

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Estimación de vida a fatiga en un eje con ajuste a presión

Autor: Mario Montiel Polvillo

Tutor: Carlos Navarro Pintado

Dep. Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Estimación de vida a fatiga en un eje con ajuste a presión

Autor:

Mario Montiel Polvillo

Tutor:

Carlos Navarro Pintado

Profesor titular

Dep. Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Trabajo Fin de Grado: Estimación de vida a fatiga en un eje con ajuste a presión

Autor: Mario Montiel Polvillo

Tutor: Carlos Navarro Pintado

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis amigos

Agradecimientos

Quiero agradecer primero a mis padres por apoyarme siempre en mis decisiones y preocuparse tanto por mí. Por todos estos años que me han cuidado y educado, soportándome y aguantándome en mis peores momentos, espero que se sientan orgullosos de su hijo.

Por otro lado, quiero agradecer a mis amigos y compañeros Paco, Jesús y Jorge con los que he pasado estos últimos años, aguantando y sufriendo, por una parte; pero divirtiéndonos y disfrutando por otra, eso nos ha creado buenos lazos y he de reconocer que, si no fuese por ellos y su ayuda, no habría llegado hasta aquí.

Agradezco también a muchas otras personas que tanto me han ayudado a despejarme, animarme, soportarme y he pasado con ellos muy buenos momentos, como son Jose, Rafa, Javi, Montse y mis compañeros y entrenadores de judo.

Por último, quiero agradecer a mis profesores por educarme y enseñarme lo fundamental en cada etapa de mi vida. Con especial mención a mi tutor Carlos, por guiarme a lo largo del proyecto y a Jesús, por ayudarme con las dudas acerca de ANSYS que he tenido.

Mario Montiel Polvillo

Sevilla, 2017

Este proyecto se centrará en el análisis de la unión con ajuste a presión, de la cual estableceremos unas dimensiones de eje y agujero con las que trabajaremos durante el proyecto. Dividiremos el proyecto en dos partes diferenciadas: la obtención de las tensiones producidas y la estimación de la vida a fatiga. Para la obtención de tensiones primero evaluaremos los resultados analíticos 2D y lo compararemos con los resultados obtenidos mediante un análisis con elementos finitos en ANSYS en 2D.

Posteriormente, procederemos a hacer el análisis en ANSYS en 3D solo con el ajuste y después pasaremos a aplicar una fuerza que produzca la flexión del eje.

Una vez obtenidas las tensiones para el caso con flexión, utilizaremos un criterio de fatiga multiaxial para la estimación del número de ciclo hasta el fallo de la pieza.

Abstract

This project will focus on the analysis of the interference fit, we will set the dimensions for the shaft and the hole we will work with. We can divide the project in two different parts: the extraction of stresses and the fatigue life estimation. For the extraction of stresses, we will first evaluate the 2D analytic results and compare with the 2D ANSYS finite element analysis.

Later, we will make the 3D ANSYS analysis due to the press fit and when we are finished with that we will apply a force on the end of the shaft that will bend the shaft.

Once we obtained the stresses for the bending shaft, we will apply a multiaxial fatigue criterion for the estimation of the number of cycles until the failure of the shaft.

Índice

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xiv
Índice de Tablas	xvi
Índice de Figuras	xviii
Notación	xxii
1 Introducción	1
1.1 <i>Descripción y objetivos del proyecto</i>	3
2 Obtención de tensiones sin flexión. Caso 2D	5
2.1 <i>Solución analítica</i>	5
2.1.1 Resultados en estado de tensión plana	7
2.1.2 Resultados en estado de deformación plana	7
2.2 <i>Solución por análisis de elementos finitos</i>	7
2.2.1 Resultados en estado de tensión plana	12
2.2.2 Resultados en estado de deformación plana	13
2.2.3 Análisis de convergencia de resultados	15
3 Obtención de tensiones sin flexión. Caso 3D	17
3.1 <i>Resultados del modelo 3D.</i>	20
3.2 <i>Análisis de convergencia de resultados</i>	27
4 Obtención de tensiones introduciendo flexión	28
5 Análisis de fatiga	41
5.1 <i>Resultados variando el ajuste</i>	45
5.2 <i>Resultados variando el ciclo de carga</i>	47
5.3 <i>Resultados sin el ajuste a presión</i>	48
Anexos	50
<i>Anexo A. Código de Matlab para obtención de parámetro de SWT</i>	50
Referencias	54

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1.- Tensiones obtenidas en 2D en estado de tensión plana.	12
Tabla 2-2.- Tensiones obtenidas en 2D en estado de deformación plana.	13
Tabla 2-3.- Convergencia del análisis mediante MEF en 2D.	15
Tabla 3-1.- Convergencia del análisis mediante MEF en 3D.	27

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1.- Interferencia en el ajuste a presión.	1
Figura 1-2.- Flexión rotativa y tensiones generadas.	2
Figura 1-3.- Fractura debido a fatiga por flexión rotativa.	2
Figura 1-4.- Fatiga por flexión rotativa con tensiones altas.	3
Figura 1-5.- Fatiga por flexión rotativa con tensiones bajas.	3
Figura 2-1.- Parámetros a, b y c utilizados para el cálculo de la presión de contacto.	5
Figura 2-2.- Elementos PLANE182 y PLANE183.	8
Figura 2-3.- Selección del elemento PLANE183.	8
Figura 2-4.- Selección de comportamiento como deformación plana o como tensión plana.	8
Figura 2-5.- Propiedades del material: módulo elástico y coeficiente de Poisson.	9
Figura 2-6.- Parámetros de la geometría del eje y del agujero, respectivamente.	9
Figura 2-7.- Montaje bidimensional del problema de contacto.	10
Figura 2-8.- Mallado progresivo de las áreas.	10
Figura 2-9.- Coeficiente de fricción y antisimetría de la matriz de rigidez del contacto.	11
Figura 2-10.- Definición de las opciones para la solución.	11
Figura 2-11.- Tensión radial en estado de tensión plana.	12
Figura 2-12.- Tensión circunferencial en estado de tensión plana.	13
Figura 2-13.- Tensión radial en estado de deformación plana.	14
Figura 2-14.- Tensión circunferencial en estado de deformación plana.	14
Figura 2-15.- Gráfica de convergencia de resultados en tensión plana.	15
Figura 2-16.- Gráfica de convergencia de resultados en deformación plana.	16
Figura 3-1.- Elemento SOLID187.	17
Figura 3-2.- Montaje tridimensional del problema de contacto.	18
Figura 3-3.- Mallado progresivo de los volúmenes.	19
Figura 3-4.- Detalle del mallado en la zona de contacto.	19
Figura 3-5.- Presión de contacto en el modelo 3D.	21
Figura 3-6.- Detalle de la presión de contacto en el borde de la unión.	21
Figura 3-7.- Tension radial en 3D	22
Figura 3-8.- Otra vista de la tensión radial 3D.	22
Figura 3-9.- Tension circunferencial en 3D.	23
Figura 3-10.- Otra vista de la tensión circunferencial 3D.	23
Figura 3-11.- Gráfica con la evolución de la presión de contacto a lo largo del eje.	24
Figura 3-12.- Gráfica con la evolución de la tensión radial a lo largo del eje.	24

Figura 3-13.- Gráfica con la evolución de la tensión circunferencial a lo largo del eje	25
Figura 3-14.- Superposición de resultados de tensión radial con los resultados analíticos de tensión radial 2D.	26
Figura 3-15.- Superposición de resultados de tensión radial con los resultados analíticos de tensión radial 2D.	26
Figura 3-16.- Gráfica de convergencia de resultados en 3D.	27
Figura 4-1.- Montaje para del problema de contacto con flexión.	28
Figura 4-2.- Mallado de los volúmenes.	29
Figura 4-3.- Detalle de la malla en la zona del borde del contacto.	29
Figura 4-4.- Modelo con la malla y la fuerza que provocará la flexión del eje.	30
Figura 4-5.- Presión de contacto del modelo 3D con flexión.	31
Figura 4-6.- Detalle de la presión de contacto del modelo 3D con flexión.	31
Figura 4-7.- Primera vista de la tensión radial en el eje sometido a flexión.	32
Figura 4-8.- Segunda vista de la tension radial en el eje sometido a flexión.	32
Figura 4-9.- Tercera vista de la tension radial en el eje sometido a flexión.	33
Figura 4-10.- Primera vista de la tension circunferencial en el eje sometido a flexión.	33
Figura 4-11.- Segunda vista de la tension circunferencial en el eje sometido a flexión.	34
Figura 4-12.- Tercera vista de la tension circunferencial en el eje sometido a flexión.	34
Figura 4-13.- Primera vista de la tension axial en el eje sometido a flexión.	35
Figura 4-14.- Segunda vista de la tension axial en el eje sometido a flexión.	35
Figura 4-15.- Tercera vista de la tension axial en el eje sometido a flexión.	36
Figura 4-16.- Gráfica con la evolución de la presión de contacto a lo largo de la parte superior del eje.	36
Figura 4-17.- Gráfica con la evolución de la presión de contacto a lo largo de la parte inferior del eje.	37
Figura 4-18.- Gráfica con la evolución de la tensión radial (azul) y la tensión circunferencial (morada) a lo largo de la parte superior del eje.	37
Figura 4-19.- Gráfica con la evolución de la tensión axial a lo largo de la parte superior del eje.	38
Figura 4-20.- Gráfica con la evolución de la tensión radial (azul) y la tensión circunferencial (morada) a lo largo de la parte inferior del eje.	38
Figura 4-21.- Gráfica con la evolución de la tensión axial a lo largo de la parte inferior del eje.	39
Figura 4-22.- Gráfica con la evolución de la tensión radial a lo largo del diámetro del eje justo en el borde de la zona de contacto.	39
Figura 4-23.- Gráfica con la evolución de la tensión circunferencial a lo largo del diámetro del eje justo en el borde de la zona de contacto.	40
Figura 4-24.- Gráfica con la evolución de la tensión axial a lo largo del diámetro del eje justo en el borde de la zona de contacto.	40
Figura 5-1.- Curva de fatiga SWT-N.	42
Figura 5-2.- Ciclo de carga en el extremo del eje del modelo utilizado.	43
Figura 5-3.- Sistema de coordenadas esférico.	44
Figura 5-4.- Sistema de coordenadas utilizado en ANSYS.	45
Figura 5-5.- Ciclo de carga con un rango de 5000 N.	47
Figura 5-6.- Ciclo de carga con un rango de 7000 N.	48

Notación

A^*	Conjugado
c.t.p.	En casi todos los puntos
c.q.d.	Como queríamos demostrar
■	Como queríamos demostrar
e.o.c.	En cualquier otro caso
e	número e
Re	Parte real
Im	Parte imaginaria
sen	Función seno
tg	Función tangente
arctg	Función arco tangente
sen	Función seno
$\sin^x y$	Función seno de x elevado a y
$\cos^x y$	Función coseno de x elevado a y
Sa	Función sampling
sgn	Función signo
rect	Función rectángulo
Sinc	Función sinc
$\partial y \partial x$	Derivada parcial de y respecto
x°	Notación de grado, x grados.
$\Pr(A)$	Probabilidad del suceso A
SNR	Signal-to-noise ratio
MSE	Minimum square error
:	Tal que
<	Menor o igual
>	Mayor o igual
\	Backslash
\Leftrightarrow	Si y sólo si

1 INTRODUCCIÓN

Una unión típica entre dos elementos que se utiliza para que dos piezas no tengan movimiento relativo entre sí es el ajuste a presión. Este ajuste consiste en un eje y un agujero de mismo diámetro nominal, pero el diámetro mínimo del eje es mayor que el diámetro máximo del agujero, produciendo una interferencia diametral que resulta en una presión de contacto entre los dos elementos.

Esta interferencia suele ser del orden de micras para diámetros menores de 100 mm, para que la presión no sea excesiva y resulte de fácil montaje. Este montaje se suele hacer enfriando el eje o calentando el agujero, se aloja el eje en el agujero y luego se deja alcanzar el equilibrio. La presión que se genera es la suficiente como para evitar el giro o desplazamiento de un elemento con el otro debido a los esfuerzos de fricción.

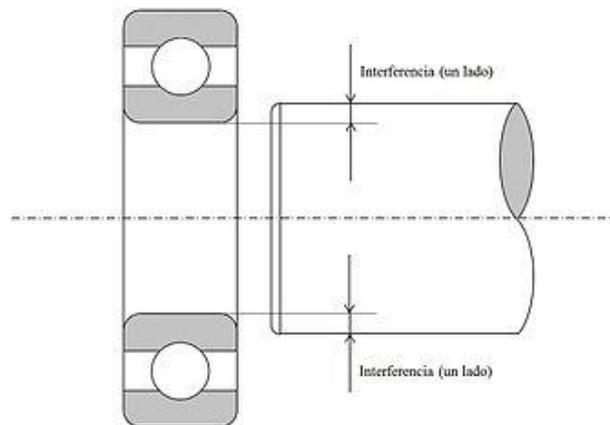


Figura 1-1.- *Interferencia en el ajuste a presión.*

Es un ajuste mayormente utilizado en ejes rotatorios de transmisión de potencia, para su sujeción con elementos fijos. Estos pueden ser el eje de salida de un motor, una turbina, una bomba, una reductora de velocidad, etc. que mediante un rodamiento se establece la sujeción con la carcasa en la parte exterior, mientras que en la parte interior tiene lugar el ajuste con apriete entre el rodamiento y el eje.

Cuando estos ejes tienen aplicada una carga cerca del extremo debido a algún elemento, se produce un fenómeno conocido como flexión rotativa. Esto resulta en una tracción en la parte superior y una compresión en la parte inferior que se produciría para una sección concreta, en todo el perímetro del eje mientras gira, por lo que cada punto de la circunferencia durante una vuelta del eje se vería sometido a un ciclo de carga de tracción y compresión.

Por ello habría que hacer un análisis de fatiga al eje, pues debido al ciclo de carga, se iniciará una grieta y se propagará hasta causar el fallo del elemento. El fallo por fatiga del elemento será el fallo más probable en este tipo de ajustes.

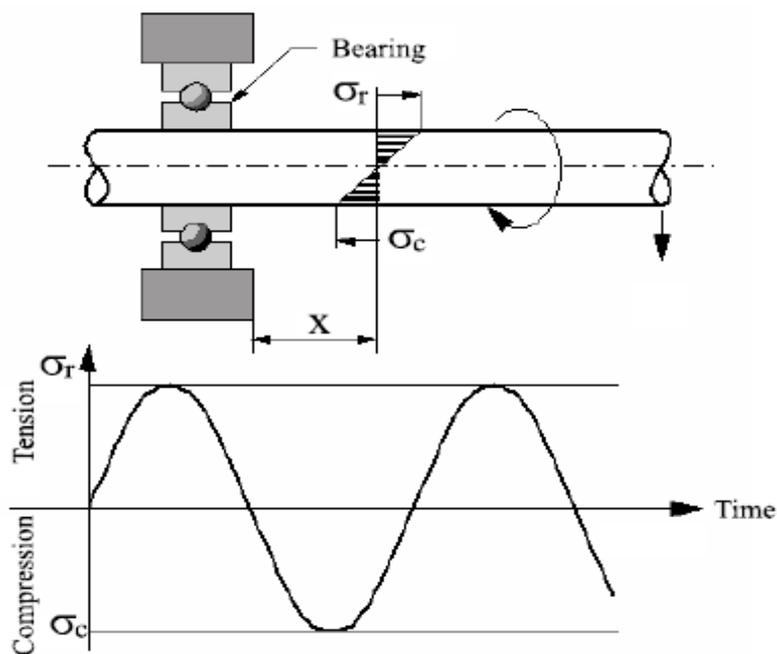


Figura 1-2.- Flexión rotativa y tensiones generadas.

En la Figura 1-3 podemos ver una fractura típica debido a fatiga por flexión rotativa en el eje de una turbina [1]. Se pueden apreciar las líneas de playa del avance de la grieta y la fractura rápida final. Se puede también apreciar en la fractura el sentido de giro del eje, ya que el frente de grieta no tiende a seguir avanzando recto, sino que se inclina. Si las tensiones nominales son altas la superficie donde se produce la fractura rápida es mayor, ya que rompe a menor número de ciclos como se ve en la Figura 1-4, si las tensiones nominales son bajas ocurre lo opuesto, ya que a la grieta tiene más tiempo para crecer y la fractura final se produce de forma más tardía, como se ve en la Figura 1-5 [2].

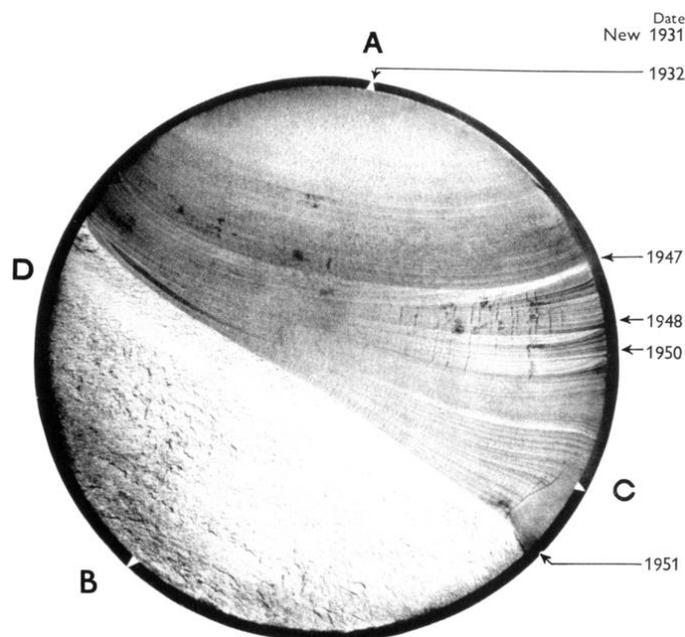


Figura 1-3.- Fractura debido a fatiga por flexión rotativa.

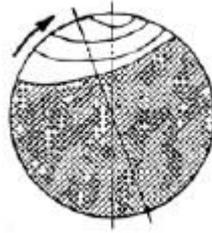


Figura 1-4.- *Fatiga por flexión rotativa con tensiones altas.*

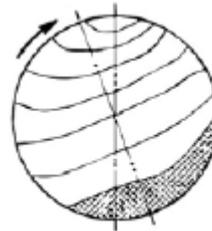


Figura 1-5.- *Fatiga por flexión rotativa con tensiones bajas.*

1.1 Descripción y objetivos del proyecto

El proyecto consistirá en obtener las tensiones de un montaje que consistirá en someter a un eje a flexión rotativa, aplicando una fuerza vertical en un extremo, teniendo en el otro extremo un agarre con ajuste a presión, para hacer un análisis a fatiga con ellas y estimar la vida útil del elemento. Para la obtención de estas tensiones emplearemos un análisis mediante el método de elementos finitos con ayuda del software comercial ANSYS.

Primero, en un caso plano calcularemos las tensiones debidas al ajuste de forma analítica y las compararemos con las obtenidas mediante ANSYS. Después, compararemos estas tensiones con las obtenidas con el modelo tridimensional debido únicamente al contacto de los elementos sin tener en cuenta la flexión. A continuación, analizaremos el caso que nos concierne con eje sometido a flexión y a un ajuste con apriete.

Una vez obtenidas estas tensiones podemos proceder al análisis de fatiga. Para el cálculo de vida a fatiga usaremos un criterio de fatiga multiaxial, llamado método de Smith-Watson-Topper. Para ello calcularemos el factor SWT, que depende de la tensión y deformación obtenidas, para los puntos de la línea que cruza el diámetro del eje de arriba abajo en el borde de la zona de contacto. Obtendremos una curva representando el factor SWT frente a número de ciclos hasta el fallo del problema de fatiga de un eje sometido únicamente a tracción y con el factor SWT obtenido de nuestro problema en particular, obtendremos la vida a fatiga.

El ajuste a presión escogido es el siguiente: un ajuste con agujero único y diámetro nominal de 40 mm 40 H7/p6. Este ajuste es uno de los preferidos y bastante común al tener un ajuste con interferencia.

Este ajuste establece las siguientes dimensiones para el eje y el agujero [3]:

- Diámetro del agujero: $40 \begin{pmatrix} +0.025 \\ +0.000 \end{pmatrix} mm$
- Diámetro del eje: $40 \begin{pmatrix} +0.042 \\ +0.026 \end{pmatrix} mm$

Para el proyecto hemos escogido la interferencia máxima, esta es, 42 micras y, por otra parte, de diámetro exterior del agujero se ha escogido 130 *mm*. De esta manera las dimensiones de eje y agujero para todos los apartados son las siguientes:

- Diámetro del eje: 40.042 *mm*
- Diámetro interior del agujero: 40.000 *mm*
- Diámetro exterior del agujero: 135 *mm*

El material utilizado tanto para el eje como para el agujero será un acero típico, con módulo de Young $E= 210 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu=0.3$ [4] y coeficiente de rozamiento entre las dos superficies (acero-acero) $\mu=0.2$ [5].

2 OBTENCIÓN DE TENSIONES SIN FLEXIÓN.

CASO 2D

Para comenzar, pasaremos por obtener las tensiones de nuestro ajuste, sin tener en cuenta la flexión, solo debido a la interferencia del contacto.

Primero lo haremos para el caso bidimensional y después para el caso tridimensional y lo compararemos.

2.1 Solución analítica

El problema del ajuste a presión tiene solución analítica, por lo que pasaremos a obtener las tensiones radiales y circunferenciales en la zona de contacto.

Según la teoría de cilindros de pared gruesa puede obtenerse la siguiente fórmula para obtener la presión de contacto en función de las dimensiones del eje y el agujero, la interferencia y las propiedades del material [6] [7] [8].

$$p = \frac{\delta}{2b \left[\frac{1}{E_o} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu_o \right) + \frac{1}{E_i} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu_i \right) \right]}$$

Ecuación 1.- *Obtención de la presión de contacto.*

Donde p es la presión de contacto, δ la interferencia diametral, E el modulo de Young, ν el coeficiente de Poisson, a el radio interno del eje (0 en nuestro caso porque es un eje macizo), b el radio externo del eje y radio interno del agujero en su valor nominal, y c es el radio externo del agujero.

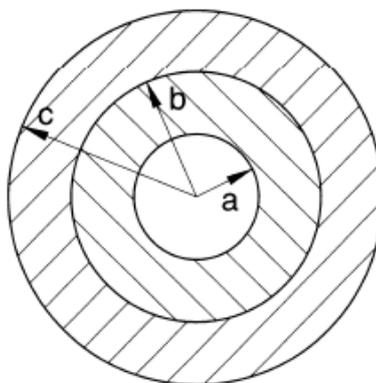


Figura 2-1.- *Parámetros a, b y c utilizados para el cálculo de la presión de contacto.*

Los subíndices i y o se refieren al cuerpo interior y exterior al contacto, respectivamente. Si ambos cuerpos

fuesen del mismo material, como es en nuestro caso, la fórmula se simplificaría de la siguiente forma:

$$p = \frac{E\delta (c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{2b \cdot 2b^2(c^2 - a^2)}$$

Ecuación 2.- *Obtención de la presión de contacto cuando los materiales del eje y del agujero son iguales.*

Una vez obtenida la presión de contacto, podemos obtener las tensiones radiales y circunferenciales del eje y del agujero en la zona de contacto de la siguiente manera:

$$\sigma_{r_{eje}} = -p \quad \sigma_{r_{agujero}} = -p \quad \sigma_{c_{eje}} = -p \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right) \quad \sigma_{c_{agujero}} = p \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} \right)$$

Ahora bien, habría que distinguir entre el caso de tensión plana y de deformación plana, ya que los resultados varían. Para implementar esta diferencia en el cálculo de la presión de contacto hay que tener en cuenta de donde proviene esa fórmula.

Una de las ecuaciones que intervienen en su obtención es la ley de comportamiento de elasticidad lineal isótropa [9] [10].

Para tensión plana es la siguiente:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}$$

Ecuación 3.- *Ley de comportamiento para tensión plana.*

Con E y ν , las constantes reales del material en cuestión.

Sin embargo, para deformación plana tenemos la siguiente ley de comportamiento:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1 + \nu'}{E'} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu'}{E'} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}$$

Ecuación 4.- *Ley de comportamiento para deformación plana.*

Donde E' y ν' , son constantes ficticias del material, con el único propósito de que la estructura de la ley de comportamiento sea igual a la de tensión plana. Estas constantes se relacionan con las reales de la siguiente manera:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

Ecuación 5.- *Obtención de constantes ficticias.*

Con esto, en la fórmula de la presión de contacto cambiamos E y ν por E' y ν' y podemos obtener las tensiones de igual manera que en tensión plana.

2.1.1 Resultados en estado de tensión plana

Sustituimos en la fórmula de la presión de contacto lo siguiente:

- $E = 210\,000\text{ MPa}$
- $\delta = 0.042\text{ mm}$
- $a = 0\text{ mm}$
- $b = 20\text{ mm}$
- $c = 65\text{ mm}$

Utilizando esas unidades la presión de contacto la obtendremos en *MPa*. Los resultados son los siguientes:

$$p = 99.81\text{ MPa} \quad \sigma_{r_{eje}} = \sigma_{r_{agujero}} = -99.81\text{ MPa}$$

$$\sigma_{c_{eje}} = -99.81\text{ MPa} \quad \sigma_{c_{agujero}} = 120.69\text{ MPa}$$

2.1.2 Resultados en estado de deformación plana

Para este caso los parámetros de la fórmula para calcular la presión de contacto son los mismos a excepción del módulo de Young. Calculamos las constantes ficticias:

$$E' = 230.77\text{ GPa} \quad \nu' = 0.43$$

Y los resultados que obtenemos para la zona de contacto son los siguientes:

$$p = 109.68\text{ MPa} \quad \sigma_{r_{eje}} = \sigma_{r_{agujero}} = -109.68\text{ MPa}$$

$$\sigma_{c_{eje}} = -109.68\text{ MPa} \quad \sigma_{c_{agujero}} = 132.62\text{ MPa}$$

2.2 Solución por análisis de elementos finitos

Procedemos a hacer el mismo análisis que hemos hecho de las tensiones debidas a la interferencia de contacto, pero esta vez mediante uso del método de elementos finitos con el programa ANSYS.

Para empezar, definimos el tipo de elemento, para ello vamos a *Preprocessor > Element type > Add/Edit/Delete*, y escogemos el elemento PLANE183. Escogemos este elemento frente a PLANE182, ya que tiene no solo tiene nodos en los vértices del elemento, sino que también tiene nodos a mitad de las aristas. Esto nos resulta en mayor ecuaciones y tiempo de computerización, pero una solución más exacta, puesto que tiene mejor comportamiento.

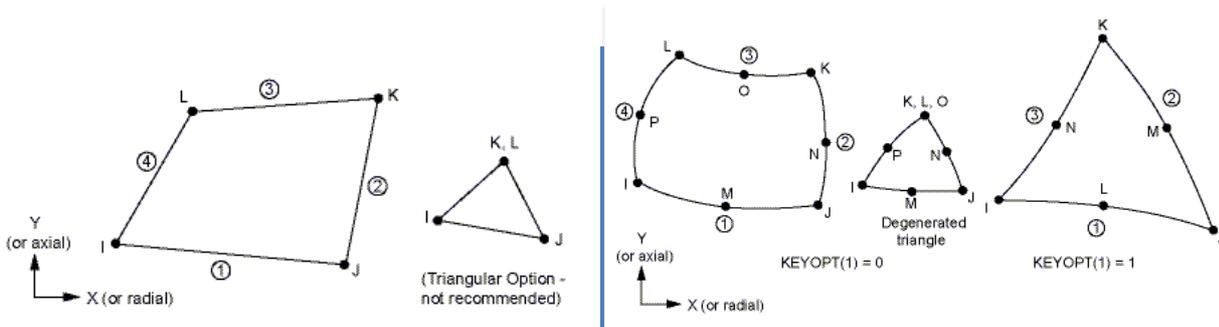


Figura 2-2.- Elementos PLANE182 y PLANE183.

Una vez escogido el tipo de elemento es importante escoger el comportamiento de este elemento, en *Options...* iríamos a *Element behavior* y seleccionaríamos bien tensión plana o deformación plana según el caso.

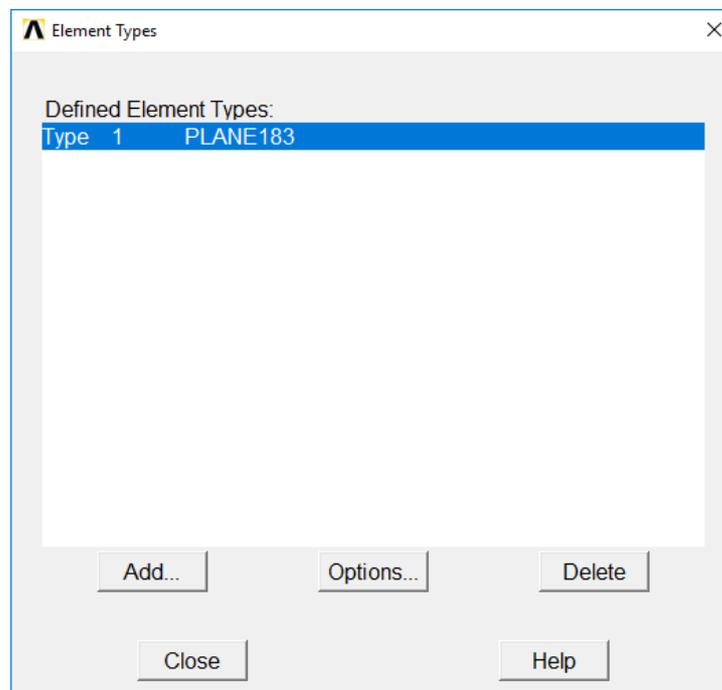


Figura 2-3.- Selección del elemento PLANE183.

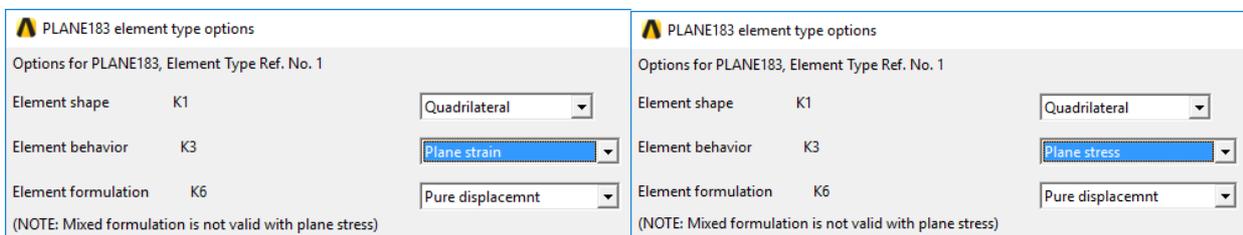


Figura 2-4.- Selección de comportamiento como deformación plana o como tensión plana.

Posteriormente, introducimos las propiedades del material, en este caso acero como hemos dicho anteriormente. Nos situamos en *Preprocessor > Material Props > Material Models*, escogemos un material isotrópico, elástico y lineal e introducimos el módulo de Young como 210 000 y el coeficiente de Poisson como 0.3. El módulo elástico lo introducimos en *MPa* para obtener los resultados de tensiones en esta unidad.

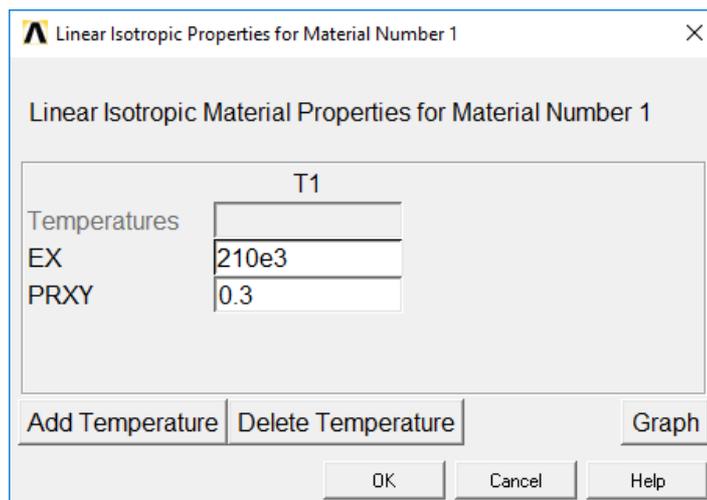


Figura 2-5.- Propiedades del material: módulo elástico y coeficiente de Poisson.

Una vez tenemos definido el tipo de elemento y el material, procedemos a crear la geometría, para ello nos quedaremos con un cuarto de la geometría circular del montaje debido a la existencia de planos de simetría y aplicaremos condiciones de contorno de simetría en las líneas correspondientes. Para la creación del eje y del agujero nos dirigimos a *Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Circle > Partial Annulus* y le especificamos la geometría del eje, y haciendo lo mismo especificamos la geometría del agujero.

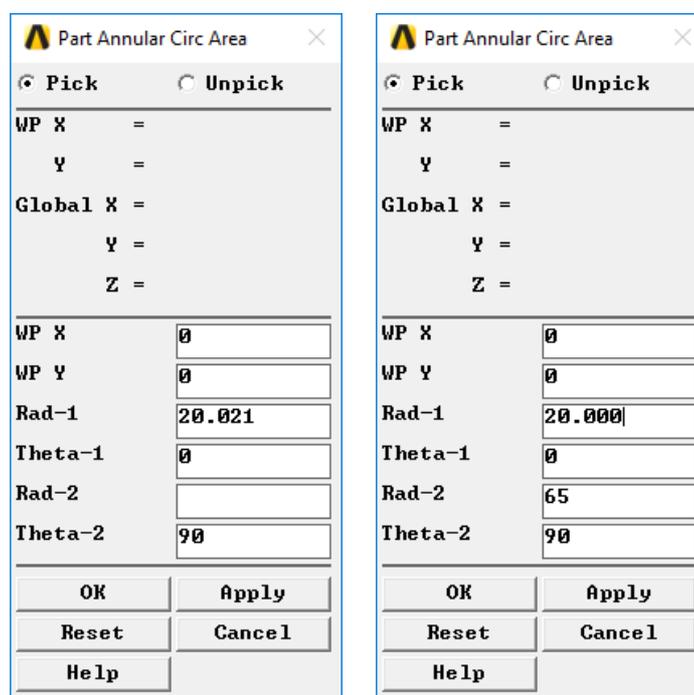


Figura 2-6.- Parámetros de la geometría del eje y del agujero, respectivamente.

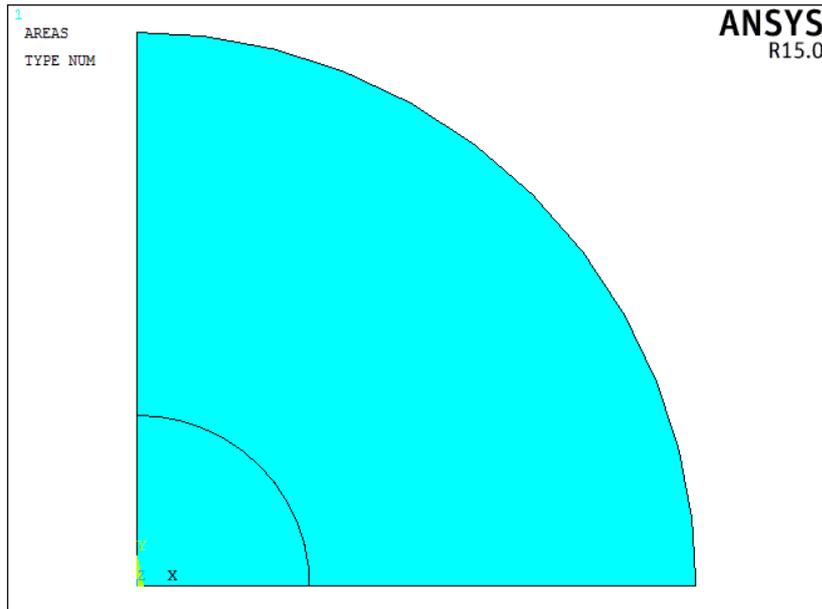


Figura 2-7.- Montaje bidimensional del problema de contacto.

Una vez tenemos creada la geometría pasamos a mallarla, para ello utilizamos elementos triangulares que vayan refinándose conforme se acercan a la zona de contacto, ya que es nuestra zona de interés. El mallado queda de la siguiente forma:

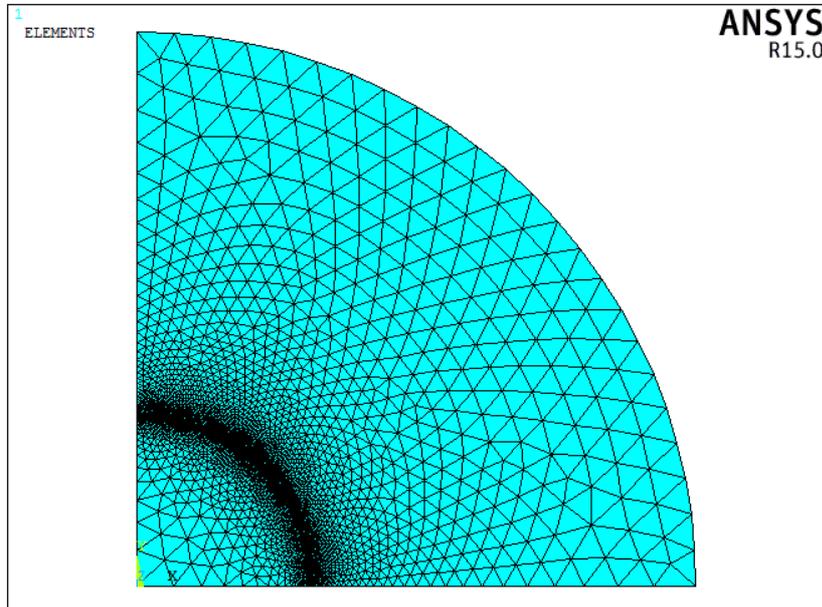


Figura 2-8.- Mallado progresivo de las áreas.

Con la malla hecha, el siguiente paso es la creación del par de contacto. Debemos ir a *Preprocessor > Modeling > Create > Contact Pair*. Seleccionamos la línea de contacto, la línea objetivo, especificamos el coeficiente de rozamiento como 0.2 y en las opciones cambiamos la matriz de rigidez de simétrica a antisimétrica. Esto se hace ya que al introducir rozamiento la matriz de rigidez en el contacto se vuelve antisimétrica.

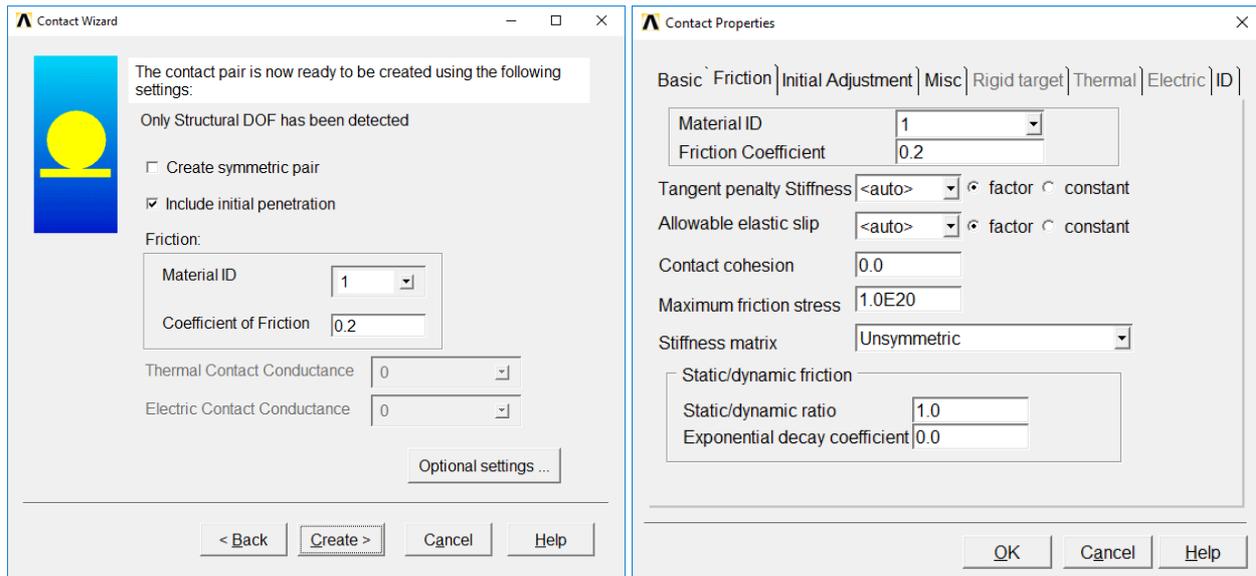


Figura 2-9.- Coeficiente de fricción y antisimetría de la matriz de rigidez del contacto.

Pasamos a seleccionar las opciones y controles de la solución. Vamos a *Solution > Analysis Type > Sol'n Controls* y especificamos la opción de análisis como grandes desplazamientos en estático. Esto es importante, ya que, aunque no haya grandes desplazamientos en nuestro problema, esta opción activa las no-linealidades. En nuestro caso el problema de contacto es un problema no-lineal y hay que resolverlo como tal.

Para el control de tiempo, definimos el tiempo de aplicación de la carga como 1 s, y que la aplicación sea en 15 pasos.

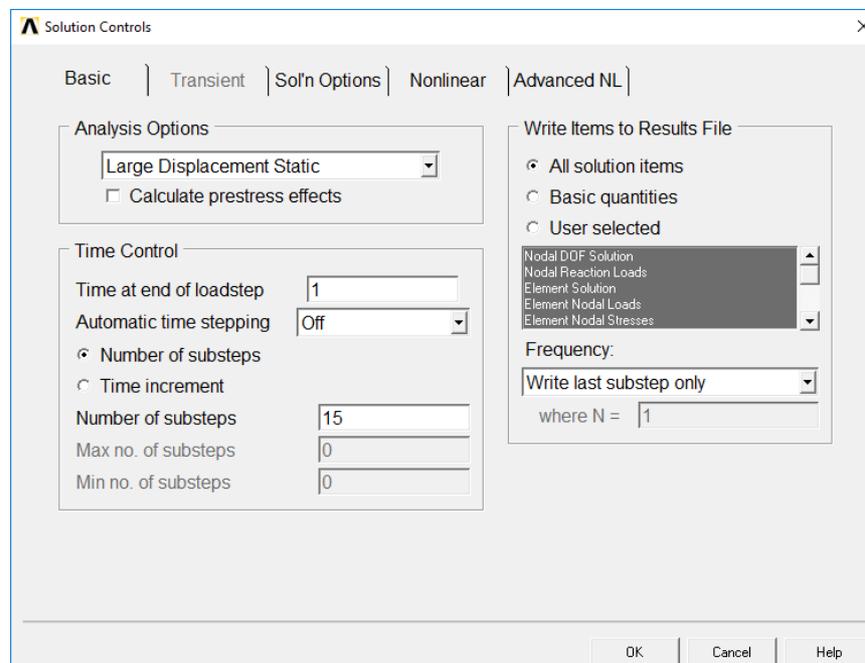


Figura 2-10.- Definición de las opciones para la solución.

El último paso antes de resolver sería aplicar las condiciones de contorno, iremos a *Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > Symmetry B.C. > On Lines* y seleccionamos las líneas inferiores y laterales para su aplicación.

Con esto hecho, pasamos a resolver en *Solution > Solve > Current LS* y obtenemos la solución de nuestro problema.

Distinguiremos las soluciones en tensión plana y deformación plana, escogiendo el comportamiento de elemento adecuado.

Como nuestra geometría es circular, nos interesa expresar las tensiones en ejes cilíndricos, para ello vamos a *Postprocessor > Options for Outp* y en *Results coord system* indicamos *Global cylindric*. Con este cambio ahora la dirección *X* es la dirección radial y la dirección *Y* es la circunferencial.

Para representar las tensiones radiales y circunferenciales vamos a *General Postproc > Plot Results > Contour Plot > Nodal Solu* y escogemos en *Stress* la componente *X* o *Y* según el caso.

2.2.1 Resultados en estado de tensión plana

Las soluciones obtenidas en el contacto son las siguientes:

Tensión	Valor por MEF	Valor analítico	Error relativo
T. Radial en el eje	-99,61	-99,81	0,20%
T. Circunf. en el eje	-99,58	-99,81	0,23%
T. Radial en el agujero	-99,61	-99,81	0,20%
T. Circunf. en el agujero	120,51	120,69	0,15%

Tabla 2-1.- Tensiones obtenidas en 2D en estado de tensión plana.

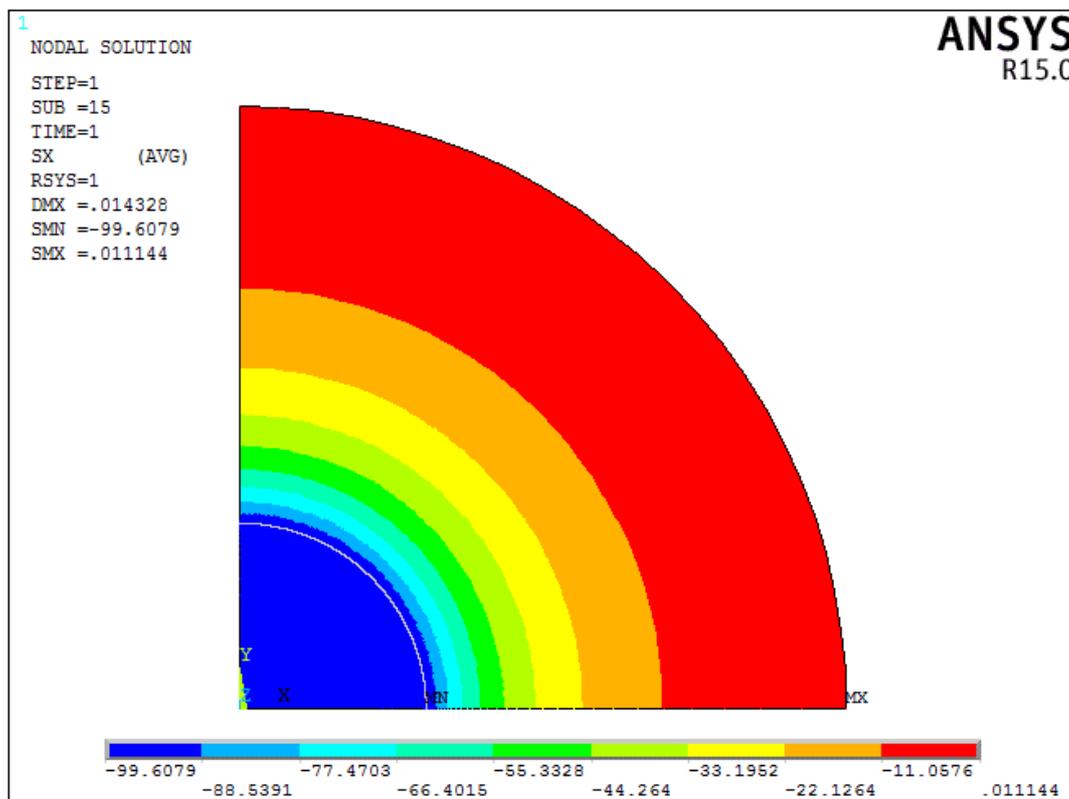


Figura 2-11.- Tensión radial en estado de tensión plana.

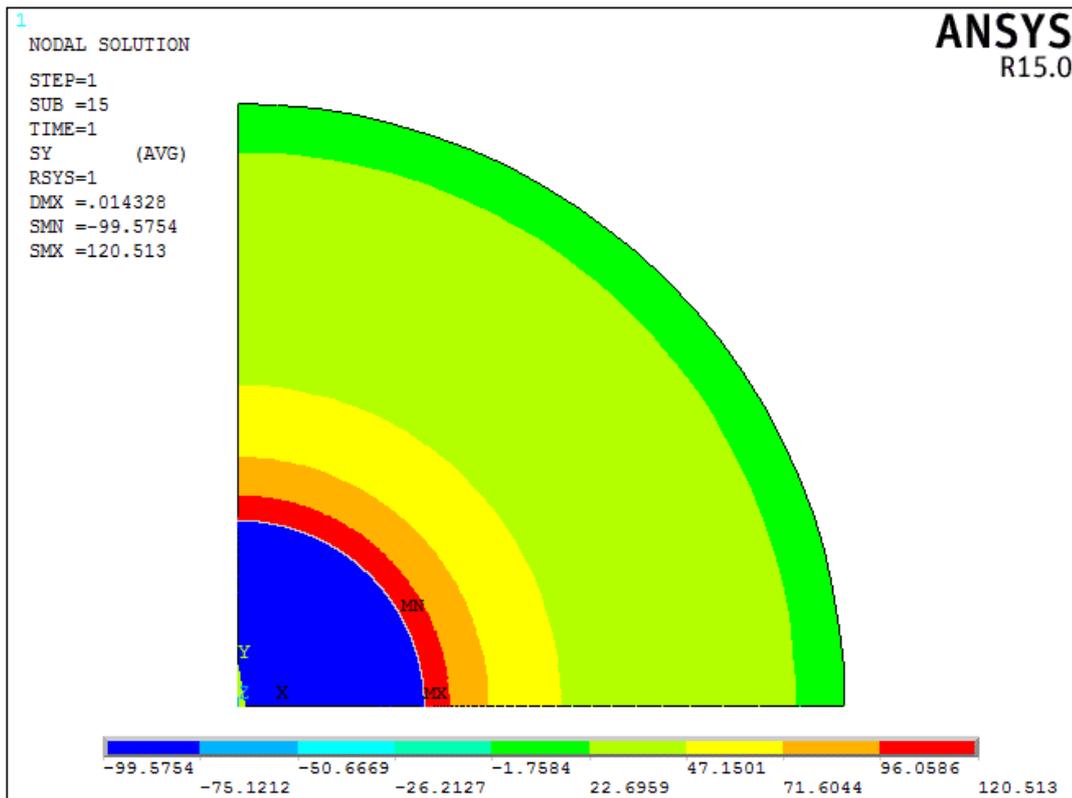


Figura 2-12.- Tensión circunferencial en estado de tensión plana.

2.2.2 Resultados en estado de deformación plana

Las soluciones en el caso de deformación plana son las siguientes:

Tensión	Valor por MEF	Valor analítico	Error relativo
T. Radial en el eje	-109,43	-109,68	0,23%
T. Circunf. en el eje	-109,43	-109,68	0,23%
T. Radial en el agujero	-109,43	-109,68	0,23%
T. Circunf. en el agujero	132,41	132,62	0,16%

Tabla 2-2.- Tensiones obtenidas en 2D en estado de deformación plana.

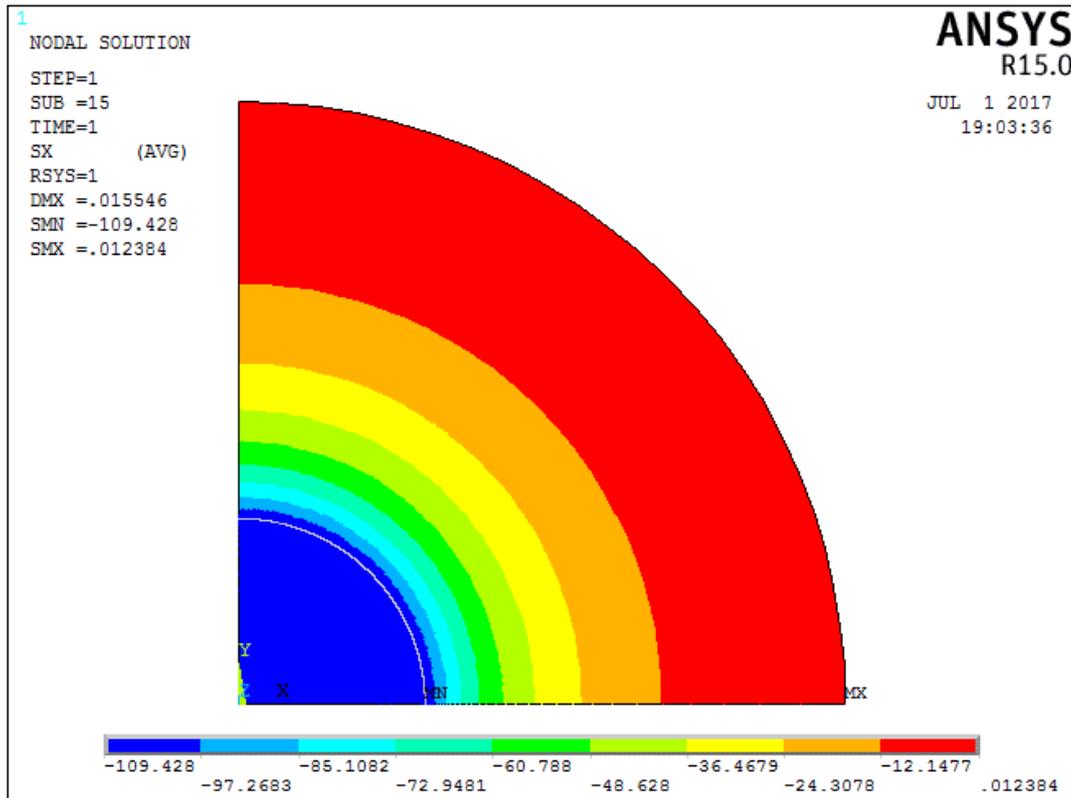


Figura 2-13.- Tensión radial en estado de deformación plana.

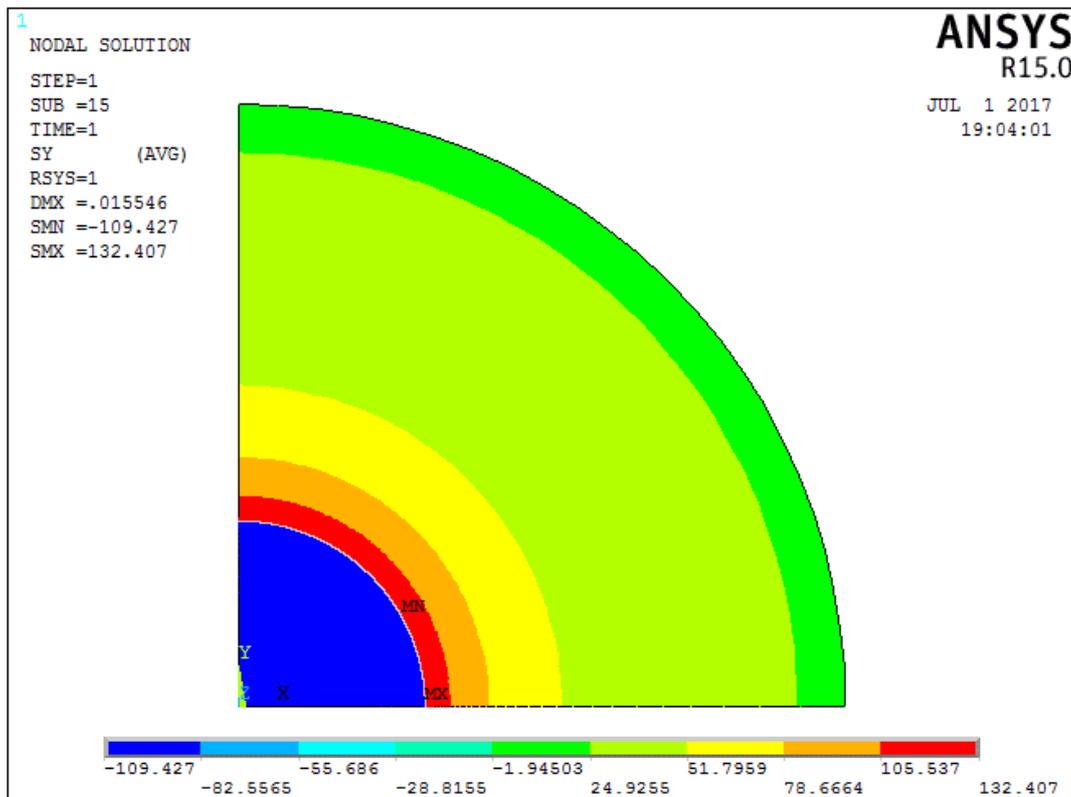


Figura 2-14.- Tensión circunferencial en estado de deformación plana.

2.2.3 Análisis de convergencia de resultados

Es importante, a la hora de hacer análisis por elementos finitos tener en cuenta la convergencia del resultado que queremos, en función del número de nodos o elementos.

Para ver esta convergencia representaremos los valores de tensión radial obtenidos en el contacto en función del número de nodos de varios mallados. Los resultados fueron los siguientes:

Número de nodos	Tensión radial en T.P. (MPa)	Tension radial en D.P. (MPa)
2118	-98,73	-108,39
3058	-99,16	-108,89
7366	-99,45	-109,24
17162	-99,61	-109,43

Tabla 2-3.- Convergencia del análisis mediante MEF en 2D.

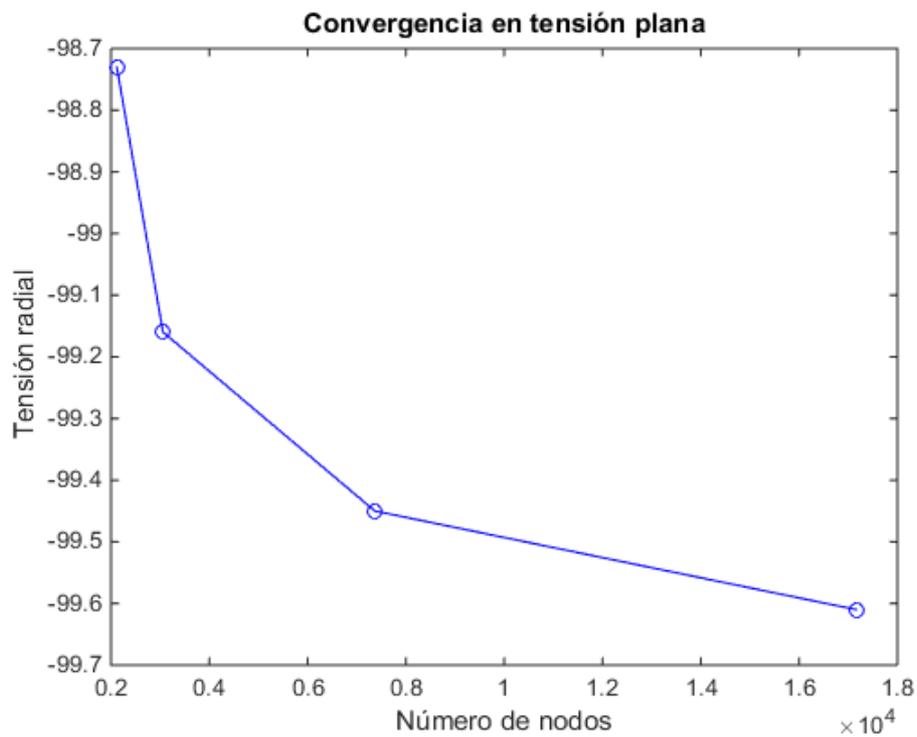


Figura 2-15.- Gráfica de convergencia de resultados en tensión plana.

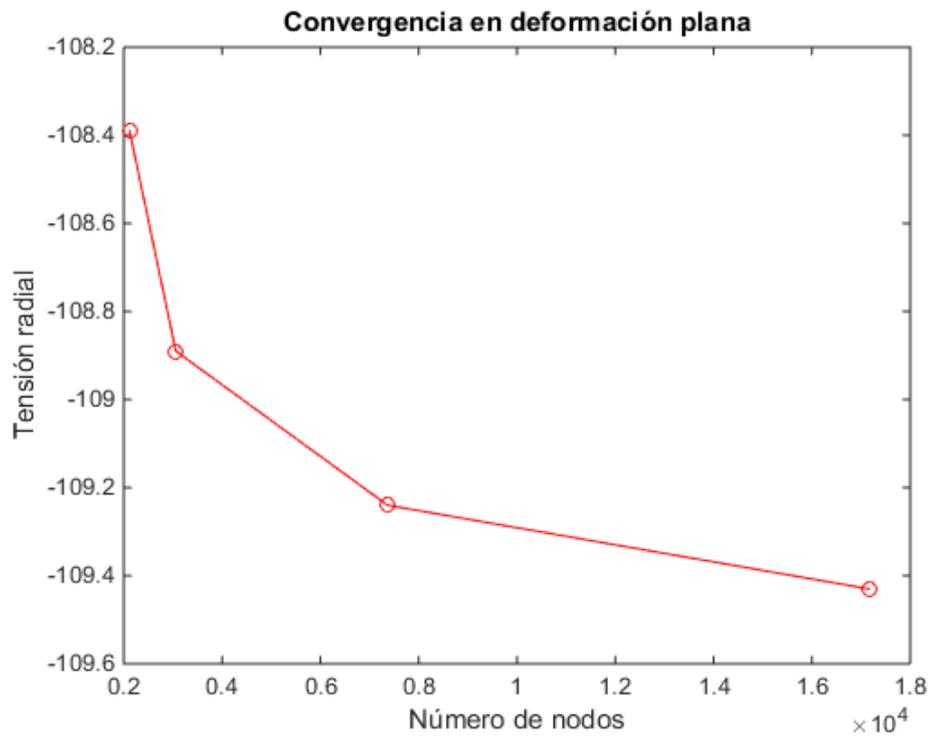


Figura 2-16.- Gráfica de convergencia de resultados en deformación plana.

Vemos que efectivamente, como se esperaba, las gráficas van tendiendo a un valor concreto conforme se refina más la malla y se acerca más al valor analítico.

3 OBTENCIÓN DE TENSIONES SIN FLEXIÓN.

CASO 3D

Para el modelo tridimensional emplearemos un eje con el mismo diámetro y le añadiremos una longitud de 300 mm, para el agujero, simularemos un agarre en un extremo del eje y tendrá una longitud de 100 mm.

Este será el modelo que utilizaremos cuando introduzcamos flexión en el eje, que aplicaremos una fuerza en el extremo opuesto al agarre del eje, pero en este caso solo vamos a obtener las tensiones debidas a la interferencia diametral.

Para poder hacer una buena malla, vamos a separar el eje en dos volúmenes, uno será el que se encuentra dentro del agujero de longitud 100 mm, y el otro será la parte del eje que queda fuera del agarre, de longitud 200 mm.

Al igual que el caso bidimensional, debido a la existencia de simetrías, utilizaremos un cuarto del modelo completo. Para crear la geometría hacemos lo siguiente:

Primero introducimos el tipo de elemento que vamos a utilizar en el análisis, que en nuestro caso será el elemento SOLID187, este tipo de elemento es un tetraedro con 10 nodos; 4 de ellos en los vértices y los otros 6 se encuentran en el medio de las aristas. Utilizaremos este elemento para poder refinar bien en la zona de contacto del borde del agarre.

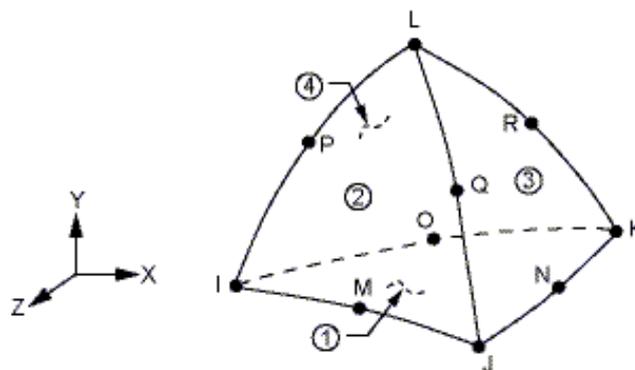


Figura 3-1.- Elemento SOLID187.

Después, creamos la parte del eje que se encuentra fuera del agujero creando la sección y posteriormente la extruiremos y desplazaremos. Vamos a *Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Circle > Partial Annulus* y le especificamos las medidas correspondientes. Para extruir el área, nos dirigimos a *Preprocessor > Modeling > Operate > Extrude > Areas > Along Normal*, seleccionamos el área en cuestión e introducimos una distancia de 200 mm. Después de esto, desplazamos el volumen 100 mm en dirección del eje.

Pasamos a crear la otra parte del eje, creamos un área de igual manera que con la otra, con la única diferencia que ahora la longitud de extrusión sería de 100 mm.

Una vez tenemos los dos volúmenes que conforman el eje, pasamos a unir las caras comunes y el programa tome como un solo volumen, en lugar de dos independientes. Para ello acudimos a *Preprocessor > Operate > Booleans > Glue > Volumes*, seleccionamos los dos volúmenes y quedarán unidos.

El agarre lo crearemos de igual forma, crearemos el área con las dimensiones pertinentes y la extruiremos tras ello con una longitud de 100 *mm*.

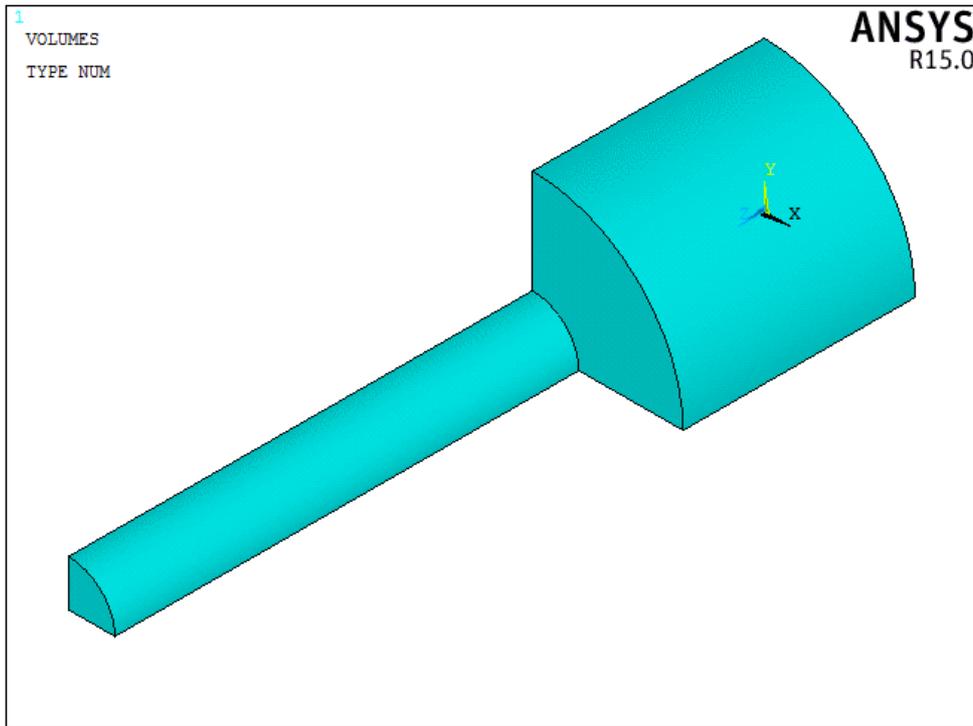


Figura 3-2.- *Montaje tridimensional del problema de contacto.*

Una vez tenemos creado el eje y el agujero pasamos a mallar los volúmenes para más tarde crear el par de contacto. Es importante hacer una malla fina en la zona de contacto cerca del borde del agarre, puesto que en esta zona se producen gradientes de tensiones bastante grandes en dirección axial. Hacemos una malla progresiva que se vaya refinando conforme se acerca al contacto.

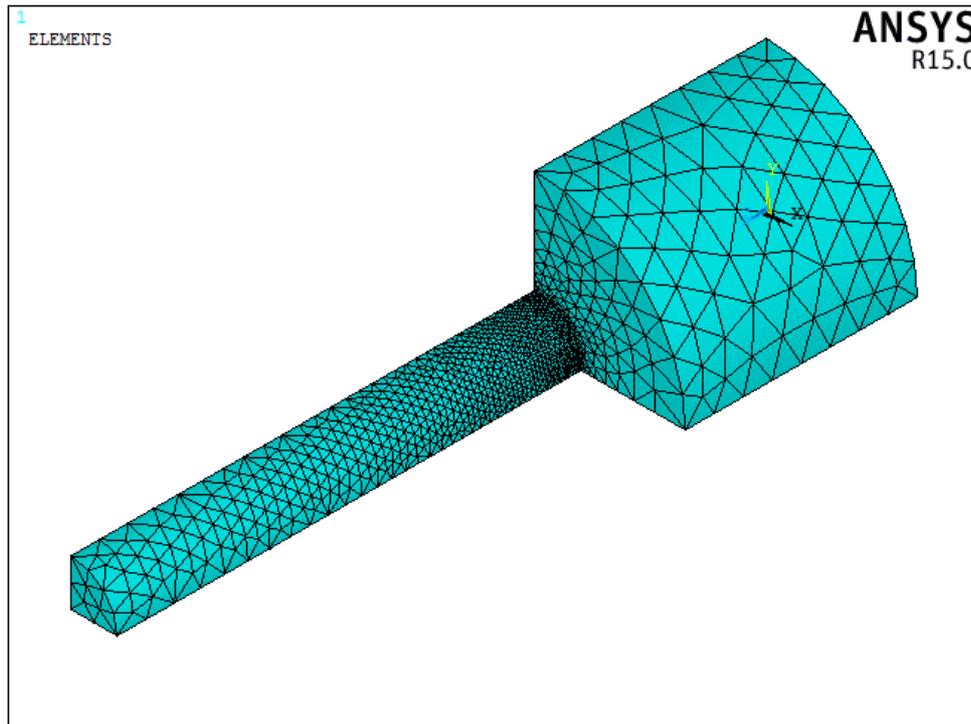


Figura 3-3.- *Mallado progresivo de los volúmenes.*

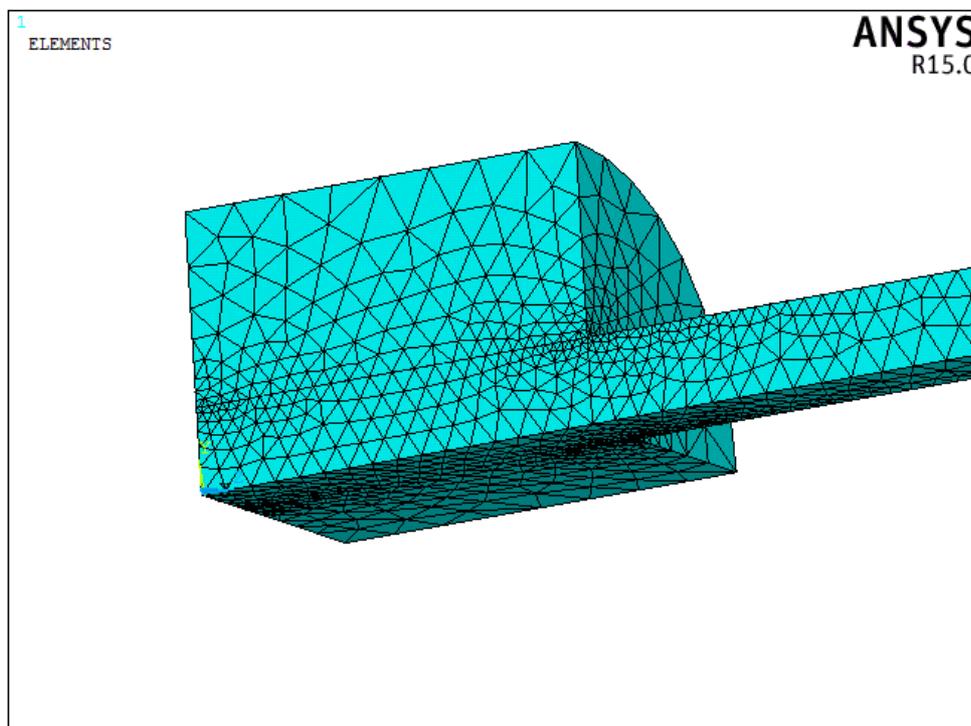


Figura 3-4.- *Detalle del mallado en la zona de contacto.*

Con la malla creada podemos continuar con la creación del par de contacto entre el eje y el agarre. Esto se hará de igual manera que en el caso bidimensional, con la única diferencia que ahora el contacto no se producirá entre dos líneas, sino entre dos superficies. De esta forma seleccionamos las áreas que intervienen en el contacto, introducimos el coeficiente de rozamiento como 0.2 y cambiamos la matriz de rigidez de simétrica a antisimétrica.

Nos dirigimos ahora a especificar las opciones para la solución, que nuevamente activamos en *Solution > Analysis Type > Sol'n Controls* los grandes desplazamientos y marcamos que lo resuelva en 15 pasos con un tiempo de aplicación de 1 s.

Hecho esto, el último paso será aplicar las condiciones de contorno. En este caso aplicaremos la condición de contorno de simetría en las áreas pertinentes yendo a *Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > Symmetry B.C. > On Areas*. Junto a ello debemos restringir el desplazamiento en dirección axial, tanto en el eje como en el agujero. Para el agujero marcaremos que el área posterior del agarre no pueda desplazarse en la dirección mencionada y lo haremos yendo a *Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Areas*. Por otro lado, para el eje seleccionaremos el nodo que se encuentra en la intersección de los planos de simetría, en la parte posterior en *Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Nodes*.

Una vez todo ha quedado definido solo resta ejecutar la acción de resolver el modelo. Vamos a *Solution > Solve > Current LS* y mostramos los resultados que nos interesan.

3.1 Resultados del modelo 3D.

Antes que nada, cambiamos el sistema de coordenadas al igual que hicimos antes a coordenadas cilíndricas por su idoneidad en este modelo.

Representaremos las tensiones radiales y circunferenciales del modelo junto a la presión de contacto entre las superficies.

Para mostrar la presión de contacto, nos dirigiremos a *General Postproc > Plot Results > Nodal Solu* y en *Contact* escogemos *Contact Pressure*. El resultado es el siguiente:

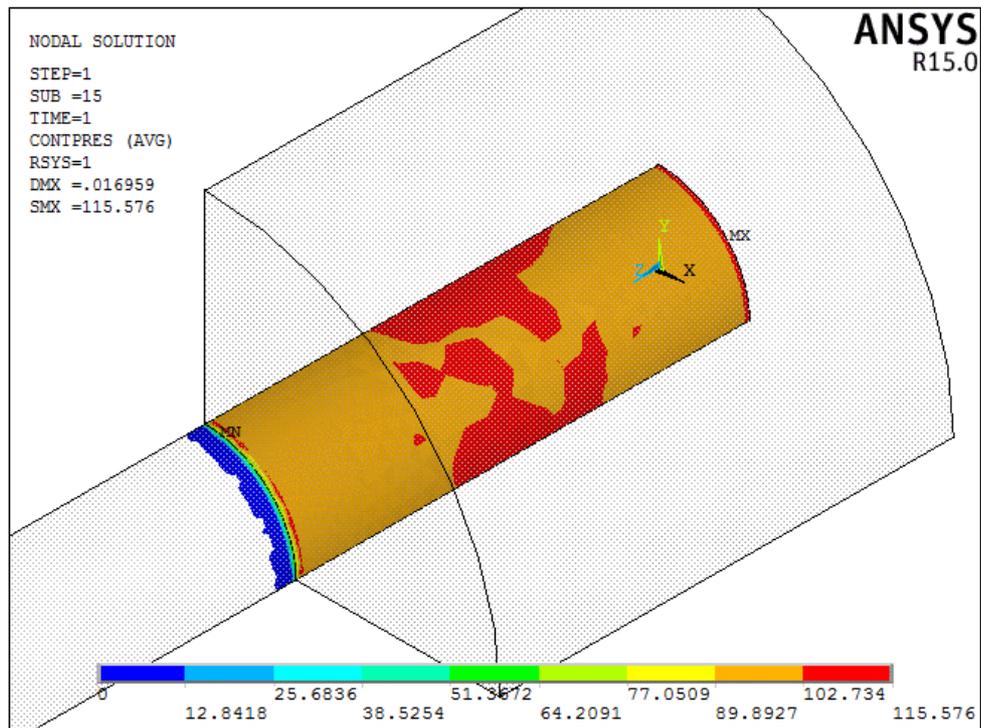


Figura 3-5.- Presión de contacto en el modelo 3D.

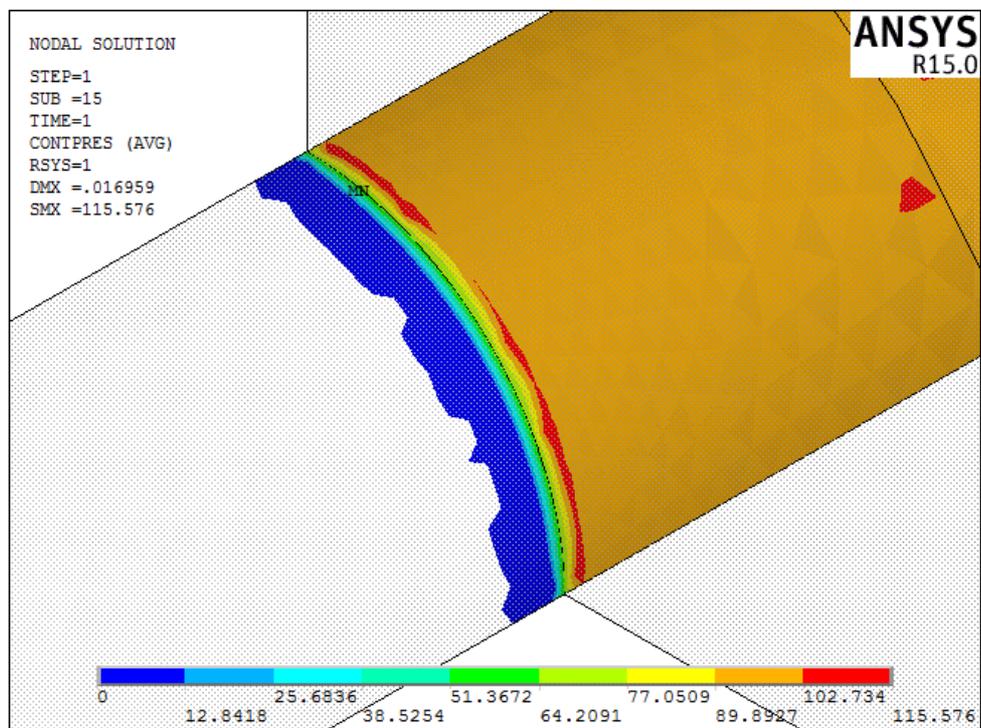


Figura 3-6.- Detalle de la presión de contacto en el borde de la unión.

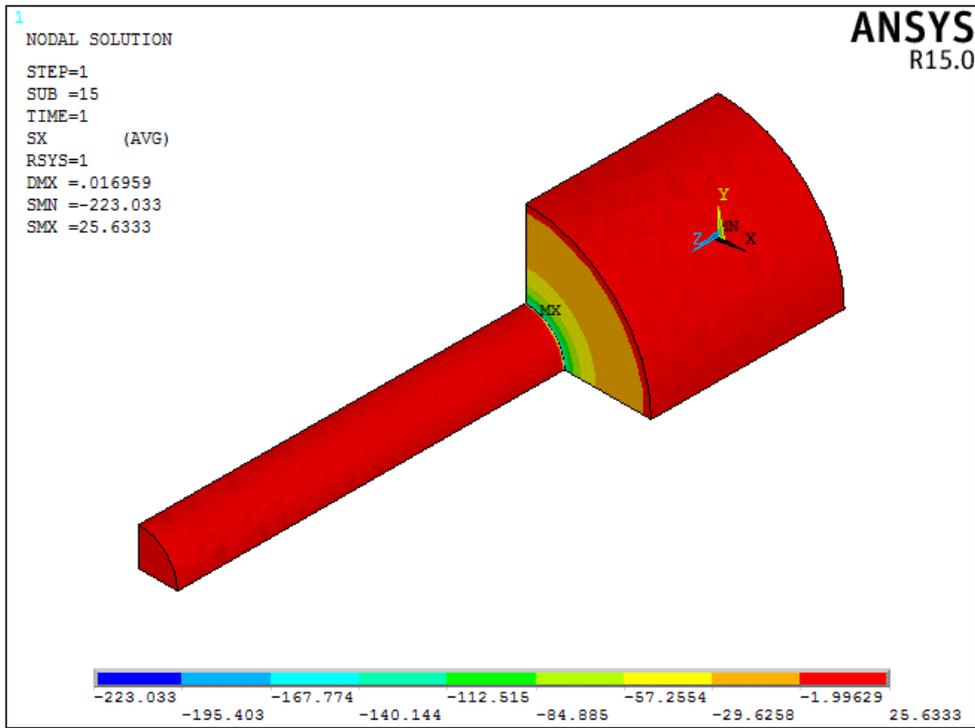


Figura 3-7.- Tension radial en 3D

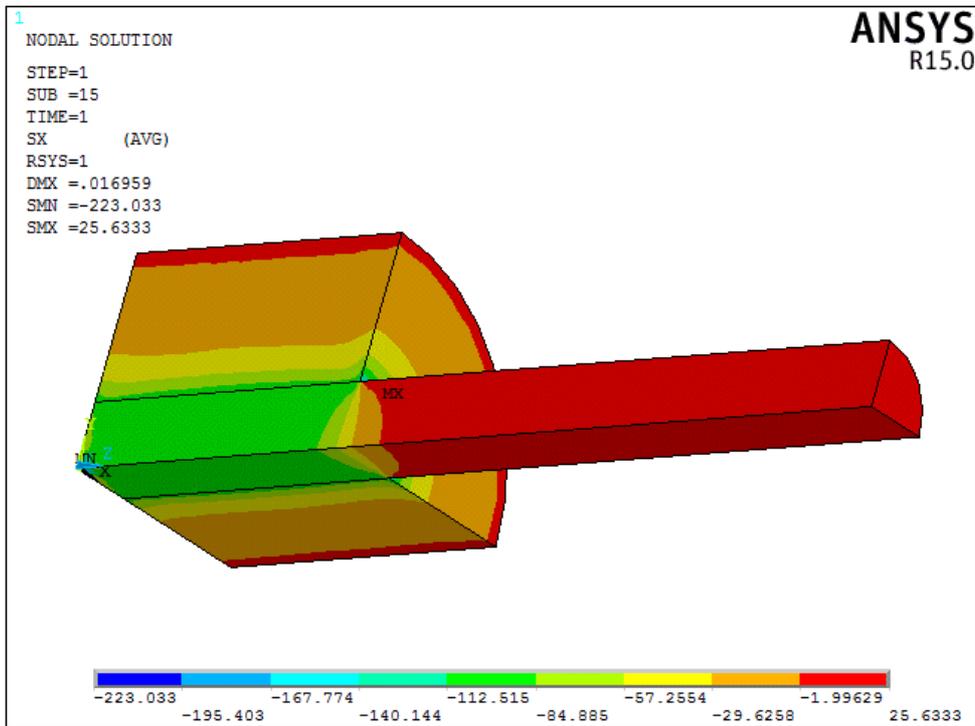


Figura 3-8.- Otra vista de la tensión radial 3D.

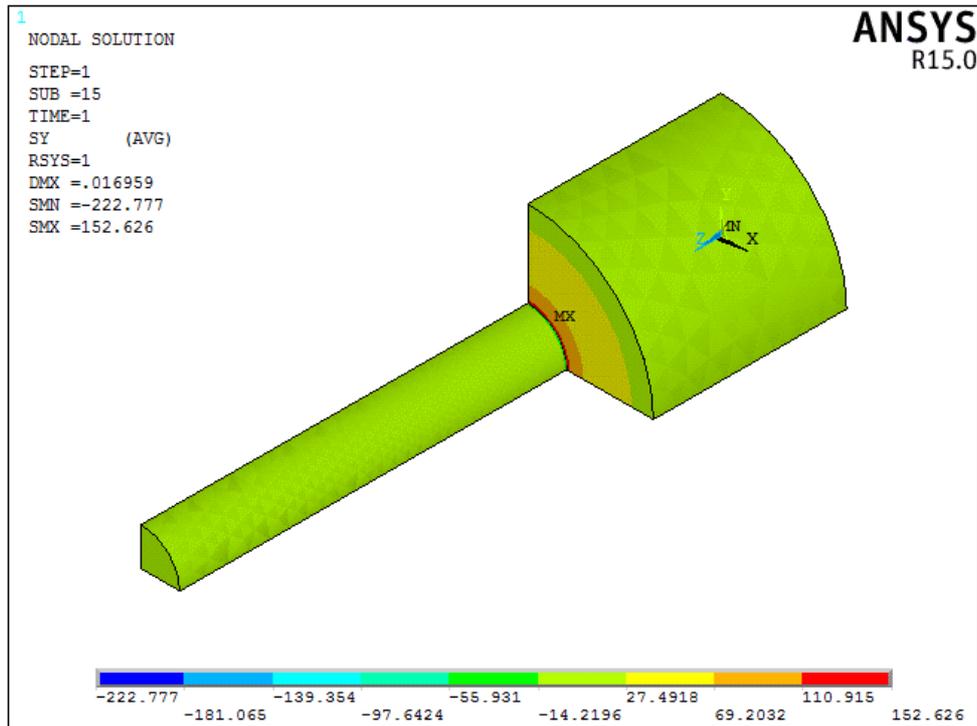


Figura 3-9.- Tension circunferencial en 3D.

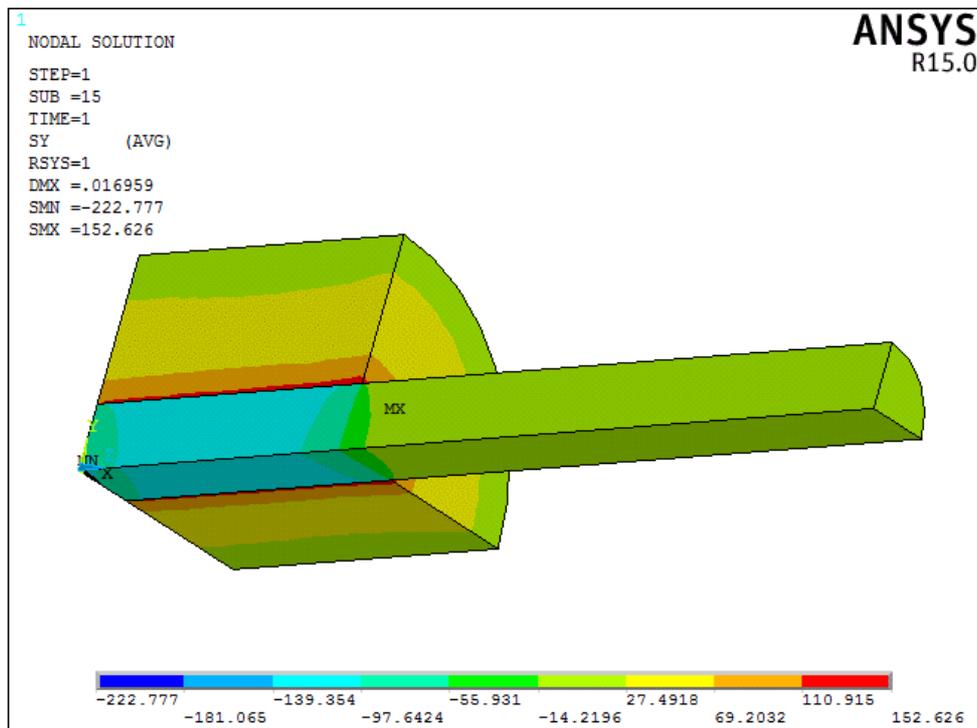


Figura 3-10.- Otra vista de la tensión circunferencial 3D.

Tras representar en el modelo las tensiones radial y circunferencial, podemos ver la gráfica con la evolución de estas tensiones a lo largo del eje.

Para hacerlo vamos a *General Postproc > Path Operations*, seleccionamos definir la línea mediante dos nodos, uno en un extremo del eje y el otro en el otro extremo, y escogemos que nos represente las tensiones en dirección *X* e *Y*.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

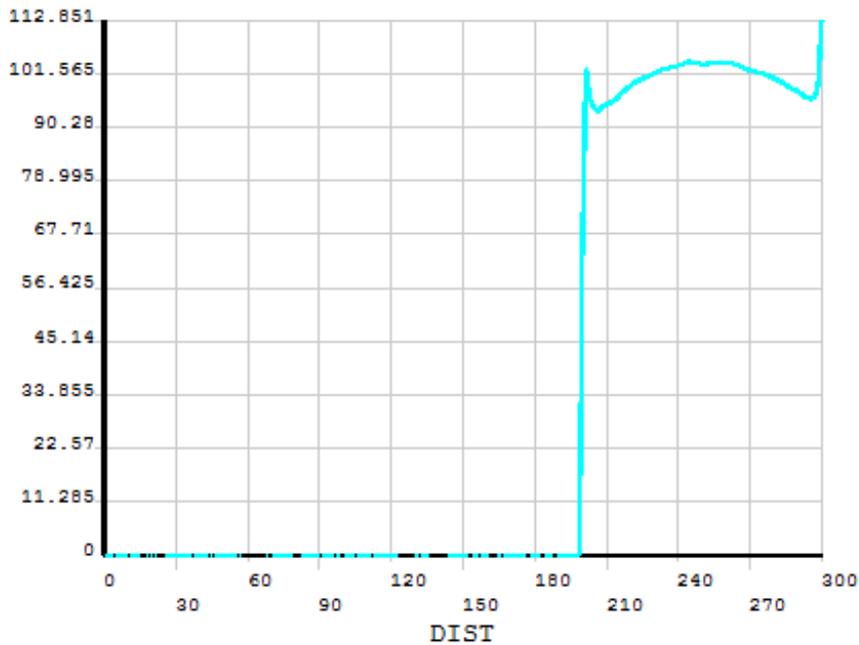


Figura 3-11.- Gráfica con la evolución de la presión de contacto a lo largo del eje.

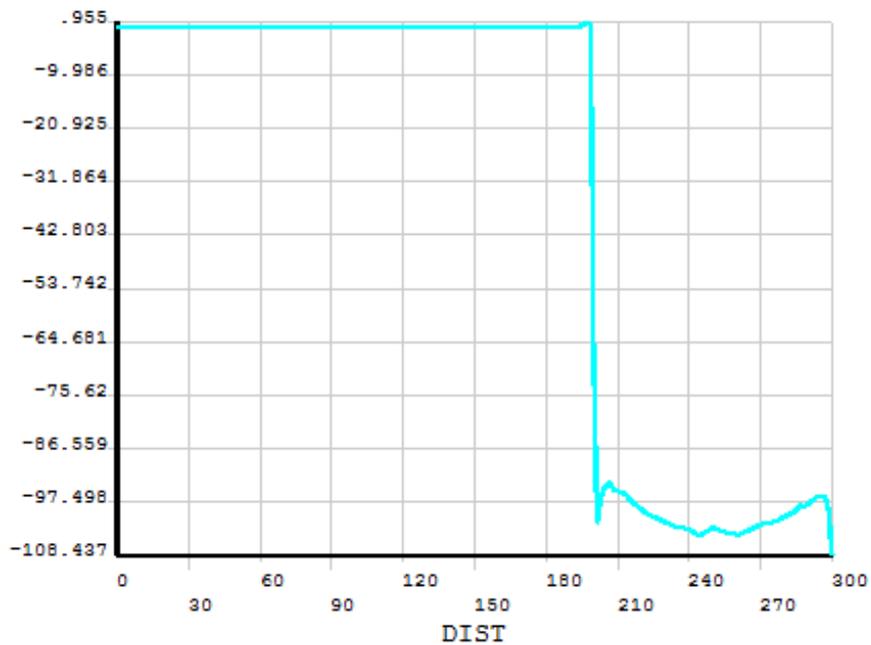


Figura 3-12.- Gráfica con la evolución de la tensión radial a lo largo del eje.

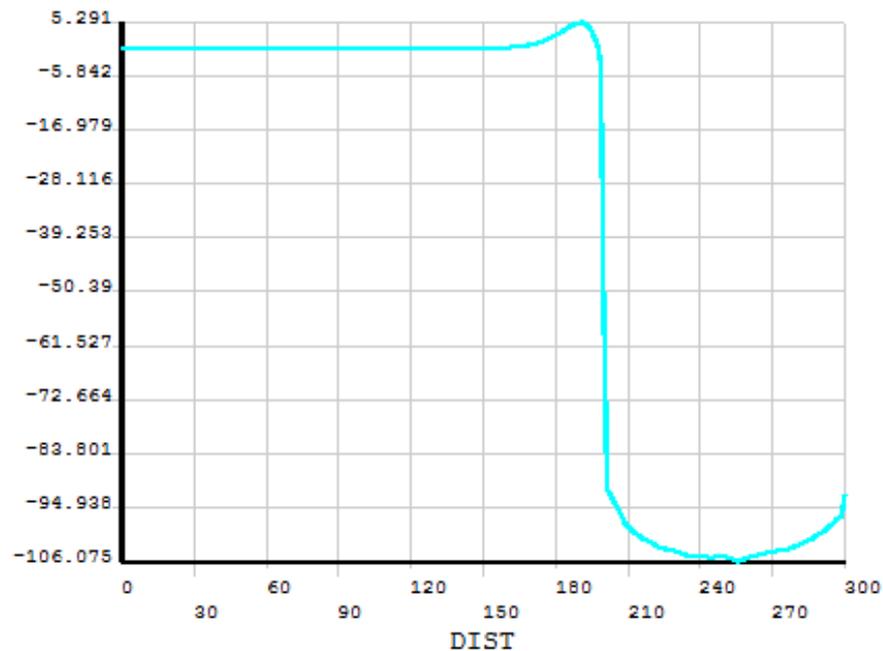


Figura 3-13.- Gráfica con la evolución de la tensión circunferencial a lo largo del eje

Respecto a las gráficas de la presión de contacto y tensión radial, vemos que la forma y valores alcanzados son casi idénticos. Esto es de esperarse pues la tensión radial en una distancia igual al radio es igual a la presión de contacto.

Se puede apreciar un pico tanto en la gráfica de la presión de contacto, como en la tensión radial muy cerca del borde del agujero, esto es debido al concentrador de tensiones que causa ese mismo borde y que teóricamente tiende a infinito. Sin embargo, en la solución por el método de elementos finitos, solo podemos acercarnos a ese valor teórico y que se irá haciendo mayor conforme más pequeña sean los elementos de esa zona. Con el mallado actual, el concentrador de tensiones será de 1.09, que es el cociente del valor de tensión en el pico en la zona del borde, respecto al valor de la tensión en el punto adyacente justo antes de que la tensión radial aumente debido al concentrador.

Con respecto a los valores de tensión radial y circunferencial a mitad del agarre, los valores alcanzados son de -102.91 MPa y -105.02 MPa , respectivamente. Podemos comprobar que, en el modelo, al no poderse simplificar a un estado de tensión plana o de deformación plana, los valores obtenidos se sitúan entre los obtenidos con tensión plana y los obtenidos con deformación plana.



Figura 3-14.- Superposición de resultados de tensión radial con los resultados analíticos de tensión radial 2D.

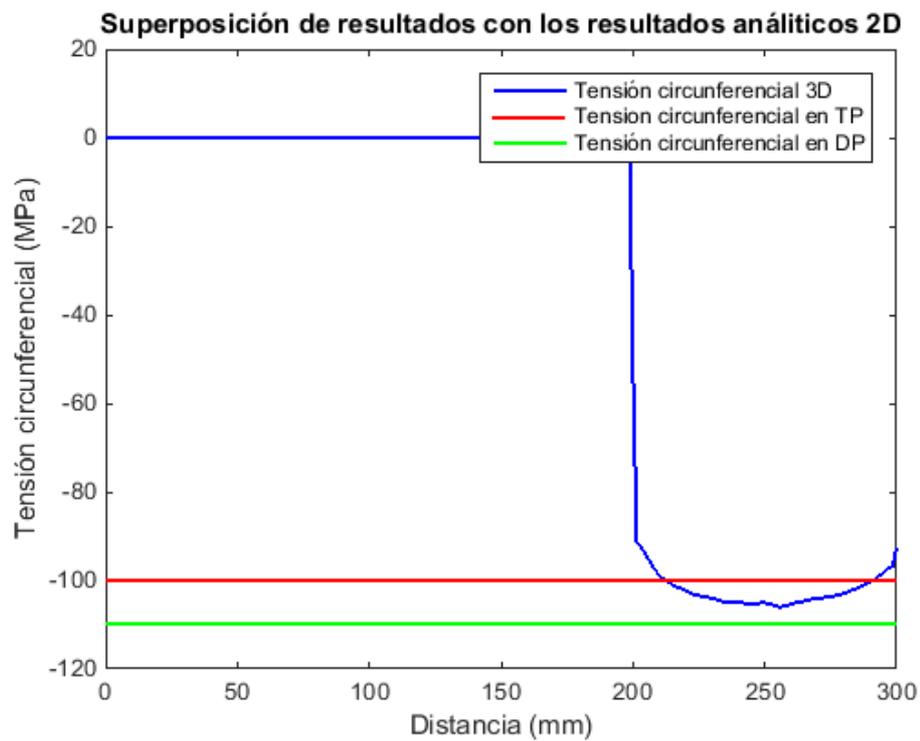


Figura 3-15.- Superposición de resultados de tensión radial con los resultados analíticos de tensión radial 2D.

3.2 Análisis de convergencia de resultados

Para el modelo tridimensional, volvemos a hacer un análisis de convergencia de las soluciones obtenidas. Resolveremos el modelo con cuatro tamaños de malla diferente y enfrentaremos el valor de la tensión radial obtenida en el centro del agarre con el número de nodos usados en el análisis por elementos finitos.

Tenemos los siguientes datos:

Número de nodos	Tensión radial (MPa)
5847	-99,13
7756	-101,23
12448	-102,53
17952	-102,91

Tabla 3-1.- Convergencia del análisis mediante MEF en 3D.

Con esos datos obtenemos la siguiente gráfica:

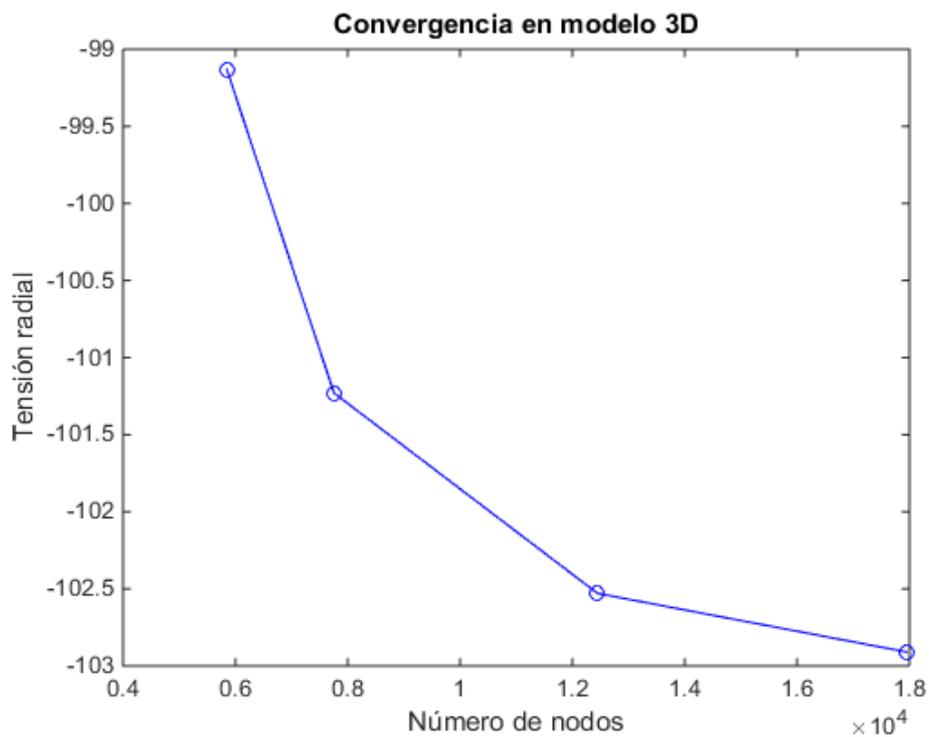


Figura 3-16.- Gráfica de convergencia de resultados en 3D.

Vemos que al igual que la gráfica de convergencia en tensión plana o deformación plana, la forma de la curva es similar y parece tender a un valor concreto. En nuestro caso, el análisis del modelo 3D lo hemos realizado con el que tiene más nodos, que está más refinado y los resultados son más precisos.

4 OBTENCIÓN DE TENSIONES INTRODUCIENDO FLEXIÓN

Una vez tenemos terminado el modelo tridimensional únicamente sometido al ajuste a presión y hemos determinado que las tensiones producidas son coherentes con lo obtenido en el análisis 2D, junto a los cambios que produce el análisis 3D como son la aparición de concentradores de tensión, y la forma del gradiente de tensiones en la zona de contacto que alcanza su valor máximo hacia la mitad del alojamiento, procedemos a introducir una fuerza en el extremo, de manera que produzca la flexión del eje.

Para este análisis nos quedaremos solo con una mitad del modelo completo, puesto que este solo tiene un plano de simetría debido a la fuerza que introducimos.

La fuerza que aplicaremos en el extremo será de 2000 N hacia abajo, y como hemos dicho, al trabajar con la mitad del modelo, la fuerza que introduciremos será de 1000 N hacia abajo.

Para hacer los volúmenes, hemos seguido las mismas indicaciones que en el caso sin flexión, esto es, para el eje hemos creado dos volúmenes para poder refinar la zona de contacto, diferenciados en el volumen contenido dentro del agujero y el volumen del eje exterior al contacto.

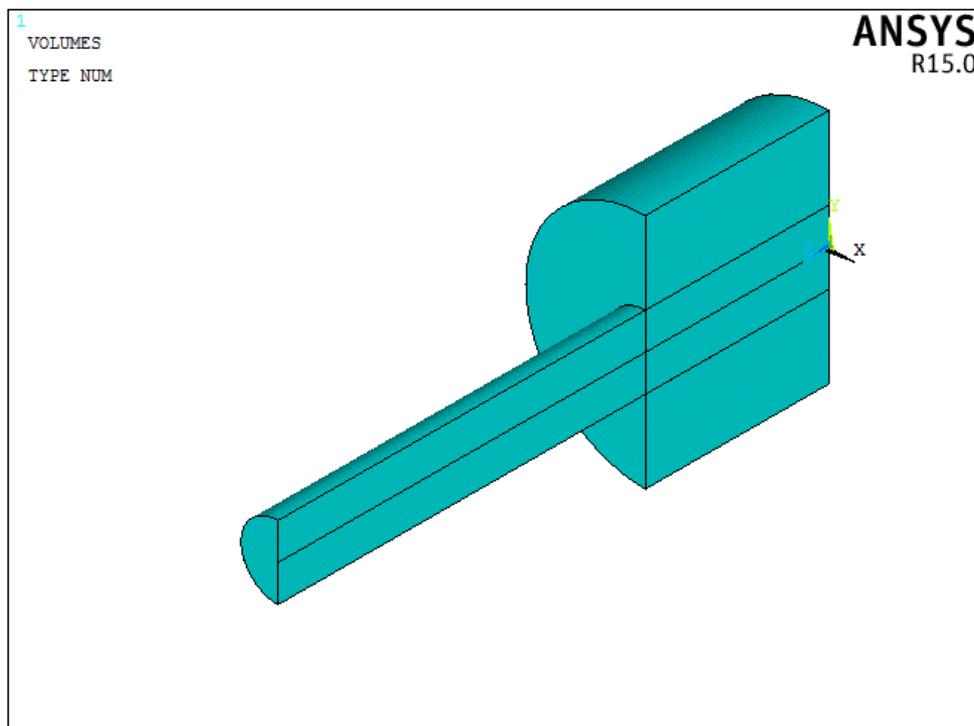


Figura 4-1.- Montaje para del problema de contacto con flexión.

El mallado de los volúmenes lo hacemos de la misma forma que en el apartado anterior, pero esta vez con más atención a la zona superior e inferior que son las zonas donde se intentará separar y clavar en el agarre, respectivamente.

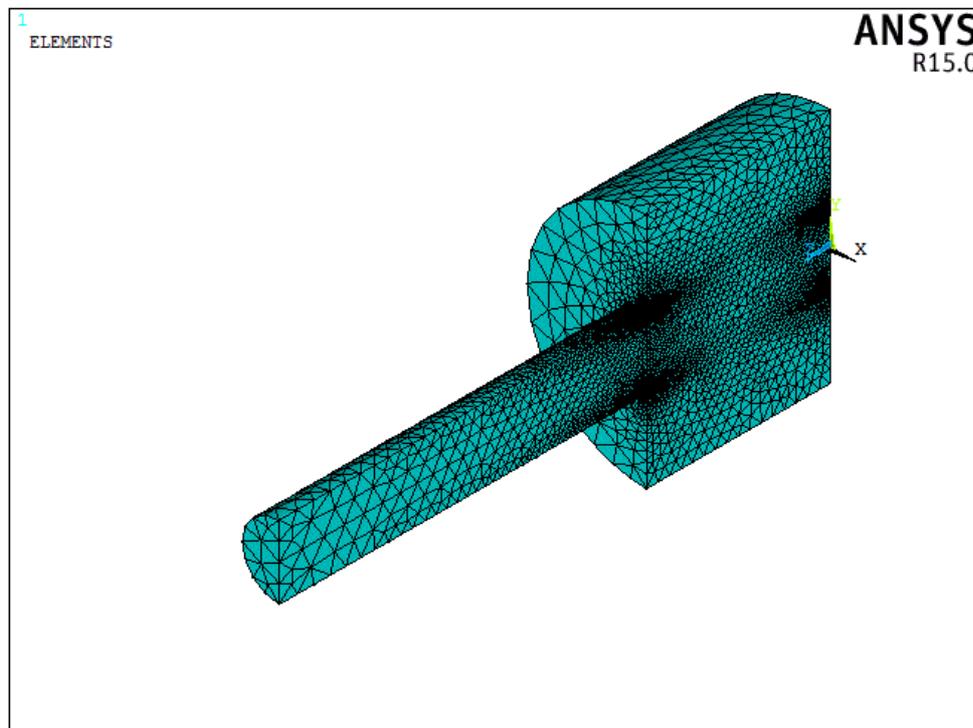


Figura 4-2.- Mallado de los volúmenes.

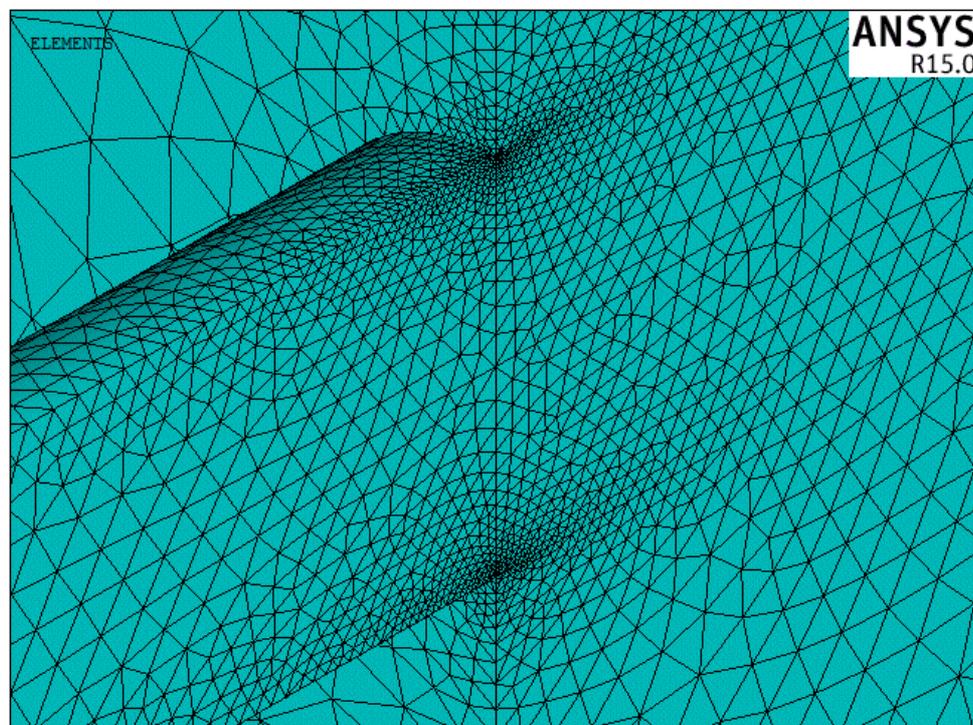


Figura 4-3.- Detalle de la malla en la zona del borde del contacto.

Tras tener la malla completada, procedemos a crear el par de contacto de la misma forma que en análisis anterior y tras ello accedemos al módulo *Solution* para aplicar las condiciones de contorno y la fuerza vertical que provocará la flexión.

Las condiciones de contorno especificadas son las siguientes: aplicamos la condición de simetría, imponemos que el área posterior del agarre no pueda desplazarse de manera axial y restringimos el movimiento vertical del centro del eje en la parte posterior de este.

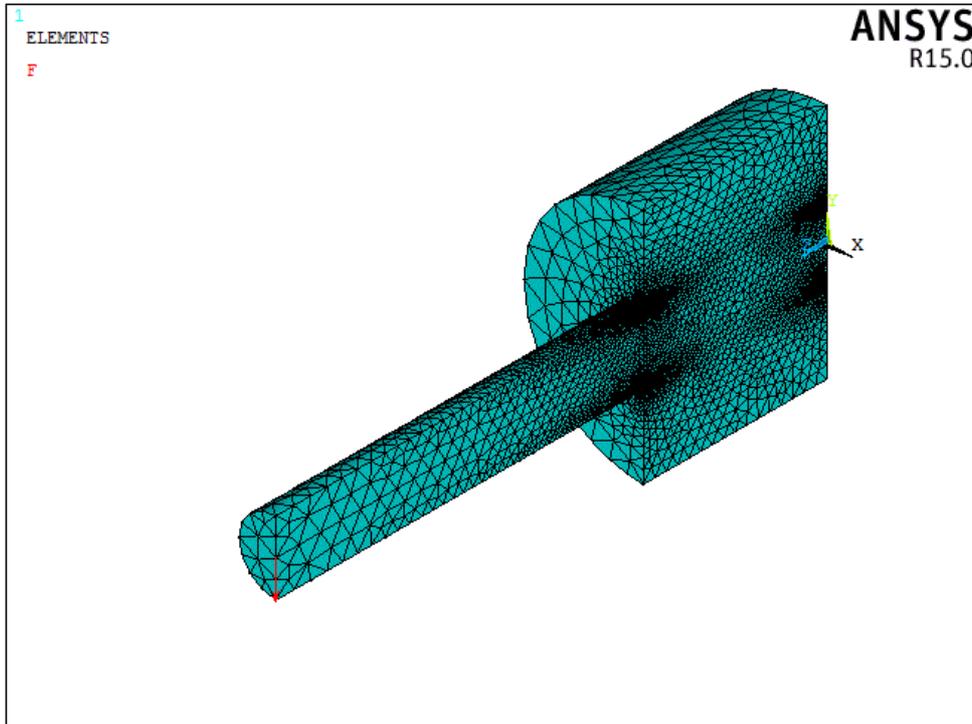


Figura 4-4.- Modelo con la malla y la fuerza que provocará la flexión del eje.

Para la solución, debemos volver a activar en *Solution > Analysis Type > Sol'n Controls* los grandes desplazamientos e indicamos que lo resuelva en un tiempo de aplicación de la carga de 1 s con 15 pasos.

Una vez tenemos el modelo con su solución, procederemos a representar las soluciones. En este análisis nos interesará, junto a las tensiones radial y circunferencial, la tensión axial. Además, nos centraremos más concretamente en las curvas de las tensiones a lo largo de la longitud del eje en la parte inferior y superior.

Los resultados de tensiones en la pieza son los siguientes:

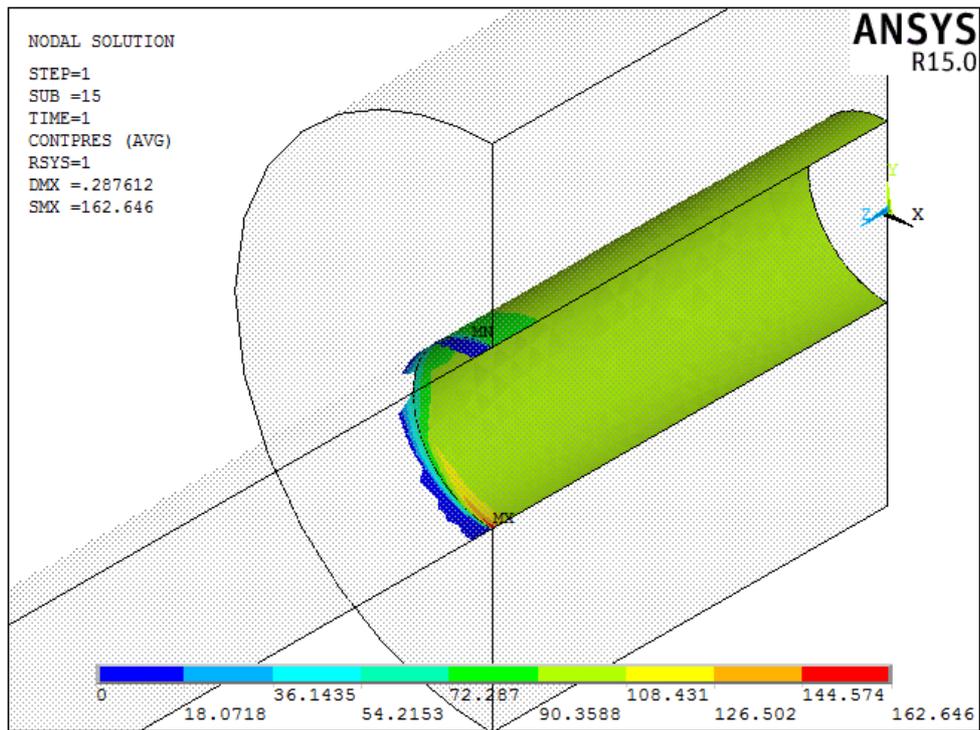


Figura 4-5.- Presión de contacto del modelo 3D con flexión.

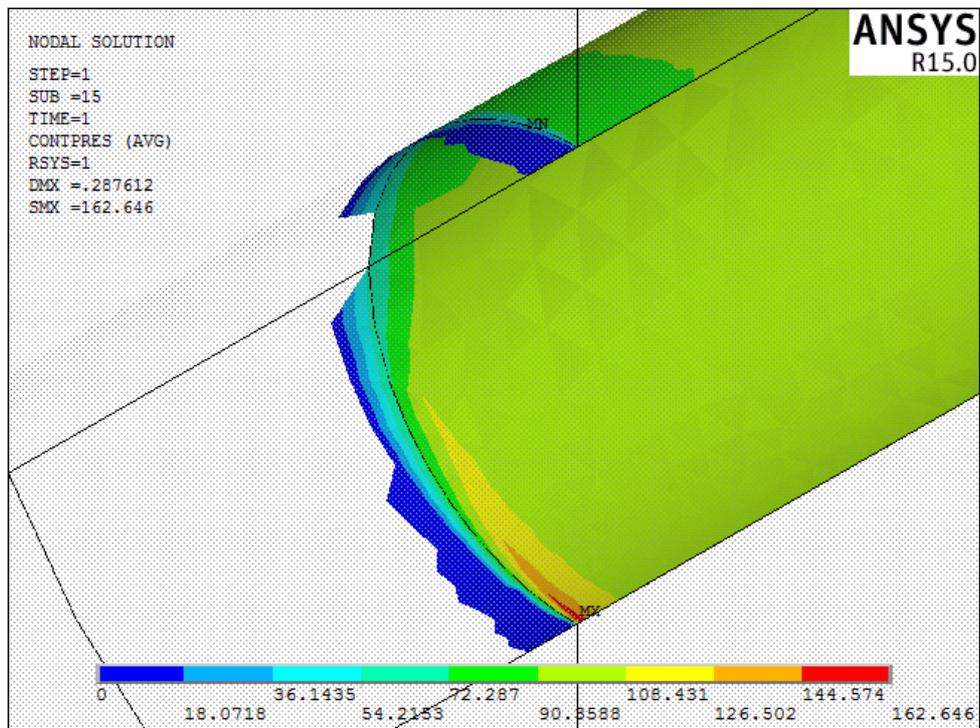


Figura 4-6.- Detalle de la presión de contacto del modelo 3D con flexión.

Como era de esperarse, se puede ver que el valor la presión en la parte superior se rebaja con respecto al interior del agarre debido a que esa zona tiende a separarse debido a la flexión y en la parte inferior, valor de la presión aumenta puesto que en esta zona tiende a clavarse el eje en el borde del agujero.

Representaremos ahora la tensión radial, circunferencial y axial en el modelo, esta vez haremos más hincapié en los resultados del eje aislado.

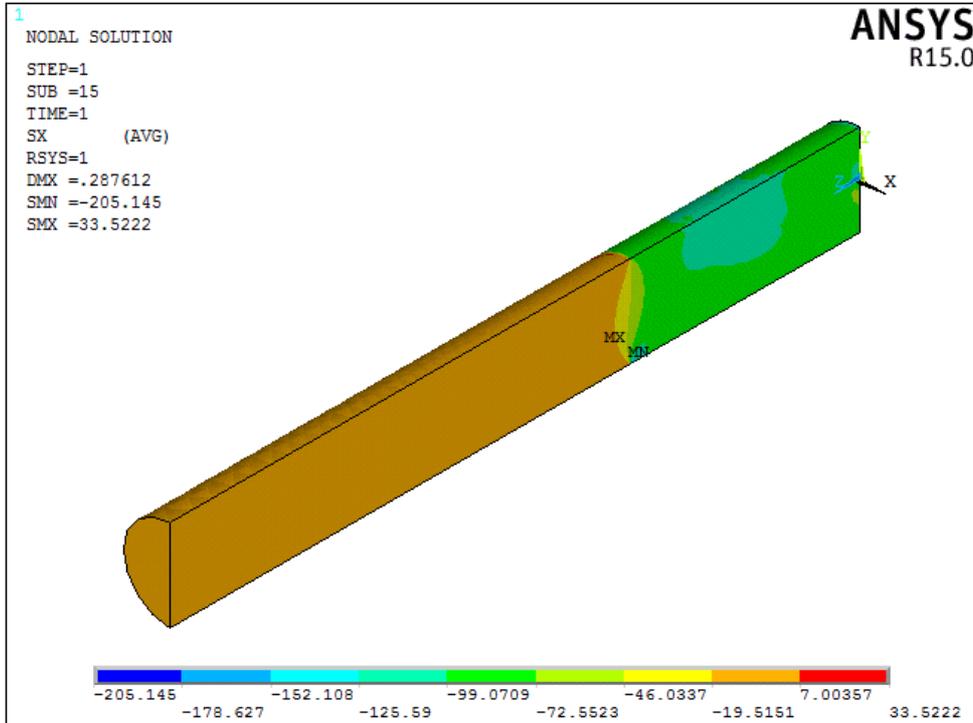


Figura 4-7.- Primera vista de la tensión radial en el eje sometido a flexión.

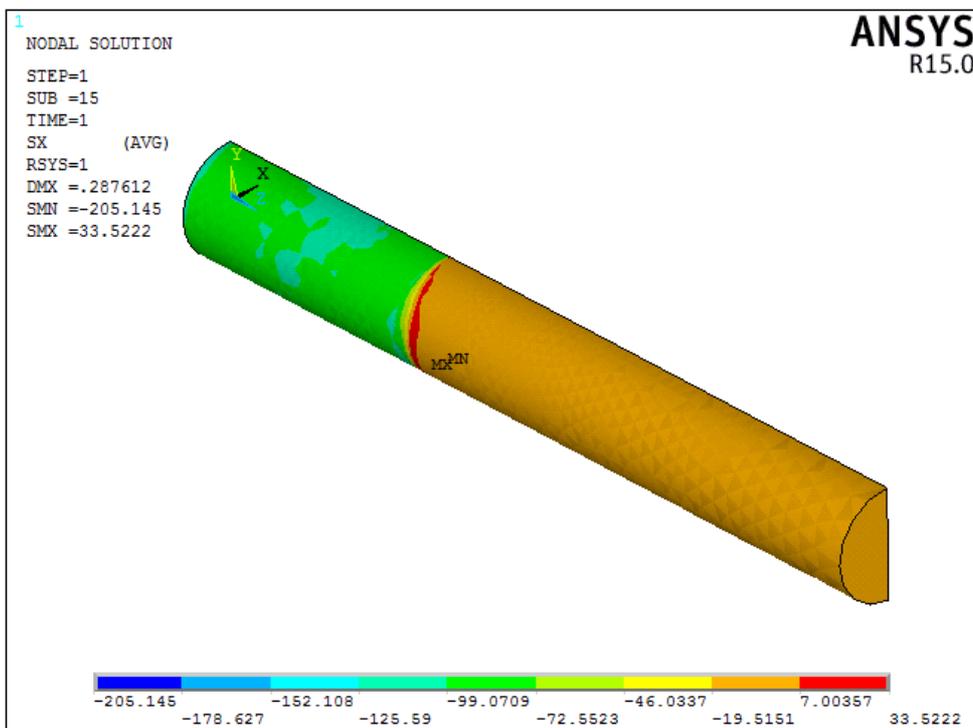


Figura 4-8.- Segunda vista de la tensión radial en el eje sometido a flexión.

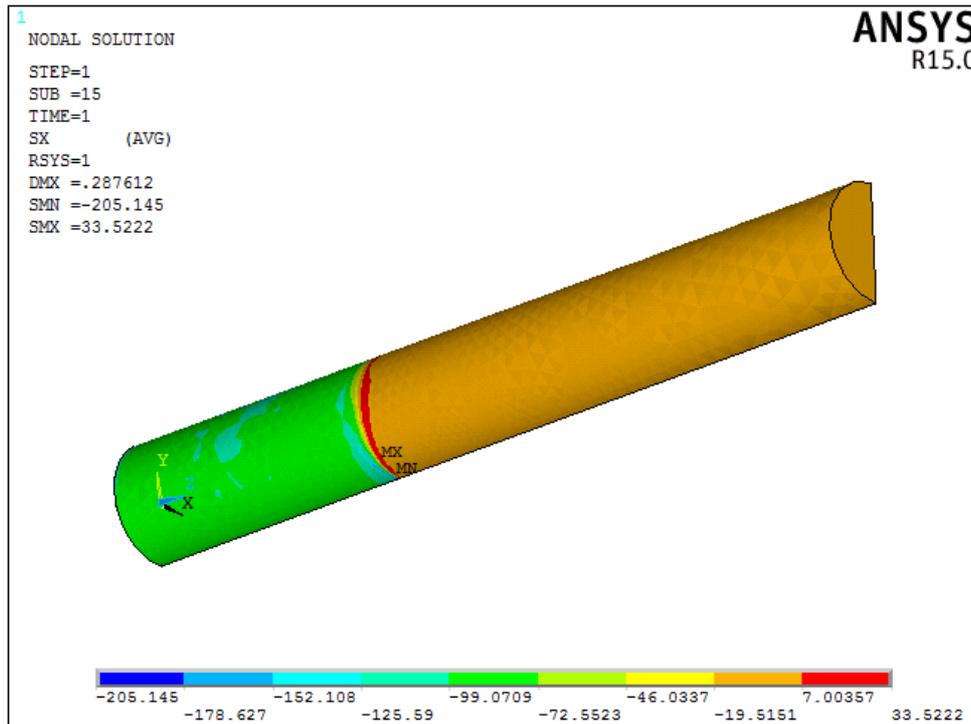


Figura 4-9.- Tercera vista de la tension radial en el eje sometido a flexión.

De la tensión radial, podemos comentar el hecho de que, dentro del alojamiento, en la parte superior haya una zona que esté sometida a más tensión que en el resto. Esto se debe a que el eje, al clavarse en el borde del agujero, hace un efecto de palanca siendo el punto de apoyo el mismo borde, esto causa que, en el interior del agarre, el eje se vea obligado a desplazarse hacia arriba.

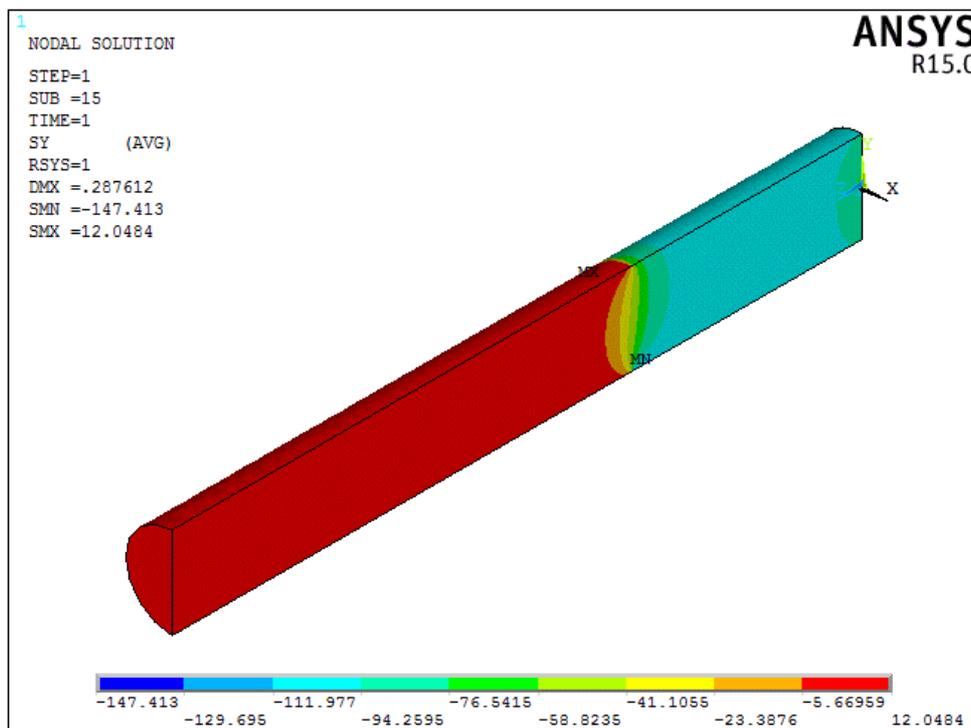


Figura 4-10.- Primera vista de la tension circunferencial en el eje sometido a flexión.

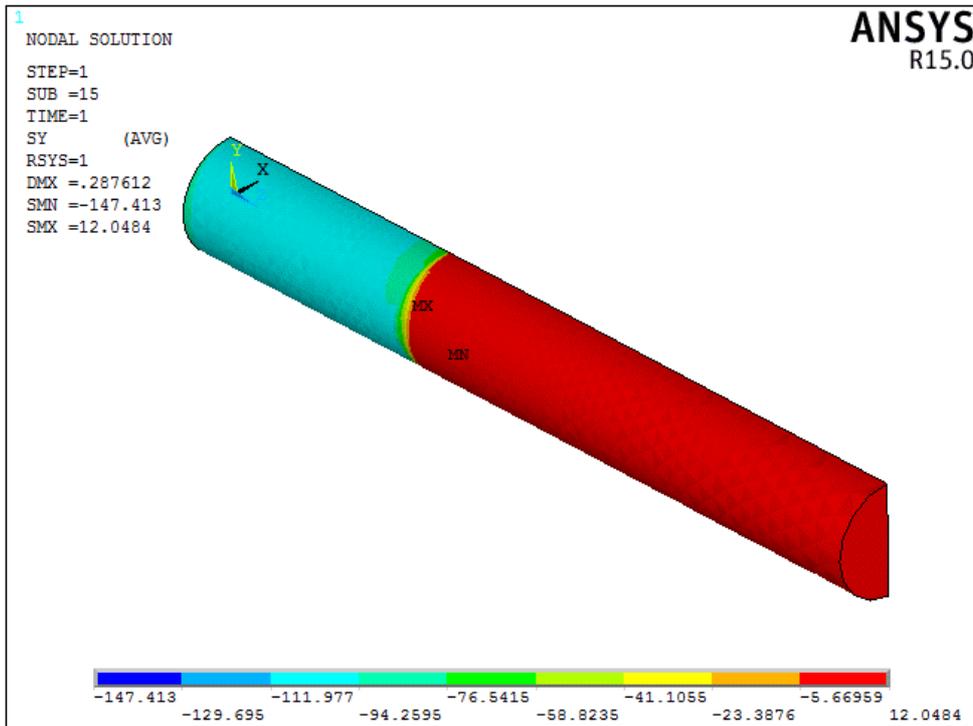


Figura 4-11.- Segunda vista de la tension circunferencial en el eje sometido a flexión.

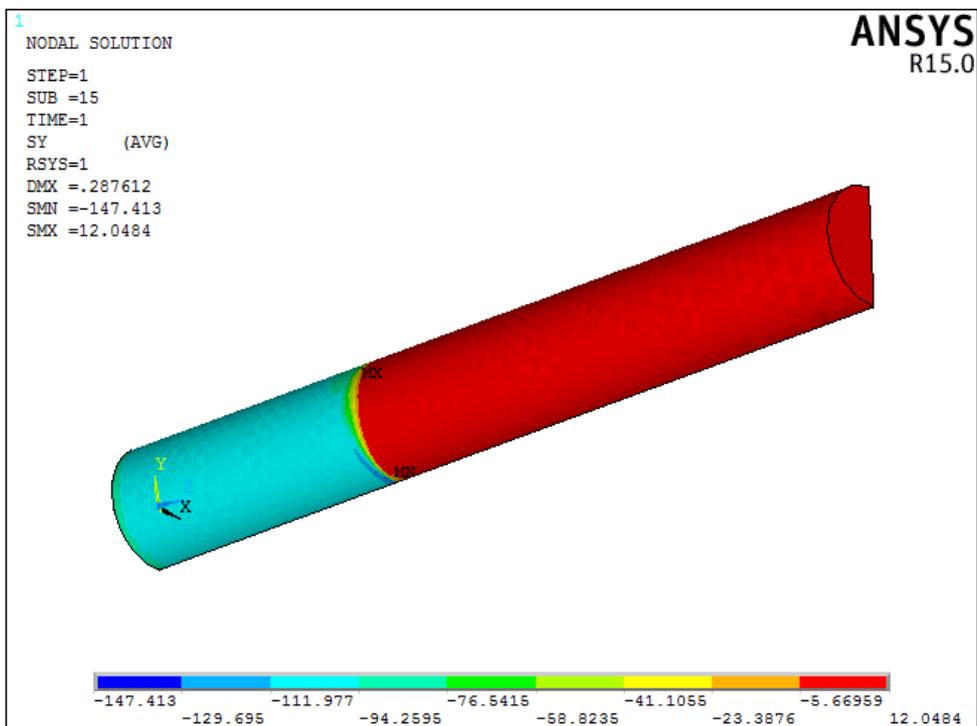


Figura 4-12.- Tercera vista de la tension circunferencial en el eje sometido a flexión.

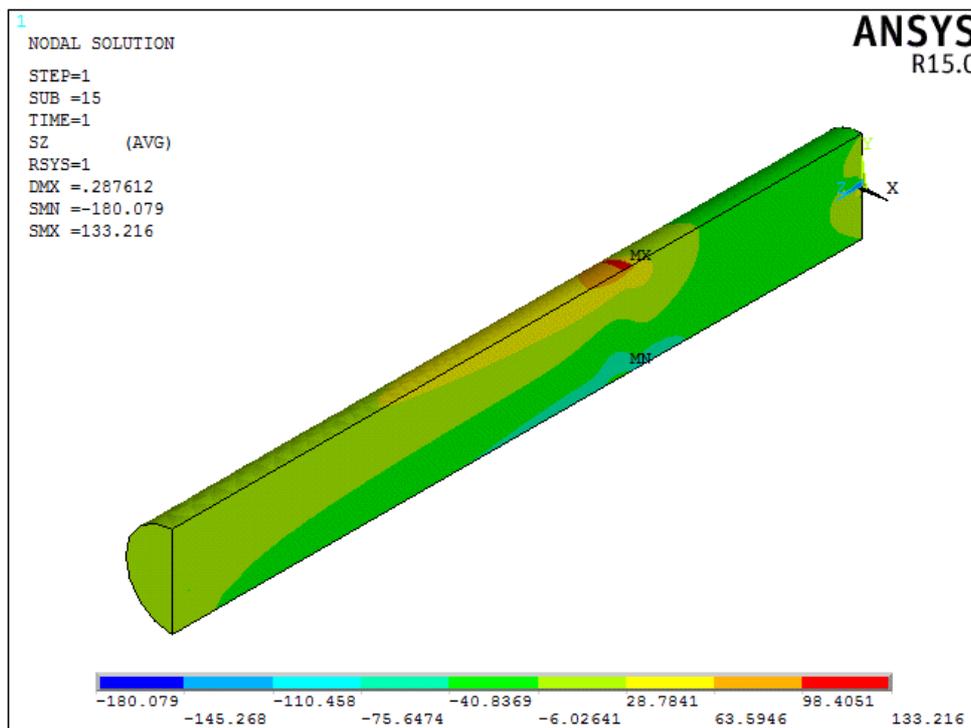


Figura 4-13.- Primera vista de la tension axial en el eje sometido a flexión.

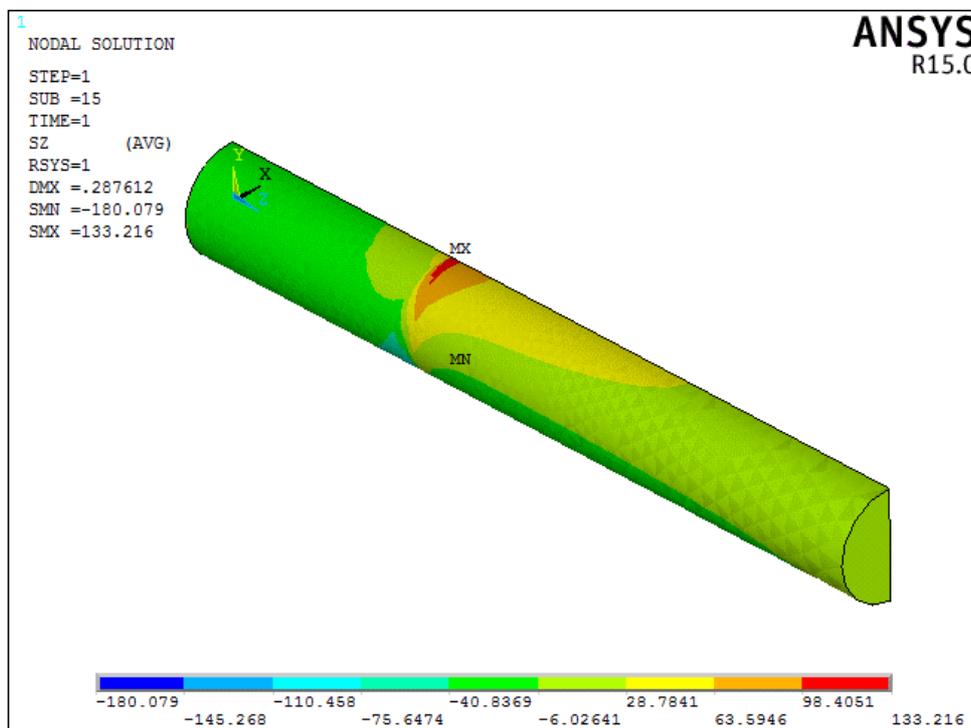


Figura 4-14.- Segunda vista de la tension axial en el eje sometido a flexión.

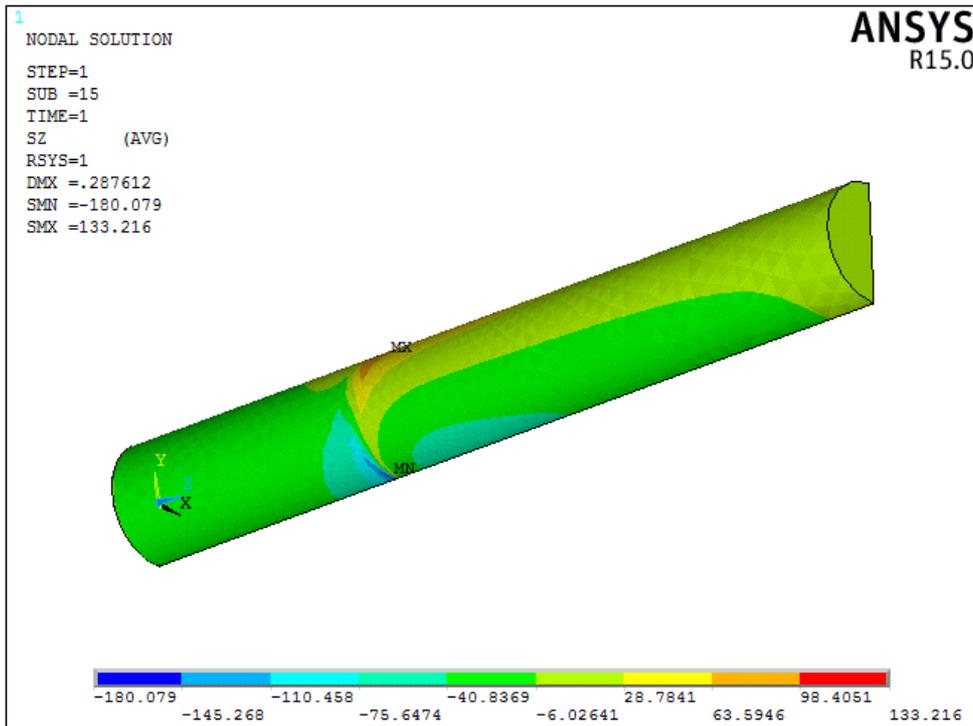


Figura 4-15.- Tercera vista de la tension axial en el eje sometido a flexión.

De la tensión axial, podemos comentar el hecho que en la zona del borde de contacto tenemos tracción en dirección axial en la parte superior y compresión en dirección axial en la parte inferior, como ocurre con la flexión simple de un eje. Sin embargo, el valor de esta tracción y compresión se ve modificada debido al concentrador de tensiones que produce el cambio de sección al encontrarse con el borde del agujero y el hecho de que en la parte inferior se clave en el borde del agarre.

Pasaremos ahora a ver la forma que tienen las gráficas que representan las tensiones a lo largo de la longitud del eje. Representaremos las tensiones en la parte superior e inferior del eje.

Respecto a la presión de contacto, para la parte superior tenemos:

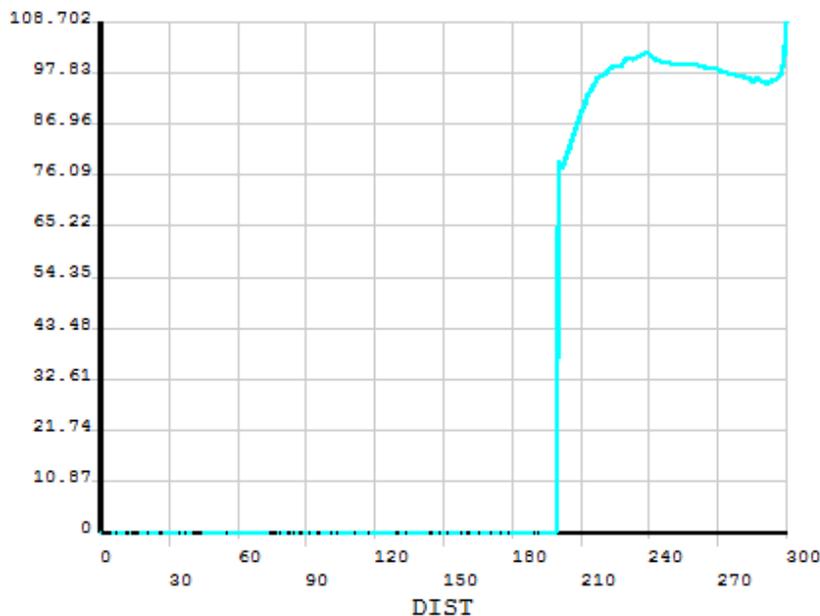


Figura 4-16.- Gráfica con la evolución de la presión de contacto a lo largo de la parte superior del eje.

Vemos que efectivamente el valor de la presión disminuye de forma notable conforme se acerca al borde del contacto, puesto que la flexión tiende a separar las dos superficies.

Y en la parte inferior tenemos:

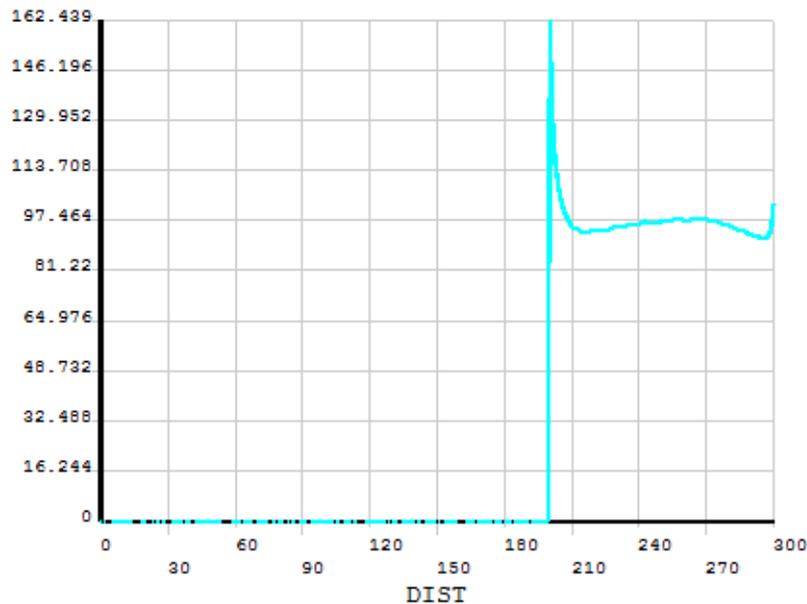


Figura 4-17.- Gráfica con la evolución de la presión de contacto a lo largo de la parte inferior del eje.

En este caso se aprecia el hecho de que el eje se clava en el borde del contacto en la parte inferior, esto hace que teóricamente la tensión en ese punto tienda a infinito.

Pasamos a representar las tensiones radial, circunferencial y axial:

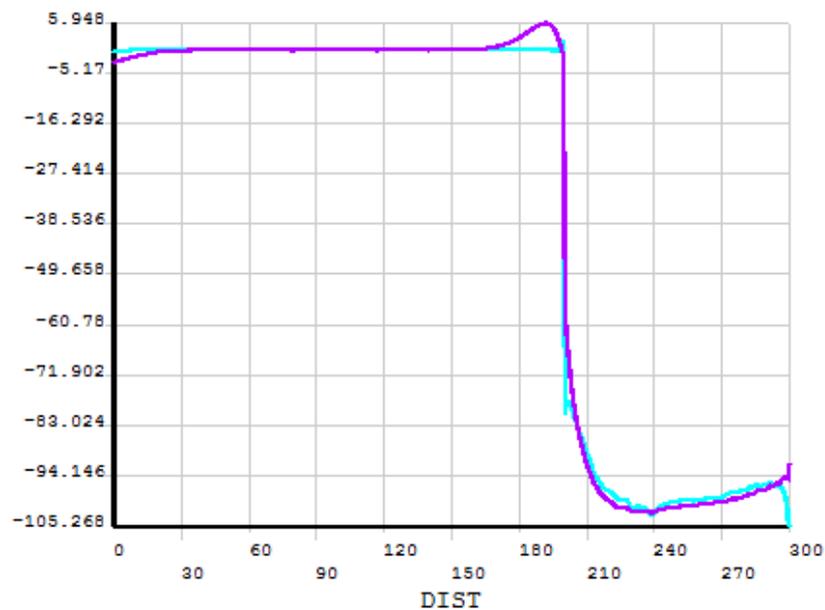


Figura 4-18.- Gráfica con la evolución de la tensión radial (azul) y la tensión circunferencial (morada) a lo largo de la parte superior del eje.

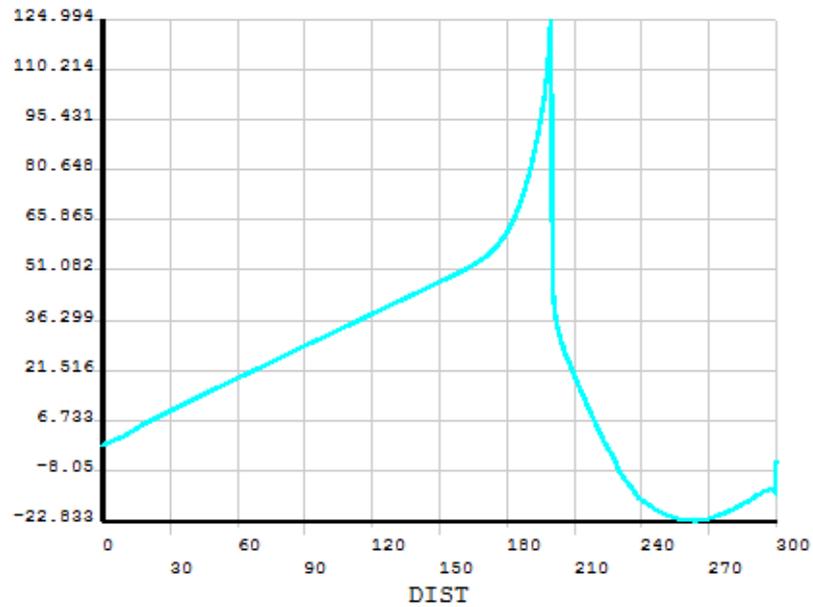


Figura 4-19.- Gráfica con la evolución de la tensión axial a lo largo de la parte superior del eje.

Aquí vemos como la tensión axial crece de manera lineal hasta que se acerca al contacto, donde se produce un rápido aumento de la tensión.

Pasaremos ahora a ver lo que ocurre en la parte inferior del eje:

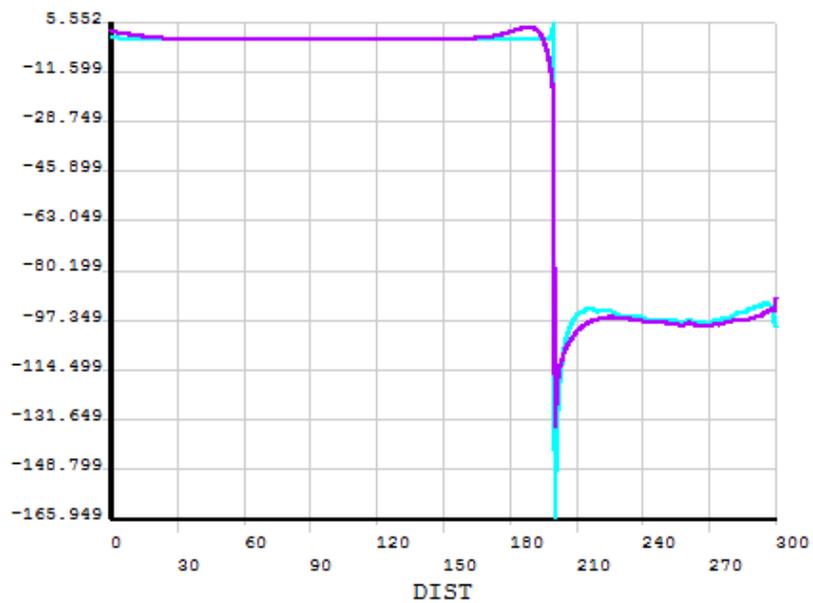


Figura 4-20.- Gráfica con la evolución de la tensión radial (azul) y la tensión circunferencial (morada) a lo largo de la parte inferior del eje.

Aquí vemos de nuevo el pico que se produce debido a que las tensiones en el punto del borde del contacto tienden a infinito.

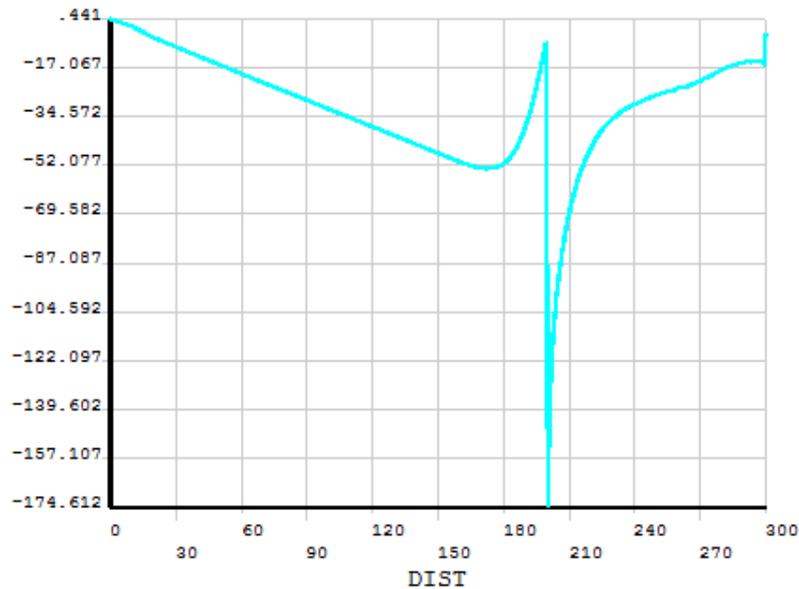


Figura 4-21.- Gráfica con la evolución de la tensión axial a lo largo de la parte inferior del eje.

En esta curva de la tensión axial, vemos de nuevo como avanza de manera lineal hasta que llega al borde del contacto donde su valor crece de manera rápida

Finalmente, nos resulta de interés representar las tensiones radial, circunferencial y axial que cruza el diámetro del eje, de arriba abajo justo en la zona donde empieza el contacto, pues basaremos el análisis a fatiga en las tensiones producidas en ese recorrido.

Tenemos las siguientes gráficas:

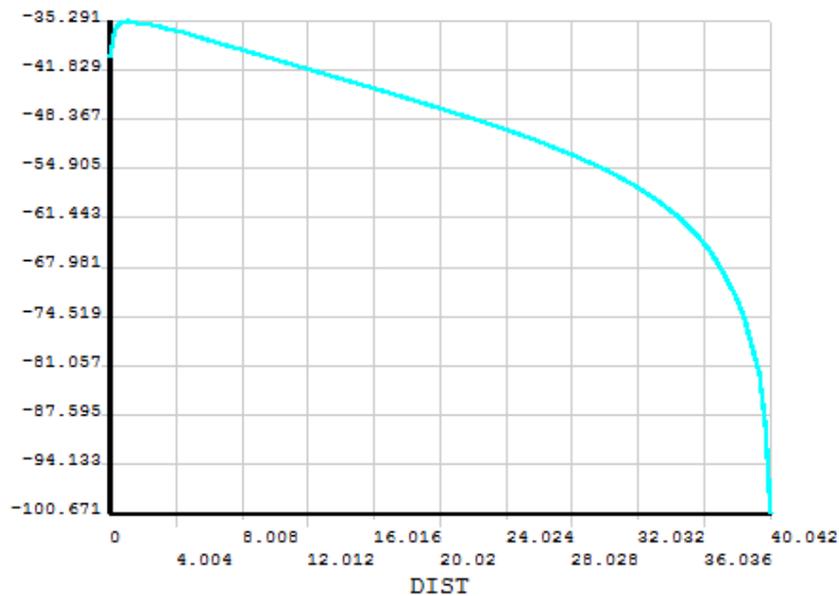


Figura 4-22.- Gráfica con la evolución de la tensión radial a lo largo del diámetro del eje justo en el borde de la zona de contacto.

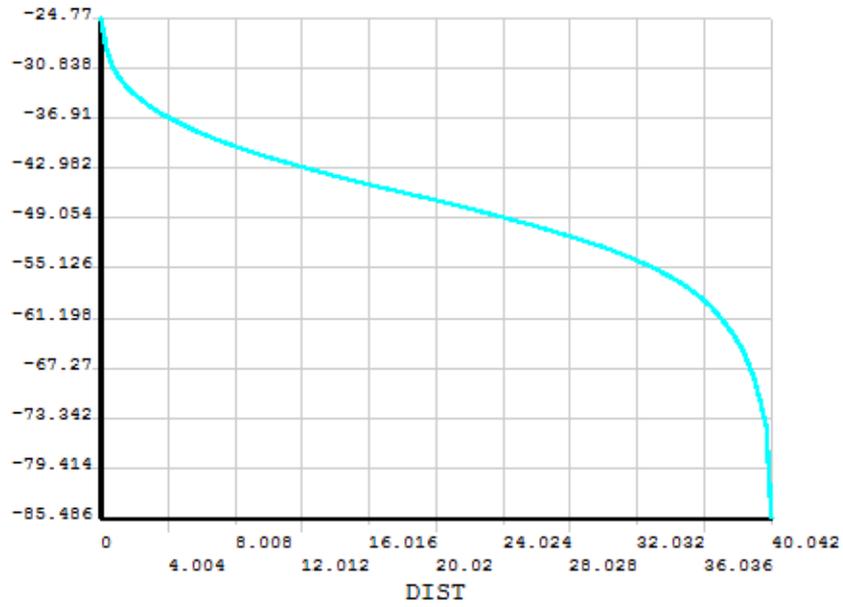


Figura 4-23.- Gráfica con la evolución de la tensión circunferencial a lo largo del diámetro del eje justo en el borde de la zona de contacto.

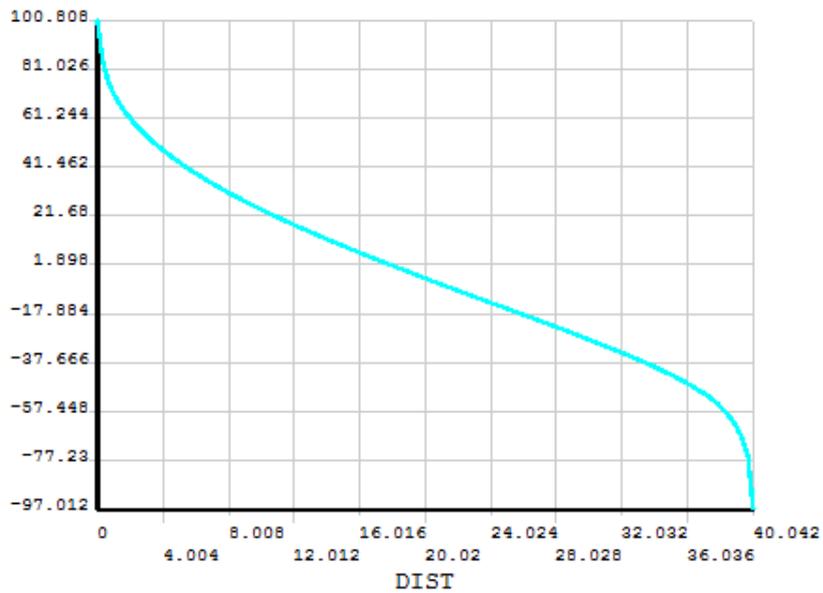


Figura 4-24.- Gráfica con la evolución de la tensión axial a lo largo del diámetro del eje justo en el borde de la zona de contacto.

5 ANÁLISIS DE FATIGA

Una vez que tenemos los resultados de las tensiones obtenidas aplicando flexión en el eje, pasaremos a estimar la vida a fatiga de este. El método que usaremos será un criterio de fatiga multiaxial conocido como el método de Smith-Watson-Topper [2]. El parámetro de Smith-Watson-Topper se define de la siguiente manera:

$$SWT = \left(\sigma_{n,max} \frac{\Delta \varepsilon_n}{2} \right)_{max}$$

Ecuación 6.- *Obtención del parámetro de SWT.*

Donde $\Delta \varepsilon_n$ es el incremento de deformación según una dirección n y $\sigma_{n,max}$, es la tensión normal máxima en la dirección de $\Delta \varepsilon_n$. Para esto, evaluaremos en un punto el producto de la tensión por la deformación para todas las direcciones y nos quedaremos con aquella dirección que haga que ese producto sea máximo.

Esto lo realizaremos para todos los puntos de la línea que recorre el diámetro del eje justo en la zona del borde del contacto, por lo que tendremos un parámetro de Smith-Watson-Topper para cada punto y el parámetro de Smith-Watson-Topper con el que nos quedaremos será el máximo de todos ellos. Esto podría expresarse de la siguiente forma:

$$SWT_{max} = \left(\left(\sigma_{n,max} \frac{\Delta \varepsilon_n}{2} \right)_{max} \right)_{max}$$

Ecuación 7.- *Obtención del máximo de los parámetros de SWT.*

Para calcular el número de ciclos hasta el fallo, emplearemos una curva de fatiga SWT-N, que tendrá la siguiente expresión:

$$\sigma_{n,max} \left(\frac{\Delta \varepsilon_n}{2} \right) = \frac{\sigma_f'^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma_f' \varepsilon_f' (2N_f)^{b+c}$$

Ecuación 8.- *Curva de fatiga SWT-N.*

Como vemos, la primera parte de la ecuación es el parámetro de Smith-Watson-Topper, N_f es el número de ciclos hasta el fallo y E, σ_f' , ε_f' , b y c son constantes que dependen del material.

El material utilizado para el cálculo de los parámetros será un acero AISI 304 laminado en caliente que tienen las siguientes constantes [11]:

- $E = 190\,000\text{ MPa}$
- $\sigma'_f = 1267\text{ MPa}$
- $\varepsilon'_f = 0.174$
- $b = -0.14$
- $c = -0.41$

Con estos valores, la curva de fatiga, que representaría el parámetro de Smith-Watson-Topper frente al número de ciclos, nos queda de la siguiente manera:

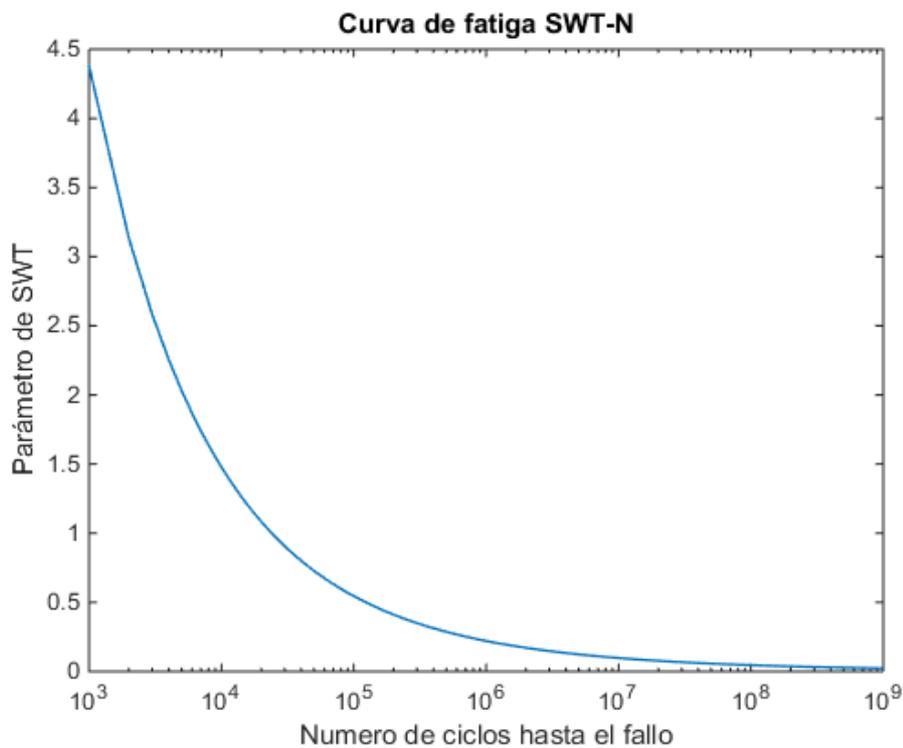


Figura 5-1.- Curva de fatiga SWT-N.

El ciclo de carga aplicado en el montaje en ANSYS es un ciclo senoidal con un rango de 2000 N para el modelo completo, lo que en nuestro caso sería un rango de 1000 N al tener simetría, en dirección vertical hacia abajo. Viene descrito por la siguiente ecuación:

$$F = 500 \cos(\pi t) - 500$$

Ecuación 9.- Ciclo de carga utilizado.

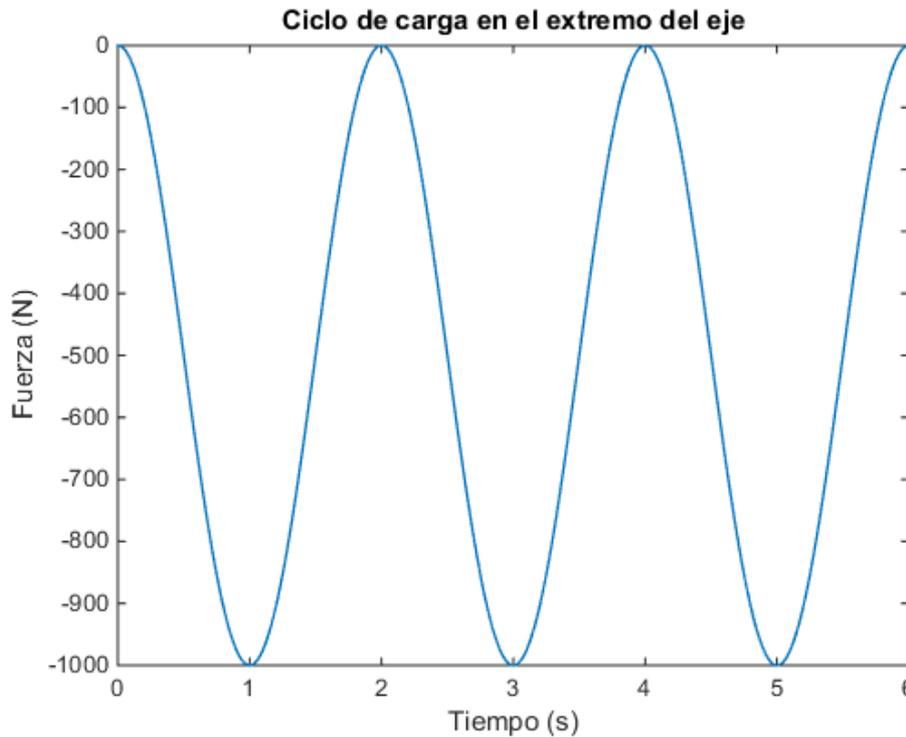


Figura 5-2.- Ciclo de carga en el extremo del eje del modelo utilizado.

Simularemos en ANSYS el ciclo de carga y extraeremos los datos necesarios para poder calcular el parámetro de Smith-Watson-Topper. Para ello nos quedaremos con los resultados de un pico y de un valle del ciclo de carga, preferiblemente a partir de dos ciclos para que se hayan estabilizado los resultados en dichos puntos.

Extraeremos 3 ficheros de texto, los cuales serán:

- la coordenada que recorre la línea que hemos definido y las componentes del tensor de tensiones para la parte alta del ciclo
- la coordenada que recorre la línea definida y las componentes del tensor de deformaciones en la parte alta del ciclo, y otro fichero igual, pero en la parte baja del ciclo.

Estos ficheros están escritos como un vector columna, ordenados de manera que primero tenemos la coordenada de la línea y las componentes del tensor para el primer punto. A continuación, lo mismo, pero para el segundo punto, etc.

Por ello, el primer paso que haremos será ordenar los resultados y extraer en un vector la coordenada de la línea, una matriz que contenga el tensor de tensiones para cada punto y otra matriz con el tensor de deformaciones de cada punto:

$$x = (x_1 \quad \cdots \quad x_n) \quad \sigma_{ij} = (\sigma_{ij_1} \quad \cdots \quad \sigma_{ij_n}) \quad \varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij_1} \quad \cdots \quad \varepsilon_{ij_n})$$

Para obtener la dirección donde el incremento de deformación es máximo, para cada punto recorreremos las direcciones de la siguiente manera: definiremos un vector unitario que utilice las coordenadas esféricas e iremos variando el ángulo polar (θ) y el ángulo acimutal (φ).

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad z = r \cos(\theta)$$

Ecuación 10.- Coordenadas esféricas expresadas en X, Y, Z.

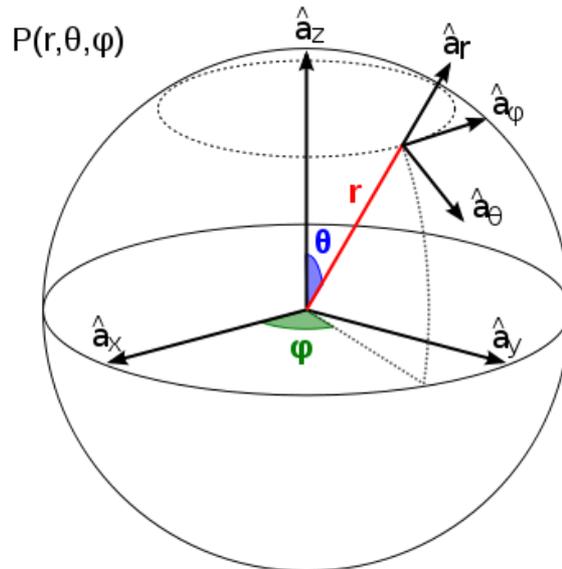


Figura 5-3.- Sistema de coordenadas esférico.

De esta manera empezaremos con un ángulo φ fijo y variaremos θ desde 0 a 180° , cuando θ haya completado su recorrido, volverá a su posición inicial e incrementaremos φ . Después, volveremos a variar el ángulo θ para todo su recorrido y seguiremos haciendo esto hasta que φ haya completado su recorrido de 0 a 180° . De esta manera recorreremos todas las direcciones.

Para cada dirección, calcularemos el vector deformación según esa dirección y con el vector deformación obtendremos la deformación normal según esa dirección. Esto se hará tanto con el tensor de deformaciones de la parte alta del ciclo, como con el de la parte baja del ciclo. Por ello obtendremos el incremento de deformación normal para todas las direcciones y escogeremos el máximo valor para hacer los cálculos.

Cuando tengamos el incremento de deformación normal máximo, evaluaremos para esa misma dirección el vector tensión y posteriormente hallaremos el valor de la tensión normal.

Con esos valores podemos calcular el parámetro de Smith-Watson-Topper para cada dirección. Esto lo haremos para todas las direcciones y nos quedaremos con el máximo valor de todos ellos. Y luego lo haremos para cada punto de la línea y el resultado final será el máximo de todos ellos.

Con el ajuste utilizado (H7/p6) y la fuerza máxima aplicada en el ciclo (2000 N) obtenemos el siguiente parámetro de SWT, 0.0199. Vamos a la curva de fatiga y obtenemos un número de ciclos mayor de 10^9 por lo que, para estas características obtenemos una vida infinita a fatiga.

Cabe destacar por otra parte que el punto donde se produce ese máximo es el punto superior del eje y la dirección donde se produce el máximo incremento de deformación normal es casi paralela a la dirección axial del eje. Con los ángulos $\theta = 175^\circ$ y $\varphi = 90^\circ$.

El tensor de tensiones en ese punto cuando la fuerza es máxima es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -24.77 & 0.784 & 0.127 \\ 0.784 & -40.019 & 9.293 \\ 0.127 & 9.293 & 100.812 \end{pmatrix} MPa$$

Y cuando la fuerza es nula es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -53.691 & 0.532 & 0.154 \\ 0.532 & -68.561 & 23.029 \\ 0.154 & 23.029 & 3.263 \end{pmatrix} MPa$$

Y los valores de la tensión equivalente de von Mises, para el caso con fuerza máxima y con fuerza nula son:

$$\sigma_{VM} = 134.825 MPa$$

$$\sigma_{VM} = 76.844 MPa$$

Vemos que en ANSYS, el eje Z lleva la dirección del eje, de manera que, en la zona del borde del contacto, una coordenada Z mayor nos llevaría fuera de la zona de contacto y una coordenada Z menor, nos llevaría hacia dentro del contacto, el eje Y lleva la dirección vertical, siendo positiva la parte superior del eje y negativa la parte inferior. Por otra parte, el plano YZ es el usado para establecer la simetría.

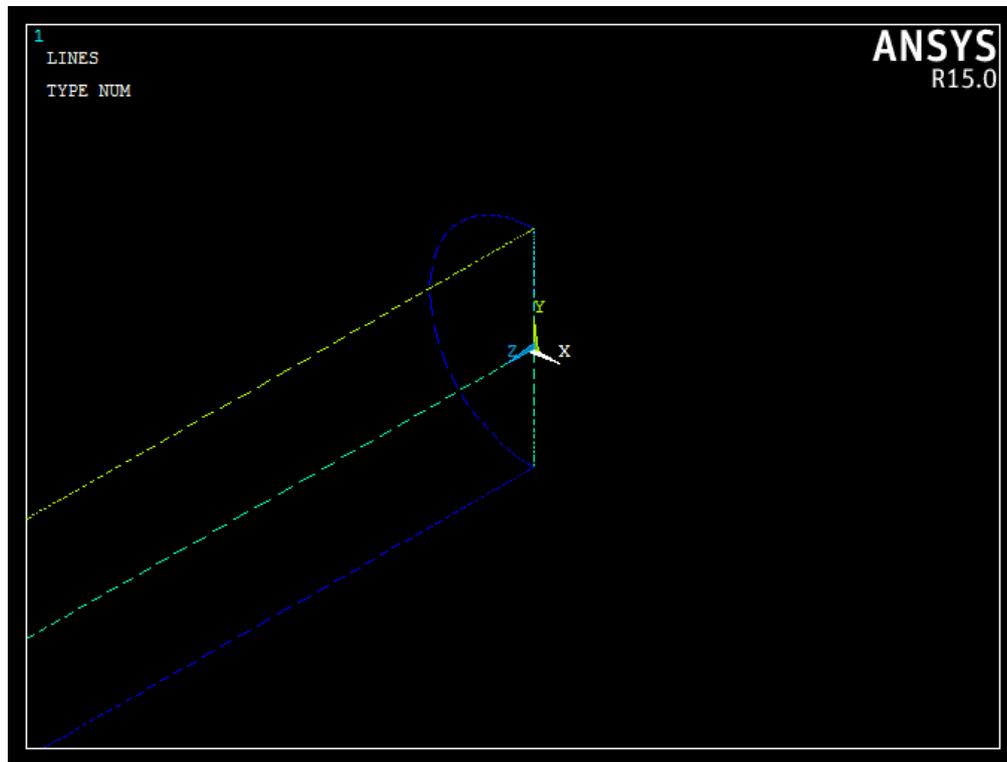


Figura 5-4.- Sistema de coordenadas utilizado en ANSYS.

Esa dirección descrita es la dirección normal al plano crítico, que es el plano por el que se propagará la grieta, una vez iniciada. Vemos que este plano crítico es casi transversal al eje, con la particularidad de que conforme nos movemos hacia el otro extremo del eje, el plano crítico queda dentro de la zona de contacto.

Probaremos ahora con otros ajustes y distintas fuerzas en el extremo del eje para ver como varía esta vida a fatiga.

5.1 Resultados variando el ajuste

En primer lugar, usaremos un ajuste algo mayor, H7/s6, de esta manera las dimensiones del eje y del agujero son:

- Diámetro del agujero: $40 \begin{pmatrix} +0.025 \\ +0.000 \end{pmatrix} mm$
- Diámetro del eje: $40 \begin{pmatrix} +0.059 \\ +0.043 \end{pmatrix} mm$

Nos quedaríamos con los valores de interferencia mayor, que resultaría en una interferencia diametral de 59 micras. Las dimensiones utilizadas para el análisis serán:

- Diámetro del eje: $40.059 mm$
- Diámetro interior del agujero: $40.000 mm$
- Diámetro exterior del agujero: $135 mm$

Con ello obtenemos el siguiente parámetro de SWT, 0.0302. Este valor resulta en una vida a fatiga de 3.9×10^8 ciclos. Que seguiría considerándose una vida a fatiga infinita.

El tensor de tensiones en ese punto cuando la fuerza es máxima es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -30.108 & -1.403 & -1.075 \\ -1.403 & -52.986 & 11.445 \\ -1.075 & 11.445 & 134.451 \end{pmatrix} MPa$$

Y cuando la fuerza es nula es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -63.699 & -1.808 & -1.372 \\ -1.808 & -82.114 & 27.688 \\ -1.372 & 27.688 & 25.011 \end{pmatrix} MPa$$

Y los valores de la tensión equivalente de von Mises, para el caso con fuerza máxima y con fuerza nula son:

$$\sigma_{VM} = 178.228 MPa \qquad \sigma_{VM} = 110.260 MPa$$

Probaremos ahora, con un ajuste mayor que el anterior, H7/t6, que se caracteriza por lo siguiente:

- Diámetro del agujero: $40 \begin{pmatrix} +0.025 \\ +0.000 \end{pmatrix} mm$
- Diámetro del eje: $40 \begin{pmatrix} +0.064 \\ +0.048 \end{pmatrix} mm$

En este caso la interferencia diametral sería de 64 micras, y las dimensiones para el cálculo quedarían de la siguiente manera:

- Diámetro del eje: 40.064 mm
- Diámetro interior del agujero: 40.000 mm
- Diámetro exterior del agujero: 135 mm

El parámetro de SWT que obtenemos con este ajuste es de 0.0308, que nos daría una vida a fatiga de 3.65×10^8 ciclos.

El tensor de tensiones en ese punto cuando la fuerza es máxima es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -34.478 & -1.429 & -0.310 \\ -1.429 & -59.899 & 14.092 \\ -0.310 & 14.092 & 137.079 \end{pmatrix} MPa$$

Y cuando la fuerza es nula es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -67.775 & -1.912 & 0.013 \\ -1.912 & -81.971 & 30.371 \\ 0.013 & 30.371 & 27.986 \end{pmatrix} MPa$$

Y los valores de la tensión equivalente de von Mises, para el caso con fuerza máxima y con fuerza nula son:

$$\sigma_{VM} = 187.194 MPa \qquad \sigma_{VM} = 120.692 MPa$$

Para ambos casos obtenemos que el plano crítico es el mismo que nos resultó con el ajuste H7/p6.

5.2 Resultados variando el ciclo de carga

En este apartado veremos la influencia del rango de la fuerza en el ciclo de carga.

La fuerza utilizada hasta ahora para el modelo completo era de 2000 N, Probaremos primero con una fuerza vertical al modelo completo de 10000 N y luego con 14000 N.

Con la fuerza de 10000 N (5000 N para el modelo con condiciones de contorno de simetría) el ciclo de carga es el siguiente:

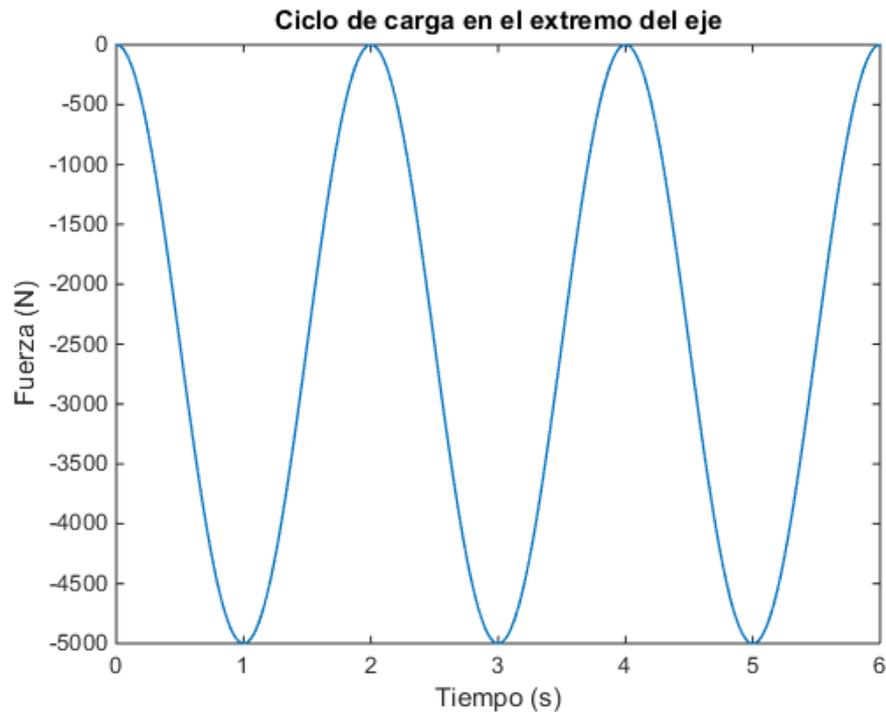


Figura 5-5.- Ciclo de carga con un rango de 5000 N.

Con ese valor de amplitud de la fuerza, el parámetro de Smith-Watson-Topper obtenido es de 0.3076, que esto resulta en 4.18×10^5 ciclos y dejaríamos de hablar de vida infinita.

El tensor de tensiones en ese punto cuando la fuerza es máxima es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 11.431 & 0.003 & -0.002 \\ 0.003 & -1.2 \cdot 10^{-4} & -0.512 \\ -0.002 & -0.512 & 350.395 \end{pmatrix} MPa$$

Y cuando la fuerza es nula es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -94.181 & 0.749 & 0.093 \\ 0.749 & -91.702 & 49.050 \\ 0.093 & 49.050 & -99.560 \end{pmatrix} MPa$$

Y los valores de la tensión equivalente de von Mises, para el caso con fuerza máxima y con fuerza nula son:

$$\sigma_{VM} = 324.83 MPa \qquad \sigma_{VM} = 85.251 MPa$$

Simularemos ahora una fuerza de 14000 N (7000 N en el modelo de mitad del montaje completo). El ciclo es el siguiente:

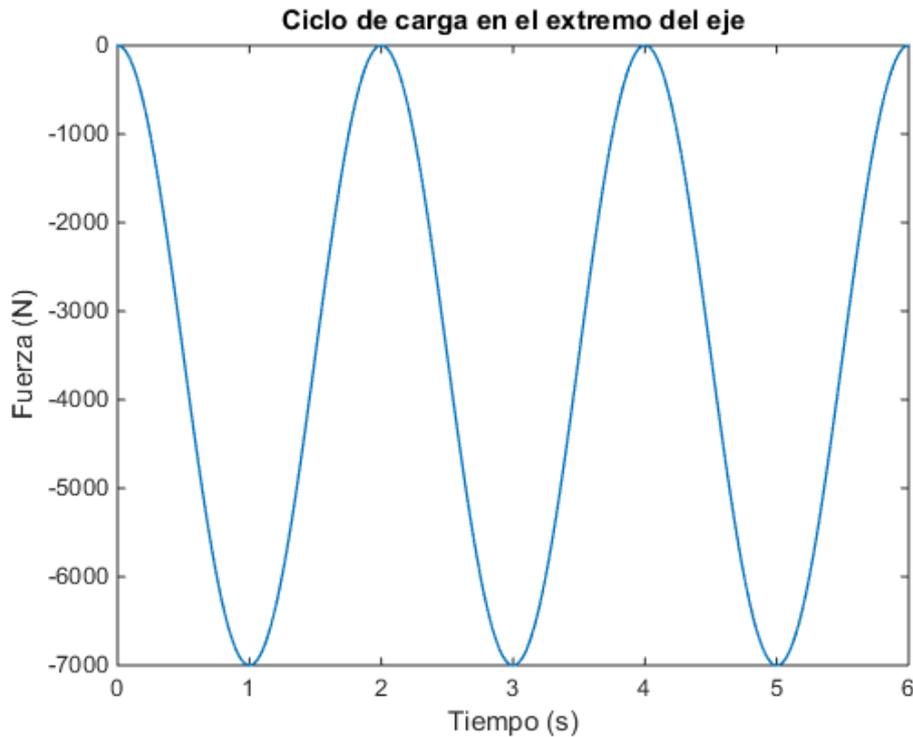


Figura 5-6.- Ciclo de carga con un rango de 7000 N.

Con este ciclo obtenemos un parámetro de SWT de 0.5207, la vida a fatiga para este valor es de 1.12×10^5 ciclos.

El tensor de tensiones en ese punto cuando la fuerza es máxima es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 14.236 & 0.003 & -0.004 \\ 0.003 & 7.9 \cdot 10^{-4} & -1.046 \\ -0.004 & -0.512 & 443.465 \end{pmatrix} MPa$$

Y cuando la fuerza es nula es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -88.226 & -0.308 & 0.700 \\ -0.308 & -76.336 & 47.955 \\ 0.700 & 47.955 & -99.449 \end{pmatrix} MPa$$

Y los valores de la tensión equivalente de von Mises, para el caso con fuerza máxima y con fuerza nula son:

$$\sigma_{VM} = 436.524 MPa \quad \sigma_{VM} = 84.59 MPa$$

Para estos valores de fuerza la dirección normal al plano crítico se hace un poco más paralela a la dirección del eje Z. El ángulo φ se mantiene constante a 90° , pero el ángulo θ resulta en 165 y 170° , respectivamente.

5.3 Resultados sin el ajuste a presión

Estudiaremos también, el caso del mismo eje sometido a la flexión original, pero sin el ajuste a presión. Procedemos a hacer el mismo análisis que en los casos anteriores, pero sin añadir el agujero.

De esta manera en la zona donde antes teníamos el contacto, obtenemos los siguientes resultados:

El parámetro de Smith-Watson-Topper es de 0.0095, que resulta en una vida a fatiga mucho mayor de 10^9 ciclos y mayor que en caso del ajuste a presión.

El tensor de tensiones en ese punto cuando la fuerza es máxima es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -0.004 & -0.007 & -0.019 \\ -0.007 & -0.006 & -0.026 \\ -0.019 & -0.026 & 63.619 \end{pmatrix} MPa$$

Y cuando la fuerza es nula es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} MPa$$

Y los valores de la tensión equivalente de von Mises, para el caso con fuerza máxima y con fuerza nula son:

$$\sigma_{VM} = 63.618 MPa$$

$$\sigma_{VM} = 0 MPa$$

ANEXOS

Anexo A. Código de Matlab para obtención de parámetro de SWT

```

%%
clear
clc

%%   %% Obtención del tensor de tensiones en la parte alta del ciclo %%

% Cargamos el tensor de tensiones de la parte alta del ciclo
A=load('cic_alto_ten.txt');
i=1;
j=1;
while i<length(A)
    x(j)=A(i);
    sigma_xx(j)=A(i+1);
    sigma_yy(j)=A(i+2);
    sigma_zz(j)=A(i+3);
    sigma_xy(j)=A(i+4);
    sigma_yz(j)=A(i+5);
    sigma_xz(j)=A(i+6);
    i=i+7;
    j=j+1;
end

tensor_ten=[];

% Ordenamos el tensor de tensiones

i=1;
while i<=length(x)
    tensor_ten=[tensor_ten; sigma_xx(i) sigma_xy(i) sigma_xz(i)
        sigma_xy(i) sigma_yy(i) sigma_yz(i)
        sigma_xz(i) sigma_yz(i) sigma_zz(i)];
    i=i+1;
end
tensor_ten=tensor_ten';

%%   %% Obtención del tensor de deformaciones en la parte alta del ciclo %%

% Cargamos las componentes del tensor de deformaciones de la parte alta del
ciclo

A=load('cic_alto_def.txt');
i=1;
j=1;
while i<length(A)
    x(j)=A(i);
    eps_xx(j)=A(i+1);
    eps_yy(j)=A(i+2);
    eps_zz(j)=A(i+3);

```

```

        eps_xy(j)=A(i+4);
        eps_yz(j)=A(i+5);
        eps_xz(j)=A(i+6);
        i=i+7;
        j=j+1;
end

tensor_def_alto=[];

% Ordenamos el tensor de deformaciones

i=1;
while i<=length(x)
    tensor_def_alto=[tensor_def_alto; eps_xx(i) eps_xy(i) eps_xz(i)
        eps_xy(i) eps_yy(i) eps_yz(i)
        eps_xz(i) eps_yz(i) eps_zz(i)];
    i=i+1;
end
tensor_def_alto=tensor_def_alto';

%% %% Obtención del tensor de deformaciones en la parte baja del ciclo %%

% Cargamos las componentes del tensor de deformaciones de la parte baja del
ciclo

A=load('cic_bajo_def.txt');
i=1;
j=1;
while i<length(A)
    x(j)=A(i);
    eps_xx(j)=A(i+1);
    eps_yy(j)=A(i+2);
    eps_zz(j)=A(i+3);
    eps_xy(j)=A(i+4);
    eps_yz(j)=A(i+5);
    eps_xz(j)=A(i+6);
    i=i+7;
    j=j+1;
end

tensor_def_bajo=[];

% Ordenamos el tensor de deformaciones

i=1;
while i<=length(x)
    tensor_def_bajo=[tensor_def_bajo; eps_xx(i) eps_xy(i) eps_xz(i)
        eps_xy(i) eps_yy(i) eps_yz(i)
        eps_xz(i) eps_yz(i) eps_zz(i)];
    i=i+1;
end
tensor_def_bajo=tensor_def_bajo';

%% %% Obtención de la tensión von Mises en la parte alta del ciclo %%

A=load('vm_alto.txt');
i=1;
j=1;
while i<length(A)
    x(j)=A(i);
    vm_alto(j)=A(i+1);

```

```

        i=i+2;
end

%% %% Obtención de la tensión von Mises en la parte baja del ciclo %%

A=load('vm_bajo.txt');
i=1;
j=1;
while i<length(A)
    x(j)=A(i);
    vm_bajo(j)=A(i+1);
    i=i+2;
end

%% %% Obtención del parámetro SWT %%

i=1;
r=1;
j=1;
k=-2;

matriz_res=[]; % Matriz donde guardaremos los resultados

while i<=length(x)

    j=1;
    k=k+3;
    SWT_max_punto=-1000000;

    % Recorremos todas las direcciones variando los ángulos fi y teta

    for fi=0:5:180
        for teta=0:5:180

            % Obtenemos el valor de la deformación normal en la parte alta
            % del ciclo según la dirección indicada por fi y teta

            direccion=[r*sind(teta)*cosd(fi); r*sind(teta)*sind(fi);
r*cosd(teta)];
            tensor_def_alto_punto=[tensor_def_alto(j,k)
tensor_def_alto(j,k+1) tensor_def_alto(j,k+2)
            tensor_def_alto(j+1,k) tensor_def_alto(j+1,k+1)
tensor_def_alto(j+1,k+2)
            tensor_def_alto(j+2,k) tensor_def_alto(j+2,k+1)
tensor_def_alto(j+2,k+2)];

            vector_def_alto_dir=tensor_def_alto_punto*direccion;
            valor_def_alto=vector_def_alto_dir'*direccion;

            % Obtenemos el valor de la deformación normal en la parte baja
            % del ciclo según la dirección indicada por fi y teta

            tensor_def_bajo_punto=[tensor_def_bajo(j,k)
tensor_def_bajo(j,k+1) tensor_def_bajo(j,k+2)
            tensor_def_bajo(j+1,k) tensor_def_bajo(j+1,k+1)
tensor_def_bajo(j+1,k+2)
            tensor_def_bajo(j+2,k) tensor_def_bajo(j+2,k+1)
tensor_def_bajo(j+2,k+2)];

```

```

vector_def_bajo_dir=tensor_def_bajo_punto*direccion;
valor_def_bajo=vector_def_bajo_dir'*direccion;

% Obtenemos el valor del incremento de deformación para esa
% dirección

valor_inc_def=valor_def_alto-valor_def_bajo;

% Calculamos el valor de la tension normal según la misma
% dirección

tensor_ten_punto=[tensor_ten(j,k) tensor_ten(j,k+1)
tensor_ten(j,k+2)
tensor_ten(j+1,k) tensor_ten(j+1,k+1) tensor_ten(j+1,k+2)
tensor_ten(j+2,k) tensor_ten(j+2,k+1) tensor_ten(j+2,k+2)];

vector_ten_dir=tensor_ten_punto*direccion;
valor_ten_punto=vector_ten_dir'*direccion;

% Obtenemos el parámetro de SWT para esa dirección

SWT=valor_ten_punto*((valor_inc_def)/2);

if SWT > SWT_max_punto

    % Guardamos los valores que nos interesan cuando el
    % parámetro es máximo

    SWT_max_punto=SWT;
    inc_def_max_punto=valor_inc_def;
    valor_ten_max_punto=valor_ten_punto;
    fi_punto=fi;
    teta_punto=teta;

end
end
end

% Guardamos los valores que nos interesen en una matriz

matriz_res=[matriz_res; fi_punto teta_punto inc_def_max_punto
valor_ten_max_punto SWT_max_punto];

i=i+1;

end

% Obtenemos el máximo de los parámetros de SWT

SWT_max=max(matriz_res(:,5));

```

REFERENCIAS

- [1] F.R. Hutchings and P.M. Unterweiser (1981), Failure Analysis: The British Engine Technical Reports.
- [2] Apuntes de la asignatura 'Bases para el diseño de sistemas mecánicos'. G.I.T.I. Universidad de Sevilla.
- [3] Apuntes de la asignatura 'Metrología Industrial'. G.I.T.I. Universidad de Sevilla.
- [4] J. E. Gordon (2004), Estructuras, o porqué las cosas no se caen. Ed. Calamar.
- [5] Koshkin N. I., Shirkévich M. G. (1975), Manual de Física Elemental. Editorial Mir.
- [6] Apuntes de la asignatura 'Cálculo, diseño y ensayo de máquinas'. G.I.T.I. Universidad de Sevilla.
- [7] Herman G. Laughlin, Alfred R. Holowenko (1961), Schaum's Outline of Machine Design.
- [8] Joseph E. Shigley (1972), Mechanical Engineering Design.
- [9] F. París (1996), Teoría de la elasticidad.
- [10] Apuntes de la asignatura 'Ampliación de elasticidad y resistencia de materiales'. G.I.T.I. Universidad de Sevilla.
- [11] www.efatigue.com

