En recuerdo de Alexander Grothendieck: Prólogo para una lectura de su vida y obra

por

Luis Narváez Macarro

Il y a peu d'exemples en mathématique d'une théorie aussi monumentale et aussi féconde, édifiée en si peu de temps et essentiellement due à un seul homme.

Jean Dieudonné [15]

Resumen. En este artículo repasamos algunas de las claves de las contribuciones matemáticas de Alexander Grothendieck y del contexto en el que se gestaron, y nos asomamos así a la vida y obra de una de las figuras más influyentes de las Matemáticas contemporáneas.

Alexander Grothendieck (28/03/1928 – 13/11/2014) está considerado como uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, aunque tal aseveración, «sin más», nos ocultaría la extraordinaria dimensión de este personaje.

En palabras de David Mumford (ver [37]), Grothendieck es, además de su héroe, la persona que más merece el adjetivo de «genio» entre las que él haya conocido jamás.

Este artículo pretende contribuir al reconocimiento de tan singular matemático y a la difusión de su legado. Me gustaría provocar con él la curiosidad en todos aquellos que no hayan tenido aún la ocasión de acercarse suficientemente a su figura.

Las contribuciones científicas *sensu stricto* de Alexander Grothendieck[1] están publicadas en más de una decena de miles de páginas de artículos y libros. Esta ya de por sí descomunal obra, y no tanto por su extensión como por su visión, ambición, originalidad y audacia, justificaría con creces el calificativo de «uno de los grandes matemáticos del siglo XX». Pero el legado de Grothendieck va mucho más lejos. A las contribuciones anteriores hay que añadir una serie de textos matemáticos, con reflexiones e ideas muy estructuradas, escritos a partir de 1981 cuando ya pasaban diez años desde su retiro voluntario de la escena matemática, que siguen siendo fuente de inspiración para muchos matemáticos.

Las claves biográficas que marcaron el desarrollo de Alexander Grothendieck como persona y como matemático se agrupan en dos períodos claramente diferenciados: 1928–1948, en el que predomina el entorno familiar y el contexto histórico

[1] Alexander Grothendieck también utilizó la traducción francesa de su nombre, *Alexandre*, en la firma de sus escritos y publicaciones.

que rodearon su niñez y su juventud; y 1948–1954, en el que es determinante el medio matemático que lo acogió y en el que se formó como investigador.

De 1954 a 1970 Grothendieck desarrolla el núcleo de su obra en el sentido tradicional de la palabra y alcanza el cénit de su reconocimiento. Entre 1970 y 1981 se retira de la vida pública matemática, y es a partir de 1981 cuando escribe y difunde los textos a los que me he referido antes. Esto conlleva reencuentros y contactos con sus colegas de antaño, así como con otros señalados matemáticos.

En 1991 Grothendieck interrumpe la comunicación con el resto del mundo y comienza un periodo de aislamiento que va acrecentándose hasta su muerte en 2014. Es de esperar que el estudio de sus últimos manuscritos, con miles de páginas más, aporte nuevas luces sobre este último periodo de su vida.

En este artículo, a modo de prólogo para una lectura de su vida y obra, me centraré en los cinco primeros períodos: 1928–1948, en el que predominan los aspectos biográficos; 1948–1954, en el que predominan las claves socio-matemáticas del colectivo en el que se integró y con el que se formó; 1954–1970, en el que repasaremos el contexto matemático y las claves que motivaron y orientaron su trabajo; 1970–1981, en el que, aislado del bullicio matemático, sigue reflexionando sobre ideas matemáticas y, según su propio testimonio, descubre el poder de la meditación; y 1981–1991, en el que decide escribir y hacer públicas sus reflexiones, tanto matemáticas como autobiográficas, filosóficas y espirituales.

Del último periodo de su vida, de 1991 a 2014, poco sabemos, y será necesaria una inmensa labor para descifrar y desgranar la ingente cantidad de páginas escritas que dejó tras su desaparición.

En todo caso, no he pretendido ser exhaustivo a la hora de describir las contribuciones matemáticas de Grothendieck (para ello el lector puede consultar el texto [1]). Mucho menos he pretendido narrar siquiera un resumen de su biografía. Sí he pretendido seleccionar algunas de las ideas y motivaciones que vertebran sus aportaciones científicas, así como algunas de las circunstancias que intervienen en su desarrollo. Espero así que el lector llegue a percibir la amplitud de su pensamiento y la excepcionalidad del personaje, de cuya influencia no se vislumbran aún los límites.

1. 1928–1948: El entorno familiar y el contexto histórico que rodearon su niñez y su juventud

El padre de Alexander Grothendieck, Alexander Shapiro (*Sasha*), nacido en 1889 en Novozybkov (Ucrania/Rusia), fue un activista anarquista. En 1905 participa en la revolución fallida contra Nicolás II, por lo que es perseguido, encarcelado y condenado a muerte. En 1917, tras la revolución bolchevique, es liberado, pero pronto es de nuevo perseguido por sus actividades y condenado a muerte. En 1921 consigue escapar de Rusia y adopta la identidad de Alexander Tanaroff. Vive en Francia, Bélgica y Alemania, donde se relaciona con grupos revolucionarios. En 1924 se establece en Berlín.

Allí conoce a Johanna Grothendieck (*Hanka*), nacida en Hamburgo en 1900 en el seno de una familia pudiente de tradición luterana. Hanka Grothendieck es también activista y colabora con movimientos revolucionarios de izquierdas. Fruto de esta relación, Alexander Grothendieck (familiarmente *Shurik*) nace el 28 de marzo de 1928.

Tras el ascenso al poder del Partido Nacional Socialista, Alexander Tanaroff se traslada a París, y a finales de 1933 Hanka Grothendieck le sigue, pero antes deja a su hijo Alexander en Hamburgo bajo la protección de la familia de Wilhelm Heydorn, antiguo pastor luterano y oficial del ejército que ahora es maestro con inquietudes naturalistas y humanistas.

Shurik Grothendieck con aproximadamente cinco años.

Allí vive el pequeño Alexander hasta que la inminencia de la segunda guerra mundial aconseja su traslado a Francia y el reagrupamiento con sus padres. Esto se produce en mayo de 1939, tras la vuelta de estos de España, donde habían colaborado con la República frente a la sublevación militar. Al estallar la guerra, Hanka y Alexander Grothendieck, en tanto que ciudadanos alemanes, son internados en el campo de Rieucros, y Alexander Tanaroff es deportado al campo Le Vernet y en 1942 a Auschwitz, donde es asesinado.

Entre 1940 y 1945 Alexander Grothendieck tuvo la ocasión de completar sus estudios de bachillerato y, a pesar de las enormes dificultades de todo tipo que rodearon este periodo, también pudo aprovechar las oportunidades que le brindó su escolarización, primero en Mende y a partir de 1942 en Le Chambon-sur-Lignon, en el estimulante Colegio Cévénol fundado por el clérigo André Trocmé, referente junto a su esposa de la Resistencia frente al régimen de Vichy y a la ocupación Nazi.

Durante los tres cursos académicos 1945–48 Alexander Grothendieck realiza sus estudios en la Universidad de Montpellier, en la que obtiene la *License de Mathématiques*. En este periodo Grothendieck no muestra aún signos inequívocamente sobresalientes, aunque sí consigue atraer la atención de alguno de sus profesores. Ya en su época preuniversitaria había tomado conciencia de la necesidad de un tratamiento riguroso para el estudio de longitudes, áreas y volúmenes, y es durante su estancia en la Universidad de Montpellier cuando llega a escribir una «memoria» en la que esencialmente redescubre la integral de Lebesgue. Su profesor de Cálculo, Monsieur Soula, quien llegó a hablarle por primera vez de Lebesgue como el genio que había resuelto la práctica totalidad de los problemas pendientes de las Matemáticas años atrás, le recomendó ir a París y tomar contacto con Élie Cartan. Este hecho sería un punto de inflexión en la vida de Grothendieck de consecuencias inimaginables para él.

Este es el testimonio que Grothendieck escribe a este respecto en [31], *Promenade à travers une oeuvre – ou l'enfant et la Mère, La magie des choses*, P3–P5:

> *(traducción por Juan A. Navarro)*
>
> *[. . .] En nuestros libros de Matemáticas, lo que menos me satisfacía era la ausencia de toda definición seria de la noción de longitud (de una curva), de área (de una superficie), de volumen (de un sólido). Me prometí llenar esa laguna cuando tuviera tiempo. [. . .]*
>
> *Según la limitada experiencia que entonces tenía, pudiera parecer que era el único ser dotado de curiosidad para las cuestiones matemáticas. Al menos esa era mi convicción tácita durante esos años que pasé en una soledad intelectual completa, y que no me pesaba.*[a] *En realidad, me parece que en ese tiempo nunca se me ocurrió profundizar en la cuestión de si yo era la única persona en el mundo capaz de interesarse en lo que hacía. Bastante tenía con mantener la apuesta que me había hecho: desarrollar una teoría que me satisficiera plenamente.*
>
> *No tenía ninguna duda de que lo conseguiría, de hallar la última palabra de las cosas, a poco que me tomara la molestia de escrutarlas, poniendo negro sobre blanco lo que me dijeran, poco a poco. [. . .]*
>
> *Cuando me puse en ello, a la edad de diecisiete años y recién salido del instituto, pensaba que sería cuestión de unas semanas. Estuve tres años. Incluso encontré el modo, naturalmente, de suspender un examen al terminar el segundo año —el de trigonometría esférica (en la especialidad «profundización en astronomía», sic)—, por culpa de un error idiota de cálculo numérico. (Nunca se me dio bien el cálculo, hay que reconocerlo, desde que salí del instituto. . .). Por eso tuve que quedarme un tercer año en Montpellier para terminar mi licenciatura, en vez de ir inmediatamente a París —el único sitio, me aseguraban, donde tendría ocasión de encontrar gente enterada de lo que se consideraba importante en Matemáticas—. Mi confidente, Monsieur Soula, también me aseguraba que los últimos problemas que todavía quedaban en Matemáticas habían sido resueltos, hacía veinte o treinta años, por alguien llamado Lebesgue. Habría desarrollado precisamente (¡curiosa coincidencia, verdaderamente!) una teoría de la medida y de la integración que ponía punto final a las Matemáticas.*
>
> *Monsieur Soula, mi profesor de cálculo diferencial, era un hombre benevolente y amable conmigo. Sin embargo no creo que me convenciera. Ya debía presentir que la Matemática es algo ilimitado en extensión y profundidad. ¿Tiene el mar un «punto final»? Lo cierto es que nunca se me ocurrió buscar el libro de ese Lebesgue del que Monsieur Soula me había hablado, y que tampoco él debió tener jamás entre sus manos. A mi entender, no podía haber nada en común entre lo que pudiera contener un libro y el trabajo que realizaba, a mi manera, para satisfacer mi curiosidad sobre las cosas que me habían intrigado.*
>
> ---
>
> [a]*Entre 1945 y 1948, vivía con mi madre en una pequeña aldea a una decena de kilómetros de Montpellier, Mairargues (por Vendargues), perdida en medio de los viñedos. (Mi padre desapareció en Auschwitz, en 1942). Vivíamos miserablemente con mi beca de estudiante. Para salir adelante hacía la vendimia cada año y, después de la vendimia, vino de rebusca que conseguía colocar como podía (contraviniendo, según parece, la legislación vigente. . .). Además había un jardín que, sin tener que cuidarlo, nos proporcionaba abundantes higos, espinacas e incluso (al final) tomates,*

plantados por un atento vecino en medio de un mar de amapolas. Era una buena vida —aunque a veces algo justa en las sisas cuando había que sustituir la montura de unas gafas o un par de zapatos raídos—. Afortunadamente, mi madre, debilitada y enferma después de su largo internamiento en los campos, tenía derecho a la asistencia médica gratuita. Jamás hubiéramos podido pagar un médico. . .

Durante todo este periodo, a pesar de las difíciles condiciones de vida, y quién sabe si en parte debido a ellas, Grothendieck fue desarrollando una capacidad singular para «pensar en Matemáticas» y para concentrarse en ellas de manera casi exclusiva, y lo que es psicológicamente más importante: Grothendieck tomó conciencia de dicha capacidad y llegó a concebir el plan, ingenuo a priori, de alcanzar lo más alto de las Matemáticas, aun sin conocer qué eran de verdad y, mucho menos, dónde se encontraba realmente su cima.

Todo esto ocurría en un contexto de gran aislamiento. Los efectos de la recién terminada Gran Guerra en la Francia ocupada y el escaso nivel que las Matemáticas tenían entonces en la Universidad de Montpellier no apuntaban en otra dirección. Por otro lado, desde una vertiente más ideológica, es en este periodo cuando parecen arraigar en la personalidad de Grothendieck las ideas pacifistas y naturalistas.

2. 1948–1954: El medio matemático que lo acogió y en el que se formó como investigador

Tras la recomendación de M. Soula, Grothendieck obtiene una beca para proseguir su formación en París. Llega allí en otoño de 1948, donde, en lugar de encontrar a Élie Cartan, de avanzada edad y retirado ya de la actividad matemática, conoce a su hijo Henri Cartan, que ya aparecía como una de las personalidades clave de las Matemáticas francesas del siglo XX.

Además de heredero de Paul Montel, Émile Borel y Henri Lebesgue, Henri Cartan gozaba de una personalidad carismática y de la decidida voluntad de superar las consecuencias de la Segunda Guerra Mundial, algo a lo que contribuyó de manera esencial recomponiendo las relaciones y colaboraciones con los matemáticos alemanes. Es alrededor de esta época en la que las Matemáticas francesas alcanzan posiciones de liderazgo mundial, y es precisamente Henri Cartan quien asume en gran parte la formación de una generación privilegiada de jóvenes matemáticos y la cohesión de todo un colectivo.

A su llegada a París, Alexander Grothendieck mostró a sus anfitriones la memoria que había escrito en Montpellier sobre la fundamentación de la teoría de la medida, y fue así como comprendió que en realidad había redescubierto algo bien conocido —la integral de Lebesgue— y que había un inmenso mundo al que aún era completamente ajeno.

Durante el curso 1948–49 se inicia el «Séminaire Henri Cartan», que se prolongaría hasta el año 1964 y convertiría a París en polo mundial de las Matemáticas. El tema del seminario en esta su primera edición era la Topología Algebraica, y en concreto la (co)homología singular, los métodos simpliciales y la teoría de haces. Alexander Grothendieck fue uno de los asistentes, y fue aquí donde descubrió qué eran las Matemáticas, qué hacían los matemáticos y cómo lo hacían. Esto es lo que escribe en la página xi de la Introducción de [31] a este respecto:

> *(traducción por Juan A. Navarro)*
>
> *[...] la dedicatoria «a los que fueron mis mayores» apareció sobre la marcha, al igual que el nombre de esta reflexión (que también es el de un volumen). Este me ha revelado el papel tan importante que han tenido en mi vida de matemático, un papel cuyos efectos aún permanecen. Eso quedará bastante claro en las páginas que siguen, así que es inútil que me extienda aquí sobre este tema. Tales «mayores», por orden (aproximado) de aparición en mi vida cuando tenía veinte años, son Henri Cartan, Claude Chevalley, André Weil, Jean-Pierre Serre, Laurent Schwartz, Jean Dieudonné, Roger Godement, Jean Delsarte. El ignorante recién llegado que yo era fue acogido con benevolencia por cada uno de ellos, y a continuación muchos de ellos me han dado una amistad y un cariño duraderos. También debo mencionar a Jean Leray, cuya benevolente acogida en mi primer contacto con el «mundo de los matemáticos» (en 1948/49) también me dio ánimos. Mi reflexión pone de manifiesto una deuda de gratitud con cada uno de esos hombres «de otro mundo y otro destino». Esa deuda no es un peso. Su descubrimiento ha llegado como una alegría y me ha vuelto más ligero.*
>
> *Finales de marzo de 1984*

A raíz de las inclinaciones que Grothendieck mostró durante el curso 1948–49, Cartan y Weil le aconsejaron adentrarse en la teoría de los espacios vectoriales topológicos y para ello trasladarse a la Universidad de Nancy, donde se encontraban L. Schwartz, J. Dieudonné, R. Godement y J. Delsarte.

No podemos olvidar que sólo unos años antes Schwartz había revolucionado el escenario matemático con la Teoría de las Distribuciones, y que su aplicación al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales le aseguraba un presente y un futuro de lo más interesante y prometedor. Para esta teoría, los ya consolidados espacios de Banach resultaban insuficientes, y se hacía necesario desarrollar la teoría de los espacios vectoriales topológicos, y más concretamente la de los espacios localmente convexos. Este era el objetivo del seminario dirigido por Schwartz y Dieudonné durante el curso 1949–50.

Alexander Grothendieck llegaba pues a Nancy en el momento adecuado. Allí fue compañero de Jacques-Louis Lions, Bernard Malgrange y Paolo Ribenboim. Como directores, Schwartz y Dieudonné propusieron a Grothendieck una lista de problemas relacionados con los espacios de Fréchet y sus límites inductivos (ver [14]). En menos de un año Grothendieck logró resolverlos todos y pronto se embarcó en proyectos más ambiciosos: la construcción de una teoría de productos tensoriales topológicos con miras a la creación de un marco adecuado donde comprender el importantísimo *teorema del núcleo*, que Schwartz acababa de demostrar en el caso de los espacios de distribuciones. Aquí también Grothendieck logró un éxito que asombró a sus maestros y compañeros, no sólo aclarando el papel de las distintas topologías naturales de que pueden dotarse los productos tensoriales, sino aislando una noción fundamental: los espacios y las aplicaciones *nucleares* (ver [1]). Estos resultados fueron los finalmente elegidos por sus Directores (entre un total de seis, según cuenta Dieudonné en [14]) como cuerpo de su tesis doctoral.

Las difíciles condiciones laborales en la Francia de la posguerra y el hecho de que Grothendieck no tuviera aún la nacionalidad francesa, le obligaron a buscar algún puesto en el extranjero que le permitiera terminar su periodo doctoral. A partir del segundo semestre de 1952 es invitado como profesor visitante a la Universidad de São Paulo, en donde permanecería hasta finales de 1954, manteniendo visitas regulares a París. Durante esta estancia imparte un curso sobre la teoría de los espacios vectoriales topológicos, del que son fruto unas notas que inicialmente tuvieron una difusión limitada [18] y que llegarían a convertirse en un libro de referencia [27].

Foto tomada en 1951 por Paulo Ribenboim en Pont-à-Mousson.

La transición de los intereses matemáticos de Grothendieck comienza a manifestarse con el trabajo [20], que se publicó tardíamente en 1956, aunque se realizó en 1953 durante su estancia en Brasil, a la finalización de su tesis doctoral.[2] En él confluyen su maestría en la teoría de los espacios vectoriales topológicos y su atracción por la cohomología de haces y sus aplicaciones geométricas. El objetivo del trabajo era la generalización del recién demostrado teorema de Cartan-Serre sobre la finitud de la cohomología de un haz coherente en una variedad compleja compacta no singular [5].

3. 1954–1970: La consolidación de un matemático excepcional

Como acabamos de comentar, en 1953 se manifiestan signos evidentes de cambio en la orientación matemática de Grothendieck. Puede que, por una parte, su inclinación natural por la Matemática conceptual y el grado de universalidad que buscaba no encajasen plenamente con los usos tradicionales del Análisis. Este se acababa de ver envuelto en una gran revolución con la nueva teoría de los Espacios Localmente Convexos y de las Distribuciones, y probablemente se percibiera como injustificada la adopción del lenguaje y las técnicas categóricas y funtoriales. Por otra parte, la exposición a las iniciativas vanguardistas que se fraguaban en el seno

[2] Que se defendió en París el 28 de febrero de 1953, y estuvo acompañada de una «segunda tesis» —tal como establecía el sistema francés vigente— que versó sobre la teoría de haces, lo que posiblemente estuviera relacionado con esta transición de intereses.

de la Matemática francesa —de las que Bourbaki era un claro exponente, además del ya mencionado Séminaire Henri Cartan—, así como la voluntad de «llegar a la cima», pudieron atraer a Grothendieck hacia otros campos que en aquel momento se mostraban muy activos y susceptibles de avances «revolucionarios». Nos referimos particularmente a los siguientes:

(i) Fundamentación y unificación del Álgebra Homológica.

(ii) Fundamentación de la Geometría Algebraica.

(iii) Desarrollo de una «nueva Topología».

A ellos hemos de añadir otro transversal que más bien actuó como brújula en tan vasto panorama:

(iv) Las Conjeturas de Weil y su aproximación cohomológica.

Los campos anteriores no fueron, ni mucho menos, independientes para Grothendieck, sino todo lo contrario. Nos sirven más bien a efectos expositivos. De hecho, en algunos de los textos escritos entre 1955 y principios de los años 1960 aparecen alusiones cruzadas a varios de los campos (i)–(iv), por lo que en realidad Grothendieck tenía en su cabeza, desde muy pronto, un plan global para el desarrollo interconectado de todos ellos.

Posiblemente el punto de partida para este periodo de la vida matemática de Grothendieck se produce durante su estancia en 1955 en la Universidad de Kansas, en la que imparte un curso cuyas notas se publican en [19]. En este curso se aprecia la decisión de adentrarse en el estudio de los métodos cohomológicos en Geometría, e incluso asoma de forma incipiente la preocupación por la «cohomología no abeliana».

Es a partir de este momento cuando Grothendieck se dedica en cuerpo y alma a aprender y desarrollar los puntos (i)–(iv) anteriores, y pronto obtiene resultados espectaculares. Resulta sorprendente la rapidez con la que Grothendieck alcanza una comprensión profunda de los resultados que se estaban fraguando a su alrededor y, más aún, la facilidad con la que los empuja hasta cotas inesperadas por sus colegas.

Las contribuciones matemáticas de Grothendieck entre 1955 y 1970, sin parangón en la Historia de las Matemáticas, están excelentemente resumidas y comentadas en [1]. Me limitaré aquí a insistir en algunas claves fundamentales con el ánimo de asomarme a sus motivaciones más profundas y al contexto histórico-matemático en el que se fraguaron.

(i) Fundamentación y unificación del Álgebra Homológica

Durante la primera mitad del siglo XX, la Topología General primero y más tarde la Topología Algebraica alcanzan el rango de «ramas» de las Matemáticas. Esta última requiere del desarrollo de métodos algebraicos nuevos y específicos, que llegan a constituir la llamada «Álgebra Homológica». Las sesiones del Séminaire Cartan 1950–51 y 1951–52 [49] y la obra de referencia [4] de Henri Cartan y Samuel Eilenberg representan, en cierta forma, una culminación —si acaso provisional— de este proceso.

El interés de Grothendieck por este tema se produce, pues, en un contexto muy estimulante. A la obra de referencia anterior, en la que sus autores desarrollan los *funtores derivados* entre categorías de módulos (e.g. los funtores «Ext» y «Tor»), se une la *cohomología de haces*, desarrollada de la mano de Cartan y Serre, entre otros, y sistematizada más tarde en el libro de Roger Godement [17].

Como fruto de este interés y al calor de la importancia que estos métodos estaban alcanzando en la Geometría Algebraica, Grothendieck publica el artículo [21], en el que propone una gran unificación de las construcciones homológicas precedentes. Cabe destacar que parte de este trabajo se gesta durante su estancia en Kansas y se prepara en el seminario [48]. En él aísla propiedades fundamentales de las categorías abelianas que permiten tratar, en pie de igualdad, a las categorías de módulos sobre un anillo y a las categorías de haces (de módulos) sobre un espacio topológico arbitrario. La cohomología de haces y los funtores Ext y Tor «clásicos» aparecen como casos particulares de funtores derivados en sus correspondientes categorías abelianas, y la clave consiste en la existencia de resoluciones acíclicas. Todo ello permitía además considerar bajo un mismo paraguas a: (1) las variedades diferenciables reales o complejas, cuyos espacios topológicos subyacentes heredan las propiedades clásicas de los espacios euclídeos; y (2) las «variedades de Serre», cuya topología de Zariski aparecía más bien como artificial y patológica.

El artículo [21] no fue sino el principio de una gran revolución dentro del Álgebra Homológica. Los teoremas de dualidad en distintos contextos (Topología, Geometría Analítica y Geometría Algebraica) y la generalización de los mismos al caso de espacios singulares llevaron a Grothendieck primero a la *hipercohomología*[3] y más tarde a la noción «definitiva»: las *categorías derivadas* y los *funtores derivados totales*. Este sería el encargo para la tesis de uno de sus alumnos-colaboradores, Jean-Louis Verdier, de la que sólo se prepublicó un resumen en 1963 [52].[4] Curiosamente, este resumen no fue publicado formalmente hasta mucho después, como apéndice del volumen extra [46] de la serie SGA, del que se encargaría Pierre Deligne en 1977 motivado por la necesidad de referencias *ad-hoc* para su gran resultado (y culminación en parte del plan de Grothendieck): la prueba del análogo de la hipótesis de Riemann para variedades sobre un cuerpo finito.

(ii) Fundamentación de la Geometría Algebraica

La Geometría Algebraica había alcanzado un gran desarrollo durante la primera mitad del siglo XX, aunque existían diferencias notables con la Geometría Diferencial. Desde la definición formal por Hermann Weyl de las variedades mediante cartas y atlas, la Geometría Diferencial había logrado una cimentación coherente con las

[3]Clásicamente, la cohomología se aplicaba a objetos, tales como espacios topológicos, grupos, álgebras, etc., con «coeficientes individuales», tales como haces sobre el espacio topológico, representaciones de grupos o de álgebras (módulos), etc. La hipercohomología consiste en extender esta construcción a *complejos* de coeficientes.

[4]La tesis fue defendida el 14 de junio de 1967. Después de la muerte de Verdier en 1989, su edición fue retomada por Georges Maltsiniotis y finalmente se publicó en 1996 como volumen 239 de la colección *Astérisque*, de la SMF.

tendencias de la época. En el caso de la Geometría Algebraica persistían las dificultades específicas ligadas, entre otros, a las nociones de *cuerpo de definición* y de *punto genérico* de una variedad algebraica.

Es en este periodo cuando Oscar Zariski y André Weil emprenden por separado la sistematización y modernización de la Geometría Algebraica. Contaban para ello con los avances conceptuales llevados a cabo por Richard Dedekind, Heinrich Weber y Leopold Kronecker a finales del siglo XIX, siempre bajo el influjo de la obra de Bernhard Riemann.

Oscar Zariski, heredero directo de la «Geometría italiana», se ocupó de fundamentar las demostraciones de sus resultados, que aún lejos de los estándares de rigor impuestos por el desarrollo del Álgebra, el Análisis y la Topología, y por supuesto de la Teoría de Conjuntos, constituían un imponente corpus de conocimiento y de intuición (ver [57]). En esta tarea se produce una gran simbiosis, que perdura desde entonces, entre el Álgebra Conmutativa y la Geometría Algebraica.

André Weil, influido quizá por la visión universalizante de la Matemática francesa de la época, a la que por otra parte él mismo contribuyó de manera esencial, se interesó por las relaciones y analogías profundas entre la Geometría Algebraica y la Teoría de Números, la Topología Algebraica y la Geometría Diferencial (ver [55]). De hecho, él fue el primero en dar una noción de variedad algebraica abstracta [53] (ver también [56]).

Pero los intentos y esfuerzos fundacionales de ambos matemáticos no pudieron darse propiamente por concluidos (provisionalmente al menos, como veremos enseguida) hasta la aparición del trabajo fundamental de Jean-Pierre Serre [50]. En él se da, basada en la Teoría de Haces, la definición general e intrínseca de variedad algebraica (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado arbitrario) y se usa por primera vez la Cohomología de Haces (con respecto a la topología de Zariski) como herramienta de la Geometría Algebraica. No obstante, el punto de vista de Serre obviaba la noción de *punto genérico*.

Alexander Grothendieck es testigo de excepción de este proceso y, como en ocasiones anteriores, capta con rapidez la esencia de las ideas maestras y las impulsa hasta horizontes insospechados. Una variedad algebraica en el sentido de Serre (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado) se obtiene pegando variedades afines, y una variedad afín es esencialmente equivalente a su anillo de coordenadas: sus puntos se corresponden biunívocamente con los ideales maximales de estos. Si el Álgebra Conmutativa se estaba desarrollando con gran generalidad, precisión y éxito, y tan solo una pequeña parcela (la de los anillos de polinomios en un número finito de variables con coeficientes en un cuerpo y sus ideales) se estaba aplicando en Geometría Algebraica, ¿por qué no dar el salto y admitir como «objeto geométrico básico» a cualquier anillo (conmutativo con elemento unidad) y obtener los «objetos geométricos generales» pegando los objetos básicos? Estos objetos geométricos encarnarían además, de manera intrínseca, a las propias ecuaciones, y las soluciones de estas quedarían descritas por el *funtor de puntos*. La respuesta de Grothendieck a esta pregunta[5] está en la creación de la Teoría de Esquemas, que permite, no ya aplicar

[5] Que Dieudonné atribuye a Pierre Cartier en [13].

el Álgebra Conmutativa a la Geometría Algebraica, sino también la «geometrización» de la primera, o más bien, la unificación de ambas.[6]

Para conseguir la atención de los grandes matemáticos de la época no era suficiente tener ideas originales y audaces. Se necesitaba mostrar que estas proporcionaban avances sustanciales. Esto es lo que ocurre con la prueba de Grothendieck de una versión relativa del teorema de Riemann-Roch-Hirzebruch, que podemos considerar como su primer «resultado» en el ámbito de la Geometría Algebraica. Además de resultado en el sentido tradicional, se trataba de una excelente carta de presentación para sus ideas innovadoras, o más bien revolucionarias. Se mostraba la potencia y utilidad de lo que, de otro modo, corría el riesgo de ser percibido como un simple juego de hipergeneralización. En esta contribución son claves la adopción del punto de vista «relativo» (en lugar de estudiar objetos matemáticos por separado, por ejemplo un espacio X, nos centramos en el estudio de morfismos $X \to Y$ entre dos espacios), la aplicación de los funtores derivados a las imágenes directas como versión relativa de la cohomología, la versión relativa de compacidad (morfismos *propios*) y, por su influencia en la Matemática desde entonces, el descubrimiento (¿invención?) de la Teoría K.

Es históricamente destacable que este primer resultado de Grothendieck no fuera publicado por él mismo. Nada menos que Armand Borel y Jean-Pierre Serre asumieron la tarea, organizando primero un seminario en el Institute for Advanced Study de Princeton, en otoño de 1957, en el que estudian los detalles de la prueba, y redactando y publicando después el artículo [3].

Tras esta contribución, Grothendieck es invitado al Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) de Edimburgo en 1958. Su plan para la fundamentación de la Geometría Algebraica está excelentemente resumido y motivado en su conferencia invitada [22]. En ella destaca como fundamental al trabajo de Serre [50].

Pero Grothendieck nunca se contentó con unas pocas líneas para explicar sus ideas. A lo largo de nueve sesiones del Seminario Bourbaki, entre mayo de 1957 y mayo de 1962, va desgranando con detalle los hitos que conforman su plan [23]. Para el desarrollo del mismo se produce otra circunstancia excepcional que muestra, no ya su determinación y voluntad, sino su poder de convicción y de atracción, con los que consiguió entusiasmar y sumar a su causa a muchos matemáticos, desde brillantes estudiantes a consagrados especialistas. Destaca el caso de Jean Dieudonné, que años antes había codirigido su tesis. Analista de gran prestigio y matemático influyente donde los hubiera, comprometido en otro gran proyecto personal, la redacción de los *Éléments d'Analyse*, Dieudonné decidió ponerse al servicio del proyecto de Grothendieck y embarcarse en la gigantesca tarea de redacción de los *Éléments de Géométrie Algébrique (EGA)*.

En esta obra —de la que se llegaron a publicar cuatro capítulos, con un total de más de 1800 páginas, repartidos en ocho volúmenes de la serie *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* entre 1960 y 1967—,

[6]No podemos dejar de mencionar los intentos previos en este sentido de Claude Chevalley en la edición 1955–56 [49] y de Masayoshi Nagata [38], a los que evidentemente Grothendieck da el crédito debido.

Grothendieck y Dieudonné desarrollan y redactan con exquisito detalle y rigor las construcciones básicas de la Teoría de Esquemas, así como una ingente artillería de resultados técnicos de Álgebra Conmutativa, Teoría de Haces y Álgebra Homológica, la mayoría de ellos originales y de una generalidad sin precedentes. Con los EGA, Grothendieck pretendía primero cimentar el trabajo de investigación que conllevaba el plan establecido, y segundo, ir dando forma definitiva a los resultados que se fueran obteniendo.

El primer capítulo y volumen de los EGA es dedicado a Zariski y Weil, y en él se llegaron a anunciar los títulos de 13 capítulos.

Paralelamente a los EGA, Grothendieck se ocupa de la fundamentación de la teoría de espacios analíticos complejos y de las relaciones con las variedades algebraicas complejas. A ello se dedica la sesión número 13 del Séminaire Henri Cartan, en el curso 1960–61.

(iii) Desarrollo de una «nueva Topología»

Los resultados comentados en el apartado anterior, que en parte quedaron plasmados en los cuatro capítulos publicados de los EGA, se refieren esencialmente a la teoría de los haces (casi)coherentes en los esquemas, es decir, a lo que se ha venido en llamar «coeficientes continuos». Se trata de la evolución natural de los resultados de Serre [50] en el nuevo marco propuesto por Grothendieck. No obstante, desde el trabajo de Weil [54], había ido cobrando fuerza la existencia de una teoría cohomológica sobre variedades algebraicas en característica positiva con coeficientes en un cuerpo de característica 0 (independiente del cuerpo base de la variedad), del tipo de la cohomología singular sobre variedades topológicas clásicas, y que cumpliera propiedades análogas: dualidad de Poincaré, fórmula de Künneth, fórmula de Lefschetz, etc. Una teoría así permitiría deducir de manera formal las conjeturas que el propio Weil había propuesto acerca del comportamiento del número de puntos de variedades algebraicas sobre cuerpos finitos, y a las que nos referiremos más tarde.

Aunque Serre tenía presente esta idea cuando escribió [50], la comunidad matemática sabía que este camino nunca podría responder a lo que se buscaba. Queremos «contar puntos» y para ello necesitamos que los números naturales se inyecten en el cuerpo base de nuestra cohomología, pero la cohomología de los haces coherentes siempre proporciona espacios vectoriales con coeficientes en el cuerpo base de la variedad, que en el caso que nos ocupa es de característica $p > 0$. Igualmente, y por la misma razón, Grothendieck era consciente de que el programa esbozado en [23] tampoco podría responder a esta cuestión. De hecho, esta salvedad es mencionada explícitamente en [22], en donde admite disponer de ideas para atacarla, aunque se pospone su tratamiento. En este sentido es significativo que en la presentación de los EGA se atribuye al proyectado capítulo XIII, y último de la serie, el título *Cohomologie de Weil.*

Matemáticamente, la cuestión es que la topología de Zariski no es lo suficientemente fina como para trivializar localmente los revestimientos *étales*, que por una parte admiten una descripción puramente algebraica y, por otra, en el caso del cuerpo base de los complejos, inducen revestimientos clásicos (localmente triviales) en la topología euclídea. Esta observación, que casi con toda seguridad conoció por Serre, se encuentra en el origen del plan de Grothendieck para crear una «nueva Topología», acompañada de nuevas teorías cohomológicas que, esta vez sí, responderían a lo que se había venido en llamar una «cohomología de Weil».

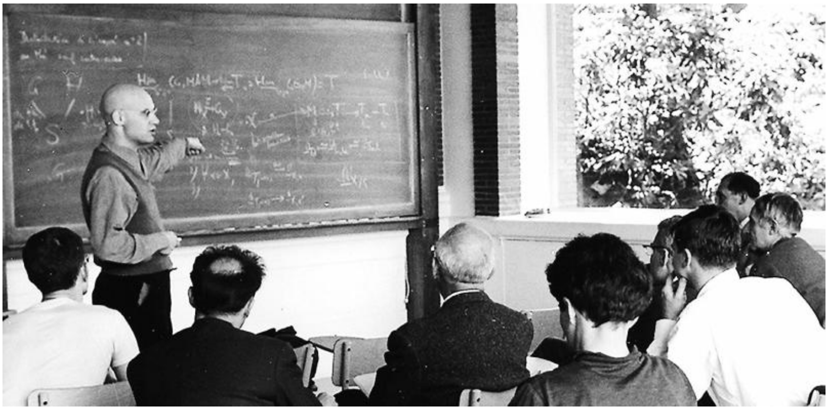
Si bien a primera vista podría parecer que este es un aspecto más de la fundamentación de la Geometría Algebraica que Grothendieck se había propuesto desarrollar, creo que sería inexacto considerarlo así. Las carencias de la topología de Zariski y de la «cohomología coherente» en característica positiva eran bien conocidas. También se otorgaba relevancia a las analogías —presentes por ejemplo en los trabajos de Serre y Tate— entre la cohomología galoisiana (de extensiones de cuerpos) y la teoría de revestimientos topológicos (o espacios recubridores) en la Topología clásica. Pero de ahí a diseñar todo un programa para renovar por completo los fundamentos de la Topología, de la Teoría de Haces y de la Cohomología resultante, y lo que es más importante, a llevarlo efectivamente a cabo, hay un salto cualitativo que constituye quizá el súmmum de la obra de Grothendieck. Mientras que para la «cohomología coherente», o de los «coeficientes continuos», la contribución de Grothendieck disponía de un sustento de excepción como era el trabajo [50], en el caso de la nueva Topología y de los nuevos «coeficientes discretos» estaba todo por hacer, y no parece plausible que ningún otro matemático hubiera tenido la osadía de embarcarse en un proyecto de tal envergadura, que más bien podemos imaginar que era percibido como auténtica «matemática-ficción».

El *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA)* fue el instrumento diseñado por Grothendieck para el desarrollo de su plan, una vez que los cimientos de los primeros capítulos de los EGA habían fraguado. Este seminario se desarrolló en el Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), en el Bois-Marie, entre 1960 y 1969.[7] Se organiza como un grupo de trabajo al que se van sumando jóvenes que se van ocupando de distintas parcelas sobre las que terminarán escribiendo sus tesis doctorales,[8] y que también atrae a otra larga lista de renombrados matemáticos entre los que destacan Michael Artin, Pierre Cartier, Christian Houzel, Nicholas Katz, Steven Kleiman y Jean-Pierre Serre, entre otros.

La primera edición del SGA tuvo lugar durante el curso 1960–61 y se ocupó de la noción algebraica de *revestimiento étale* y de grupo fundamental, así como de otra de las joyas de Grothendieck: la teoría del *descenso* (ver [44]). Se trata del primer paso en la dirección de la nueva Topología a partir del punto de vista galoisiano. En ella se gestaron también otras nociones clave, como son las caracterizaciones

[7]El IHES fue creado en 1958 por el empresario León Motchane, y Grothendieck y Dieudonné fueron sus primeros profesores. La creación del IHES siguió en parte el modelo del prestigioso Institute for Advanced Study de Princeton. Se trataba por un lado de una muestra de la solidez que había alcanzado la Matemática francesa a lo largo de las décadas de 1940 y 1950, y por otro de un claro reconocimiento hacia el propio Grothendieck y hacia su proyecto.

[8]Este sería el caso de Pierre Berthelot, Pierre Deligne, Michel Demazure, Peter Gabriel (aunque su tesis versó sobre cuestiones anteriores al contenido del SGA), Jean Giraud, Monique Hakim, Luc Illusie, Jean-Pierre Jouanolou, Michel y Michèle Raynaud y Jean-Louis Verdier. A estos «estudiantes de doctorado» hay que añadir otros dos que no participaron —al menos presencialmente— en las sesiones del SGA: Neantro Saavedra Rivano y Hoang Xuan Sinh. También debemos añadir a William Messing, cuya tesis se gestó en 1970 cuando Grothendieck iniciaba ya su retiro.



Exponiendo en el *Séminaire de Géométrie Algébrique* en el IHES.

«infinitesimales» y la «lisitud formal», que llegarían a tomar forma definitiva en los capítulos publicados de los EGA.

El trabajo encaminado a la creación de la nueva Topología se lleva a cabo durante la cuarta edición del SGA, en el año académico 1963–64, cuya publicación definitiva [45] supera las 1500 páginas. Allí se introducen y estudian exhaustivamente las nociones de *site* y de *topos*, centrales en este nuevo enfoque, con sus correspondientes teorías cohomológicas, se aborda el caso crucial del *site* y *topos étale* de un esquema, se introducen los nuevos coeficientes discretos, a saber, los *haces constructibles*, y se dan los primeros resultados de finitud y de cambio de base. Es de destacar que este esfuerzo fundacional en un nuevo contexto, abstracto y ajeno a la Topología clásica, trae consigo una revisión de la Teoría de la Dualidad en los espacios localmente compactos clásicos, y en particular en la Geometría Algebraica y en la Geometría Analítica sobre el cuerpo de los complejos (ver a este respecto [16]). Pero, sobre todo, esta nueva Teoría de la Dualidad dio lugar al *formalismo de las seis operaciones*, capaz de englobar bajo un mismo paraguas conceptual a la dualidad de los coeficientes continuos (coherentes), tipo Cartan-Serre, y a la de los coeficientes discretos (constructibles), tipo Poincaré.[9]

(iv) Las Conjeturas de Weil y su aproximación cohomológica

La motivación principal para la construcción de una nueva Topología y de nuevas teorías cohomológicas se encuentra en las conjeturas que Weil propone al final del artículo [54]. Estas conjeturas predicen, para una variedad algebraica definida sobre un cuerpo finito, el comportamiento del número de puntos con coordenadas en las distintas extensiones finitas del cuerpo base. Como ya hemos mencionado anteriormente, esta predicción sugiere la existencia de una teoría cohomológica sobre

[9] Se trata aquí de una de las contribuciones matemáticas de Grothendieck de mayor envergadura, a la que él mismo otorga en [31] un papel predominante en su obra, al tiempo que critica con pesar cómo su paternidad quedó desdibujada con la intervención de algunos de sus más próximos alumnos.

variedades en característica positiva que imitara a la cohomología singular en el caso de las variedades algebraicas sobre el cuerpo de los complejos.

Las conjeturas de Weil estaban pues presentes en el ambiente matemático que acogió a Grothendieck desde prácticamente su llegada a París en 1948. Hacia 1955, cuando ya habían virado sus intereses matemáticos, Grothendieck tuvo conocimiento de ellas, en su versión cohomológica, de la mano de Jean-Pierre Serre (ver [31], Note 169(i), p. 840). Las conjeturas de Weil, o más exactamente, la construcción de una cohomología de Weil que diera como subproducto una prueba de dichas conjeturas, inspiraron y motivaron el programa y la obra de Grothendieck desde el principio hasta su retiro en 1970, tal como se ha comentado en el apartado (iii).

De entre las varias vías que se divisaban para la definición de la deseada cohomología de Weil, fue la de la cohomología ℓ-ádica la que fructificó, toda vez que los cimientos de [45] estaban bien establecidos. La quinta edición del SGA, durante el año académico 1965–66, se dedica por completo a este fin. Allí se desarrollan las tan esperadas aplicaciones de la nueva Topología: la cohomología ℓ-ádica (ℓ es un primo distinto de la característica $p > 0$ del cuerpo base sobre el que trabajamos), la fórmula de Lefschetz de las trazas y, como consecuencia, la prueba de la racionalidad de las funciones L —la primera de las conjeturas de Weil. Con ello, la comunidad matemática podía estar segura de que el descomunal plan impulsado por Grothendieck, no sólo iba en la buena dirección, sino que podría alcanzar pronto su meta.

El volumen [47] correspondiente a esta quinta edición, con cerca de 500 páginas, fue publicado tardíamente por Illusie en 1977, cuando Grothendieck llevaba más de seis años retirado de la escena matemática y Deligne había probado la última de las conjeturas de Weil —el análogo de la hipótesis de Riemann para variedades sobre cuerpos finitos— en [8] y había publicado el libro [46].[10]

Pero la búsqueda de una cohomología de Weil fue el motor, no sólo de la nueva Topología y de la cohomología ℓ-ádica, sino de otros desarrollos fundamentales que también inspiraron a destacados matemáticos, y de manera muy especial al propio Grothendieck.

Tras constatar la insuficiencia de la cohomología coherente, el primer intento había sido llevado a cabo por Serre utilizando el anillo de *vectores de Witt* del cuerpo base (ver [51]), pero no prosperó al fallar algunos resultados básicos de finitud. Bernard Dwork había probado la racionalidad de las funciones L asociadas a variedades algebraicas sobre un cuerpo finito en 1960 mediante técnicas de Análisis p-ádico. Este trabajo, aunque ajeno en principio a las técnicas cohomológicas y a la búsqueda de una cohomología de Weil, precedió el proyecto de Gerard Washnitzer y Paul Monsky de una *cohomología p-ádica* mediante el levantamiento de álgebras afines en característica $p > 0$ a álgebras *débilmente completas* sobre el anillo de vectores de Witt (entre otros), forzando así un análogo del lema de Poincaré. No obstante, aquí aparecieron también dificultades que impidieron que el proyecto llegase a buen

[10]La publicación de [46] y [47] y la presentación de resultados que allí se hacía provocarían más tarde el pesar y la crítica de Grothendieck, que expresaría con profusión en [31] (ver en especial las notas 67, 671, 67’, 68, 68’, pp. 308–316).

término,[11] pero la idea de base sí interesó a Grothendieck y de hecho pudo servirle de inspiración alrededor de 1966 para el lanzamiento de un nuevo plan: la *cohomología cristalina*, de cuyo desarrollo se ocuparía su alumno Pierre Berthelot.

Por la misma época Grothendieck publica otro trabajo fundamental [24], que en lo esencial había sido concebido en 1963. En este artículo prueba que la (hiper)cohomología de de Rham de una variedad algebraica lisa sobre los complejos (calculada respecto de su topología de Zariski) coincide con la cohomología singular usual, con coeficientes complejos, de la variedad topológica asociada (calculada por tanto respecto de su topología euclídea). De esta forma, la cohomología de de Rham algebraica de variedades lisas sobre un cuerpo de característica 0 podría servir de modelo, o al menos de inspiración, a la hora de construir por medios puramente algebraicos la también deseada cohomología p-ádica sobre variedades algebraicas en característica $p > 0$, previa consideración de levantamientos adecuados.

Todos estos resultados fueron despertando en Grothendieck nuevas preguntas y nuevas ideas, que llegarían a constituir el «núcleo duro» de su pensamiento matemático. La conferencia [35] contiene amplia documentación sobre este círculo de ideas.

Aunque la cohomología ℓ-ádica demostró cumplir las condiciones de una cohomología de Weil sobre variedades algebraicas en característica $p > 0$ (recordamos que ℓ es cualquier primo distinto de p), no dejaba de plantear interrogantes la independencia de ℓ, pues en realidad lo que se había obtenido era, no una sola cohomología de Weil, sino tantas como números primos $\ell \neq p$. Por otra parte, aunque la cohomología p-ádica no había llegado al estadio de desarrollo de la cohomología ℓ-ádica, ya podía adivinarse que sería cuestión de tiempo y enseguida se plantearía su comparación con las cohomologías ℓ-ádicas. Ambos enfoques eran además complementarios, pues proporcionaban informaciones cruzadas acerca de la ℓ-torsión y la p-torsión de una hipótetica «cohomología de Weil entera», de la que el resto de cohomologías conocidas o en desarrollo, incluidas la de de Rham y la cristalina, no serían más que «realizaciones» concretas. Esto es lo que Grothendieck llamaba el *motivo* de una variedad y que sugería, no sólo la existencia de una teoría cohomológica universal, sino la de una categoría de motivos que sería lo más próxima que podamos imaginar a la propia categoría de variedades algebraicas; una especie de «abelianización» de esta última.

La idea de *motivo* y la correspondiente «cohomología universal de Weil» supusieron el enunciado de un nuevo conjunto de conjeturas: las «conjeturas estándar de Grothendieck», de las que las conjeturas de Weil serían un simple subproducto.[12] La «Teoría de los motivos» fue probablemente el proyecto más íntimo de Grothendieck,[13] aunque de él apenas dejó nada escrito (ver [11], [25] y [7], carta del 16 de agosto de 1964).

[11] Tan solo entre mediados y finales de los años 1990 se produjeron avances significativos en esta teoría, cuya descripción queda fuera de los objetivos de este artículo.

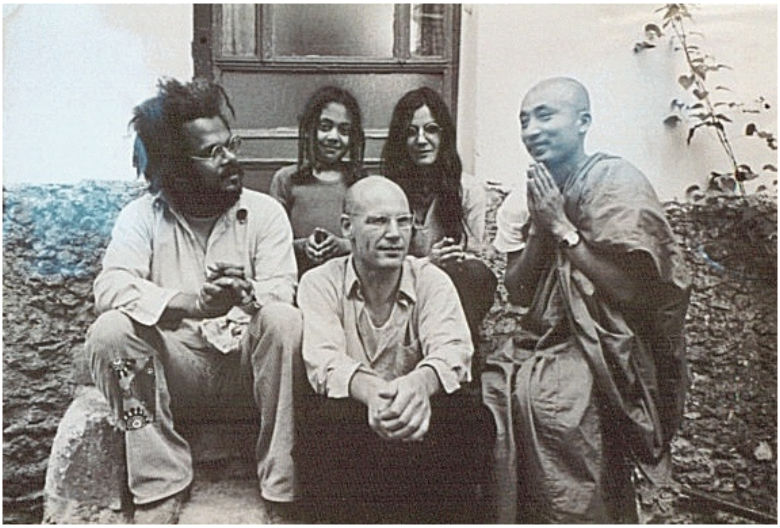
[12] Estas conjeturas han sido consideradas por muchos expertos, desde la retirada de Grothendieck en 1970, fuera del alcance de las técnicas y conocimientos disponibles.

[13] En [31], Grothendieck se refiere en múltiples ocasiones a este tema. Ver, p. ej., la sección *Les motifs – ou le coeur dans le coeur*, pp. P43–P48, donde además de explicar las ideas matemáticas subyacentes, se pronuncia en términos muy críticos acerca de (su percepción de) lo ocurrido tras su

Esta teoría ha tenido avances recientes espectaculares con la *cohomología motívica* de Vladimir Voevodsky, pero se encuentra lejos aún de alcanzar su madurez.[14]

4. 1970–1981: El retiro

El alejamiento de Grothendieck del escenario matemático se produce a principios de la década de 1970. El primer anuncio se encuentra en el párrafo final de la «Introducción» de [44]. En él hace pública su decisión de abandonar su puesto en el IHES con motivo de la dependencia financiera de esta institución del Ejército y de no haber obtenido de sus colegas el apoyo que reclamaba para cambiar esta situación. Este párrafo tiene fecha de agosto de 1970, aunque la decisión se fue gestando desde noviembre de 1969. Las razones invocadas son de naturaleza pacifista y se insertan en el contexto histórico del momento: la Guerra Fría, la amenaza de un conflicto nuclear global, la guerra de Vietnam,[15] etc.



Con amigos en Massy a principios de la década de 1970.

retiro en 1970: primero, un «enterramiento» de dichas ideas y, años más tarde, una «exhumación» que ocultaba por completo la génesis de las mismas.

[14]Una idea clave de Pierre Deligne ha sido tratar de definir primero lo que sería la *categoría derivada de los motivos (mixtos)*, y posteriormente aislar en ella una *t-estructura* que nos proporcionaría la buscada categoría de motivos (mixtos). Esta idea no ha llegado a realizarse completamente y, de hecho, han aparecido algunas obstrucciones, pero al menos ha permitido a Voevodsky definir una *cohomología motívica* que, entre otros, ha sido un ingrediente esencial en su prueba de la conjetura de Milnor en Teoría K algebraica, lo que le valió la Medalla Fields en 2002.

[15]A finales de 1967, Grothendieck viajó a Vietnam del Norte por iniciativa propia e impartió varios seminarios. Durante este viaje conoció directamente las fatales consecuencias de la guerra entre la población civil, lo que le llevó a presentar un informe detallado a su regreso a París.

Entre 1970 y 1973, Grothendieck ocupa, durante dos años, un puesto temporal en el Collège de France. En este periodo, sus actividades e intervenciones públicas se polarizan hacia el activismo pacifista y ecologista[16] y las Matemáticas quedan relegadas a un segundo plano.

En 1973, Grothendieck acepta una oferta de la Universidad de Montpellier, donde ocupa un puesto de Profesor hasta 1984. Allí comienza desarrollando una labor discreta y se produce un enfriamiento de los contactos y un distanciamiento con sus colegas y ex-alumnos.

A pesar de ello, en este periodo Grothendieck no abandona en absoluto su curiosidad y ambición por las Matemáticas, aunque las circunstancias habían cambiado radicalmente con respecto a la época frenética de los EGA y los SGA. El aislamiento era casi total, apenas tenía compromisos sociales y, además de dar rienda suelta a su creatividad matemática, Grothendieck toma conciencia —concretamente en 1976, según expresa en [31]— de un nuevo instrumento: la meditación, que llega a practicar por sistema para escrutar las relaciones consigo mismo, las relaciones de antaño con sus padres y, en general, con el Mundo, o mejor aún, con el Universo del que se considera parte.

Algunas muestras de su actividad matemática entre 1973 y 1981 son la conclusión en 1975 de la tesis doctoral de Hoang Xuan Sinh, que comenzara a raíz de su visita a Vietnam; la dirección en la Universidad de Montpellier de la tesis doctoral que Yves Ladegaillerie defendió en 1976 sobre la topología de superficies, que precede su interés por los *dessins d'enfants* en superficies de Riemann y su relación con el grupo de Galois absoluto de los racionales; así como el intercambio de correspondencia, no muy frecuente pero de enjundia, con algunos matemáticos.[17] Cabe mencionar también su «última conferencia», impartida en el IHES en 1975 tras la incorporación de Dennis Sullivan a esta institución, que versó sobre el complejo de de Rham con *potencias divididas*, o su intervención en seminarios en la Universidad de Montpellier y en la supervisión de investigadores, entre los que destaca Carlos E. Contou-Carrère, que terminaría defendiendo su tesis en 1983.

Esto es lo que él mismo escribe en [31], Note 70:

> *(traducción por Juan A. Navarro)*
>
> *Las cosas cambiaron en 1977 cuando, por primera vez desde los años sesenta, quedé muy «enganchado» a una substancia de una riqueza excepcional. Fue el comienzo de mis reflexiones sobre las cartas[a] y (a la vez) sobre un enfoque nuevo de los poliedros regulares, muy relacionado con ellos (véase el* Esquisse d'un Programme*, párrafos 3 y 4). Desde ese momento, para mí estaba claro que los hechos sobre los que acababa de poner el dedo abrían unas perspectivas insospechadas, de una extensión y una profundidad comparables a las que había entrevisto (y después más que entrevisto) al nacer la noción de motivo.*
>
> [a] *Nota del traductor: Grothendieck utilizaría más tarde el término «dessin d'enfants» (dibujo de niños) para estos objetos.*

[16] Fundación del movimiento *Survivre*, que más tarde se llamaría *Survivre et Vivre*, y edición de un boletín (casi)periódico con el mismo nombre.

[17] Por ejemplo, con Luc Illusie en 1973 sobre los *motivos*, o con Lawrence Breen en 1975–76 sobre la homotopía y las n-categorías.

Pero la prueba más palpable de esta actividad la constituye un signo inequívoco de lo que, a efectos de presentación de este prólogo, hemos calificado de «retorno». Nos referimos al manuscrito *La longue Marche à travers la théorie de Galois* [28], de cerca de 1600 páginas, escrito entre enero y junio de 1981. Su simple existencia es obviamente fruto de largas e intensas reflexiones en los años previos.

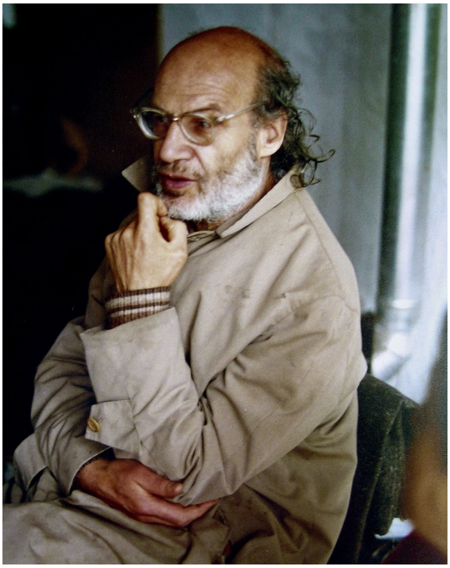
Esto es lo que Grothendieck escribe en [31], en *L'héritage de Galois*, p. 16:

> *(traducción por Juan A. Navarro)*
>
> *La realicé de enero a junio de 1981, y la llamé* La longue Marche à travers la théorie de Galois*. Durante ella, tomé conciencia de que el sueño que esporádicamente perseguía desde hacía unos años, y que había terminado por tomar el nombre de «geometría algebraica anabeliana», no era otro que una continuación, «una culminación de la teoría de Galois, y sin duda en el espíritu de Galois».*

5. 1981–1991: Un cierto retorno y un reencuentro (más bien fallido)

La longue Marche à travers la théorie de Galois marca, pues, la transición entre el aislamiento autoimpuesto de Grothendieck y un deseo renovado de difundir sus nuevas ideas, e incluso de revolucionar de nuevo la escena matemática. Podemos por tanto hablar de un cierto retorno, que en modo alguno llegaría nunca a ser total.

A partir de este momento Grothendieck decide plasmar el conjunto de sus reflexiones matemáticas de los últimos años en una serie de textos, escritos de modo no convencional y con una avalancha de ideas. Nos referimos a [29, 30] y, al final de este periodo, a [33]. Durante la redacción de estos texto, Grothendieck llega a restablecer discusiones matemáticas y contactos con algunos de los colegas de antaño y con otros nuevos.



Grothendieck en 1988.

Pero, como ya hemos dicho, durante su retiro, Grothendieck había hecho otro descubrimiento: la meditación. El deseo de difundir sus ideas matemáticas se vio acompañado del de difundir también sus reflexiones biográficas, existenciales, filosóficas y, finalmente, espirituales. A partir de 1983, nuevas circunstancias y experiencias de su reencuentro se cruzan con este deseo. Así, el proyecto ya implícito cuando escribiera [29] de convertirlo en el primer volumen de unas «Reflexiones matemáticas», derivó en la redacción de *Récoltes et Semailles, Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien* [31], manuscrito de más de 1000 páginas escrito entre 1985 y 1986. En él Grothendieck reflexiona sobre su propia vida como matemático, sobre el descubrimiento de las ideas, sobre su transmisión y sobre la sociología y la evolución de la comunidad en la que se desarrolló y a la que perteneció. También manifiesta decepción y reproche hacia algunos de sus discípulos y colegas próximos por el papel que a su entender jugaron tras su retiro en 1970.

Al texto anterior le sigue [32], cuya versión inicial tiene más de 300 páginas y se acompaña de otras 500 de notas escritas desde 1987. En él Grothendieck se adentra en reflexiones filosóficas, existenciales y espirituales.

Todos estos textos, matemáticos y no matemáticos, han de añadirse ineludiblemente a las publicaciones científicas anteriores si deseamos aprehender la globalidad de la figura, de la vida y de la obra de Alexander Grothendieck. Desde el punto de vista de su experiencia vital como matemático, destaca el ya referido [31]. Allí nos transmite sus reflexiones más íntimas sobre su visión de las Matemáticas y de sus relaciones con los matemáticos, y, entre líneas, podemos acercarnos a las luces y a las sombras de una trayectoria tan singular.

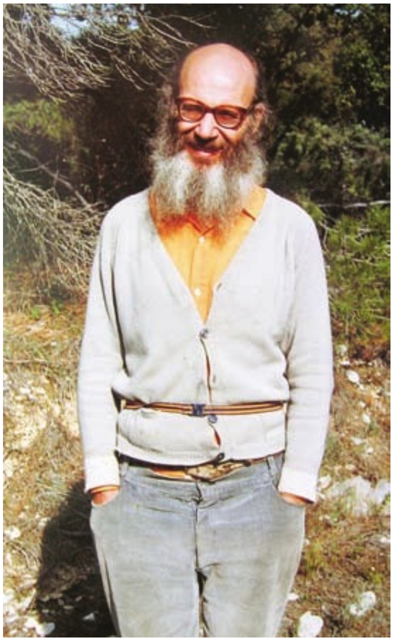
En agosto de 1991, cuando tenía 63 años, Grothendieck decide aislarse por completo. Abandona su domicilio y se traslada a otro que permanece prácticamente en secreto durante muchos años.[18] Rechaza el contacto con todo tipo de interlocutores, matemáticos o no matemáticos, y no mantiene ningún tipo de correspondencia. Dedica todo su tiempo a escribir nuevas reflexiones científicas, filosóficas y místicas, aparentemente en condiciones de un desequilibrio personal creciente. Será necesario un largo y laborioso trabajo de análisis para desentrañar esta última época de su vida, que se prolongó 23 años y en la que escribió un nuevo alud de páginas.

A modo de conclusión (de este prólogo)

El legado que Grothendieck nos ha dejado sería inimaginable sin los matemáticos que lo acogieron, que le enseñaron dónde se encontraba la cima de las Matemáticas —de entonces— y que lo ayudaron a llevar a cabo su plan, en algunos casos con una entrega casi total. Grothendieck fue muy afortunado cuando en el curso 1948–49 se encontró en medio de un grupo de matemáticos franceses, muchos de ellos de su misma generación, que se habían propuesto cambiar el rumbo de las Matemáticas. También fue afortunado cuando destacados matemáticos de la época, entre 1953 y 1958, supieron detectar la fuerza de sus ideas —a veces sin compartirlas o comprenderlas en su totalidad— y, con una honestidad científica ejemplar, le dieron todo tipo de facilidades para que las desarrollara, aun cuando esto pudo hacerse a expensas de otros planteamientos. Por último, Grothendieck también fue afortunado cuando acudieron a su llamada un grupo de brillantes alumnos dispuestos a desarrollar de manera entusiasta el plan que había trazado con tanta precisión.

[18] Ahora sabemos [34] que vivía en Lasserre, un pueblo de los Pirineos con apenas 200 vecinos.

La relación de Grothendieck con sus colegas fue pues crucial durante toda su carrera hasta 1970. Cuando se interesaba por alguna cuestión profunda, pero desconocida para él, no era infrecuente que se planteara preguntas con una cierta ingenuidad,[19] pero, tras escuchar las respuestas de los especialistas, no sólo captaba con rapidez las ideas maestras, sino que a menudo era capaz de catapultarlas a lugares donde sus interlocutores posiblemente no hubieran osado jamás acercarse. En este sentido, es especialmente valiosa y reveladora la correspondencia entre Grothendieck y Serre publicada en [7], de la que se derivan detalles preciosos para entender a nuestro personaje y a su obra, así como la relación asimétrica entre ambas figuras de la Matemática del siglo XX. Al final de dicho documento se incluyen también tres cartas escritas entre 1984 y 1987, coincidiendo con el retorno y reencuentro, en las que Grothendieck expresa decepción por lo ocurrido tras su marcha en 1970.



Una de sus últimas fotos conocidas.

Ahora bien, el papel esencial de la relación de Grothendieck con el colectivo al que perteneció no resta ni un ápice a la genialidad y excepcionalidad del personaje. Más bien nos muestra cómo, tras aprender de los mejores maestros, supo guiarse de su propia imaginación y deshacerse de todo prejuicio o autolimitación, llegando a impulsar las áreas a las que se dedicó hasta cotas a las que sencillamente nadie antes se había atrevido a asomarse.

Es especialmente representativo del modo en que Grothendieck abordaba su tarea, la serie ya mencionada de nueve *exposés* en el Seminario Bourbaki entre los años 1957 y 1962, que fueron recopilados en [23], en los que desgrana los detalles del proyecto de fundamentación de la Geometría Algebraica que estaba realizando, y que constituiría una guía muy exacta del trabajo que desarrollarían él y sus discípulos y colaboradores en el IHES hasta 1970.

El siguiente párrafo, extraído de [31], Note 122, *La mer qui monte. . .*, p. 552–553, es un testimonio que destaca Deligne en [10] y que fotografía muy bien la manera en que Grothendieck abordaba los desafíos a los que se enfrentó:

> *(traducción por Juan A. Navarro)*
>
> *Tomemos por ejemplo la tarea de demostrar una conjetura (a lo que, para algunos, parece reducirse el trabajo matemático). Veo dos enfoques extremos para conseguirlo. Uno es el del martillo y el escoplo, si el problema planteado se ve como una gran nuez, dura y lisa, cuyo interior, la nutritiva carne protegida*

[19] Grothendieck alude a este hecho en varias ocasiones en [31].

> *por la cáscara, hay que alcanzar. El principio es simple: se coloca el filo del escoplo contra la cáscara, y se golpea fuerte. Si es preciso, se repite en diferentes lugares, hasta que la cáscara se parte —y todos contentos—. Este enfoque es muy tentador cuando la cáscara presenta rugosidades o protuberancias, por donde «cogerla». En algunos casos, tales «bultos» por donde coger la nuez saltan a la vista, en otros casos, hay que girarla con atención en todos los sentidos, examinarla con detalle, antes de encontrar un punto de ataque. El caso más difícil es cuando la cáscara es de una redondez y una dureza perfecta y uniforme. Por muy fuerte que se golpee, el filo del escoplo patina y apenas araña la superficie —y uno se acaba cansando—. Aunque a veces se consigue, a fuerza de músculo y de perseverancia. Podría ilustrar el segundo enfoque, manteniendo la imagen de la nuez que hay que abrir. La primera parábola que se me viene a la cabeza, es que se sumerge la nuez en algún líquido emoliente, o simplemente en agua, por qué no, de vez en cuando se frota para que penetre mejor, y por lo demás se deja que actúe el tiempo. La cáscara se ablanda durante semanas y meses —cuando llega el momento, la presión de la mano basta, ¡la cáscara se abre como la de un aguacate maduro!—. O también, se deja madurar la nuez bajo el sol y bajo la lluvia y quizás también bajo las heladas del invierno. Cuando llegue el momento será un delicado brote surgido de la sustanciosa carne el que rompa la cáscara, como quien juega —o mejor dicho, la misma cáscara se abrirá, para dejarle pasar—. [...] El lector que esté un poco familiarizado con algunos de mis trabajos no tendrá ninguna dificultad en reconocer cuál de esos dos enfoques es «el mío».*

Este modo de trabajar, que no sólo afectaba a las Matemáticas, desembocó casi irremediablemente en la ejecución de planes gigantescos, con plazos y condiciones de trabajo que forzaban al límite las capacidades de Grothendieck y las de los que le acompañaran en la tarea.

Bien podemos imaginar que estas circunstancias jugaran un papel, primero en la decisión de su retiro en 1970, segundo en la manera no convencional en la que prosiguió su trabajo matemático entre mediados de los años 1970 y 1991, y por último en la decisión de aislarse por completo del mundo hasta su desaparición en 2014.[20]

Es patente la percepción de fracaso en Grothendieck sobre el giro que, a su entender, habían dado «sus teorías matemáticas» tras su retiro en 1970 de la mano de los que otrora fueran sus más estrechos colaboradores. Asimismo, hay percepción de fracaso en su época de activismo político, a la que posiblemente fue con la misma convicción y principios que antes había aplicado a las Matemáticas, pero en un contexto mucho más complejo e incontrolable. El texto [31], en el que vertió juicios sobre colegas y ex-alumnos e interpretaciones sobre sus actos que con seguridad traspasaron a veces la ecuanimidad que parecía encarnar, supuso en parte una «escenificación» que bien podría reflejar la elusión de sus propias responsabilidades. En todo caso, y además de todo lo anterior, para cualquier observador es visible la más que probable posibilidad de que Grothendieck se viera finalmente superado por

[20] También podemos adivinar como razón transversal en todas estas decisiones la influencia que sobre su personalidad pudo tener el activismo revolucionario de sus padres, tal como sugiere W. Scharlau en [40].

la magnitud de sus propios proyectos, para cuya ejecución hubiera sido necesario el concurso de escuelas completas durante decenios.

Pero, al margen de estas percepciones personales, discutibles y subjetivas, hay sobradas razones objetivas que nos indican un tremendo éxito en su empeño. Así, los esquemas se han convertido en el lenguaje natural de la Geometría Algebraica, que además ha alumbrado la Geometría Algebraica Aritmética, unificándose con la Teoría Algebraica de Números y haciendo realidad el sueño de Dedekind; las categorías derivadas —y las técnicas de *dévissage* asociadas— se han impuesto como la herramienta adecuada para el estudio cohomológico de los «espacios geométricos»; la manera más profunda de comprender estos espacios y las construcciones geométricas no es a través de sus puntos, sino mediante las construcciones funtoriales, el *formalismo de las seis operaciones* y la representabilidad de funtores (e.g. los *funtores de puntos*); la teoría de motivos es uno de los desafíos cruciales de la Geometría Algebraica contemporánea. Ninguno de estos avances fueron fácilmente digeridos en un principio. Algunos[21] incluso llegaron a desactivarse tras su retiro en 1970, pero más tarde llegarían a cobrar un impulso definitivo, uniéndose a otros que fueron propuestos en los textos producidos a partir de 1981. De hecho, algunos de los campos más activos en la Geometría Algebraica, la Geometría Aritmética[22] y la Teoría de Homotopía contemporáneas han sido y son una continuación de las ideas y los métodos de Grothendieck, tanto los que desarrollara en su época dorada —entre 1955 y 1970— como los que propusiera en los textos posteriores.

La figura de Grothendieck ha sido un caso excepcional en la Historia de las Matemáticas. La magnitud y obsesión de un empeño como el suyo, así como su acertada visión y su extraordinaria capacidad de trabajo, explican la profundidad y el alcance de su obra, y puede que también el desenlace de las relaciones con sus congéneres y el de su propia vida. En su vida y obra fue constante la necesidad imperiosa, obsesiva podríamos decir, de comunicar sus ideas y reflexiones[23] y de transformar con ellas, en «tiempo real»,[24] el mundo que le rodeaba. Puede decirse que en buena parte lo consiguió, quizá más que ningún otro matemático en la Historia.

[21]Destaca el caso de las categorías trianguladas y las categorías derivadas, que aparte de su uso en la prueba por Deligne de la Hipótesis de Riemann para variedades sobre un cuerpo finito [8] y en el trabajo subsiguiente [9], permanecieron prácticamente aletargadas hasta la eclosión de la Teoría de D-módulos y de la prueba de la correspondencia de Riemann-Hilbert por Masaki Kashiwara y Zoghman Mebkhout. Este resultado, en confluencia con la *(co)homología de intersección* de Mark Goresky y Robert MacPherson, dio lugar a las nociones de *haz perverso* y de *t-estructura* en una categoría triangulada, a raíz de lo cual la influencia de estas herramientas no ha cesado de crecer.

[22]A este respecto, cabe señalar la influencia decisiva de las Matemáticas de Grothendieck en contribuciones tales como las que a Gerd Faltings le hicieron merecedor de la Medalla Fields, o la propia prueba del Último Teorema de Fermat por Andrew Wiles.

[23]A este respecto debemos mencionar la vertiente de escritor de nuestro personaje, presente a lo largo de toda su vida. En [31], *Promenade à travers une oeuvre – ou l'enfant et la Mère, La vision – ou douze thèmes pour l'harmonie*, nota a pie de página 27, Grothendieck comenta que, tras la muerte de su madre en 1957, cesó durante varios meses su actividad matemática y se vio tentado de abandonarla —al sentir que ya había alcanzado la meta que se había marcado doce años antes— y de convertirse en escritor.

[24]Es muy revelador, en este sentido, el texto de Dieudonné [12], en el que ya en 1966, con motivo de la concesión de la medalla Fields a Grothendieck, describe el impacto revolucionario de su obra.

Alguna lecturas y referencias recomendadas

En coherencia con el planteamiento de este artículo, su final no debería ser sino el comienzo de la lectura de la vida y obra de Alexander Grothendieck.

En primer lugar, y tal como comentamos al principio, en este artículo no hemos pretendido cubrir ni siquiera un resumen de la biografía de Grothendieck. Nos hemos limitado a repasar el período de su niñez, adolescencia y temprana juventud, entre 1928 y 1948, en tanto en cuanto que en él pudieron gestarse algunas de las cualidades y actitudes que conformarían a un matemático excepcional. Nada hemos señalado acerca de la vida personal y familiar de Alexander Grothendieck, de la estrecha relación con su madre, del influjo de su padre, de las turbulentas relaciones con las mujeres con las que convivió, de sus hijos y de la relación que mantuvo con ellos.

La biografía *Who is Alexander Grothendieck? Anarchy, Mathematics, Spirituality, Solitude* [41], escrita por Winfried Scharlau (volúmenes 1, 3 y el proyectado 4) y por Winfried Scharlau y Leila Schneps (volumen 2, en proceso de redacción, pero parcialmente disponible), destaca por su profundidad y extensión y es hoy por hoy la fuente más completa sobre la vida de Grothendieck. El artículo del primer autor con el mismo título [40] es una magnífica introducción a esta biografía. Varios matemáticos, atraídos por el personaje y su obra, han asumido en distintos grados la conservación, edición o difusión de los textos escritos a partir de 1981, entre los que destacan Jean Malgoire,[25] Leila Schneps, Pierre Lochak y George Maltsiniotis.

Algunos de ellos fueron también fundadores de la iniciativa *Grothendieck Circle* [34], que a través de su web es la fuente por excelencia para acceder tanto a la obra de Grothendieck —publicada o no—, como a los numerosos estudios y documentos que sobre él se han escrito, cuyo número y entidad no cesan de crecer.[26]

La Universidad de Montpellier acaba de publicar (mayo de 2017) los archivos matemáticos de Alexandre Grothendieck [2], en donde se encuentran versiones digitalizadas de sus manuscritos de 1949 a 1991, que conservan fielmente la clasificación del autor. Estos documentos representan unas 18 000 páginas, de unos fondos totales de 28 000, de los que el resto son cartas cuya publicación requeriría la autorización de sus correspondientes.

Los artículos [36] contienen una cuidadosa selección de episodios que nos proporcionan una excelente aproximación al personaje.

El artículo [6], escrito por Pierre Cartier, compañero y colega de Grothendieck desde su llegada a París, es un bello testimonio que analiza en profundidad las claves de nuestro personaje.

El libro [42] es una recopilación de artículos y testimonios sobre la obra matemática de Grothendieck escritos por un destacadísimo plantel de autores.

La reciente biografía [39] aporta una visión adicional y valiosa de la vida de Grothendieck.

Para terminar, el texto *Récoltes et Semailles, Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien* [31], ampliamente citado en este artículo, es lectura obligada

[25] Que fue nombrado por Grothendieck «albacea» de sus escritos en 1990.

[26] Es digna de mencionar la conferencia [26], de la que existe una de las pocas grabaciones de audio de Grothendieck que se conservan.

para todo aquel deseoso de saber quién era, cómo era y qué buscaba Alexander Grothendieck.

Agradecimientos

A Zoghman Mebkhout, que —además de guiar mis primeros pasos investigadores— llamó mi atención desde un principio sobre la «filosofía matemática de Grothendieck» y me brindó el privilegio de acceder a los distintos capítulos de [31] desde 1985. Ello me dejó una huella imborrable.

A José Ferreirós, por sus valiosos comentarios sobre el proyecto inicial de este artículo y por haber revisado una versión preliminar. A Antonio Campillo, a Francisco J. Castro y a Patrick Popescu-Pampu, por sus útiles observaciones y comentarios. A Juan Antonio Navarro, por haberme permitido utilizar sus traducciones al español de varias partes de [31] y por sus sugerencias.

Las fotografías de Grothendieck que ilustran este artículo están disponibles en [34].

Referencias

[1] L. Alonso Tarrío y A. Jeremías López, La obra de Alexander Grothendieck, *La Gaceta de la RSME* **4** (2001), no. 3, 623–638.

[2] *Archives Grothendieck*, Université de Montpellier, `https://grothendieck.umontpellier.fr`

[3] A. Borel y J.-P. Serre, Le théorème de Riemann-Roch. *Bull. Soc. Math. France* **86** (1958), 97–136.

[4] H. Cartan y S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[5] H. Cartan y J.-P. Serre, Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **237** (1953), 128–130.

[6] P. Cartier, Alexander Grothedieck, Un pays dont on ne connaîtrait que le nom, *Inference International Review of Science* **1** (2014), no. 1.[27]

[7] P. Colmez y J.-P. Serre (editores), *Grothendieck-Serre Correspondence* (Bilingual edition), A.M.S.-S.M.F., 2004.

[8] P. Deligne, La conjecture de Weil: I, *Publ. Math. I.H.É.S.* **43** (1974), 273–307.

[9] P. Deligne, La conjecture de Weil: II, *Publ. Math. I.H.É.S.* **52** (1980), 137–252.

[10] P. Deligne, Quelques idées maîtresses de l'œuvre de A. Grothendieck, *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle* (Nice, 1996), 11–19, *Séminaires et Congrès* **3**, Soc. Math. France, Paris, 1998.

[11] M. Demazure, Motifs des variétés algébriques, *Séminaire N. Bourbaki*, 1969–1970, exp. no. 365, p. 19–38.

[27] Una traducción al inglés ha sido publicada en *Notices Amer. Math. Soc.* **62** (2015), no. 4, 373–382.

[12] J. Dieudonné, Les travaux de Alexander Grothendieck, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Moscú, 1966), vol. I, 21–24, Mir, 1968.

[13] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique I. Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique*, Presses Universitaires de France, 1974.

[14] J. Dieudonné, A. Grothendieck's Early Work (1950–1960), *K-Theory* **3** (1989), 299–386.

[15] J. Dieudonné, De L'Analyse Fonctionnelle aux Fondements de la Géométrie Algébrique, *The Grothendieck Festschrift*, vol. I, 1–15, Progress in Mathematics, 86, Birkhäuser, 1990.

[16] *Dualité de Poincaré*, Séminaire Heidelberg-Strasbourg 1966–67, *Publ. I.R.M.A.* **3**, Strasbourg, 1969.

[17] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.

[18] A. Grothendieck, *Espaces Vectoriels Topologiques*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Univ. de São Paulo, 1954. Notas multicopiadas.

[19] A. Grothendieck, *A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf*, Department of Mathematics, University of Kansas, 1955.

[20] A. Grothendieck, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux, *Bull. Soc. Math. France* **84** (1956), 1–7.

[21] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* **9** (1957), no. 2, 119–221.

[22] A. Grothendieck, The cohomology theory of abstract algebraic varieties, *Proc. Internat. Congress Math.* (Edinburgh, 1958), 103–118, Cambridge Univ. Press, 1960.

[23] A. Grothendieck, *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Extraits du Séminaire N. Bourbaki 1957–1962, Sécrétariat Mathématique, Paris, 1962.

[24] A. Grothendieck, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. Math. I.H.É.S.* **29** (1966), 95–103.

[25] A. Grothendieck, *Motifs*.[28]

[26] A. Grothendieck, *Allons nous continuer la Recherche Scientifique*, Conferencia pronunciada en el CERN, Ginebra, el 27 de enero de 1972.[29]

[27] A. Grothendieck, *Topological Vector Spaces*, Gordon and Breach, Science Publishers Ltd., New York-London-Paris, 1973.

[28] A. Grothendieck, *La longue Marche à travers la théorie de Galois*, 1981.[30]

[29] A. Grothendieck, *À la poursuite des champs*, 1983.[31]

[28] Transcripción a cargo de Ph. Elbaz-Vincent y J. Malgoire de un manuscrito de Grothendieck, con diversas revisiones, sin fecha determinada posiblemente entre 1965 y 1970.

[29] El archivo de audio (138 minutos) está accesible en `http://cds.cern.ch/record/912518/`

[30] Manuscrito de alrededor de 1600 páginas del que existe una transcripción parcial editada por Jean Malgoire y publicada por la Universidad de Montpellier II en 1995. Un resumen de este trabajo se encuentra en [30].

[31] Manuscrito de alrededor de 500 páginas que comienza con una carta a D. Quillen de fecha 19 de febrero de 1983. Ver [34] para información adicional.

[30] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, 1983.[32]

[31] A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles, Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien (1985–1986)*, Univ. de Montpellier, 1986.[33]

[32] A. Grothendieck, *La Clef des Songes – ou Dialogue avec le Bon Dieu.*[34]

[33] A. Grothendieck, *Les Dérivateurs*, 1991.[35]

[34] *Grothendieck Circle*, `http://www.grothendieckcircle.org`

[35] L. Illusie, *Grothendieck at Pisa: crystals and Barsotti-Tate groups*, Conferencia en el Colloquium De Giorgi, Pisa, 23 de abril de 2013.

[36] A. Jackson, Comme appelé du néant—as if summoned from the void: the life of Alexandre Grothendieck. I y II. *Notices Amer. Math. Soc.* **51** (2004), no. 9, 1038–1056, y no. 10, 1196–1212.

[37] D. Mumford, Blog, `http://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2014/Grothendieck.html`

[38] M. Nagata, A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 78–116.

[39] Y. Pradeau, *Algébre*, Éditions Allia, Paris, 2016.

[40] W. Scharlau, Who is Alexander Grothendieck?, *Notices Amer. Math. Soc.* **55** (2008), no. 8, 930–941.

[41] W. Scharlau, *Who is Alexander Grothendieck? Anarchy, Mathematics, Spirituality, Solitude. A Biography.*[36]

[42] L. Schneps (editor), *Alexandre Grothendieck: a mathematical portrait*, International Press, Somerville, MA, 2014.

[43] L. Schneps y P. Lochak (editores), *Geometric Galois actions. 1. Around Grothendieck's "Esquisse d'un programme"*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 242, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[44] *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960–1961 (SGA 1)*, A. Grothendieck (director), *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224, Springer-Verlag, 1971.

[32] Manuscrito presentado como parte de una solicitud de un puesto en el CNRS, que ocuparía desde 1984 hasta su jubilación en 1988. Ver [34] para información adicional, y [43].

[33] Existe una transcripción en LaTeX, así como un proyecto de traducción al español por Juan A. Navarro González y otro al inglés por Roy Lisker. Todos ellos son accesibles a través de [34].

[34] Manuscrito sin fecha cierta cuyo texto inicial tiene más de 300 páginas y se acompaña de otras 500 de notas escritas desde 1987. Ver [34] para información adicional.

[35] Manuscrito de 1976 páginas dedicado a los fundamentos de la Teoría de Homotopía. Ver [34] para información adicional, desde donde se accede a una transcripción en curso.

[36] Del volumen 1, *Anarchy*, existe una edición en inglés publicada por Herstellung und Verlag: Books on Demand GmbH, Norderstedt Deutschland, 2011. También existe una traducción al español publicada en 2016 por la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (Colección de divulgación científica). El volumen 2, *Mathematics*, en colaboración con L. Schneps, aún no está publicado. Se puede acceder al material existente en [34]. Del volumen 3, *Spirituality*, sólo existe la edición en alemán publicada por Herstellung und Verlag: Books on Demand GmbH, Norderstedt Deutschland, 2010, aunque existe una traducción al inglés en curso parcialmente accesible en [34]. El volumen 4, *Solitude*, está en elaboración.

[45] *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4)*, M. Artin, A. Grothendieck y J.-L. Verdier (directores), *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269 (tomo 1), Vol. 270 (tomo 2), Vol. 305 (tomo 3), Springer-Verlag, 1972–1973.

[46] *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA* $4\frac{1}{2}$*)*, P. Deligne, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569, Springer-Verlag, 1977.

[47] *Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5)*, L. Illusie (editor), *Cohomologie l-adique et fonctions L*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589, Springer-Verlag, 1977.

[48] *Séminaire Grothendieck 1957*, http://www.numdam.org

[49] *Séminaire Henri Cartan, 1948–1964*, http://www.numdam.org

[50] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.* **61** (1955), no. 2, 197–278.

[51] J.-P. Serre, Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p, *Symposium internacional de topología algebraica*, 24–53, Universidad Nacional Autónoma de México y UNESCO, México, 1958.

[52] J.-L. Verdier, *Catégories dérivées. Quelques résultats (État 0)*, fascículo de resultados de la Tesis de J.-L. Verdier publicado por el IHES en 1963.

[53] A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 29, American Mathematical Society, New York, 1946.

[54] A. Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 497–508.

[55] A. Weil, Number theory and algebraic geometry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Cambridge, Mass., 1950), vol. 2, 90–100, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1952.

[56] A. Weil, Abstract versus classical algebraic geometry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Amsterdam, 1954), vol. III, 550–558, Erven P. Noordhoff N.V., Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.

[57] O. Zariski, The fundamental ideas of abstract algebraic geometry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Cambridge, Mass., 1950), vol. 2, 77–89, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1952.

Luis Narváez Macarro, Departamento de Álgebra e Instituto de Matemáticas (IMUS), Universidad de Sevilla

Correo electrónico: narvaez@us.es

Página web: http://personal.us.es/narvaez/