



UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Máster

# CLASIFICACIÓN DE CONEXIONES MEROMORFAS FORMALES EN UNA VARIABLE

Por:

Luis Francisco Curquejo Otero

Dirigido por:

Luis Narváez Macarro

Máster Universitario en Matemática Avanzada

Sevilla - Curso 2016-2017



# Índice

<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
Breve introducción histórica y posible continuación . . . . .	1
Sobre la bibliografía y la estructura del trabajo . . . . .	4
<b>2. Elementos básicos de la teoría de <math>\mathcal{D}</math>-módulos</b>	<b>7</b>
2.1. El álgebra $\mathcal{D}$ . . . . .	7
2.1.1. Definición del álgebra $\mathcal{D}$ . . . . .	8
2.1.2. Propiedades como anillo de $\mathcal{D}$ . . . . .	9
2.1.3. Ideales a la izquierda de $\mathcal{D}$ . División en $\mathcal{D}$ . . . . .	12
2.2. $\mathcal{D}$ -módulos holónomos y conexiones meromorfas . . . . .	16
2.2.1. Sistemas diferenciales, filtraciones y holonomía . . . . .	16
2.2.2. Conexiones meromorfas y el polígono de Newton . . . . .	18
<b>3. Clasificación de las conexiones meromorfas formales en una variable</b>	<b>27</b>
3.1. Conexiones meromorfas formales regulares . . . . .	27
3.2. Conexiones meromorfas formales en general . . . . .	36
3.2.1. Descomposición en suma de conexiones meromorfas formales de pendiente única . . . . .	36
3.2.2. Descomposición en suma de conexiones meromorfas formales ele- mentales . . . . .	43
3.3. El teorema clásico de Levelt-Turrittin y su utilidad . . . . .	53
3.3.1. La aproximación clásica al teorema . . . . .	54
3.3.2. El teorema de Levelt-Turrittin y su relación con el teorema de Mal- grange . . . . .	56
3.4. Posible profundización en la teoría algebraica de las ecuaciones diferenciales	57

**Bibliografía**

**59**

# Abstract

The study of systems of linear differential equations is, since its inception during the *XVII<sup>th</sup>* century, a core and rich area in mathematics. It is not only fruitful by itself, but it also provides a wonderful tool for modelling a plethora of situations in applied fields, such as physics, chemistry, engineering or epidemiology. Thus, mathematicians have constantly tried to attack the problems in this field using different techniques. During the *XX<sup>th</sup>* century algebraic tools started to be used with the purpose of studying singularities of differential equations and to obtain a more profound knowledge of the so-called Stokes phenomenon. In this work, an introduction to this algebraic viewpoint will be developed, with emphasis in the classification of formal meromorphic connections, the so-called Hukuhara-Levelt-Turrittin, Levelt-Turrittin or Levelt-Turrittin-Malgrange decomposition.

The first chapter contains a short introduction to the subject, explaining the general structure of this work, previous results, some historic remarks and a brief bibliographic discussion.

The second chapter deals with some basics about  $\mathcal{D}$ -modules and related notions, such as the Newton polygon of an operator, which will be instrumental in the proof of the main theorems.

Finally, in the third and last chapter, the abstract algebraic approach of Malgrange to the Hukuhara-Levelt-Turrittin decomposition will be studied. Also, a short, non-exhaustive study of the classical approach to the decomposition of a formal differential operator — which is a differential analogue of the Jordan-Chevalley decomposition — will be included. A few remarks about the more in-depth studies will be covered as well.



# Resumen

El estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales es un área de las matemáticas fructífera y que ha motivado numerosos desarrollos teóricos ya desde su concepción en el siglo XVII. Además del interés puramente matemático de las ecuaciones diferenciales su versatilidad a la hora de modelizar problemas en otras áreas del conocimiento (física, química, ingeniería, epidemiología...) ha propiciado que sean un campo de permanente actualidad en el cuál se buscan continuamente nuevas técnicas de estudio. En particular, a mediados del siglo XX se comenzó a afrontar el estudio de las singularidades de las ecuaciones diferenciales utilizando herramientas de álgebra abstracta. Asimismo, en la misma época, se comenzó a estudiar desde el punto de vista algebraico el fenómeno de Stokes, un fenómeno clásico del área. En el presente trabajo se pretende realizar una introducción a esta área desde el punto de vista algebraico tratando la clasificación de las conexiones meromorfas formales en una variable, lo que se conoce como descomposición de Hukuhara-Levelt-Turritin, Levelt-Turritin o Levelt-Turritin-Malgrange.

El primer capítulo contiene una breve introducción al tema, en la que se explicará la estructura general del trabajo, resultados previos, algunas notas históricas y una breve discusión bibliográfica.

El segundo capítulo consiste en un repaso de algunos aspectos básicos de la teoría de  $\mathcal{D}$ -módulos y aspectos relacionados, como el polígono de Newton. Estos conceptos serán fundamentales a la hora de probar los resultados principales.

Finalmente en el tercer capítulo se comentará la aproximación abstracta, debida a Malgrange, a la descomposición de Hukuhara-Levelt-Turritin. También se incluirá un breve estudio no exhaustivo sobre la aproximación clásica a la descomposición, que es un análogo diferencial de la descomposición de Jordan-Chevalley. Asimismo se presentarán algunas pinceladas sobre las líneas de profundización en el área de estudio.





# Capítulo 1

## Introducción

### Breve introducción histórica, objetivo del trabajo y posible continuación

Las ecuaciones diferenciales y su estudio han sido un elemento central de las matemáticas desde su nacimiento, de la mano de Newton y Leibniz, a mediados del siglo XVII. Esta preeminencia se observa tanto en un nivel puramente teórico, con la gran cantidad de avances matemáticos que ha impulsado la búsqueda de una mayor comprensión de las ecuaciones diferenciales, como en un plano práctico, debido a la versatilidad de las ecuaciones diferenciales para modelizar gran cantidad de situaciones en múltiples áreas de la ciencia: desde las aplicaciones más elementales asociadas a la mecánica clásica hasta algunos de los aspectos más punteros y con más interés presente como las ecuaciones de Navier-Stokes, pasando por multitud de áreas dentro de la biología, la epidemiología, la ingeniería, la física y la química, entre otros campos.

De entre todos los tipos de ecuaciones diferenciales existentes podemos destacar uno: las ecuaciones diferenciales *lineales*. Son ecuaciones de la forma

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i f}{dx^i} = 0,$$

donde los  $a_i$  son funciones complejas de variable compleja (en la variable  $x$ ), posiblemente meromorfas. Por supuesto, este es el caso 1–dimensional: también existen ecuaciones diferenciales  $n$ –dimensionales, pero por fijar ideas y restringirnos al ámbito que vamos a estudiar en el cuerpo principal del trabajo nos quedaremos siempre en el caso 1–dimensional. Solucionar esta ecuación equivale a encontrar una función de una variable compleja  $f$  de forma que verifique la igualdad anterior. En tanto estas ecuaciones aparecen con frecuencia tanto en las matemáticas teóricas como aplicadas (por ejemplo, en física)

es interesante conocer sus soluciones. Un teorema clásico de Picard-Lindelöf<sup>1</sup> (ver, por ejemplo, [Was87] o [NM10]) nos garantiza, bajo ciertas hipótesis, que localmente podemos encontrar solución a la ecuación. Más concretamente, garantiza que una vez realizado cierto cambio de variable que nos transforma una ecuación diferencial lineal en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, podemos encontrar solución local del sistema.

El tratamiento algebraico de este tipo de ecuaciones comienza con Riemann ([Var96]), que desarrolló el concepto de monodromía. De manera intuitiva y poco formal, la idea de este concepto es la de explicar como se comporta la extensión analítica de una solución de una ecuación diferencial alrededor de los polos de los coeficientes de dicha ecuación. El trabajo de Riemann y otros matemáticos de la época, entre los que podemos destacar a Fuchs, Klein, Schwarz o Poincaré, se centró en las ecuaciones diferenciales de *singularidades regulares*. Aunque existe una descripción general de las ecuaciones (y sistemas) diferenciales con singularidades regulares, gracias al criterio de Fuchs ([Sab10, Théorème 1.4.9]) en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales tenemos una caracterización sencilla. Una ecuación

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i f}{dx^i} = 0,$$

donde las  $a_i$  son funciones holomorfas en un entorno del 0 es una ecuación de singularidad regular en el 0 si para todo  $i$  es  $i - v(a_i) \leq n - v(a_n)$ , donde  $v(a_i)$  es la valoración (i.e, el orden del polo en 0 o el orden de anulación en el mismo punto).

Obviamente, dada una ecuación diferencial regular nos podemos plantear el problema de encontrar su monodromía y sus singularidades. El problema inverso, es decir, dada monodromía y singularidades encontrar una ecuación diferencial regular que las tenga, es el conocido como problema de Riemann-Hilbert. Este problema trasladado a dimensiones superiores propició lo que se conoce como *correspondencia de Riemann-Hilbert*. La resolución de este problema, llevada a cabo por Deligne (y extendida por Mebkhout y Kashiwara de forma independiente) ha sido relativamente reciente y tiene un carácter claramente algebraico. Sin entrar en detalles acerca del enunciado del teorema (que requiere una cierta traducción para adecuar los términos clásicos de Hilbert al lenguaje del álgebra moderna) la prueba de Deligne es válida en el caso de *conexiones meromorfas regulares*.

Las conexiones meromorfas regulares son, informalmente, una forma algebraica de expresar una ecuación diferencial lineal regular. Por tanto, entender las conexiones meromorfas regulares equivale a entender las ecuaciones diferenciales lineales regulares, sucediendo

---

<sup>1</sup>En ocasiones atribuido a Cauchy.

lo mismo en el caso en que prescindamos de la hipótesis de regularidad. Al prescindir de la hipótesis de regularidad es natural preguntarse también por una generalización de la correspondencia de Riemann-Hilbert al caso irregular. Las conexiones meromorfas irregulares son bien entendidas en una dimensión desde los trabajos de Hukuhara, Levelt y Turrittin desde un punto de vista clásico ([Lev75, Tur55, Huk41]) y de Malgrange ([Mal91, Mal79]) desde un punto de vista más algebraico. Asimismo, a lo largo de los últimos años se han ido realizando avances que han culminado con la prueba de una generalización adecuada al caso irregular de la correspondencia de Riemann-Hilbert ([DK16]). Entre estos avances encontramos la generalización a varias dimensiones de los resultados clásicos de Hukuhara, Levelt y Turrittin. Pese a haberse alcanzado este hito en el campo, el caso irregular no se conoce tan profundamente como el regular y ofrece múltiples vías de desarrollo.

El objetivo de este trabajo es introducirse en este área de estudio desde uno de sus elementos básicos: la descomposición de Levelt-Turrittin de una conexión meromorfa formal en una variable. La idea del teorema es la que sigue: sea  $\hat{K}$  el cuerpo de las series de Laurent, es decir, series de la forma  $\sum_{i=-a}^{+\infty} a_i x^i$ , con los  $a_i$  números complejos y  $a$  un número natural. Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  un  $\hat{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita. Sea  $\partial$  una derivación<sup>2</sup> de  $\hat{K}$  y sea  $\nabla_{\partial}$  un morfismo  $\mathbb{C}$ -lineal de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  en sí mismo de forma que para cada elemento  $f$  de  $\hat{K}$  y cada elemento  $m$  de  $V$  verifique la regla de Leibniz, es decir:

$$\nabla_{\partial}(f \cdot m) = (\partial f) \cdot m + f \cdot \nabla_{\partial}(m).$$

El par  $(V, \nabla_{\partial})$  es lo que llamaremos una conexión meromorfa formal. Al operador  $\nabla_{\partial}$  se le llama *conexión*. Bajo esta nomenclatura, el teorema de Levelt-Turrittin dice lo siguiente:

**Teorema** (Hukuhara-Levelt-Turrittin). *Bajo la nomenclatura anterior, el operador  $\nabla_{\partial}$  tiene una forma de Jordan, i.e., se puede expresar como suma de una conexión diagonalizable y un operador  $\hat{K}$ -lineal nilpotente.*

Desde el punto de vista algebraico podemos enunciarlo de la siguiente manera:

**Teorema.** *Bajo la nomenclatura anterior, existe un “cambio de base” o ramificación de forma que podemos expresar  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  como suma directa de conexiones meromorfas “lo más simple posibles”. Esta expresión es única salvo isomorfismo y permutación de los términos de la suma.*

---

<sup>2</sup>Pese a la notación de derivada parcial que adoptamos por comodidad y para evitar confusiones notacionales, en todo momento estaremos trabajando en una única variable  $x$ . El estudio en varias variables escapa al objetivo de este trabajo.

Por supuesto, haría falta definir que entendemos por “lo más simple posibles”. El concepto adecuado es el de conexión meromorfa formal elemental, que definiremos a lo largo del trabajo. En el presente texto se seguirá el punto de vista puramente algebraico de Malgrange, aunque se dedicará un breve epígrafe a comentar el punto de vista clásico de Levelt, Turrittin y Hukuhara. Se ofrecerá una prueba completa y exhaustiva del teorema de Malgrange, explicitando todos los detalles de la misma. Asimismo, se darán algunas pinceladas introductorias acerca de la teoría de  $\mathcal{D}$ -módulos, íntimamente relacionados con las conexiones meromorfas, y se comentarán algunos posibles temas de interés a la hora de continuar el contenido del trabajo.

Estos temas de interés tienen que ver, esencialmente, con la correspondencia de Riemann-Hilbert ya nombrada. Entender la descomposición formal de Levelt-Turrittin es un primer paso necesario antes de continuar con elementos más profundos de la teoría. Asimismo, no hemos de olvidar el elemento central de toda esta teoría: las ecuaciones diferenciales y sus soluciones. El teorema clásico de Levelt-Turrittin, así como la versión algebraica de Malgrange, afrontan un estudio local de las soluciones *formales* de una ecuación. El estudio de las soluciones convergentes es delicado debido a lo que se conoce como fenómeno de Stokes: aunque toda solución convergente de una ecuación diferencial proviene de una solución formal, según en que dirección nos aproximemos a una singularidad (las líneas de Stokes) obtendremos diferentes soluciones convergentes. Este hecho, que es un fenómeno clásico, también se puede estudiar desde el punto de vista algebraico e, inevitablemente, para atacar el caso convergente se ha de estudiar previamente el caso formal. Asimismo el comprender estos conceptos en una variable facilita el pasar a dimensiones superiores y entender la correspondencia de Riemann-Hilbert irregular, en tanto basada en el teorema de Levelt-Turrittin-Malgrange.

## Sobre la bibliografía y la estructura del trabajo

Obviando la introducción, en el trabajo encontramos dos capítulos. En el primero presentamos de manera somera y sin demostración el concepto de  $\mathcal{D}$ -módulo y algunos resultados básicos relevantes. El objetivo de este capítulo es motivar los resultados principales y ofrecer un marco teórico suficiente. En particular, se presentan la definición de  $\mathcal{D}$ -módulo, algunas ideas sobre divisibilidad y la estructura de los ideales en el álgebra  $\mathcal{D}$  y la relación de los  $\mathcal{D}$ -módulos con las ecuaciones diferenciales. También se explican algunas ideas sobre el polígono de Newton, pendientes y ciertas filtraciones sobre  $\mathcal{D}$ , elementos fundamentales a la hora de demostrar el teorema de Malgrange. La referencia principal a la hora de redactar este capítulo han sido las notas de Claude Sabbah [Sab93].

También han sido útiles [Cou95, Fre03].

En el segundo capítulo tras la introducción, esencialmente, demostramos el teorema de Levelt-Turrittin en la versión de Malgrange. Dicha demostración sigue un esquema sencillo basado en demostrar primero el teorema para conexiones meromorfas formales regulares, a continuación probar que toda conexión meromorfa formal se descompone de una única manera como suma de conexiones de pendiente única y por último probar el teorema de Malgrange para conexiones de pendiente única gracias al teorema anterior. También se comentará un poco la aproximación clásica de Levelt y Turrittin al teorema. Asimismo se hace un inciso poco detallado y esencialmente informal acerca de la continuación natural de este trabajo, que ya preconizábamos antes. De nuevo, la referencia principal en este capítulo son las notas de Sabbah [Sab93], así como el artículo original de Malgrange ([Mal79]) y un libro escrito tiempo después en el que, entre otro mucho contenido, se encuentra una versión refinada de la prueba ([Mal91, Capítulo 3]). Para la explicación de la orientación clásica del teorema han sido útiles, además de los artículos originales ([Lev75, Tur55, Huk41]) un artículo reciente que refina y mejora la prueba de Levelt siguiendo una idea para acortar sustancialmente la prueba que, sin poder materializar, propuso el propio Levelt.

Respecto al resto de la bibliografía, conviene destacar el survey de Varadarajan ([Var96] a la hora de redactar la introducción. El resto de referencias han sido usadas de manera ocasional, para ampliación o a la hora de redactar la sección del último capítulo dedicada a ampliar por encima la temática del trabajo.

El presente trabajo ha sido redactado durante el disfrute de una beca de colaboración del Ministerio de Educación y Ciencia bajo la dirección de D. Luis Narváez Macarro.



# Capítulo 2

## Elementos básicos de la teoría de $\mathcal{D}$ -módulos

En el presente capítulo vamos a presentar someramente una forma de asociar a una ecuación diferencial una estructura algebraica. Más concretamente, a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales le asignaremos un módulo sobre una cierta álgebra de operadores diferenciales,  $\mathcal{D}$ . De las propiedades del módulo asociado a una ecuación diferencial se pueden extraer propiedades interesantes a nivel analítico. Más concretamente, mediante la correspondencia entre  $\mathcal{D}$ -módulos holónomos y conexiones meromorfas (que no son sino una forma algebraica de “codificar” información sobre una ecuación diferencial) se pueden establecer teoremas de clasificación y descomposición. Estos últimos escapan del objetivo de este trabajo, pero serán comentados brevemente en el capítulo 3 tras la prueba del resultado análogo para conexiones meromorfas. En esta sección no se darán todas las pruebas, pero se darán referencias: esencialmente, este capítulo es un resumen incompleto, quedándonos con los aspectos que nos resultan más relevantes para el siguiente capítulo, de las cinco primeras secciones de las notas de Sabbah ([Sab93]). El estudio que vamos a realizar es de carácter local. Por tanto, nos interesaremos por anillos de series convergentes o formales en un entorno del origen. Esto no supone una pérdida de generalidad: si trabajásemos en un entorno de otro punto, podríamos realizar una traslación. Recalcamos, asimismo, que pese a usar notación de derivadas parciales, estamos en el caso de una variable.

### 2.1. El álgebra $\mathcal{D}$

Las series (tanto formales como convergentes) pueden interpretarse como operadores sobre otras series del mismo tipo, considerando la acción de una serie sobre otra como la

dada por el producto de series habitual. Este operador es trivialmente lineal, característica que comparte con la derivación habitual. Con esto en mente podemos crear, como veremos en esta sección, ciertas álgebras de operadores. Además, los ideales de estas álgebras tendrán ciertas propiedades interesantes.

### 2.1.1. Definición del álgebra $\mathcal{D}$

Consideraremos en todo momento los anillos  $\mathbb{C}\{x\}$  de series de potencias convergentes y  $\mathbb{C}\llbracket x \rrbracket$  de series formales de potencias. Obviamente, se verifica la relación de inclusión  $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\llbracket x \rrbracket$ . Dotamos a estos conjuntos de estructura de anillo de la forma habitual: la suma es la suma término a término y el producto es el producto de Cauchy dado por

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

siendo  $c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$ . Además, en estos anillos nos encontramos una derivación  $\frac{\partial}{\partial x}$  (a la cual denotaremos, por comodidad,  $\partial_x$ ) que actúa de la manera habitual. Nótese además que la derivación habitual es un operador  $\mathbb{C}$ -lineal y que cada elemento del anillo tiene asociado un operador dado por la multiplicación<sup>1</sup>. Por tanto, podemos utilizar el operador conmutador  $[\cdot, \cdot]$  sobre  $\partial_x$  y un elemento cualquiera  $f$  de nuestro anillo, obteniéndose la relación

$$[\partial_x, f] = \partial_x \circ f - f \circ \partial_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

siendo el elemento de la derecha el operador multiplicar por  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Esta relación no es más que una manera alternativa de escribir la *regla de Leibniz* clásica. Con estos elementos estamos en condiciones de definir las álgebras  $\mathcal{D}$  y  $\hat{\mathcal{D}}$ .

**Definición 2.1.1.** *El álgebra  $\mathcal{D}$  se define como el álgebra generada de la siguiente forma:*

$$\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle / \{[\partial_x, f] - \partial_x f\}.$$

*Asimismo el álgebra  $\hat{\mathcal{D}}$  viene dada como el álgebra generada de la siguiente forma:*

$$\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}\llbracket x \rrbracket \langle \partial_x \rangle / \{[\partial_x, f] - \partial_x f\}.$$

---

<sup>1</sup>Sea  $R$  un anillo,  $f \in R$ . Entonces existe un operador  $\tilde{f} : R \rightarrow R$  de forma que para cada  $g \in R$  es  $\tilde{f}(g) = f \cdot g$ . Es trivial comprobar que se trata de un endomorfismo de anillos.



Conviene detenerse un momento en estas definiciones: en el cociente

$$\mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle / \{[\partial_x, f] - \partial_x f\}$$

el numerador es un anillo *libre* respecto a  $\partial_x$ , que no conmuta con los objetos de  $\mathbb{C}\{x\}$ . Además, el ideal del denominador ha de ser un ideal bilátero (i.e, tanto a izquierda como a derecha), pues si no lo fuese, no se heredaría la estructura de anillo. Es fácil comprobar que dicha propiedad se verifica. En este razonamiento podemos sustituir sin problemas  $\mathbb{C}\{x\}$  por  $\mathbb{C}[[x]]$ , y cuando más adelante nombremos el álgebra de Weyl también será válido. Un hecho interesante sobre estas álgebras es el siguiente:

**Proposición 2.1.2.** *Cada elemento de  $\mathcal{D}$  (resp.  $\hat{\mathcal{D}}$ ) se puede escribir de una única forma como  $\sum_{i=0}^n f_i \partial_x^i$  con  $f_i \in \mathbb{C}\{x\}$  (resp., en  $\mathbb{C}[[x]]$ ) para cada  $i$ .*

*Prueba.* Se puede encontrar una prueba en [Sab93, Chapter 1, Proposition 1.2.3.]

### 2.1.2. Propiedades como anillo de $\mathcal{D}$

Para estudiar adecuadamente los ideales de  $\mathcal{D}$  y  $\hat{\mathcal{D}}$  hemos de definir previamente algunos conceptos:

**Definición 2.1.3.** *Tanto el anillo  $\mathcal{D}$  como el anillo  $\hat{\mathcal{D}}$  se pueden equipar con una filtración, a la cual notaremos  $F\mathcal{D}$  (resp.  $F\hat{\mathcal{D}}$ ) de la siguiente manera: un operador  $P$  está en  $F_k\mathcal{D}$  (resp.  $F_k\hat{\mathcal{D}}$ ) si la mayor potencia de  $\partial_x$  que aparece en cualquier monomio de  $P$  es menor o igual que  $k$ . El grado de  $P$  (denotado  $\deg P$ ) respecto a la filtración  $F\mathcal{D}$  (resp.  $F\hat{\mathcal{D}}$ ) es el único entero  $k$  de forma que  $P$  está en  $F_k\mathcal{D} \setminus F_{k-1}\mathcal{D}$  (resp.  $F_k\hat{\mathcal{D}} \setminus F_{k-1}\hat{\mathcal{D}}$ )*

Nótese que esta definición del grado es independiente de como escribamos  $P$ . También tendremos que  $F_k\mathcal{D}$  (resp.  $F_k\hat{\mathcal{D}}$ ) es 0 cuando  $k$  es negativa<sup>2</sup> y que  $F_0\mathcal{D}$  (resp.  $F_0\hat{\mathcal{D}}$ ) es igual al anillo base  $\mathbb{C}\{x\}$  (resp.  $\mathbb{C}[[x]]$ ). A partir de ahora, salvo que se haga referencia explícita a otra filtración, al hacer referencia al grado de un operador lo haremos respecto a la filtración  $F$  que acabamos de definir. Nótese que en el caso particular de escribir nuestros operadores de acuerdo al lema 2.1.2 tendremos que si  $P = \sum_{i=0}^n a_i \partial_x^i$  (expresión en la cual podemos considerar  $a_n$  no nulo), entonces el grado de  $P$  es  $n$ . Además, tenemos las siguientes propiedades:

**Lema 2.1.4.** *Para todo  $i$  y  $j$  se tiene que  $F_i\mathcal{D} \cdot F_j\mathcal{D} = F_{i+j}\mathcal{D}$  (y análogo para  $\hat{\mathcal{D}}$ ).*

<sup>2</sup>Recordemos que consideramos sólo las potencias positivas de  $\partial_x$  y, caso de aparecer alguna en una fórmula, se la considera 0.

*Prueba.* La prueba no es más que una comprobación directa, como se indica en [Cou95, Chapter 7, Section 2]

**Lema 2.1.5.** Sean  $P, Q \in \mathcal{D}$  operadores de grado  $k$  y  $l$ , respectivamente. Entonces, el grado del conmutador  $[P, Q]$  es menor o igual que  $k + l - 1$ .

*Prueba.* Basta considerar de manera explícita tanto el producto  $PQ$  como  $QP$ . Ya que el grado no depende de la forma de escribir los polinomios podemos considerar expresiones de la forma

$$P = \sum_{i=0}^k a_i \partial_x^i \qquad Q = \sum_{j=0}^l b_j \partial_x^j$$

Haciendo las operaciones pertinentes se llega a

$$PQ = a_k b_l \partial_x^{k+l} + R_1 \qquad QP = a_k b_l \partial_x^{k+l} + R_2$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son operadores de grado, a lo sumo,  $k + l - 1$ . Por tanto, tendremos que

$$[P, Q] = PQ - QP = R_1 - R_2,$$

con lo que se tiene el resultado. □

Como consecuencia, tenemos el siguiente hecho:

**Proposición 2.1.6.** El anillo  $\mathcal{D}$  (resp.  $\hat{\mathcal{D}}$ ) es simple, es decir, sus únicos ideales biláteros son el 0 y el total.

*Prueba.* Una prueba se puede consultar en [Sab93, Chapter 1, Proposition 1.3.3.]. □

A partir de la definición de grado tenemos de manera natural el siguiente resultado, que enunciamos para  $\mathcal{D}$  siendo análogo para  $\hat{\mathcal{D}}$ :

**Proposición 2.1.7.** El anillo graduado

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{k=0}^{\infty} F_k \mathcal{D} / F_{k-1} \mathcal{D}$$

es isomorfo como anillo graduado al anillo de polinomios en una variable  $\xi$  con coeficientes en  $\mathbb{C}\{x\}$ , con la graduación dada por el grado de  $\xi$  y siendo  $\xi$  la clase de  $\partial_x$ .

*Prueba.* La demostración consiste en ver que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \text{gr}^F \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{C}\{x\}[\xi] \\ a\partial_x^k &\mapsto a\xi^k \end{aligned}$$

es, en efecto, un isomorfismo de anillos graduados. Esta es una comprobación trivial que omitimos.  $\square$

Este isomorfismo es útil, entre otras razones, a la hora de probar el siguiente teorema. Como antes, lo enunciamos para  $\mathcal{D}$  siendo análogo para  $\hat{\mathcal{D}}$ :

**Proposición 2.1.8.** *El anillo  $\mathcal{D}$  es noetheriano a izquierda y a derecha.*

*Prueba.* Se puede encontrar una prueba detallada en [Sab93, Chapter 1, Corolary 1.3.5.].  $\square$

Del isomorfismo podemos obtener también una buena definición del  $F$ -símbolo de un operador. Realmente (y como veremos más adelante) esta es una definición totalmente general relativa a filtraciones, pero explicitamos el caso particular:

**Definición 2.1.9.** *Sea  $P$  un operador diferencial y sea  $F$  la filtración anterior. El  $F$ -símbolo de un operador, notado  $\sigma_F(P)$ , es la clase de equivalencia de  $P$  en el conjunto*

$$F_{\deg(P)} \mathcal{D} / F_{\deg(P)-1} \mathcal{D}.$$

*Nota.* Se tiene la definición análoga para  $\hat{\mathcal{D}}$ .

## El álgebra de Weyl

Recordemos que lo largo de la sección hemos considerado las álgebras  $\mathcal{D}$  y  $\hat{\mathcal{D}}$  conforme a la definición 2.1.1. De manera análoga podemos definir el álgebra de Weyl: en lugar de considerar como coeficientes de los operadores las series (ya sea formales o convergentes) consideramos el anillo de los polinomios  $\mathbb{C}[x]$ .

**Definición 2.1.10.** *El álgebra de Weyl, denotada  $A_1(\mathbb{C})$  se define como el álgebra generada de la siguiente forma:*

$$A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle / \{[\partial_x, f] - \partial_x f\}.$$

Esta álgebra verifica todos y cada uno de los teoremas indicados en la sección anterior: el álgebra de Weyl es simple y noetheriana tanto a derecha como a izquierda. En puridad, podríamos definir de manera sencilla el álgebra de Weyl (y el resto de álgebras) en dimensiones superiores de manera totalmente análoga e incluso con otros anillos de coeficientes (como podrían ser los polinomios o series con coeficientes en un cuerpo arbitrario

$k$ ) pero omitiremos estos casos del presente estudio debido a lo extenso y complejo de la generalización, pues no todas las propiedades se preservan. El principal problema reside en el paso a característica positiva. Se pueden encontrar detalles sobre este particular en [Cou95, Chapter 2, Section 3], que a su vez remite, para un tratamiento en profundidad, a [Smi86].

Conviene también destacar en este punto que las definiciones dadas antes no son las únicas válidas. Por ejemplo, en [Cou95] encontramos una definición en términos del álgebra de endomorfismos de un anillo, y en [HTT08] una similar pero más general y usando el lenguaje de los haces, lo cual permite pasar con mayor facilidad al estudio en varias variables. Aunque el libro de Coutinho está dedicado al caso del álgebra de Weyl, buena parte de los razonamientos también valen para  $\mathcal{D}$  y  $\hat{\mathcal{D}}$ , o se pueden adaptar fácilmente.

### 2.1.3. Ideales a la izquierda de $\mathcal{D}$ . División en $\mathcal{D}$ .

Los ideales izquierdos de  $\mathcal{D}$  y  $\hat{\mathcal{D}}$  tienen un interés especial pues están íntimamente relacionados con la descripción algebraica de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, como veremos más adelante. Estos ideales, además, tienen algunas buenas propiedades: a partir de una cierta división razonable en  $\mathcal{D}$  o  $\hat{\mathcal{D}}$  se puede probar que los ideales izquierdos están generados por, a lo sumo, dos elementos. Aunque los resultados que vamos a presentar a continuación los enunciamos para  $\mathcal{D}$  todo el desarrollo es análogo para  $\hat{\mathcal{D}}$ .

**Definición 2.1.11.** *Sea  $P$  un operador de  $\mathcal{D}$ . Considerémoslo expresado como  $P = \sum_{i=0}^n a_i \partial_x^i$  con  $a_n$  no nulo. Entonces, el exponente de  $P$ , notado  $\exp(P)$  se define como el par de enteros no negativos dado por*

$$\exp(P) = (v(a_n), n)$$

donde  $n$  es el grado de  $P$  y  $v(a_n)$  es la valoración de  $a_n$ .

Este exponente verifica la siguiente propiedad:

**Lema 2.1.12.** *El exponente es aditivo bajo el producto, es decir, dados dos operadores  $P$  y  $Q$  de  $\mathcal{D}$  se verifica*

$$\exp(PQ) = \exp(P) + \exp(Q).$$

*Prueba.* Este resultado se obtiene de manera directa calculando explícitamente el producto  $PQ$ : si  $P = a_n \partial_x^n + R_1$  y  $Q = b_m \partial_x^m + R_2$ , con  $\deg R_1 < n$  y  $\deg R_2 < m$  se tiene que  $PQ = a_n b_m \partial_x^{n+m} + R$  con  $\deg R < n + m$ . Claramente,  $\deg PQ = \deg P + \deg Q$ . Asimismo, si  $a_n$  tiene orden de anulación  $k_1$ , tendremos que  $a_n = x^{k_1} f$ , con  $f$  una unidad. Análogamente, si el de  $b_m$  es  $k_2$  tendremos que  $b_m = x^{k_2} g$  con  $g$  una unidad. Por tanto,  $a_n b_m = x^{k_1+k_2} fg$ , con lo que  $v(a_n b_m) = v(a_n) + v(b_m)$ , lo cual prueba el resultado.  $\square$

La demostración anterior motiva el considerar una “división” en  $\mathcal{D}$  de la siguiente manera:

**Proposición 2.1.13.** *Sean  $A$  y  $P$  elementos de  $\mathcal{D}$  de forma que  $\exp(P) = (v, d)$ . Entonces, existe un único par  $(Q, R)$  de elementos de  $\mathcal{D}$  de forma que*

1.  $A = PQ + R$

2.  $R = \sum_{k=0}^{v-1} \sum_{l=d}^{\deg A} u_{k,l} x^k \partial_x^l + S$  con  $\deg S < d$  y  $u_{k,l}$  unidades para cada  $k$  y cada  $l$ .

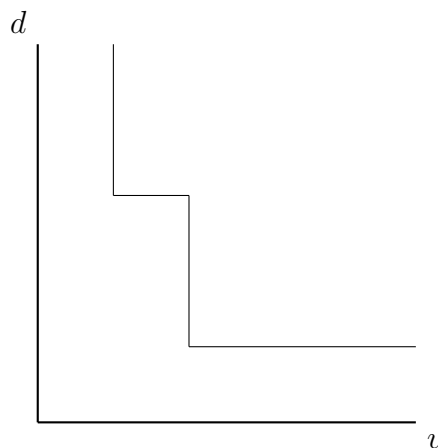
*Prueba.* La prueba es por inducción en el grado de  $A$ . Es una prueba sencilla aunque un tanto laboriosa que omitimos por ser esencialmente técnica. Se pueden encontrar detalles en [BM84]. Conviene destacar que el teorema de Briançon y Maisonobe fue generalizado a varias variables por F. Castro ([Cas84])  $\square$

Esta división por un único operador puede ser extendida a la división por varios operadores. Para ello, establecemos las siguientes definiciones:

**Definición 2.1.14.** *Sea  $I$  un ideal de  $\mathcal{D}$ . Definimos el conjunto de exponentes de  $I$ ,  $\text{Exp}(I)$  como*

$$\text{Exp}(I) = \{\exp(P) \mid P \in I\}.$$

Ya que  $I$  es un ideal, y gracias al lema 2.1.12, se tiene trivialmente que  $\text{Exp}(I) + \mathbb{N}^2 = \text{Exp}(I)$ . Nótese que  $\text{Exp}(I)$  tendrá una forma similar a la que se puede ver en la siguiente figura:



La interpretación de esta gráfica es sencilla. Recordemos que los pares que conforman  $\text{Exp}(I)$  son de la forma  $(v, d)$ , donde  $v$  es una valoración y  $d$  es un grado. Ya que ambas cantidades son naturales, en un ideal  $I$  habrá tanto grados mínimos como valoraciones

mínimas. La gráfica anterior expresa la idea de la “frontera” de  $\text{Exp}(I)$ , en tanto grados y valoraciones mínimas del ideal  $\mathfrak{o}$ , más concretamente, para valoración mínima fijada, todos los grados que toman los elementos con esa valoración (y viceversa). Con estas ideas en mente podemos definir la siguiente colección de conceptos:

**Definición 2.1.15.** *Sea  $I$  un ideal de  $\mathcal{D}$ . Sea  $\text{Exp}(I)$ . Sea*

$$p = \min_{P \in I} \deg P.$$

Sea

$$q = \min \{ \deg P \mid P \in I \text{ y } v(P) = \min_{Q \in I} v(Q) \}.$$

Entonces, se definen las escaleras de  $I$ , denotado  $ES(I)$ , como el conjunto

$$ES(I) = \{(\alpha_p, p), (\alpha_{p+1}, p+1), \dots, (\alpha_q, q)\}$$

donde  $\alpha_j$  es la menor valoración de un elemento de grado  $j$ .

Nótese que a partir de la definición tanto de  $p$  como de  $q$  es inmediato probar que  $q$  es mayor o igual que  $p$ . A partir de la definición de las escaleras del ideal obtenemos la de *base de Gröbner*, o base de división. Esta nomenclatura se justifica por el teorema 2.1.17 que enunciaremos más adelante y que resulta análogo a los teoremas de división en anillos de polinomios.

**Definición 2.1.16.** *Sea  $I$  un ideal de  $\mathcal{D}$ . Entonces, una base de Gröbner de  $I$  es una colección de elementos de  $I$ ,  $\{P_p, P_{p+1}, \dots, P_q\}$ , de forma que para cada  $(\alpha_j, j)$  de  $ES(I)$  se verifica  $\text{exp}(P_j) = (\alpha_j, j)$ .*

Con esta terminología resulta sencillo enunciar y probar el siguiente hecho:

**Proposición 2.1.17.** *Sea  $I$  un ideal propio de  $\mathcal{D}$ , y sea  $P_p, \dots, P_q$  una base de división de  $I$ . Entonces se tiene:*

1. Para cada  $A$  de  $\mathcal{D}$  existen unos únicos  $Q_p, Q_{p+1}, \dots, Q_{q-1} \in \mathbb{C}\{x\}$  y  $Q_q, R \in \mathbb{D}$  de forma que

$$A = Q_p P_p + \dots + Q_q P_q + R$$

verificando  $R$  que

$$R = \sum_{l=p}^{\deg A} \sum_{k=0}^{\alpha_l - 1} u_{k,l} x^k \partial_x^l + S$$

con  $\deg S < p$ .

2. Con esta notación  $A$  pertenece al ideal  $I$  si, y sólo si,  $R = 0$ .

*Prueba.* Como en el caso de la proposición 2.1.17, la demostración de este resultado es esencialmente técnica. Una referencia con los puntos claves de la prueba se encuentra en [Sab93], y una referencia completa en [BM84].  $\square$

Como consecuencia inmediata de este teorema se tiene lo siguiente:

**Corolario 2.1.18.** *Sean  $I' \subset I$  dos ideales de  $\mathcal{D}$  con  $ES(I) = ES(I')$ . Entonces,  $I' = I$ .*

*Prueba.* Debido a que las escaleras coinciden, una base de Gröbner de  $I'$  será también base de Gröbner de  $I$  y por tanto si un elemento pertenece a  $I'$ , pertenecerá también a  $I$  lo cual prueba el resultado.  $\square$

### Generadores de un ideal

De la proposición 2.1.17 se deduce directamente que una base de Gröbner de un ideal  $I$  es un sistema de generadores de  $I$ . Pero podemos conseguir un resultado aún más fuerte: bastan dos elementos concretos de dicha base para generar  $I$ .

**Proposición 2.1.19.** *Sea  $I$  un ideal a izquierda de  $\mathcal{D}$ . Sea  $P_p, \dots, P_q$  una base de Gröbner de  $I$ . Entonces,  $I = \langle P_p, P_q \rangle$ .*

Para probar esta proposición siguiendo el argumento presentado en [Sab93, Chapter 1, Section 2.3] algunos lemas que, además, son interesantes por si mismos.

**Lema 2.1.20.** *Sea  $I$  un ideal izquierdo con base de Gröbner  $P_p, \dots, P_q$ . Para cada  $i$  entre  $p$  y  $q$  el  $\mathcal{D}$ -módulo izquierdo  $I / \langle P_i \rangle$  es un módulo de torsión<sup>3</sup>*

**Corolario 2.1.21.** *Sea  $I$  un ideal izquierdo con base de Gröbner  $P_p, \dots, P_q$ . El  $\mathcal{D}$ -módulo izquierdo  $I / \langle P_p, P_q \rangle$  es de torsión.*

**Lema 2.1.22.** *Sea  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}$ -módulo izquierdo de tipo finito que también sea de tipo finito sobre  $\mathbb{C}\{x\}$ . Entonces,  $\mathcal{M}$  es libre como  $\mathbb{C}\{x\}$ -módulo.*

*Prueba* (De todos los resultados anteriores). Se puede encontrar un desarrollo detallado en [Sab93, Chapter 1, Section 2.3].  $\square$

---

<sup>3</sup>Sea  $R$  un anillo y  $M$  un  $R$ -módulo. Un elemento  $m$  de  $M$  se dice de torsión si existe un  $r$  en  $R$  de forma que  $rm = 0$ . Un módulo se dice de torsión si todos sus elementos son de torsión. A su vez, se dice libre de torsión si ninguno de sus elementos no nulos es de torsión.

## 2.2. $\mathcal{D}$ -módulos holónomos y conexiones meromorfas

### 2.2.1. Sistemas diferenciales, filtraciones y holonomía

*Nota.* Todo lo dicho aquí es válido también para  $\hat{\mathcal{D}}$ .

Sea  $P$  un operador diferencial de  $\mathcal{D}$ . Asociada tiene la ecuación diferencial lineal

$$Pu = 0.$$

Si  $u$  es solución de  $P$  ( $u$  puede ser una función analítica, una distribución o cualquier otro objeto razonable que queramos considerar) también lo será de  $QP$  para cualquier  $Q$  en  $\mathcal{D}$ . Es decir, se tiene que dado un espacio de objetos sobre los que actúa  $\mathcal{D}$  (es decir, un  $\mathcal{D}$ -módulo a la izquierda)  $\mathcal{F}$ , un operador  $P$  y una solución  $u$  de  $P$  se define un morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P & \rightarrow & \mathcal{F} \\ Q & \mapsto & Q(u) \end{array}.$$

Este morfismo es  $\mathcal{D}$ -lineal a izquierda. Es decir, a una ecuación diferencial lineal le asociamos el  $\mathcal{D}$ -módulo  $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ . Análogamente, a un sistema de ecuaciones diferenciales  $\{P_1, \dots, P_n\}$  le asociaremos el  $\mathcal{D}$ -módulo  $\mathcal{D}/\langle P_1, \dots, P_n \rangle$ . La justificación de esta asignación la podemos encontrar en [Cou95, Chapter 6, Theorem 1.2], que reza lo siguiente:

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $\{P_1, \dots, P_n\}$  un sistema de ecuaciones diferenciales actuando sobre un  $\mathcal{D}$ -módulo a la izquierda  $\mathcal{F}$ . Entonces, el espacio de soluciones del sistema es isomorfo (como espacio vectorial) a*

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P, \mathcal{F}).$$

*Prueba.* Viene detallada en [Cou95, Chapter 6, Theorem 1.2]. □

Surge pues la siguiente definición algebraica de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

**Definición 2.2.2.** *Un sistema diferencial lineal es un  $\mathcal{D}$ -módulo a izquierda de tipo finito.*

Recordando la filtración  $F$  que definimos anteriormente, y que filtraba  $\mathcal{D}$  por grado, tendremos que si  $\mathcal{M}$  es un sistema diferencial, es decir,  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}/\langle P_1, \dots, P_r \rangle$ . Entonces ([Sab93, Chapter 1, Lemma 3.2.7]) se tiene el  $\text{gr}^F \mathcal{D}$ -módulo graduado

$$\text{gr}^F \mathcal{M} = \text{gr}^F \mathcal{D} / \langle \sigma_F(P_1), \dots, \sigma_F(P_r) \rangle.$$

Se tiene también el concepto de buena filtración:



**Definición 2.2.3.** Sea  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}$ -módulo. Sea  $F\mathcal{M}$  una filtración del módulo con índices en  $\mathbb{Z}$ . Diremos que el par  $(\mathcal{M}, F\mathcal{M})$  es un módulo filtrado sobre  $(\mathcal{D}, F\mathcal{D})$  si verifica

$$\mathcal{M} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F_k \mathcal{M}$$

y existe un  $l$  de forma que para cualquier  $k$  menor o igual que el  $l$  es  $F_k \mathcal{M} = 0$ . Además, exigimos que se verifique que  $F_k \mathcal{M} \cdot F_l \mathcal{M} \subset F_{k+l} \mathcal{M}$ . Si además esta última contención es una igualdad y cada  $F_k \mathcal{M}$  es un  $\mathbb{C}\{x\}$ -módulo de tipo finito diremos que la filtración es una buena filtración.

En [Sab93, Chapter 1, Section 3.2] podemos encontrar un teorema de caracterización de buenas filtraciones, así como algunos resultados complementarios interesantes. A efectos de nuestro desarrollo, lo relevante es contar con el concepto y poder afirmar que la filtración  $F$  antes presentada es una buena filtración. Una prueba de este hecho la encontramos en la referencia anterior de Sabbah.

A partir del concepto de buena filtración podemos obtener el de *variedad característica*

**Definición 2.2.4.** Sea  $\mathcal{M}$  un sistema diferencial lineal y  $F\mathcal{M}$  una buena filtración de  $\mathcal{M}$ . El soporte de  $\mathcal{M}$  es el conjunto de ideales primos de  $\mathbb{C}\{x\}[\xi]$  asociados al anulador de  $\mathcal{M}$ , es decir, los  $\mathfrak{p}_i$  de forma que

$$\sqrt{\text{Ann } \mathcal{M}} = \bigcap \mathfrak{p}_i.$$

La variedad característica de  $\mathcal{M}$ , denotada  $\text{Car } \mathcal{M}$ , es el soporte de  $\text{gr}^F(\mathcal{M})$ .

La justificación de esta definición reside en el teorema 2.1.7. Además, se puede probar ([Sab93]) que la variedad característica no depende de la filtración elegida. Definida la variedad característica se puede definir asimismo el concepto de  $\mathcal{D}$ -módulo holónomo:

**Definición 2.2.5.** Un sistema diferencial lineal se dice holónomo si  $\mathcal{M} = 0$  o  $\text{Car } \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \{\xi = 0\}$ .

En la práctica, la gran mayoría de sistemas en una variable son holónomos. Intuitivamente, los sistemas holónomos serán aquellos cuyo espacio de soluciones sea un espacio vectorial de dimensión finita. No entraremos en mayores detalles acerca de ellos (remitimos a [Sab93], [Cou95, Chapter 10] y a [HTT08]), pues lo que nos interesa de los  $\mathcal{D}$ -módulos holónomos en el presente trabajo es su relación con las conexiones meromorfas. La conexión será, concretamente, que toda conexión meromorfa es isomorfa a un  $\mathcal{D}$ -módulo holónomo localizado. Los principales resultados para este trabajo son los que siguen:

**Proposición 2.2.6.** *Sea  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}$ -módulo holónimo. Entonces, el  $\mathbb{C}\{x\}$ -módulo localizado  $\mathcal{M}[x^{-1}]$  no sólo admite estructura de  $\mathcal{D}$ -módulo, sino que será de tipo finito sobre  $\mathcal{D}$  y es holónimo.*

*Prueba.* [Sab93, Chapter 1, Proposition 4.2.1 y Theorem 4.2.3]. □

**Lema 2.2.7.** *Sea  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}$ -módulo holónimo. Entonces, su localizado es isomorfo a  $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$  para algún operador  $P$  no nulo.*

### 2.2.2. Conexiones meromorfas y el polígono de Newton

Por  $K$  denotaremos al cuerpo de las series de Laurent convergentes, es decir,  $K = \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ . Análogamente, tendremos que  $\hat{K}$  es el cuerpo de las series de Laurent formales. Todo lo que enunciemos a continuación, aunque escrito en el caso de  $K$ , es válido en el caso de  $\hat{K}$ .

**Definición 2.2.8.** *Sea  $\partial$  una derivación de  $\mathbb{C}\{x\}$  (resp.  $\mathbb{C}[[x]]$ ). Una conexión meromorfa (formal, en el caso de  $\hat{K}$ ) es un par  $(\mathcal{M}_K, \nabla_\partial)$  donde  $\mathcal{M}_K$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita (resp.  $\hat{K}$ ) y  $\nabla_\partial$  es una aplicación  $\mathbb{C}$ -lineal que verifica la regla de Leibniz, es decir, para cada  $f$  de  $K$  (resp.  $\hat{K}$ ) y cada  $m$  de  $\mathcal{M}_K$  es*

$$\nabla_\partial(f \cdot m) = (\partial f) \cdot m + f \cdot (\nabla_\partial m).$$

A  $\nabla_\partial$  se le llama conexión (u operador de conexión)<sup>4</sup>.

En general, si el contexto es claro, haremos referencia simplemente a la conexión  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ , omitiendo el operador. Ya que  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  es un  $\hat{K}$ -espacio vectorial, podemos fijar una base y expresar la acción de  $\nabla_\partial$  respecto esa base como una matriz. Si  $A$  es dicha matriz, esta conexión meromorfa corresponde al sistema de ecuaciones diferenciales lineales dado por  $\partial - A$ . Vamos a detenernos en esta idea: supongamos que la dimensión de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  es  $d$ , y que tenemos que  $A$  es de la forma  $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq d-1}$ , con cada  $a_{i,j}$  en  $\hat{K}$ . Con esta notación, el sistema diferencial lineal asociado a la conexión meromorfa es

$$\{\partial z_i = \sum_{j=0}^{d-1} a_{i,j} z_j\}_{0 \leq i \leq d-1}.$$

Si ponemos  $z_0 = y$ ,  $z_1 = \partial z_0$ ,  $z_2 = \partial z_1$ ,  $\dots$  podemos obtener una ecuación diferencial lineal de orden  $d$ . Esta técnica es habitual y clásica a la hora de estudiar ecuaciones diferenciales lineales, pues del sistema asociado se extraen resultados interesantes de forma sencilla.

<sup>4</sup>En algunas referencias se puede encontrar la denominación operador diferencial, pero prescindiremos de ella por inducir a confusión y ser demasiado genérica.

Asimismo, podemos considerar una matriz de cambio de base  $B \in \text{Gl}_{\dim \mathcal{M}_K}(K)$  (resp.  $\hat{K}$ ). En ese caso la matriz de  $\nabla_\partial$  respecto a la nueva base será

$$BAB^{-1} + (\partial B)B^{-1},$$

donde  $\partial B$  denota la acción de  $\partial$  componente a componente. Este tipo de cambio de base se conoce como *transformación gauge*. Nótese que en todo momento lo relevante aquí es el operador de conexión  $\nabla_\partial$ : como espacio vectorial, al estar tratando el caso de dimensión finita, cada conexión  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  será isomorfa a  $\hat{K}^{\dim \mathcal{M}_{\hat{K}}}$ , por lo que las diferentes conexiones vienen determinadas por la acción de  $\nabla_\partial$ . Las conexiones meromorfas forman una categoría abeliana, definiendo los morfismos de la siguiente manera:

**Definición 2.2.9.** Sean  $(\mathcal{M}, \nabla_1)$  y  $(\mathcal{M}', \nabla_2)$  dos conexiones meromorfas. Un morfismo de conexiones meromorfas es un morfismo de  $K$ -espacios vectoriales  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  de forma que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}' \\ \nabla_1 \downarrow & & \downarrow \nabla_2 \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}' \end{array}$$

Si un morfismo de conexiones meromorfas es además isomorfismo de espacios vectoriales, entonces se dice un isomorfismo de conexiones meromorfas.

**Lema 2.2.10.** Las conexiones meromorfas con los morfismos de conexiones meromorfas forman una categoría abeliana.

*Prueba.* Tenemos objeto nulo, pues podemos considerar el espacio vectorial trivial. El conjunto de homomorfismos tiene estructura de grupo abeliano (por ser los espacios vectoriales una categoría abeliana) y las sumas directas tienen una estructura natural de conexión meromorfa, existiendo todas por ser los espacios vectoriales categoría abeliana. Por tanto, la categoría es aditiva. La exactitud se infiere también de la exactitud de la categoría de espacios vectoriales.  $\square$

El hecho de que formen una categoría abeliana será fundamental a la hora de probar los resultados principales de este texto, pues usaremos el lema de escisión. Establecemos ahora la relación entre conexiones meromorfas y  $\mathcal{D}$ -módulos holónomos, así como el conocido como *lema del vector cíclico*:

**Teorema 2.2.11.** Una conexión meromorfa determina un  $\mathcal{D}$ -módulo holónimo localizado y viceversa.

*Prueba.* Una demostración completa aparece en [Sab93, Chapter 1, Theorem 4.3.2].

**Lema 2.2.12** (Lema del vector cíclico). *Sea  $\mathcal{M}_K$  una conexión meromorfa. Entonces, existe un  $m \in \mathcal{M}_{\hat{K}}$  y un entero  $d$  (la dimensión de la conexión) de forma que  $m, \nabla(m), \nabla^2(m), \dots, \nabla^{d-1}(m)$  es una  $K$ -base de  $\mathcal{M}_K$ .*

*Prueba.* Existen múltiples demostraciones de este hecho clásico. Una debida a Katz se puede encontrar en [Sab93, Chapter 1, Proposition 4.3.3].

### Polígono de Newton

El polígono de Newton es una útil herramienta que nos permitirá demostrar de forma sencilla los resultados principales de este texto. Existen múltiples definiciones del polígono, por lo que presentamos algunas de ellas. Por  $\mathcal{D}_K$  (resp.  $\hat{K}$ ) denotaremos a los polinomios diferenciales con coeficientes en  $K$  (resp.  $\hat{K}$ ). Además de definir el polígono de Newton, precisaremos algunas nociones relativas a las pendientes de dicho polígono.. Todas ellas son extensibles al caso de  $\mathcal{D}$  y  $\hat{\mathcal{D}}$  salvo que se indique lo contrario.

**Pendientes y la filtración  ${}^L V$ .** Sea  $L(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$  una forma lineal de dos variables donde  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$  son coeficientes naturales y coprimos. El  $L$ -orden de un monomio  $P = x^a \partial_x^b$  (con  $a$  entero y  $b$  natural)<sup>5</sup> es

$$\text{ord}_L(P) = L(b, b - a).$$

Si  $P = \sum_{i=0}^d a_i \partial_x^i$ , entonces el  $L$ -orden de  $P$  es

$$\text{ord}_L(P) = \max_{0 \leq i \leq d} L(i, i - v(a_i)),$$

donde  $v(a_i)$  es la valoración de  $a_i$  en el cero, es decir, la menor potencia de  $x$  presente en  $a_i$ . Si esa potencia es negativa, será el orden del polo en 0 que tiene  $a_i$ . Si es positiva, es el orden de anulación de  $a_i$  en el polo. A partir de esto podemos definir la filtración de  $\mathcal{D}_K$  dada por

$${}^L V_\lambda \mathcal{D}_K = \{P \in \mathcal{D}_K \mid \text{ord}_L(P) \leq \lambda\}.$$

Detalles sobre esta filtración vienen descritos en [Sab93, Chapter 1, Section 5]. La relevante para nosotros será que el anillo graduado definido como

$$\text{gr}^{{}^L V} \mathcal{D}_K = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} \text{gr}_\lambda^{{}^L V} \mathcal{D}_K,$$

donde

---

<sup>5</sup>Para resultados más detallados acerca del particular, se puede consultar [CN12].

$$\mathrm{gr}_\lambda^{LV} \mathcal{D}_K = {}^L V_\lambda \mathcal{D}_K / {}^L V_{\lambda-1} \mathcal{D}_K$$

es conmutativo siempre que  $\lambda_0$  sea no nulo. El  $L$ -símbolo de un operador, en paralelismo con la otra definición realizada antes para el  $F$ -símbolo, será la clase equivalencia de  $P$  en  $\mathrm{gr}_{\mathrm{ord}_L(P)}^{LV} \mathcal{D}_K$ , denotada por  $\sigma_L(P)$ . De manera análoga al caso de  $F$  (ver [Sab93, Chapter 1, Epígrafe 5.1.2]) podemos definir la noción de buena filtración y de variedad característica ([Sab93, Chapter 1, Proposition 5.1.4]):

**Definición 2.2.13.** *Sea  $L$  una forma lineal con  $\lambda_0$  distinto de 0. La variedad característica (relativa a la forma lineal  $L$ ) de una conexión meromorfa  $\mathcal{M}_K$ ,  $\mathrm{Car}^L(\mathcal{M}_K)$ , será el soporte de  $\mathrm{gr}^{LU} \mathcal{M}_K$  dado por*

$$\sqrt{\mathrm{Ann} \mathrm{gr}^{LU} \mathcal{M}_K},$$

con  ${}^L U$  una buena filtración.

En la práctica, se puede probar que si  $\mathcal{M}_K = \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$  (hecho que podemos asegurar por la correspondencia entre  $\mathcal{D}$ -módulos holónomos y conexiones meromorfas) entonces el anulador está generado por  $\sigma_L(P)$ . Este hecho es consecuencia directa de la expresión de  $\mathcal{M}_K$  como cociente y de como está construida la relación entre conexiones meromorfas y  $\mathcal{D}$ -módulos. A partir de aquí, podemos definir el concepto de *pendiente*:

**Definición 2.2.14.** *Una forma lineal  $L$  con  $\lambda_0$  no nulo se dice una pendiente de la conexión meromorfa  $\mathcal{M}_K$  si la variedad característica relativa a  $L$  de la conexión no está definida por un monomio.*

La forma lineal  $L_1(s_0, s_1) = s_1$  se dice una pendiente si para toda forma lineal  $L$  con  $\lambda_0$  no nulo es  $\mathrm{Car}^L(\mathcal{M}_K) \neq \emptyset$ .

En la práctica, esto quiere decir que una forma lineal  $L$  es una pendiente si, siendo  $\mathcal{M}_K = \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$ , no es  $\sigma_L(P)$  un monomio  $x^a \xi^b$ . Asimismo,  $L_1$  será una pendiente si  $\sigma_L(P) \neq x^a$  para todo  $a$  entero. Asimismo, a cada pendiente  $L(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$  asociémosle el número  $\frac{-\lambda_0}{\lambda_1}$ . A este número lo llamaremos también pendiente (numérica).

**El polígono de Newton.** Supongamos  $P$  un operador de  $\mathcal{D}_K$  expresado como  $P = \sum_{i=0}^d a_i \partial_x^i$ . Entonces, el polígono de Newton del polígono  $P$  es la envolvente convexa del conjunto

$$\bigcup_{0 \leq i \leq d} \{(i, i - v(a_i)) - \mathbb{N}^2\}.$$

Esta definición, como vemos, depende de como expresemos el polinomio. Si trabajamos en  $\mathcal{D}_K$  podemos considerar una expresión de la forma  $P = \sum_{i=0}^d a_i (x \partial_x)^i$  con cada  $a_i$  una

serie formal de  $\mathbb{C}[[x]]$  y siendo al menos uno de ellos una unidad en  $\mathbb{C}[[x]]$ . En ese caso, el polígono de Newton vendrá dado por la envolvente convexa de la unión de los conjuntos  $(i, -v(a_i)) - \mathbb{N}^2$ . Que esta es una forma válida de escribir el polinomio es obvio: basta multiplicar por la potencia adecuada de  $x$  para cuadrar los términos. Nótese que con este tipo de expresión siempre está el origen en el polígono de Newton.

Como es totalmente natural, el polígono de Newton de una conexión meromorfa es el polígono de Newton del operador subyacente. De hecho, en puridad, la relación va al revés: el polígono de Newton, aunque calculado fácilmente a partir de un operador, depende de la conexión meromorfa. De hecho, se puede definir intrínsecamente utilizando nada más una conexión meromorfa  $\mathcal{M}_K$ , buenas filtraciones y las definiciones de pendientes dadas antes. En efecto, sea  $\mathcal{M}_K$  una conexión meromorfa y sea  $\{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$  el conjunto de sus pendientes ordenadas de forma que las pendientes numéricas asociadas decrezcan. Entonces, construimos el polígono de Newton de manera inductiva en el número de pendientes: sea el caso de una única pendiente  $\{L\}$  de forma que  $\text{Car}^L(\mathcal{M}_K) = x^a \xi^d + R$ , con  $R$  un polinomio no nulo de  $K[\xi]$  de grado estrictamente menor que  $d$ . Entonces, el polígono de Newton es (obviando lados verticales) el segmento que une el origen con el punto  $(d, -a)$ . Para dos pendientes, colocamos la primera pendiente,  $L^{(1)}$ , de la manera que acabamos de describir. La segunda pendiente será el segmento que une el punto final del anterior segmento con el punto  $(d', -a')$ , donde  $\text{Car}^{L^{(2)}}(\mathcal{M}_K) = x^{a'} \xi^{d'} + R'$ . Continuamos procediendo de manera inductiva hasta agotar las pendientes.

A continuación estudiamos un par de ejemplos para mostrar, por un lado, cómo se calcula el  $L$ -símbolo de un polígono y, por otro lado, obtendremos el polígono de Newton de un operador de forma explícita utilizando la expresión del operador.

*Ejemplo 2.2.1.* Sea  $P = x^4 \partial_x^2 + x \partial_x + 1$ . Sea  $L(s_0, s_1) = s_0 \lambda_0 + s_1 \lambda_1$  una forma lineal arbitraria con los  $\lambda_i$  coprimos y  $\lambda_0$  no nulo. Se tiene que

$$\text{ord}_L(x^5 \partial_x) = 2\lambda_0 - 2\lambda_1 \qquad \text{ord}_L(x \partial_x) = \lambda_0 - \lambda_1 \qquad \text{ord}_L(1) = 0.$$

El  $L$ -orden de  $P$  será el máximo entre los tres órdenes indicados, por lo que hay que estudiar tres casos (en puridad, familias de casos):

1. **Caso  $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ :** en este caso, el  $L$ -orden de  $P$  es 0, y su  $L$ -símbolo es

$$\sigma_L(P) = x^4 \xi^2 + x^2 \xi + 1.$$

Por tanto,  $L^{(1)}(s_0, s_1) = s_0 + s_1$  es una pendiente de  $P$ .

2. **Caso**  $\lambda_0 > \lambda_1$ : en este caso, el  $L$ -orden de  $P$  es  $2(\lambda_0 - \lambda_1)$ , y su  $L$ -símbolo es

$$\sigma_L(P) = x^4 \xi^2.$$

Por tanto, las formas lineales con esta situación no son pendientes de  $P$ .

3. **Caso**  $\lambda_0 < \lambda_1$ : en este caso, el  $L$ -orden de  $P$  es 0 y su  $L$ -símbolo es

$$\sigma_L(P) = 1.$$

Esto nos indica que  $P$  no tiene una pendiente horizontal, conforme a los criterios antes citados.

Por tanto, la única pendiente del polígono de Newton es la de inclinación  $-1$ ,  $L(s_0, s_1) = s_0 + s_1$ . Ya que el polígono de Newton depende únicamente de la conexión meromorfa subyacente, podemos suponer, conforme se ha razonado antes, que el origen es un punto del polígono. Así, el polígono de Newton de  $P$  es

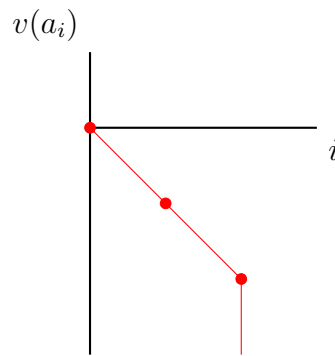


Figura 2.1: Polígono de Newton de  $x^4 \partial_x^2 + x^2 \partial_x + 1$ .

*Ejemplo 2.2.2.* Supongamos ahora el operador  $P = x^5 \partial_x^2 + x^5 \partial_x + 1$ . En lugar de estudiar sus  $L$ -símbolos, vamos a estudiar su polígono de Newton directamente a partir de la expresión de  $P$ . Tenemos los pares  $(i, i - v(a_i))$  dados por:  $(0, 0)$ ,  $(1, -4)$ ,  $(2, -3)$ . Consideramos los conjuntos  $(i, i - v(a_i)) - \mathbb{N}^2$  (indicamos sólo sus fronteras):

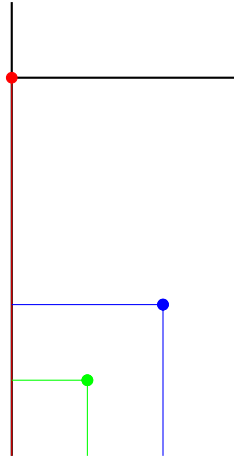


Figura 2.2: Fronteras de los conjuntos  $(i, i - v(a_i)) - \mathbb{N}^2$  para  $P$ .

La envolvente convexa de la unión de esos conjuntos es

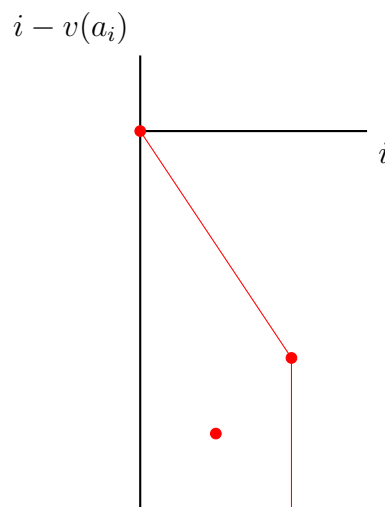


Figura 2.3: Polígono de Newton de  $x^5 \partial_x^2 + x^5 \partial_x + 1$ .

Marcamos el punto asociado al monomio  $x^5 \partial_x$  como referencia.

*Ejemplo 2.2.3.* En este último ejemplo veremos como, salvo traslación, el polígono de Newton depende de la conexión meromorfa formal y no del operador. Por ejemplo, sea  $P = \frac{1}{x^2} \partial_x^2 + x \partial_x + \frac{1}{x}$ . Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  la conexión meromorfa formal asociada a  $P$ . Obviamente, es la misma conexión meromorfa formal que la asociada a  $Q = \partial_x^2 + x^3 \partial_x + x$ , es decir,  $Q = x^2 P$ . Ya que  $x^2$  es una unidad en  $\hat{K}$  esto no afecta a la conexión meromorfa. El polígono de Newton de  $P$ , obtenido por cualquier método de los antes comentados, es



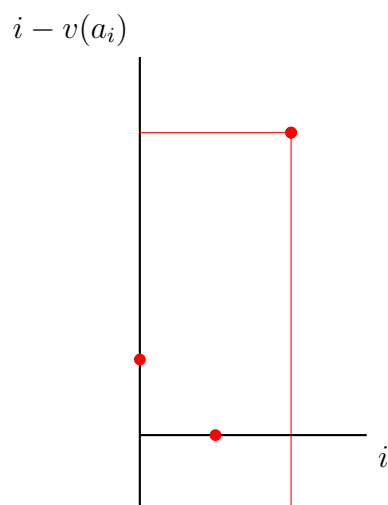


Figura 2.4: Polígono de Newton de  $P = \frac{1}{x^2}\partial_x^2 + x\partial_x + \frac{1}{x}$ .

Es decir, el polígono es uno con una única pendiente horizontal. Si estudiamos el polígono de Newton de  $Q$  obtenemos

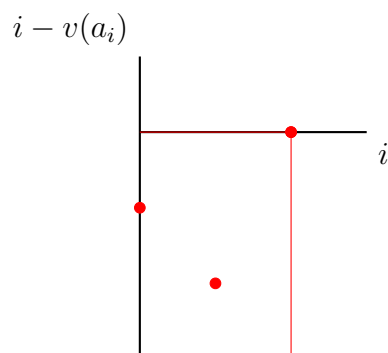


Figura 2.5: Polígono de Newton de  $Q = \partial_x^2 + x^3\partial_x + x$ .

Es decir, el polígono de Newton de  $Q$  es el de  $P$  trasladado dos unidades hacia abajo en el eje vertical. Nótese que  $Q = x^2P$ . Si estudiásemos el polígono de  $Q_i = x^iP$ , con  $i$  un número entero, el polígono de Newton de  $Q_i$  sería el de  $P$  trasladado  $i$  unidades en el eje vertical.



# Capítulo 3

## Clasificación de las conexiones meromorfas formales en una variable

En este capítulo afrontaremos la clasificación de las conexiones meromorfas formales en una variable desde una perspectiva menos clásica que la seguida por Hukuhara-Levelt-Turrittin. Dada una conexión meromorfa formal  $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \nabla)$  en lugar de descomponer el operador  $\nabla$  descompondremos  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ . La descomposición de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  permitirá además clasificar, salvo isomorfismo, todas las conexiones meromorfas formales. Esta aproximación se debe, originalmente, a Malgrange [Mal79]. Veremos, además, que esta descomposición es equivalente a la clásica de Hukuhara-Levelt-Turrittin, y nos asomaremos a teorías relacionadas directamente con la de las conexiones meromorfas. A lo largo de todo el capítulo denotaremos por  $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \nabla)$  a una conexión meromorfa formal. En ocasiones haremos referencia sólo a  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ , debiendo sobreentenderse la presencia de  $\nabla$ . De hecho, aunque el desarrollo de las demostraciones se puede hacer para una conexión  $\nabla$  arbitraria, vamos a particularizarlo al caso en el que la derivación subyacente es la dada por  $x\partial_x$ . Siguiendo esta idea, notaremos a la conexión, en lugar de  $\nabla$ , como  $x\partial_x$ . Se sobreentenderá en cada caso si estamos hablando de la conexión o de la derivación subyacente. Asimismo, de manera general y salvo que indiquemos lo contrario,  $d$  será la dimensión de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  como  $\hat{K}$ -espacio vectorial.

### 3.1. Conexiones meromorfas formales regulares

Antes de estudiar las conexiones meromorfas formales de manera totalmente general conviene que estudiemos el caso concreto de las conexiones meromorfas formales regulares. Veamos, en primer lugar, que entendemos por una conexión meromorfa formal regular:

**Definición 3.1.1.** Una conexión meromorfa formal  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  se dirá regular si verifica que su única pendiente es la horizontal,  $L_1$ .

La idea subyacente es que dado un operador  $P$  de forma que  $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$  el monomio de mayor orden de  $P$  “se comporta bien” en el origen, i.e., el monomio de mayor orden tiene polos en el 0 de orden igual al del término independiente, y todos los otros monomios tienen orden del polo mayor que el del término independiente. Nótese que esto equivale a la condición de regularidad de Fuchs que nombrábamos en la introducción (ver [Sab10, Théorème 1.4.9] para más detalles). Un operador diferencial  $P$  se dirá *regular* si la conexión meromorfa formal asociada es regular. Las conexiones meromorfas formales regulares verifican algunas propiedades interesantes. Se puede probar lo siguiente:

**Lema 3.1.2.** Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  una conexión meromorfa regular. Existe una base de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  de forma que la matriz de  $x\partial_x$  tiene coeficientes en  $\mathbb{C}[[x]]$ .

*Prueba.* Probemos en primer lugar el siguiente lema:

*Lema 3.1.3.* Sea

$$\partial_x : \mathcal{M}_{\hat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\hat{K}}$$

una conexión meromorfa. Sea el operador diferencial

$$x\partial_x : \mathcal{M}_{\hat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\hat{K}}.$$

Entonces, este operador verifica

$$(x\partial_x)^n = \sum_{i=1}^n S(n, i) x^i \partial_x^i,$$

donde  $S(n, i)$  denota al número de Stirling de segunda especie.<sup>1</sup>

*Prueba.* La prueba es sencilla por inducción. El caso  $n = 1$  es una igualdad trivial. Supongamos cierta la propiedad para  $n$  y lo probamos para  $n + 1$ . Tendremos

$$\begin{aligned} (x\partial_x)^{n+1} &= (x\partial_x) \left( \sum_{i=1}^n S(n, i) x^i \partial_x^i \right) = x \sum_{j=1}^n S(n, j) (j x^{j-1} \partial_x^j + x^j \partial_x^{j+1}) \\ &= \sum_{j=1}^n j S(n, j) x^j \partial_x^j + \sum_{j=1}^n S(n, j) x^{j+1} \partial_x^{j+1} = \sum_{j=1}^n j S(n, j) x^j \partial_x^j + \sum_{j=2}^{n+1} S(n+1, j-1) x^j \partial_x^j \\ &= S(n, 1) x \partial_x + S(n, n) x^{n+1} \partial_x^{n+1} + \sum_{j=2}^n (j S(n, j) + S(n, j-1)) x^j \partial_x^j. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>El número de Stirling de segunda clase  $S(n, k)$  indica el número de maneras de dividir un conjunto de  $n$  elementos en  $k$  subconjuntos. Claramente,  $S(n, 1) = S(n, n) = 1$  para cualquier  $n$ .

Ya que  $S(n, 1) = S(n, n) = 1$  para cualquier  $n$ , en la identidad anterior podemos sustituir  $S(n, 1)$  y  $S(n, n)$  por  $S(n + 1, 1)$  y  $S(n + 1, n + 1)$  respectivamente. Asimismo, se puede probar (ver [Big89]) que los números de Stirling de segunda especie verifican la relación de recurrencia

$$S(n + 1, j) = jS(n, j) + S(n, j - 1).$$

Utilizando esto y sustituyendo en la anterior identidad quedaría probado el resultado.  $\square$

Sea ahora  $m$  un vector cíclico de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ , es decir,  $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$  es una base de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ . Vamos a probar que  $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m$  es asimismo una base de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ .

En efecto, supongamos constantes  $a_0, \dots, a_{d-1}$  de forma que

$$a_0 m + a_1 x\partial_x m + \dots + a_{d-1} (x\partial_x)^{d-1} m = 0.$$

Si desarrollamos explícitamente cada término de acuerdo al lema 3.1.3 tendremos la igualdad

$$\sum_{i=0}^{d-1} b_i \partial_x^i m,$$

donde

$$b_i = x^i \sum_{j=i}^{d-1} S(j, i) a_j,$$

siendo  $S(j, i)$  el número de Stirling de segunda especie. Ya que sabemos que los  $\partial_x^i m$  (con  $i$  variando entre 0 y  $d - 1$ ) forman una base de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  tendremos que para cada  $i$  es  $b_i = 0$ . Si comenzamos razonando por el caso  $i = d - 1$ , llegamos a que

$$b_{d-1} = x^{d-1} S(d - 1, d - 1) a_{d-1}$$

de donde deducimos que  $a_{d-1} = 0$ . Estudiando los valores de  $i$  de forma ordenada y descendente llegamos a que  $a_i = 0$  para cada  $i$ , con lo que

$$\{m, x\partial_x m, (x\partial_x)^2 m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m\}$$

es una base de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ . Veamos ahora que, respecto de esta base, la derivación  $x\partial_x$  tiene matriz con entradas en  $\mathbb{C}[[x]]$ .

Es trivial ver, de entrada, que la matriz será de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_{d-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{d-1} \end{pmatrix}$$

con  $c_i \in \hat{K}$  para cada  $i$  entre 0 y  $d-1$ . Concretamente, los  $c_i$  son coeficientes de forma que

$$(x\partial_x)^d m = \sum_{i=0}^{d-1} a_i (x\partial_x)^i m.$$

Ya que  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  es regular, podemos suponer que estos  $c_i$  están en  $\mathbb{C}[[x]]$ . En efecto: ya que  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  es regular, tendremos que  $\mathcal{M}_{\hat{K}} \simeq \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$  con  $P$  regular. La regularidad de  $P$ , como vimos en el 3.1.1 equivale a que si escribimos  $P$  de la forma  $P = \sum_{i=0}^d c_i (x\partial_x)^i$  con cada  $c_i$  en  $\mathbb{C}[[x]]$  tendremos que  $c_d$  es una unidad. Dicha escritura, como se razonó anteriormente, siempre es posible (basta multiplicar por la potencia adecuada de  $x$ ). Debido a la relación entre conexiones meromorfas y  $\mathcal{D}$ -módulos holónomos localizados tendremos que para el vector cíclico  $m$  es

$$Pm = 0.$$

En particular, se deduce que

$$c_d (x\partial_x)^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-c_i) (x\partial_x)^i m.$$

Ya que  $c_d$  es una unidad en  $\mathbb{C}[[x]]$  podemos escribir

$$(x\partial_x)^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (\tilde{c}_i) (x\partial_x)^i m,$$

donde  $\tilde{c}_i = (c_d)^{-1}(-c_i)$ . Por supuesto, cada  $\tilde{c}_i$  sigue estando en  $\mathbb{C}[[x]]$ . Ya que los  $(x\partial_x)^i m$  forman una base del espacio  $\mathbb{M}_{\hat{K}}$  ha de ser  $a_i = \tilde{c}_i$  para cada  $i$ , con lo cual llegamos a que la matriz de  $x\partial_x$  respecto de la base  $(x\partial_x)^i m$  tiene coeficientes en  $\mathbb{C}[[x]]$ , como queríamos probar.  $\square$

Cabe destacar que aunque hemos ofrecido una base de forma explícita, no tiene porqué ser la única base que verifique que la matriz de  $x\partial_x$  respecto de ella tenga como entradas elementos de  $\mathbb{C}[[x]]$ . Como consecuencia de este teorema tenemos un resultado aún más potente:

**Proposición 3.1.4.** *Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  una conexión meromorfa formal regular. Entonces, existe una base de este espacio de forma que la matriz de  $x\partial_x$  es constante, i.e., tiene coeficientes en  $\mathbb{C}$ .*

*Prueba.* Sea una base de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  de forma que  $x\partial_x$  tenga una matriz con entradas en  $\mathbb{C}[[x]]$ . Sea  $A$  esta matriz. Sea  $A_0$  la parte constante de  $A$ . Sean asimismo  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  los autovalores de  $A_0$ .

Supongamos, en primer lugar, que estos autovalores verifican que  $\lambda_i - \lambda_j$  no es un entero para cualesquiera  $i$  y  $j$  distintos entre sí. Sea  $B \in \text{Gl}(d, \mathbb{C}[[x]])$  una matriz de cambio de base. Respecto a la base asociada a  $B$ , tendremos que la matriz de  $x\partial_x$  pasa a ser

$$BAB^{-1} + x\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)B^{-1}.$$

Exijamos que el cambio de base verifique la siguiente igualdad

$$BAB^{-1} + x\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)B^{-1} = A_0.$$

Es decir, respecto de la base asociada a  $B$  la matriz de  $x\partial_x$  es constante. Operando adecuadamente, llegamos a la igualdad

$$x\frac{\partial B}{\partial x} = A_0B - BA.$$

Ya que las entradas de todas las matrices están en  $\mathbb{C}[[x]]$  tendremos que podemos escribir

$$B = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k B_k \quad A = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k A_k \quad x\frac{\partial B}{\partial x} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k B_k$$

Para resolver esto, podemos razonar en el grado de  $x$  y estudiando los coeficientes. Para  $k = 0$ , se deduce de la igualdad anterior que

$$A_0B_0 - B_0A_0 = 0.$$

Basta tomar  $B_0 = \text{Id}$  para que se verifique la ecuación. Sea ahora grado  $k$  mayor que 0. Tendremos que se ha de verificar la ecuación

$$kB_k = A_0B_k - \sum_{i=0}^k B_iA_{k-i},$$

o, equivalentemente,

$$(k\text{Id} - A_0)B_k + B_k A_0 = \sum_{i=0}^{k-1} B_i A_{k-i}.$$

Nótese que cada  $A_i$  y cada  $B_j$  son la matriz de operadores lineales de  $\mathbb{C}^d$  en sí mismo. Por tanto, su producto y su suma son también endomorfismos de  $\mathbb{C}^d$ . En estas condiciones, podemos usar el siguiente lema técnico:

*Lema.* Sean  $P \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$  y  $Q \in \text{End}(\mathbb{C}^m)$ . Entonces, la ecuación

$$XP - QX = Y$$

tiene una solución única  $X \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  para cada  $Y \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  si y sólo si  $P$  y  $Q$  no tienen autovalores comunes.

*Prueba* (Del lema anterior). En primer lugar, conviene razonar lo siguiente: el espacio  $\text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  es de dimensión finita. Por tanto, ya que por el primer teorema de isomorfía se verifica que el espacio de origen es isomorfo a la suma directa de el núcleo y la imagen,  $\varphi$  será inyectivo si, y sólo si, es biyectivo. Sea  $\varphi : \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  dada por  $\varphi(X) = XP - QX$ . El que la anterior ecuación tenga una solución única equivale a probar que  $\varphi$  es biyectiva: la sobreyectividad indica la existencia de solución para cada  $Y$ , y la inyectividad la unicidad. Veamos en primer lugar la inyectividad: sea  $X$  en el núcleo de  $\varphi$ . Entonces,  $\varphi(X) = 0$ . Por tanto, el operador  $XP$  es igual al operador  $QX$ . Sea  $v$  un autovector de  $P$  asociado a algún autovalor  $\lambda$  de  $P$ . Entonces, se tiene que

$$XPv = \lambda(Xv) = Q(Xv).$$

Por tanto,  $Xv$  es un autovector de  $Q$  asociado al autovalor  $\lambda$ . Si  $P$  y  $Q$  no tienen autovalores comunes, la única posibilidad es que sea  $Xv = 0$ . Como el  $v$  es arbitrario entre los autovectores de  $P$ , ha de ser  $X = 0$ . El razonamiento contrario es similar: si  $P$  y  $Q$  tienen algún autovalor común, entonces los elementos de la forma  $Xv$  con  $v$  un autovector de  $P$  asociado al autovalor común están en el núcleo y no se tiene la inyectividad. Por tanto,  $\varphi$  sera biyectiva si y sólo si  $P$  y  $Q$  no tienen autovalores comunes, como queríamos probar.  $\square$

En nuestro caso, tomamos  $P = k\text{Id} - A_0$  y  $Q = -A_0$ , y  $n = m = d$ . Es fácil probar que los autovalores de  $-A_0$  son los autovalores de  $A_0$  cambiados de signo. Por otro lado, para calcular los autovalores de  $k\text{Id} - A_0$  hagamos

$$|\lambda\text{Id} - (k\text{Id} - A_0)| = |(\lambda - k)\text{Id} + A_0| = 0.$$



Es decir, los autovalores de  $k\text{Id} - A_0$  son de la forma  $-\lambda_1 + k, \dots, -\lambda_r + k$ . Ya que los autovalores distintos de  $A_0$ , por hipótesis, no difieren un entero entre sí, en particular no tendremos  $-\lambda_i + k = -\lambda_j$  para ningún  $i, j, k$ . Es decir, estamos en condiciones de aplicar el lema anterior y para cada  $k$  tendremos solución, es decir, tenemos totalmente caracterizado el cambio de base  $B$ .

Supongamos ahora que no tenemos la hipótesis sobre los autovalores de  $A_0$ . Recurrimos en este caso al siguiente lema técnico:

*Lema 3.1.5.* *Sea  $A$  la matriz de  $x\partial_x$  respecto de una cierta base. Sea  $A_0$  su parte constante. Entonces, existe una base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  de forma que la matriz de  $x\partial_x$  respecto de esta nueva base, notada  $A'$ , tiene coeficientes en  $\mathbb{C}\{x\}$  y los autovalores de  $A'_0$  son  $\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , donde los  $\lambda_i$  son los autovalores de  $A_0$ .*

*Prueba* (del lema 3.1.5). Sea  $B \in \text{Gl}(d, \hat{K})$  la matriz de cambio de base. Supongamos que tenemos expresada  $A_0$  en forma de Jordan<sup>2</sup>. Tendremos pues que

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} + A^{(1)},$$

donde  $A^{(1)}$  es la parte no constante de  $A$  y  $P$  y  $Q$  son bloques de forma que  $P$  contiene exclusivamente los bloques de Jordan asociados a  $\lambda_1$ . Sea

$$B = \begin{pmatrix} x\text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

Estudiemos el cambio de base respecto de esta matriz. Tendremos que

$$A' = BAB^{-1} + x \frac{\partial B}{\partial x} B^{-1} = BA_0 B^{-1} + BA^1 B^{-1} + x \frac{\partial B}{\partial x} B^{-1}.$$

Pero se tiene que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1}\text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \cdot x \frac{\partial B}{\partial x} = \begin{pmatrix} x\text{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \quad BA_0 B^{-1} = A_0$$

Como consecuencia, tendremos que

$$x \frac{\partial B^{-1}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>2</sup>Sea  $B$  un cambio de base constante. Entonces,  $A' = BAB^{-1} + x \frac{\partial B}{\partial x} B^{-1} = BAB^{-1}$ . En particular, esto se verifica para un cambio de base  $B$  de forma que  $BA_0 B^{-1}$  está en forma de Jordan.

Tendremos también que  $BA^{(1)}B^{-1}$  no es constante, ya que podemos sacar (al menos)  $x$  como factor común de  $A^{(1)}$ . Por tanto, la parte constante de  $A'$  será

$$A'_0 = \begin{pmatrix} P + \text{Id} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

con lo que los autovalores de  $A'_0$  serán, como queríamos probar,  $\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ . Por supuesto, los coeficientes están en  $\mathbb{C}[[x]]$  ya que el único término que podría alterar este hecho viene dado por  $B^{-1}$ , y su acción se anula por el factor común  $x$  a sacar de  $A^{(1)}$ .  $\square$

*Nota.* A los cambios de base del tipo obtenido en la prueba anterior (es decir, matriz diagonal en cuya diagonal sólo hay 1 y  $x$ ) se les conoce como *shearing transformations*.

Por supuesto, este lema puede ser generalizado para cualquier autovalor (bastaría tomar un cambio de base que actúe como una permutación sobre los bloques de la forma de Jordan). Por tanto, si no estamos en la hipótesis de partida referente a la diferencia entre autovalores, podemos aplicar el lema las veces que sean necesarias hasta encontrar una base de forma que los autovalores de la parte constante de la matriz de  $x\partial_x$  no difieran entre sí un número entero. Con esto, por tanto, queda probado el teorema.  $\square$

Una consecuencia directa de este hecho es la siguiente:  $x\partial_x$  tiene una “forma de Jordan”:

**Corolario 3.1.6.** *Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  una conexión meromorfa formal regular. Entonces,  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  es isomorfa a la suma directa de conexiones meromorfas elementales. Estas conexiones meromorfas elementales son isomorfas a*

$$\mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$$

con  $p$  un número entero positivo y  $\alpha$  un número complejo.

*Prueba.* Sea  $\mathcal{B}$  una base de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  de forma que, conforme a la proposición anterior (3.1.4) la matriz de  $x\partial_x$  sea constante. Sea  $A$  esta matriz. Si la consideramos como un operador lineal sobre  $\mathbb{C}^d$  tendrá una forma canónica de Jordan y una matriz de cambio de base  $B$  de forma que  $BAB^{-1}$  esté en forma de Jordan [METER DEFINICION FORMA JORDAN EN APÉNDICE]. Si consideramos ahora el cambio de base en  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  tendremos que la matriz de  $x\partial_x$  es  $A'$ , con  $A'$  dada por

$$A' = BAB^{-1} + x\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)B^{-1} = BAB^{-1},$$

es decir, la matriz de  $x\partial_x$  está en forma canónica de Jordan. Esto quiere decir que es diagonal por bloques, con bloques de la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Los distintos bloques verifican que la suma de sus tamaños es igual a  $d$ . Podemos considerar por tanto que la matriz de  $x\partial_x$  está escrita ahora, respecto a una base adecuada, como

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_s \end{pmatrix}.$$

Cada  $J_i$  puede ser interpretado como la matriz de  $x\partial_x$  en una cierta conexión meromorfa regular de dimensión  $\dim(J_i)$ , a la cual notaremos  $\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$ . Así, tendremos que

$$\mathcal{M}_{\hat{K}} \simeq \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}.$$

Una vez obtenida la descomposición, veamos que estas conexiones elementales son de la forma indicada en el enunciado del teorema. Sea una conexión meromorfa isomorfa a

$$\mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$$

para  $\alpha$  y  $p$  fijados. Claramente, es regular, pues

$$(x\partial_x - \alpha)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (x\partial_x)^{p-i} (-\alpha)^i.$$

No sólo el término de la mayor potencia de  $x\partial_x$  es una unidad en  $\mathbb{C}[[x]]$ , sino que todos los términos lo son. Si calculamos el polígono de Newton de este operador, es fácil ver que tiene un único lado horizontal (además, claro, de los dos lados verticales). Si  $m$  es un vector cíclico de esta conexión, tendremos, siguiendo la demostración del lema 3.1.2, que la matriz de  $x\partial_x$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -(-\alpha)^p \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\binom{p}{p-1}(-\alpha)^{p-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\binom{p}{p-2}(-\alpha)^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -\binom{p}{2}\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -p(-\alpha) \end{pmatrix}.$$

Es fácil probar que una matriz de este tipo tiene un único autovalor,  $\alpha$ , con multiplicidad  $p$ . Por tanto, su forma de Jordan será precisamente una matriz con bloques de Jordan asociados a  $\alpha$ . Esto prueba el resultado querido.  $\square$ .

*Nota.* Conviene destacar que de aquí se deduce, en el caso de las conexiones meromorfas regulares, la descomposición del operador en el sentido de Hukuhara-Levelt-Turritin. En este caso, la descomposición no es más que la descomposición clásica de álgebra lineal de Jordan-Chevalley. En la descomposición de Hukuhara-Levelt-Turritin, asimismo, no se hacía referencia a ninguna hipótesis de regularidad: en la sección siguiente veremos que podemos generalizar este resultado para cualquier conexión meromorfa formal, independientemente de la hipótesis de regularidad.

## 3.2. Conexiones meromorfas formales en general

A partir de este punto dejamos de suponer que estamos en el caso regular. No obstante, nos apoyaremos en este último caso para establecer propiedades generales de las conexiones meromorfas. En particular probaremos, como anunciábamos, la existencia (bajo ciertas condiciones) de una forma canónica de Jordan más allá del caso de las conexiones regulares. Para ello, probaremos en primer lugar que toda conexión meromorfa puede ser descompuesta de forma única (salvo permutación e isomorfismo) como suma directa de conexiones meromorfas de pendiente única. Acto seguido, probaremos que tras una *ramificación* podemos descomponer toda conexión meromorfa como suma de conexiones meromorfas *elementales*. Aunque definiremos este concepto formalmente más adelante, la idea que lo sostiene es la de una conexión meromorfa que, sin ser regular, está formada en parte por una conexión regular elemental y tiene pendiente única.

### 3.2.1. Descomposición en suma de conexiones meromorfas formales de pendiente única

En primer lugar, vamos a probar que toda conexión meromorfa formal con más de una pendiente puede ser descompuesta como suma directa de conexiones meromorfas forma-

les de pendiente única. Para probar este teorema necesitaremos algunos lemas técnicos previos:

**Lema 3.2.1.** *Sea  $P = \sum_{i=0}^n a_i \partial_x^i \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$  un polinomio diferencial cuyo polígono de Newton tiene al menos dos pendientes, esto es,  $\mathcal{P}(P) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$  con  $r$  mayor o igual que 2. Supongamos que las pendientes están ordenadas en orden estrictamente decreciente. Sea  $A = (k, k - v(a_k))$  un punto del polígono de forma que en él se produce un cambio de pendiente. Entonces, existe una forma lineal  $L(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$  con  $\lambda_0$  no nulo y  $\lambda_0$  coprimo con  $\lambda_1$  de forma que  $\sigma_L(P) = \alpha x^{v(a_k)} \xi^k$ , con  $\alpha$  un escalar.*

*Prueba.* Sea  $A = (k, k - v(a_k))$  el punto asociado al monomio  $a_k \partial_x^k$  de  $P$ . Sean  $L^{(s)}$  y  $L^{(s+1)}$  las pendientes a izquierda y derecha, respectivamente, de  $A$ . Tendremos que  $\text{ord}_{L^{(s)}}(P) = L^{(s)}(A) = \text{ord}_{L^{(s)}}(a_k \partial_x^k)$  (y análogo para  $L^{(s+1)}$ ). Se tendrá asimismo que  $\sigma_{L^{(s)}}(P) = \alpha x^{v(a_k)} \xi^k + T$ , donde  $T$  es una suma de monomios  $L$ -homogéneos de grado (respecto a  $L^{(s)}$ )  $\text{ord}_{L^{(s)}}(P)$ , siendo estos monomios las clases de los monomios de  $P$ . Asimismo, se tiene el resultado análogo para  $L^{(s+1)}$ . Sea ahora la forma lineal  $\tilde{L} = L^{(s)} + L^{(s+1)}$ , donde, si dos formas lineales  $L$  y  $L'$  son respectivamente  $\lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$  y  $\mu_0 s_0 + \mu_1 s_1$  tendremos que  $(L + L')(s_0, s_1) = (\lambda_0 + \mu_0) s_0 + (\lambda_1 + \mu_1) s_1$ . Estudiemos que sucede ahora con  $\text{ord}_{\tilde{L}}(P)$ . Se sigue de la definición que  $\text{ord}$  se comporta linealmente, con lo que

$$\text{ord}_{\tilde{L}}(P) = \max_i \text{ord}_{\tilde{L}}(a_i \partial_x^i) = \max_i (\text{ord}_{L^{(s)}}(a_i \partial_x^i) + \text{ord}_{L^{(s+1)}}(a_i \partial_x^i)).$$

Ya que  $a_k \partial_x^k$  ofrece el máximo respecto a ambas formas lineales ha de ser

$$\text{ord}_{\tilde{L}}(P) = \text{ord}_{L^{(s)}}(a_k \partial_x^k) + \text{ord}_{L^{(s+1)}}(a_k \partial_x^k) = L^{(s)}(A) + L^{(s+1)}(A).$$

Estudiemos ahora  $\sigma_{\tilde{L}}(P)$ . Es claro que todos aquellos monomios de  $P$  cuya clase era nula respecto  $L^{(s)}$  o  $L^{(s+1)}$  ahora también tendrán clase nula. Estudiemos pues los elementos que aparecen en  $\sigma_{L^{(s)}}(P)$ . Recordemos que

$$\sigma_{L^{(s)}}(P) = \alpha x^{v(a_k)} \xi^k + T$$

con  $T$  suma de monomios  $L^{(s)}$ -homogéneos. La única forma de que un monomio de  $P$  de la forma  $\beta_{i,j} x^i \partial_x^j$  con  $L^{(s)}(i, i - j) = L^{(s)}(A)$  no se anule en  $\sigma_{\tilde{L}}(P)$  es que coincida también el orden en  $L^{(s+1)}$ . Operando, esto fuerza a que si se tiene

$$L^{(s)} = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$$

$$L^{(s+1)} = \mu_0 s_0 + \mu_1 s_1$$

entonces ha de verificarse que

$$L^{(s)}(A) = L^{(s+1)}(A).$$

Como consecuencia, todos las clases no nulas de  $\sigma_{L^{(s)}}$  están en  $\sigma_{L^{(s+1)}}$  y viceversa. Pero esto implicará que son iguales, lo cual a su vez implica la igualdad de las pendientes, lo cual contradice que sean dos pendientes distintas que cambian en  $A$ . Así, el único monomio de  $P$  que no se anula al tomar clase es  $\alpha x^{v(a_k)} \partial_x^k$ , como queríamos probar.

**Lema 3.2.2.** *Sea  $P = \sum_{i=0}^n a_i \partial_x^i \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$  un polinomio diferencial cuyo polígono de Newton tiene al menos dos pendientes, a saber,  $\mathcal{P}(P) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$  con  $r$  mayor o igual que 2. Entonces, existe una única descomposición  $P = P_1 P_2$  de forma que*

$$\mathcal{P}(P_1) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(s)}\}$$

$$\mathcal{P}(P_2) = \{L^{(s+1)}, \dots, L^{(r)}\}$$

y el término constante de  $P_2$  sea 1 para algún  $s$  entre 2 y  $r - 1$ .

*Prueba.* A lo largo de esta demostración, cuando se haga referencia al grado de un operador diferencial, será el grado en el sentido clásico, el grado de nuestro operador es  $n$ . Sea  $A = (k, k - l_k)$  (con  $l = v(a_k)$ ) un punto del polígono de Newton de  $P$  conforme a las hipótesis del lema 3.2.1 y sea  $L$  una de las formas lineares cuya existencia prueba el mismo lema. Sea  $a = L(A)$ . Ha de ser forzosamente  $\alpha x^l \xi^k = \sigma_L(P) = \sigma_L(P_1) \sigma_L(P_2)$ . Exijamos  $\sigma_L(P_1) = \alpha x^l \xi^k$  y  $\sigma_L(P_2) = 1$ .

Ya que  $a = L(A) = \deg_L(P)$ , esto es, el máximo de todos los  $L$ -grados, podemos considerar que podemos escribir

$$P = P^{(a)} + P^{(a-1)} + \dots \dots$$

siendo cada  $P^{(j)}$  la componente  $L$ -homogénea de  $L$ -grado  $j$ . Conviene destacar que, pese a la notación, esta suma es finita (pues  $P$  es un polinomio de grado finito) pero ya que nos es indiferente en que  $L$ -grado acaba la suma, lo omitimos. Busquemos ahora  $P_1$  y  $P_2$  cumpliendo que  $P_1$  sea de grado  $k$  y de la forma

$$P_1 = \alpha x^l \partial_x^k + P_1^{(a-1)} + P_1^{(a-2)} + \dots$$

y

$$P_2 = 1 + P_2^{(-1)} + P_2^{-2} + \dots$$

siendo cada  $P_i^{(j)}$  de grado (respecto a  $L$ )  $j$  y siendo  $L$ -homogéneo cada  $P_i^{(j)}$ . Aunque hemos omitido la notación general, es  $P_1^{(a)} = \alpha x^l \partial_x^k$  y  $P_2^{(0)} = 1$ . Asimismo, como antes, las sumas son finitas pese a la notación. Ya que estamos exigiendo  $P = P_1 P_2$ , si el grado de  $P$  es  $n$  y estamos exigiendo que el grado de  $P_1$  sea  $k$ , es trivial que el grado de  $P_2$  será  $n - k$ . Podemos establecer pues el sistema de ecuaciones

$$\{P^{a-h} = \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ i+j=a-h}} P_1^{(i)} P_2^{(j)}\}_{h \in \mathbb{N}}.$$

Ahora hemos de probar que, para cada  $h$ , estas ecuaciones tienen solución. Para  $h = 0$  ya lo tenemos. Para  $h = 1$ , ya que la ecuación será  $P^{(a-1)} = \alpha x^l \partial_x^k P_2^{(-1)} + P_1^{(a-1)}$ , podemos obtener  $P_2^{(-1)}$  y  $P_1^{(a-1)}$  de manera sencilla: podemos escribir  $P^{(a-1)} = Q_{(a-1)} + R_{(a-1)}$ , donde  $Q_{(a-1)}$  son los monomios de  $P^{(a-1)}$  englobados por las pendientes  $L^{(1)}, \dots, L^{(s)}$  y  $R_{(a-1)}$  el resto. Para algún  $R'$ , por tanto, podemos escribir  $\alpha x^l \partial_x^k R'$ . Tomando  $P_1^{(a-1)} = Q_{a-1}$  y  $P_2^{(a-1)} = R'$  tendremos el resultado querido. Repitiendo este proceso de manera escalonada para cada  $h$ , obtenemos cada  $P_i^{(a-h)}$  y, además, garantizamos que las pendientes de  $P_1$  son  $L^{(1)}, \dots, L^{(s)}$  y las de  $P_2$  son  $L^{(s+1)}, \dots, L^{(r)}$ . La unicidad de la descomposición viene de exigir que el término constante sea 1, condición que fue satisfecha por ser  $P_2^{(0)} = 1$ . *square*

Una consecuencia de este lema es que obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \longrightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \longrightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 \longrightarrow 0 .$$

Podríamos obtener una sucesión análoga para  $P_1$ . Con el siguiente lema, podemos transformar esta sucesión en otra más útil:

**Lema 3.2.3.** *En las condiciones anteriores, la multiplicación a la derecha por  $P_2$  induce un isomorfismo de  $\mathcal{D}_{\hat{K}}$  módulos a la izquierda*

$$\mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1 \xrightarrow{\cdot P_2} \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$$

*Prueba.* Que en efecto multiplicar a derecha es un morfismo de  $\mathcal{D}_{\hat{K}}$ -módulos es una comprobación rutinaria que omitimos. Probemos pues que es isomorfismo viendo que es biyectivo. Sea  $Q$  un elemento de  $\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ , es decir,  $Q = \tilde{Q}P_2 + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ . Sea  $R = \tilde{Q} + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1$ , que claramente es un elemento de  $\mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1$ . Claramente, al multiplicar  $R$  a derecha por  $P_2$  obtenemos  $Q$ , con lo que tenemos la sobreyectividad.

Veamos ahora la inyectividad. Sea  $Q$  un elemento de  $\mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1$  de forma que  $QP_2 = 0$ , es decir,  $QP_2 \in \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ . Esto equivale a decir que existe un  $R$  de forma que  $QP_2 = RP = RP_1P_2$ . Por tanto, podemos escribir  $(Q - RP_1)P_2 = 0$ . Sea  $S = Q - RP_1$ . Sabemos por 2.1.5 que  $[S, P_2]$  tiene grado estrictamente menor que la suma de los grados de  $S$  y  $P_2$ . En este caso,  $[S, P_2] = -P_2S$ . Pero el producto de dos operadores tiene grado exactamente la suma de los grados, con lo cual llegamos a la conclusión de que la única posibilidad es  $S = 0$  (puesto que el grado del 0 es infinito). Por tanto,  $Q = RP_1$ , es decir,  $Q = 0$  en

$\mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1$ , con lo cual tenemos la inyectividad y, por ende, que multiplicar a derecha por  $P_2$  es un isomorfismo.  $\square$

A partir de este lema, por el isomorfismo, obtenemos la sucesión exacta equivalente a la anterior

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1 \longrightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \longrightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 \longrightarrow 0 .$$

Si probamos que esta sucesión escinde, tendremos, a efectos prácticos, la prueba del resultado principal de esta sección. En efecto, se tiene el siguiente resultado:

**Lema 3.2.4.** *La sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1 \longrightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \longrightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 \longrightarrow 0$$

*escinde, esto es, se tiene*

$$\mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \simeq \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1 \bigoplus \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 .$$

*Prueba.* Para probar este teorema usaremos el lema de escisión de álgebra homológica. Para aplicar este resultado es necesario encontrarnos en el marco de una categoría abeliana, lo cual, como probamos en el lema 2.2.10, es nuestro caso. Necesitaremos además el siguiente lema auxiliar:

*Lema 3.2.5.* *Con  $P_1$  y  $P_2$  de forma que  $P = P_1 P_2$  conforme a los resultados y la notación anteriores, existen  $Q, R \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$  de forma que  $QP_1 + P_2 R = 1$ .*

*Prueba.* Omitimos los detalles de la prueba por tratarse en esencia del mismo argumento que en la demostración del lema 3.2.2. Consideremos  $L$  la pendiente usada para obtener  $P_1$  y  $P_2$ . Recordemos que  $P_1$  tiene  $L$ -orden  $a - 1$  y  $P_2$  tiene  $L$ -orden 0. Exijamos  $Q$  y  $R$  de forma que  $Q$  tiene  $L$ -orden 0 y  $R$  tiene  $L$ -orden  $-a - 1$ . Podemos escribir pues

$$Q = 1 + Q^{(-1)} + Q^{(-2)} + \dots$$

$$R = R^{(-a-1)} + R^{(-a-2)} + \dots ,$$

donde los exponentes indican el  $L$ -orden. Como en la otra prueba, se han de verificar unas ecuaciones del tipo

$$\{0 = \sum_{i+j=-h} Q^{(i)} P_1^{(j)} + \sum_{i+j=-h} P_2^{(i)} R^{(j)}\}_{h \in \mathbb{Z}_{>0}} .$$

Como en la otra prueba, operando por inducción y de manera escalonada se pueden encontrar soluciones a estas ecuaciones.  $\square$



Probado esto, consideremos la aplicación  $\mathcal{D}_{\hat{K}}$ -lineal dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D}_{\hat{K}} &\rightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \\ T &\mapsto T(1 - RP_2) + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \end{aligned}$$

donde  $R$  es de forma que  $1 = QP_1 + P_2R$  conforme al lema 3.2.5. Veamos que el núcleo de esta aplicación es  $\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2$ . Sea, en primer lugar, un elemento de este último ideal, esto es, es de la forma  $TP_2$ . Entonces, la imagen por  $\varphi$  es

$$\begin{aligned} \varphi(TP_2) &= TP_2(1 - RP_2) + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P = T(P_2 - P_2RP_2) + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P = \\ &T(1 - P_2R)P_2 + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P = TQP_1P_2 + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P = TQP + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P = 0, \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que  $\mathcal{D}_{\hat{K}} \subset \ker(\varphi)$ . Sea ahora un elemento  $T$  del núcleo. Verifica por tanto que  $T(1 - RP_2) + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P = 0$ , esto es,  $T(1 - RP_2) = AP = AP_1P_2$  para algún  $A$ . Operando, llegamos a que  $T = (TR + AP_1)P_2$ , es decir,  $T$  está en  $\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2$ , con lo cual llegamos a que  $\ker(\varphi) = \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2$ .

Notemos por  $\pi$  a la aplicación que va de  $\mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$  en  $\mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2$  en nuestra sucesión exacta corta. Esta aplicación  $\pi$  no es más que la proyección habitual. Usando el primer teorema de isomorfía para  $\mathcal{D}_{\hat{K}}$ -módulos tendremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 \\ \pi \downarrow & & \uparrow \psi & & \\ \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 & \xrightarrow{\theta} & \text{Im}(\varphi) & & \end{array}$$

donde se tiene que  $\psi\theta\pi = \varphi$ . Si conseguimos probar que  $\pi\psi\theta = 1$ , en virtud del lema de escisión tendremos probado el resultado. Sea  $T + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2$ . Ya que  $\psi\theta\pi = \varphi$  tendremos que  $\psi\theta(T + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2) = \varphi(T) = T(1 - RP_2) + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ . Pero si aplicamos  $\pi$ , tendremos que  $\pi(T(1 - RP_2) + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P) = T + \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2$ , es decir,  $\pi\theta\pi = 1$ . Por tanto, por el lema de escisión, ya que tenemos una sección de  $\pi$ , la sucesión escinde y tenemos el resultado querido.  $\square$

Con todos estos resultados estamos en condiciones de probar que podemos descomponer una conexión meromorfa formal como suma directa de conexiones meromorfas de pendiente única.

**Proposición 3.2.6.** *Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  una conexión meromorfa formal. Sea*

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$$

el conjunto de sus pendientes. Entonces, existe, salvo isomorfismo y permutación, una única descomposición

$$\mathcal{M}_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$$

de forma que para cada  $i$  es  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}) = \{L^{(i)}\}$ .

*Prueba.* Tanto la existencia como la unicidad son triviales cuando  $r = 1$ , con lo que supondremos que  $r$  es mayor o igual que 2, es decir, si  $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$  para cierto polinomio  $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$ , el polígono de Newton de  $P$  tiene al menos dos lados no verticales. Basta descomponer  $P = P_1 P_2$  conforme al lema 3.2.2 y reiterar el proceso con  $P_1$  y  $P_2$  hasta que obtengamos  $P = Q_1 Q_2 \cdots Q_s$ . Por el lema 3.2.4 acabaremos teniendo la descomposición deseada. La unicidad es consecuencia de la unicidad de los polinomios en la descomposición de  $P$ .  $\square$

A partir de este resultado podemos probar el siguiente lema, que además de su interés intrínseco será útil a la hora de definir las conexiones meromorfas elementales.

**Lema 3.2.7.** *Sean  $\mathcal{M}_{\hat{K}}, \mathcal{M}'_{\hat{K}}$  conexiones meromorfas formales. Entonces, si  $\mathcal{M}'_{\hat{K}}$  es regular y no nula, el conjunto de las pendientes de  $\mathcal{M}_{\hat{K}} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}'_{\hat{K}}$  es el conjunto de las pendientes de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ .*

*Prueba.* Sea  $\{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$  el conjunto de las pendientes de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ . Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$  la descomposición de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  conforme a la proposición 3.2.6. Recordemos que, ya que  $\mathcal{M}'_{\hat{K}}$  es regular, su única pendiente es  $\{L_0\}$ , es decir, la pendiente horizontal. Tendremos que

$$\mathcal{M}_{\hat{K}} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}'_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)} \otimes \mathcal{M}'_{\hat{K}}.$$

Por esta fórmula basta probar el teorema para uno sólo de los términos de la fórmula. Sea pues  $\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)} \otimes \mathcal{M}'_{\hat{K}}$  con  $i$  arbitrario. Si esta conexión tuviese pendientes

$$\{L^{(i,1)}, L^{(i,2)}, \dots, L^{(i,r)}\}$$

tendríamos, de acuerdo a la proposición 3.2.6, que

$$\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)} \otimes \mathcal{M}'_{\hat{K}} = \bigoplus_{j=1}^r A^{(i,j)}$$

con cada  $A^{(i,j)}$  teniendo a  $L^{(i,j)}$  como pendiente única. Asimismo, por el corolario 3.1.6 tendremos que  $\mathcal{M}' \simeq \bigoplus \mathcal{G}_{\alpha,d}$  para una cantidad finita de conexiones meromorfas regulares elementales  $\mathcal{G}_{\alpha,d}$ . Pero es trivial que  $\mathcal{G}_{\alpha,d} \simeq dG_{\alpha,1}$ . Así, tendremos que

$$\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)} \otimes \mathcal{M}'_{\hat{K}} = \bigoplus \mathcal{M}^{(i)} \otimes G_{\alpha,1}.$$

Pero ha de ser que las pendientes de  $\mathcal{M}^{(i)} \otimes G_{\alpha,1}$  sean, para cualquier  $\alpha$ , las de  $\mathcal{M}^{(i)}$ , pues  $\mathcal{M}^{(i)} \otimes G_{\alpha,1} \simeq \mathcal{M}^{(i)}$  ya que  $G_{\alpha,1}$  tiene dimensión 1. Por tanto, las pendientes de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)} \otimes \mathcal{M}'_{\hat{K}}$  son también las de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$ . De aquí se deduce directamente el resultado.  $\square$

### 3.2.2. Descomposición en suma de conexiones meromorfas formales elementales

Estudiamos a continuación otra descomposición de una conexión meromorfa formal. Veamos un ejemplo motivante:

*Ejemplo 3.2.1.* Sea el polinomio diferencial  $P = x^5 \partial_x^2 + x^5 \partial_x + 1$ . El polígono de Newton de este polinomio lo podemos ver en rojo en la siguiente figura, tal y como calculamos en la sección anterior:

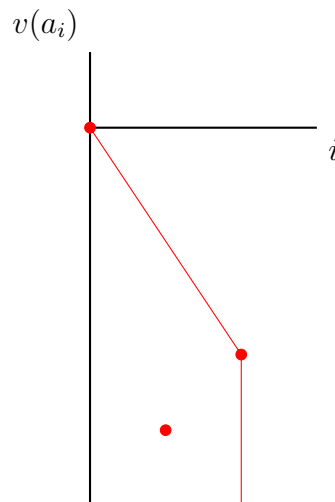


Figura 3.1: Polígono de Newton de  $x^5 \partial_x^2 + x^5 \partial_x + 1$ .

Se puede probar, estudiando el  $L$ -símbolo de  $P$ , que la única pendiente de este polígono es  $L(s_0, s_1) = 3s_0 + 2s_1$ . Si calculamos el valor numérico de la pendiente (al cual llamamos también, como indicamos antes, pendiente) vemos que es  $\frac{-3}{2}$ .

Conforme al teorema 3.2.6, ya que la pendiente es única, no podremos descomponer la conexión meromorfa asociada al polinomio del ejemplo. ¿Será posible realizar algún tipo de transformación de forma que la pendiente sea “lo más simple posible”, es decir, un entero?. La respuesta será afirmativa, y la conseguiremos, como anunciábamos, mediante el uso de *ramificaciones y conexiones meromorfas formales elementales*.

**Definición 3.2.8.** Sea  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la función dada por  $t \mapsto t^q$  para algún número entero positivo  $q$ . Tomando  $x = t^q$  esta función induce la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \pi^* : \mathbb{C}[[x]] &\hookrightarrow \mathbb{C}[[x]] \\ f &\mapsto \pi^*(f) = f \circ \pi \end{aligned}$$

Donde, si  $f = \sum a_n x^n$ ,  $f \circ \pi$  quiere decir  $\pi^*(f) = f \circ \pi = \sum a_n t^{qn}$ . Esta aplicación, por supuesto, induce la análoga entre  $\mathbb{C}\{x\}$  y  $\mathbb{C}\{t\}$ . También induce las análogas entre  $K$  y  $L$ , y entre  $\hat{K}$  y  $\hat{L}$ , donde  $L = \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$  y  $\hat{L} = \mathbb{C}[[t]][t^{-1}]$ . Como consecuencia de la definición,  $L$  (respectivamente,  $\hat{L}$ ) es una extensión de  $K$  (resp.  $\hat{K}$ ). A cada una de las aplicaciones  $\pi^*$  se le llama ramificación.

Nótese que una ramificación es, en esencia, una transformación que introduce raíces  $q$ -ésimas. Asimismo, para aclarar en qué situación nos encontramos, diremos que  $q$  es el entero positivo asociado a una cierta ramificación<sup>3</sup>. Veamos ahora como extender la acción de una ramificación a una conexión meromorfa formal:

**Definición 3.2.9.** Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  una conexión meromorfa formal. Sea  $\pi$  una ramificación asociada al entero positivo  $q$ . Definimos  $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}}$  como el  $\hat{L}$ -espacio vectorial

$$\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}}.$$

La acción de  $t\partial_t$  dará estructura de conexión meromorfa sobre  $\hat{L}$  a este producto tensorial, y viene dada por

$$t\partial_t(\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x m)) + \left(t \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \otimes m.$$

*Nota.* Por supuesto, en lugar de  $t\partial_t$  podemos considerar cualquier otra derivación ajustando convenientemente la definición, pero por simplicidad, sólo incluimos explícitamente la anterior.

**Lema 3.2.10.** Conforme a la definición 3.2.9 se tiene que  $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}}$  es una conexión meromorfa sobre  $\hat{L}$ .

*Prueba.* En efecto: por definición, es un  $\hat{L}$ -espacio vectorial de dimensión finita. Más concretamente, tiene la dimensión de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ . Asimismo, por definición, es  $\mathbb{C}$  lineal, y veamos que para cada  $f, g \in \hat{L}$  y cada  $m$  en  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  se tiene que

$$t\partial_t(g \cdot (f \otimes m)) = \left(t \frac{\partial g}{\partial t}\right)(f \otimes m) + g(t\partial_t(f \otimes m)).$$

En efecto:

$$t\partial_t(g \cdot (f \otimes m)) = t\partial_t((gf) \otimes m) = q((gf) \otimes (x\partial_x m)) + \left(t \frac{\partial gf}{\partial t}\right) \otimes m =$$

<sup>3</sup>Esta nomenclatura no es estándar. En la literatura, en general, se sobreentiende el papel de  $q$ .

$$g(q(f \otimes (x\partial_x m))) + (t\frac{\partial g}{\partial t})(f \otimes m) + g((t\frac{\partial f}{\partial t}) \otimes m) = (t\frac{\partial g}{\partial t})(f \otimes m) + g(t\partial_t(f \otimes m)).$$

Por tanto, tenemos el resultado querido.  $\square$

El resultado de una ramificación se puede ofrecer de forma más concreta:

**Lema 3.2.11.** *Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  una conexión meromorfa formal de forma que, para cierto polinomio  $P = \sum_{i=0}^{d-1} a_i(x)(x^i\partial_x^i)$  es*

$$\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P.$$

*Sea  $\pi$  una ramificación asociada a  $q$ . Entonces, se verifica que*

$$\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot P'$$

*con  $P' = \sum_{i=0}^{d-1} q^i a_i(t^q)(t^i\partial_t^i)$ . En esta última conexión  $t\partial_t$  actúa de la manera obvia.*

*Prueba.* Sea  $\mathcal{M}_{\hat{L}} = \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot P'$ . Sea  $\{m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1}m\}$  una base de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ . Es trivial que una base de  $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}}$  será

$$\{1 \otimes (x\partial_x)^i m\}_{i=0, \dots, d-1}.$$

Asimismo, si  $P' = \sum_{i=0}^{d-1} q^i a_i(t\partial_t)^i$  es trivial que  $\{m, t\partial_t m, \dots, (x\partial_x)^{d-1}m\}$  es una base de  $\mathcal{M}_{\hat{L}}$ , ya que la análoga lo es de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ . Establezcamos el morfismo, claramente  $\hat{L}$ -lineal, dado por

$$\begin{aligned} \varphi: \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}} &\rightarrow \mathcal{M}_{\hat{L}} \\ 1 \oplus (x\partial_x)^i m &\mapsto q(t\partial_t)^i m \end{aligned}$$

Claramente es un isomorfismo de espacios vectoriales. Veamos que también es un isomorfismo de conexiones meromorfas viendo que preserva la acción de la derivación, es decir, que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}_{\hat{L}} \\ t\partial_t \downarrow & & \downarrow t\partial_t \\ \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}_{\hat{L}} \end{array}$$

Basta ver que conmuta para los elementos de la base. En efecto: sea  $1 \otimes (x\partial_x)^i m$  un vector arbitrario de la base de  $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}}$ . Entonces se tiene que

$$t\partial_t(\varphi(1 \otimes (x\partial_x)^i m)) = t\partial_t((t\partial_t)^i m) = q(t\partial_t)^{i+1} m.$$

Por otro lado,

$$\varphi(t\partial_t(1 \otimes (x\partial_x)^i m)) = \varphi(1 \otimes (x\partial_x)^{i+1} m) = q(t\partial_t)^{i+1} m.$$

Por tanto el diagrama conmuta, como queríamos probar.  $\square$

Veamos como afecta una ramificación a las pendientes de una conexión:

**Lema 3.2.12.** *Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  una conexión meromorfa. Sea  $\mathcal{M}_{\hat{L}}$  su ramificación, asociada a un cierto entero positivo  $q$ . Entonces, si  $\{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$  son las pendientes de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ , las pendientes de  $\mathcal{M}_{\hat{L}}$  son  $\{L'^{(1)}, \dots, L'^{(r)}\}$ , donde si*

$$L^{(i)}(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$$

entonces

$$L'^{(i)}(s_0, s_1) = \lambda_0^{(i)} s_0 + \frac{\lambda_1^{(i)}}{q} s_1$$

para cada  $i$ .

*Prueba.* Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ . Sea una ramificación de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ , denotada  $\mathcal{M}_{\hat{L}}$ , que por el lema 3.2.11, es

$$\mathcal{M}_{\hat{L}} = \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot P'$$

con  $P'$  de acuerdo al lema 3.2.11. Para cada  $i$ , si se tiene que  $v(a_i(x)) = n$ , entonces  $v(a_i(t^q)) = qn$ . Por tanto, el polígono de Newton de  $P'$  no será más que una dilatación en el eje vertical del polígono de Newton de  $P$ . Si  $L^{(i)}(s_0, s_1) = \lambda_0^{(i)} s_0 + \lambda_1^{(i)} s_1$  es una pendiente de  $P$  distinta de la horizontal, tendremos que  $\lambda_1 \neq 0$ . La pendiente numérica asociada a esa forma lineal es  $-\frac{\lambda_0^{(i)}}{\lambda_1^{(i)}}$  pero, debido a que la ramificación dilata multiplicando por  $q$  la pendiente, tendremos que la pendiente correspondiente de  $P'$  es  $-\frac{q\lambda_0^{(i)}}{\lambda_1^{(i)}}$ , es decir, que la forma lineal es  $L'^{(i)}(s_0, s_1) = \lambda_0^{(i)} s_0 + \frac{\lambda_1^{(i)}}{q} s_1$ .  $\square$

*Nota.* Cabe destacar que, en la prueba anterior, no para todo  $q$  vamos a tener que  $\frac{\lambda_1^{(i)}}{q}$  sea entero, con lo que no entraría en nuestra definición anterior de pendiente. No obstante, podemos ampliarla sin problemas para este caso. Asimismo, es una consecuencia trivial del lema que *siempre* va a existir una ramificación de forma que todas las pendientes numéricas sean enteras: basta tomar  $q = \text{lcm}_i(\lambda_1^{(i)})$ , con lcm el mínimo común múltiplo.

Presentamos ahora el concepto de *conexión meromorfa (formal) elemental*. Este concepto será básico a la hora de establecer la descomposición de Levelt-Turritin-Malgrange, pues nos indica cuáles son las conexiones meromorfas más “simples” posibles. Como paso previo, hemos de definir cierto tipo especial de conexión meromorfa:

**Definición 3.2.13.** Sea  $R(z) = \sum_{i=1}^k a_i z^i$  un polinomio de grado  $k$  sin término independiente y coeficientes en  $\mathbb{C}$ . Denotamos por  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R$  al  $\hat{K}$ -espacio vectorial de dimensión 1 con base  $e(R)$  y dotado de una derivación  $x\partial_x$  con su acción dada por

$$x\partial_x(\varphi \cdot e(R)) = \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi x \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} \right) \cdot e(R).$$

*Nota.* En la definición anterior podemos sustituir directamente el polinomio  $R(z)$  por un polinomio de Laurent, ajustando convenientemente la definición de la derivación.

La idea que subyace a la definición es la de que el elemento de la base,  $e(R)$ , actúe como la exponencial de  $R(x^{-1})$ . De la definición se sigue, trivialmente, que es una conexión meromorfa.

**Definición 3.2.14.** Sea  $R(z)$  un polinomio con coeficientes en  $\mathbb{C}$  y sin término independiente. Una conexión meromorfa (formal) elemental sobre  $\hat{K}$  es una conexión meromorfa isomorfa a  $F_{\hat{K}}^R \otimes_{\hat{K}} \mathcal{G}_{\hat{K}}$ , donde  $\mathcal{G}_{\hat{K}}$  es una conexión meromorfa elemental regular, es decir,  $\mathcal{G}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot (x\partial_x + \alpha)^d$ .

Por el corolario 2.1.21 tendremos que la pendiente de una conexión meromorfa elemental será única, y será la pendiente de  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R$ . Veamos cuál es esta pendiente:

**Lema 3.2.15.** Sea  $R(z) = \sum_{i=1}^k a_i z^i$  un polinomio sin término independiente y con coeficientes complejos de grado  $k$ . Entonces, se tiene el isomorfismo de conexiones meromorfas

$$\mathcal{F}_{\hat{K}}^R \simeq \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$$

$$\text{donde } P = (x^k)x\partial_x + \left( \sum_{i=1}^k ia_i x^{k-i} \right).$$

*Prueba.* Si  $m$  es un generador de la conexión  $\mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ , entonces la acción de  $x\partial_x$  sobre esa conexión viene dada por  $x\partial_x m = - \sum_{i=1}^k \frac{ia_i}{x^i} m$ . Pero  $- \sum_{i=1}^k \frac{ia_i}{x^i} = x \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x}$ , de donde se sigue directamente que el isomorfismo de espacios vectoriales que al generador  $e(R)$  de  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R$  le asigna  $m$  es también un isomorfismo de conexiones meromorfas.  $\square$

**Corolario 3.2.16.** La pendiente de  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R$  es  $L(s_0, s_1) = ks_0 + s_1$ , con  $k$  el grado del polinomio  $R$ .

*Prueba.* Numéricamente es trivial que la pendiente de  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R$  es  $-k$ : basta observar el polígono de Newton del polinomio  $P$  indicado en el lema 3.2.15. Este polígono no será más que el segmento uniendo el punto  $(0, 0)$  con el punto  $(1, -k)$ . De aquí se deduce que la pendiente es la antes dicha.  $\square$

Como consecuencia directa de este resultado en conjunción con el corolario 2.1.21 tendremos que la pendiente de  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R$  es también la de cualquier conexión meromorfa elemental de la que forme parte. Estamos ahora en condiciones de enunciar y probar el resultado principal: el teorema de descomposición de Levelt-Turritin desde el punto de vista de Malgrange:

**Teorema 3.2.17** (Levelt-Turritin-Malgrange). *Sea  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  una conexión meromorfa formal. Entonces existe un entero  $q$  de forma que la conexión  $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}}$  es isomorfa a una suma directa de conexiones meromorfas formales elementales.*

*Prueba.* Para comenzar, supongamos que nuestra conexión  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  tiene una única pendiente  $L$ . Si no, podríamos descomponer la conexión en conexiones de pendiente única mediante el teorema 3.2.6 y trabajar sobre cada uno de ellos.

Si la pendiente es la horizontal, ya tenemos el resultado: basta tomar la descomposición obtenida en el corolario 3.1.6. Cada conexión meromorfa formal regular  $\mathcal{G}_{\hat{K}}$  es elemental, pues es isomorfa a  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^0 \otimes \mathcal{G}_{\hat{K}}$ .

Supongamos pues que  $L$  es una pendiente no horizontal, es decir,  $L(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$  con  $\lambda_1$  no nulo y  $\lambda_0, \lambda_1$  enteros positivos y coprimos. Tenemos que se verifica

$$\mathcal{M}_{\hat{K}} \simeq \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$$

con  $P = \sum_{i=0}^{d-1} a_i (x\partial_x)^i$  con los  $a_i$  en  $\mathbb{C}[[x]]$  y al menos uno de ellos una unidad. Ya que estamos suponiendo que no hay pendiente horizontal, la única unidad ha de ser  $a_0$ . Asimismo, ha de ser  $\text{ord}_L(P) = 0$ , pues la pendiente es única y el máximo se alcanza en los dos puntos que aparecen en el polígono de Newton, que en este caso es el segmento que une  $(0, 0)$  y  $(d, -v(a_d))$ . Consideremos pues el  $L$ -signo de  $P$ , que será de la forma

$$\sigma_L(P) = \sum_{L(i, -j)=0} a_{i,j} x^j (x\partial_x)^i$$

donde los  $a_{i,j}$  son números complejos. Al  $L$ -símbolo de  $P$  lo llamaremos *ecuación característica de  $P$* . Ya que la pendiente no es horizontal, habrá al menos dos monomios en esa expresión. Si escribimos  $\theta = x^{\lambda_0} (x\partial_x)^{\lambda_1}$  tendremos que podemos poner

$$\sigma_L(P) = \sum_{k \geq 0} a_k \theta^k,$$

siendo esta suma finita, con los  $a_k$  complejos y con  $a_0$  no nulo, pues el origen es un vértice del polígono de Newton: si fuese  $a_0$  nulo tendríamos en particular que  $L(0, 0)$  no es 0, lo cual ya hemos indicado que es falso.



*Inciso.* Realizamos un pequeño inciso para explicar detalladamente el proceso seguido a la hora de calcular la ecuación característica de  $p$  y hacer el cambio de variable  $\theta$ . Ya que la pendiente, numéricamente, es  $-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  tendremos que todos los puntos de la forma  $(i, -v(a_i))$  (esto es, los posibles vértices del polígono de Newton de  $P$ ) verifican que  $v(a_i) \geq i \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  para cada  $i$ . Esto se debe a que el único segmento que conforma el polígono de Newton de  $P$  es el segmento que une  $(0, 0)$  con  $(d, -v(a_d))$ , es decir, parte de la recta  $y = -\frac{\lambda_0}{\lambda_1}x$ . En otro caso, tendríamos dos pendientes, lo cuál no es nuestro caso. Esta elección, además, nos permite asegurar que cada coeficiente  $a_i$  de  $P$  se puede expresar como

$$a_i = cx^{\lceil \frac{\lambda_0}{\lambda_1} i \rceil} + (\text{términos de orden superior a } \lceil \frac{\lambda_0}{\lambda_1} i \rceil),$$

donde  $c$  es una constante que puede ser nula y  $\lceil \cdot \rceil$  denota al operador parte entera por arriba, esto es,

$$\lceil a \rceil = \min\{b \in \mathbb{Z} \mid b \geq a\}.$$

Ya que  $\text{ord}_L(P) = 0$ , tendremos que para cada  $a_i(x\partial_x)^i$  el  $L$ -símbolo del monomio viene determinado por  $v(a_i)$ . Si  $v(a_i) > i \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  se tiene que  $L(i, -v(a_i)) < 0$  y por tanto la clase del monomio es 0. Si  $v(a_i) = \lambda_0 i$  entonces el monomio no se anula, pues  $L(i, -v(a_i)) = 0$ . Asimismo, tengamos en cuenta que si  $L(\lambda_1 + r, \lambda_0 + s) = 0$  entonces  $L(\lambda_1 - r, \lambda_0 - s) = 0$ , con lo que queda justificada la expresión de  $\theta$ , pues podemos agrupar términos de la forma deseada.

Volviendo al teorema, consideremos ahora la cantidad  $\kappa$ , dada por  $\frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  si este cociente es un entero (los  $\lambda_i$  son los que aparecen en la pendiente de la conexión), y  $+\infty$  en caso contrario<sup>4</sup>. Ya que hemos descartado el caso horizontal y  $\lambda_1$  nunca es 0 (pues no consideramos los lados verticales del polígono) tendremos que o bien  $\lambda_1$  es 1 o es mayor que 1. Como además podemos suponer que  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$  son coprimos, en el primer caso  $\kappa = \lambda_0$  y en el segundo  $\kappa = +\infty$ . Estudiemos pues estos dos casos, procediendo por inducción en  $\kappa$ . El caso base es  $\kappa = 0$ , que ya está probado. Podemos pues suponer que para toda pendiente menor que un cierto  $\kappa$  tenemos probado el resultado.

**Primer caso:**  $\lambda_1 = 1$ . Como decíamos, en este caso  $\kappa = \lambda_0 < +\infty$ . Recordemos que teníamos  $\sigma_L(P) = \sum_{k \geq 0} a_k \theta^k$ . Ya que esta suma es finita, podemos suponer sin pérdida de generalidad que llega al grado  $k = n$ . Por el primer teorema fundamental del álgebra podremos factorizar, y tendremos

<sup>4</sup>En general, para una conexión meromorfa con varias pendientes,  $\kappa$  sería el máximo de todos los cocientes obtenidos a partir de las pendientes, bajo el criterio de que es el propio cociente si es un entero, e infinito en caso contrario.

$$\sigma_L(P) = c \prod_{j=1}^r (\theta - \beta_j)^{\gamma_j},$$

con  $c$  una constante, cada  $\beta_j$  números complejos y siendo la suma de todos los  $\gamma_j$  igual a  $n$ . Elijamos una raíz arbitraria  $\beta$  de entre las anteriores,  $\beta = \beta_j$  para algún  $j$ . Sea  $R(z) = \frac{\beta}{\lambda_0} z^{\lambda_0}$ . Consideremos ahora la conexión meromorfa

$$\mathcal{M}_{\hat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\hat{K}}^R.$$

Sea  $m$  un vector cíclico de  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  y  $e(R)$  el generador de  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R$ . Entonces, es trivial que  $m \otimes e(R)$  es un vector cíclico de la conexión producto tensorial. Si partíamos de  $P = \sum_{i=0}^{d-1} a_i(x)(x\partial_x)^i$  podemos considerar  $P$  como una función de dos variables  $P(\xi, \psi) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i(\xi)(\psi)^i$ . En particular, se tiene que  $P(x, x\partial_x)m = 0$ , y se puede probar lo siguiente:

*Lema 3.2.18.* En las condiciones anteriores,  $P(x, x\partial_x - \varphi)(m \otimes e(R)) = 0$ , donde  $\varphi = x \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} = -\beta_0 x^{-\lambda_0}$ .

*Prueba.* Nótese que  $P(x, x\partial_x)m = 0$  y que  $x\partial_x e(R) = \varphi e(R)$ . Por inducción se puede probar que  $(x\partial_x - \varphi)^i = ((x\partial_x)^i m) \otimes e(R)$  para todo  $i$ . Esta prueba es totalmente elemental y directa, por lo que la omitimos. Por tanto, tendremos

$$\begin{aligned} P(x, x\partial_x - \varphi)(m \otimes e(R)) &= \sum_{i=0}^d a_i(x\partial_x - \varphi)(m \otimes e(R)) = \\ &= \sum_{i=0}^d a_i(((x\partial_x)^i m) \otimes e(R)) = \left( \sum_{i=0}^d a_i(x\partial_x)^i m \right) \otimes e(R) = 0 \otimes e(R) = 0, \end{aligned}$$

como queríamos probar.  $\square$

Sea pues  $P' = \sum_{i=0}^d a_i(x\partial_x + \beta_0 x^{-(\lambda_0)})^i$ . Los coeficientes de  $P'$  son los mismos que los de  $P$ , por lo que están en  $\mathbb{C}[[x]]$ . Si consideramos los coeficientes una vez que expandimos cada  $i$ , asimismo, debido al razonamiento realizado en el inciso acerca de las valoraciones de cada  $a_i$ , obtenemos que los coeficientes son series formales pues los posibles cocientes se anulan. Asimismo, manteniendo la notación anterior de  $\theta = x^{\lambda_0}(x\xi)^{\lambda_1}$  tendremos que es  $\sigma_L(P') = \sum_{k \geq 0} \alpha_k (\theta + \beta_0)^k$ . Esto se puede interpretar, considerando que  $\sigma_L(P)$  (resp.  $P'$ ) son polinomios en la variable  $\theta$ , como

$$\sigma_L(P')(\theta) = \sigma_L(P)(\theta + \beta_0)$$

Tenemos ahora dos casos:

1.  $\beta_0$  *es la única raíz de la ecuación característica*. Esto equivale a decir que  $\sigma_L(P) = c(\theta - \beta_0)^n$  para un cierto  $n$  y una constante  $c$ . Pero  $\sigma_L(P')(\theta) = \sigma_L(P)(\theta + \beta_0) = c\theta^n$ . Por la definición de pendiente tendremos que  $L$  no es una pendiente de  $P'$ .

Supongamos ahora  $L'(s_0, s_1) = \lambda'_0 s_0 + \lambda'_1 s_1$  de forma que  $\frac{\lambda'_0}{\lambda'_1} > \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \lambda_0$ , es decir, que la pendiente numérica es menor (recordemos que cambia de signo). Geométricamente, esto indica que es una pendiente más inclinada que  $L$ . Si se verifica la desigualdad anterior quiere decir que existe un número entero estrictamente positivo  $r$  de forma que  $\lambda'_0 = \lambda'_1(\lambda_0 + r)$ . Por esta desigualdad se llega a que se verifica

$$L'(s_0, s_1) = \lambda'_1 L(s_0, s_1) + \lambda'_1 r s_0.$$

Recordemos que para cada  $i$  es  $L(i, -v(a_i)) \leq 0$ . Por tanto, el máximo de  $L'(i, -v(a_i))$  se alcanzará con  $i = d$ . Asimismo, ya que  $L$  no es una pendiente de  $P'$  pero el  $L$ -orden del término de grado  $d$  (es decir, el máximo) coincide en ambos polinomios ha de ser  $L(i, -v(b_i)) > 0$  para cada  $i$  distinto de  $d$ , y suponiendo que

$$P' = \sum_{i=0}^d b_i (x \partial_x)^i.$$

Por lo tanto, existe un único valor  $i_0$  de forma que se alcanza el máximo para  $L'$  (pues todas las cantidades son positivas). Es decir,  $\sigma_{L'}(P')$  será un monomio y, por tanto,  $L'$  no será una pendiente para  $P'$ .

Forzosamente, por tanto, sólo nos quedan dos posibles casos: o bien  $\mathcal{M}_{\hat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\hat{K}}^R$  tiene una pendiente  $L'$  con  $\lambda_0 \geq \frac{\lambda'_0}{\lambda'_1}$  y esa pendiente es entera (i.e,  $\kappa(\mathcal{M}_{\hat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\hat{K}}^R) < \kappa(\mathcal{M}_{\hat{K}})$ ) o bien no es entera (i.e,  $\kappa(\mathcal{M}_{\hat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\hat{K}}^R) = +\infty$ ). Este segundo caso lo estudiaremos más adelante. En el otro caso, podemos aplicar la hipótesis de inducción sobre  $\kappa$  y tendremos que existe una ramificación  $\pi$  de forma que

$$\pi^* \mathcal{M}_{\hat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\hat{K}}^R = \mathcal{M}_{\hat{L}} \otimes \mathcal{F}_{\hat{L}}^R$$

es isomorfo a una suma de conexiones meromorfas formales elementales. Es trivial que se puede dar un isomorfismo

$$\mathcal{F}_{\hat{L}}^R \otimes \mathcal{F}_{\hat{L}}^{-R} = \hat{L}.$$

Asimismo,  $\mathcal{M}_{\hat{L}} \otimes \hat{L} = \mathcal{M}_{\hat{L}}$ . Por tanto, si

$$\pi^* \mathcal{M}_{\hat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\hat{K}}^R = \bigoplus_{i \geq 1} (\mathcal{F}_{\hat{L}}^{R_i} \otimes \mathcal{G}_{\hat{L}}),$$

siendo la suma anterior finita, podemos expresar

$$\pi^* \mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_{\hat{L}} = \mathcal{M}_{\hat{L}} \otimes \mathcal{F}_{\hat{L}}^R \otimes \mathcal{F}_{\hat{L}}^{-R},$$

con lo que obtenemos una descomposición de  $\mathcal{M}_{\hat{L}}$  de la forma

$$\pi^* \mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_{\hat{L}} = \bigoplus_{i \geq 1} (\mathcal{F}_{\hat{L}}^{R_i} \otimes \mathcal{F}_{\hat{L}}^{-R} \otimes \mathcal{G}_{\hat{L}}).$$

Si probamos que el producto tensorial de dos conexiones de la forma  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R$  (análogo para  $\hat{L}$ ) es otra del mismo tipo, habremos terminado la prueba. En efecto: sean  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R$  y  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^S$ . Vamos a probar que se tiene

$$\mathcal{F}_{\hat{K}}^R \otimes \mathcal{F}_{\hat{K}}^S \simeq \mathcal{F}_{\hat{K}}^{R+S}.$$

Para ello, si  $\varphi$  es el isomorfismo de espacios vectoriales que asigna el vector de la base del producto tensorial  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R \otimes \mathcal{F}_{\hat{K}}^S$ ,  $e(R) \otimes e(S)$ , al vector de la base de  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^{R+S}$ ,  $e(R+S)$ , se ha de verificar que  $\varphi(x\partial_x(f(e(R) \otimes e(S)))) = x\partial_x(\varphi(f(e(R) \otimes e(S))))$  para cualquier  $f$  de  $\hat{K}$ . Este es un cálculo elemental y directo que omitimos. Como decíamos, este resultado también es válido sobre cualquier extensión  $\hat{L}$  de  $\hat{K}$ .

2. **La ecuación característica tiene más de una raíz.** Fijemos  $\beta = \beta_{i_0}$  para un cierto  $i_0$ , y recordemos que las raíces de la ecuación característica son los  $\beta_i$  con  $i$  variando entre 1 y  $r$ , y que la ecuación característica es

$$\sigma_L(P) = \alpha_n \prod_{i=1}^r (\theta - \beta_i)^{\gamma_i}.$$

En ese caso,  $L$  es una pendiente de  $P'$ . En efecto, ya que  $\sigma_L(P')(\theta) = \sigma_L(P)(\theta + \beta_0)$  tendremos que es

$$\sigma_L(P') = c\theta^{\gamma_{\beta_0}} \prod_{\beta \neq \beta_0} (\theta - (\beta - \beta_0))^{\gamma_\beta}.$$

Ya que tiene más de una raíz, el producto no es 1 y  $\sigma_L(P')$  tiene al menos dos monomios. Por tanto,  $L$  es una pendiente de  $P'$ .

Asimismo, por un argumento totalmente análogo al usado en el caso de una única raíz de la ecuación característica, llegamos a que si una forma lineal  $L'(s_0, s_1) = \lambda'_0 s_0 + \lambda'_1 s_1$  verifica  $\frac{\lambda'_0}{\lambda'_1} > \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  entonces  $L'$  no es una pendiente de  $P'$ . Más concretamente, el argumento, que es aplicable hasta que razonamos que  $L$  no es una pendiente de  $P'$ , cambia aquí de la siguiente manera: ya que  $L$  es una pendiente de  $P'$ , y

más aún, por haber término de orden máximo, dicha pendiente pasa por el punto  $(\deg(P'), -\lambda_0 \deg(P'))$ , se tendrá que el  $L$ -orden de  $P'$  es 0. Por tanto, el máximo, con las fórmulas anteriores, se alcanzará con  $s_0 = d$ , llegándose por tanto a que el  $L'$ -símbolo de  $P'$  será un monomio y por tanto  $L'$  no es una pendiente de  $P'$ .

Además, como  $\sigma_L(P')$  no tiene término independiente (pues se anula en  $\theta = 0$ ) el lado del polígono de Newton de  $P'$ , que pasa por el punto  $(\deg(P'), -\lambda_0 \deg(P'))$ , no pasa por el origen, pues si pasase, habría término independiente al ser el  $L$ -símbolo del término independiente de  $P'$  no nulo. Si pasa, como decíamos, por  $(\deg(P'), -\lambda_0 \deg(P'))$  ya que sí hay término de orden máximo en el  $L$ -símbolo, pues lo había para  $P$ . Así, como  $\mathcal{M}_{\hat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\hat{K}}^R$  tiene más de una pendiente, podemos dividirlo en conexiones de pendiente única (y dimensión menor) y aplicando un argumento de inducción continuar con el proceso.

**Segundo caso:**  $\lambda_1 > 1$ . En este caso, la pendiente no es un entero ( $\kappa = +\infty$ ) y ramificamos en grado  $q = \lambda_1$ . Sea  $\mathcal{M}_{\hat{L}}$  la ramificación, con polinomio subyacente  $P'$ . Por el lema 3.2.12 esta ramificación tiene una única pendiente,  $L'(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + s_1$ . Nos encontramos ahora en el caso  $\lambda_1 = 1$ , que ya ha sido estudiado, con lo que concluye la prueba.  $\square$

*Nota.* En puridad deberíamos argumentar también con las dimensiones de los espacios, pero no ofrecen ningún problema en ningún momento: en todo momento estamos tensorizando por espacios de dimensión 1, y el caso base regular está probado independiente de la dimensión. Asimismo, no hemos probado, pero es trivial, que ramificar múltiples veces equivale a una única ramificación. En particular, si ramificamos en grados  $q_1, \dots, q_n$ , tendremos que ramificar sucesivamente es ramificar en grado  $q_1 q_2 \cdots q_n$ .

*Nota.* Aunque hemos considerado sólo el caso del operador  $x\partial_x$ , la prueba se puede adaptar para ser usada con cualquier operador. De hecho, en [Mal91] se prueba usando  $\partial_x$ .

### 3.3. El teorema clásico de Levelt-Turrittin y su utilidad

Como hemos repetido diversas veces a lo largo del texto nuestro objetivo aquí era afrontar la demostración de la clasificación de los operadores diferenciales desde el punto de vista de Malgrange, más “moderno” y basado en el álgebra abstracta. Esto no invalida, ni mucho menos, las primeras aproximaciones realizadas por Hukuhara, Levelt y Turrittin. Por tanto, explicaremos las líneas generales del proceso seguido por estos tres autores, así

como un refinamiento de la prueba de Levelt aparecido recientemente. También explicaremos brevemente la utilidad del teorema (en cualquiera de sus versiones) más allá de la obvia de clasificar las conexiones meromorfas formales.

### 3.3.1. La aproximación clásica al teorema

El teorema, en su versión clásica, puede ser expresado de manera sintética como sigue:

**Teorema** (Hukuhara-Levelt-Turrittin). *Todo operador diferencial tiene una forma de Jordan, es decir, es expresable como suma de un operador diferencial diagonalizable y un operador lineal nilpotente.*

La primera prueba del teorema de descomposición fue parcial, y dada por Turrittin basándose en ideas de Hukuhara. Ambos propusieron la existencia de una descomposición canónica de operadores diferenciales, aunque no probaron su unicidad. Asimismo, la prueba de Turrittin daba como resultado una descomposición algo más fina y precisa que la de Hukuhara. Su demostración es larga y compleja: tiene un carácter eminentemente computacional (llega incluso a ofrecer el método de cálculo de la descomposición) pero requiere el estudio de nueve casos distintos para llegar al resultado final ([Tur55]). Turrittin considera sistemas diferenciales de la forma

$$\tau^a \frac{\partial X}{\partial \tau} = AX,$$

con  $a$  un entero,  $X$  una matriz cuadrada de orden  $n$  y  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  con entradas series, a priori formales, de coeficientes complejos. Considera asimismo una expresión de  $A$  de la forma  $A = \sum_{k=0}^{+\infty} \tau^k A_k$ . Comienza estudiando las soluciones formales según diversos casos:  $a$  igual o distinto de 0,  $n$  mayor o igual que 1, diversos casos que surgen como subcasos de los anteriores... En total, como decíamos, obtiene nueve casos distintos para llegar a la conclusión de que para toda ecuación de la forma anterior existe una transformación

$$X = P(t)Y$$

con  $t = \tau^{\frac{1}{p}}$  para un cierto  $p$  de forma que la ecuación anterior se reduce a una en forma canónica. Nótese aquí la similitud con las ramificaciones usadas en la prueba desde el punto de vista algebraico. La expresión que ofrece Turrittin de dicha forma canónica es compleja y requiere multitud de detalles para ser ofrecida de manera correcta, por lo que remitimos a la sección 3 del artículo original de Turrittin [Tur55] para consultarla. Pero es sencillo interpretarla de la siguiente manera: con la transformación anterior se llega a una expresión de la forma

$$t^h \frac{\partial Y}{\partial t} = (J + B)Y,$$

donde  $J$  es una matriz de Jordan con 1 y 0 en la subdiagonal y polinomios de cierto tipo en la diagonal. Asimismo,  $B$  es una matriz de exactamente el mismo tipo de que la  $A$  original del sistema.

Levelt refina este resultado tomando un punto de vista más algebraico: aunque opera de manera explícita, abandona el tratar con los sistemas directamente y utiliza operadores diferenciales y conexiones en el mismo sentido que los hemos usado nosotros, así como vectores cíclicos para simplificar la prueba. Más concretamente, Levelt estudia la descomposición de lo que Turriffin denotaba  $A$ , la matriz de coeficientes. Además de llegar a una forma canónica, Levelt prueba su unicidad. Más concretamente, Levelt prueba ([Lev75]) que, tras un cambio de base adecuado (ramificación) un operador diferencial  $D : V \rightarrow V$  (donde  $V$  es un  $\hat{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n$ ) se puede expresar como

$$D = S + N,$$

siendo  $S$  un operador semisimple,  $N$  una matriz cuadrada de orden  $n$  con coeficientes en  $\hat{K}$  y nilpotente y de forma que el par  $(S, N)$  es único y  $SN = NS$ . Un operador  $S : V \rightarrow V$  se dirá semisimple si para todo subespacio  $W$  invariante bajo la acción de  $V$  su complementario también es invariante. Levelt prueba este hecho usando que un operador es semisimple sobre  $\hat{K}$  si, y sólo si, es semisimple en una extensión finita de  $\hat{K}$ . Como consecuencia, argumentando sobre las extensiones de manera similar a como hemos hecho en secciones anteriores con las ramificaciones, obtiene una descomposición de la forma deseada. Prueba también que un operador será semisimple si, y sólo si, tras un cambio de base adecuado (extensión o ramificación) es diagonalizable. Asimismo, como consecuencia del teorema de descomposición llega a que todo operador tiene autovalores (como consecuencia de la forma de Jordan obtenida). Levelt advierte, asimismo de la posibilidad de simplificar la prueba probando de forma independiente el corolario. Esta aproximación al teorema se puede encontrar en [KW17].

### Consecuencias y aplicaciones del teorema

La primera consecuencia del teorema es obvia: podemos clasificar las conexiones meromorfas formales en clases de isomorfismo. Esto redundará en que podemos clasificar los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, y dar una expresión sencilla que puede simplificar la solución (hecho que ya hizo notar y explotó Turriffin). Otras consecuencias más avanzadas, que escapan totalmente al objetivo del presente texto, se pueden encontrar de la mano de Katz ([Kat87, Kat70]) donde, usando tanto la versión original de Turriffin como la versión de Levelt, establece propiedades interesantes sobre las conexiones meromorfas

y los grupos de Galois diferenciales. Otras referencias sobre la utilidad de esta descomposición se pueden encontrar en [KW17], así como en el texto de Malgrange [Mal91], donde, al desarrollar la teoría completamente, establece en un contexto cuál es la relevancia de la descomposición. Otras consecuencias, relacionadas con el paso al caso convergente, las comentaremos superficialmente en la siguiente sección.

### 3.3.2. El teorema de Levelt-Turrittin y su relación con el teorema de Malgrange

Como hemos anunciado, tanto el enunciado de Levelt como el que hemos probado en el presente texto, debido a Malgrange, son equivalentes. Aunque intuitivamente es claro que existe una relación, en un primer momento puede escaparse la equivalencia y, aunque en la literatura se usan ambos enunciados indistintamente, puede resultar chocante encontrar dicha afirmación, principalmente debido al cambio del lenguaje usado. A tal efecto, vamos a probarla formalmente.

#### La descomposición de Malgrange implica la descomposición de Levelt-Turrittin

En efecto, supongamos una conexión meromorfa formal  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  y supongamos, en virtud del teorema de Malgrange, que podemos expresarla como suma de conexiones meromorfas formales elementales. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que hay una única conexión en la suma: si hubiese más, podemos proceder una a una. Como en el caso de la prueba del teorema principal, por simplicidad, supondremos que nuestro operador es  $x\partial_x$ .

Sea pues  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R \otimes \mathcal{G}_{\hat{K}}$  una conexión meromorfa elemental. La dimensión de dicha conexión vendrá dada por la dimensión de  $\mathcal{G}_{\hat{K}}$ . Sea esta dimensión  $d$ . Sea  $e(R)$  la base de  $\mathcal{F}_{\hat{K}}^R$  y  $m$  un vector cíclico de  $\mathcal{G}_{\hat{K}}$ . La matriz del operador  $x\partial_x$  actuando sobre esta conexión respecto de la base  $\{e(R) \otimes (x\partial_x)^i m\}_{i=0, \dots, d-1}$  vendrá dada por

$$x\partial_x = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & \cdots & a_0 \\ 1 & \varphi & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi + a_{d-1} \end{pmatrix},$$

donde  $\varphi = x \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x}$  y los  $a_i$  son los coeficientes de  $(x\partial_x)^d m$  respecto de la base anterior. Esta matriz puede expresarse como

$$x\partial_x = \varphi \text{Id} + A,$$



donde  $A$  es la matriz de la acción de  $x\partial_x$  sobre  $\mathcal{G}_{\hat{K}}$ . Pero la acción de  $x\partial_x$  sobre conexiones constantes ya la hemos estudiado (véase la sección 1 del presente capítulo) y podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $A$  es una matriz de autovalor único  $\alpha$  en forma de Jordan. Por tanto, podemos expresar

$$x\partial_x = (\varphi + \alpha)\text{Id} + J,$$

donde  $J$  es una matriz con 0 y 1 en la superdiagonal. Por la clasificación de las matrices nilpotentes, sabemos que  $J$  será nilpotente, y la otra, por definición, es diagonal, con lo que tenemos la descomposición de Levelt.

### La descomposición de Levelt implica la descomposición de Malgrange

Supongamos un operador  $D$  expresado, de acuerdo a la nomenclatura de Levelt, como  $D = S + N$ . De acuerdo a la clasificación de las matrices nilpotentes podemos expresar este operador en forma de Jordan, es decir, elementos en la diagonal y 0 y 1 en la superdiagonal, siendo el resto de la matriz nula. Además, podemos expresarla por bloques. Por simplicidad, consideremos que  $D$  tiene un único bloque, a saber, el bloque con  $\varphi \in \hat{K}$  en la diagonal y 1 en la superdiagonal. El operador  $\varphi$  será de la forma  $\varphi = a + \tilde{\varphi}$  con  $a$  constante y  $\tilde{\varphi}$  sin término independiente.  $\tilde{\varphi}$ , a su vez, puede ser expresado como un polinomio  $R(x^{-1})$  multiplicado por una unidad de  $\mathbb{C}[[x]]$ . De aquí se deduce directamente el resultado de Malgrange: podemos expresar  $D = (\tilde{\varphi} + a)\text{Id} + J$ , y razonar de manera inversa a como hemos hecho en la otra implicación.

## 3.4. Posible profundización en la teoría algebraica de las ecuaciones diferenciales

Como indicábamos en la introducción el estudio de la clasificación de las conexiones meromorfas formales no es más que el primer paso a la hora de introducirse en el campo del estudio algebraico de las ecuaciones diferenciales. Un primer objetivo razonable es pasar del caso formal al caso convergente. La motivación de esto es sencilla: es un hecho clásico bien conocido en el campo de las ecuaciones diferenciales que, dado un sistema de ecuaciones diferenciales y una solución formal de este, dicha solución induce soluciones convergentes (o analíticas) del sistema. Con esto queremos decir que las soluciones formales se pueden extender, asintóticamente, a soluciones formales. Conviene recalcar el *soluciones*: si el sistema tiene una singularidad irregular, según como nos aproximemos a

dicha singularidad, obtendremos distintas soluciones, y la extensión analítica puede variar. Este hecho es lo que se conoce desde el siglo XIX como *fenómeno de Stokes*.

Hasta la ofrecida por Hukuhara ([Var96]) ya bien entrados en el siglo XX no apareció una descripción totalmente adecuada del fenómeno, y es en los años 70, gracias a Malgrange y Shibuya, cuando se obtiene una aproximación algebraica al fenómeno de Stokes. Sin entrar en detalles, a cada ecuación diferencial se le puede asociar un haz, el haz de Stokes, que determina completamente las soluciones analíticas de la ecuación. Así, una comprensión completa de las soluciones analíticas es una motivación a la hora de continuar con el estudio. La línea a seguir, en concreto, es la siguiente: en primer lugar, por completitud, conviene realizar un estudio de la estructura de los  $\hat{\mathcal{D}}$ -módulos holónomos. El resultado al que se llega para los  $\hat{\mathcal{D}}$ -módulos holónomos es que todo  $\hat{\mathcal{D}}$ -módulo holónimo  $\mathcal{M}$  se puede expresar como suma directa de un  $\hat{\mathcal{D}}$ -módulo holónimo regular (i.e, uno cuyo localizado es una conexión meromorfa formal regular) y un  $\hat{\mathcal{D}}$ -módulo holónimo isomorfo a la parte irregular del localizado de  $\mathcal{M}$ .

A continuación conviene abordar el caso convergente (o analítico). El estudio de las conexiones meromorfas regulares da como resultado una descomposición totalmente análoga al caso formal, y una caracterización sencilla de los  $\mathcal{D}$ -módulos holónomos regulares ([Sab93]). En este punto entra en juego la correspondencia de Riemann-Hilbert para el caso regular. Sin entrar en detalles, esta correspondencia establece una equivalencia de categorías entre los  $\mathcal{D}$ -módulos holónomos regulares y cierta categoría de haces. Conviene destacar que, históricamente, la correspondencia de Riemann-Hilbert motivó el descubrimiento de los haces perversos, una herramienta fundamental en los  $\mathcal{D}$ -módulos. Resulta interesante también plantearse que sucede en el caso irregular: el reciente resultado de D'Agnolo y Kashiwara ([DK16]) generaliza la correspondencia de Riemann-Hilbert al caso irregular.

Se puede observar, por tanto, que el panorama a la hora de continuar un estudio del tema presentado en el trabajo es interesante: lo reciente de los avances de D'Agnolo y Kashiwara ponen de manifiesto que el campo de la teoría algebraica de las ecuaciones diferenciales, especialmente en el caso irregular, goza de buena salud y un amplio horizonte de desarrollo. También es interesante el caso de cuerpos de característica positiva, que es radicalmente distinto al de característica cero. Asimismo conviene destacar que, aunque no se conoce con profundidad, parece existir un vínculo entre los  $\mathcal{D}$ -módulos y la cohomología  $l$ -ádica, lo cual deja abierta otra línea de profundización más.

# Bibliografía

- [Big89] Norman L. Biggs. *Discrete Mathematics*. Oxford Science Publ., revised edition edition, 1989.
- [BM84] J. Briançon and Ph. Maisonobe. Idéaux de germes d’opérateurs différentiels à une variable. *Enseign. Math. (2)*, 30(1-2):7–38, 1984.
- [Cas84] F. Castro. *Théorème de division pour les opérateurs différentielles et calcul des multiplicités*. Thèse de 3<sup>eme</sup> cycle, Université Paris VII, 1984.
- [CN12] F. J. Castro-Jimenez and L. Narvaez-Macarro. Homogenising differential operators. *ArXiv e-prints*, November 2012.
- [Cou95] S. C. Coutinho. *A primer of algebraic D-modules*, volume 33 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [DK16] A. D’Agnolo and M. Kashiwara. Riemann-Hilbert correspondence for holonomic D-modules. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 123:69–197, 2016.
- [Fre03] A. Fredet. Factorization of linear differential operators in exponential extensions. In *Proceedings of the 2003 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 103–110. ACM, New York, 2003.
- [Gin98] V. Ginzburg. Lectures on  $\mathcal{D}$ -modules. Curso en la Universidad de Chicago, 1998.
- [HTT08] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki. *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi.
- [Huk41] M. Hukuhara. Théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires. II. *Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Imp. Univ. A.*, 2:1–25, 1941.
- [Kat70] Nicholas M. Katz. Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (39):175–232, 1970.

- [Kat87] N. M. Katz. On the calculation of some differential Galois groups. *Invent. Math.*, 87(1):13–61, 1987.
- [KS15] M. Kashiwara and P. Schapira. Regular and irregular holonomic D-modules. *ArXiv e-prints*, July 2015.
- [KW17] M. Kamgarpour and S. Weatherhog. A New Approach to Jordan Decomposition for Formal Differential Operators. *ArXiv e-prints*, February 2017.
- [Lev75] A. H. M. Levelt. Jordan decomposition for a class of singular differential operators. *Ark. Mat.*, 13:1–27, 1975.
- [Mal79] B. Malgrange. Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières. 1979.
- [Mal91] B. Malgrange. *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, volume 96 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.
- [NM10] L. Narváez Macarro. D-modules in dimension 1. In *Algebraic approach to differential equations*, pages 1–51. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010.
- [Pra83] C. Praagman. The formal classification of linear difference operators. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 45(2):249–261, 1983.
- [Sab93] C. Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. In *Éléments de la théorie des systèmes différentiels. D-modules cohérents et holonomes (Nice, 1990)*, volume 45, pages 1–80. Hermann, Paris, 1993.
- [Sab08] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform. In *Singularities I*, volume 474 of *Contemp. Math.*, pages 309–330. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Sab09] C. Sabbah. Introduction to Stokes structures. *ArXiv e-prints*, December 2009.
- [Sab10] C. Sabbah. Équations différentielles linéaires algébriques. Curso en la Universidad de Estrasburgo, 2010.
- [Smi86] S. P. Smith. Differential operators on the affine and projective lines in characteristic  $p > 0$ . In *Séminaire d’algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin, 37ème année (Paris, 1985)*, volume 1220 of *Lecture Notes in Math.*, pages 157–177. Springer, Berlin, 1986.

- 
- [Tur55] H. L. Turriffin. Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. *Acta Math.*, 93:27–66, 1955.
- [Var96] V. S. Varadarajan. Linear meromorphic differential equations: a modern point of view. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 33(1):1–42, 1996.
- [Was87] W. Wasow. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Dover Publications, Inc., New York, 1987. Reprint of the 1976 edition.