
LA COLUMNA DE MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Sección a cargo de

Tomás Recio

El objetivo de esta columna es presentar de manera sucinta, en cada uno de los números de La Gaceta, alguna cuestión matemática en la que los cálculos, en un sentido muy amplio, tengan un papel destacado. Para cumplir este objetivo el editor de la columna (sin otros méritos que su interés y sin otros recursos que su mejor voluntad) quisiera contar con la colaboración de los lectores, a los que anima a remitirle (a la dirección que se indica al pie de página¹) los trabajos y sugerencias que consideren oportunos.

EN ESTE NÚMERO...

...incluimos una versión, adecuada a las características del lector de *La Gaceta*, de un trabajo presentado en los últimos “Encuentros de Geometría Computacional” (Universidad Jaime I de Castellón de la Plana, Julio de 1999). Se trata de una propuesta muy general para la construcción de familias de losetas aperiódicas, usando dos objetos matemáticos muy interesantes (y que ya han surgido, en diversos contextos, en números anteriores de *La Gaceta*): los mosaicos de Penrose y el diagrama de Voronoi. Los autores pertenecen al activo grupo andaluz de investigación en Geometría Computacional que dirige desde hace años el prof. Márquez, de la Universidad de Sevilla.

Una máquina generadora de losetas aperiódicas

por

José Cáceres, Alberto Márquez y Auxiliadora Moreno-González

INTRODUCCIÓN

Aunque existen varias definiciones alternativas, en lo que sigue llamaremos un *mosaico plano*, o simplemente un *mosaico*, a una familia numerable de conjuntos cerrados o *losetas* que recubren el plano sin dejar huecos, y cuyos

¹Tomás Recio. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071 Santander. recio@matesco.unican.es

interiores son disjuntos dos a dos. Además exigiremos que las losetas sean homeomorfas a discos cerrados y que sólo exista un número finito de losetas distintas (dos losetas se considerarán iguales si son copias isométricas). En esta definición encajan la mayoría de los mosaicos que aparecen en el mundo real, como los que se utilizan como motivo de decoración y algunos de los dibujos de M.C. Escher. La mejor referencia que se puede consultar es el libro de Grünbaum y Shepard [1989] donde se explican éstos y otros conceptos de manera muy detallada.

Un mosaico es *periódico* si existe una traslación que lo deja invariante y *no periódico* en otro caso. Consideremos ahora un conjunto de losetas; pudiera ocurrir que todos los mosaicos que se pueden obtener con ellas sean periódicos: es el caso, por ejemplo, de un hexágono regular; otra posibilidad es que con las mismas losetas se pueda teselar el plano, a veces, de manera periódica y, a veces también, de forma no periódica: éste es el caso de un triángulo isósceles; por último, nuestro conjunto de losetas bien pudiera teselar siempre el plano de manera no periódica, en cuyo caso diremos que las losetas son *aperiódicas*.

La existencia de losetas aperiódicas está ligada a la resolución de cierto problema computacional y durante mucho tiempo se conjeturó que no existían, hasta que Berger [1966] encontró el primer conjunto, con más de 20.000 losetas. Éste fue el primero de una larga lista de ejemplos cuyo tamaño ha ido decreciendo paulatinamente hasta llegar a conjuntos formados por ¡dos losetas! (es un problema abierto, encontrar una única loseta aperiódica). El primero y más conocido de estos pares de losetas son el *dardo* y la *cometa* descritos por Roger Penrose en [1974] y que aparecen en la Figura 1, donde τ representa al número áureo.

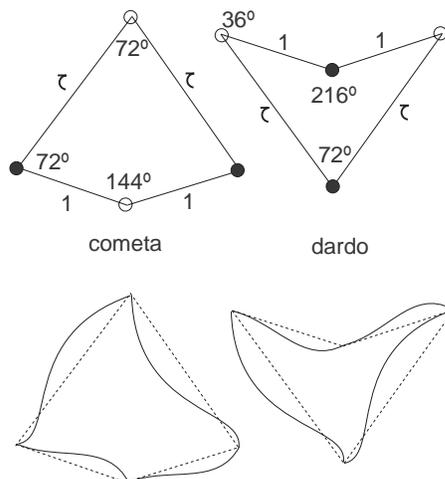


Figura 1

A cualquier mosaico del plano mediante dardos y cometas lo llamaremos un *mosaico de Penrose*. Nótese que los vértices de estas losetas están “co-

loreados” (por ejemplo, divididos en “blancos” y “negros”). Sólo se permite que dos losetas sean adyacentes si comparten vértices del mismo color. Estos vértices coloreados se pueden obviar si sustituimos las aristas de las losetas por arcos de curva de Jordan adecuados, como también aparece en la Figura 1. El coloreado de vértices, aristas y otras condiciones de tipo combinatorio se utiliza habitualmente en la definición de losetas aperiódicas como una forma de simplificación y recibe el nombre de *reglas de emparejamiento*.

Los mosaicos de Penrose verifican muchas y curiosas propiedades. En primer lugar se puede probar que existe una cantidad no numerable de mosaicos distintos, sin embargo cualquier trozo finito de ellos, se repite infinitas veces en cualquier otro mosaico. A esta propiedad se le conoce como *isomorfismo local* (ver [Grünbaum y Shepard, 1989]). En general podemos decir que los mosaicos de Penrose presentan una estructura muy regular localmente pero bastante caótica a nivel global.

Diez años después del trabajo de Penrose sobre losetas aperiódicas, otros investigadores han descubierto en la Naturaleza unas formas similares. Nos encontramos aquí con otro ejemplo de lo que se ha dado en llamar “la irrazonable efectividad de las Matemáticas”. Para introducir esta aplicación es necesario hacer una breve digresión sobre Cristalografía y su historia más reciente (ver [Senechal, 1995]).

Durante mucho tiempo, los expertos en este campo han trabajado en la suposición de que, en el interior de un cristal, los átomos siempre se ordenan de forma periódica, es decir, en bloques que se repiten continuamente en 2 ó 3 dimensiones. Esta suposición estaba fuertemente contrastada por la experimentación y parecía lógico pensar que, a nivel atómico, todos los materiales se organizaban de esta forma buscando el nivel de energía mínimo.

Todo esto cambió bruscamente cuando D. Schechtman [1984] de la Universidad de Haifa, descubrió una aleación de aluminio-manganeso que, aunque parecía tener estructura cristalina, no cumplía las normas convencionales conocidas hasta la fecha. Los átomos de estos cristales no estaban espaciados regularmente y se encontraban agrupados formando extrañas disposiciones geométricas. Desde entonces, se han sintetizado nuevos materiales similares que han sido agrupados con el nombre de *cuasicristales* (en inglés, *quasicrystals*). Estos cuasicristales suelen ser más resistentes que los materiales con la misma composición química pero que han cristalizado de forma periódica, algunos de ellos tienen mayor resistencia eléctrica a bajas temperaturas y otros resultan ser especialmente resbaladizos.

De manera natural, los investigadores encontraron que los mosaicos de Penrose modelaban, en algunos casos bastante bien, los resultados de la experimentación, y dedujeron que los átomos de los cuasicristales se ordenan en bloques o paquetes que son losetas aperiódicas y por lo tanto, no pueden agruparse periódicamente.

DIAGRAMAS DE VORONOI Y MOSAICOS DE PENROSE

Los mosaicos de Penrose modelan, en parte, la estructura de algunos cuasicristales; pero se hace necesario encontrar, de la forma más rápida y eficiente posible, otros tipos de losetas que puedan servir como modelos matemáticos para el resto de casos.

En este marco, nuestro grupo de investigación ha aplicado a este problema una herramienta muy conocida en otros ámbitos de las matemáticas, los *diagramas de Voronoi* (ver [Preparata y Shamos, 1985], [O'Rourke, 1994] y [Okabe et al., 1992] como referencias). Ello nos ha permitido desarrollar en [Cáceres y Márquez], los resultados necesarios para generar una cantidad infinita de losetas aperiódicas, a partir de un conjunto dado. Además, las nuevas losetas pueden utilizarse como nuevos puntos de partida para generar otras.

Para explicar, aunque sea someramente, estos resultados es necesario introducir el concepto de diagrama de Voronoi. Dado un conjunto numerable de puntos P del plano, la *región de Voronoi* $V(p)$ asociada a uno cualquiera p está formada por todos los puntos del plano más cercanos a p que a ningún otro punto de P o más exactamente:

$$V(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \min_{q \in P} \|q - x\| = \|p - x\|\}$$

El conjunto de regiones de Voronoi asociadas a los puntos de P constituye una subdivisión del plano que denotaremos por $\text{Vor}(P)$ y que llamamos el diagrama de Voronoi de P (en la Figura 2 tenemos un ejemplo de diagrama de Voronoi de diez puntos).

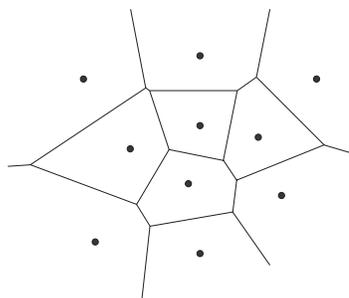


Figura 2

La idea central de nuestro trabajo es la siguiente: imaginemos por un momento que dibujamos una cantidad finita de puntos en el dardo y la cometa y luego teselamos el plano. Obtendremos de esta manera, un conjunto infinito de puntos que llamaremos una *nube de Penrose*; calculamos luego el diagrama de Voronoi de esta nube y comprobamos que se verifica el siguiente resultado:

Teorema 1 *El diagrama de Voronoi de una nube de Penrose es un mosaico no periódico.*

Este teorema, como otras muchas conclusiones que obtendremos, son válidas en un contexto más amplio, pero como el dardo y la cometa de Penrose son las losetas aperiódicas más conocidas, hemos preferido ceñirnos a este caso.

En el nuevo mosaico no periódico que hemos obtenido, las losetas son las regiones de Voronoi del diagrama. Sin embargo, las nuevas losetas no son inicialmente aperiódicas, porque puede darse el caso de que teselen el plano periódicamente. Un ejemplo de esto es el de la Figura 3, donde aparece un rombo que trivialmente recubre el plano de forma periódica. Nuestro próximo objetivo es construir unas reglas de emparejamiento para estas regiones tales que nos garanticen que cualquier mosaico que construyamos con las mismas será no periódico, y, por tanto, obtengamos un conjunto aperiódico de losetas.

Toda nube de Penrose se genera a partir de un mosaico de Penrose subyacente. Pues bien, las reglas que proponemos se generan de forma natural a partir de éste. En cada una de las regiones dibujaremos la porción del mosaico que contiene (como puede verse en la Figura 3) y sólo permitiremos que dos regiones sean adyacentes si con ello se obtiene una parte susceptible de pertenecer a un mosaico de Penrose.

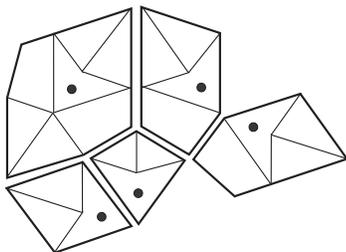


Figura 3

Es posible que dos regiones de Voronoi del mismo tipo contengan diferentes partes del mosaico subyacente. En ese caso, distinguiremos las regiones como losetas diferentes, aunque la regularidad de la estructura local de los mosaicos de Penrose nos asegura que el número total de losetas sigue siendo finito. Las ideas anteriores se recogen en el siguiente resultado.

Teorema 2 *Dado un diagrama de Voronoi de una nube de Penrose, es posible dar un conjunto de reglas de emparejamiento para sus regiones tal que cualquier mosaico que se construya con ellas, siguiendo tales reglas, induzca un mosaico de Penrose. Además, si un conjunto de estas regiones se puede construir a partir de dos mosaicos subyacentes distintos, las reglas de emparejamiento que obtenemos son independientes del mosaico elegido.*

A partir de ahora, a las losetas que obtengamos utilizando tanto la construcción como las reglas de emparejamiento anteriores las llamaremos *losetas Voronoi-Penrose*.

PROPIEDADES Y ALGORITMOS

Vamos a mostrar ahora muy brevemente algunas de las propiedades de las losetas de Voronoi-Penrose, así como un método algorítmico para su construcción.

Como las losetas son copias de regiones de Voronoi es evidente que comparten las propiedades de estas últimas, como la convexidad. También muchas de las propiedades del dardo y la cometa son heredadas por estas losetas, como, por ejemplo, el isomorfismo local. Merece la pena destacar una propiedad de los mosaicos de Penrose que todavía no hemos mencionado y es su simetría pentagonal. Esta simetría (que también poseen las losetas de Voronoi-Penrose) es característica de muchos cuasicristales y hace pensar a los investigadores que los mosaicos como los que estamos describiendo pueden ayudar a explicar la estructura de estos nuevos materiales.

Un último hecho destacable intrínseco a las losetas de Voronoi-Penrose es que podemos construir conjuntos de estas losetas tan grandes como queramos.

Teorema 3 *Para cualquier $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$, existe un conjunto de al menos, n losetas de Voronoi-Penrose.*

La idea de la demostración no es difícil de explicar. Partimos del ejemplo de la Figura 3, que contiene cinco losetas, y vamos añadiendo más puntos a la nube, de manera conveniente, para obtener nuevas regiones. El resultado anterior asegura que siempre existe una forma de hacerlo.

Para encontrar un algoritmo que nos permita calcular, a partir de una nube de Penrose, las losetas de Voronoi-Penrose es necesario introducir algunos conceptos y resultados.

En un mosaico, llamaremos un *parche* a cualquier conjunto finito de losetas cuya unión sea homeomorfa a un disco cerrado. Dada una loseta concreta, su *1-parche* será el conjunto de sus vecinos o aquellas losetas con las que tiene intersección no vacía. El *2-parche* de una loseta se define como los vecinos de las losetas de su 1-parche y así sucesivamente. El siguiente resultado nos da una cota de los puntos de una nube de Penrose que influyen en la región de uno dado.

Lema 4 *Todos los puntos que comparten una arista de Voronoi con p en una nube de Penrose se encuentran en el 3-parche del dardo o la cometa donde está contenido p .*

Es necesario considerar 3-parches, ya que este resultado no es cierto para 2-parches. A partir del lema basta con considerar todos los 3-parches posibles para un dardo y una cometa (que son once) y calcular en ellos las regiones de Voronoi que se obtienen con una nube de Penrose concreta. Concluiremos con la descripción de las losetas de Voronoi-Penrose añadiendo las reglas de emparejamiento que propusimos, la cuales también pueden ser implementadas algorítmicamente.

TRIANGULACIONES DE DELAUNAY Y EMPAREJAMIENTOS

Para finalizar, vamos a presentar dos cuestiones relacionadas con la construcción que acabamos de desarrollar. En primer lugar, parece inmediato preguntarse si es posible conseguir los mismos resultados al sustituir el diagrama de Voronoi por su dual: la *triangulación de Delaunay* (ver [Preparata y Shamos, 1985], [O'Rourke, 1994], [Okabe et al., 1992]), que es la triangulación que se obtiene a partir de un conjunto de puntos (en nuestro caso, una nube de Penrose) donde se han unido aquellos cuyas regiones de Voronoi comparten una arista.

Con esta idea no sólo se generan losetas convexas sino además triangulares; aunque hay que salvar una pequeña dificultad técnica y es que para toda nube de Penrose (siguiendo la definición que hemos dado de triangulación de Delaunay) aparecen ciertas regiones poligonales convexas que no son triángulos, lo que algunos autores [Okabe et al., 1992] llaman una *peritriangulación*. Bastaría entonces, completar los polígonos de k lados con $k - 1$ diagonales para obtener una triangulación de Delaunay.

La mayoría de los resultados que se prueban para diagramas de Voronoi tienen aquí un análogo: así la triangulación de Delaunay de una nube de Penrose es un mosaico no periódico y a los triángulos se les puede asignar una serie de reglas de emparejamiento para obtener nuevos conjuntos de losetas aperiódicas.

Otra cuestión en la que estamos interesados surge al considerar un problema aparentemente diferente. En un conjunto de puntos arbitrario P diremos que se ha definido un *emparejamiento euclídeo* si se pueden unir pares de puntos por medio de segmentos de manera que todo punto esté unido exactamente con otro y los segmentos no se corten. Cuando los puntos son vértices de un grafo, hablaremos de un *emparejamiento perfecto* si a las condiciones anteriores añadimos el que los vértices unidos sean también adyacentes en el grafo. Enunciemos un resultado sobre estos emparejamientos en nubes de Penrose.

Teorema 5 *Existe un emparejamiento euclídeo en toda nube de Penrose. También es posible encontrar un emparejamiento perfecto en una triangulación de Delaunay.*

Como comentario, resulta que no es difícil encontrar un emparejamiento perfecto entre los vértices de un diagrama de Voronoi de una nube de Penrose. Sin embargo, el segundo tipo de emparejamientos mencionados en el teorema no ha podido ser calculado algorítmicamente y no hemos encontrado ningún otro computable. Estamos sinceramente convencidos que la siguiente conjetura es cierta.

Conjetura 6 *Consideremos un diagrama de Voronoi y su triangulación de Delaunay, ambos relativos a una nube de Penrose. No existe un emparejamiento perfecto que pueda ser definido algorítmicamente.*

Bibliografía

- BERGER, R.: *The undecidability of the domino problem*. Memoirs Am. Math. Soc. **66** (1966).
- CÁCERES, J., MÁRQUEZ, A.: *An aperiodic tiles machine*. Enviado a Computational Geometry: Theory and Applications.
- GRÜNBAUM, B., SHEPARD, G.: *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman and Co., 1989.
- OKABE, A., BOOTS, B., SUGIHARA, K.: *Spatial Tessellations*. John Wiley and Sons, 1992.
- O'ROURKE, J.: *Computational Geometry in C*. Cambridge U. Press, 1994.
- PENROSE, R.: *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*. Bull. Inst. of Math. and its Appl. **10** (1974) 266–271.
- PREPARATA, F., SHAMOS, M.: *Computational Geometry*. Springer Verlag, New York, 1985.
- SCHECHTMAN, D., BLECH, I., GRATIAS, D., CAHN, J.: *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry*. Phys. Rev. Lett. **53 (20)** (1984) 1951–1953.
- SENECHAL, M.: *Quasicrystals and geometry*. Cambridge University Press, 1995.

José Cáceres,
Departamento de Estadística y Matemática Aplicada, CITE-III,
Ctra. Sacramento s/n, 04120 Almería.
e-mail: jcaceres@ualm.es

Alberto Márquez,
Departamento de Matemática Aplicada I,
Facultad de Informática,
Avda. Reina Mercedes s/n, 41012 Sevilla.
e-mail: almar@cica.es

Auxiliadora Moreno-González,
Departamento de Matemática Aplicada I,
Facultad de Informática,
Avda. Reina Mercedes s/n, 41012 Sevilla.
e-mail: amoreno@euler.fie.us.es