dice que el punto de equilibrio es un foco cuando tenemos autovalores complejos conjugados. En este caso el punto se comportará como estable si los autovalores tienen parte real negativa o inestable en caso contrario.
- **Centro lineal:** Se da cuando hay autovalores imaginarios puros. En este caso se tiene un punto crítico estable pero que no es asintóticamente estable.

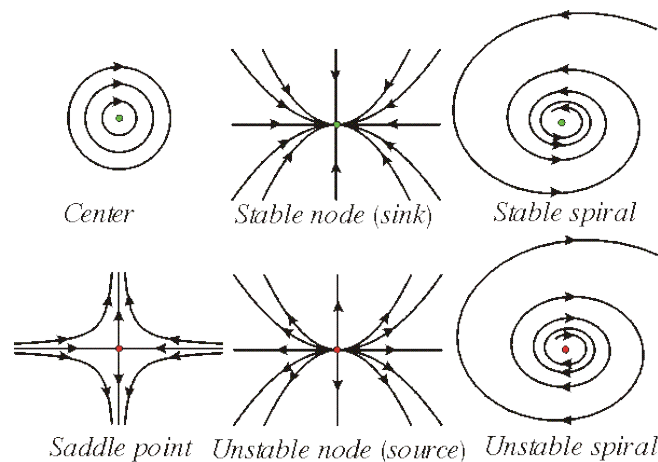


Fig. 2.3 Clasificación puntos de equilibrios

Ahora bien, los resultados anteriores son válidos para sistemas lineales. En caso de **sistemas no lineales** este análisis es más complejo, sin embargo, una primera estimación que puede resultar válida en primera aproximación consiste en la linealización del sistema en cuestión, y la obtención de la matriz Jacobiana asociada al sistema linealizado. Así, a partir de los autovalores asociados a dicha matriz jacobiana del sistema linealizado se puede demostrar que [1]:

- Si un punto crítico de un sistema lineal asociado se comporta como **asintóticamente estable** (o **inestable**), dicho punto crítico se comportará asimismo como asintóticamente estable (o inestable) para el sistema no lineal.
- Si el sistema lineal asociado es inestable, el sistema no lineal se comporta también como **inestable**.

Sin embargo, estos resultados no son válidos para los casos en los que el sistema se comporta como estable pero que no es asintóticamente estable, por lo que en estos casos se debe recurrir a otras herramientas para determinar la estabilidad del punto crítico.

2.1.2 Estabilidad de órbitas periódicas. Aplicación de Poincaré

Anteriormente se ha introducido el concepto de estabilidad para puntos críticos, pero no se ha definido ningún método para determinar la **estabilidad de ciclos límites**. A continuación, se hablan de los **mapas de Poincaré**, que están estrechamente relacionados con la estabilidad de órbitas periódicas.

Sea un sistema dinámico definido por $\dot{X} = F(X)$, se dice que un ciclo límite es **estable** si existe un conjunto abierto $V \in \mathbb{R}^n$ que contiene al ciclo límite y a un subconjunto $W \in \mathbb{R}^n$, de forma que cada solución inicial que parte del interior de W , permanece en V conforme aumenta el tiempo. Si, además, hay un subconjunto X contenido en W tal que toda solución que se inicia dentro de X es asintótica al ciclo límite cuando $t \rightarrow \infty$, se dice que dicha órbita es **asintóticamente estable**.

En este sentido, Poincaré trató de determinar la estabilidad de un ciclo límite cortándolo con un plano normal al mismo y viendo las intersecciones en dicho plano de órbitas cercanas a dicho ciclo límite. Así, situándose en un punto O del ciclo límite, Poincaré cortó la trayectoria por el plano normal al ciclo límite en el punto O . Observó que **puntos fijos** en la sección de Poincaré corresponden a puntos de la órbita periódica, de forma que el punto O se encuentra fijo en dicha sección. Si x es un punto del plano normal muy próximo a O , la órbita que pasa por x tras dar una vuelta por las proximidades de O vuelve a cortar el plano normal en un punto $P(x)$, en un principio distinto de x pero próximo a él, en la vuelta siguiente vuelve a cortar el plano en $P^2(x)$, etc. De esta forma, si la órbita es estable, cada punto $P^n(x)$ estará a igual o menor distancia respecto a O , y si, además, es asintóticamente estable, para tiempos muy grandes, ambos puntos coincidirán.

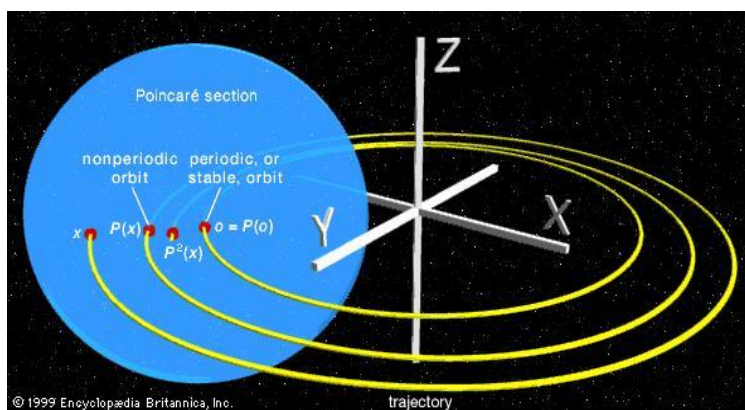


Fig. 2.4 Sección de Poincaré y mapa de Poincaré

El estudio de esta sucesión de puntos permite prever la evolución de la trayectoria procedente de x . Esta sección de la trayectoria por un plano normal se denomina actualmente **Sección de Poincaré** y la aplicación del plano en sí mismo que, al punto x , le asocia su sucesor $P(x)$, **Aplicación de Poincaré**. En el mismo sentido, a la representación de los puntos de intersección en la sección de Poincaré de la órbita cercana al ciclo límite se llama **Mapa de Poincaré**, de forma que, si aplicamos n veces la aplicación P a x , se obtiene el mapa de retorno n -ésimo.

Hasta ahora se ha hecho una descripción cualitativa de la estabilidad en órbitas periódicas, pero no se ha obtenido un criterio matemático para ello. En términos matemáticos, la estabilidad de las órbitas periódicas se puede obtener en primera aproximación a partir de la estabilidad del punto fijo en el mapa de Poincaré. Ahora bien, dicho mapa de Poincaré es un **sistema discreto no lineal** por lo que no son válidos los criterios de estabilidad para sistemas continuos.

2.1.2.1 Matriz de monodromía

La **matriz de monodromía** es una matriz dependiente del tiempo que se caracteriza porque satisface para cualquier instante de tiempo $\dot{M} = J(t)M$, con $J(t)$ la matriz jacobiana asociada al mapa de Poincaré P y

$M(0) = I$, la matriz identidad de orden n .

Un criterio para hallar la **estabilidad** de una órbita periódica se basa en analizar los **autovalores** de la matriz de monodromía. Hallar la matriz Jacobiana del sistema discreto asociado al mapa de Poincaré P en $O (J(O))$ no es sencillo, sin embargo, puede demostrarse que los autovalores de esta matriz están estrechamente relacionados con las de la matriz de monodromía. Además, para los sistemas lineales a trozos que se tratan más adelante, esta matriz puede obtenerse fácilmente, por lo que se puede determinar de una forma más sencilla la estabilidad de los ciclos límites.

Así, se puede demostrar que si $M(T_0)$ es la matriz de monodromía asociada a un **ciclo límite**, es decir, a un punto fijo en el mapa P , entonces se cumple que los autovalores de $M(T_0)$ son $1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ ¹, donde λ_i son los multiplicadores del mapa de Poincaré asociado al ciclo límite. Entonces se tiene que:

- El ciclo límite es **estable** si todos los autovalores λ_i son menores que 1. En este caso las órbitas cercanas se mueven acercándose a dicho ciclo límite.
- El ciclo límite es **inestable** si al menos uno de los autovalores λ_i es mayor que 1.

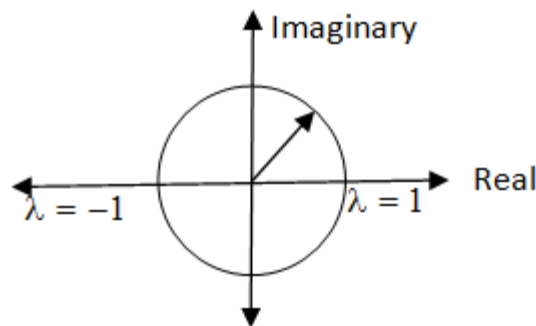


Fig. 2.5 Representación en polares de los autovalores asociados a la matriz de monodromía

2.1.3 Estabilidad estructural

Aunque los sistemas dinámicos que se han comentado anteriormente solo dependían de X ($\dot{X} = F(X)$), habitualmente los sistemas dinámicos dependen de uno o varios parámetros ($\dot{X} = F(X, \alpha)$), con $X \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^p$, donde p es el número de **parámetros dependientes** del sistema. Así, sea un sistema dinámico continuo autónomo no lineal dependiente de parámetros, la dinámica del mismo vendrá determinada por los valores de dichos parámetros, de forma que un sistema puede ser **estable** o **inestable** en función de la evolución de los propios parámetros.

Nos interesa saber si se producen cambios cualitativos importantes en un sistema debido a pequeñas variaciones en los parámetros del mismo que afecten a la estabilidad. De esta forma, se define un **sistema estructuralmente estable** como aquel para el cual las propiedades dinámicas cualitativas del sistema se mantienen inalterables frente a pequeñas variaciones en los parámetros. Las trayectorias asociadas a dos valores próximos de un parámetro permanecen cercanas entre sí en caso de sistemas estructuralmente estables. En caso contrario, el comportamiento del sistema diferirá considerablemente para dos valores próximos del parámetro, estando esto asociado normalmente a la aparición de **bifurcaciones**.

¹ Se cumple que un autovalor de $M(T_0)$ es 1 porque es un ciclo límite. En caso de que tuviéramos una órbita abierta esto no es cierto.

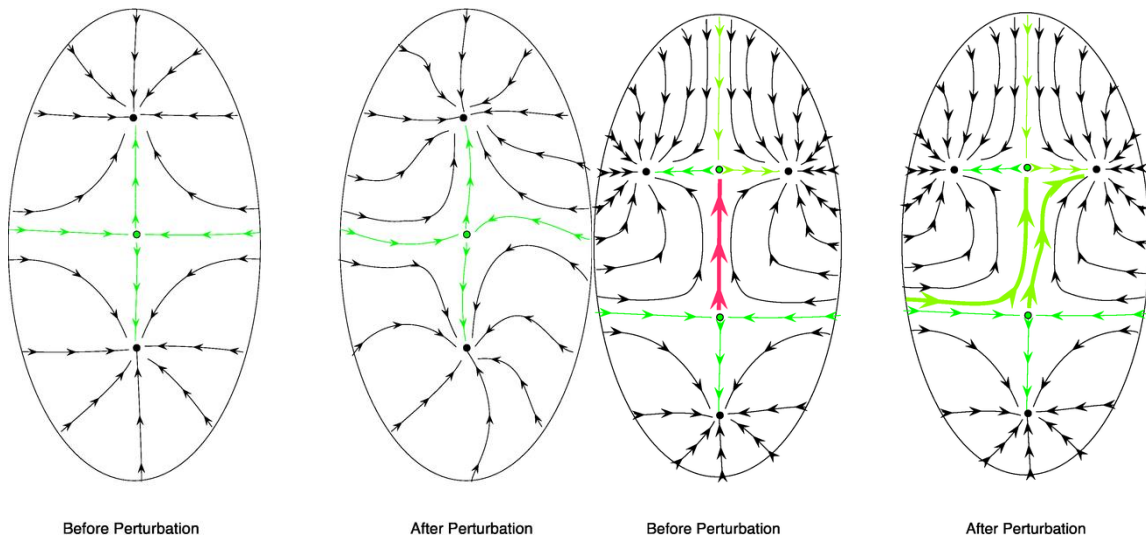


Fig. 2.6 Diagrama de fases de sistema estructuralmente estable y de sistema estructuralmente inestable

2.2 Bifurcaciones

Como se ha comentado en 2.1.3 el estudio de las **bifurcaciones** está directamente relacionado con el estudio de la **estabilidad estructural** de un sistema dinámico. Sea el sistema definido en dicho apartado y sea el diagrama de fases asociado a dicho sistema, se sabe que pequeñas variaciones en los parámetros suponen variaciones en el diagrama de fases de forma que pueden ocurrir dos cosas: el sistema es estructuralmente estable y se comporta de forma similar antes y después de la perturbación, o bien, el sistema no es estructuralmente estable y, por tanto, su comportamiento difiere del anterior apareciendo así lo que se conoce como bifurcación.

En caso de que el sistema no sea estructuralmente estable se llama **valor de bifurcación** al valor del parámetro a partir del cual la estructura topológica del sistema en el diagrama de fases cambia. Dichos cambios pueden afectar tanto a la cantidad, como a la estabilidad, de los puntos de equilibrio u órbitas cerradas del sistema en cuestión.

Según como puedan ser detectadas las bifurcaciones se puede diferenciar entre **bifurcaciones locales** y **bifurcaciones globales**. Las bifurcaciones locales, asimismo, pueden estar asociadas a puntos de equilibrio o a ciclos límites, como se verá más adelante.

2.2.1 Diagrama de bifurcación

Un **diagrama de bifurcación** es una herramienta gráfica para el análisis del comportamiento de los sistemas dinámicos que nos proporciona los límites donde el sistema pasa de comportarse de forma estable a inestable y viceversa. Los límites de dichas curvas son las curvas de bifurcación que pueden obtenerse por continuación numérica a partir de las ecuaciones que caracterizan cada bifurcación.

2.2.2 Bifurcaciones locales

Es un fenómeno local que se refiere al cambio de estabilidad en el espacio de fases en las cercanías de los equilibrios del sistema y que puede ser detectado por pequeñas variaciones de los parámetros. Estas bifurcaciones pueden estar asociadas a puntos de equilibrio o a ciclos límites, pudiendo ser estimado en ambos casos de forma sencilla el valor de bifurcación.

En el caso de los **puntos de equilibrio** dichas bifurcaciones solo pueden ocurrir cuando los autovalores del jacobiano asociado al sistema dinámico varían de forma que la estabilidad del sistema cambia de acuerdo a los criterios vistos en 2.1.1. Así pues, tanto si se tiene un autovalor cuyo valor real está muy próximo a 0 como si un par de autovalores complejos conjugados están muy cercanos al eje imaginario, dicho punto de equilibrio es

susceptible de perder la estabilidad con la consecuente aparición de una bifurcación.

La variación de estabilidad en este caso puede originar las siguientes bifurcaciones:

- **Bifurcación silla-nodo**
- **Bifurcación transcítica**
- **Bifurcación tridente o Pitchfork**
- **Bifurcación de Hopf**

2.2.2.1 Bifurcación silla-nodo de equilibrios

Es una bifurcación local asociada a la desaparición de puntos de equilibrio conforme varía el parámetro α . En esta bifurcación dos puntos de equilibrios (uno estable y otro inestable) de un sistema dinámico continuo se aproximan unos a otros, colisionan hasta que finalmente desaparecen.

Un ejemplo de esta bifurcación es la asociada al sistema dinámico $\dot{x}_1 = f(x, \alpha) = \mu + x_1^2$; $\dot{x}_2 = -x_2$.

- Si $\mu < 0$, hay dos puntos de equilibrio hiperbólicos en el sistema: $y_1 = (\sqrt{-\mu}, 0)$ que es un **punto de silla** inestable, e $y_2 = (-\sqrt{-\mu}, 0)$ que es un **nodo** estable.
- Si $\mu = 0$ ambos puntos de equilibrio colisionan y tenemos un solo **punto de equilibrio no hiperbólico**² ($\lambda = 0$) en $y_0 = 0$.
- Si $\mu > 0$, no hay puntos de equilibrio en el sistema ya que no existe x_1 tal que $\dot{x}_1 = f(x, \mu) = 0$.

Así, podemos observar en el espacio de fases que existe una bifurcación para $\mu = 0$ con $\lambda = 0$ ya que para este valor del parámetro μ , los dos puntos de equilibrio hiperbólicos (silla-nodo) pasan a ser no hiperbólicos para finalmente desaparecer.

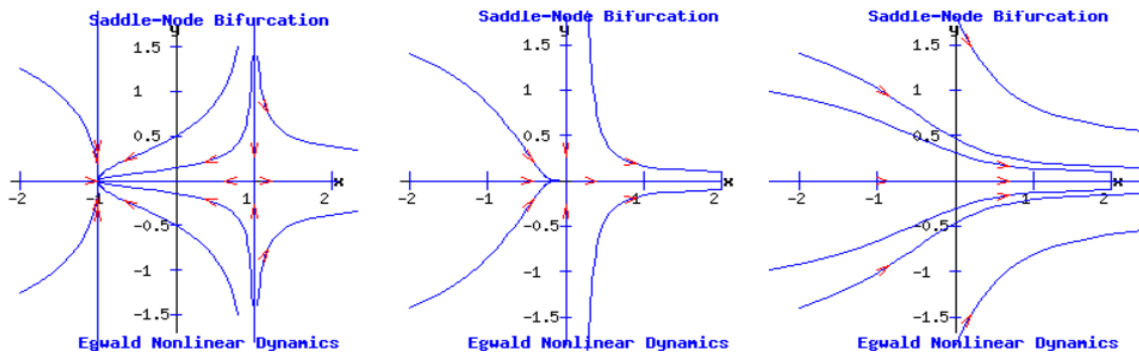


Fig. 2.7 Diagrama de fases en una bifurcación silla-nodo. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$

Otra forma de observar dicha bifurcación es a través del **diagrama de bifurcación**. En dicho diagrama se representa la curva $f(x, \mu) = 0$, es decir, $\mu = -x_1^2$. De esta forma se obtiene el siguiente diagrama:

² Se tiene equilibrio no hiperbólico si los autovalores del jacobiano evaluado en el punto de equilibrio tienen parte real nula

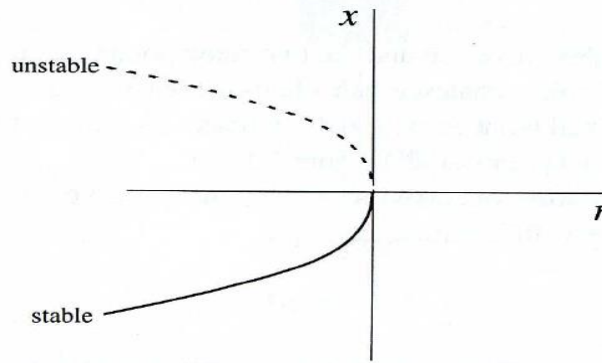


Fig. 2.8 Diagrama de bifurcación silla-nodo

A partir de esta gráfica se pueden obtener los puntos de equilibrio para cada valor del parámetro μ . Así, se puede observar los dos puntos de equilibrio $y_{1,2}$ para $\mu < 0$, el único punto de equilibrio $y_0 = 0$ si $\mu = 0$ y la desaparición de puntos de equilibrio para $\mu > 0$. Así, se tiene la bifurcación en $\mu = 0$, donde se pasa de tener un nodo estable (rama inferior) a un punto de silla inestable (rama superior).

2.2.2.2 Bifurcación transcritical

En este caso de bifurcación local se tiene dos puntos de equilibrio que intercambian su estabilidad al aproximarse y colisionar.

Esta bifurcación se puede observar mediante el sistema dinámico $\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^2; \dot{x}_2 = -x_2$:

- Si $\mu < 0$, se tiene un **nodo** estable en el origen y un **punto de silla** inestable en $x_1 = -\mu$.
- Si $\mu = 0$, se tiene un punto de equilibrio doble en el origen que atrae a los puntos iniciales con $x_1 < 0$
- Si $\mu > 0$, el nodo estable del origen pasa a ser un **punto de silla** inestable, mientras que el punto de silla inestable en $x_1 = -\mu$ se convierte en un **nodo** estable.

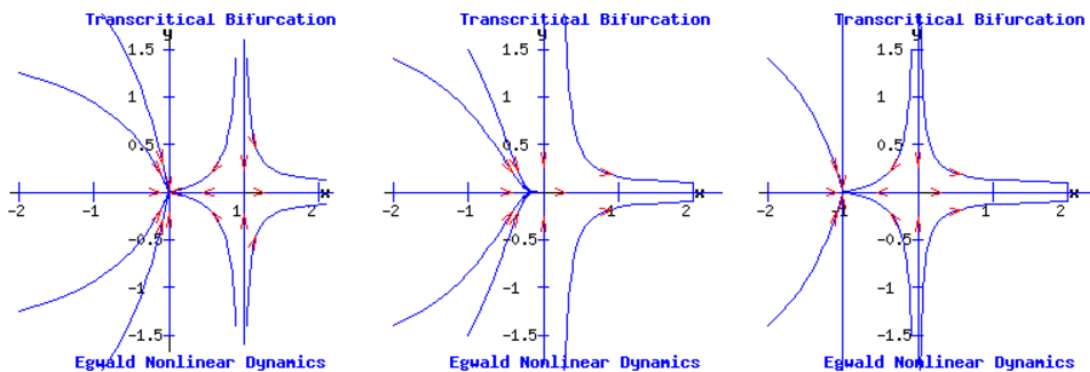


Fig. 2.9 Diagrama de fases en una bifurcación transcritical. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$

Como se hizo en la bifurcación silla-nodo, otra forma de observar dicha bifurcación es a través del **diagrama de bifurcación**. En dicho diagrama se representa la curva $f(x, \mu) = 0$, es decir, $x_1(x_1 + \mu) = 0$. De esta

forma se obtiene el siguiente diagrama:

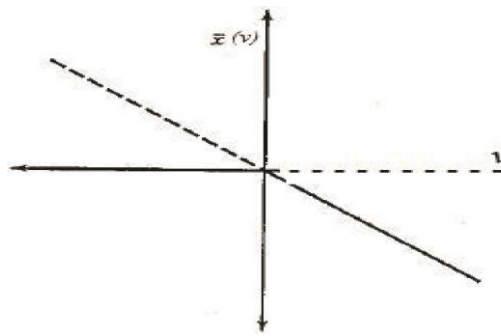


Fig. 2.10 Diagrama de bifurcación transcritical

Se puede observar la bifurcación en $\mu = 0$, donde el nodo estable en el origen pasa a ser un punto de silla, mientras que el punto de silla en $x_1 = -\mu$ pasa a ser un nodo estable.

2.2.2.3 Bifurcación Pitchfork o tridente de equilibrios

Es una bifurcación local en la que conforme se varía el parámetro dependiente del sistema, el punto de equilibrio cambia de estabilidad y además se originan dos ramas nuevas que pueden ser estables o inestables según el tipo de **Pitchfork**. En función de si el punto de equilibrio original es estable o inestable se habla de bifurcación subcrítica o supercrítica.

- Caso **supercrítico**: Se puede observar con el sistema dinámico $\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3; \dot{x}_2 = -x_2$
 - Si $\mu < 0$, hay un **nodo** estable en el origen.
 - Si $\mu = 0$ se tiene un **punto críticamente estable** en el origen
 - Si $\mu > 0$ existen tres puntos de equilibrio en el sistema. Por una parte, el nodo estable que teníamos para $\mu < 0$ pasa a ser un **punto de silla** inestable en el origen, y, por otra parte, aparecen **dos nuevos nodos** estables en $y_1 = (\sqrt{\mu}, 0)$ e $y_2 = (-\sqrt{\mu}, 0)$.

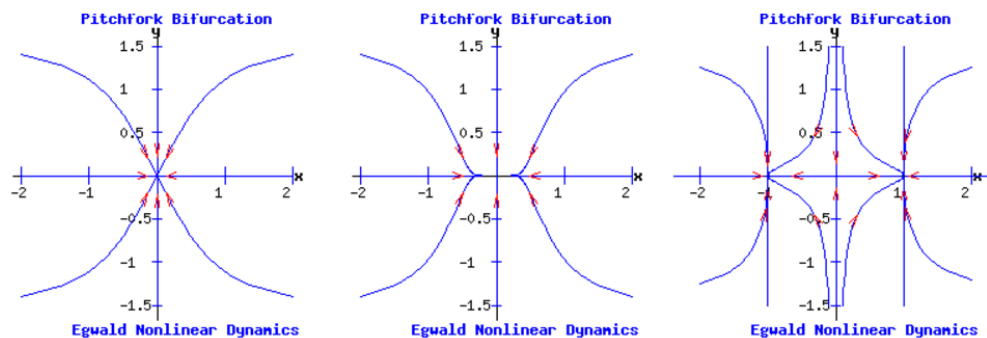


Fig. 2.11 Diagrama de fases en una bifurcación pitchfork supercrítica. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$

Como hicimos anteriormente, se puede observar la bifurcación también representando el **diagrama de bifurcación** $\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3 = 0$. Así, se observa que para $\mu > 0$ el nodo estable pasa a ser inestable (línea discontinua) y aparecen dos nuevos puntos de equilibrio estables. Esta bifurcación también se llama tridente debido a la forma que se observa en esta representación.

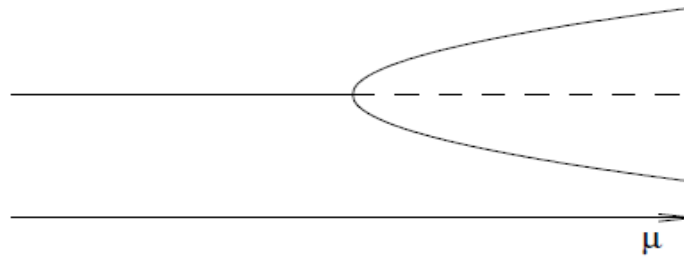


Fig. 2.12 Diagrama de bifurcación Pitchfork

- Caso **subcrítico**: Se puede observar con el sistema dinámico $\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^3; \dot{x}_2 = -x_2$
 - Si $\mu > 0$, hay un **punto de silla** inestable en el origen.
 - Si $\mu = 0$ se tiene un **punto críticamente inestable** en el origen
 - Si $\mu < 0$ existen tres puntos de equilibrio en el sistema. Por una parte, el punto de silla inestable que se tenía para $\mu > 0$ pasa a ser un **nodo estable** en el origen, y, por otra parte, aparecen **dos nuevos puntos de silla** inestables en $y_1 = (\sqrt{\mu}, 0)$ e $y_2 = (-\sqrt{\mu}, 0)$.

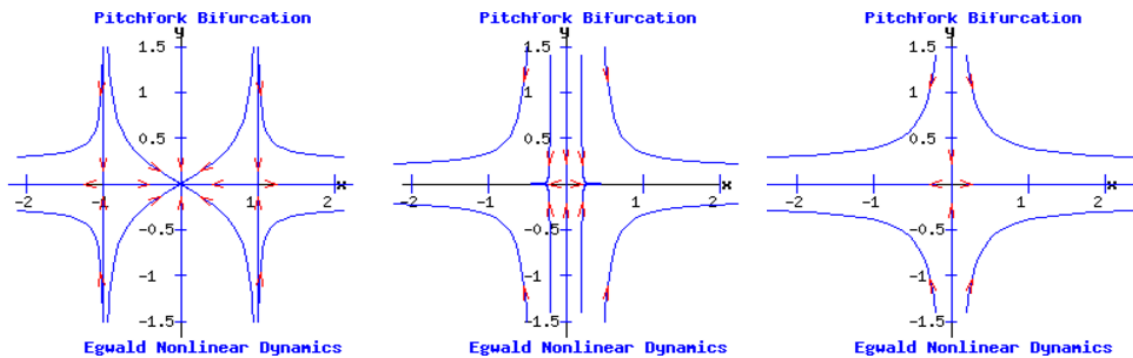


Fig. 2.13 Diagrama de fases en una bifurcación pitchfork subcrítica. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$

Como hicimos anteriormente, se puede observar la bifurcación también representando el **diagrama de bifurcación** $\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3 = 0$. Así, se observa que para $\mu < 0$ el nodo estable pasa a ser inestable (línea discontinua) y aparecen dos nuevos puntos de equilibrio estables. Esta bifurcación también se llama tridente debido a la forma que se observa en esta representación.

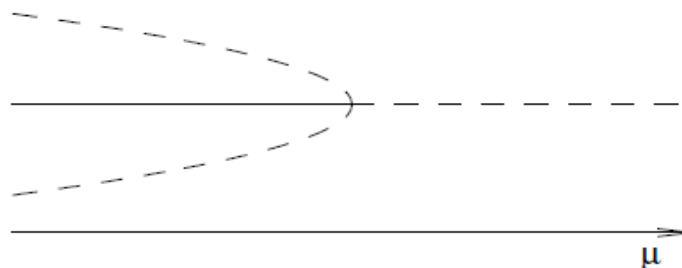


Fig. 2.14 Diagrama de bifurcación Pitchfork subcrítica

2.2.2.4 Bifurcación de Hopf

En esta bifurcación local no se tienen autovalores reales como en los casos anteriores, sino que se tienen **autovalores complejos conjugados**. Así, en este caso, se produce la variación de estabilidad debido a que los autovalores complejos pasan de un semiplano a otro. Al igual que en el anterior tenemos dos casos:

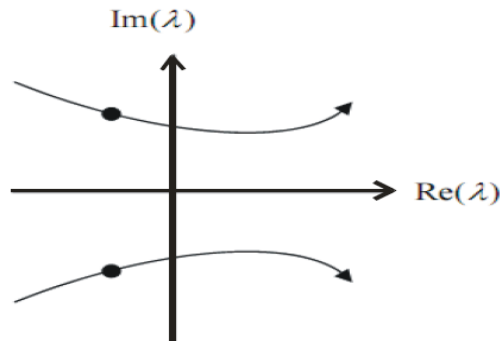


Fig. 2.15 Evolución de los autovalores del jacobiano en una bifurcación Hopf

- Bifurcación de Hopf **supercrítica**: Esta bifurcación se puede observar mediante el sistema dinámico $\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(\mu - (x_1^2 + x_2^2)), \dot{x}_2 = x_1 + x_2(\mu - (x_1^2 + x_2^2))$.
 - Si $\mu < 0$, los autovalores de la matriz jacobiana asociada al sistema linealizado en el origen son autovalores complejos conjugados con la parte real negativa por lo que se tiene una **espiral estable** en el origen.
 - Si $\mu = 0$, se tienen autovalores imaginarios puros, de forma que el origen se comporta como un **centro lineal estable**, pero no asintóticamente estable.
 - Si $\mu > 0$, la **espiral** estable pasa a ser **inestable**, mientras que aparece simultáneamente un **ciclo límite atractor** que atrae a la espiral del origen.

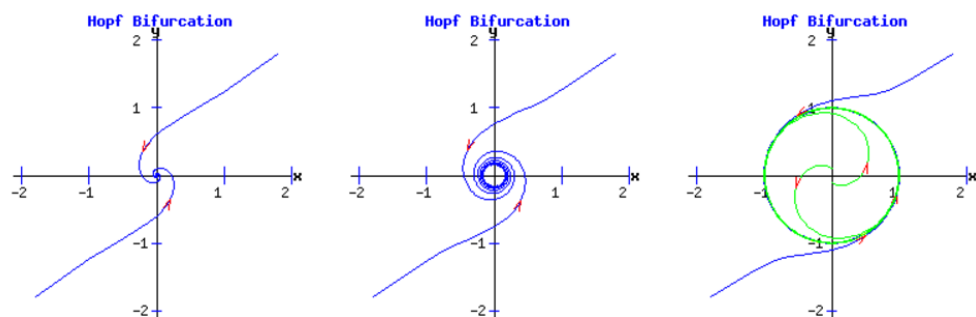


Fig. 2.16 Diagrama de fases en una bifurcación hopf supercrítica. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$

En la Fig. 2.17 se puede observar el diagrama de bifurcación de la bifurcación de Hopf supercrítica. Se puede observar como para $\mu > 0$ se pasa de tener una espiral estable a tener una espiral inestable y un ciclo límite atractor.

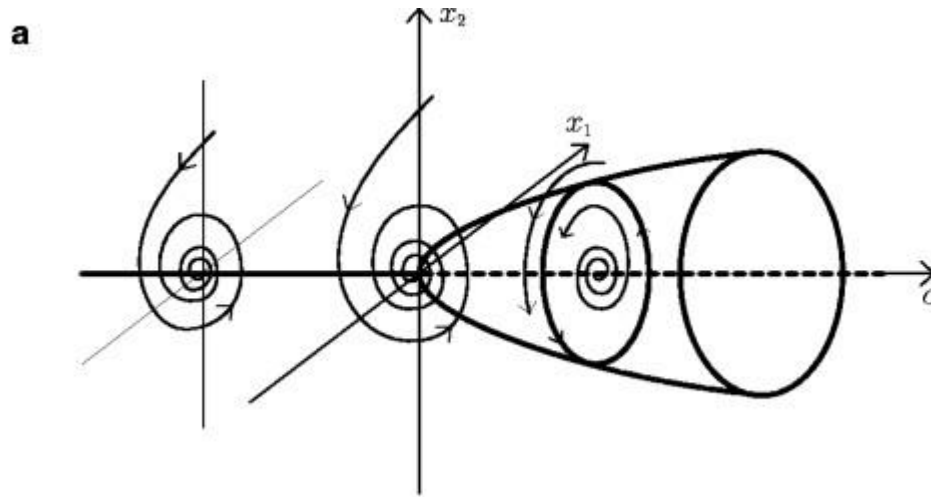


Fig. 2.17 Diagrama de bifurcación hopf supercrítica

- Bifurcación de Hopf **subcrítica**: Se tiene una espiral inestable que se vuelve estable mientras simultáneamente aparece un ciclo límite inestable del que sale la espiral. Dicha bifurcación se puede observar mediante el sistema dinámico $\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(\mu + (x_1^2 + x_2^2))$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2(\mu + (x_1^2 + x_2^2))$.
 - Si $\mu > 0$, los autovalores de la matriz jacobiana asociada al sistema linealizado en el origen son autovalores complejos conjugados con parte real positiva, que corresponde a una **espiral inestable** en el origen.
 - Si $\mu = 0$, se tiene un **centro lineal** que se comporta como **inestable**.
 - Si $\mu < 0$, la **espiral** inestable pasa a ser **estable**, mientras que simultáneamente aparece un **ciclo límite repulsor** del que se origina dicha espiral.

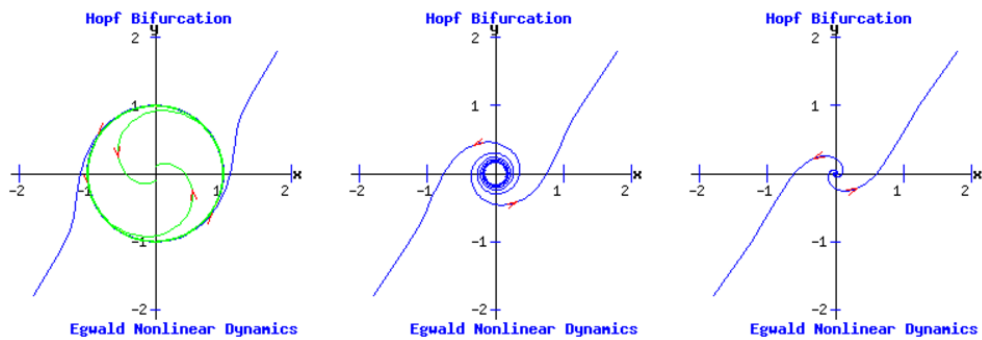


Fig. 2.18 Diagrama de fases en una bifurcación Hopf subcrítica. A la izquierda, para $\mu < 0$, en el centro si $\mu = 0$ y a la derecha para $\mu > 0$

En la Fig. 2.19 se puede observar el diagrama de bifurcación de la bifurcación de Hopf subcrítica. Se puede observar como para $\mu < 0$ se pasa de tener una espiral inestable a tener una espiral estable y un ciclo límite repulsor.

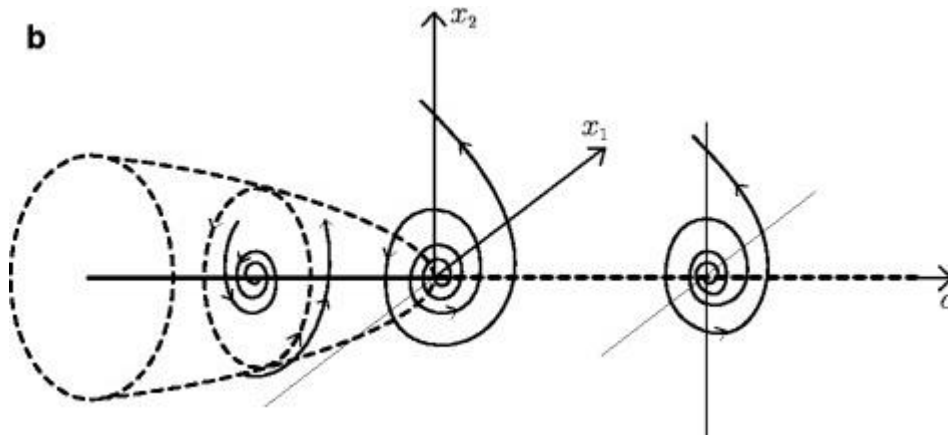


Fig. 2.19 Diagrama de bifurcación Hopf subcrítica

A diferencia de las bifurcaciones anteriores (que pueden darse para dimensión uno), estas pueden darse únicamente para dimensiones mayores o iguales que 2 y bajo unas condiciones que se expresan en el **Teorema de Hopf**. Dicho teorema nos dice que, sea el sistema $\dot{X} = F(X, \alpha)$, y si existe un único punto de equilibrio X_0 para el valor del parámetro α_0 ($F(X_0, \alpha_0) = 0$), tal que la matriz jacobiana asociada al sistema linealizado en el punto de equilibrio tiene un par conjugado de autovalores imaginarios puros y ningún otro autovalor con parte real nula tales que $\frac{d}{d\alpha}(Re(\lambda(\alpha_0))) = d \neq 0$. Esto implica que:

- 1) Existe una curva uniforme de puntos de equilibrio $(X(\alpha), \alpha)$, tal que $X(\alpha_0) = X_0$ y, además, el par de autovalores complejos conjugados, que son imaginarios puros para α_0 , varían uniformemente con α .
- 2) Existen soluciones periódicas que se bifurcan a partir de x_0 cuando $\alpha = \alpha_0$, siendo el período de dichas soluciones $T = \frac{2\pi}{\lambda(\alpha_0)}$.

2.2.2.5 Bifurcaciones de ciclos límites

Si se tienen **ciclos límites** los criterios de estabilidad que se pueden emplear son los comentados en 2.1.2.1. De esta forma, si los autovalores de la matriz de monodromía asociada al punto de equilibrio son muy cercanos al círculo de radio unidad, es muy posible que aparezca una bifurcación en dicho ciclo límite. En este caso la variación de estabilidad puede originar las siguientes bifurcaciones:

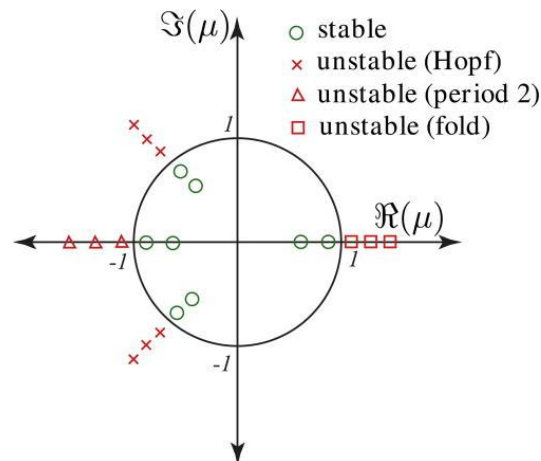


Fig. 2.20 Representación en polares de autovalores asociados a la matriz de monodromía con criterios de inestabilidad para las bifurcaciones en soluciones periódicas

- **Silla-nodo de ciclos límites** Esta bifurcación se origina cuando uno de los autovalores de la matriz de monodromía atraviesa el círculo unidad por $\lambda_i = +1$. En este caso, una rama de soluciones periódicas se pliega de forma que cambia su inestabilidad.

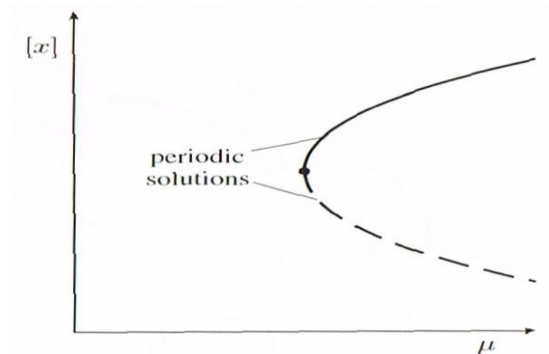


Fig. 2.21 Diagrama de bifurcación silla-nodo de ciclos límites

- **Duplicación de Período o Flip:** Esta bifurcación tiene lugar cuando uno de los autovalores de la matriz de monodromía atraviesa el círculo unidad por $\lambda_i = -1$. En este caso una rama de soluciones periódicas con período T pasa a ser soluciones periódicas con período $2T$.

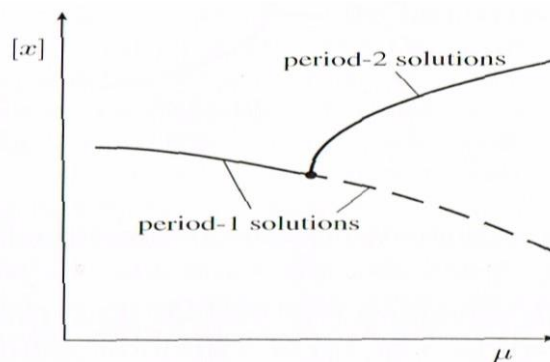


Fig. 2.22 Diagrama de bifurcación flip de ciclos límites

- **Bifurcaciones Toro o Neimark-Sacker:** Esta bifurcación tiene lugar cuando un par de autovalores complejos conjugados atraviesan el círculo unidad. En este caso un brazo de soluciones periódicas pasa a ser casi periódicas.

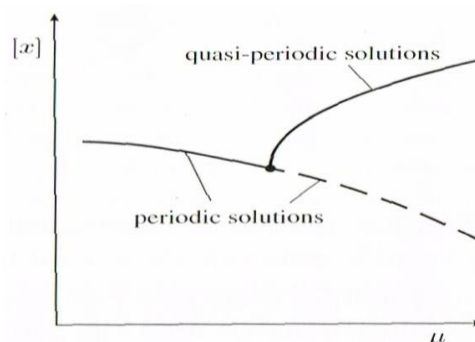


Fig. 2.23 Diagrama de bifurcación toro de ciclos límites

2.2.3 Bifurcaciones globales

Son aquellas bifurcaciones que no pueden ser detectadas por pequeñas variaciones de los parámetros en zonas cercanas al punto de equilibrio o al ciclo límite. Esto se debe a que está asociado a **fenómenos globales** del sistema y no existe una forma sencilla de determinarlos mediante la variación de los parámetros. Al no poder ser detectadas fácilmente por continuación numérica, no son objetos de estudio en este Trabajo Fin de Grado, por lo que únicamente se nombran algunas de ellas y se describen brevemente. Así, las principales bifurcaciones globales son:

- **Bifurcación de conexión heteroclina:** Tiene lugar cuando un ciclo límite colisiona con dos o más puntos de silla dando lugar a una órbita heteroclina.

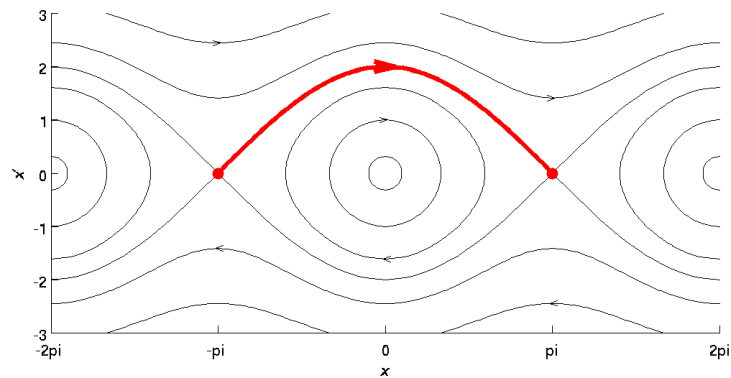


Fig. 2.24 Órbita heteroclina (en rojo) en un diagrama de fases

- **Bifurcación de conexión homoclina:** Es un caso particular de la anterior en la que se tiene un solo punto de silla. La órbita abierta generada se denomina homoclínica.

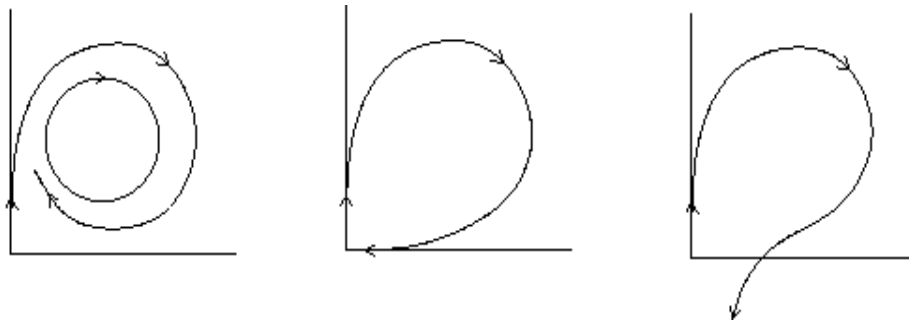


Fig. 2.25 Diagrama de fases bifurcación homoclina

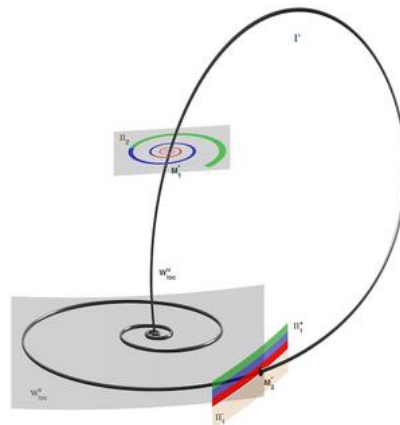


Fig. 2.26 Órbita homoclínica

- **Bifurcación Takens-Bogdanov:** Es una bifurcación global con co-dimensión dos³ que provoca la aparición simultánea de dos bifurcaciones silla-nodos, una bifurcación Hopf, y una bifurcación homoclínica.

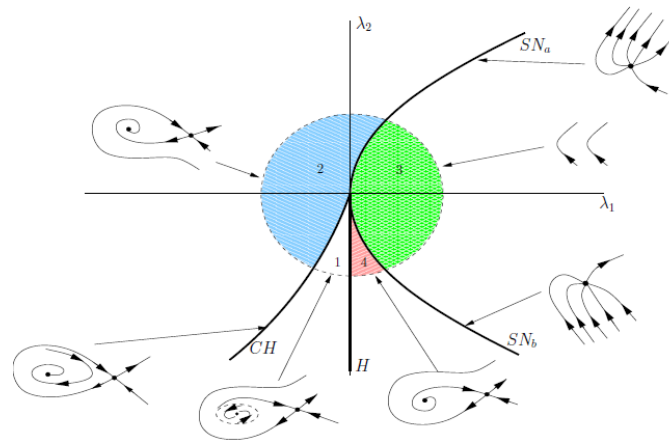


Fig. 2.27 Diagrama de bifurcación Takens-Bogdanov

³ Necesita variar dos parámetros para originarse la bifurcación.

3 SISTEMAS LINEALES A TROZOS

Se trata ahora de estudiar el comportamiento dinámico de un **sistema lineal a trozos**. El estudio de estos sistemas es realmente útil, pues nos permite describir numerosas aplicaciones en la realidad como los osciladores electrónicos. En concreto se estudia el caso en que dicho sistema nos proporcione como solución órbitas periódicas aisladas, es decir, ciclos límites. En primer lugar, se describe matemáticamente el sistema lineal a trozo en la sección 3.1. Posteriormente se definen y se resuelven los ciclos límites trizonales no simétricos, trizonales simétricos y bizonales respectivamente en las secciones 3.2, 3.3 y 3.4. Finalmente, en la sección 3.5 se describe una aplicación del sistema lineal a trozo para ser simulada posteriormente en Matlab, que es el oscilador de Bonhoeffer-Van der Pol.

3.1 Descripción del sistema

Sea el siguiente sistema lineal a trozos escrito en la forma de Luré:

$$\dot{X} = A_R X + \text{sat}(x_1)b \quad (3.1)$$

Donde el vector de estado es $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

La matriz A_R que describe la dinámica de las zonas externas está escrita en la forma generalizada de Liénard, que viene dada por:

$$A_R = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde t , m y d son los invariantes lineales de la matriz A_r .

La función $\text{sat}(x_1)$ representa la saturación normalizada de x_1 , descrita según las ecuaciones:

$$\text{sat}(x_1) = \begin{cases} -1, & x_1 < -1 \\ x_1, & |x_1| \leq 1 \\ 1, & x_1 > 1 \end{cases}$$

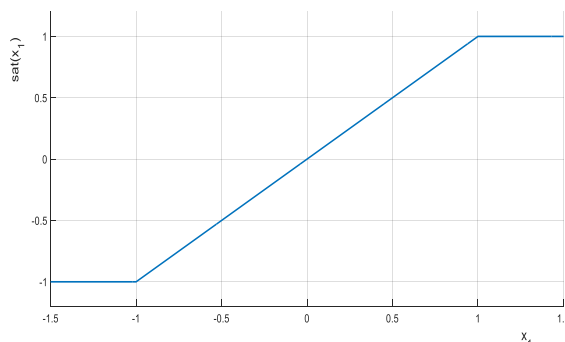


Fig. 3.1 Gráfica de la función saturación de x_1

Finalmente, el vector b viene dado por $b = \begin{pmatrix} T-t \\ M-m \\ D-d \end{pmatrix}$.

Así, según la ecuación (3.1), existen tres regiones de funcionamiento en función de x_1 :

- **Zona izquierda (zona L):** Tiene lugar si $x_1 < -1$. En este caso el sistema queda gobernado por el siguiente sistema:

$$\dot{X} = A_R X - b \quad (3.2)$$

- **Zona central (zona C):** En caso de que $|x_1| \leq 1$ la dinámica del sistema viene dada por:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} T-t \\ M-m \\ D-d \end{pmatrix}$$

De forma que las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= tx_1 - x_2 + x_1 T - x_1 t \\ \dot{x}_2 &= mx_1 - x_3 + x_1 M - x_1 m \\ \dot{x}_3 &= dx_1 + x_1 D - x_1 d \end{aligned}$$

Es decir:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} Tx_1 - x_2 \\ Mx_1 - x_3 \\ Dx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 & 0 \\ M & 0 & -1 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_c X \quad (3.3)$$

Así, la matriz A_c es la que determina la dinámica del sistema en la zona central y T , M y D son los invariantes lineales de dicha matriz

- **Zona derecha (Zona R):** Si $x_1 > 1$ (zona R), el sistema de ecuaciones de esta zona queda:

$$\dot{X} = A_R X + b \quad (3.4)$$

En este trabajo se estudian exclusivamente los casos en los que las soluciones de las ecuaciones de los sistemas lineales a trozos nos proporcionan soluciones periódicas, es decir, **ciclos límites**. Ahora bien, en función de los valores de t , m , d , T , M y D , el sistema puede describir una órbita periódica de 3 zonas, que puede ser simétrica o no simétrica, o bien, una órbita periódica de 2 zonas.

3.2 Ciclos límites trizales simétricos

Sea una **órbita periódica aislada simétrica de 3 zonas** se llama X_0 y X_1 , a los puntos de corte de la órbita con el plano $x_1 = 1$ y, X_2 y X_3 , a los puntos de corte de la órbita con el plano $x_1 = -1$. Por otra parte, se llama τ_R , τ_L y τ_C a los tiempos de vuelo en las zonas R, L y C respectivamente.

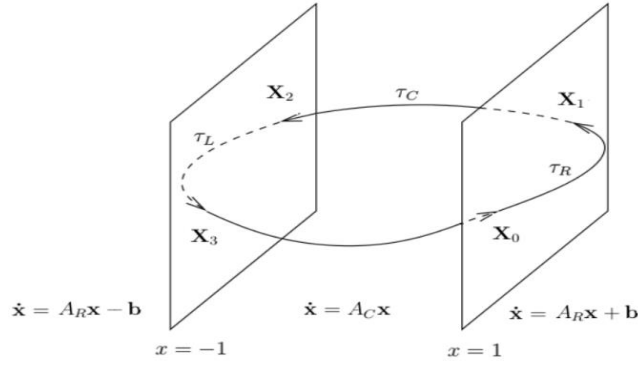


Fig. 3.2 Órbita periódica de tres zonas

En este caso, se tiene una órbita periódica de 3 zonas con simetría respecto al origen, de forma que $\tau_R = \tau_L$ y $x_2 = -x_0$. Esto implica que basta con estudiar la evolución del sistema a través de la zona R (desde X_0 a X_1) y la mitad de la zona C (desde X_1 a X_2), pues el resto queda definido por simetría a partir de los anteriores. Los puntos de corte de la órbita con los planos $x_1 = 1$ y $x_1 = -1$ vienen dados por:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = -X_2, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = -X_3 \quad (3.5)$$

3.2.1 Resolución analítica del sistema

Se resuelve en primer lugar el sistema en la zona central según la ecuación (3.3):

$$\dot{X} = A_c X \rightarrow X(\tau) = \exp(A_c \tau) X(0) \quad (3.6)$$

A continuación, se resuelve el sistema en la zona R según la ecuación (3.4).

Primero se considera que el sistema tiene un equilibrio en esta zona, de forma que $\dot{X} = 0$. Así, el punto de equilibrio en la zona R viene dado entonces por $\bar{X}_R = -A_R^{-1} b$. Para que exista este equilibrio es necesario que la matriz A_R sea no singular, es decir, $\det(A_R) \neq 0$.

A continuación, se realiza un cambio de variable a Y, que resulta de trasladar \bar{X}_R a X.

$$Y = X - \bar{X}_R \\ \dot{Y} = \dot{X} = A_R X + b = A_R (y + \bar{X}_R) + b = A_R Y + A_R \bar{X}_R + b$$

La solución para este sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$Y(\tau) = \exp(A_R \tau) Y(0)$$

Deshaciendo el cambio de variables obtenemos $X(\tau)$ en la zona R:

$$X(\tau) = \exp(A_R \tau) (X(0) - \bar{X}_R) + \bar{X}_R \quad (3.7)$$

Finalmente se hallan las ecuaciones que nos definen los puntos significativos X_0, X_1, X_2 y X_3 .

Si se considera que el punto inicial en la zona derecha es X_0 , X_1 se obtiene a partir de la ecuación (3.7) con $X(0) = X_0$.

$$X(\tau_R) = X_1 = \exp(A_R \tau_R) (X_0 - \bar{X}_R) + \bar{X}_R \quad (3.8)$$

En la zona central se tiene que $X(0) = X_1$, de forma que según (3.6):

$$X(\tau) = \exp(A_c \tau) X_1$$

Así pues, X_2 se obtiene a partir del sistema en la zona central como $X(\tau_c)$:

$$X_2 = X(\tau_c) = \exp(A_c \tau_c) X_1$$

A su vez, por la simetría del problema se tiene que $X_2 = -X_0$

$$X_2 = \exp(A_c \tau_c) X_1 = -X_0 \quad (3.9)$$

Así pues, en resumen, de (3.8) y de (3.9) se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\exp(A_R \tau_R)(X_o - \bar{X}_R) + \bar{X}_R - X_1 = 0 \quad (3.10)$$

$$\exp(A_c \tau_c) X_1 + X_0 = 0 \quad (3.11)$$

Es decir, se tienen 6 ecuaciones (3 ecuaciones de (3.10) y otras 3 de (3.11)) para 6 incógnitas ($y_0, z_0, y_1, z_1, \tau_R$ y τ_c). Por lo tanto se tiene un sistema no lineal de ecuaciones que nos permite hallar X_0 y X_1 , así como X_2 y X_3 por simetría. A continuación, se reducen las ecuaciones obtenidas para simplificar el problema.

Despejando X_1 de (3.11) y sustituyendo en (3.10) se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\exp(-A_c \tau_c) X_0 \\ \exp(A_R \tau_R)(X_0 - \bar{X}_R) + \bar{X}_R + \exp(-A_c \tau_c) X_0 &= 0 \quad (3.12) \end{aligned}$$

De (3.12) se obtienen 3 ecuaciones con 4 incógnitas (τ_R, τ_c, y_0, z_0), por lo que nos faltaría una ecuación que no introduzca una nueva incógnita para cerrar el problema. La ecuación que nos falta se obtiene de la primera ecuación de (3.11):

$$\exp(A_c \tau_c) \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \exp(-A_c \tau_c) \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Podemos observar que tenemos 3 ecuaciones dependientes de τ_c, y_1 y z_1 . Multiplicando todo por el vector $e_1^T = (1 \ 0 \ 0)$ se elimina la dependencia con y_1 y z_1 y se obtiene una ecuación que es función únicamente de τ_c , que junto con las 3 ecuaciones que teníamos antes nos cerraría el problema para las 4 incógnitas comentadas.

$$\begin{aligned} e_1^T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \exp(-A_c \tau_c) \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ 1 + e_1^T \exp(-A_c \tau_c) \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} &= 0 \quad (3.13) \end{aligned}$$

Así pues, las tres ecuaciones de (3.12) y la ecuación de (3.13) nos proporciona un sistema de **4 ecuaciones con 4 incógnitas** (τ_R, τ_c, y_0, z_0).

3.3 Ciclos límites trizales no simétricos

Se trata ahora el caso en el que la **órbita de 3 zonas** sea **no simétrica**. Así, se llaman X_0 y X_1 los puntos de corte de la órbita con el plano $x_1 = 1$ y, X_2 y X_3 , los puntos de corte de la órbita con el plano $x_1 = -1$. Asimismo, se llama τ_0, τ_1, τ_2 y τ_3 a los tiempos de vuelo en las zonas R, C₁ (desde X_1 a X_2), L y C₂ (desde X_3 a X_0) respectivamente. Comentar que se ha dividido la zona central en C₁ y C₂ debido a la falta de simetría, sin embargo, ambas zonas se regirán por las mismas ecuaciones.

En este caso será necesario el estudio de las 4 zonas por la falta de simetría. Así, los puntos de corte se definen

según los siguientes vectores:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

3.3.1 Resolución analítica del sistema

Se resuelve en primer lugar el sistema en la zona central según la ecuación (3.3):

$$\dot{X} = A_c X \rightarrow X(\tau) = \exp(A_c \tau) X(0) \quad (3.15)$$

A continuación, se resuelve el sistema en la zona R según la ecuación (3.4). Para ello se procede de la misma forma que en ciclos límites trizonales simétricos, de forma que se obtienen la siguiente evolución de las variables de estado:

$$X(\tau) = \exp(A_R \tau)(X(0) - \bar{X}_R) + \bar{X}_R \quad (3.16)$$

Por último, se resuelve el sistema en la zona L según la ecuación (3.2) procediendo igual que en la zona R.

Así, se halla primero la solución en el equilibrio ($\dot{X} = 0$). Así, el vector de estado en la zona L en equilibrio viene dado entonces por $\bar{X}_L = A_R^{-1} b = -\bar{X}_R$

A continuación, se realiza un cambio de variable a Y, que resulta de trasladar \bar{X}_R a X.

$$Y = X + \bar{X}_R$$

$$\dot{Y} = \dot{X} = A_R X - b = A_R (Y - \bar{X}_R) - b = A_R Y - A_R \bar{X}_R - b$$

La solución para este sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$Y(\tau) = \exp(A_R \tau) Y(0)$$

Deshaciendo el cambio de variables se obtiene $X(\tau)$ en la zona L:

$$X(\tau) = \exp(A_R \tau)(X(0) + \bar{X}_L) + \bar{X}_R \quad (3.17)$$

Finalmente se hallan las ecuaciones que nos definen los puntos significativos X_0, X_1, X_2 y X_3 .

En primer lugar, X_1 se obtiene a partir de la ecuación (3.16) con $X(0) = X_0$.

$$X(\tau_R) = X_1 = \exp(A_R \tau_0)(X_0 - \bar{X}_R) + \bar{X}_R \quad (3.18)$$

En la zona C_1 se tiene que $X(0) = X_1$, de forma que según (3.15) se halla X_2 como:

$$X_2 = X(\tau_1) = \exp(A_c \tau_1) X_1 \quad (3.19)$$

En la zona L se halla X_3 según la ecuación (3.17) teniendo en cuenta que $X(0) = X_2$.

$$X_3 = X(\tau_2) = -\bar{X}_R + \exp(A_R \tau_2)(X_2 + \bar{X}_R) \quad (3.20)$$

Finalmente, en la zona C_2 se halla X_0 a partir de (3.15) teniendo en cuenta que $X(0) = X_3$:

$$X_0 = X(\tau_3) = \exp(A_c \tau_3) X_3 \quad (3.21)$$

De esta forma, las ecuaciones (3.18), (3.19), (3.20) y (3.21) nos proporciona un sistema de 12 ecuaciones (3 por cada zona) con 12 incógnitas ($\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, y_0, y_1, y_2, y_3, z_0, z_1, z_2, z_3$), lo cual hace que sea un sistema

complejo de resolver a priori. Sin embargo, se puede simplificar eliminando ecuaciones e incógnitas del mismo.

Así, sustituyendo X_1 de (3.18) en (3.19) se obtiene X_2 en función de X_0 . Si a continuación se sustituye este resultado en (3.20), se obtiene X_3 en función de X_0 . Finalmente, sustituyendo este resultado en (3.21) se obtiene (3.22) que es un sistema de 3 ecuaciones con **6 incógnitas** ($\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, y_0, z_0$)

$$\exp(-A_c \tau_3) X_0 + \bar{X}_R - \exp(A_R \tau_2) (\exp(A_c \tau_1) (\bar{X}_R + \exp(A_R \tau_0) (X_0 - \bar{X}_R)) + \bar{X}_R) = 0 \quad (3.22)$$

Así pues, se necesitan 3 nuevas ecuaciones que no añadan ninguna incógnita nueva para cerrar el problema. De esta forma, si se multiplica (3.21) por el vector e_1^T obtenemos (3.23). Por otra parte, si se multiplica la ecuación que nos proporciona X_2 en función de X_0 por el vector e_1^T se obtiene (3.24). Finalmente, si se multiplica (3.18) por e_1^T y se tiene en cuenta que $\bar{X}_R = -\bar{X}_L$ se obtiene (3.25).

$$e_1^T \exp(-A_c \tau_3) X_0 + 1 = 0 \quad (3.23)$$

$$e_1^T \exp(A_c \tau_1) (\bar{X}_R + \exp(A_R \tau_0) (X_0 - \bar{X}_R)) + 1 = 0 \quad (3.24)$$

$$e_1^T (\bar{X}_R + \exp(A_R \tau_0) (X_0 - \bar{X}_R)) - 1 = 0 \quad (3.25)$$

Así, (3.23), (3.24) y (3.25) nos proporcionan 3 nuevas ecuaciones independientes que no añaden ninguna incógnita nueva al problema, de forma que estas ecuaciones más las que teníamos de (3.22) nos cierran el problema para hallar $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, y_0, z_0$.

3.4 Ciclos límites bizonales

Finalmente, se estudia el caso en el que se tiene una **órbita periódica aislada de 2 zonas**, tal que la misma interseca al plano $x_1 = 1$ en los puntos X_0 y X_1 , donde ambos puntos son los definidos en (3.5). Además, se llama τ_R y τ_C a los tiempos de vuelo en las zonas R y C respectivamente. En este caso no se tiene simetría en el ciclo límite, por lo que no se puede eliminar ninguna variable, de forma que se tienen 6 variables a determinar, y, por tanto, se necesitan 6 ecuaciones a priori. Si el sistema posee una órbita periódica bizonal, la simetría del sistema implica la existencia de otra órbita periódica bizonal simétrica de la primera con intersecciones $-X_0$ y $-X_1$ con el plano $x_1 = -1$, siendo su tiempo de vuelo en la zona central τ_c y en la zona izquierda el mismo τ_R

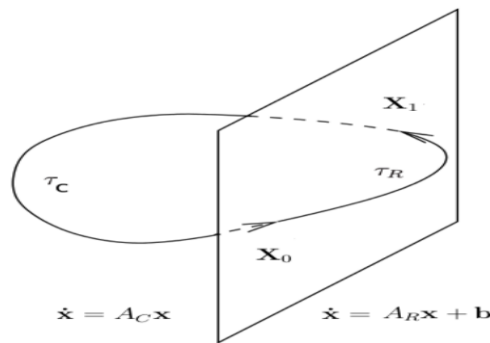


Fig. 3.3 Órbita periódica de dos zonas

3.4.1 Resolución analítica del sistema

En este caso el sistema queda definido por las ecuaciones diferenciales (3.3) en la zona central y (3.4) en la zona derecha.

En primer lugar, se resuelve la ecuación diferencial en la zona central como se realizó para el caso de 3 zonas:

$$\dot{X} = A_c X \rightarrow X(\tau) = \exp(A_c \tau) X(0) \quad (3.26)$$

En segundo lugar, se resuelve la ecuación diferencial en la zona R. Si se procede como en el caso de 3 zonas se obtiene un resultado similar, es decir:

$$X(\tau) = \exp(A_R \tau)(X(0) - \bar{X}_R) + \bar{X}_R \quad (3.27)$$

Donde $\bar{X}_R = -A_R^{-1} b$

Finalmente se hallan las ecuaciones que nos definen los puntos de corte X_0 y X_1 .

En la zona derecha, si se considera que el punto inicial es X_0 , X_1 se obtiene a partir de las ecuaciones de (3.27) con $X(0) = X_0$. Así, se tiene el siguiente resultado:

$$X(\tau_R) = X_1 = \exp(A_R \tau_R)(X_0 - \bar{X}_R) + \bar{X}_R \quad (3.28)$$

En la zona central se tiene que $X(0) = X_1$ y $X(\tau_c) = X_0$, de forma que según las ecuaciones (3.26) se puede obtener X_0 como:

$$X_0 = \exp(A_c \tau_c) X_1 \quad (3.29)$$

Así pues, de (3.28) y de (3.29) se tienen 6 ecuaciones con 6 incógnitas ($y_0, z_0, y_1, z_1, \tau_R, \tau_c$). Se trata ahora de simplificar el sistema eliminando ecuaciones e incógnitas. Así, si se despeja X_1 de la ecuación (3.29) y se sustituye en (3.28) se obtiene el sistema de tres ecuaciones mostrado en (3.31). Por otro lado, si se multiplica el sistema de (3.29) por e_1^T (3.30) se obtiene la ecuación siguiente:

$$e_1^T \exp(-A_c \tau_c) \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - 1 = 0 \quad (3.30)$$

$$\bar{X}_R - \exp(-A_c \tau_c) \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \exp(A_R \tau_R) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \bar{X}_R \right) = 0 \quad (3.31)$$

De esta forma se tiene un sistema de **4 ecuaciones** con **4 incógnitas** (y_0, z_0, τ_R, τ_c).

3.5 Oscilador de Bonhoeffer-Van der Pol

Hasta ahora se han obtenido los resultados para un sistema lineal a trozos genérico, sin embargo, en este Trabajo Fin de Grado se pretende la continuación numérica en Matlab, para lo cual se necesita un sistema en particular que nos defina unos valores determinados de los invariantes lineales de las matrices A_R y A_c (t, m, d, T, M y D).

De esta forma, se aplican los resultados obtenidos teóricamente al **oscilador electrónico de Bonhoeffer-Van der Pol**, que está representado en la Fig. 3.4. Dicho oscilador consta de dos condensadores, una resistencia, una inductancia y una conductancia no lineal.

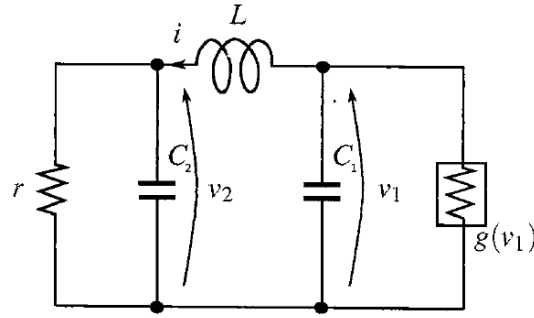


Fig. 3.4 Oscilador electrónico de Bonhoeffer-Van der Pol

Puede demostrarse [2] que, si se obtienen las ecuaciones de dicho circuito, y se realizan una serie de operaciones con ellas, la dinámica del circuito viene determinada por un sistema lineal a trozo equivalente al de la ecuación (3.1), con los invariantes lineales definidos como sigue:

$$\begin{aligned}
 T &= \alpha + \beta - \gamma, & M &= 2 - \gamma(\alpha + \beta), & D &= \alpha + \beta - \gamma, \\
 t &= \alpha - \gamma, & m &= 2 - \alpha\gamma, & d &= \alpha - \gamma
 \end{aligned}$$

Donde α , β y γ son **parámetros del circuito** relacionados con los valores de los elementos que componen el circuito.

3.5.1 Estudio de estabilidad y bifurcaciones

Según el estudio de estabilidad y bifurcaciones realizado por Luis Gómez de la Herrán Ramírez en la sección 4 del Proyecto Fin de Carrera “Continuación numérica de ciclos límites en osciladores electrónicos” [2] para el oscilador de Bonhoeffer Van der Pol con $\beta = 0.2$ se tiene el siguiente diagrama:

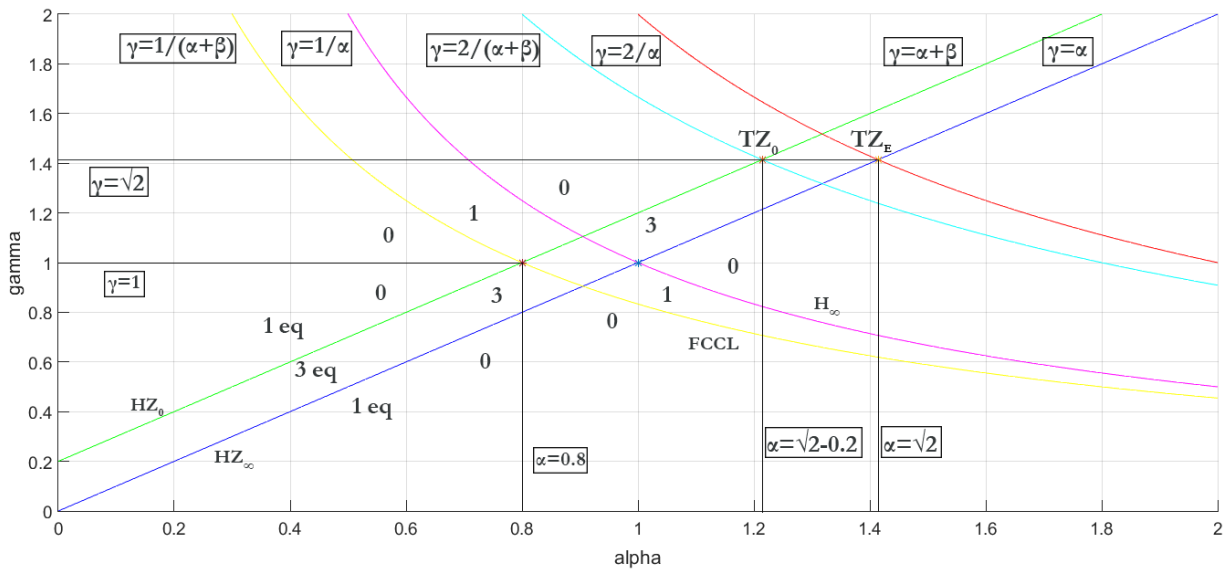


Fig. 3.5 Diagrama $\gamma = \gamma(\alpha)$ que nos muestra los ciclos límites, puntos de equilibrio y bifurcaciones en el oscilador de Bonhoeffer-Van der Pol con $\beta = 0.2$

Dicho diagrama nos muestra tanto los puntos de equilibrio como los ciclos límites que existen para cada punto en cada región.

En cuanto a los **puntos de equilibrios** se tienen los siguientes resultados:

- **1 punto de equilibrio** en la región $\gamma > \alpha + \beta$ y en la región $\gamma < \alpha$, asociados al punto de **origen**.

- **3 puntos de equilibrios** en la región $\alpha < \gamma < \alpha + \beta$, de los cuales **2** están asociados a los equilibrios **no triviales (zonas externas)** y **1** está asociada **al origen (zona central)**.
 - Como se pasa de tener 1 equilibrio a 3 equilibrios, se concluye que tenemos una **bifurcación pitchfork** sobre la recta $\gamma = \alpha + \beta$ en sentido decreciente de γ y una bifurcación pitchfork sobre la recta $\gamma = \alpha$ en sentido creciente de γ .

Por otro lado, en cuanto a las bifurcaciones y puntos singulares en el plano (α, γ) se tiene lo siguiente:

- **Bifurcación Foco-Centro-Ciclo límite**⁴ en la curva $\gamma = \frac{1}{\alpha + \beta}$ de forma que se pasa de no tener ciclo límite en la región inferior a tener 1 ciclo límite en la región superior. Dicho ciclo límite será asintóticamente estable si $\gamma > 1 \leftrightarrow \alpha + \beta < 1 \rightarrow \alpha < 0.8$
- **Bifurcación Hopf del infinito** en la curva $\gamma = \frac{1}{\alpha}$, según la cual se pasa de tener 1 ciclo límite en la región inferior a no tener ciclo límite en la región superior.
- **Bifurcación Hopf-zero del origen** sobre la recta $\gamma = \alpha + \beta$, si $\gamma < \sqrt{2}$. Se cumple que:
 - Si $\gamma > \alpha + \beta$, el origen es el único equilibrio del sistema, y si, además $\gamma < \frac{1}{\alpha + \beta}$, el origen es asintóticamente estable. Notar que en esta región no existen ciclos límites.
 - Si $\alpha < \gamma < \alpha + \beta$, aparecen tres ciclos límites (1 trizonal y 2 bizonales) además de 2 puntos de equilibrio adicionales (3 puntos de equilibrio en total). Si, además, $\gamma < 1$, el ciclo límite trizonal es estable mientras que los bizonales son inestables, y los puntos de equilibrios son estables. Si $\sqrt{2} > \gamma > 1$, el ciclo límite trizonal es inestable, mientras que el ciclo límite bizonal es estable, y los puntos de equilibrio son estables si además $\gamma < \frac{1}{\alpha}$.
- **Bifurcación Hopf-zero del infinito** sobre la recta $\gamma = \alpha$, si $\alpha < \sqrt{2}$.
- **El punto Triple-zero del origen** se encuentra en $TZ_0 = (\sqrt{2} - 0.2, \sqrt{2})$.
- **El punto triple-zero de los equilibrios no triviales** de las zonas externas se halla en $TZ_E = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

3.5.2 Matriz de monodromía. Ecuaciones de bifurcaciones en ciclos límites.

Como se ha visto en el subapartado 2.2.2.5, en un sistema dinámico no lineal cuyas soluciones son ciclos límites, pueden aparecer básicamente tres bifurcaciones en función de los autovalores de la matriz de monodromía asociada a los ciclos límites: bifurcación silla-nodo, bifurcación toro o Neimark-Sacker y bifurcación Flip o duplicación de período.

Así pues, en primer lugar, se debe tener una expresión concreta que nos permita hallar la matriz de monodromía para un ciclo límite, para así poder hallar después los autovalores de la misma. En **sistemas lineales a trozo** la **matriz de monodromía** puede ser expresada en función del número de zonas como sigue:

- **Ciclos límites bizonales:** La matriz de monodromía para el ciclo límite bizonal descrito en la sección 3.4 puede hallarse como $M = \exp(A_c \tau_c) \exp(A_R \tau_R)$ (ver Prop.3 de [3])

⁴ Este tipo de bifurcación de ciclos límites se produce cuando un par de autovalores complejos conjugados imaginarios atraviesan el círculo de radio unidad asociado a la matriz de monodromía.

- **Ciclos límites trizionales:** La matriz de monodromía para los ciclos trizionales no simétricos descritos en la sección 3.3 se expresa según la ecuación $M = \exp(A_C \tau_3) \exp(A_R \tau_2) \exp(A_C \tau_1) \exp(A_R \tau_0)$ (ver Prop. 3.2. de [4]. Esta expresión es válida también para el caso en que el ciclo límite sea simétrico.

Se trata a continuación de hallar la ecuación característica de cada bifurcación en función de los autovalores de la matriz de monodromía. Se sabe que uno de los tres autovalores vale 1 por ser un ciclo límite, mientras que los otros dos dependerán de la bifurcación en la que nos encontremos (ver subapartado 2.2.2.5). Así, se tienen las siguientes **ecuaciones para las bifurcaciones de ciclos límites:**

- **Bifurcación Silla-Nodo:** En este caso los autovalores son $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, \lambda_3)$. El determinante y la traza de la matriz de monodromía en este caso son:

$$\begin{aligned}\det(M) &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_3 \\ \text{tr}(M) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + \lambda_3\end{aligned}$$

Despejando λ_3 en ambas ecuaciones e igualando, se obtiene la siguiente ecuación característica de la bifurcación Silla-Nodo:

$$\det(M) - \text{trace}(M) + 2 = 0 \quad (3.32)$$

- **Bifurcación Flip o Period Doubling:** Ahora los autovalores son $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, -1, \lambda_3)$, de forma que el determinante y la traza de la matriz de monodromía vienen dados por:

$$\begin{aligned}\det(M) &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\lambda_3 \\ \text{tr}(M) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3\end{aligned}$$

Igualando el valor de λ_3 en ambas ecuaciones se obtiene la siguiente ecuación característica de la bifurcación Flip:

$$\det(M) - \text{trace}(M) = 0 \quad (3.33)$$

- **Bifurcación Toro:** Finalmente, en caso de que se tenga una bifurcación Toro los autovalores son $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, a + bi, a - bi)$, donde $a^2 + b^2 = 1$, y, por tanto, el determinante y la traza en este caso son:

$$\begin{aligned}\det(M) &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = a^2 + b^2 \\ \text{tr}(M) &= 2a + 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación característica de la bifurcación Toro es:

$$\det(M) - 1 = 0 \quad (3.34)$$

Donde además se debe comprobar que se cumple que $|\text{tr}(M) - 1| < 2$ ya que a es menor que 1.

4 CONTINUACIÓN NUMÉRICA

Se describe en este capítulo el método de **continuación numérica** que posteriormente se implementará en Matlab. En primer lugar, en la sección 4.1 se describe teóricamente el método de continuación por parametrización natural, así como el método de Keller. Asimismo, se definirá el método de Newton y el cálculo del jacobiano, que serán usados en los métodos de continuación. Finalmente, en la sección 4.2 se describe el método de Keller explicado anteriormente, pero, en este caso, enfocado a la programación en Matlab del mismo.

4.1 Descripción de la continuación numérica

La **continuación numérica** nos permite hallar una rama de soluciones de un sistema de ecuaciones no lineales $F(X, \alpha) = 0$, a partir de una solución inicial (X_0, α_0) tal que $F(X_0, \alpha_0) = 0$, donde $X \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se dice que $F(X, \alpha) = 0$ es **regular** si se cumple que la matriz Jacobiana tiene rango máximo, y entonces, por el Teorema de la Función Implícita se puede afirmar que existe una única rama de soluciones cerca de (X_0, α_0) .

Así pues, el estudio de la continuación numérica pretende continuar la única rama de soluciones alrededor de una solución regular (X_0, α_0) , de forma que nos permite analizar el comportamiento de la solución del sistema dinámico dependiente de parámetros $\dot{X}(t) = F(X(t), \alpha)$. Para ello se estudian básicamente dos métodos de continuación numérica: **continuación por parametrización natural** y **continuación por pseudo-longitud de arco**. Ambos métodos hacen uso del método de Newton por lo que se describirá este en primer lugar

4.1.1 Método de Newton para sistema de ecuaciones

El **método de Newton** nos permite resolver un sistema de ecuaciones no lineales. Así, sea el sistema de n ecuaciones no lineales con n incógnitas descrito a continuación:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\&\dots \\f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}$$

Donde f_i ($i=1, 2, \dots, n$) hace referencia a las n ecuaciones y que por lo general dependerán de las n incógnitas. El problema en cuestión es equivalente a resolver $F(X) = 0$, donde F es un campo de n componentes correspondientes a las n ecuaciones no lineales y X es un vector que contiene las n incógnitas del problema. Sea \tilde{X} la solución del problema, para puntos suficientemente cercanos a \tilde{X} , se cumple por el teorema de Taylor que:

$$F(\tilde{X}) = 0 = F(X) + DF(X)(\tilde{X} - X) + D^2 f(X)(\tilde{X} - X, \tilde{X} - X) + O(\|\tilde{X} - X\|^3)$$

Donde $DF(x)$ es la matriz jacobiana (J). Si X es suficientemente cercano a \tilde{X} se puede despreciar el término de segundo orden, de modo que se puede hallar \tilde{X} fácilmente despejándolo de dicha ecuación como:

$$\tilde{X} = X - J^{-1}F(X)$$

Para evitar el cálculo directo en Matlab de J^{-1} se define $J^{-1}F(X)$ como e , de forma que:

$$J^{-1}F(X) = e \rightarrow Je = F(X)$$

Así pues, el problema se reduce a:

- 1) Tomar X_0 suficientemente cercano a \tilde{X}
- 2) Para $j = 0, 1, \dots$ hasta que se halle X con suficiente tolerancia o se llegue a una iteración grande.
 - a. Calcular $J(X_j)$
 - b. Hallar e resolviendo $Je = F(X_j)$ mediante factorización LU o métodos similares.
 - c. Actualizar X_{j+1} como $X_{j+1} = X_j - e$

Una vez descrito el método de Newton nos encontramos ante el problema del cálculo del **Jacobiano** en Matlab, que se puede calcular tanto numérica como directamente. El cálculo directo del Jacobiano presenta dos inconvenientes importantes: en primer lugar, sería necesario realizar las necesarias derivadas de todas las funciones respecto de todas las variables para cada problema, de forma que sería una pérdida de tiempo si queremos aplicar dicho método para cualquier función; en segundo lugar, existen funciones no lineales en las que no es posible el cálculo sencillo de las derivadas directamente. Todo esto nos lleva a decantarnos por el cálculo del Jacobiano numéricamente.

4.1.1.1 Jacobiano numérico

El **jacobiano numérico** puede ser calculado numéricamente mediante dos métodos:

- **Método de diferencias avanzadas:** Calcula las derivadas parciales que componen el jacobiano desarrollando el Teorema de Taylor en torno a $\mathbf{x} + \mathbf{h}$, con \mathbf{h} suficientemente pequeño.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

Despreciando los términos de mayor orden podemos hallar la derivada $f'(x)$ como:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

Donde $O(h)$ hace referencia al error de truncamiento del desarrollo de Taylor.

Ahora bien, Matlab tiene una precisión finita. Dicha precisión viene determinada por el sistema de coma flotante de 64 bits (52 bits para mantisa) con el que trabaja para la representación de los números y es del orden de $\varepsilon = 2,23 \cdot 10^{-16}$. De este modo los términos $f(x+h)$ y $f(x)$ estarán limitados por la precisión de Matlab según ε .

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \hat{f}(x+h) + \varepsilon_1 \\ f(x) &= \hat{f}(x) + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Donde $\hat{f}(x+h)$ y $\hat{f}(x)$ son los valores que nos permite representar en Matlab y, ε_1 y ε_2 son los errores cometidos al representar $f(x+h)$ y $f(x)$ respectivamente, y que serán aproximadamente del mismo orden que ε .

De esta forma, $f'(x)$ vendrá dado por:

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{\hat{f}(x+h) + \varepsilon_1 - \hat{f}(x) - \varepsilon_2}{h} + O(h) = \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{h} + O(h) \approx \\ &\approx \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h} + \frac{\varepsilon}{h} + kh \end{aligned} \quad (4.1)$$

Donde el primer término es el valor de la derivada que nos da Matlab, y los otros dos sumandos son los **errores de redondeo y de truncamiento** respectivamente. Para el error de redondeo se ha tenido en cuenta que $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ es del orden de ε , mientras que el error de truncamiento se ha descrito como proporcional a h puesto que se ha demostrado experimentalmente que es una buena aproximación.

A continuación, se analizan los errores para obtener el paso incremental h que **optimiza el error global** de la derivada. Considerando $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-16}$, $k = 1$, que son valores bastante realistas, se obtiene la siguiente representación de los errores frente a h en función de las ecuaciones descritas en (4.1)

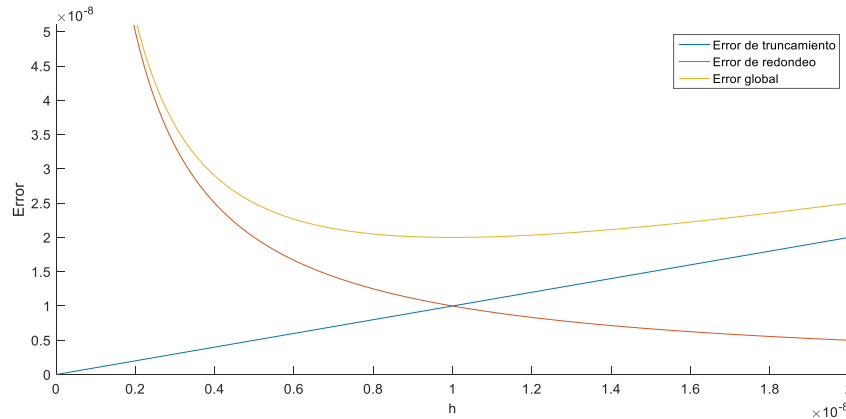


Fig. 4.1 Errores de truncamiento, de redondeo y global frente a h en el método de diferencias avanzadas

De este modo se puede observar que el h que minimiza el error global es $h = 10^{-8}$ para los valores de ε y k establecidos. Este valor podría haberse obtenido igualmente igualando los errores de truncamiento y redondeo para los valores de ε y k comentados.

Aunque los valores de ε y k no son exactos este análisis nos indica que la **h óptima** para este método será del orden de 10^{-8} . En este caso el error global proporcionado es $\varepsilon_{global} = 2 \cdot 10^{-8}$, valor lo suficientemente pequeño como para considerarlo válido.

Por poner un ejemplo de lo importante que es el valor de h elegido, se calcula a continuación el error global para distintos valores de h .

$$h = 1e - 5 \rightarrow \varepsilon_{redondeo} = 1e - 11, \varepsilon_{truncamiento} \approx 1e - 5 \rightarrow \varepsilon_{global_1} \approx 500\varepsilon_{global_{opt}}$$

$$h = 1e - 12 \rightarrow \varepsilon_{redondeo} = 1e - 4, \varepsilon_{truncamiento} \approx 1e - 12 \rightarrow \varepsilon_{global_2} \approx 5000\varepsilon_{global_{opt}}$$

Así, se observa que para valores tanto mayores como menores que el h óptimo, el error global cometido al hallar la derivada es considerablemente mayor, por lo que es muy importante elegir bien el h para hallar con la suficiente exactitud la derivada.

- **Método de diferencias centradas:** Este método halla la derivada mediante los desarrollos de Taylor en torno a $x + h$, y, en torno a $x-h$ con **h suficientemente pequeño**.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$f(x-h) = f(x) + f'(x)(-h) + f''(x)\frac{(-h)^2}{2} + O((-h)^3)$$

Restando ambas ecuaciones podemos hallar la derivada $f'(x)$ como:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + O(h^3) \rightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Donde $O(h^2)$ hace referencia al error de truncamiento del desarrollo de Taylor.

Realizando el mismo análisis que en el caso de diferencias avanzadas llegamos a que $f'(x)$ viene dado por:

$$f'(x) \approx \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x-h)}{2h} + \frac{\varepsilon}{h} + kh^2 \quad (4.2)$$

Se puede observar que la ecuación es la misma que para el otro caso, con las únicas diferencias de la fórmula de diferencias centradas en vez de la de diferencias avanzadas, y del error de truncamiento que en este caso es del orden de h^2 .

A continuación, se realiza un análisis similar al hecho en el primer caso para obtener el paso incremental h que optimiza el error global de la derivada. Considerando $\varepsilon = 1 * 10^{-16}$, $k = 1$, obtenemos la siguiente representación de los **errores** frente a h en función de las ecuaciones descritas en (4.2).

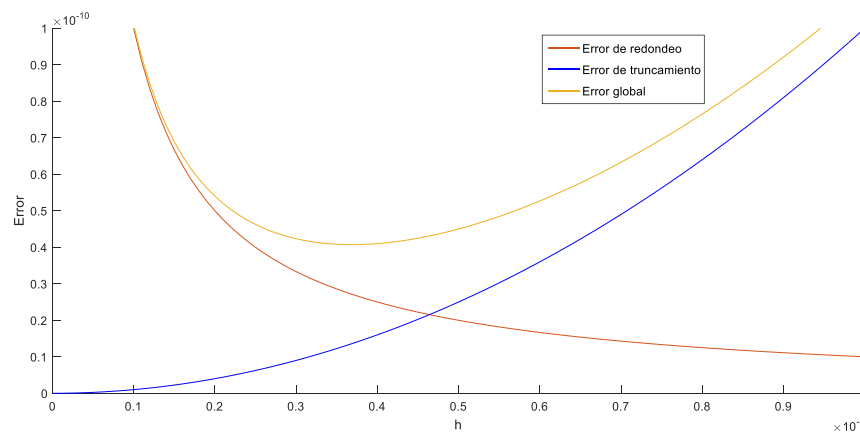


Fig. 4.2 Errores de truncamiento, de redondeo y global frente a h en el método de diferencias centradas

De este modo podemos observar que el h que minimiza el error global es $h \approx 0.5 * 10^{-5}$ para los valores de ε y k establecidos. Este valor podría haberse obtenido igualmente igualando los errores de truncamiento y redondeo para los valores de ε y k comentados.

Aunque los valores de ε y k no son exactos este análisis nos indica que la **h óptima** para este método será del orden de 10^{-5} . En este caso el error global proporcionado es $\varepsilon_{global} \approx 2 * 10^{-11}$. Al igual que se hizo en el caso de diferencias avanzadas, se puede demostrar que para h mayores y menores que la óptima el error global crece considerablemente.

Así pues, comparando con los valores obtenidos con el otro método, se observa que con este método se halla el valor de la derivada con un error considerablemente menor (unas 500 veces menor) con un paso incremental h unas 1000 veces mayor, lo que supone grandes ventajas en cuanto al cálculo numérico.

4.1.2 Continuación por parametrización natural

El método de **continuación por parametrización natural** toma α como **parámetro de continuación**. Dado un valor inicial α_0 y conocida la solución X_0 del sistema para dicho α_0 , este método nos permite continuar la rama de soluciones del sistema $F(X, \alpha) = 0$ tomando α como parámetro de continuación, mediante el método de Newton, siempre y cuando la solución **no tenga pliegues**.

Así, para hallar X_1 , este método resuelve la ecuación $F(X_1, \alpha_1) = 0$ haciendo uso del **método de Newton** tomando como solución inicial la conocida anteriormente $X_1^{(0)} = X_0$. De esta forma, se halla X_1 aplicando las siguientes ecuaciones, correspondientes al método de Newton:

$$F_X(X_1^{(v)}, \alpha_1) \Delta X_1^{(v)} = -F(X_1^{(v)}, \alpha_1)$$

$$X_1^{(v+1)} = X_1^{(v)} + \Delta X_1^{(v)}$$

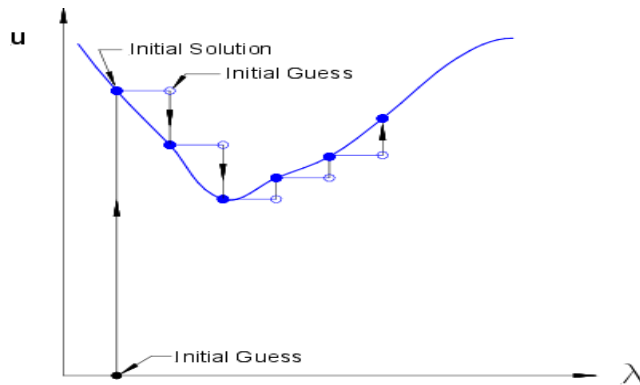


Fig. 4.3 Continuation natural of the solution of an equation

Si $F_X(X_1, \alpha_1)$ no es singular y $\Delta\alpha$ es lo suficientemente pequeño el método de Newton nos asegura la convergencia tras varias iteraciones. Una vez converge el método hemos hallado X_1 con suficiente precisión. A continuación, se repite el proceso para obtener X_2 asociado a α_2 , tomando como solución inicial X_1 y α_1 . Este proceso puede repetirse indefinidamente mientras la solución $F(X, \alpha) = 0$ no tenga pliegues, de forma que se puede analizar el comportamiento dinámico del sistema en función del parámetro dependiente mediante la parametrización natural.

4.1.3 Continuación por Pseudo-longitud de arco

Frente al método descrito anteriormente, este método, también denominado **método de Keller**, nos permite la continuación de cualquier solución regular, **incluso si esta contiene pliegues**. Dada una solución inicial (X_0, α_0) de $F(X, \alpha) = 0$, así como el vector tangente normalizado $(\dot{X}_0, \dot{\alpha}_0)$ en dicho punto, el método Keller se reduce a resolver las siguientes ecuaciones para X_1 y α_1 .

$$F(X_1, \alpha_1) = 0$$

$$(X_1 - X_0)^T \dot{X}_0 + (\alpha_1 - \alpha_0) \dot{\alpha}_0 - \Delta s = 0$$

En la Fig. 4.4 se puede observar una interpretación gráfica de la segunda ecuación. El método se reduce a hallar la solución de $F(X, \alpha) = 0$, con **predicción de la tangente** y **corrección en el hiperplano ortogonal a la dirección tangente**.

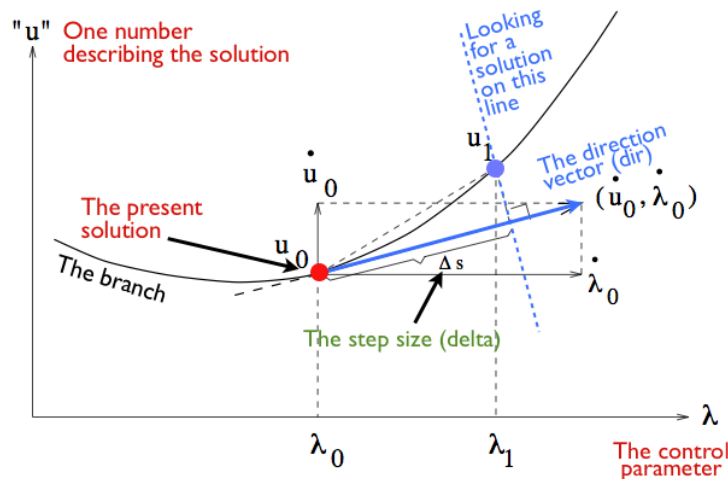


Fig. 4.4 Interpretación gráfica método de Keller

Dichas ecuaciones pueden ser resueltas aplicando el **método de Newton** al siguiente sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} (F_X^1)^{(v)} & (F_\alpha^1)^{(v)} \\ \dot{X}_0 & \dot{\alpha}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_1^{(v)} \\ \Delta \alpha_1^{(v)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F(X_1^{(v)}, \alpha_1^{(v)}) \\ (X_1^{(v)} - X_0)\dot{X}_0 - (\alpha_1^{(v)} - \alpha_0)\dot{\alpha}_0 - \Delta s \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Donde Δs es el **parámetro longitud de arco**, que es actualizado continuamente para optimizar el proceso de computación. Si Δs es demasiado pequeño, el coste de computación aumenta considerablemente, si, por el contrario, este es excesivamente grande, el método puede no converger. Así pues, el control de Δs es un importante aspecto en la continuación por pseudo-longitud de arco.

Una vez converge el método de Newton y se tiene la nueva solución (X_1, α_1) se halla el nuevo vector $(\dot{X}_1, \dot{\alpha}_1)$ resolviendo el sistema (4.4) y normalizando el vector obtenido:

$$\begin{pmatrix} F_X^1 & F_\alpha^1 \\ \dot{X}_0 & \dot{\alpha}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{\alpha}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

De esta forma, se puede continuar la solución anterior para hallar (X_2, α_2) . Mientras que la parametrización natural no podía aplicarse a soluciones con pliegues, este proceso puede repetirse indefinidamente debido a la predicción de la tangente en la dirección ortogonal en cada paso.

4.2 Continuación numérica en Matlab

En este trabajo Fin de Grado se realizará la continuación numérica con el **método de Keller** ya que este nos permite continuar ramas de soluciones con pliegues. En el apartado 4.1.3 se ha descrito teóricamente dicho método, sin embargo, no se ha explicado cómo realizar dicha continuación en Matlab. Como se ha comentado anteriormente, este método nos permite continuar una rama de soluciones de un sistema no lineal $F(X, \gamma) = 0$ dada una solución inicial $x_0 = (X_0, \gamma_0)$ tal que $F(X_0, \gamma_0) \approx 0$ y un vector tangente inicial $\dot{x}_0 = (\dot{X}_0, \dot{\gamma}_0)$.

En la práctica, no se conoce la solución inicial x_0 ni el vector tangente en dicha solución inicial \dot{x}_0 , únicamente se puede conocer una estimación de la solución inicial. Así pues, se explica a continuación como realizar la continuación numérica dada una estimación de la solución inicial $x_{ini} = (X_{ini}, \gamma_{ini})$.

1. Se halla una solución $x_0 = (X_0, \gamma_0)$ del sistema aplicando Newton a la estimación de la solución que se tiene $x_{ini} = (X_{ini}, \gamma_{ini})$.
2. Se varía ligeramente el parámetro de continuación $\gamma_{01} = \gamma_0 + h_{dif}$ y se aplica de nuevo el método de Newton para hallar una nueva solución $x_{01} = (X_{01}, \gamma_{01})$. Con las dos soluciones que se tienen del problema se estima el vector tangente inicial como:

$$t_0' = \frac{x_{01} - x_0}{h_{dif}} \rightarrow t_0 = \frac{t_0'}{|t_0'|}$$

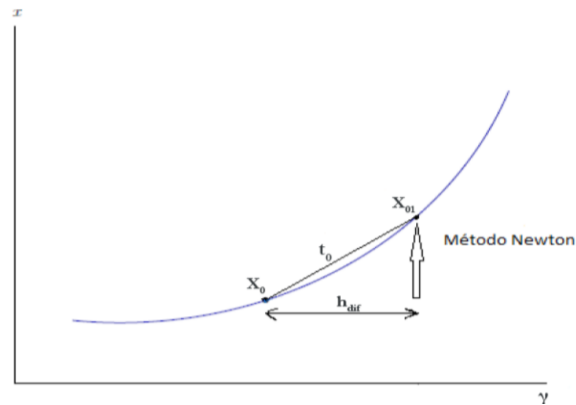


Fig. 4.5 Cálculo del vector t_0 para comenzar la continuación numérica en Matlab

3. Se halla una nueva predicción de la solución en la dirección del vector tangente t_0 con un paso de continuación Δs como: $X_{predic} = X_0 + t_0 \Delta s$
4. Se aplica el método de Newton (Newton_Keller.m) al sistema descrito en la ecuación (4.3) tomando como soluciones inicial y predicha x_0 y x_{predic} , y como vector tangente t_0 . Para ello se hace uso de las funciones ecucierre.m y jacnum.m que nos permiten hallar el valor del sistema y del jacobiano asociado al sistema en el punto x_{predic} . Finalmente, se le añade la ecuación de continuación de Keller. De esta forma, se obtiene una nueva solución $x^{(v)} = (X_1^{(v)}, \gamma_1^{(v)})$.
5. Se repiten los puntos 3 y 4 hasta que el error cometido sea menor que el permitido, tomando como x_0 la última solución obtenida y como t_0 y el vector tangente inicial. El último punto hallado será la nueva solución de Keller x_1 .
6. Finalmente, se halla el nuevo vector tangente t_1 empleando la ecuación (4.4).

5 ALGORITMOS EN MATLAB

Se describen en este capítulo los **algoritmos** realizados en Matlab para la continuación numérica de sistemas lineales a trozos, con el objetivo de que se pueda entender el código programado en Matlab que se encuentra en el ANEXO B.

5.1 Main (ANEXO B.1.)

Main.m es el **script principal**, que sirve como punto de partida para la ejecución de nuestra continuación numérica.

Este script permite en primer lugar **definir las condiciones iniciales** de la continuación del ciclo límite. A partir de dichas condiciones iniciales, en función de las componentes que tiene el vector de estado X_{ini} , **determina si estamos ante un ciclo bizonal o trizonal**. A continuación, representa la **curva gamma-alpha** donde posteriormente representaremos las curvas de bifurcación.

Finalmente llama a la función contin_ciclo.m para realizar la **continuación numérica de ciclos límites** con $\alpha = cte.$ y γ como parámetro de continuación., con el objetivo de hallar las posibles bifurcaciones. Una vez hallada una bifurcación se realizará la continuación de dicha curva de bifurcación tomando α como parámetro de continuación, mediante la función contin_curvabif.m que es llamada dentro de contin_ciclo.m.

5.2 Continuación ciclo (ANEXO B.2.)

Contin_ciclo.m es una función que realiza la **continuación de los ciclos límites** de un sistema variando únicamente el parámetro γ según lo descrito en la sección 4.2. Con esta función nos moveremos en una línea vertical de la curva gamma_alpha vista en el apartado 3.5.1 ($\alpha = cte.$), **con el objetivo de encontrar bifurcaciones en la misma**.

Esta función incluye comandos para mostrar en pantalla los valores de las variables según se continua la solución, así como las funciones que permiten representar los **ciclos límites** (dibuja_orbitas.m) y la **evolución** de las componentes **del vector de estado** frente a γ (representa_vector_estado.m) (ver sección 5.6).

Finalmente, comentar que además implementa una serie de **controles de continuación** que se verán a continuación. Entre estos controles de continuación se encuentra el control de bifurcación que nos permitirá determinar la existencia de una bifurcación en la continuación del ciclo límite, y, en caso de hallarla, realizará la continuación de dicha bifurcación.

5.2.1 Controles continuación

Cada vez que es hallado un nuevo vector de estado que es solución del sistema debe comprobarse que dicha **solución es real y compatible con las hipótesis** supuestas en la resolución del sistema lineal a trozos, y, además debe comprobarse también **que no se está en una bifurcación**. Para controlar esto, se implementan en Matlab los siguientes controles de continuación:

- **Control del paso:** Este control modifica el paso de continuación (pasocont) en función del número de iteraciones empleadas en el cálculo de x_1 mediante Keller, con el objetivo de optimizar el proceso de

cálculo. Si el número de iteraciones empleados es grande ($\text{iter} > 5$) significa que se debe disminuir pasocont para que converja más rápido ($\text{pasocont} = \text{pasocont}/1.5$), mientras que si el número de iteraciones es muy pequeño ($\text{iter} < 3$) debemos aumentar pasocont ($\text{pasocont} = 1.5 \text{pasocont}$). Además, se establece un paso máximo (pasomax) y un paso mínimo (pasomin) de forma que pasocont se mueva siempre entre estos límites, para evitar que la continuación sea excesivamente lenta, o que no converja.

- **Control de los tiempos de vuelo:** Todos los tiempos de vuelo hallados han de ser **positivos**. En ciclos límites bizonales debe cumplirse $\tau_R > 0, \tau_c > 0$, mientras que en ciclos límites trizonales la condición es $\tau_0 > 0, \tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \tau_3 > 0$
- **Control del signo del determinante del Jacobiano:** Debe cumplirse que el signo del determinante del Jacobiano hallado mediante el método de Newton **no cambie** al hallar una nueva solución del vector de estados. Si esto se incumple implica que se ha anulado dicho determinante, y, por tanto, se ha incumplido el **Teorema de la Función Implícita**, por lo que habrá que observar si el ciclo límite continuado después de esto es el que se continuaba anteriormente u otro con el que se ha cruzado.
- **Control de x_1 en ciclos límites bizonales:** En caso de que se continuen ciclos límites bizonales debe cumplirse $x_1 > -1$ (**no invasión de la tercera zona**) para cualquier punto del ciclo límite, pues en caso contrario se está obteniendo un ciclo límite trizonal a partir de las ecuaciones de los ciclos límites bizonales, lo cual no representa un ciclo real del sistema. Para realizar esta comprobación se halla una **muestra de valores de x_1 en la zona central** ($0 < \tau < \tau_c$) mediante la ecuación (3.26) a partir del X_0 obtenido aplicando Keller, y se comprueba si alguno de estas muestras son menores que -1.
- **Control del sentido recorrido:** Debe comprobarse que el sentido recorrido del ciclo límite obtenido sea el **mismo que el supuesto** en la resolución analítica en el capítulo 3, es decir, **sentido anti horario** (positivo). Para comprobar esto, si se parte desde la zona central, debe cumplirse que la derivada respecto al tiempo de x_1 en $x_1 = 1$ sea positiva, lo cual se cumple si:

$$\dot{X}|_{x_1=1} = A_C X|_{x_1=1} = \begin{pmatrix} T - x_2 \\ M - X_3 \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}|_{x_1=1}$$

$$\dot{x}_1|_{x_1=1} = T - y_0 > 0$$

- **Control de estado de bifurcación:** Debe comprobarse que los **autovalores de la matriz de monodromía** no hayan cruzado el círculo de radio unidad en la representación en polares, pues esto implica un **cambio de estabilidad** en el mismo. Para ello se procede de la siguiente forma:
 1. **Cálculo de la matriz de monodromía**, empleando las ecuaciones vistas en el apartado 3.5.2 para ciclos límites bizonales y trizonales.
 2. Comprobación del **estado de estabilidad** del ciclo límite mediante el **criterio del círculo de radio unidad**. Para ello se emplea la función `compruebaautovalores.m` (ANEXO B.9.), que dada una matriz de monodromía nos da el estado de estabilidad a partir de los criterios vistos en el apartado 3.5.2. Si los autovalores están dentro del círculo de radio unidad, el ciclo límite es estable y estado=1; si, alguno de los autovalores está fuera, el ciclo límite es inestable y estado=2; finalmente, si los autovalores se encuentran sobre el círculo unidad, el punto es críticamente estable y estado=0.
 3. Una vez hallado el estado de estabilidad del ciclo límite, debe comprobarse que el estado es el **mismo que para el anterior ciclo límite** que se tenía. En caso contrario se tendrá una **bifurcación**.
 4. Se determina el **tipo de bifurcación** mediante la función `tipo_bifurcacion.m` (ANEXO B.10.). Dicha función devuelve el tipo de bifurcación en función de los autovalores de la matriz de monodromía. Para ello tiene en cuenta dos criterios: los criterios vistos en el apartado 3.5.2 y

los valores de los autovalores de la matriz de monodromía. Así, en caso de que los autovalores sean complejos se tiene una bifurcación toro (si se cumple la condición vista en 3.5.2), y si son los autovalores reales pues se tiene una bifurcación Silla-Nodo o una bifurcación Flip en función de los criterios comentados. Esta función devuelve una variable llamada tipo_bif que valdrá 1 si es una Silla-Nodo, 2 si es Flip y 3 si es Toro.

5. Finalmente, una vez hallado el tipo de bifurcación, se realiza la **continuación de la curva de bifurcación** mediante la función contin_curvabif que se describe a continuación en el apartado 5.2.2

5.2.2 Continuación curva de bifurcación (ANEXO B.3.)

Como se ha comentado anteriormente, a medida que se realiza la continuación de ciclos límites (contin_ciclo.m) variando el parámetro γ se busca hallar una bifurcación mediante el control de bifurcación. En caso de que se halle una bifurcación se toma como vector de estados inicial $y_{ini} = (x, \gamma)$ para realizar la **continuación de la curva de bifurcación** mediante contin_curvabif.m.

Contin_curvabif.m es una función que realiza la continuación de una curva de bifurcaciones según lo descrito en la sección 4.2, a partir de un vector de estados inicial, que en este caso tiene una componente más (γ ahora es una incógnita del problema que dependerá del parámetro de continuación α), y tomando como parámetro de continuación α , donde el α inicial será aquel con el que se realiza la continuación de ciclos en contin_ciclo. Al igual que contin_ciclo.m, esta función incluye los **controles de continuación** (excepto el control bifurcación), así como los comandos para mostrar el valor de las variables y representar las gráficas de los **ciclos límites** y de la **evolución de las variables de estado**, en este caso, frente a γ y α . Además, devuelve también la representación de la **curva de bifurcación** $\gamma = \gamma(\alpha)$, la cual es representada en la curva gamma-alpha vista en el apartado 3.5.1

5.3 Método de Newton (ANEXO B.4.)

Newton.m implementa en Matlab el **algoritmo de Newton** descrito en el apartado 4.1.1 para hallar la solución de sistemas no lineales $F(x) = 0$, conocida una estimación de la solución inicial x_0 .

Así pues, dicha función proporciona a la salida la solución x_1 a partir de las siguientes variables de entrada:

- **TOLr y TOLa:** Tolerancia relativa y absoluta con la que se quiere hallar la solución. La solución obtenida debe cumplir que el error cometido (elerr) sea menor que el error relativo más el error absoluto permitido. El error total permitido se hallará en cada iteración según la siguiente fórmula:

$$error = TOL_r \cdot |x| + TOL_a$$

- **Maxiter:** Número máximo de iteraciones permitidas para hallar la solución. Debe cumplirse que el número de iteraciones (iter) sea menor que maxiter.
- X_0, γ, α : Estimación inicial de la solución y valor de los parámetros en ella.

Para hallar la solución se emplean las funciones ecucierre.m y jacnum.m, que nos permiten evaluar el valor del sistema y el jacobiano del sistema en cada punto x_0 para un α y γ dado. En caso de que se continúe una curva de bifurcación la estimación de la solución inicial x_0 , y, por tanto, la solución inicial x_1 , tendrá una componente más correspondiente al parámetro γ , de forma que se necesita una ecuación más, la ecuación característica de la bifurcación que se continúa, que está incluida en ecucierre.m

5.3.1 Método de Keller (ANEXO B.5.)

Newton_keller.m es una función que implementa el **método de keller** descrito en el apartado 4.2 para hallar la solución de sistemas no lineales $F(x) = 0$ que contienen pliegues. Así, esta función nos devuelve la solución el vector de estado x_1 y el vector tangente t_1 a partir de las variables de entrada, que son las mismas que teníamos en el método de Newton, más el vector tangente inicial t_0 más el incremento de paso Δs (pasocont).

En este caso el vector de estados x tiene una componente más que en el método de Newton, ya que se le debe añadir el parámetro de continuación (γ si se continúa ciclos límites y, γ y α si se continúan curvas de bifurcación). Al tener una componente más, se necesita también una ecuación más, que es la ecuación asociada a la continuación de Keller (ecuación (4.3)). Además, si se continúa una curva de bifurcación, se necesitará otra ecuación más que es la característica de la bifurcación que se continúa (ecuación incluida en ecucierre.m).

5.4 Ecuaciones de cierre (ANEXO B.6.)

Ecucierre.m es una función que implementa **las ecuaciones de cierre** para ciclos límites obtenidas en el apartado 3, evaluadas en x . Así pues, dado un vector de estado x , esta función devuelve el valor de las ecuaciones de cierre en el vector f , que dependerá del número de zonas del ciclo límite.

Si se tiene un ciclo límite de **2 zonas** las ecuaciones de cierre que aplican son las descritas en el apartado 3.4.1, mientras que si el ciclo límite es **trizonal** se tienen en cuenta las ecuaciones vistas en el apartado 3.3.1. En Matlab no se han implementado las ecuaciones de cierre para órbitas trizonales simétricas puesto que las ecuaciones de los ciclos límites trizonales no simétricos son más generales, de forma que sirven para describir tanto las simétricas como las no simétricas. Además, en el caso de que se pase de un ciclo límite de 2 zonas a 3 zonas esta función implementa las ecuaciones que permiten eliminar la **rama espurea de soluciones** para quedarnos con la rama de soluciones deseada (ver ANEXO A: Eliminación Rama Espurea Ciclos Límites Trizonales No Simétricos)

Finalmente, en caso de que se continúe una **curva de bifurcación**, esta función añade una última componente al vector f correspondiente a una de las **ecuaciones de las bifurcaciones** de los ciclos límites descritas en el apartado 3.5.2

5.5 Jacobiano numérico (ANEXO B.7.)

Dados un vector de estado x , y los parámetros γ y α , jacnum.m nos devuelve el **jacobiano numérico** asociado al sistema formado por las ecuaciones de ecucierre.m evaluado en un punto $X = (x, \gamma, \alpha)$. Para ello, esta función implementa el método de las **diferencias centradas** descrito en 4.1.1.1 con $h_{dif} \approx h_{dif_{opt}} = 1e-5$, para lo cual evalúa ecucierre.m en $X_{fin} = (x + h, \gamma, \alpha)$ y en $X_{ini} = (x - h, \gamma, \alpha)$. En función de si el jacobiano que devuelve esta función está asociado al método de Newton o al de Keller, así como de si se continúa un ciclo límite o una curva de bifurcación, el jacobiano será una matriz cuadrada de 6×6 , 7×7 u 8×8 .

5.6 Gráficas

En este apartado se describen las funciones auxiliares que se emplean en Matlab para obtener las **gráficas** en las simulaciones pertinentes.

5.6.1 Representación de ciclos límites (ANEXO B.12.)

Dibuja_orbitas.m es una función que representa la trayectoria de **ciclos límites**, tanto **bizonales** como **trizonales**, en 3D, dado un vector de estados x . Para ello hace uso de las ecuaciones que describen la trayectoria en cada zona, que se han obtenido anteriormente (ver apartado 3.3.1 para ciclos límites trizonales y apartado 3.4.1 para

ciclos límites bizonales).

Dado el vector de estados x , se tiene definido el punto X_0 y los tiempos de vuelo en todas las zonas, de forma que aplicando las ecuaciones de cada zona se obtienen todos los puntos que queremos de la trayectoria.

5.6.2 Curva gamma-alpha (ANEXO B.11.)

Gamma_alpha.m es una función que dada una beta nos proporciona la gráfica **gamma-alpha** estudiada en el apartado 3.5.1. En esta misma gráfica se representan también las **curvas de bifurcación** halladas mediante la continuación de las curvas de bifurcación.

5.6.3 Evolución de los vectores de estado (ANEXO B.13.)

Representa_vector_estado.m es una función que, dado un vector de estado x , así como gamma y alpha, devuelve gráficas que representan la **evolución de las variables de estado** frente a los parámetros del sistema. En función del ciclo límite que se está continuando nos devuelve las siguientes gráficas:

- **Ciclo límite trizonal en continuación de ciclo:** Devuelve 6 subgráficas en 2-D que representa la evolución de las variables $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, y_0, z_0$ frente a γ .
- **Ciclo límite bizonal en continuación de ciclo:** Devuelve 4 subgráficas en 2-D que representan la evolución de las variables τ_R, τ_c, y_0, z_0 frente a γ .
- **Ciclo límite trizonal en continuación de curva de bifurcación:** Devuelve 6 subgráficas en 3-D que representan la evolución de las variables $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, y_0, z_0$ frente a γ y α .
- **Ciclo límite bizonal en continuación de curva de bifurcación:** Devuelve 4 subgráficas en 3-D que representan la evolución de las variables τ_R, τ_c, y_0, z_0 frente a γ y α .

5.7 Sistema (ANEXO B.8.)

Sistema.m es una función que implementa las **ecuaciones dinámicas del sistema lineal a trozos en forma de Luré** descritas en la ecuación (3.1). Dicha función tiene como variables de entradas el tiempo (t), y un vector de estados (X), y devuelve el valor de la función en dicho punto X , según la siguiente ecuación:

$$f = A_R X + sat(x_1) b$$

Donde se tendrá en cuenta para expresarla en Matlab la siguiente expresión de la función saturación:

$$sat(x_1) = \frac{|x_1 + 1| - |x_1 - 1|}{2}$$

La integración de esta función mediante el comando ODE45 de Matlab evaluado en una solución X_0 del método de Newton aplicado a las ecuaciones de cierre, y, para un tiempo T igual al período de la órbita (suma de los tiempos de vuelo) permite hallar la trayectoria para dicho punto X_0 .

6 SIMULACIONES Y RESULTADOS EN MATLAB

En este apartado se muestran los resultados de las **simulaciones** realizadas en Matlab para **varias condiciones iniciales**. Se realizan diferentes simulaciones en las que se puede observar el correcto funcionamiento de los códigos programados en Matlab para todos los casos posibles y se intenta detectar el mayor número de bifurcaciones posible. Así, se realiza simulaciones para continuar tanto ciclos límites **bizonales** como **trizonales (simétricos y no simétricos)**, así como para todos los tipos de bifurcaciones en ciclos límites (**silla-nodo, toro y flip**).

Se continúa en primer lugar el ciclo límite manteniendo constante α y se busca obtener una bifurcación. Una vez que la bifurcación es detectada se continúa la curva de bifurcación para representarla en el diagrama de bifurcaciones del oscilador. Tras finalizar la continuación de la curva de bifurcación se vuelve a la continuación del ciclo límite con α constante para intentar detectar nuevas bifurcaciones.

De esta forma se obtienen las siguientes gráficas para cada caso:

- Evolución del vector de estado en la continuación del ciclo límite ($x = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, y_0, z_0)$ frente a γ)
- Evolución del vector de estado en la continuación de la curva de bifurcación ($x = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, y_0, z_0)$ frente a γ y α)
- Curva de bifurcación $\gamma = \gamma(\alpha)$.
- Diagrama de bifurcación con las curvas de bifurcaciones obtenidas.
- Ciclos límites asociados a cada vector de estado. En la memoria solo se pondrán uno o varios ciclos límites que consideremos adecuados.

6.1 Caso 1

Se comienza la Continuación de ciclos límites con $\alpha = 0.9$ y $\gamma = 0.9724$, del cual se conoce la siguiente estimación de la solución inicial para un ciclo límite trizonal:
 $x_{ini} = (2.287, 0.809, 2.287, 0.809, -2.18, -0.064)^T$.

Con dichas condiciones iniciales se continúa un **ciclo límite trizonal simétrico** como se observa en las Fig. 6.1 y Fig. 6.2. En la Fig. 6.1 se representa la **evolución del vector de estado frente a γ** . En esta figura se puede observar la simetría debido a que las evoluciones de los tiempos de vuelo en las dos zonas centrales son iguales, al igual que ocurre en las zonas externas. Además, se puede observar un pliegue en dicha representación que corresponde a una bifurcación Silla-Nodo.

Por otro lado, en la Fig. 6.2. se representa el **ciclo límite** que se ha continuado para $\gamma = 0.9561$ y el vector de estado $x = (2.5408, 0.4819, 2.5408, 0.4819, -4.0647, -0.0420)^T$. En dicha gráfica están representados con asteriscos los puntos de corte del ciclo límite con los planos $x_1 = 1$ y $x_1 = -1$, es decir, X_0, X_1, X_2, X_3 . Se puede observar en dicha gráfica la simetría del ciclo límite y más concretamente de los puntos de corte comentados. También se puede ver como los tiempos de vuelo en las zonas externas son considerablemente mayores que en las zonas centrales como se deduce del vector de estado.

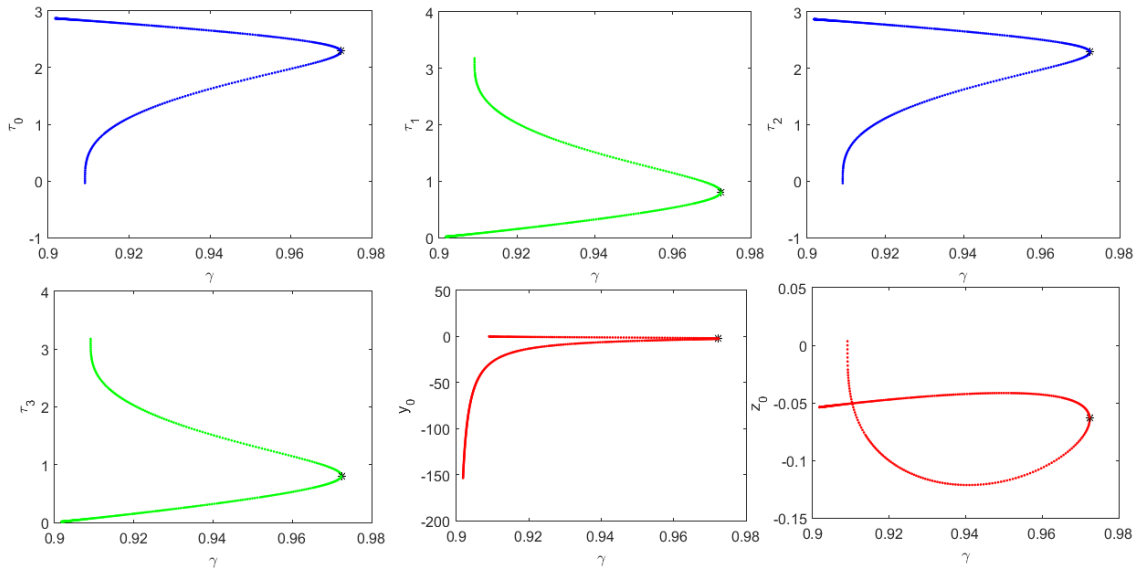


Fig. 6.1 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite

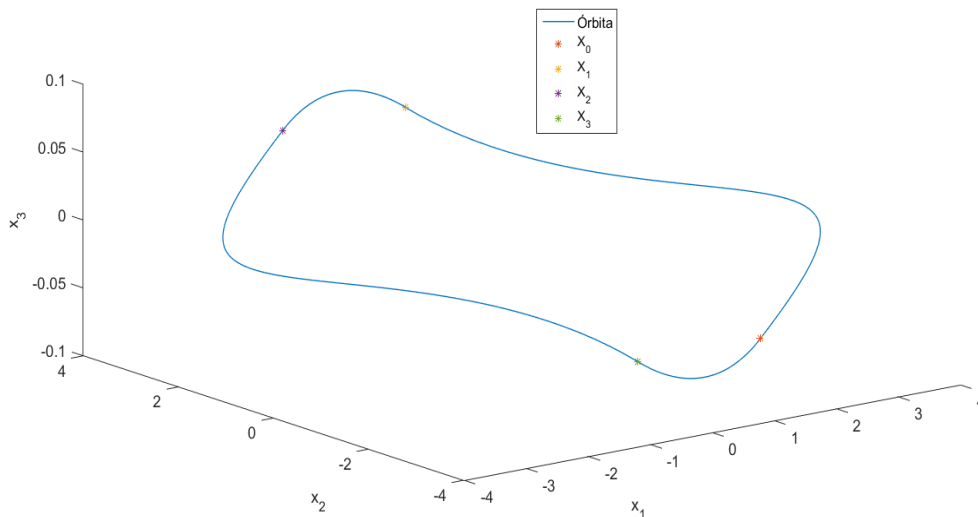


Fig. 6.2 Ciclo límite trizonal simétrico

Mediante la continuación del ciclo límite se detecta una **bifurcación Silla-Nodo** en el pliegue que se ve en la Fig. 6.1, para los valores $\gamma = 0.9724135$, $x = (2.283149, 0.8138584, 2.283149, 0.8138584, -2.303554, -0.06473038)$. Una vez detectada la bifurcación, se inicia la continuación de la bifurcación tomando como vector de estado inicial $y = (x, \gamma)^T$ y se obtiene la curva de bifurcación. Así, en la Fig. 6.3 y en la Fig. 6.4 se representa la **curva de bifurcación**, y el **diagrama de bifurcación** con dicha curva de bifurcación. Se puede observar en la Fig. 6.4 como la curva de bifurcación parte de los puntos singulares donde se cortan las bifurcaciones Hopf zero del origen y del infinito con las bifurcaciones Foco-Centro ciclo límite y Hopf del infinito respectivamente.

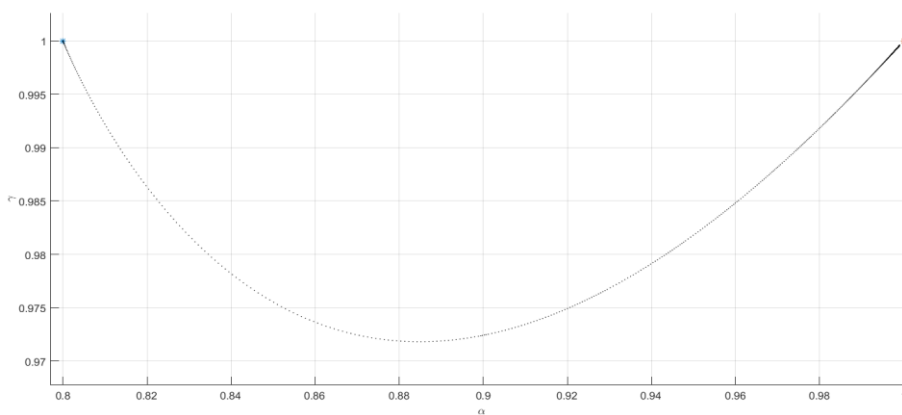


Fig. 6.3 Curva de bifurcación Silla-Nodo

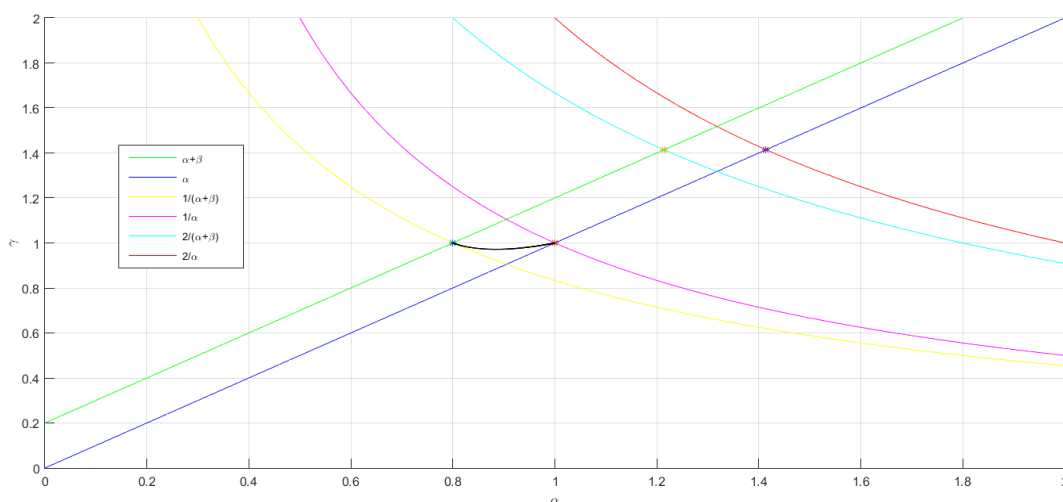


Fig. 6.4 Diagrama de bifurcación con curva de bifurcación Silla-Nodo

Finalmente, en la Fig. 6.5 se representa la **evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α** en la continuación de la curva de bifurcación. El punto señalado con asterisco corresponde al punto donde se ha detectado la bifurcación y, por tanto, donde se ha comenzado la continuación de la curva de bifurcación.

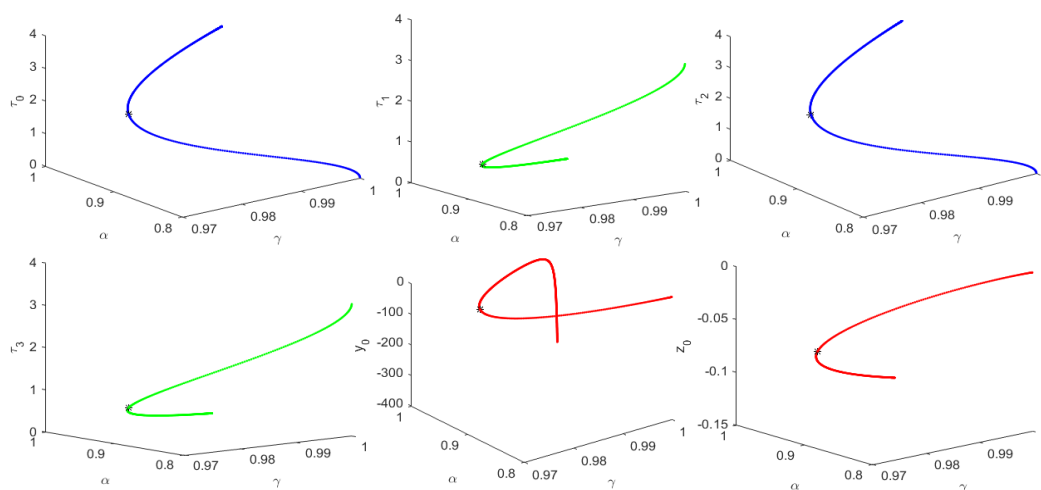


Fig. 6.5 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Silla-Nodo

6.2 Caso 2

A continuación, se realiza la continuación de ciclos límites con $\alpha = 0.9$ y $\gamma = 1.09$. En este caso estamos en la misma línea vertical de la curva gamma-alpha que en el caso 1 ($\alpha = 0.9$) pero se ha aumentado el valor de γ . Para estos parámetros del circuito se conoce la siguiente estimación de la solución inicial para un ciclo límite trizonal: $x_{ini} = (1, 2.3, 1, 2.3, -0.5, 0)^T$.

A partir de estas condiciones iniciales se continúa un **ciclo límite trizonal simétrico** como se puede observar en las Fig. 6.6 y Fig. 6.7. En la Fig. 6.6 se representa la **evolución de las componentes del vector de estado frente a γ** . Al igual que antes, se puede confirmar la simetría del ciclo límite continuado observando la evolución de los tiempos de vuelo. Finalmente, comentar la existencia de una **bifurcación Silla-Nodo** que corresponde al pliegue que se puede ver en las gráficas.

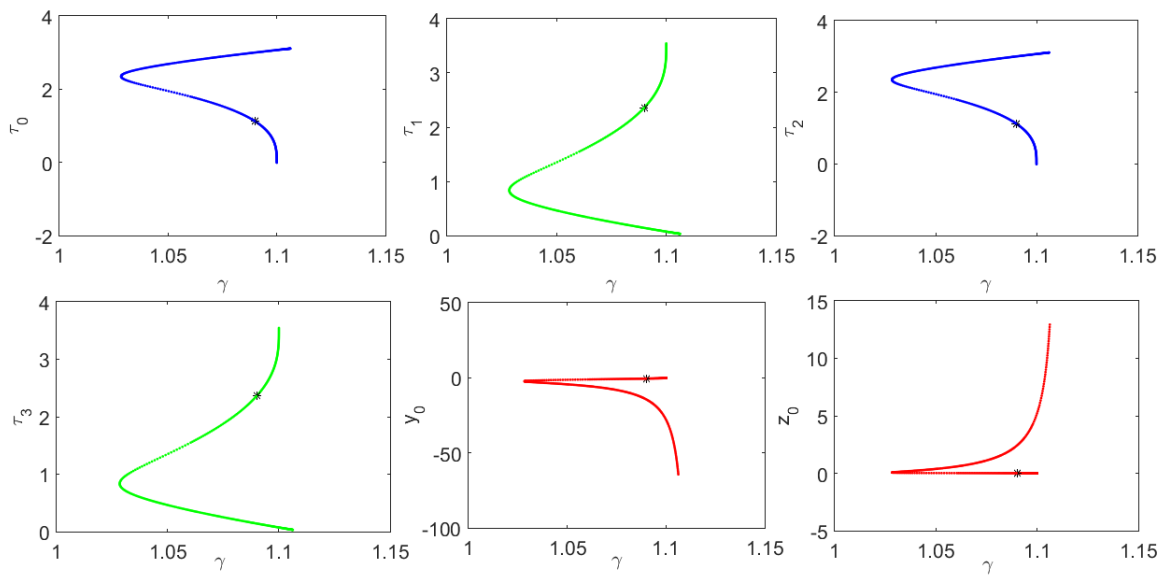


Fig. 6.6 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite

En la Fig. 6.7 se representa el **ciclo límite** obtenido por continuación numérica con $\gamma = 1.0294$ para el vector de estado $x = (2.2831, 0.9162, 2.2831, 0.9162, -2.0719, 0.0464)^T$. Como antes, se puede observar en dicha gráfica la simetría del ciclo límite.

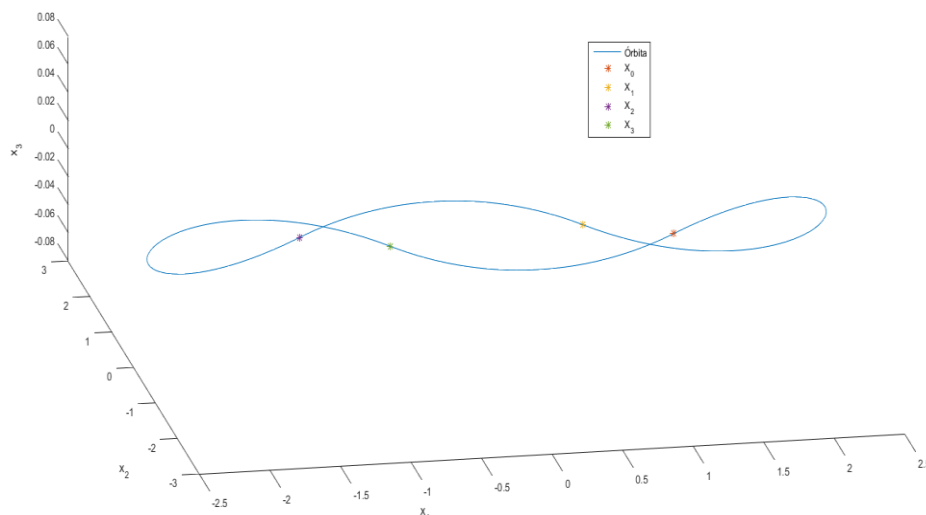


Fig. 6.7 Ciclo límite trizonal simétrico

A través de la continuación del ciclo límite se detecta una bifurcación Silla-Nodo en el pliegue de la Fig. 6.6 para los valores $\gamma = 1.02835$, $x = (2.355897, 0.8269806, 2.355897, 0.8269806, -2.32735, 0.0673467)^T$. Cuando es detectada la bifurcación, se inicia la continuación de la bifurcación tomando como vector de estado inicial $y = (x, \gamma)^T$. En las Fig. 6.8 y Fig. 6.9 se representan la **curva de bifurcación** y el **diagrama de bifurcación** con la curva de bifurcación. Se puede observar como en el caso anterior que la curva de bifurcación parte de los mismos puntos singulares que en el caso anterior.

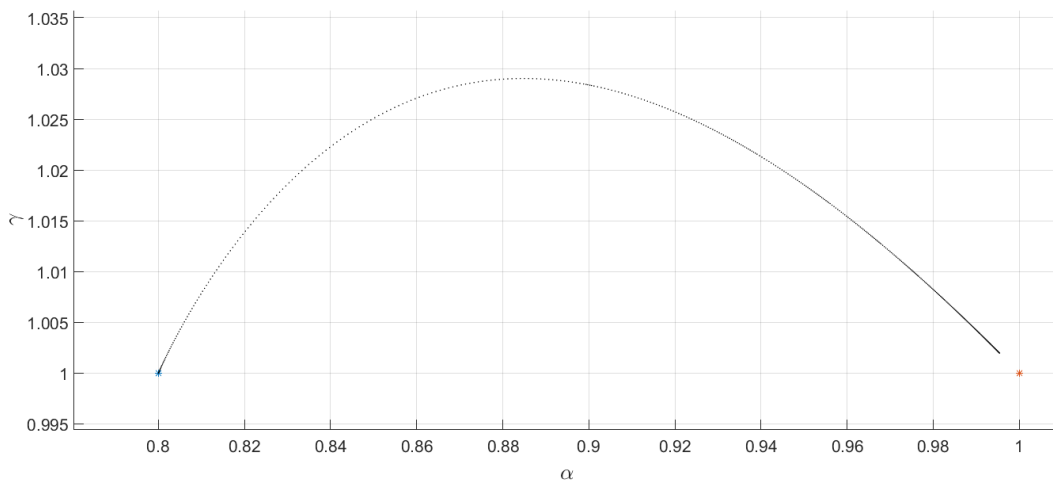


Fig. 6.8 Curva de bifurcación Silla-Nodo

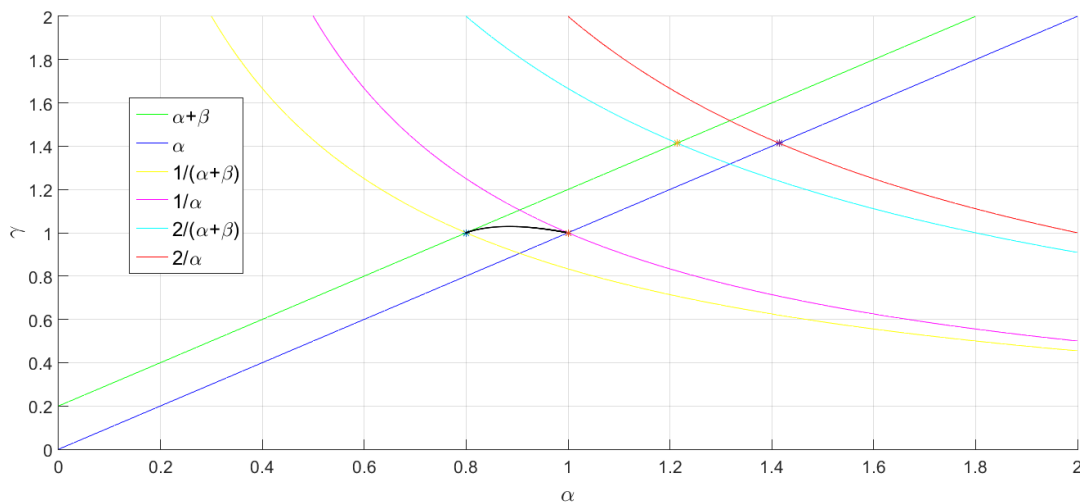


Fig. 6.9 Diagrama de bifurcación con curva de bifurcación Silla-Nodo

Por último, en la Fig. 6.10 se representa la **evolución del vector de estado frente a γ y α** en la continuación de la curva de bifurcación.

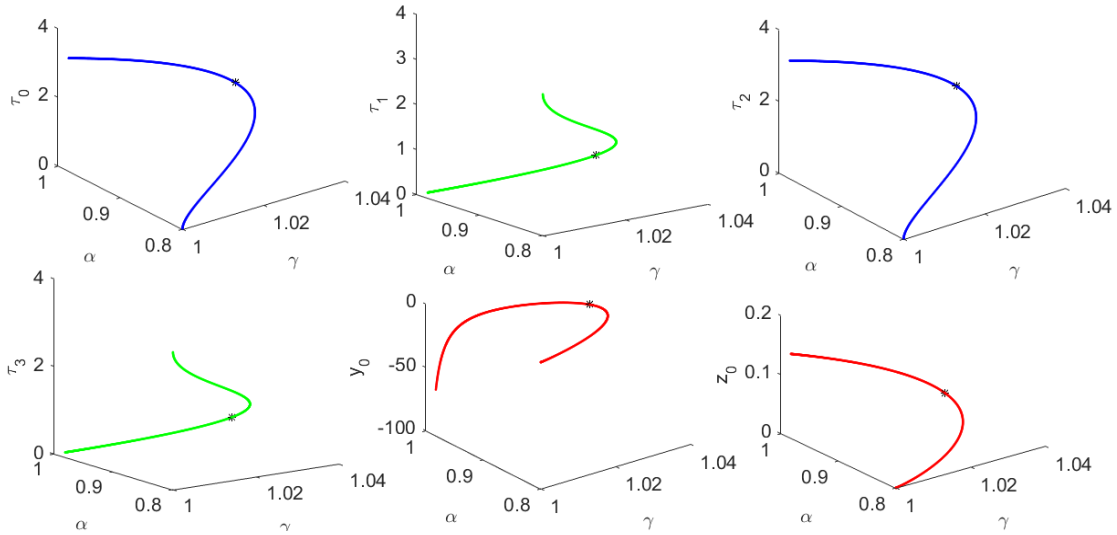


Fig. 6.10 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Silla-Nodo

6.3 Caso 3

A continuación, se realiza la continuación de ciclos límites con $\alpha = \sqrt{2} - 0.2$ y $\gamma = 1.3977$. En este caso nos encontramos ligeramente por debajo del punto **Triple Zero del origen**. Para estos parámetros del circuito se conoce la siguiente estimación de la solución inicial para un ciclo límite trizonal: $x_{ini} = (5.2447, 11.82, 5.2447, 11.82, -0.1167, 0.04169)^T$.

Aunque por las condiciones iniciales parece un ciclo límite trizonal simétrico se puede observar en las figuras Fig. 6.11 y Fig. 6.12 que el **ciclo límite trizonal** continuado es **no simétrico**. En la Fig. 6.11 se representa la **evolución de las componentes del vector de estado frente a γ** .

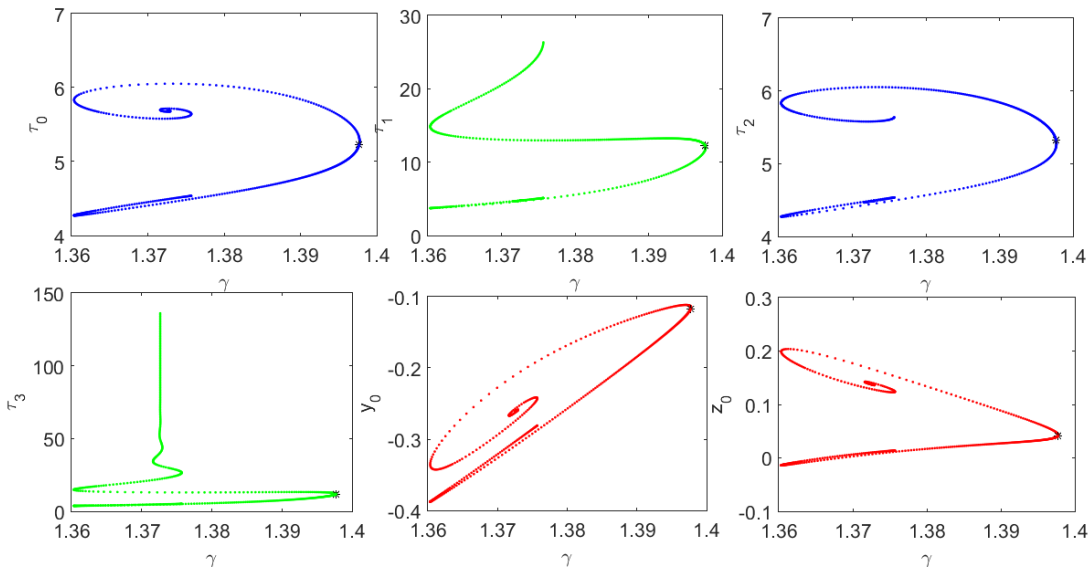


Fig. 6.11 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite

En la Fig. 6.12 se representa el **ciclo límite** obtenido por continuación numérica con $\gamma = 1.0294$ para el vector de estado $x = (2.2831, 0.9162, 2.2831, 0.9162, -2.0719, 0.0464)^T$. Como antes, se puede observar en dicha gráfica la simetría del ciclo límite.

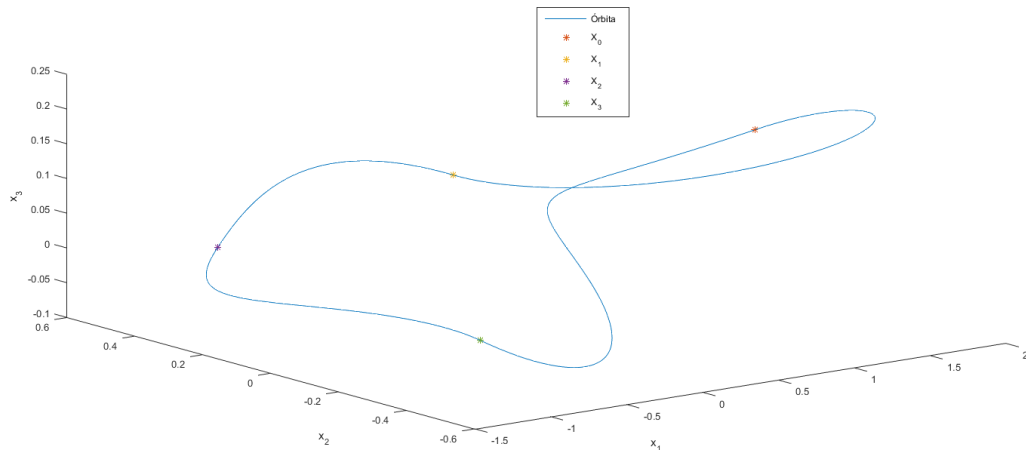


Fig. 6.12 Ciclo límite trizonal no simétrico

De la Fig. 6.11 se puede observar que al continuar el ciclo límite el tiempo de vuelo en la zona central τ_3 tiende a infinito mientras que τ_0, y_0, z_0 tienden a permanecer constante, lo cual corresponde a una **órbita homoclínica de 3 zonas no simétrica**. Así, si se sigue la continuación del ciclo límite y se representa el ciclo límite para para los valores $\gamma = 1.372639$ y $x = (5.683996, 4.76456, 4.483669, 74.085397, -0.260678, 0.137565)^T$ se obtiene una aproximación de la órbita homoclínica tipo Shilnikov representada en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

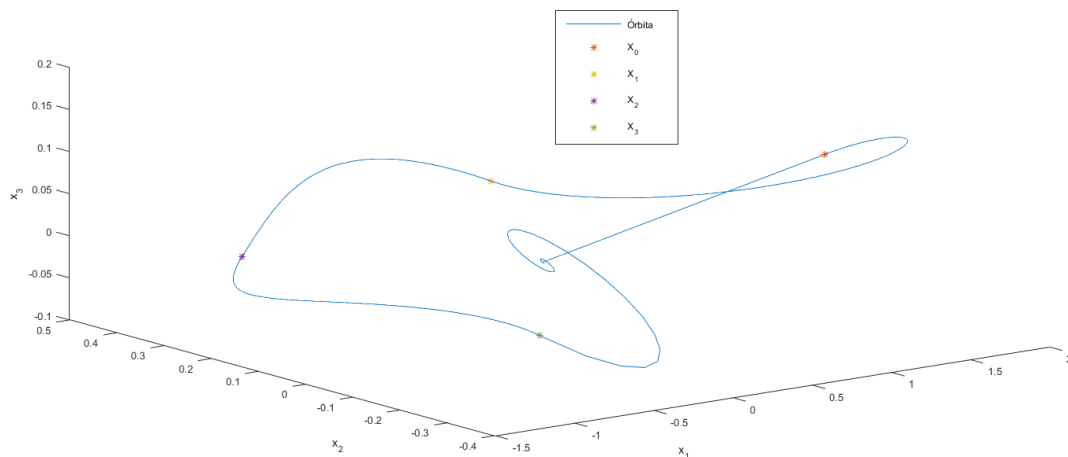


Fig. 6.13 Aproximación órbita homoclínica tipo Shilnikov

Mediante la continuación del ciclo límite se detectan las siguientes **bifurcaciones** cerca del Triple Zero del Origen:

- Una bifurcación **Period-doubling** detectada para los valores $\gamma = 1.39772$, $x = (5.23719, 12.1854, 5.315229, 11.73628, -0.117031, 0.04126652)^T$. Cuando es detectada la bifurcación, se inicia la continuación de la bifurcación tomando como vector de estado inicial $y = (x, \gamma)^T$. La curva de bifurcación está representada en la Fig. 6.17 junto al resto de bifurcaciones halladas. En la Fig. 6.14 se representa la evolución del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Flip.

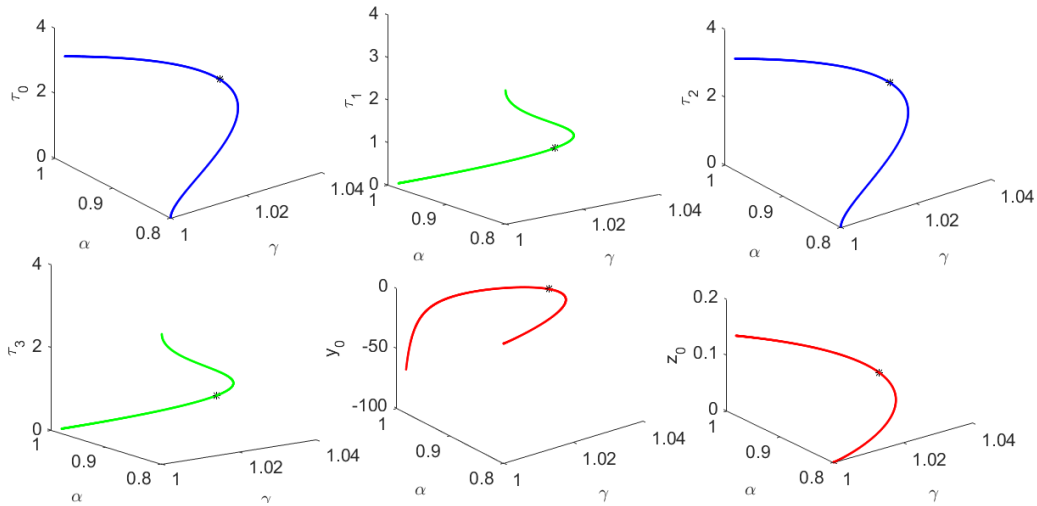


Fig. 6.14 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Flip

- Una **bifurcación Silla-Nodo** para los valores $\gamma = 1.360343$ y $x = (5.82347, 3.727807, 4.273405, 14.95034, -0.3370324, 0.1975732)^T$. En la Fig. 6.15 se representa la evolución del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación.

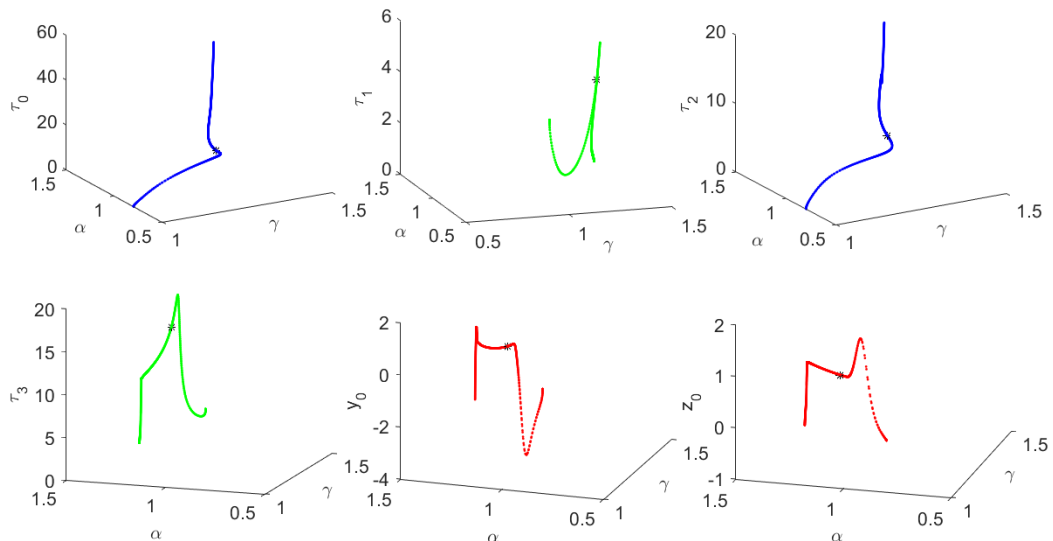


Fig. 6.15 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Silla-Nodo

- Una **bifurcación Toro** para los valores $\gamma = 1.360333$ y $x = (4.271359, 14.79579, 5.837932, 3.724721, -0.3879873, -0.01388255)^T$. En la Fig. 6.16 se representa la evolución del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación.

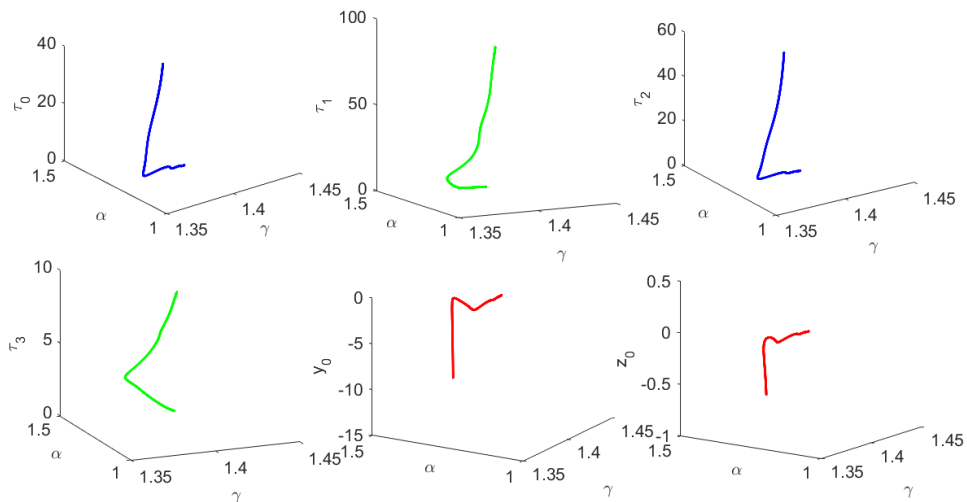


Fig. 6.16 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Toro

Por último, en las Fig. 6.17 y Fig. 6.18 se representa el **diagrama de bifurcación** con las curvas de bifurcación y las **curvas de bifurcación** respectivamente.

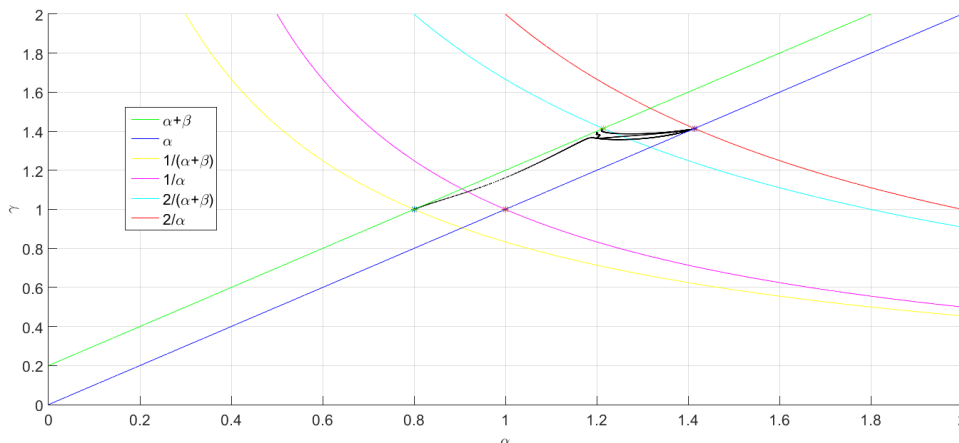


Fig. 6.17 Diagrama de bifurcación con las tres bifurcaciones detectadas

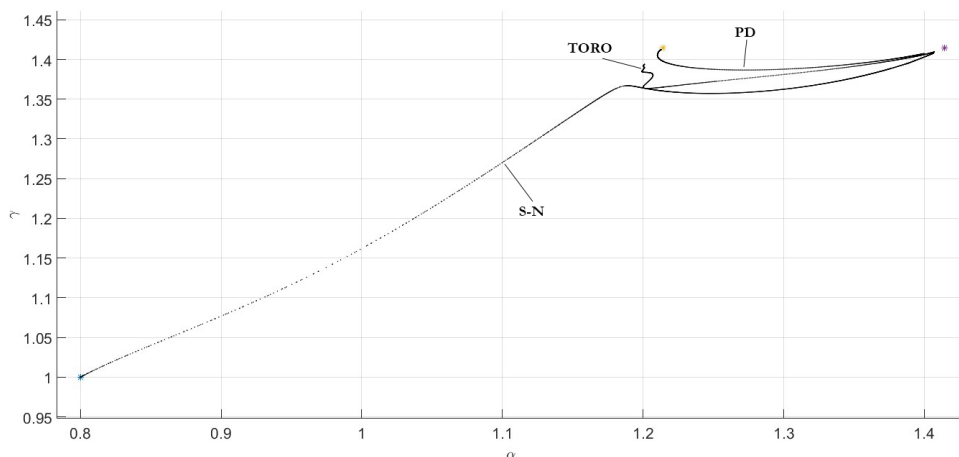


Fig. 6.18 Curvas de bifurcaciones detectadas

En las curvas de bifurcaciones se puede observar como aparecen oscilaciones en la **bifurcación toro**. Dichas oscilaciones como se ha comentado anteriormente están asociadas a órbitas homoclínicas. Así, si se representa un ciclo límite de la continuación de la curva de bifurcación toro en esta zona donde existen oscilaciones se puede ver una aproximación de la **órbita homoclínica**. Así, para los valores $\gamma = 1.393261$, $\alpha = 1.200624$,

$x = (3.262935, 85.36425, 4.566873, 9.570005, -0.101911, 0.011663)$ se obtiene la aproximación de órbita homoclínica representada en la Fig. 6.19

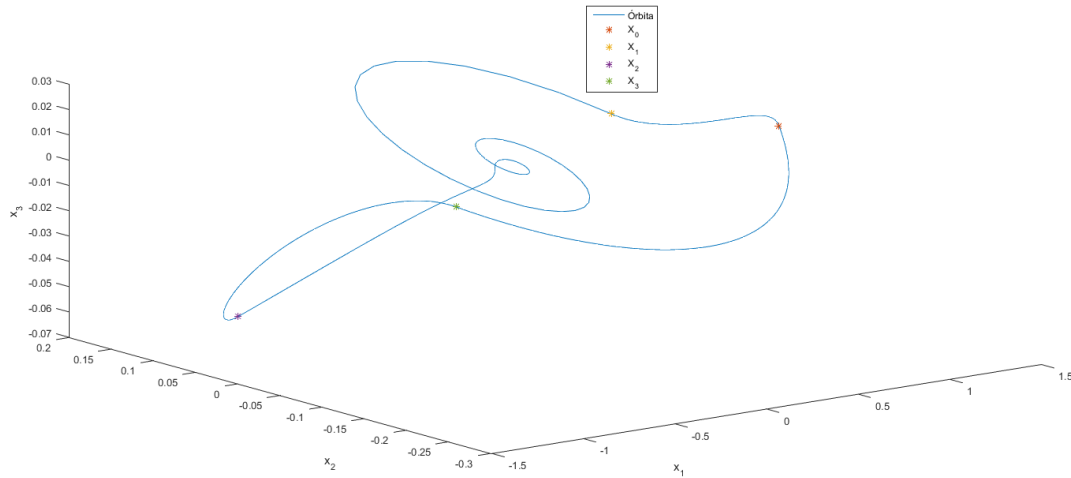


Fig. 6.19 Aproximación de la órbita homoclínica en la continuación de la curva de bifurcación toro

6.4 Caso 4

Se realiza ahora la continuación de **ciclos límites bizonales**. Para ello se toma los siguientes valores de los parámetros: $\alpha = 0.9$ y $\gamma = 1.0445$. En este caso estamos en la misma línea vertical de la curva gamma-alpha que en los casos 1 y 2 ($\alpha = 0.9$) con la diferencia de que ahora se continúa un ciclo límite bizonal. Para estos valores de los parámetros del circuito se conoce la siguiente estimación de la solución inicial para un ciclo límite bizonal: $x_{ini} = (3.1473, 3.286, -0.8652, 0.9345)^T$.

En la Fig. 6.20 se representa la **evolución de las componentes del vector de estado frente a γ** . En dichas gráficas se puede observar la existencia de un pliegue que corresponde a una **bifurcación Silla-Nodo** en ciclos límites bizonales

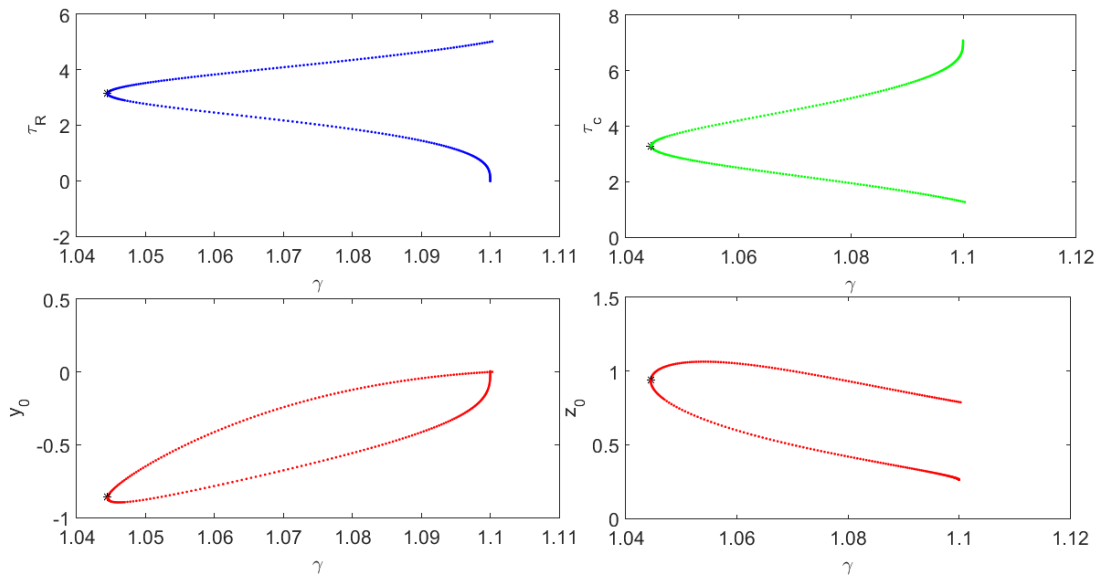


Fig. 6.20 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite

En la Fig. 6.21. se representa el **ciclo límite** obtenido por continuación numérica con $\gamma = 1.0791$ para el vector de estado $x = (4.3285, 1.9734, -0.1319, 0.9386)^T$. Se puede observar que dicho ciclo límite no atraviesa el

plano $x_1 = -1$ por lo que es un ciclo límite bizonal. Se puede observar también que el tiempo de vuelo en la zona derecha es aproximadamente el doble que en la zona central.

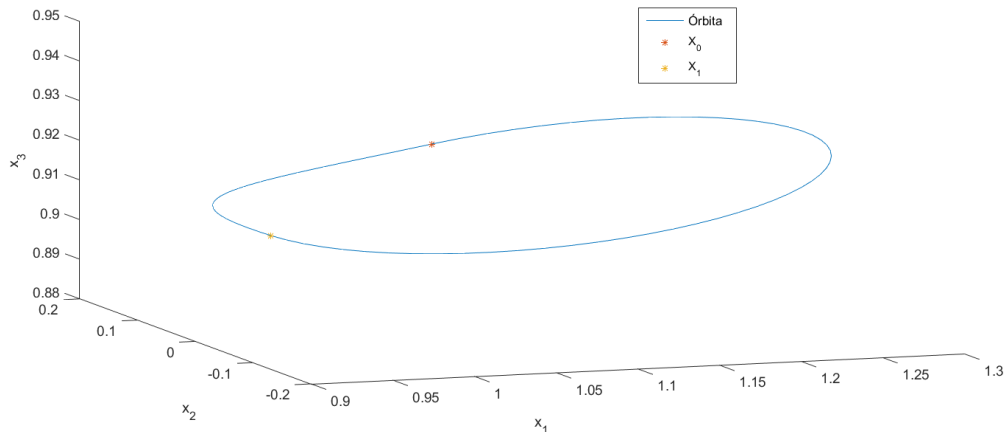


Fig. 6.21 Ciclo límite bizonal

Mediante la continuación del ciclo límite bizonal se detecta una **bifurcación Silla-Nodo** en el pliegue de la Fig. 6.20 para los valores $\gamma = 1.044492$, $x = (3.134447, 3.302057, -0.8691414, 0.9283435)^T$. En las Fig. 6.22 y Fig. 6.23 se representa la **curva de bifurcación** continuada y el **diagrama de bifurcación** con la curva de bifurcación. Se puede observar que la curva de bifurcación parte de los mismos puntos singulares que en los casos 1 y 2.

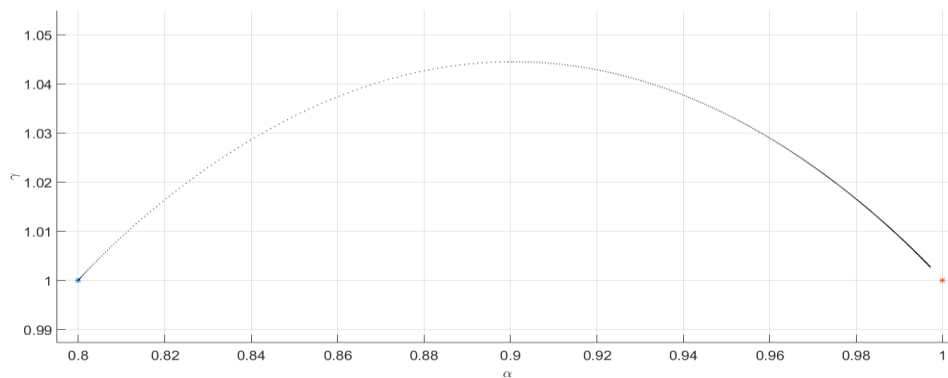


Fig. 6.22 Curva de bifurcación Silla-Nodo

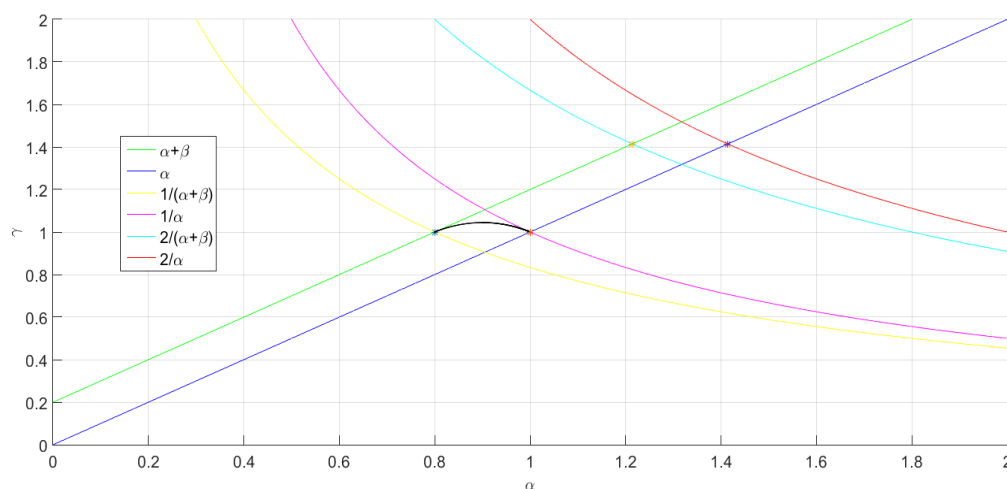


Fig. 6.23 Diagrama de bifurcación con curva de bifurcación Silla-Nodo

Por último, en la Fig. 6.24 se representa la **evolución del vector de estado frente a γ y α** en la continuación de la curva de bifurcación.

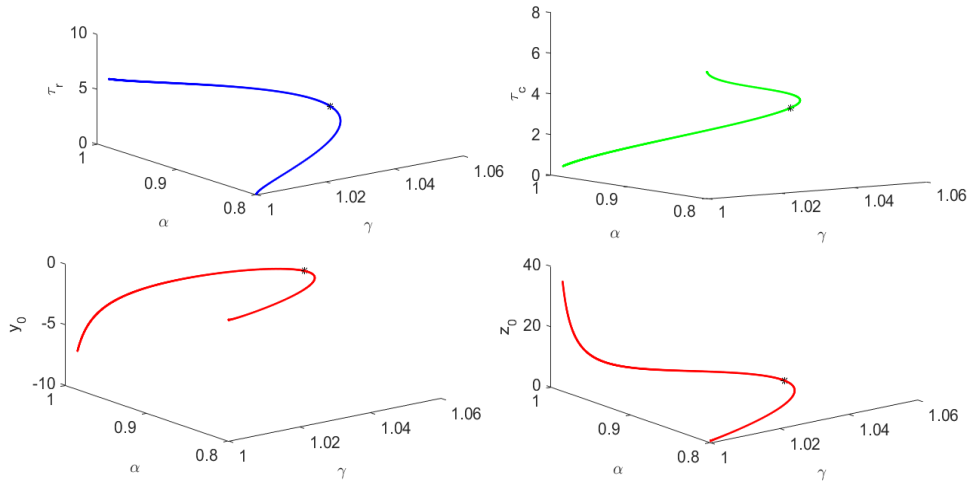


Fig. 6.24 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Silla-Nodo

6.5 Caso 5

Se realiza ahora la continuación de ciclos límites con $\alpha = 1.2$ y $\gamma = 1.399$. Para estos parámetros del circuito se conoce la siguiente estimación de la solución inicial para un **ciclo límite bizonal**: $x_{ini} = (2.086058, 28.858, -0.03265, 0.01579)^T$.

En la Fig. 6.25 se representa **la evolución de las componentes del vector de estado frente a γ** .

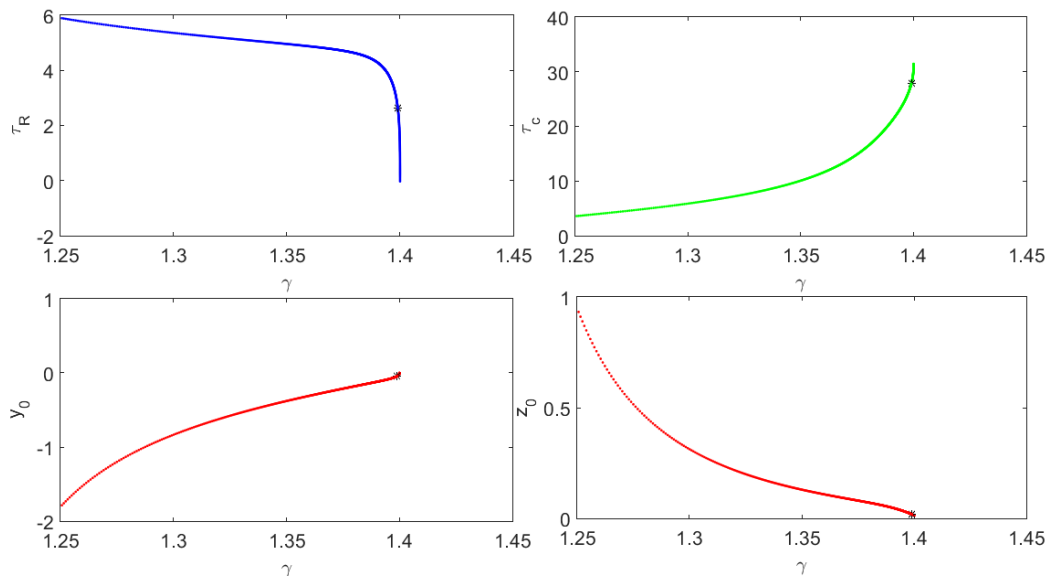


Fig. 6.25 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite

A partir de las condiciones iniciales comentadas se continúa un ciclo límite bizonal como se puede observar en la Fig. 6.26. En dicha gráfica se representa el **ciclo límite** obtenido por continuación numérica con $\gamma = 1.3995$ para el vector de estado $x = (2.2068, 28.6443, -0.0351, 0.0163)^T$. Se puede observar en dicha gráfica como el tiempo de vuelo en la zona central es considerablemente mayor que en la zona derecha.

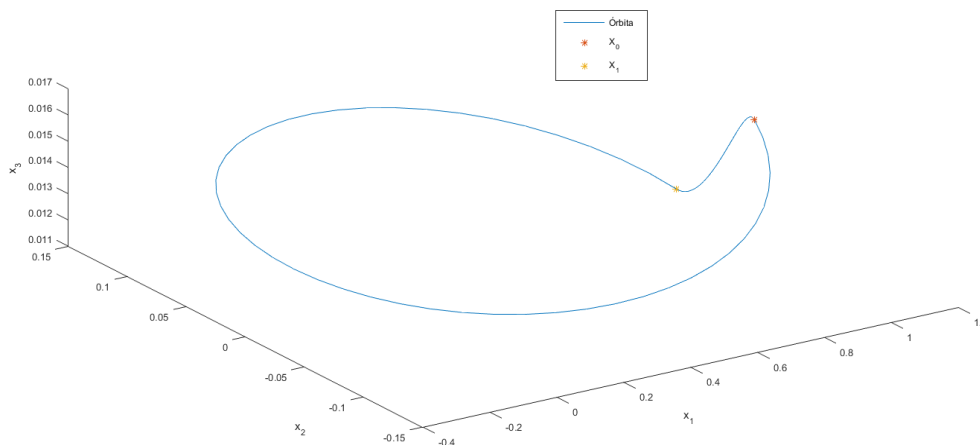


Fig. 6.26 Ciclo límite bizonal

A través de la continuación del ciclo límite se detecta una **bifurcación Flip**. Dicha bifurcación es detectada para los valores $\gamma = 1.399552$, $x = (2.083966, 28.86199, -0.03261005, 0.0157851)^T$. En las Fig. 6.27 y Fig. 6.28 se representa la **curva de bifurcación** y el **diagrama de bifurcación** con la curva de bifurcación respectivamente. Se puede observar que la curva de bifurcación parte de los puntos Triple Zero y Triple Zero de los equilibrios no triviales.

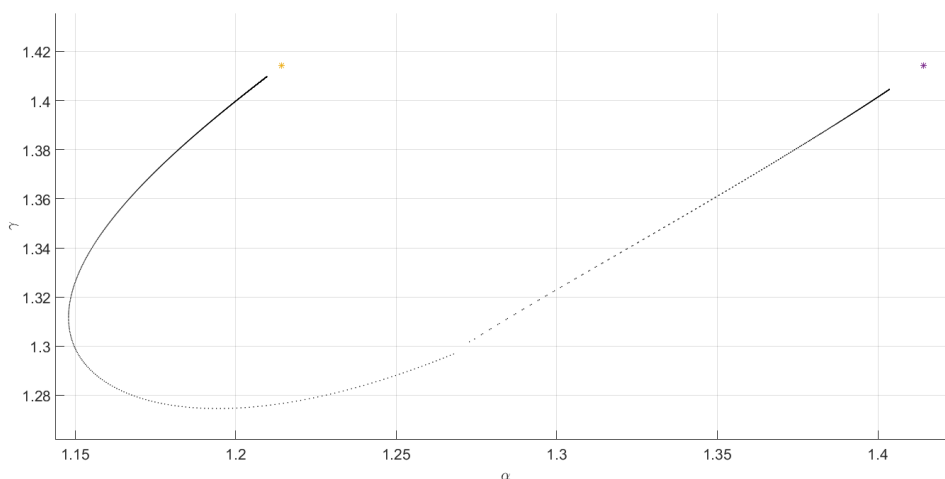


Fig. 6.27 Curva de bifurcación Flip

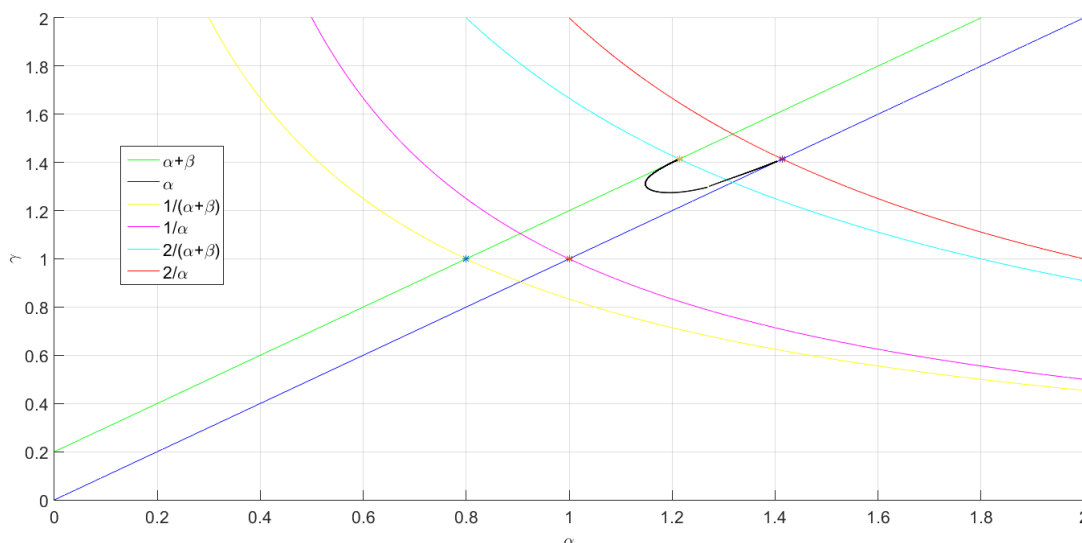


Fig. 6.28 Diagrama de bifurcación con curva de bifurcación Flip

Durante la continuación de la curva de bifurcación, **el ciclo límite de 2 zonas pasa a ser un ciclo límite de 3 zonas**. Para poder continuar el ciclo límite al pasar de 2 a 3 zonas se debe eliminar la rama espurea que aparece al ser el tiempo de vuelo 0 en la zona L en dicho instante, para lo cual se usan las ecuaciones comentadas en **ANEXO A: Eliminación Rama Espurea Ciclos Límites Trizonales No Simétricos**.

Así pues, en las Fig. 6.29 y Fig. 6.30 se representa el ciclo límite justo antes y después de pasar de 2 a 3 zonas. El ciclo límite de **2 zonas** se ha representado en la Fig. 6.29 con $\gamma = 1.2929$, $\alpha = 1.2602$ y $x = (7.4013, 3.5397, -2.0932, 1.0864)^T$, mientras que el de **3 zonas** representado en la Fig. 6.30 corresponde a $\gamma = 1.3128$, $\alpha = 1.2867$ y $x = (8.3471, 1.4955, 0.6480, 1.4415, -2.2254, 1.1339)^T$. Se puede observar en las plantas de los ciclos límites como el ciclo límite continuado pasa de ser bizonal a trizonal.

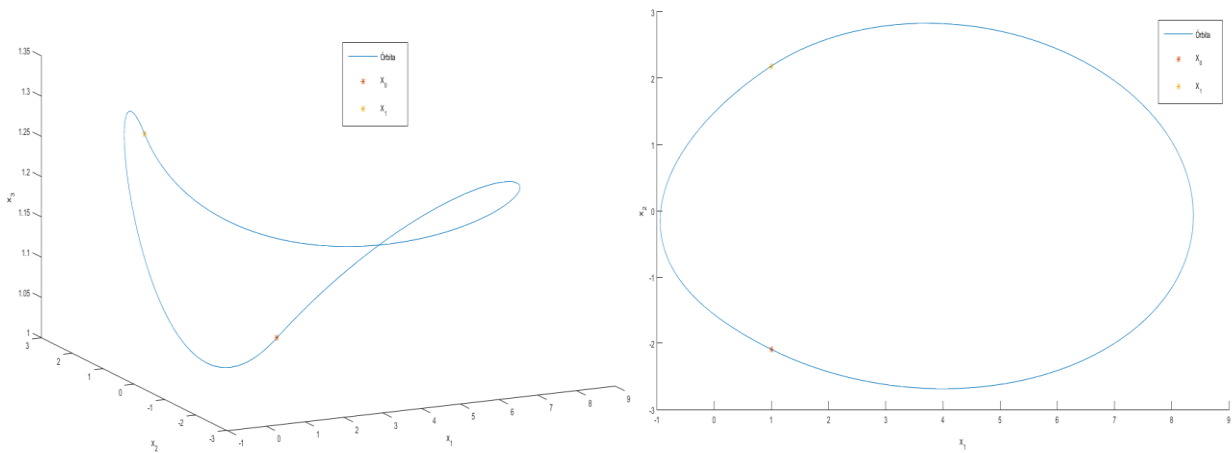


Fig. 6.29 Ciclo límite de 2 zonas y planta del ciclo límite

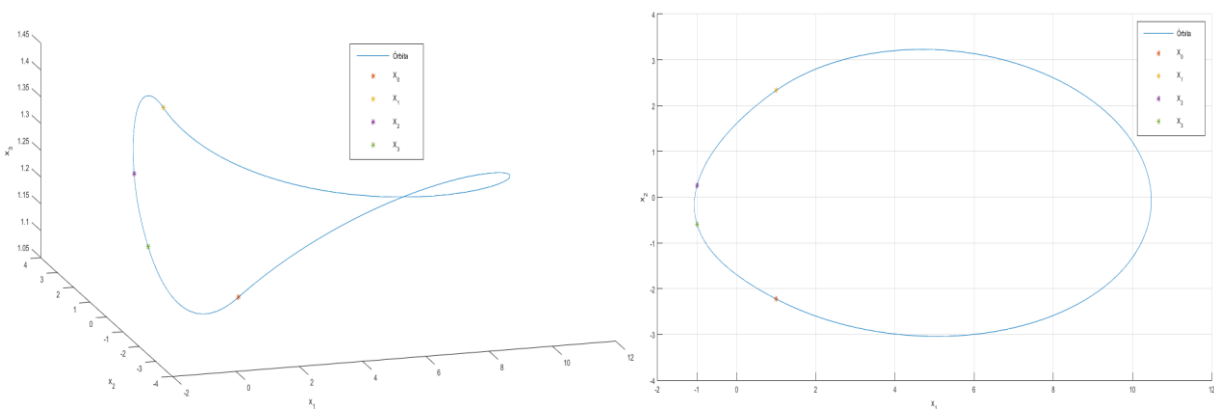


Fig. 6.30 Ciclo límite de 3 zonas no simétrico y planta del ciclo límite

Por último, en las Fig. 6.31 y Fig. 6.32 se representa la **evolución de los vectores de estado frente a γ y α** en la continuación de la curva de bifurcación para los ciclos límites de 2 zonas y 3 zonas respectivamente.

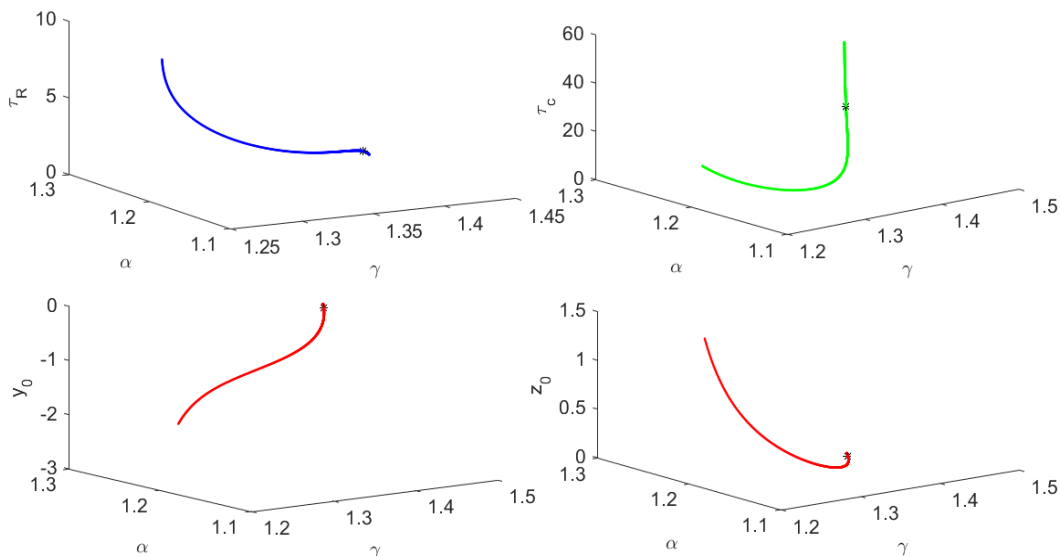


Fig. 6.31 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Flip para ciclos límites bizonales

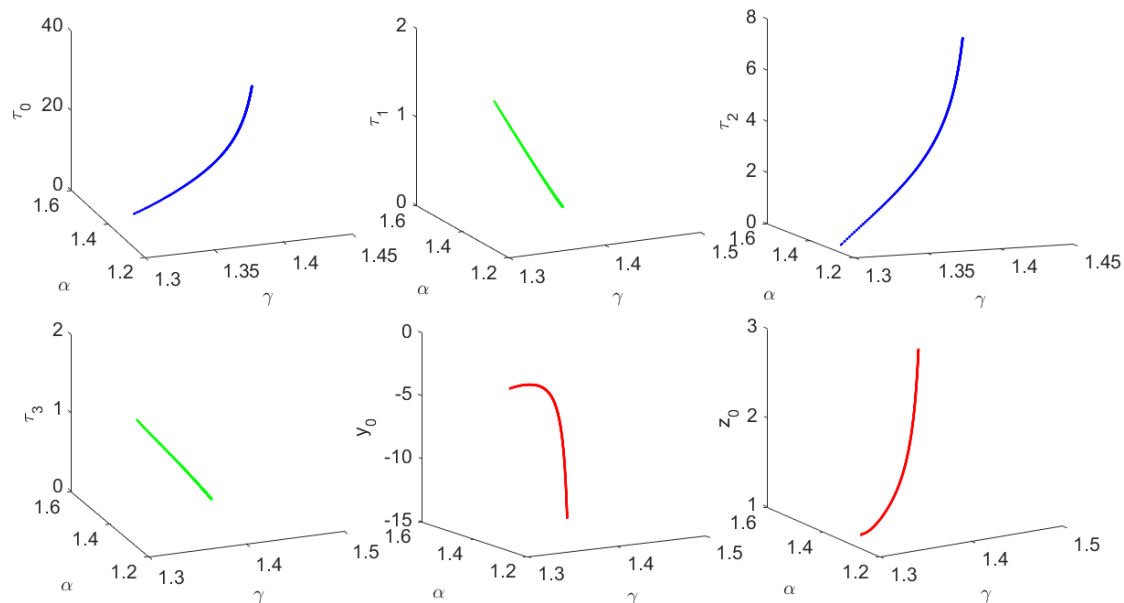


Fig. 6.32 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Flip para ciclos límites trizonales

6.6 Caso 6

Por último, se realiza la continuación de ciclos límites con $\alpha=1.1$ y $\gamma=1.2$. Para estos valores de los parámetros del circuito se realiza la continuación de **ciclos límites bizonales** conocida la estimación de la solución inicial $x_{ini} = (4.127, 4.255, -1.144, 4.127)^T$.

En la Fig. 6.33 se representa la evolución de las componentes del vector de estado frente a γ .

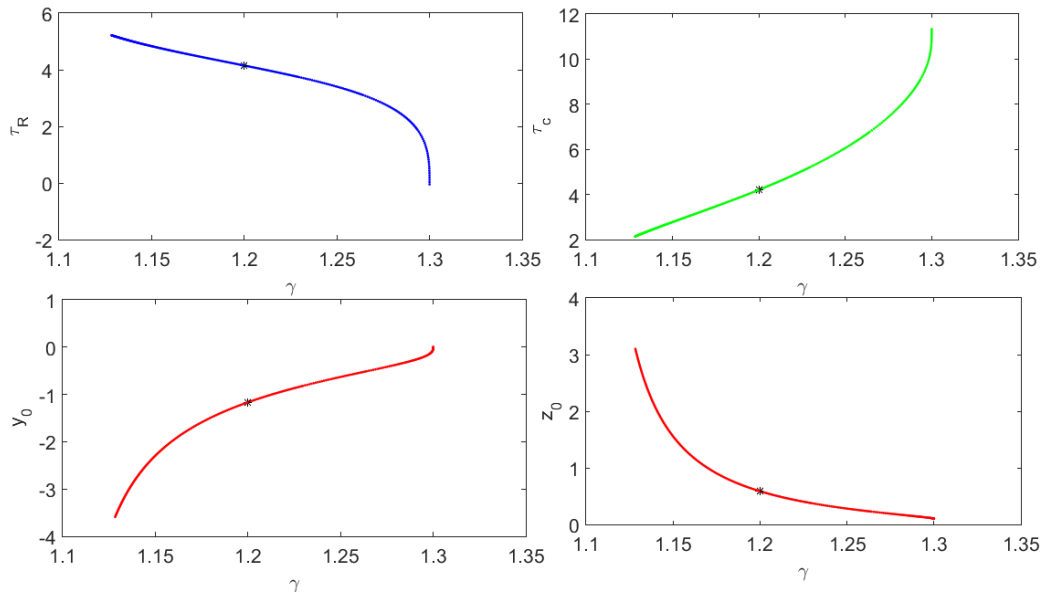


Fig. 6.33 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ en la continuación del ciclo límite

En la Fig. 6.34. se representa el **ciclo límite** obtenido por continuación numérica con $\gamma = 1.2799$ para el vector de estado $x = (2.6392, 7.7883, -0.3733, 0.1743)^T$. Como antes, se puede observar en dicha gráfica la simetría del ciclo límite.

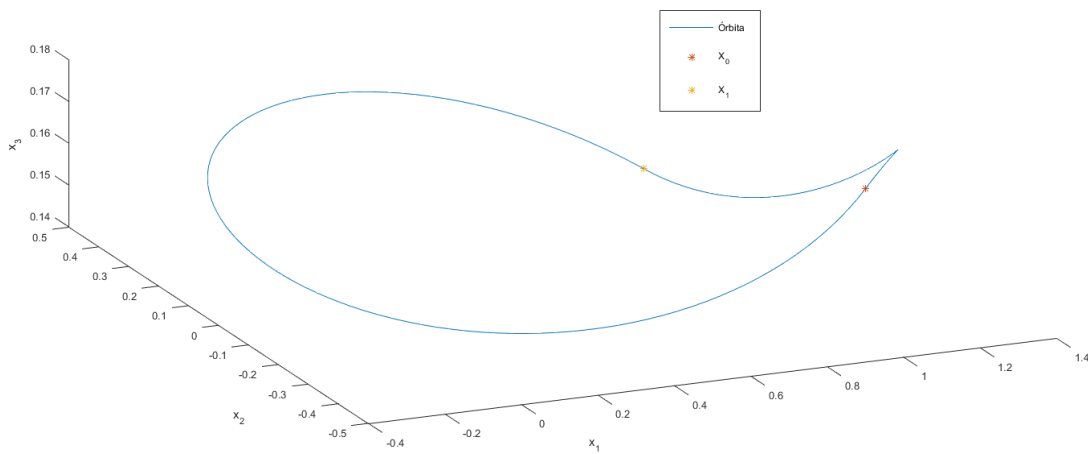


Fig. 6.34 Ciclo límite bizonal

A través de la continuación del ciclo límite se detecta una **bifurcación Toro** para los valores $\gamma = 1.202161$, $x = (4.121062, 4.271617, -1.137042, 0.5669572)^T$. A continuación, se realiza la continuación de la bifurcación tomando como vector de estado inicial $y = (x, \gamma)^T$. En las Fig. 6.35 y Fig. 6.36 se representa la **curva de la bifurcación** y el **diagrama de bifurcación** con la curva de bifurcación. Así se ve que esta bifurcación va desde el punto Triple Zero del origen hasta el punto de corte entre la bifurcación Hopf del infinito y la Hopf Zero del infinito

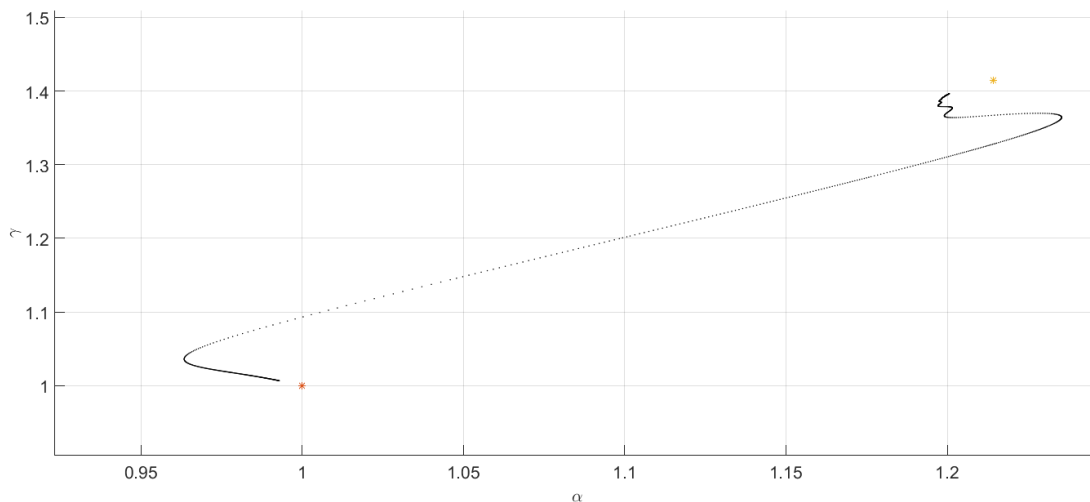


Fig. 6.35 Curva de bifurcación Toro

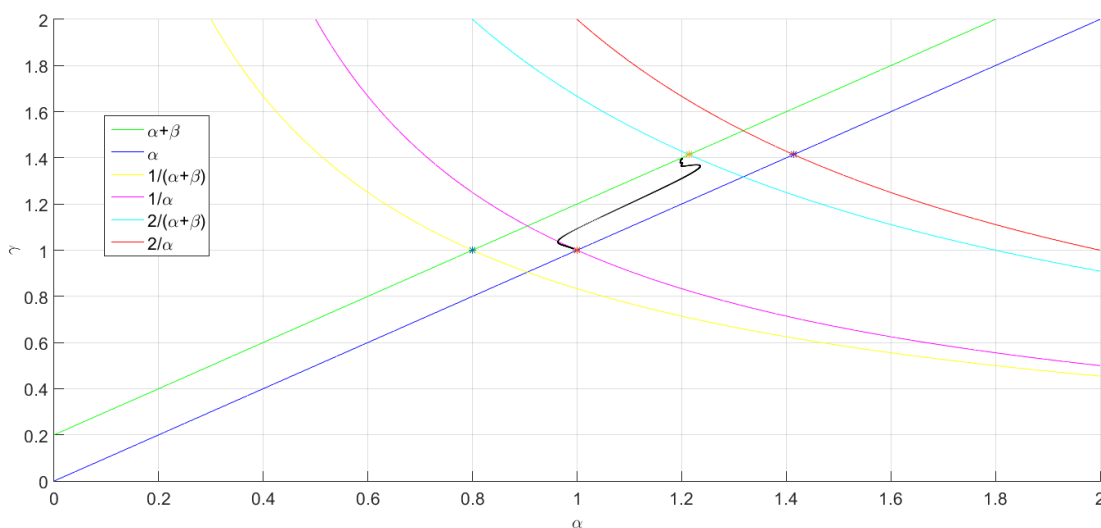


Fig. 6.36 Diagrama de bifurcación con curva de bifurcación Toro

En la Fig. 6.37 se representa la **evolución del vector de estado frente a γ y α** en la continuación de la curva de bifurcación. Se puede observar que el tiempo de vuelo en la zona central tiende a infinito lo cual está asociado a órbitas homoclinicas.

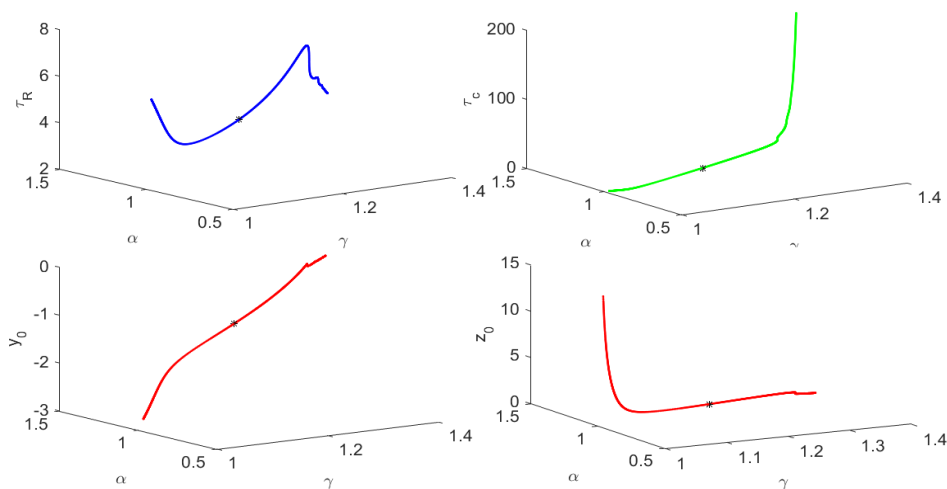


Fig. 6.37 Evolución de las componentes del vector de estado frente a γ y α en la continuación de la curva de bifurcación Silla-Nodo

Se puede observar tanto en la Fig. 6.35 como en la Fig. 6.37 la aparición de “oscilaciones” en la zona más cercana al punto Triple-Zero del origen. Esto se debe a que dicha región es problemática en el sentido de que hay muchas bifurcaciones cercanas.

Así, en las Fig. 6.38 y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se representan ciclos límites en esta zona. En la Fig. 6.38 se representa el ciclo límite obtenido por continuación numérica con $\gamma = 1.3944$ y $\alpha = 1.1988$ para el vector de estado $x = (4.54894, 160.6569, -0.0901, 0.0568)^T$. Se puede observar que estamos ante **una aproximación de la órbita homoclínica de dos zonas.**

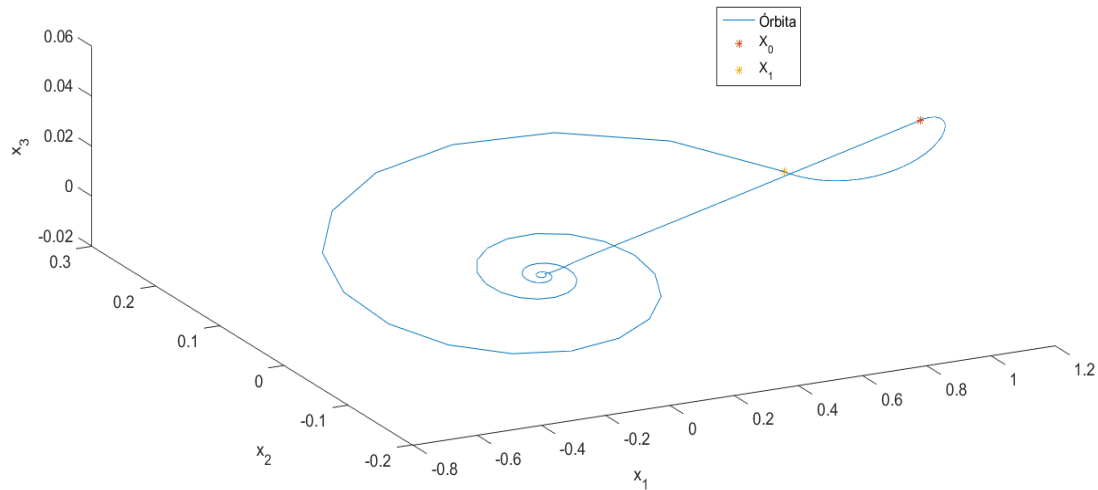


Fig. 6.38 Aproximación de la órbita homoclínica

7 CONCLUSIONES Y FUTURAS MEJORAS

7.1 Conclusiones

Como indicamos al comienzo, en este Trabajo Fin de Grado se pretendía la programación en Matlab de la continuación numérica de ciclos límites y de bifurcaciones, con el objetivo de obtener las curvas de bifurcaciones asociadas a un sistema lineal a trozo concreto, en este caso, el sistema asociado al oscilador electrónico de Bonhoeffer-Van der Pol.

De acuerdo a lo visto en el capítulo 6 hemos cumplido los objetivos marcados y hemos comprobado el correcto funcionamiento de las funciones programadas en Matlab para todos los casos posibles (ciclos límites bizonales, trizonales, bifurcaciones toro, Silla-Nodo, ...).

En función de los resultados obtenidos, a priori, este proyecto ha supuesto una mejora respecto al programa empleado por Luis Gómez de la Herrán Ramírez para la continuación numérica en [2]. Entre las mejoras introducidas, cabe destacar la continuación de ciclos límites trizonales no simétricos, la continuación de ciclos límites trizonales a partir de bizonales, o la detección de un mayor número de bifurcaciones.

Así pues, en base a estos resultados, este proyecto puede ser un buen punto de partida para la continuación numérica de sistemas lineales a trozos en un futuro.

7.2 Trabajo futuro

Como se ha comentado, en este Trabajo Fin de Grado se han cumplido los objetivos que se habían marcado en un principio, sin embargo, pueden realizarse aún más simulaciones con el código programado, o, incluso, pueden añadirse interesantes mejoras al software de forma que lo haga más versátil y útil aún.

En primer lugar, hay que tener en cuenta que en este Trabajo Fin de Grado se ha comprobado el funcionamiento de los códigos programados para el sistema proporcionado por el oscilador electrónico de Bonhoeffer-Van der Pol. Para otro sistema lineal a trozos simplemente habría que modificar `ecucierre.m`. Así pues, sería interesante que en el futuro se aplicaran las funciones programadas a otro sistema distinto del estudiado aquí, realizando para ello las modificaciones necesarias.

Por otro lado, durante la programación de las funciones en Matlab siempre se ha buscado optimizar el coste computacional, sin embargo, se ha observado que aún así, las simulaciones en general son pesadas y costosas computacionalmente. En esta línea, sería interesante, si fuera posible, reducir el coste computacional de estas funciones.

Otra mejora muy interesante es la implementación de una interfaz GUI de Matlab que permita interactuar al usuario con el programa para seleccionar las condiciones iniciales, así como el valor de otras variables como pueden ser `pasocont`, `contmax`, `pasomax`, ... Sería interesante también que se pudiera visualizar o seleccionar las gráficas a devolver dentro de la propia interfaz, así como botones que permitieran detener o reanudar la continuación en cualquier instante. En la Fig. 7.1 se muestra un ejemplo del potencial de una interfaz GUI de Matlab.

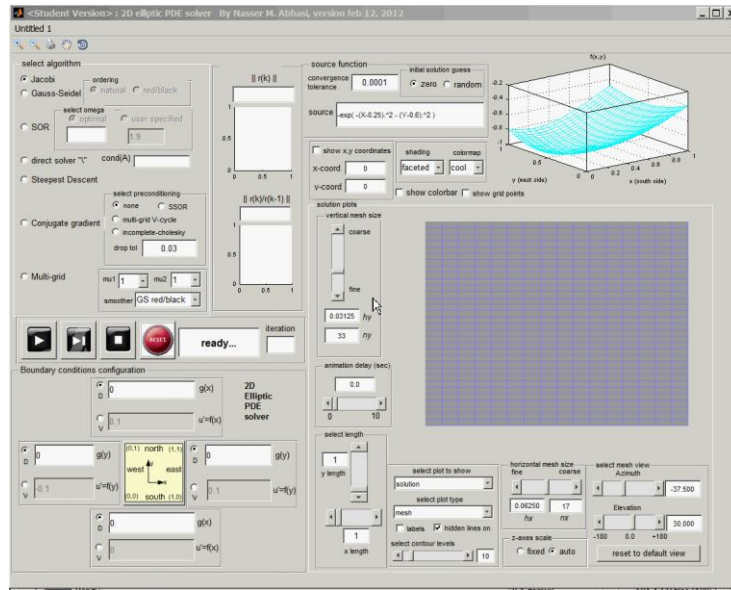


Fig. 7.1 Ejemplo interfaz GUI Matlab

Finalmente, como se ha comentado en el apartado 4.2, para iniciar la continuación de ciclos límites dado una terna de valores α, β, γ , es necesario conocer una estimación de la solución inicial, por lo que si no se conocen estos parámetros no es posible realizar la continuación. De esta forma, sería interesante realizar una función que dados unos valores de α, β, γ , nos dé una estimación de la solución inicial del sistema con la cual iniciar la continuación del ciclo límite.

ANEXO A: ELIMINACIÓN RAMA ESPUREA CICLOS LÍMITES TRIZONALES NO SIMÉTRICOS

Mediante la continuación numérica nos podemos encontrar casos en los que los tiempos de vuelos en las zonas externas sean prácticamente 0. Un claro ejemplo de esto es el caso de la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite, donde para el valor crítico de la bifurcación hay un centro en la zona central; de las infinitas órbitas periódicas del centro la órbita más externa es tangente a los planos $x_1 = 1$, $x_1 = -1$, y al variar el parámetro de bifurcación aparece un ciclo límite simétrico de 3 zonas en el cuál τ_0 y τ_2 son prácticamente nulos.

En las continuaciones realizadas hasta la actualidad de ciclos límites trizionales simétricos o bizonales generadas en la bifurcación Foco-Centro-Ciclo límite, el problema de la rama espurea se ha solucionado utilizando las series teóricas conocidas para obtener condiciones iniciales de continuación suficientemente lejos de la rama espurea (ver [3] y [4]). Sin embargo, en el caso de ciclos límites trizionales no simétricos la ausencia de resultados teóricos obliga a utilizar un método alternativo para eliminar la rama espurea de soluciones.

Si estamos en el caso de ciclos límites trizionales no simétricos podemos comprobar fácilmente que la primera ecuación de los sistemas de ecuaciones (3.18) y (3.20) se cumplen automáticamente para $\tau_0 = 0$ y $\tau_2 = 0$ respectivamente.

De (3.18) si $\tau_0 = 0$ tenemos:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \exp(A_R \tau_0)(X_o - \bar{X}_R) + \bar{X}_R = \exp(0)(X_o - \bar{X}_R) + \bar{X}_R = X_o = \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

De (3.20) si $\tau_2 = 0$ se cumple:

$$X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \exp(A_R \tau_2)(X_2 + \bar{X}_R) - \bar{X}_R = \exp(0)(X_2 + \bar{X}_R) - \bar{X}_R = X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que la primera componente de ambas ecuaciones se cumple automáticamente independientemente del valor del resto de las variables de estado. Esto implica que existen factores τ_0 y τ_2 multiplicando a las ecuaciones de (3.18) y (3.20) respectivamente y, por tanto, la existencia de una rama espurea de soluciones para $\tau_0 = 0$ y $\tau_2 = 0$ que, aunque son matemáticamente soluciones de las ecuaciones de cierre, no corresponden a ningún ciclo límite del sistema dinámico. La aparición de esta rama espurea de soluciones produce la anulación del determinante del Jacobiano y, por tanto, el incumplimiento del Teorema de la Función Implícita.

Así pues, si $\tau_0 = 0$ o $\tau_2 = 0$, junto a la rama de soluciones correspondiente a los ciclos límites trizionales no simétricos nos aparece una rama espurea de soluciones de las ecuaciones de cierre que no corresponde con ciclos límites del sistema dinámico original, que debemos eliminar para poder hacer la continuación de forma apropiada. Así, para continuar la rama de soluciones deseada y no la espurea procedemos de la siguiente forma:

- 1) Sea la ecuación (3.18), multiplicamos dicha ecuación por el vector e_1^T , a continuación, sumamos y restamos la matriz $X_o - \bar{X}_R$, y tenemos en cuenta que $e_1^T (X_o - X_1) = 0$, de forma que nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
e_1^T (\exp(A_R \tau_0)(X_o - \bar{X}_R) + \bar{X}_R - X_1) &= 0 \\
e_1^T ((\exp(A_R \tau_0) - I)(X_o - \bar{X}_R) - \bar{X}_R + X_o + \bar{X}_R - X_1) &= 0 \\
e_1^T ((\exp(A_R \tau_0) - I)(X_o - \bar{X}_R)) + e_1^T (X_o - X_1) &= 0 \\
e_1^T ((\exp(A_R \tau_0) - I)(X_o - \bar{X}_R)) &= 0
\end{aligned}$$

Finalmente, una vez que tenemos aislado el factor τ_0 en $(\exp(A_R \tau_0) - I)$ lo eliminamos dividiendo por dicho factor y por último desarrollamos en serie con n términos y τ_0 suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned}
e_1^T \left(\frac{(\exp(A_R \tau_0) - I)}{\tau_0} (X_o - \bar{X}_R) \right) &= e_1^T \left(\frac{(I + A_R \tau_0 + \frac{A_R^2 \tau_0^2}{2!} + \dots + \frac{A_R^{n+1} \tau_0^{n+1}}{n+1!} - I)}{\tau_0} (X_o - \bar{X}_R) \right) = 0 \\
e_1^T \left(A_R + \frac{A_R^2 \tau_0}{2!} + \dots + \frac{A_R^{n+1} \tau_0^n}{n+1!} \right) (X_o - \bar{X}_R) &= 0 \quad (7.1)
\end{aligned}$$

Así pues, en la ecuación (7.1) hemos eliminado el factor τ_0 y, por tanto, la solución espurea, sin tocar la solución deseada. Al obtenerse a través de un desarrollo en serie con $\tau_0 \approx 0$ esta ecuación solo es válida para τ_0 suficientemente pequeño. De esta forma, esta ecuación sustituye a la ecuación (3.25) cuando el tiempo de vuelo en la zona derecha es muy pequeño (en este trabajo hemos tomado $\tau_0 < 0.1$), para así evitar que continuemos una solución espurea, en caso contrario, se usará dicha ecuación.

- 2) Sea la ecuación (3.20), multiplicamos dicha ecuación por el vector e_1^T , a continuación, sumamos y restamos la matriz $X_2 + \bar{X}_R$, tenemos en cuenta que $e_1^T (X_2 - X_3) = 0$, y, finalmente ponemos X_2 en función de X_o y τ_0 , nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
e_1^T (\exp(A_R \tau_2)(X_2 + \bar{X}_R) - \bar{X}_R - X_3) &= 0 \\
e_1^T ((\exp(A_R \tau_2) - I)(X_2 + \bar{X}_R) + \bar{X}_R + X_2 - \bar{X}_R - X_3) &= 0 \\
e_1^T ((\exp(A_R \tau_2) - I)(X_2 + \bar{X}_R)) + e_1^T (X_2 - X_3) &= 0 \\
e_1^T ((\exp(A_R \tau_2) - I)(X_2 + \bar{X}_R)) &= 0 \\
e_1^T ((\exp(A_R \tau_2) - I)(\exp(A_c \tau_1)X_1 + X_R)) &= 0 \\
e_1^T ((\exp(A_R \tau_2) - I)(\exp(A_c \tau_1)(\exp(A_R \tau_0)(X_o - X_R) + X_R))) &= 0
\end{aligned}$$

Una vez que tenemos aislado el factor τ_2 en $(\exp(A_R \tau_2) - I)$ lo eliminamos dividiendo por dicho factor y por último desarrollamos en serie con n términos y τ_2 suficientemente pequeño, de forma que análogamente al caso anterior nos queda:

$$e_1^T \left(A_R + \frac{A_R^2 \tau_2}{2!} + \dots + \frac{A_R^{n+1} \tau_2^n}{n+1!} \right) (\exp(A_c \tau_1)(\exp(A_R \tau_0)(X_o - X_R) + X_R)) = 0 \quad (7.2)$$

De esta forma, en la ecuación (7.2) hemos eliminado el factor τ_2 y, por tanto, la solución espurea, sin tocar la solución deseada. Como se ha obtenido mediante un desarrollo en serie con $\tau_2 \approx 0$ esta ecuación solo es válida para τ_2 suficientemente pequeño (en este trabajo hemos tomado $\tau_2 < 0.1$).

Así pues, esta ecuación sustituye a la ecuación (3.24) cuando el tiempo de vuelo en la zona izquierda es muy pequeño, en caso contrario, se empleará la citada ecuación.

Finalmente comentar que el resto de ecuaciones necesarias para cerrar el problema son las 3 ecuaciones de (3.22) y la ecuación (3.23), lo cual conforma un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas.


```

    main
end

gamma_alpha(beta); %Dibuja el diagrama gamma-alpha
if length(x_ini)==6 %Halla número de zonas en función del número de
componentes de x_ini
    num_zonas=3;
else
    num_zonas=2;
end

i=4;

pasocont=0.01; contmax=500; %Paso de continuación y número de pasos máximos
a calcular

fprintf('\nContinuación del ciclo límite con paso de continuación
positivo\n\n');
contin_ciclo(x_ini,pasocont,contmax,alpha,gamma1_0) %Continuación con
pasocont>0
pause
pasocont=-0.01;
fprintf('\nContinuación del ciclo límite con paso de continuación
negativo\n\n');
contin_ciclo(x_ini,pasocont,contmax,alpha,gamma1_0) %Continuación con
pasocont<0

```

B.2. contin_ciclo.m

```

function x_1=contin_ciclo(x_ini,pasocont,contmax,alpha,gamma1_0)
%% Función que realiza la continuación del ciclo límite para pasocont y alpha
dada una estimación de la solución inicial y de gamma
%Declaración de variables globales
global num_zonas
global tipo_bif %Indica el tipo de bifurcación: 1 si silla-nodo, 2 si
period doubling, 3 si toro
global flag_bif %1 si continuamos bifurcación, 0 en caso contrario
global flag_keller %1 si estamos dentro del bucle while, 0 si no
global i
global flag_espureas %1 si pasamos de 2 zonas a 3 zonas y tiempos pequeños
global cond_ini

flag_bif=0;
flag_keller=0;
flag_espureas=0;

maxiter=100; TOLr=1e-9; TOLa=1e-10; hdif=1e-6;
pasomin=1e-6; %Paso de continuación mínimo
if cond_ini==5 || cond_ini==6 %Paso de continuación máximo
    pasomax=0.05; %En los casos 5 y 6 pasomax pequeño para que no de
problemas de singularidad el jacobiano
else
    pasomax=1;
end

cont=0; %Iniciamos cont
cada_ini=20; cada=cada_ini; %A cada 20 cont imprimimos en pantalla resultados
y dibujamos ciclos límites

```



```

x_0= newton(TOLr,TOLa,maxiter,x_ini,gamma1_0,alpha); %Hallamos solución
inicial a partir de estimación inicial
x_0(length(x_0)+1)=gamma1_0;

gamma1_01=gamma1_0+hdif; %Variamos gamma ligeramente
x_01=newton(TOLr,TOLa,maxiter,x_0(1:length(x_0)-1),gamma1_01,alpha);
%Hallamos nueva solución para nuevo gamma
x_01(length(x_01)+1)=gamma1_01;
t_0=(x_01-x_0)/hdif; %Cálculo de vector tangente inicial
t_0=t_0/norm(t_0);

flag=1; %1 si todo correcto, 0 si incumple los controles

figure(2),

hold on,
num_zonas_viejo=num_zonas; %Almacenamos el número de zonas por si pasa de 2 a
3 zonas

while cont<contmax && flag==1;
    flag_keller=1;
    cont=cont+1;
    x_predic=x_0+pasocont*t_0; %Hallamos la predicción de la solución

    flag_espureas_viejo=flag_espureas;
    %Hallamos nueva solución y nuevo vector mediante Keller

[x_1,t_1,iter,J,A_r,A_c,X_r,T,elerr]=newton_keller(TOLr,TOLa,maxiter,x_0,x_pr
edic,t_0,pasocont,x_predic(end),alpha);

    if flag_espureas_viejo==1 && (x_1(1)<0.1 || x_1(3)<0.1) %Actualizamos
flag_espureas si es necesario
        flag_espureas=1;
    else
        flag_espureas=0;
    end

    gamma1=x_1(end);

    x_0=x_1;
    t_0=t_1;

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONTROLES %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control del paso %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    if iter < 3 %Aumentamos pasocont para avanzar más
        pasocont=1.5*pasocont;
    end
    if iter > 5 %Disminuimos pasocont para evitar problemas
        pasocont=pasocont/1.5;
    end

    if abs(pasocont) <= pasomin %Comprobamos que pasocont esté en los límites
        pasocont=sign(pasocont)*pasomin;
    end
    if abs(pasocont) >= pasomax
        pasocont=sign(pasocont)*pasomax;
    end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control de los tiempos de vuelo %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if x_1(1)<0
    warning('Los tiempos en la zona derecha deben ser positivos.')
    flag=0;
end
if x_1(2)<0
    warning('Los tiempos en la zona central 1 deben ser positivos.')
    flag=0;
end
if num_zonas==3
    if x_1(3)<0
        warning('Los tiempos en la zona izquierda deben ser positivos.')
        flag=0;
    end
    if x_1(4)<0
        warning('Los tiempos en la zona central 3 deben ser positivos.')
        flag=0;
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control del signo del determinante del Jacobiano %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
signoJacob=sign(det(J));
if cont >=2
    if signoJacob ~= signoJacobaux;
        warning('Ha cambiado el signo del determinante del Jacobiano')
        pause
    end
end
signoJacobaux=signoJacob;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control de sentido recorrido %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if num_zonas==2
    if T-x_1(3)<=0
        warning('El siguiente punto a X0 no está en la zona R')
        flag=0;
    end
else
    if T-x_1(5)<=0
        warning('El siguiente punto a X0 no está en la zona R')
        flag=0;
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control de x mínimo para bizonales %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if num_zonas==2
    X1=expm(A_r*x_1(1))*([1,x_1(3),x_1(4)]'-X_r)+X_r;
    k=1;
    for tau=0:x_1(2)/20:x_1(2)
        x_tau(:,k)=expm(A_c*tau)*(X1); %Muestra de x en la zona central
        if x_tau(1,k)<-1 %Si alguno es menor que -1 hemos pasado a 3
zonas
            warning('Estamos en la zona L, hemos pasado a un ciclo límite
de 3 zonas')
            pause;
            num_zonas=3;
            flag_espureas=1;
            x_0=[x_1(1),tau,0,x_1(2)-tau,x_1(3),x_1(4),x_1(5)]';
%Estimación de la solución inicial al pasar a 3 zonas
            flag_keller=0;
            gamma_01=x_0(7)+hdif;

```

```

        x_01=newton(TOLr,TOLa,maxiter,x_0(1:length(x_0)-
1),gamma_01,alpha); %Hallamos solución inicial a partir de la estimación
        x_01(length(x_01)+1)=gamma_01;
        flag_keller=1;
        t_0=(x_01-x_0)/hdif; %Cálculo del vector tangente inicial
        t_0=t_0/norm(t_0);

        break
    end
    k=k+1;
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control de bifurcación %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if num_zonas==2 %Cálculo matriz monodromía
    M=expm(A_c*x_1(2))*expm(A_r*x_1(1));
end
if num_zonas==3
M=expm(A_c*x_1(4))*expm(A_r*x_1(3))*expm(A_c*x_1(2))*expm(A_r*x_1(1));
end

estado=compruebaautovalores(M); %Comprobación estado estabilidad

if cont==1
    estado_viejo=estado;
end
if estado~=estado_viejo && flag~=0 %Condición existencia bifurcación

    tipo_bif=tipo_bifurcacion(M); %Determino el tipo de bifurcación

    if tipo_bif==1
        warning('Estamos en una bifurcación silla-nodo')
    end
    if tipo_bif==2
        warning('Estamos en una bifurcación period-doubling')
    end
    if tipo_bif==3
        warning('Estamos en una bifurcación toro')
    end

    if num_zonas==2
        ss=sprintf('cont %0.3g err %0.3g pasos %d taur %0.7g tauc %0.7g
y0 %0.7g z0 %0.7g gamma %0.7g pasocont %0.3g
%0.2g\n',cont,elerr,iter,x_1(1),x_1(2),x_1(3),x_1(4),x_1(5),pasocont,estado);
        disp(ss)
    else
        ss=sprintf('cont %0.3g err %0.3g pasos %d tau0 %0.7g tau1 %0.7g
tau2 %0.7g tau3 %0.7g y0 %0.7g z0 %0.7g gamma %0.7g pasocont %0.3g
%0.2g\n',cont,elerr,iter,x_1(1),x_1(2),x_1(3),x_1(4),x_1(5),x_1(6),x_1(7),pas
ocont,estado);
        disp(ss)
    end

    alpha_0=alpha;
    y_ini=x_1;

    flag_bif=1;

```

```

        num_zonas_viejo=num_zonas; %Almaceno el número de zonas por si cambia
en contin_curvabif

        pasocont_bif=0.01; contmax_bif=700; %paso de conttinuación y números
de pasos en contin_curvabif
        fprintf('Continuación de la curva de bifurcación con paso de
continuación positivo\n\n');
        pause;
        contin_curvabif(y_ini,pasocont_bif,contmax_bif,alpha_0,gamma1)
%Continuación de curva de bifurcación con pasocont>0
        pasocont_bif=-0.01; contmax_bif=700;
        fprintf('Continuación de la curva de bifurcación con paso de
continuación negativo\n\n');
        contin_curvabif(y_ini,pasocont_bif,contmax_bif,alpha_0,gamma1)
%Continuación de curva de bifurcación con pasocont<0

        num_zonas=num_zonas_viejo; %Actualizo el número de zonas por si ha
cambiado
        flag_bif=0;
        i=i+1;
    end
    estado_viejo=estado;

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% GRÁFICAS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    if cont==cada || cont==1
        if num_zonas==2
            ss=sprintf('cont %0.3g err %0.3g pasos %d taur %0.7g tauc %0.7g
y0 %0.7g z0 %0.7g gamma %0.7g pasocont %0.3g
\n',cont,elerr,iter,x_1(1),x_1(2),x_1(3),x_1(4),x_1(5),pasocont);
            disp(ss)
        else
            ss=sprintf('cont %0.3g err %0.3g pasos %d tau0 %0.7g tau1 %0.7g
tau2 %0.7g tau3 %0.7g y0 %0.7g z0 %0.7g gamma %0.7g pasocont %0.3g
\n',cont,elerr,iter,x_1(1),x_1(2),x_1(3),x_1(4),x_1(5),x_1(6),x_1(7),pasocont
);
            disp(ss)
        end
        if cont~=1
            cada=cada+cada_ini;
        end
        if flag~=0
            dibuja_orbitas(x_1,X_r,A_r,A_c); %Representa ciclo límite
        else
            pause
        end
    end

end
if flag_espureas==0
    representa_vector_estado(x_1,gamma1,alpha);
end
dbloop %Función que permite entrar en modo depuración pulsando k
mientras se ejecuta el bucle
drawnow;

end
num_zonas=num_zonas_viejo; % Actualiza el número de zonas por si ha cambiado
end

```

B.3. contin_curvabif.m

```

function contin_curvabif(y_ini,pasocont_bif,contmax_bif,alpha_0,gamma)
%% Función que realiza la continuación de la curva de bifurcación para
pasocont dada una estimación de la solución inicial y de alpha

global num_zonas
global flag_keller
global i
global flag_espureas
global cond_ini

flag_keller=0;
flag_espureas=0;

maxiter=100; TOLr=1e-9; TOLa=1e-10;
hdif=1e-6;
pasomin=1e-6;
if cond_ini==5 || cond_ini==6
    pasomax=0.05;
else
    pasomax=1;
end
cont=0; cada_ini=20; cada=cada_ini;

y_0= newton(TOLr,TOLa,maxiter,y_ini,gamma,alpha_0);
y_0(length(y_0)+1)=alpha_0;

alpha_01=alpha_0+hdif;
y_01=newton(TOLr,TOLa,maxiter,y_0(1:length(y_0)-1),[],alpha_01);
y_01(length(y_01)+1)=alpha_01;

t_0=(y_01-y_0)/hdif;
t_0=t_0/norm(t_0);

flag=1;
figure(i),

hold on,
num_zonas_viejo=num_zonas;

while cont<contmax_bif && flag==1

    flag_keller=1;
    cont=cont+1;
    y_predic=y_0+pasocont_bif*t_0;
    flag_espureas_viejo=flag_espureas;

[y_1,t_1,iter,J,A_r,A_c,X_r,T,elerr]=newton_keller(TOLr,TOLa,maxiter,y_0,y_pr
edic,t_0,pasocont_bif,y_predic(end-1),y_predic(end));

    if flag_espureas_viejo==1 && (y_1(1)<0.1 || y_1(3)<0.1)
        flag_espureas=1;
    else
        flag_espureas=0;
    end

    alpha=y_1(end);
    gamma=y_1(end-1);

```

```

y_0=y_1;
t_0=t_1;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONTROLES %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control del paso %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if iter < 3
    pasocont_bif=1.5*pasocont_bif;
end
if iter > 5
    pasocont_bif=pasocont_bif/1.5;
end

if abs(pasocont_bif) <= pasomin
    pasocont_bif=sign(pasocont_bif)*pasomin;
end
if abs(pasocont_bif) >= pasomax
    pasocont_bif=sign(pasocont_bif)*pasomax;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control de los tiempos de vuelo %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if y_1(1)<0
    warning('Los tiempos en la zona derecha deben ser positivos.')
    flag=0;
end
if y_1(2)<0
    warning('Los tiempos en la zona central 1 deben ser positivos.')
    flag=0;
end
if num_zonas==3
    if y_1(3)<0
        warning('Los tiempos en la zona izquierda deben ser positivos.')
        flag=0;
    end
    if y_1(4)<0
        warning('Los tiempos en la zona central 3 deben ser positivos.')
        flag=0;
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control del signo del determinante del Jacobiano %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
signoJacob=sign(det(J));
if cont >=2
    if signoJacob ~= signoJacobaux;
        warning('Ha cambiado el signo del determinante del Jacobiano')
        pause
    end
end
signoJacobaux=signoJacob;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control de sentido recorrido %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if num_zonas==2
    if T-y_1(3)<=0
        warning('El siguiente punto a X0 no está en la zona R')
        flag=0;
    end
else
    if T-y_1(5)<=0
        warning('El siguiente punto a X0 no está en la zona R')
        flag=0;
    end
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Control de x mínimo para bizonales %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if num_zonas==2
    X1=expm(A_r*y_1(1))*([1,y_1(3),y_1(4)]'-X_r)+X_r;
    k=1;
    for tau=0:y_1(2)/20:y_1(2)
        x_tau(:,k)=expm(A_c*tau)*(X1);
        if x_tau(1,k)<-1
            warning('Estamos en la zona L')
            flag_espureas=1;
            num_zonas=3;
            y_0=[y_1(1),tau,0,y_1(2)-tau,y_1(3),y_1(4),y_1(5),y_1(6)]';
            flag_keller=0;
            alpha_01=y_0(8)+hdif;
            y_01=newton(TOLr,TOLa,maxiter,y_0(1:length(y_0)-
1),gamma,alpha_01);
            y_01(length(y_01)+1)=alpha_01;
            t_0=(y_01-y_0)/hdif;
            t_0=t_0/norm(t_0);
            flag_keller=1;
            i=i+1;
            break
        end
        k=k+1;
    end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% GRÁFICAS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if flag~=0
    figure(1), hold on
    plot(alpha,gamma,'k.','MarkerSize',3), hold on
    if cont==cada || cont==1
        if num_zonas==2
            ss=sprintf('cont %0.3g err %0.3g pasos %d taur %0.7g tauc
%0.7g y0 %0.7g z0 %0.7g gamma %0.7g alpha %0.7g pasocont %0.3g
\n',cont,elerr,iter,y_1(1),y_1(2),y_1(3),y_1(4),y_1(5),y_1(6),pasocont_bif);
            disp(ss)
        else
            ss=sprintf('cont %0.3g err %0.3g pasos %d tau0 %0.7g tau1
%0.7g tau2 %0.7g tau3 %0.7g y0 %0.7g z0 %0.7g gamma %0.7g alpha %0.7g
pasocont %0.3g
\n',cont,elerr,iter,y_1(1),y_1(2),y_1(3),y_1(4),y_1(5),y_1(6),y_1(7),y_1(8),p
asocont_bif);
            disp(ss)
        end
        if cont~=1
            cada=cada+cada_ini;
        end
        refresh;
        drawnow;
        dibuja_orbitas(y_1,X_r,A_r,A_c);
    end
    representa_vector_estado(y_1,gamma,alpha)
    dbloop
    drawnow;
else
    pause;
end
end
pause
hold on,
num_zonas=num_zonas_viejo;
end

```

B.4. newton.m

```
function x = newton(TOLr,TOLa,maxiter,x_0,gamma1,alpha)
%%Función que halla una solución de ecucierre mediante el método de Newton
%%dada una estimación de la solución inicial
global flag_bif

elerr=2*(TOLr*norm(x_0)+TOLa);
x=x_0;
iter=0;

while (elerr > TOLr*norm(x)+TOLa && iter < maxiter)
iter=iter+1;

if flag_bif==1
    f=ecucierre(x(1:end-1),x(end),alpha); %Cálculo de f en x
    J=jacnum(x,x(end),alpha); %Cálculo de jacobiano numérico en x
else
    f=ecucierre(x,gamma1,alpha);
    J=jacnum(x,gamma1,alpha);
end
e=-J\f;
x=x+e; %Nueva solución

elerr=norm(e);
end

end
```

B.5. newton_keller.m

```
function [x_1,t_1,iter,J,A_r,A_c,X_r,T,elerr]=
newton_keller(TOLr,TOLa,maxiter,x_0,x_predic,t_0,pasocont,gamma,alpha)
%%Función que implementa el método de Keller dada una estimación de la
%%solución inicial y un vector tangente inicial

global flag_bif
elerr=2*(TOLr*norm(x_0)+TOLa);
iter=0;

while (elerr > TOLr*norm(x_predic)+TOLa) && (iter < maxiter)

iter=iter+1;

if flag_bif==1
    f=ecucierre(x_predic(1:(end-2)),gamma,alpha);
    J=jacnum(x_predic(1:(end-2)),gamma,alpha);
else
    f=ecucierre(x_predic(1:(end-1)),gamma,alpha);
    J=jacnum(x_predic(1:(end-1)),gamma,alpha);
end

%Ecuación de pseudo-longitud de arco
f(end+1)=(x_predic-x_0)'*t_0-pasocont;

%Jacobiano modificado para continuación de Keller
J(end+1,:)=t_0';
```



```

e=-J\f;
x_predic=x_predic+e;

elerr=norm(e);
if flag_bif==1
    gamma=x_predic(end-1);
    alpha=x_predic(end);
else
    gamma=x_predic(end);
end

end

x_1=x_predic;
f_t=zeros(1,length(x_predic))';
f_t(end)=1;
%Cálculo del vector tangente
t_1=J\f_t;

if flag_bif==1
    alpha=x_predic(end);
    [f,A_r,A_c,X_r,T]=ecucierre(x_predic(1:(end-2)),gamma,alpha);
else
    [f,A_r,A_c,X_r,T]=ecucierre(x_1(1:end-1),gamma,alpha);
    f(end+1)=(x_1-x_0)'*t_0-pasocont;
end

end

```

B.6. ecucierre.m

```

function [f,A_r,A_c,X_r,T]=ecucierre(x,gamma1,alpha)
%%Función que halla las eciaciones de cierre y de bifurcación (si procede)
%%dado un vector x
%x=[tau_r,tau_c,y_0,z_0] si 2 zonas
%x=[tau_0,tau_1,tau_2,tau_3,y_0,z_0] si 3 zonas
global beta
global num_zonas
global flag_bif
global tipo_bif
global flag_espureas

t=alpha-gamma1 ; m=2-gamma1*alpha ; d=t ;
T=alpha+beta-gamma1 ; M=2-gamma1*(alpha+beta) ; D=T ;

e_1=[1,0,0]';
A_r=[t, -1, 0; m, 0, -1; d, 0, 0];
A_c=[T, -1, 0; M, 0, -1; D, 0, 0];
b=[T-t, M-m, D-d]';

X_0=[1,x(end-1),x(end)]'; %[1,y_0,z_0]

X_r=-A_r\b; %Solución de equilibrio zona derecha

if num_zonas==2 %Ecuaciones de cierre 2 zonas
    ecu=expm(A_r*x(1))*(X_0-X_r)+X_r-expm(-A_c*x(2))*X_0;
    M_monodromia=expm(A_c*x(2))*expm(A_r*x(1)); %Matriz monodromía 2 zonas
    f=[ecu(1); ...
        ecu(2);...
        ecu(3);...

```

```

    e_1'*expm(-A_c*x(2))*X_0-1];
end

if num_zonas==3 %Ecuaciones de cierre 3 zonas no simétrica, válida para
simétricas
    M_monodromia=expm(A_c*x(4))*expm(A_r*x(3))*expm(A_c*x(2))*expm(A_r*x(1));
%Matriz monodromía 3 zonas
    ecu=+X_r+expm(-A_c*x(4))*X_0-
expm(A_r*x(3))*(expm(A_c*x(2))*(X_r+expm(A_r*x(1))*(X_0-X_r))+X_r);
    f=[ecu(1); ...
    ecu(2);...
    ecu(3);...
    1+e_1'*expm(-A_c*x(4))*X_0];

    if flag_espureas==1 %Eliminación rama espurea zona izquierda
        f(5)=1-e_1'*(X_r+expm(A_r*x(1))*(X_0-X_r));

f(6)=e_1'*(A_r+((A_r^2*x(3))/2)+((A_r^3*x(3)^2)/6)+((A_r^4*x(3)^3)/24)+((A_r^
5*x(3)^4)/120)+((A_r^6*x(3)^5)/720)+((A_r^7*x(3)^6)/5040))*(expm(A_c*x(2))*
expm(A_r*x(1))*(X_0-X_r)+X_r);
    else
        f(5)=1-e_1'*(X_r+expm(A_r*x(1))*(X_0-X_r));
        f(6)=1+e_1'*expm(A_c*x(2))*(X_r+expm(A_r*x(1))*(X_0-X_r));
    end
end

end

if flag_bif==1 %Ecuación de bifurcación
    if tipo_bif==1 %Silla-Nodo
        f(end+1)=-det(M_monodromia)+trace(M_monodromia)-2;
    end
    if tipo_bif==2 %Period Doubling
        f(end+1)=-det(M_monodromia)+trace(M_monodromia);
    end
    if tipo_bif==3 %Toro
        f(end+1)=T*x(2)+t*x(1);
    end
end
end
end

```

B.7. jacnum.m

```

function Jnum=jacnum(x,gamma1,alpha)
% Jacobiano de fun obtenido numericamente mediante el método de diferencias
% centradas
global flag_bif
global flag_keller
if flag_keller==1
    x=[x;gamma1];
    if flag_bif==1
        x=[x;alpha];
    end
end

h=1e-5;
m=max(size(x));
e=eye(m);

for k=1:m

    if x(k)==0
        s=1;
    else
        s=sign(x(k));
    end;

    a(k)=max(1,abs(x(k)))*s;
    x_fin=x+a(k)*h*e(1:m,k);
    x_ini=x-a(k)*h*e(1:m,k);
    if flag_bif==0
        if flag_keller==1
            Jnum(1:(m-1),k)=(ecucierre(x_fin(1:(end-1)),x_fin(end),alpha)-ecucierre(x_ini(1:(end-1)),x_ini(end),alpha))/a(k)/(2*h);
        else
            Jnum(1:m,k)=(ecucierre(x_fin,gamma1,alpha)-ecucierre(x_ini,gamma1,alpha))/a(k)/(2*h);
        end
    else
        if flag_keller==1
            Jnum(1:(m-1),k)=(ecucierre(x_fin(1:(end-2)),x_fin(end-1),x_fin(end))-ecucierre(x_ini(1:(end-2)),x_ini(end-1),x_ini(end)))/a(k)/(2*h);
        else
            Jnum(1:m,k)=(ecucierre(x_fin(1:(end-1)),x_fin(end),alpha)-ecucierre(x_ini(1:(end-1)),x_ini(end),alpha))/a(k)/(2*h);
        end
    end
end
end
end

```

B.8. sistema.m

```
function f=sistema(t,x)
%%Función que halla valor de sistema dinámico dado x
global alpha
global beta
global gamma1

t=alpha-gamma1 ; m=2-gamma1*alpha ; d=t ;
T=alpha+beta-gamma1 ; M=2-gamma1*(alpha+beta) ; D=T ;

A_r=[t, -1, 0; m, 0, -1; d, 0, 0];
b=[T-t, M-m, D-d]';

f=A_r*x+((abs(x(1)+1)-abs(x(1)-1))/2)*b;

end
```

B.9. comprueba_autovalores.m

```
function estado=compruebaautovalores(M)
%%Función que comprueba el estado de estabilidad del ciclo límite

if abs(det(M))<1 && abs(trace(M)-1)<1+det(M)
    estado=1; %Dentro del círculo de radio unidad
else
    estado=2; %Fuera del círculo de radio unidad
end
if abs(det(M))==1 && abs(trace(M)-1)==1+det(M)
    estado=0; %Sobre el círculo de radio unidad
end
end
```

B.10. tipo_bifurcacion.m

```
function tipo_bif=tipo_bifurcacion(M_monodromia)
%%Función que comprueba el tipo de bifurcación dada la matriz de monodromía
%% 1 si tipo silla-nodo, 2 si period doubling, 3 si toro
lambda=eigs(M_monodromia); % Autovalores de la matriz de monodromía

if imag(lambda(1))~=0 || imag(lambda(2))~=0 || imag(lambda(3))~=0 &&
trace(M_monodromia)-1<=2
    tipo_bif=3;
else
    if det(M_monodromia)-trace(M_monodromia)<-1
        tipo_bif=1;
    else
        tipo_bif=2;
    end
end
end
```

B.11. gamma_alpha.m

```
function gamma_alpha(beta)
%%Función que representa el diagrama gamma-alpha dado un beta
alpha=0:0.01:2;

figure(1); hold on

y_1=alpha+beta;
y_2=alpha;
for j=1:length(alpha)
    aux=alpha+beta;
    y_3(j)=1/aux(j);
    y_4(j)=1/alpha(j);
    y_5(j)=2/aux(j);
    y_6(j)=2/alpha(j);
end

plot(alpha,y_1,'g');
plot(alpha,y_2,'b');
plot(alpha,y_3,'y');
plot(alpha,y_4,'m');
plot(alpha,y_5,'c');
plot(alpha,y_6,'r');
plot(1-beta,1,'*');
plot(1,1,'*');
plot(sqrt(2)-beta,sqrt(2),'*');
plot(sqrt(2),sqrt(2),'*');
hold off

axis([0,2,0,2]);
legend('\alpha+\beta','\alpha','1/(\alpha+\beta)','1/\alpha','2/(\alpha+\beta)',
'2/\alpha','Location','southwest');
xlabel('\alpha'),ylabel('\gamma');
grid;

end
```

B.12. dibuja_orbitas.m

```

function dibuja_orbitas(x_1,X_r,A_r,A_c)
%%Función que representa el ciclo límite dado un vector de estados
global flag_bif
global num_zonas
global tipo_bif
n=100; %Número de puntos por zona
k=1;
if num_zonas==3
    X_0=[1, x_1(5), x_1(6)]';
    for tau=0:x_1(1)/n:x_1(1) %%ZONA DERECHA
        x_tau(:,k)=X_r+expm(A_r*tau)*(X_0-X_r);
        k=k+1;
    end
    X_1=x_tau(:,end);
    for tau=0:x_1(2)/n:x_1(2) %%ZONA CENTRAL 1
        x_tau(:,k)=expm(A_c*tau)*(X_1);
        k=k+1;
    end
    X_2=x_tau(:,end);
    for tau=0:x_1(3)/n:x_1(3) %%ZONA IZQUIERDA
        x_tau(:,k)=-X_r+expm(A_r*tau)*(X_2+X_r);
        k=k+1;
    end
    X_3=x_tau(:,end);
    for tau=0:x_1(4)/n:x_1(4) %%ZONA CENTRAL 3
        x_tau(:,k)=expm(A_c*tau)*(X_3);
        k=k+1;
    end
end
if num_zonas==2
    X_0=[1, x_1(3), x_1(4)]';
    for tau=0:x_1(1)/n:x_1(1) %%ZONA DERECHA
        x_tau(:,k)=X_r+expm(A_r*tau)*(X_0-X_r);
        k=k+1;
    end
    X_1=x_tau(:,end);
    for tau=0:x_1(2)/n:x_1(2) %%ZONA CENTRAL
        x_tau(:,k)=expm(A_c*tau)*(X_1);
        k=k+1;
    end
end
figure(3), hold off
plot3(x_tau(1,:),x_tau(2,:),x_tau(3,:))
hold on
plot3(1,X_0(2), X_0(3), '*')
plot3(1,X_1(2), X_1(3), '*')
if num_zonas==2
    legend('Órbita','X_0','X_1');
end
if num_zonas==3
    plot3(-1,X_2(2), X_2(3), '*')
    plot3(-1,X_3(2), X_3(3), '*')
    legend('Órbita','X_0','X_1','X_2','X_3');
end
xlabel('x_1'); ylabel('x_2'); zlabel('x_3');
hold on
drawnow;

end

```

B.13. representa_vector_estado.m

```

function representa_vector_estado(x,gamma1,alpha)
%%Función que representa las componentes del vector de estado frente a
%%gamma en la continuación del ciclo límite y frente a gamma y alpha en la
%%continuación de la curva de bifurcación
global flag_bif
global num_zonas
global i
if flag_bif==0
    figure(2)
    if num_zonas==2 %2 zonas sin bifurcación
        subplot(2,2,1), plot(gamma1,x(1),'.b'), xlabel('\gamma'),
ylabel('\tau_R'), hold on
        subplot(2,2,2), plot(gamma1,x(2),'.g'), xlabel('\gamma');
ylabel('\tau_c'); hold on
        subplot(2,2,3), plot(gamma1,x(3),'.r'), xlabel('\gamma');
ylabel('y_0'); hold on
        subplot(2,2,4), plot(gamma1,x(4),'.r'), xlabel('\gamma');
ylabel('z_0'); hold on
    else %3 zonas sin bifurcación
        subplot(2,3,1), plot(gamma1,x(1),'.b'), xlabel('\gamma');
ylabel('\tau_0'); hold on
        subplot(2,3,2), plot(gamma1,x(2),'.g'), xlabel('\gamma');
ylabel('\tau_1'); hold on
        subplot(2,3,3), plot(gamma1,x(3),'.b'), xlabel('\gamma');
ylabel('\tau_2'); hold on
        subplot(2,3,4), plot(gamma1,x(4),'.g'), xlabel('\gamma');
ylabel('\tau_3'); hold on
        subplot(2,3,5), plot(gamma1,x(5),'.r'), xlabel('\gamma');
ylabel('y_0'); hold on
        subplot(2,3,6), plot(gamma1,x(6),'.r'), xlabel('\gamma');
ylabel('z_0'); hold on
    end
else
    figure(i)
    if num_zonas==2 %2 zonas con bifurcación
        subplot(2,2,1), plot3(gamma1,alpha,x(1),'.b'),xlabel('\gamma'),
ylabel('\alpha'),zlabel('\tau_R'), hold on
        subplot(2,2,2), plot3(gamma1,alpha,x(2),'.g'), xlabel('\gamma'),
ylabel('\alpha'),zlabel('\tau_c'), hold on
        subplot(2,2,3), plot3(gamma1,alpha,x(3),'.r'), xlabel('\gamma'),
ylabel('\alpha'),zlabel('y_0'), hold on
        subplot(2,2,4), plot3(gamma1,alpha,x(4),'.r'), xlabel('\gamma'),
ylabel('\alpha'),zlabel('z_0'), hold on
    else %3 zonas con bifurcación
        subplot(2,3,1), plot3(gamma1,alpha,x(1),'.b'), xlabel('\gamma'),
ylabel('\alpha'),zlabel('\tau_0'), hold on
        subplot(2,3,2), plot3(gamma1,alpha,x(2),'.g'), xlabel('\gamma'),
ylabel('\alpha'),zlabel('\tau_1'), hold on
        subplot(2,3,3), plot3(gamma1,alpha,x(3),'.b'), xlabel('\gamma'),
ylabel('\alpha'),zlabel('\tau_2'), hold on
        subplot(2,3,4), plot3(gamma1,alpha,x(4),'.g'), xlabel('\gamma'),
ylabel('\alpha'),zlabel('\tau_3'), hold on
        subplot(2,3,5), plot3(gamma1,alpha,x(5),'.r'), xlabel('\gamma'),
ylabel('\alpha'),zlabel('y_0'), hold on on
        subplot(2,3,6), plot3(gamma1,alpha,x(6),'.r'), xlabel('\gamma'),
ylabel('\alpha'),zlabel('z_0'), hold on
    end
end
end

```

B.13. dbloop.m

Esta función permite que al pulsar la letra “k” la simulación entre en modo depuración y podamos así ver los valores de las variables en cada momento, así como trabajar con las gráficas (girar, ampliar, ...). Para ello, esta función debe colocarse dentro de un ciclo while o for, en nuestro caso se colocará en los ciclos while de `contin_ciclo.m` y `contin_curvabif.m`. Comentar que esta función no ha sido desarrollada por mí, si no que ha sido tomada de Mathworks [5]

```
function dbloop(key)

% Greg Aloe
% Define the default key
defaultKey = 'k';
deadKey = char(1);

% Find the "dbloop key catcher" figure, or create it if it doesn't exist
hf = findall(0,'Tag','DB_LOOP_KEY_CATCHER');

% If a key wasn't defined, use the default
if nargin==0
    key = defaultKey;
end

% Close the figure if requested
if strcmpi(key,'close')
    close(hf)
    return
end

if isempty(hf)
    % Make the figure elusive
    hf = figure('Tag','DB_LOOP_KEY_CATCHER', ...
        'Units','Normalized','Position',[1.1 1.1 .2 .1], ...
        'Menubar','None','CurrentCharacter',deadKey, ...
        'IntegerHandle','Off','NumberTitle','Off', ...
        'Name','dbloop key catcher','Resize','Off', ...
        'HandleVisibility','off');
end

% Get the function stack for setting/clearing breakpoints
dbs = dbstack;

% Make the "key catcher" figure active so we can assuredly catch keys
figure(hf)
drawnow

% If a specified key was pressed, make a breakpoint so it stops on the next
% execution, or else clear that potential breakpoint
cc = get(hf,'CurrentCharacter');
if strcmpi(cc,key) || (strcmpi(key,'any') && ~strcmp(cc,deadKey))
    dbstop('in',dbs(2).name,'at',num2str(dbs(2).line));
    % Reset the CurrentCharacter so it doesn't stop on every iteration
    set(hf,'CurrentCharacter',deadKey)
else
    dbclear('in',dbs(2).name,'at',num2str(dbs(2).line));
end
```


REFERENCIAS

- [1] UNR - Departamento de Ingeniería, “Análisis de la Estabilidad Interna de los Sistemas No Lineales,” 2003.
- [2] Ramírez, Luis Gómez de la Herrán, *Continuación numérica de ciclos límites en osciladores electrónicos*, 2016.
- [3] Victoriano Carmona, Emilio Freire, Enrique Ponce, Javier Ros, Francisco Torres, *Limit cycle bifurcation in 3D continuous piecewise linear system with two zones. Application to Chua's circuit*, 2005.
- [4] E. Freire, E. Ponce, J. Ros, *The focus-center-limit cycle bifurcation in symmetric 3D piecewise linear systems.*, 2005.
- [5] G. Aloe, “mathworks,” 2016. [Online]. Available: <https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/9736-dbloop-m--dynamically-enter-debug-mode-during-a-loop>.
- [6] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Theory*, Second Edition, Springer, 1998.
- [7] E. G. Wiens, “Egwald Web Services,” [Online]. Available: <http://www.egwald.ca/nonlineardynamics/bifurcations.php>.
- [8] C. Burguillos, *Análisis de la dinámica de un oscilador electrónico tipo Bonhoeffer-Van der Pol*, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Sevilla, 2014.
- [9] S. R. F. Dercole, *Dynamical Systems and Their Bifurcations*, DEI, Politecnico di Milano.