# Polinomios ortogonales matriciales que verifican ecuaciones diferenciales

Manuel Domínguez de la Iglesia

Instituto de Matemáticas C.U., UNAM

UAM Iztapalapa, Ciudad de México, 25 de febrero de 2016

# Outline

# Índice

# Polinomios ortogonales

Sea $\omega$ una medida de Borel positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ y consideremos $L^2_\omega(\mathcal{S})$. Una sucesión de polinomios $(q_n)_n$ es ortogonal (PO) si

$$\langle q_n, q_m \rangle_\omega = \int_{\mathcal{S}} q_n(x) q_m(x) d\omega(x) = \|q_n\|^2_\omega \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Esto implica que $(q_n)_n$ verifica una relación de recurrencia a tres términos ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$x q_n(x) = a_n q_{n+1}(x) + b_n q_n(x) + c_n q_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

donde $a_n, c_n \neq 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ y $q_0(x) = 1, q_{-1}(x) = 0$.
Operador de Jacobi (tridiagonal):

$$Jq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xq, \quad x \in \mathcal{S}$$

El resultado contrario también es cierto (Teorema espectral o de Favard)

# Polinomios ortogonales

Sea $\omega$ una medida de Borel positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ y consideremos $L^2_\omega(\mathcal{S})$. Una sucesión de polinomios $(q_n)_n$ es ortogonal (PO) si

$$\langle q_n, q_m \rangle_\omega = \int_{\mathcal{S}} q_n(x) q_m(x) d\omega(x) = \|q_n\|^2_\omega \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Esto implica que $(q_n)_n$ verifica una relación de recurrencia a tres términos ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$x q_n(x) = a_n q_{n+1}(x) + b_n q_n(x) + c_n q_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

donde $a_n, c_n \neq 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ y $q_0(x) = 1, q_{-1}(x) = 0$.

Operador de Jacobi (tridiagonal):

$$Jq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xq, \quad x \in \mathcal{S}$$

El resultado contrario también es cierto (Teorema espectral o de Favard)

# Polinomios ortogonales

Sea $\omega$ una medida de Borel positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ y consideremos $L^2_\omega(\mathcal{S})$. Una sucesión de polinomios $(q_n)_n$ es ortogonal (PO) si

$$\langle q_n, q_m \rangle_\omega = \int_{\mathcal{S}} q_n(x) q_m(x) d\omega(x) = \|q_n\|^2_\omega \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Esto implica que $(q_n)_n$ verifica una relación de recurrencia a tres términos ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$x q_n(x) = a_n q_{n+1}(x) + b_n q_n(x) + c_n q_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

donde $a_n, c_n \neq 0,\ b_n \in \mathbb{R}$ y $q_0(x) = 1, q_{-1}(x) = 0$.
Operador de Jacobi (tridiagonal):

$$Jq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xq, \quad x \in \mathcal{S}$$

El resultado contrario también es cierto (Teorema espectral o de Favard)

# Polinomios ortogonales

Sea $\omega$ una medida de Borel positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ y consideremos $L^2_\omega(\mathcal{S})$. Una sucesión de polinomios $(q_n)_n$ es ortogonal (PO) si

$$\langle q_n, q_m \rangle_\omega = \int_{\mathcal{S}} q_n(x) q_m(x) d\omega(x) = \|q_n\|^2_\omega \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Esto implica que $(q_n)_n$ verifica una relación de recurrencia a tres términos ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$x q_n(x) = a_n q_{n+1}(x) + b_n q_n(x) + c_n q_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

donde $a_n, c_n \neq 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ y $q_0(x) = 1, q_{-1}(x) = 0$.
Operador de Jacobi (tridiagonal):

$$Jq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xq, \quad x \in \mathcal{S}$$

El resultado contrario también es cierto (Teorema espectral o de Favard)

# Familias clásicas

(Bochner 1929, Routh 1885) Caracterizar familias $(q_n)_n$ verificando

$$\sigma(x)q_n''(x) + \tau(x)q_n'(x) = \lambda_n q_n(x), \quad \deg(\sigma) \leq 2, \quad \deg(\tau) = 1$$

Para que el operador diferencial sea simétrico (autoadjunto) con respecto a una medida *positiva* $\omega$ tiene que verificarse la ecuación de Pearson

$$(\sigma(x)\omega(x))' = \tau(x)\omega(x)$$

1. Hermite: $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$, $\lambda_n = -2n$
   $\omega(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$, Distribución Normal o Gaussiana.
2. Laguerre: $\sigma(x) = x$, $\tau(x) = -x + \alpha + 1$, $\lambda_n = -n$
   $\omega(x) = x^{\alpha}e^{-x}, x \in [0, +\infty), \alpha > -1$, Distribución Gamma.
3. Jacobi: $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$, $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$
   $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, x \in [-1, 1], \alpha, \beta > -1$, Distribución Beta.

# Familias clásicas

(Bochner 1929, Routh 1885) Caracterizar familias $(q_n)_n$ verificando

$$\sigma(x)q_n''(x)+\tau(x)q_n'(x)=\lambda_n q_n(x), \quad \deg(\sigma)\leq 2, \quad \deg(\tau)=1$$

Para que el operador diferencial sea simétrico (autoadjunto) con respecto a una medida *positiva* $\omega$ tiene que verificarse la ecuación de Pearson

$$(\sigma(x)\omega(x))'=\tau(x)\omega(x)$$

1. Hermite: $\sigma(x)=1$, $\tau(x)=-2x$, $\lambda_n=-2n$
   $\omega(x)=e^{-x^2}, x\in\mathbb{R}$, Distribución Normal o Gaussiana.
2. Laguerre: $\sigma(x)=x$, $\tau(x)=-x+\alpha+1$, $\lambda_n=-n$
   $\omega(x)=x^{\alpha}e^{-x}, x\in[0,+\infty), \alpha>-1$, Distribución Gamma.
3. Jacobi: $\sigma(x)=1-x^2$, $\tau(x)=-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$, $\lambda_n=-n(n+\alpha+\beta+1)$
   $\omega(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, x\in[-1,1], \alpha,\beta>-1$, Distribución Beta.

# Familias clásicas

(Bochner 1929, Routh 1885) Caracterizar familias $(q_n)_n$ verificando

$$\sigma(x)q_n''(x)+\tau(x)q_n'(x)=\lambda_n q_n(x), \quad \deg(\sigma)\leq 2, \quad \deg(\tau)=1$$

Para que el operador diferencial sea simétrico (autoadjunto) con respecto a una medida *positiva* $\omega$ tiene que verificarse la ecuación de Pearson

$$(\sigma(x)\omega(x))'=\tau(x)\omega(x)$$

1. Hermite: $\sigma(x)=1$, $\tau(x)=-2x$, $\lambda_n=-2n$
   $\omega(x)=e^{-x^2}, x\in\mathbb{R}$, Distribución Normal o Gaussiana.
2. Laguerre: $\sigma(x)=x$, $\tau(x)=-x+\alpha+1$, $\lambda_n=-n$
   $\omega(x)=x^\alpha e^{-x}, x\in[0,+\infty), \alpha>-1$, Distribución Gamma.
3. Jacobi: $\sigma(x)=1-x^2$, $\tau(x)=-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$,
   $\lambda_n=-n(n+\alpha+\beta+1)$
   $\omega(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta, x\in[-1,1], \alpha,\beta>-1$, Distribución Beta.

# Familias clásicas

(Bochner 1929, Routh 1885) Caracterizar familias $(q_n)_n$ verificando

$$\sigma(x)q_n''(x) + \tau(x)q_n'(x) = \lambda_n q_n(x), \quad \deg(\sigma) \leq 2, \quad \deg(\tau) = 1$$

Para que el operador diferencial sea simétrico (autoadjunto) con respecto a una medida *positiva* $\omega$ tiene que verificarse la ecuación de Pearson

$$(\sigma(x)\omega(x))' = \tau(x)\omega(x)$$

1. Hermite: $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$, $\lambda_n = -2n$
   $\omega(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$, Distribución Normal o Gaussiana.
2. Laguerre: $\sigma(x) = x$, $\tau(x) = -x + \alpha + 1$, $\lambda_n = -n$
   $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}, x \in [0, +\infty), \alpha > -1$, Distribución Gamma.
3. Jacobi: $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$, $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$
   $\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, x \in [-1, 1], \alpha, \beta > -1$, Distribución Beta.

# Familias clásicas

(Bochner 1929, Routh 1885) Caracterizar familias $(q_n)_n$ verificando

$$\sigma(x)q_n''(x) + \tau(x)q_n'(x) = \lambda_n q_n(x), \quad \deg(\sigma) \leq 2, \quad \deg(\tau) = 1$$

Para que el operador diferencial sea simétrico (autoadjunto) con respecto a una medida *positiva* $\omega$ tiene que verificarse la ecuación de Pearson

$$(\sigma(x)\omega(x))' = \tau(x)\omega(x)$$

1. Hermite: $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$, $\lambda_n = -2n$
   $\omega(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$, Distribución Normal o Gaussiana.
2. Laguerre: $\sigma(x) = x$, $\tau(x) = -x + \alpha + 1$, $\lambda_n = -n$
   $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}, x \in [0, +\infty), \alpha > -1$, Distribución Gamma.
3. Jacobi: $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$,
   $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$
   $\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, x \in [-1, 1], \alpha, \beta > -1$, Distribución Beta.

# Aplicaciones

- Teoría de operadores (operadores de Jacobi, Hankel, Toeplitz).
- Fracciones continuas.
- Análisis numérico (fórmulas de cuadratura).
- Teoría de representación grupos (funciones esféricas).
- Análisis armónico (funciones de Hermite).
- Procesos estocásticos (cadenas de Markov, procesos de difusión, integración estocástica).
- Equilibrio electrostático (ceros de PO's).
- Mecánica cuántica (oscilador armónico cuántico, átomo de hidrógeno, etc).
- ...

# Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{A}_n x^n + \cdots + \boldsymbol{A}_1 x + \boldsymbol{A}_0, \quad \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{C}^{N\times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM)

Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathcal{S};\mathbb{C}^{N\times N})$):

$$\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\rangle_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}^*(x)\,dx$$

Una sucesión de POM $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ ($\langle \boldsymbol{Q}_n, \boldsymbol{Q}_m\rangle_{\boldsymbol{W}} = \|\boldsymbol{Q}_n\|^2_{\boldsymbol{W}}\delta_{nm}$) verifica una relación de recurrencia a tres términos ($\boldsymbol{Q}_{-1} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{I}$)

$$x\boldsymbol{Q}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{Q}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\boldsymbol{A}_n), \det(\boldsymbol{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x\boldsymbol{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (Teorema espectral o de Favard**)

# Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{A}_n x^n + \cdots + \boldsymbol{A}_1 x + \boldsymbol{A}_0, \quad \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{C}^{N\times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM)

Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathcal{S};\mathbb{C}^{N\times N})$):

$$\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\rangle_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}^*(x)\,dx$$

Una sucesión de POM $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ ($\langle \boldsymbol{Q}_n, \boldsymbol{Q}_m\rangle_{\boldsymbol{W}} = \|\boldsymbol{Q}_n\|^2_{\boldsymbol{W}}\delta_{nm}$) verifica una relación de recurrencia a tres términos ($\boldsymbol{Q}_{-1} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{I}$)

$$x\boldsymbol{Q}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{Q}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\boldsymbol{A}_n), \det(\boldsymbol{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x\boldsymbol{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (Teorema espectral o de Favard**)

# Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{A}_n x^n + \cdots + \boldsymbol{A}_1 x + \boldsymbol{A}_0, \quad \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{C}^{N\times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM)
Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathcal{S}; \mathbb{C}^{N\times N})$):

$$\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \rangle_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}^*(x)\, dx$$

Una sucesión de POM $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ ($\langle \boldsymbol{Q}_n, \boldsymbol{Q}_m \rangle_{\boldsymbol{W}} = \|\boldsymbol{Q}_n\|^2_{\boldsymbol{W}} \delta_{nm}$) verifica una relación de recurrencia a tres términos ($\boldsymbol{Q}_{-1} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{I}$)

$$x\boldsymbol{Q}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{Q}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\boldsymbol{A}_n), \det(\boldsymbol{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x\boldsymbol{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (Teorema espectral o de Favard**)

# Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{A}_n x^n + \cdots + \boldsymbol{A}_1 x + \boldsymbol{A}_0, \quad \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{C}^{N\times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM)

Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathcal{S};\mathbb{C}^{N\times N})$):

$$\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\rangle_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}^*(x)\,dx$$

Una sucesión de POM $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ ($\langle \boldsymbol{Q}_n, \boldsymbol{Q}_m\rangle_{\boldsymbol{W}} = \|\boldsymbol{Q}_n\|^2_{\boldsymbol{W}}\delta_{nm}$) verifica una relación de recurrencia a tres términos ($\boldsymbol{Q}_{-1} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{I}$)

$$x\boldsymbol{Q}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{Q}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\boldsymbol{A}_n), \det(\boldsymbol{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x\boldsymbol{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (Teorema espectral o de Favard**)

# Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{A}_n x^n + \cdots + \boldsymbol{A}_1 x + \boldsymbol{A}_0, \quad \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{C}^{N\times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM)
Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathcal{S};\mathbb{C}^{N\times N})$):

$$\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\rangle_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}^*(x)\, dx$$

Una sucesión de POM $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ ($\langle \boldsymbol{Q}_n, \boldsymbol{Q}_m\rangle_{\boldsymbol{W}} = \|\boldsymbol{Q}_n\|^2_{\boldsymbol{W}}\delta_{nm}$) verifica una relación de recurrencia a tres términos ($\boldsymbol{Q}_{-1} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{I}$)

$$x\boldsymbol{Q}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{Q}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\boldsymbol{A}_n), \det(\boldsymbol{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x\boldsymbol{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (Teorema espectral o de Favard**)

# Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{A}_n x^n + \cdots + \boldsymbol{A}_1 x + \boldsymbol{A}_0, \quad \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{C}^{N\times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM)

Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathcal{S}; \mathbb{C}^{N\times N})$):

$$\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \rangle_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}^*(x)\, dx$$

Una sucesión de POM $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ ($\langle \boldsymbol{Q}_n, \boldsymbol{Q}_m \rangle_{\boldsymbol{W}} = \|\boldsymbol{Q}_n\|^2_{\boldsymbol{W}} \delta_{nm}$) verifica una relación de recurrencia a tres términos ($\boldsymbol{Q}_{-1} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{I}$)

$$x\boldsymbol{Q}_n(x) = \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{Q}_n(x) + \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\boldsymbol{A}_n), \det(\boldsymbol{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0(x) \\ \boldsymbol{Q}_1(x) \\ \boldsymbol{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x\boldsymbol{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (Teorema espectral o de Favard**)

# Aplicaciones

- Cadenas de Markov bidimensionales: la primera componente es una cadena de Markov a tiempo discreto o continuo (*nivel*) mientras que la segunda componente es otra cadena de Markov a tiempo discreto y finito (*fase*) (Dette, Reuther, Zygmunt, Grünbaum, Pacharoni, Tirao, MdI).
- Matrices de Jacobi doblemente infinitas: matrices tridiagonales en los enteros y su relación con la ortogonalidad matricial (Berezanskii, Nikishin, van Assche).
- Polinomios ortogonales de Sobolev: se pueden escribir en términos de POM (Durán, van Assche).
- Otras aplicaciones: teoría de dispersión (Geronimo), método de Lanczos para matrices por bloques (Golub, Underwood), fórmulas de cuadratura (Durán, Polo, van Assche, Sinap), etc.

# Índice

# Propiedades diferenciales

Durán (1997): caracterizar familias de POM $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ verificando

$$\boldsymbol{Q}_n(x)D \equiv \boldsymbol{Q}_n''(x)\boldsymbol{F}_2(x) + \boldsymbol{Q}_n'(x)\boldsymbol{F}_1(x) + \boldsymbol{Q}_n(x)\boldsymbol{F}_0(x) = \boldsymbol{\Gamma}_n \boldsymbol{Q}_n(x)$$

donde

$$\boldsymbol{F}_2(x) = \boldsymbol{F}_2^2 x^2 + \boldsymbol{F}_2^1 x + \boldsymbol{F}_2^0, \boldsymbol{F}_1(x) = \boldsymbol{F}_1^1 x + \boldsymbol{F}_1^0$$

y $\boldsymbol{\Gamma}_n$ es hermítico.

Equivalente a la simetría del operador diferencial de segundo orden

$$D = \partial^2 \boldsymbol{F}_2(x) + \partial^1 \boldsymbol{F}_1(x) + \partial^0 \boldsymbol{F}_0(x), \quad \partial = \frac{d}{dx}$$

con $\quad \boldsymbol{Q}_n D = \boldsymbol{\Gamma}_n \boldsymbol{Q}_n$

$D$ es simétrico con respecto a $\boldsymbol{W}$ si $\langle \boldsymbol{P}D, \boldsymbol{Q}\rangle_{\boldsymbol{W}} = \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}D\rangle_{\boldsymbol{W}}$

# Propiedades diferenciales

Durán (1997): caracterizar familias de POM $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ verificando

$$\boldsymbol{Q}_n(x)D \equiv \boldsymbol{Q}_n''(x)\boldsymbol{F}_2(x) + \boldsymbol{Q}_n'(x)\boldsymbol{F}_1(x) + \boldsymbol{Q}_n(x)\boldsymbol{F}_0(x) = \boldsymbol{\Gamma}_n\boldsymbol{Q}_n(x)$$

donde

$$\boldsymbol{F}_2(x) = \boldsymbol{F}_2^2x^2 + \boldsymbol{F}_2^1x + \boldsymbol{F}_2^0, \boldsymbol{F}_1(x) = \boldsymbol{F}_1^1x + \boldsymbol{F}_1^0$$

y $\boldsymbol{\Gamma}_n$ es hermítico.

Equivalente a la simetría del operador diferencial de segundo orden

$$D = \partial^2\boldsymbol{F}_2(x) + \partial^1\boldsymbol{F}_1(x) + \partial^0\boldsymbol{F}_0(x), \quad \partial = \frac{d}{dx}$$

con $\quad \boldsymbol{Q}_nD = \boldsymbol{\Gamma}_n\boldsymbol{Q}_n$

$D$ es simétrico con respecto a $\boldsymbol{W}$ si $\langle \boldsymbol{P}D, \boldsymbol{Q}\rangle_{\boldsymbol{W}} = \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}D\rangle_{\boldsymbol{W}}$

# Cómo generar ejemplos

- Teoría de representación de grupos: búsqueda de funciones esféricas matriciales asociadas a diferentes grupos (Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Román, Zurrián, Koelink).
- Ecuaciones de momentos: a partir de las ecuaciones de simetría resolver las correspondientes ecuaciones (Durán, Grünbaum, MdI). Usado en Durán-MdI (2008) para generar ejemplos de POM ortogonales con respecto a un peso matricial más una delta de Dirac en un punto.
- Problema biespectral matricial: resolviendo las llamadas *ad-conditions* ($\mathrm{ad}_{J}^{k+1}(\Gamma)=\mathbf{0}$) donde $k$ es el orden del operador diferencial (Castro, Grünbaum, Tirao). Usado para generar ejemplos de orden $k=1$ en Castro-Grünbaum (2005, 2008).

# Cómo generar ejemplos

- Teoría de representación de grupos: búsqueda de funciones esféricas matriciales asociadas a diferentes grupos (Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Román, Zurrián, Koelink).
- Ecuaciones de momentos: a partir de las ecuaciones de simetría resolver las correspondientes ecuaciones (Durán, Grünbaum, MdI). Usado en Durán-MdI (2008) para generar ejemplos de POM ortogonales con respecto a un peso matricial más una delta de Dirac en un punto.
- Problema biespectral matricial: resolviendo las llamadas *ad-conditions* ($\mathrm{ad}_J^{k+1}(\Gamma) = \mathbf{0}$) donde $k$ es el orden del operador diferencial (Castro, Grünbaum, Tirao). Usado para generar ejemplos de orden $k = 1$ en Castro-Grünbaum (2005, 2008).

# Cómo generar ejemplos

- Teoría de representación de grupos: búsqueda de funciones esféricas matriciales asociadas a diferentes grupos (Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Román, Zurrián, Koelink).
- Ecuaciones de momentos: a partir de las ecuaciones de simetría resolver las correspondientes ecuaciones (Durán, Grünbaum, MdI). Usado en Durán-MdI (2008) para generar ejemplos de POM ortogonales con respecto a un peso matricial más una delta de Dirac en un punto.
- Problema biespectral matricial: resolviendo las llamadas *ad-conditions* ($\mathrm{ad}_{\boldsymbol{J}}^{k+1}(\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{0}$) donde $k$ es el orden del operador diferencial (Castro, Grünbaum, Tirao). Usado para generar ejemplos de orden $k = 1$ en Castro-Grünbaum (2005, 2008).

- Durán-Grünbaum (2004):

**Ecuaciones de simetría (ecuaciones de Pearson)**

$$\boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{W}(x) = \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_2^*(x)$$

$$2(\boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{W}(x))' = \boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{W}(x) + \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1^*(x)$$

$$(\boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{W}(x))'' - (\boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{W}(x))' + \boldsymbol{F}_0(x)\boldsymbol{W}(x) = \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0^*(x)$$

$$\lim_{x\to t} \boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{W}(x) = \boldsymbol{0} = \lim_{x\to t}(\boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1^*(x)), \quad t = a, b$$

Método general: Supongamos que $\boldsymbol{F}_2(x) = f_2(x)\boldsymbol{I}$. Factorizamos

$$\boldsymbol{W}(x) = \omega(x)\boldsymbol{T}(x)\boldsymbol{T}^*(x),$$

donde $\omega$ es un peso escalar (Hermite, Laguerre o Jacobi) y $\boldsymbol{T}$ es una función matricial solución de

$$\boldsymbol{T}'(x) = \boldsymbol{G}(x)\boldsymbol{T}(x), \quad \boldsymbol{T}(c) = \boldsymbol{I}, \quad c \in (a, b)$$

- Durán-Grünbaum (2004):

**Ecuaciones de simetría (ecuaciones de Pearson)**

$$\boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{W}(x) = \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_2^*(x)$$

$$2(\boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{W}(x))' = \boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{W}(x) + \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1^*(x)$$

$$(\boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{W}(x))'' - (\boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{W}(x))' + \boldsymbol{F}_0(x)\boldsymbol{W}(x) = \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0^*(x)$$

$$\lim_{x\to t}\boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{W}(x) = \boldsymbol{0} = \lim_{x\to t}(\boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1^*(x)), \quad t = a, b$$

Método general: Supongamos que $\boldsymbol{F}_2(x) = f_2(x)\boldsymbol{I}$. Factorizamos

$$\boldsymbol{W}(x) = \omega(x)\boldsymbol{T}(x)\boldsymbol{T}^*(x),$$

donde $\omega$ es un peso escalar (Hermite, Laguerre o Jacobi) y $\boldsymbol{T}$ es una función matricial solución de

$$\boldsymbol{T}'(x) = \boldsymbol{G}(x)\boldsymbol{T}(x), \quad \boldsymbol{T}(c) = \boldsymbol{I}, \quad c \in (a, b)$$

1. La primera ecuación de simetría es trivial.
2. Definiendo
$$\boldsymbol{F}_1(x) = 2f_2(x)\boldsymbol{G}(x) + \frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{I}$$
la segunda de las ecuaciones de simetría también se verifica.
3. Por último, la tercera de las ecuaciones de simetría es equivalente a
$$(\boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1^*(x))' = 2(\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0^*)$$
Por lo tanto, es suficiente encontrar $\boldsymbol{F}_0$ tal que
$$\chi(x) = \boldsymbol{T}^{-1}(x)\left(f_2(x)\boldsymbol{G}(x) + f_2(x)\boldsymbol{G}(x)^2 + \frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{G}(x) - \boldsymbol{F}_0\right)\boldsymbol{T}(x)$$
es hermítica para todo $x$.

El método se ha generalizado cuando $\boldsymbol{F}_2$ no es necesariamente escalar (Durán, 2008).

1. La primera ecuación de simetría es trivial.
2. Definiendo
$$\boldsymbol{F}_1(x) = 2f_2(x)\boldsymbol{G}(x) + \frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{I}$$
la segunda de las ecuaciones de simetría también se verifica.
3. Por último, la tercera de las ecuaciones de simetría es equivalente a
$$(\boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1^*(x))' = 2(\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0^*)$$
Por lo tanto, es suficiente encontrar $\boldsymbol{F}_0$ tal que
$$\chi(x) = \boldsymbol{T}^{-1}(x)\left(f_2(x)\boldsymbol{G}(x)+f_2(x)\boldsymbol{G}(x)^2+\frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{G}(x)-\boldsymbol{F}_0\right)\boldsymbol{T}(x)$$
es hermítica para todo $x$.

El método se ha generalizado cuando $\boldsymbol{F}_2$ no es necesariamente escalar (Durán, 2008).

1. La primera ecuación de simetría es trivial.
2. Definiendo
$$\boldsymbol{F}_1(x) = 2f_2(x)\boldsymbol{G}(x) + \frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{I}$$
la segunda de las ecuaciones de simetría también se verifica.
3. Por último, la tercera de las ecuaciones de simetría es equivalente a
$$(\boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1^*(x))' = 2(\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0^*)$$
Por lo tanto, es suficiente encontrar $\boldsymbol{F}_0$ tal que
$$\chi(x) = \boldsymbol{T}^{-1}(x)\left(f_2(x)\boldsymbol{G}(x)+f_2(x)\boldsymbol{G}(x)^2+\frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{G}(x)-\boldsymbol{F}_0\right)\boldsymbol{T}(x)$$
es hermítica para todo $x$.

El método se ha generalizado cuando $\boldsymbol{F}_2$ no es necesariamente escalar (Durán, 2008).

1. La primera ecuación de simetría es trivial.
2. Definiendo
$$\boldsymbol{F}_1(x) = 2f_2(x)\boldsymbol{G}(x) + \frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{I}$$
la segunda de las ecuaciones de simetría también se verifica.
3. Por último, la tercera de las ecuaciones de simetría es equivalente a
$$(\boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1^*(x))' = 2(\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{W}(x) - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0^*)$$
Por lo tanto, es suficiente encontrar $\boldsymbol{F}_0$ tal que
$$\chi(x) = \boldsymbol{T}^{-1}(x)\left(f_2(x)\boldsymbol{G}(x)+f_2(x)\boldsymbol{G}(x)^2+\frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{G}(x)-\boldsymbol{F}_0\right)\boldsymbol{T}(x)$$
es hermítica para todo $x$.

El método se ha generalizado cuando $\boldsymbol{F}_2$ no es necesariamente escalar (Durán, 2008).

# Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{I}$

Sea $f_2 = 1$ y $\omega = e^{-x^2} \Rightarrow \boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}x, \boldsymbol{F}_1(x) = 2(\boldsymbol{A} + (2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})x)$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{B}x^2} e^{\boldsymbol{B}^* x^2} \end{cases}$$

Para el primer caso, una solución para que

$$\chi(x) = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A}x - e^{-\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x}$$

sea hermítica es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J}$, con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el segundo caso una solución para que

$$\chi(x) = 2\boldsymbol{B} + (4\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{B})x^2 - e^{-\boldsymbol{B}x^2} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{B}x^2}$$

sea hermítica tiene es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = 2\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{J}$ con $\boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+1} \boldsymbol{A}^j$

# Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{I}$

Sea $f_2 = 1$ y $\omega = e^{-x^2} \Rightarrow \boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}x, \boldsymbol{F}_1(x) = 2(\boldsymbol{A} + (2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})x)$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{B}x^2} e^{\boldsymbol{B}^* x^2} \end{cases}$$

Para el primer caso, una solución para que

$$\chi(x) = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A}x - e^{-\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x}$$

sea hermítica es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J}$, con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el segundo caso una solución para que

$$\chi(x) = 2\boldsymbol{B} + (4\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{B})x^2 - e^{-\boldsymbol{B}x^2} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{B}x^2}$$

sea hermítica tiene es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = 2\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{J}$ con $\boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+1} \boldsymbol{A}^j$

# Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{I}$

Sea $f_2 = 1$ y $\omega = e^{-x^2} \Rightarrow \boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}x, \boldsymbol{F}_1(x) = 2(\boldsymbol{A} + (2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})x)$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{B}x^2} e^{\boldsymbol{B}^* x^2} \end{cases}$$

Para el primer caso, una solución para que

$$\chi(x) = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A}x - e^{-\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x}$$

sea hermítica es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J}$, con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el segundo caso una solución para que

$$\chi(x) = 2\boldsymbol{B} + (4\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{B})x^2 - e^{-\boldsymbol{B}x^2} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{B}x^2}$$

sea hermítica tiene es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = 2\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{J}$ con $\boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+1} \boldsymbol{A}^j$

# Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = x\boldsymbol{I}$

$f_2 = x$, $\omega = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1 \Rightarrow \boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + \dfrac{\boldsymbol{B}}{x}$, y

$$\boldsymbol{F}_1(x) = (\alpha+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{B} - x(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})$$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} x^{\boldsymbol{B}} x^{\boldsymbol{B}^*} \end{cases}$$

En el primer caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x)\boldsymbol{W}(1) = e^{\boldsymbol{A}}\left((\alpha+1)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A})x - e^{-\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x}\right) e^{\boldsymbol{A}^*}$$

sea hermítica.

En el segundo caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x) = (\boldsymbol{B}^2 + \alpha\boldsymbol{B})\frac{1}{x} - \boldsymbol{B} - x^{-\boldsymbol{B}}\boldsymbol{F}_0 x^{\boldsymbol{B}}$$

sea hermítica.

Igual para $f_2 = 1 - x^2$ y $\omega = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \alpha, \beta > -1$

También se han conseguido otros ejemplos donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no conmutan.

# Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = x\boldsymbol{I}$

$f_2 = x$, $\omega = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + \dfrac{\boldsymbol{B}}{x}$, y

$$\boldsymbol{F}_1(x) = (\alpha+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{B} - x(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})$$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} x^{\boldsymbol{B}} x^{\boldsymbol{B}^*} \end{cases}$$

En el primer caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x)\boldsymbol{W}(1) = e^{\boldsymbol{A}}\left((\alpha+1)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A})x - e^{-\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x}\right)e^{\boldsymbol{A}^*}$$

sea hermítica.

En el segundo caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x) = (\boldsymbol{B}^2 + \alpha\boldsymbol{B})\frac{1}{x} - \boldsymbol{B} - x^{-\boldsymbol{B}}\boldsymbol{F}_0 x^{\boldsymbol{B}}$$

sea hermítica.

Igual para $f_2 = 1 - x^2$ y $\omega = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \alpha, \beta > -1$

También se han conseguido otros ejemplos donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no conmutan.

# Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = x\boldsymbol{I}$

$f_2 = x$, $\omega = x^{\alpha}e^{-x}, \alpha > -1 \Rightarrow \boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + \dfrac{\boldsymbol{B}}{x}$, y

$$\boldsymbol{F}_1(x) = (\alpha+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{B} - x(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})$$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^{\alpha}e^{-x}e^{\boldsymbol{A}x}e^{\boldsymbol{A}^*x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^{\alpha}e^{-x}x^{\boldsymbol{B}}x^{\boldsymbol{B}^*} \end{cases}$$

En el primer caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x)\boldsymbol{W}(1) = e^{\boldsymbol{A}}\left((\alpha+1)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A})x - e^{-\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{F}_0e^{\boldsymbol{A}x}\right)e^{\boldsymbol{A}^*}$$

sea hermítica.

En el segundo caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x) = (\boldsymbol{B}^2 + \alpha\boldsymbol{B})\frac{1}{x} - \boldsymbol{B} - x^{-\boldsymbol{B}}\boldsymbol{F}_0x^{\boldsymbol{B}}$$

sea hermítica.

Igual para $f_2 = 1 - x^2$ y $\omega = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \alpha, \beta > -1$

También se han conseguido otros ejemplos donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no conmutan.

# Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = x\boldsymbol{I}$

$$f_2 = x,\ \omega = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1 \Rightarrow \boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{B}}{x},\ \text{y}$$

$$\boldsymbol{F}_1(x) = (\alpha+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{B} - x(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})$$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} x^{\boldsymbol{B}} x^{\boldsymbol{B}^*} \end{cases}$$

En el primer caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x)\boldsymbol{W}(1) = e^{\boldsymbol{A}} \left((\alpha+1)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A})x - e^{-\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x}\right) e^{\boldsymbol{A}^*}$$

sea hermítica.

En el segundo caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x) = (\boldsymbol{B}^2 + \alpha\boldsymbol{B})\frac{1}{x} - \boldsymbol{B} - x^{-\boldsymbol{B}}\boldsymbol{F}_0 x^{\boldsymbol{B}}$$

sea hermítica.

Igual para $f_2 = 1 - x^2$ y $\omega = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \alpha, \beta > -1$

También se han conseguido otros ejemplos donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no conmutan.

# Nuevos fenómenos

- Álgebra de operadores diferenciales: existencia de varios operadores diferenciales de tipo Sturm-Liouville que tienen a una misma familia de POM como autofunciones (Castro, Durán, MdI, Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Román), incluso de órdenes impares, cosa que tampoco es posible en el caso escalar (Castro, Grünbaum, Durán, MdI).
- Cono convexo de pesos matriciales: para un operador diferencial fijo, existen infinitas familias de POM linealmente independientes que son autofunciones de ese mismo operador diferencial (Durán, MdI).
- Familias de operadores escalera: existencia de una familia de operadores en escalera (de destrucción o aniquilación) para ciertos ejemplos de POM, algunos de ellos de orden 0 (Grünbaum, MdI, Martínez-Finkelshtein).

# Álgebra de operadores diferenciales

Para una familia fija $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ de POM estudiamos el álgebra sobre $\mathbb{C}$

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \left\{ D = \sum_{i=0}^{k} \partial^i \boldsymbol{F}_i(x) : \boldsymbol{Q}_n D = \boldsymbol{\Gamma}_n(D)\boldsymbol{Q}_n, \ n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

Caso escalar: Si $\mathcal{F}$ es el operador diferencial de segundo orden (Hermite, Laguerre or Jacobi), entonces cualquier operador $\mathcal{U}$ donde $\mathcal{U}p_n = \lambda_n p_n$ se tiene que

$$\mathcal{U} = \sum_{i=0}^{k} c_i \mathcal{F}^i, \quad c_i \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}(\omega) \simeq \mathbb{C}[x]$$

Caso matricial: Este álgebra en general es no conmutativa y está generada por varios elementos, algunos de ellos incluso de órdenes impares (Castro, Durán, Grünbaum, Tirao, Pacharoni, MdI). En muy pocos casos se ha demostrado con certeza el comportamiento de esta álgebra (Tirao, 2011).

# Álgebra de operadores diferenciales

Para una familia fija $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ de POM estudiamos el álgebra sobre $\mathbb{C}$

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \left\{ D = \sum_{i=0}^{k} \partial^i \boldsymbol{F}_i(x) : \boldsymbol{Q}_n D = \boldsymbol{\Gamma}_n(D)\boldsymbol{Q}_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

Caso escalar: Si $\mathcal{F}$ es el operador diferencial de segundo orden (Hermite, Laguerre or Jacobi), entonces cualquier operador $\mathcal{U}$ donde $\mathcal{U}p_n = \lambda_n p_n$ se tiene que

$$\mathcal{U} = \sum_{i=0}^{k} c_i \mathcal{F}^i, \quad c_i \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}(\omega) \simeq \mathbb{C}[x]$$

Caso matricial: Este álgebra en general es no conmutativa y está generada por varios elementos, algunos de ellos incluso de órdenes impares (Castro, Durán, Grünbaum, Tirao, Pacharoni, MdI). En muy pocos casos se ha demostrado con certeza el comportamiento de esta álgebra (Tirao, 2011).

# Álgebra de operadores diferenciales

Para una familia fija $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ de POM estudiamos el álgebra sobre $\mathbb{C}$

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \left\{ D = \sum_{i=0}^{k} \partial^i \boldsymbol{F}_i(x) : \boldsymbol{Q}_n D = \boldsymbol{\Gamma}_n(D)\boldsymbol{Q}_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

Caso escalar: Si $\mathcal{F}$ es el operador diferencial de segundo orden (Hermite, Laguerre or Jacobi), entonces cualquier operador $\mathcal{U}$ donde $\mathcal{U}p_n = \lambda_n p_n$ se tiene que

$$\mathcal{U} = \sum_{i=0}^{k} c_i \mathcal{F}^i, \quad c_i \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}(\omega) \simeq \mathbb{C}[x]$$

Caso matricial: Este álgebra en general es no conmutativa y está generada por varios elementos, algunos de ellos incluso de órdenes impares (Castro, Durán, Grünbaum, Tirao, Pacharoni, MdI). En muy pocos casos se ha demostrado con certeza el comportamiento de esta álgebra (Tirao, 2011).

# Ejemplo (Durán-MdI, 2008)

$$W(x) = x^{\alpha} e^{-x} \begin{pmatrix} x(1+a^2x) & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > -1, x > 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

## Nuevos operadores diferenciales lin. ind.

| órden | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dimensión | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

## Base operadores diferenciales de segundo orden

$$D_1 = \partial^2 x\boldsymbol{I} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2-x & ax \\ 0 & \alpha+1-x \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -\frac{1+a^2}{a^2} & (1+\alpha)a \\ 0 & -1/a^2 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} x & -2ax^2 \\ 0 & -x \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2+x & -\frac{(2+a^2(2\alpha+5))x}{a} \\ \frac{2}{a} & -x-\alpha-1 \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1+a^2}{a^2} & -\frac{(1+\alpha)(2+a^2)}{a} \\ 0 & -1/a^2 \end{pmatrix}$$

# Ejemplo (Durán-MdI, 2008)

$$\boldsymbol{W}(x) = x^{\alpha} e^{-x} \begin{pmatrix} x(1+a^2x) & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > -1, x > 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

## Nuevos operadores diferenciales lin. ind.

| órden | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dimensión | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

## Base operadores diferenciales de segundo orden

$$D_1 = \partial^2 x\boldsymbol{I} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2-x & ax \\ 0 & \alpha+1-x \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -\frac{1+a^2}{a^2} & (1+\alpha)a \\ 0 & -1/a^2 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} x & -2ax^2 \\ 0 & -x \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2+x & -\frac{(2+a^2(2\alpha+5))x}{a} \\ \frac{2}{a} & -x-\alpha-1 \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1+a^2}{a^2} & -\frac{(1+\alpha)(2+a^2)}{a} \\ 0 & -1/a^2 \end{pmatrix}$$

# Ejemplo (Durán-MdI, 2008)

$$\boldsymbol{W}(x) = x^{\alpha} e^{-x} \begin{pmatrix} x(1+a^2x) & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > -1, x > 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

## Nuevos operadores diferenciales lin. ind.

| órden | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dimensión | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

## Base operadores diferenciales de segundo orden

$$D_1 = \partial^2 x\boldsymbol{I} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2-x & ax \\ 0 & \alpha+1-x \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -\frac{1+a^2}{a^2} & (1+\alpha)a \\ 0 & -1/a^2 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} x & -2ax^2 \\ 0 & -x \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2+x & -\frac{(2+a^2(2\alpha+5))x}{a} \\ \frac{2}{a} & -x-\alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$+ \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1+a^2}{a^2} & -\frac{(1+\alpha)(2+a^2)}{a} \\ 0 & -1/a^2 \end{pmatrix}$$

# Autovalores

Si llamamos $D_3$ y $D_4$ a los dos operadores diferenciales de órden 3, se tiene que los autovalores de $D_1, D_2, D_3$ y $D_4$ son (abusando de notación)

$$D_1 = -\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} \gamma_{n+1,a} & 0 \\ 0 & \gamma_{n,a} \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} \gamma_{n+1,a} & 0 \\ 0 & -\gamma_{n,a} \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 0 & a(1+\alpha+n)\gamma_{n,a}\gamma_{n+1,a} \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_4 = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 0 & -a(1+\alpha+n)\gamma_{n,a}\gamma_{n+1,a} \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

donde $\gamma_{n,a} = 1 + na^2$.

# Algunas relaciones

### 4 relaciones cuadráticas

$$D_1^2 = D_2^2, \qquad D_3^2 = -D_4^2,$$
$$D_1D_2 = D_2D_1, \quad D_3D_4 = -D_4D_3.$$

### 4 relaciones de permutación

$$D_1D_3 - D_2D_4 = 0, \quad D_2D_3 - D_1D_4 = 0,$$
$$D_3D_2 + D_4D_1 = 0, \quad D_3D_1 + D_4D_2 = 0.$$

### 4 más relaciones cuadráticas

$$D_3 = D_1D_4 - D_4D_1, \quad D_4 = D_1D_3 - D_3D_1,$$
$$D_3 = D_2D_3 + D_3D_2, \quad D_4 = D_2D_4 + D_4D_2.$$

### Relaciones cúbicas

$$D_1D_3^2 = D_3^2D_1, \quad D_2D_3^2 = D_3^2D_2.$$

De hecho se puede escribir $D_2$ en términos de $D_1$ y $D_3$. Conjeturamos que $\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{C}\langle D_1, D_3\rangle$, excepto para valores excepcionales de $\alpha = 1 + \frac{1}{a^2}$ o $\alpha = -2 + \frac{1}{a^2}$ ("cúspides"), en cuyo caso se conjetura que $\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{C}\langle D_1, D_2, D_3\rangle$.

# Algunas relaciones

## 4 relaciones cuadráticas

$$D_1^2 = D_2^2, \qquad D_3^2 = -D_4^2,$$
$$D_1 D_2 = D_2 D_1, \quad D_3 D_4 = -D_4 D_3.$$

## 4 relaciones de permutación

$$D_1 D_3 - D_2 D_4 = 0, \quad D_2 D_3 - D_1 D_4 = 0,$$
$$D_3 D_2 + D_4 D_1 = 0, \quad D_3 D_1 + D_4 D_2 = 0.$$

## 4 más relaciones cuadráticas

$$D_3 = D_1 D_4 - D_4 D_1, \quad D_4 = D_1 D_3 - D_3 D_1,$$
$$D_3 = D_2 D_3 + D_3 D_2, \quad D_4 = D_2 D_4 + D_4 D_2.$$

## Relaciones cúbicas

$$D_1 D_3^2 = D_3^2 D_1, \quad D_2 D_3^2 = D_3^2 D_2.$$

De hecho se puede escribir $D_2$ en términos de $D_1$ y $D_3$. Conjeturamos que $\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{C}\langle D_1, D_3\rangle$, excepto para valores excepcionales de $\alpha = 1 + \frac{1}{a^2}$ o $\alpha = -2 + \frac{1}{a^2}$ ("cúspides"), en cuyo caso se conjetura que $\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{C}\langle D_1, D_2, D_3\rangle$.

# Algunas relaciones

## 4 relaciones cuadráticas

$$D_1^2 = D_2^2, \qquad D_3^2 = -D_4^2,$$
$$D_1 D_2 = D_2 D_1, \quad D_3 D_4 = -D_4 D_3.$$

## 4 relaciones de permutación

$$D_1 D_3 - D_2 D_4 = 0, \quad D_2 D_3 - D_1 D_4 = 0,$$
$$D_3 D_2 + D_4 D_1 = 0, \quad D_3 D_1 + D_4 D_2 = 0.$$

## 4 más relaciones cuadráticas

$$D_3 = D_1 D_4 - D_4 D_1, \quad D_4 = D_1 D_3 - D_3 D_1,$$
$$D_3 = D_2 D_3 + D_3 D_2, \quad D_4 = D_2 D_4 + D_4 D_2.$$

## Relaciones cúbicas

$$D_1 D_3^2 = D_3^2 D_1, \quad D_2 D_3^2 = D_3^2 D_2.$$

De hecho se puede escribir $D_2$ en términos de $D_1$ y $D_3$. Conjeturamos que $\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{C}\langle D_1, D_3 \rangle$, excepto para valores excepcionales de $\alpha = 1 + \frac{1}{a^2}$ o $\alpha = -2 + \frac{1}{a^2}$ ("cúspides"), en cuyo caso se conjetura que $\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{C}\langle D_1, D_2, D_3 \rangle$.

# Algunas relaciones

### 4 relaciones cuadráticas

$$D_1^2 = D_2^2, \qquad D_3^2 = -D_4^2,$$
$$D_1 D_2 = D_2 D_1, \quad D_3 D_4 = -D_4 D_3.$$

### 4 relaciones de permutación

$$D_1 D_3 - D_2 D_4 = 0, \quad D_2 D_3 - D_1 D_4 = 0,$$
$$D_3 D_2 + D_4 D_1 = 0, \quad D_3 D_1 + D_4 D_2 = 0.$$

### 4 más relaciones cuadráticas

$$D_3 = D_1 D_4 - D_4 D_1, \quad D_4 = D_1 D_3 - D_3 D_1,$$
$$D_3 = D_2 D_3 + D_3 D_2, \quad D_4 = D_2 D_4 + D_4 D_2.$$

### Relaciones cúbicas

$$D_1 D_3^2 = D_3^2 D_1, \quad D_2 D_3^2 = D_3^2 D_2.$$

De hecho se puede escribir $D_2$ en términos de $D_1$ y $D_3$. Conjeturamos que $\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{C}\langle D_1, D_3 \rangle$, excepto para valores excepcionales de $\alpha = 1 + \frac{1}{a^2}$ o $\alpha = -2 + \frac{1}{a^2}$ ("cúspides"), en cuyo caso se conjetura que $\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{C}\langle D_1, D_2, D_3 \rangle$.

# Algunas relaciones

## 4 relaciones cuadráticas

$$D_1^2 = D_2^2, \qquad D_3^2 = -D_4^2,$$
$$D_1D_2 = D_2D_1, \quad D_3D_4 = -D_4D_3.$$

## 4 relaciones de permutación

$$D_1D_3 - D_2D_4 = 0, \quad D_2D_3 - D_1D_4 = 0,$$
$$D_3D_2 + D_4D_1 = 0, \quad D_3D_1 + D_4D_2 = 0.$$

## 4 más relaciones cuadráticas

$$D_3 = D_1D_4 - D_4D_1, \quad D_4 = D_1D_3 - D_3D_1,$$
$$D_3 = D_2D_3 + D_3D_2, \quad D_4 = D_2D_4 + D_4D_2.$$

## Relaciones cúbicas

$$D_1D_3^2 = D_3^2D_1, \quad D_2D_3^2 = D_3^2D_2.$$

De hecho se puede escribir $D_2$ en términos de $D_1$ y $D_3$. Conjeturamos que $\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{C}\langle D_1, D_3\rangle$, excepto para valores excepcionales de $\alpha = 1 + \frac{1}{a^2}$ o $\alpha = -2 + \frac{1}{a^2}$ ("cúspides"), en cuyo caso se conjetura que $\mathcal{D}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{C}\langle D_1, D_2, D_3\rangle$.

# Cono convexo de pesos matriciales

Situación dual a $\mathcal{D}(\boldsymbol{W})$: dado un operador diferencial fijo $D$ se estudia:

$$\Upsilon(D) = \{\boldsymbol{W} : \langle \boldsymbol{P}D, \boldsymbol{Q}\rangle_{\boldsymbol{W}} = \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}D\rangle_{\boldsymbol{W}}, \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\}$$

- Si $\Upsilon(D) \neq \emptyset$, entonces es un cono convexo: $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2 \in \Upsilon(D) \Rightarrow \gamma \boldsymbol{W}_1 + \zeta \boldsymbol{W}_2 \in \Upsilon(D)$, $\gamma, \zeta \geq 0$ (uno de ellos $\neq 0$)

Los pesos matriciales $\boldsymbol{W}$ que tienen un operador diferencial simétrico de segundo orden $D$ dan ejemplos donde $\Upsilon(D) \neq \emptyset$ (dimensión 1).
Existen ejemplos de operadores diferenciales simétricos de segundo orden donde $\Upsilon(D)$ es un cono convexo de dimensión 2, i.e. una familia de POM mónicos $\boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma}$ con respecto a $\gamma \boldsymbol{W}_1 + \zeta \boldsymbol{W}_2$ con

$$\boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma} D = \Gamma_n \boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma}$$

# Cono convexo de pesos matriciales

Situación dual a $\mathcal{D}(\boldsymbol{W})$: dado un operador diferencial fijo $D$ se estudia:

$$\Upsilon(D) = \{\boldsymbol{W} : \langle \boldsymbol{P}D, \boldsymbol{Q}\rangle_{\boldsymbol{W}} = \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}D\rangle_{\boldsymbol{W}}, \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\}$$

- Si $\Upsilon(D) \neq \emptyset$, entonces es un cono convexo: $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2 \in \Upsilon(D) \Rightarrow \gamma \boldsymbol{W}_1 + \zeta \boldsymbol{W}_2 \in \Upsilon(D)$, $\gamma, \zeta \geq 0$ (uno de ellos $\neq 0$)

Los pesos matriciales $\boldsymbol{W}$ que tienen un operador diferencial simétrico de segundo orden $D$ dan ejemplos donde $\Upsilon(D) \neq \emptyset$ (dimensión 1).

Existen ejemplos de operadores diferenciales simétricos de segundo orden donde $\Upsilon(D)$ es un cono convexo de dimensión 2, i.e. una familia de POM mónicos $\boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma}$ con respecto a $\gamma \boldsymbol{W}_1 + \zeta \boldsymbol{W}_2$ con

$$\boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma} D = \Gamma_n \boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma}$$

# Cono convexo de pesos matriciales

Situación dual a $\mathcal{D}(\boldsymbol{W})$: dado un operador diferencial fijo $D$ se estudia:

$$\Upsilon(D) = \{\boldsymbol{W} : \langle \boldsymbol{P}D, \boldsymbol{Q}\rangle_{\boldsymbol{W}} = \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}D\rangle_{\boldsymbol{W}}, \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\}$$

- Si $\Upsilon(D) \neq \emptyset$, entonces es un cono convexo: $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2 \in \Upsilon(D) \Rightarrow \gamma\boldsymbol{W}_1 + \zeta\boldsymbol{W}_2 \in \Upsilon(D)$, $\gamma, \zeta \geq 0$ (uno de ellos $\neq 0$)

Los pesos matriciales $\boldsymbol{W}$ que tienen un operador diferencial simétrico de segundo orden $D$ dan ejemplos donde $\Upsilon(D) \neq \emptyset$ (dimensión 1).

Existen ejemplos de operadores diferenciales simétricos de segundo orden donde $\Upsilon(D)$ es un cono convexo de dimensión 2, i.e. una familia de POM mónicos $\boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma}$ con respecto a $\gamma\boldsymbol{W}_1 + \zeta\boldsymbol{W}_2$ con

$$\boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma} D = \Gamma_n \boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma}$$

# Cono convexo de pesos matriciales

Situación dual a $\mathcal{D}(\boldsymbol{W})$: dado un operador diferencial fijo $D$ se estudia:

$$\Upsilon(D) = \{\boldsymbol{W} : \langle \boldsymbol{P}D, \boldsymbol{Q}\rangle_{\boldsymbol{W}} = \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}D\rangle_{\boldsymbol{W}}, \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\}$$

- Si $\Upsilon(D) \neq \emptyset$, entonces es un cono convexo: $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2 \in \Upsilon(D) \Rightarrow \gamma \boldsymbol{W}_1 + \zeta \boldsymbol{W}_2 \in \Upsilon(D)$, $\gamma, \zeta \geq 0$ (uno de ellos $\neq 0$)

Los pesos matriciales $\boldsymbol{W}$ que tienen un operador diferencial simétrico de segundo orden $D$ dan ejemplos donde $\Upsilon(D) \neq \emptyset$ (dimensión 1).
Existen ejemplos de operadores diferenciales simétricos de segundo orden donde $\Upsilon(D)$ es un cono convexo de dimensión 2, i.e. una familia de POM mónicos $\boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma}$ con respecto a $\gamma \boldsymbol{W}_1 + \zeta \boldsymbol{W}_2$ con

$$\boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma} D = \boldsymbol{\Gamma}_n \boldsymbol{Q}_{n,\zeta/\gamma}$$

# Añadiendo una delta de Dirac

Todos los ejemplos estudiados son de la forma

$$\gamma \boldsymbol{W} + \zeta \boldsymbol{M}(x_0)\delta_{x_0}, \quad \gamma > 0, \zeta \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

donde $\boldsymbol{W}$ es un peso matricial con varios operadores diferenciales de segundo orden simétricos y $\boldsymbol{M}(x_0)$ es cierta matriz semidefinida positiva.

### Teorema (Durán–MdI, 2008)

Sea $\boldsymbol{W}$ y $D = \partial^2 \boldsymbol{F}_2(x) + \partial^1 \boldsymbol{F}_1(x) + \partial^0 \boldsymbol{F}_0$. Supongamos que para cierto $x_0 \in \mathbb{R}$ existe una matriz semidefinida positiva $\boldsymbol{M}(x_0)$ tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_2(x_0)\boldsymbol{M}(x_0) &= \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{F}_1(x_0)\boldsymbol{M}(x_0) &= \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{F}_0\boldsymbol{M}(x_0) &= \boldsymbol{M}(x_0)\boldsymbol{F}_0^* \end{aligned}$$

Entonces $D$ es simétrico con respecto a $\boldsymbol{W} \Leftrightarrow D$ es simétrico con respecto a $\gamma \boldsymbol{W} + \zeta \boldsymbol{M}(x_0)\delta_{x_0}$.

# Añadiendo una delta de Dirac

Todos los ejemplos estudiados son de la forma

$$\gamma \boldsymbol{W} + \zeta \boldsymbol{M}(x_0)\delta_{x_0}, \quad \gamma > 0, \zeta \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

donde $\boldsymbol{W}$ es un peso matricial con varios operadores diferenciales de segundo orden simétricos y $\boldsymbol{M}(x_0)$ es cierta matriz semidefinida positiva.

**Teorema (Durán–MdI, 2008)**

Sea $\boldsymbol{W}$ y $D = \partial^2 \boldsymbol{F}_2(x) + \partial^1 \boldsymbol{F}_1(x) + \partial^0 \boldsymbol{F}_0$. Supongamos que para cierto $x_0 \in \mathbb{R}$ existe una matriz semidefinida positiva $\boldsymbol{M}(x_0)$ tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_2(x_0)\boldsymbol{M}(x_0) &= \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{F}_1(x_0)\boldsymbol{M}(x_0) &= \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{F}_0\boldsymbol{M}(x_0) &= \boldsymbol{M}(x_0)\boldsymbol{F}_0^* \end{aligned}$$

Entonces $D$ es simétrico con respecto a $\boldsymbol{W} \Leftrightarrow D$ es simétrico con respecto a $\gamma \boldsymbol{W} + \zeta \boldsymbol{M}(x_0)\delta_{x_0}$.

# Ejemplo con $x_0 \in \mathbb{R}$

**Durán-Grünbaum, 2004**

$$\boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2}\begin{pmatrix} 1+a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Ecuaciones de simetría $\Rightarrow$ Existen 4 operadores diferenciales de segundo orden linealmente independientes. Resolviendo las restricciones del teorema es posible encontrar una matriz $\boldsymbol{M}(x_0)$ donde $x_0$ es cualquier número real. Esta matriz viene dada por

$$\boldsymbol{M}(x_0) = \begin{pmatrix} (\xi^{\pm}_{x_0,a})^2 & \xi^{\pm}_{x_0,a} \\ \xi^{\pm}_{x_0,a} & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{\pm}_{a,x_0} = \frac{ax_0 \pm \sqrt{4+a^2x_0^2}}{2}$$

# Ejemplo con $x_0 \in \mathbb{R}$

**Durán-Grünbaum, 2004**

$$\boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2}\begin{pmatrix} 1+a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Ecuaciones de simetría $\Rightarrow$ Existen 4 operadores diferenciales de segundo orden linealmente independientes. Resolviendo las restricciones del teorema es posible encontrar una matriz $\boldsymbol{M}(x_0)$ donde $x_0$ es cualquier número real. Esta matriz viene dada por

$$\boldsymbol{M}(x_0) = \begin{pmatrix} (\xi^{\pm}_{x_0,a})^2 & \xi^{\pm}_{x_0,a} \\ \xi^{\pm}_{x_0,a} & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{\pm}_{a,x_0} = \frac{ax_0 \pm \sqrt{4+a^2x_0^2}}{2}$$

## $x_0 = 0$

$$D = \partial^2 \boldsymbol{F}_2(x) + \partial^1 \boldsymbol{F}_1(x) + \partial^0 \boldsymbol{F}_0(x),$$

$$\boldsymbol{F}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 - ax & -1 + a^2x^2 \\ -1 & 1 + ax \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_1(x) = \begin{pmatrix} -2a - 2x & 2a + 2(2 + a^2)x \\ 0 & -2x \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_0(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2\frac{2+a^2}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $D$ es simétrico con respecto a la familia de pesos matriciales

$$\Upsilon(D) = \left\{ \gamma e^{-x^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_0(x), \quad \gamma > 0, \zeta \geq 0 \right\}$$

## $x_0 = 0$

$$D = \partial^2 \boldsymbol{F}_2(x) + \partial^1 \boldsymbol{F}_1(x) + \partial^0 \boldsymbol{F}_0(x),$$

$$\boldsymbol{F}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 - ax & -1 + a^2x^2 \\ -1 & 1 + ax \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_1(x) = \begin{pmatrix} -2a - 2x & 2a + 2(2 + a^2)x \\ 0 & -2x \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_0(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2\frac{2+a^2}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $D$ es simétrico con respecto a la familia de pesos matriciales

$$\Upsilon(D) = \left\{ \gamma e^{-x^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_0(x), \quad \gamma > 0, \zeta \geq 0 \right\}$$

# Índice

# Aplicaciones

- Procesos de difusión cambiantes: procesos de difusión en el que existe un proceso aleatorio markoviano discreto subyacente que hace que cambie el proceso en diferentes fases (MdI).
- Análisis armónico matricial: Funciones matriciales que son autofunciones al mismo tiempo de un operador diferencial de tipo Schrödinger y un operador integral de tipo Fourier (MdI).
- Otras aplicaciones: sistemas integrables no conmutativos y ecuaciones de Painlevé no conmutativas (Cafasso, MdI), problemas de Riemann-Hilbert (Grünbaum, MdI, Martínez-Finkelshtein, Delvaux), ecuación de Dirac (Durán-Grünbaum), problemas limitados en tiempo y banda (Castro, Durán, Grünbaum, Pacharoni, Zurrián), etc.

# Procesos de difusión cambiantes

Procesos de difusión: el espacio de estados es continuo, $\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, al igual que el tiempo $\mathcal{T} = [0, \infty)$. El operador infinitesimal del proceso viene dado por un operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \tau(x)\frac{d}{dx}$$

donde $\sigma^2(x)$ es el coeficiente de difusión y $\tau(x)$ el drift.

Si existe una medida positiva $\omega$ simétrica con respecto a $\mathcal{A}$ y la correspondiente familia de funciones ortonormales $(\phi_n)_n$ es autofunción del operador infinitesimal, i.e. $\mathcal{A}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x)$, entonces

- Densidad de probabilidades de transición:

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t}\phi_n(x)\phi_n(y)\omega(y)$$

- Medida invariante:

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_{\mathcal{S}}\omega(x)dx}\omega(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

# Procesos de difusión cambiantes

Procesos de difusión: el espacio de estados es continuo, $\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, al igual que el tiempo $\mathcal{T} = [0, \infty)$. El operador infinitesimal del proceso viene dado por un operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \tau(x)\frac{d}{dx}$$

donde $\sigma^2(x)$ es el coeficiente de difusión y $\tau(x)$ el drift.
Si existe una medida positiva $\omega$ simétrica con respecto a $\mathcal{A}$ y la correspondiente familia de funciones ortonormales $(\phi_n)_n$ es autofunción del operador infinitesimal, i.e. $\mathcal{A}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x)$, entonces

- Densidad de probabilidades de transición:

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t}\phi_n(x)\phi_n(y)\omega(y)$$

- Medida invariante:

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_S \omega(x)dx}\omega(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

# Procesos de difusión cambiantes

Procesos de difusión: el espacio de estados es continuo, $\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, al igual que el tiempo $\mathcal{T} = [0, \infty)$. El operador infinitesimal del proceso viene dado por un operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \tau(x)\frac{d}{dx}$$

donde $\sigma^2(x)$ es el coeficiente de difusión y $\tau(x)$ el drift.
Si existe una medida positiva $\omega$ simétrica con respecto a $\mathcal{A}$ y la correspondiente familia de funciones ortonormales $(\phi_n)_n$ es autofunción del operador infinitesimal, i.e. $\mathcal{A}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x)$, entonces

- Densidad de probabilidades de transición:

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t}\phi_n(x)\phi_n(y)\omega(y)$$

- Medida invariante:

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_S \omega(x)dx}\omega(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

# Procesos de difusión cambiantes

Procesos de difusión: el espacio de estados es continuo, $\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, al igual que el tiempo $\mathcal{T} = [0, \infty)$. El operador infinitesimal del proceso viene dado por un operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \tau(x)\frac{d}{dx}$$

donde $\sigma^2(x)$ es el coeficiente de difusión y $\tau(x)$ el drift.
Si existe una medida positiva $\omega$ simétrica con respecto a $\mathcal{A}$ y la correspondiente familia de funciones ortonormales $(\phi_n)_n$ es autofunción del operador infinitesimal, i.e. $\mathcal{A}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x)$, entonces

- Densidad de probabilidades de transición:
$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t}\phi_n(x)\phi_n(y)\omega(y)$$
- Medida invariante:
$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_S \omega(x)dx}\omega(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

# Procesos de difusión cambiantes

Procesos de difusión: el espacio de estados es continuo, $\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, al igual que el tiempo $\mathcal{T} = [0, \infty)$. El operador infinitesimal del proceso viene dado por un operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \tau(x)\frac{d}{dx}$$

donde $\sigma^2(x)$ es el coeficiente de difusión y $\tau(x)$ el drift.
Si existe una medida positiva $\omega$ simétrica con respecto a $\mathcal{A}$ y la correspondiente familia de funciones ortonormales $(\phi_n)_n$ es autofunción del operador infinitesimal, i.e. $\mathcal{A}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x)$, entonces

- Densidad de probabilidades de transición:
$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t}\phi_n(x)\phi_n(y)\omega(y)$$

- Medida invariante:
$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_S \omega(x)dx}\omega(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

# Procesos de difusión cambiantes

Procesos de difusión cambiantes:
El espacio de estados es ahora $(a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}$ y el tiempo $\mathcal{T} = [0, \infty)$.
El operador infinitesimal $\mathcal{A}$ es ahora un operador diferencial matricial

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(x)\frac{d^2}{dx^2} + \boldsymbol{B}(x)\frac{d^1}{dx^1} + \boldsymbol{Q}(x)\frac{d^0}{dx^0}$$

Tenemos que $\boldsymbol{A}(x)$ y $\boldsymbol{B}(x)$ son matrices diagonales y $\boldsymbol{Q}(x)$ es el operador infinitesimal de un proceso de Markov continuo, i.e.

$$\boldsymbol{Q}_{ii}(x) \leq 0, \quad \boldsymbol{Q}_{ij}(x) \geq 0, i \neq j, \quad \boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{e}_N = \boldsymbol{0}$$

La distribución invariante es ahora un *vector por filas* $(t \to \infty)$

$$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y)), \quad 0 \leq \psi_j(y) \leq 1, \quad \left(\int_a^b \psi(y)dy\right)\boldsymbol{e}_N = 1$$

que verifica

$$\psi(y)\mathcal{A}^* \equiv \frac{1}{2}(\psi(y)\boldsymbol{A}(y))'' - (\psi(y)\boldsymbol{B}(y))' + \psi(y)\boldsymbol{Q}(y) = \boldsymbol{0}$$

# Procesos de difusión cambiantes

Procesos de difusión cambiantes:
El espacio de estados es ahora $(a, b) \times \{1, 2, \ldots, N\}$ y el tiempo $\mathcal{T} = [0, \infty)$.
El operador infinitesimal $\mathcal{A}$ es ahora un operador diferencial matricial

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(x)\frac{d^2}{dx^2} + \boldsymbol{B}(x)\frac{d^1}{dx^1} + \boldsymbol{Q}(x)\frac{d^0}{dx^0}$$

Tenemos que $\boldsymbol{A}(x)$ y $\boldsymbol{B}(x)$ son matrices diagonales y $\boldsymbol{Q}(x)$ es el operador infinitesimal de un proceso de Markov continuo, i.e.

$$\boldsymbol{Q}_{ii}(x) \leq 0, \quad \boldsymbol{Q}_{ij}(x) \geq 0, i \neq j, \quad \boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{e}_N = \boldsymbol{0}$$

La distribución invariante es ahora un *vector por filas* $(t \to \infty)$

$$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_N(y)), \quad 0 \leq \psi_j(y) \leq 1, \quad \left(\int_a^b \psi(y)dy\right)\boldsymbol{e}_N = 1$$

que verifica

$$\psi(y)\mathcal{A}^* \equiv \frac{1}{2}(\psi(y)\boldsymbol{A}(y))'' - (\psi(y)\boldsymbol{B}(y))' + \psi(y)\boldsymbol{Q}(y) = \boldsymbol{0}$$

# Procesos de difusión cambiantes

Procesos de difusión cambiantes:
El espacio de estados es ahora $(a,b)\times\{1,2,\dots,N\}$ y el tiempo $\mathcal{T}=[0,\infty)$.
El operador infinitesimal $\mathcal{A}$ es ahora un operador diferencial matricial

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}(x)\frac{d^2}{dx^2}+\boldsymbol{B}(x)\frac{d^1}{dx^1}+\boldsymbol{Q}(x)\frac{d^0}{dx^0}$$

Tenemos que $\boldsymbol{A}(x)$ y $\boldsymbol{B}(x)$ son matrices diagonales y $\boldsymbol{Q}(x)$ es el operador infinitesimal de un proceso de Markov continuo, i.e.

$$\boldsymbol{Q}_{ii}(x)\leq 0,\quad \boldsymbol{Q}_{ij}(x)\geq 0, i\neq j,\quad \boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{e}_N=\boldsymbol{0}$$

La distribución invariante es ahora un *vector por filas* $(t\to\infty)$

$$\boldsymbol{\psi}(y)=(\psi_1(y),\psi_2(y),\dots,\psi_N(y)),\quad 0\leq\psi_j(y)\leq 1,\quad \left(\int_a^b\boldsymbol{\psi}(y)dy\right)\boldsymbol{e}_N=1$$

que verifica

$$\boldsymbol{\psi}(y)\mathcal{A}^*\equiv\frac{1}{2}(\boldsymbol{\psi}(y)\boldsymbol{A}(y))''-(\boldsymbol{\psi}(y)\boldsymbol{B}(y))'+\boldsymbol{\psi}(y)\boldsymbol{Q}(y)=\boldsymbol{0}$$

# Procesos de difusión cambiantes

Al igual que en el caso escalar, si existe una matriz peso $\boldsymbol{W}$ simétrica con respecto a $\mathcal{A}$ cuyas funciones ortonormales matriciales $(\boldsymbol{\Phi}_n)_n$ verifiquen

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\Phi}_n(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}_n''(x) + \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{\Phi}_n'(x) + \boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{\Phi}_n(x) = \boldsymbol{\Phi}_n(x)\boldsymbol{\Gamma}_n$$

## Probabilidad de transición matricial (MdI, 2012)

$$\boldsymbol{P}(t;x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_n(x) e^{\boldsymbol{\Gamma}_n t} \boldsymbol{\Phi}_n^*(y)\boldsymbol{W}(y)$$

## Distribución invariante (MdI, 2012)

$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_N(y))$ tal que $\psi(y)\mathcal{A}^* = \boldsymbol{0}$

$$\Rightarrow \psi(y) = \left(\int_a^b \boldsymbol{e}_N^T \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{e}_N dx\right)^{-1} \boldsymbol{e}_N^T \boldsymbol{W}(y)$$

Ejemplo: una familia de funciones esféricas matriciales que provienen de teoría de representación de grupos se amolda a esta descripción y produce una variante del modelo de Wright-Fisher con sólo efectos de mutación.

# Procesos de difusión cambiantes

Al igual que en el caso escalar, si existe una matriz peso $\boldsymbol{W}$ simétrica con respecto a $\mathcal{A}$ cuyas funciones ortonormales matriciales $(\boldsymbol{\Phi}_n)_n$ verifiquen

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\Phi}_n(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}_n''(x) + \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{\Phi}_n'(x) + \boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{\Phi}_n(x) = \boldsymbol{\Phi}_n(x)\boldsymbol{\Gamma}_n$$

## Probabilidad de transición matricial (MdI, 2012)

$$\boldsymbol{P}(t;x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_n(x)e^{\boldsymbol{\Gamma}_n t}\boldsymbol{\Phi}_n^*(y)\boldsymbol{W}(y)$$

## Distribución invariante (MdI, 2012)

$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_N(y))$ tal que $\psi(y)\mathcal{A}^* = \boldsymbol{0}$

$$\Rightarrow \psi(y) = \left(\int_a^b \boldsymbol{e}_N^T \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{e}_N dx\right)^{-1} \boldsymbol{e}_N^T \boldsymbol{W}(y)$$

Ejemplo: una familia de funciones esféricas matriciales que provienen de teoría de representación de grupos se amolda a esta descripción y produce una variante del modelo de Wright-Fisher con sólo efectos de mutación.

# Procesos de difusión cambiantes

Al igual que en el caso escalar, si existe una matriz peso $\boldsymbol{W}$ simétrica con respecto a $\mathcal{A}$ cuyas funciones ortonormales matriciales $(\boldsymbol{\Phi}_n)_n$ verifiquen

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\Phi}_n(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}_n''(x) + \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{\Phi}_n'(x) + \boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{\Phi}_n(x) = \boldsymbol{\Phi}_n(x)\boldsymbol{\Gamma}_n$$

## Probabilidad de transición matricial (MdI, 2012)

$$\boldsymbol{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_n(x)e^{\boldsymbol{\Gamma}_n t}\boldsymbol{\Phi}_n^*(y)\boldsymbol{W}(y)$$

## Distribución invariante (MdI, 2012)

$\boldsymbol{\psi}(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_N(y))$ tal que $\boldsymbol{\psi}(y)\mathcal{A}^* = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\psi}(y) = \left(\int_a^b \boldsymbol{e}_N^T\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{e}_N dx\right)^{-1} \boldsymbol{e}_N^T\boldsymbol{W}(y)$$

Ejemplo: una familia de funciones esféricas matriciales que provienen de teoría de representación de grupos se amolda a esta descripción y produce una variante del modelo de Wright-Fisher con sólo efectos de mutación.

# Procesos de difusión cambiantes

Al igual que en el caso escalar, si existe una matriz peso $\boldsymbol{W}$ simétrica con respecto a $\mathcal{A}$ cuyas funciones ortonormales matriciales $(\boldsymbol{\Phi}_n)_n$ verifiquen

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\Phi}_n(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}_n''(x) + \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{\Phi}_n'(x) + \boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{\Phi}_n(x) = \boldsymbol{\Phi}_n(x)\boldsymbol{\Gamma}_n$$

## Probabilidad de transición matricial (MdI, 2012)

$$\boldsymbol{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_n(x) e^{\boldsymbol{\Gamma}_n t} \boldsymbol{\Phi}_n^*(y)\boldsymbol{W}(y)$$

## Distribución invariante (MdI, 2012)

$\boldsymbol{\psi}(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_N(y))$ tal que $\boldsymbol{\psi}(y)\mathcal{A}^* = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\psi}(y) = \left(\int_a^b \boldsymbol{e}_N^T \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{e}_N dx\right)^{-1} \boldsymbol{e}_N^T \boldsymbol{W}(y)$$

Ejemplo: una familia de funciones esféricas matriciales que provienen de teoría de representación de grupos se amolda a esta descripción y produce una variante del modelo de Wright-Fisher con sólo efectos de mutación.