

TRABAJO FIN DE GRADO



El problema de la asignación de costes en problemas de optimización.

Autor: *José Ramón Sánchez Leo*

Tutor: *Justo Puerto Albandoz*

Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Junio 2017

Abstract

The problem of cost allocation in optimization problems can be solved by game theory, in particular with cooperative games. Actually, in this work we will try to give conditions so that the core of a cooperative games is nonempty, since if it is nonempty we will have a solution.

Índice general

1. Introducción	7
2. Juegos Cooperativos	11
2.1. Conceptos Introdutorios	12
2.2. Core	17
2.3. Colecciones equilibradas	20
3. Juego de Asignación	29
3.1. Matching Markets	33
4. Juego de Producción Lineal	37
4.1. Aplicación con CPLEX	41
5. Juegos de Localización	47
5.1. Problema Continuo de Localización	48
5.2. Juego de localización minimax	54
5.3. Juego de localización de Weber, con coste fijo	57
5.4. Juego de localización de Weber, con coste fijo variable	59
6. Juegos de Radio y Diámetro	65
6.1. Espacios métricos de red	70
6.1.1. Grafos medianos	74
6.1.2. MSTG y MRLG	75
6.2. Espacios métricos discretos	76
6.3. l_p espacio métrico sobre \mathbb{R}^d	77
6.3.1. Espacios euclídeos	82

7. Conclusiones	85
A. Aplicación del Juego de Producción Lineal	89

Capítulo 1

Introducción

Vamos a analizar el problema de asignación de costes mediante la teoría de juegos. Es necesario observar que dicha teoría tiene dos enfoques básicos en el análisis, de lo que denominaremos, un juego: cooperativo y no cooperativo.

Antes de analizar las diferencias entre ambos tipos de juegos, contextualicemos históricamente la teoría de juegos. Los postulados básicos de la teoría de juegos aparecen durante las décadas de los 40 y 50 de la mano de Johan Von Neumann, Oskar Morgenstern y John Nash. Esta teoría aparece con idea de resolver conflictos meramente económicos, cuando los principales economistas la conocieron cambiaron su forma de tomar sus decisiones. Esto se debe a que Nash, Neumann y Morgenstern concluyen que: el interés individual, el egoísmo y la racionalidad a la hora de tomar decisiones, conducen a los seres humanos a una situación no óptima; y, esto va en contra de lo que planteaba la economía clásica, dada por Adam Smith. Los textos más importantes que aparecieron entonces fueron [23] y [19].

La diferencia principal entre un juego cooperativo y uno no cooperativo es que en el cooperativo los jugadores deciden enfrentarse a una situación de forma conjunta y, si es posible, tomar una postura ante esta para así minimizar costes, o maximizar beneficios; luego comparten información y las preferencias de cada uno con el resto. Sin embargo, en los juegos no cooperativos cada jugador trata de solucionar una situación por su cuenta, sin compartir necesariamente información con el resto.

En los juegos no cooperativos es necesario hacer dos distinciones básicas entre juegos estáticos y juegos dinámicos. En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones de forma simultánea (es decir, cada jugador toma su decisión sin conocer la decisión del resto), mientras que en los dinámicos puede darse el caso de que un jugador conozca ya las decisiones de otro antes de decidir.

En los juegos cooperativos se analizan las posibilidades de que algunos o todos los agentes, jugadores, lleguen a un acuerdo sobre que decisiones va a tomar cada uno.

Dentro de la teoría de juegos, los juegos cooperativos son la herramienta más conveniente para solucionar problemas de asignación de costes, ya que su objetivo es repartir costes o beneficios, dependiendo de la situación, entre varios agentes.

Ya que nos vamos a centrar en los juegos cooperativos, vamos a analizar su contexto histórico. Ya en [23], en 1944, aparece el concepto de juego cooperativo. En cuatro artículos entre 1950 y 1953 John Nash hizo contribuciones importantes tanto a la teoría de juegos no cooperativa. Nash demostró la existencia de un equilibrio estratégico para los juegos no cooperativos -el equilibrio de Nash- y propuso el "programa de Nash", en el que sugirió acercarse al estudio de los juegos cooperativos a través de su reducción a forma no cooperativa. En 1963, O. N. Bondareva estableció que para un juego TU su core es no vacío si es equilibrado, veasé [1]. Así se obtuvo una condición necesaria para que el core, de un juego cooperativo, fuera no vacío. Esto es el conocido como Teorema de Bondareva-Shapley que enunciaremos y demostraremos en el Capítulo 2.

En los juegos cooperativos se parte de que es posible que algunos jugadores puedan llegar a acuerdos vinculantes, por lo que se trata de estudiar los resultados que puede obtener cada una de las coaliciones de jugadores que se puedan formar. Se trata, por tanto de estudiar cómo pueden actuar las distintas posibles coaliciones de jugadores, interesándonos los comportamientos colectivos y sin que haga falta detenerse en las acciones individuales de cada uno de los miembros de una coalición.

En el Capítulo 2, de este trabajo fin de grado, introducimos las primeras ideas y conceptos necesarios para tratar juegos cooperativos, dichos conceptos son necesarios para el resto de capítulos. El objetivo principal es introducir el

concepto de core, como solución de un juego cooperativo, y dar una condición necesaria y suficiente para que sea no vacío.

Durante el Capítulo 3, analizamos uno de los tipos de juegos más importantes para la teoría de juegos: el Juego de Asignación. En pocas palabras podríamos decir que se trata de una situación de reparto, por ejemplo de bienes o tareas, entre usuarios que demandan dichos servicios. El resultado principal de este capítulo es que el core de este juego es no vacío. Además trataremos situaciones reales que fueron resueltas mediante el estudio de "Matching Markets", que esta muy relacionado con el Juego de Asignación. Esto último dio lugar a un premio Nobel.

Seguidamente en el Capítulo 4, desarrollamos el Juego de Producción Lineal. Se trata de un juego en el que diversos agentes tratan de usar de forma conjunta sus bienes para producir determinados productos que se puedan vender a un precio de mercado fijo. De nuevo, el resultado principal es el teorema que prueba que el core de este juego es no vacío. También, hemos resuelto una situación de producción lineal usando CPLEX mediante NEOS-SERVER, el código se puede consultar en el Apéndice A.

A continuación, en el Capítulo 5, tratamos los Juegos de Localización. Al comienzo damos las ideas principales de estos juegos, introduciendo el concepto de situación de localización. Después, tratamos distintos casos concretos de juegos de localización: el minimax, el de Weber con coste fijo y el de Weber con coste fijo variable. Como antes, los resultados más importantes son aquellos que dan condiciones suficientes para que el core de estos juegos sea no vacío. Aquí encontraremos una variedad de ejemplos de cada situación.

Tras esto, en el Capítulo 6, estudiamos un caso similar a los del capítulo anterior pero que se definen de una forma ligeramente distinta, veremos los Juegos de Radio y Diámetro. En este capítulo estudiaremos la existencia de puntos en el core y la existencia de representaciones polinomiales de este, centrándonos en redes. El juego que estudiaremos, principalmente, será el juego de localización de radio mínimo. De nuevo, hemos añadido una gran variedad de ejemplos de las distintas situaciones.

Para terminar, en el último capítulo se incluyen las conclusiones de este Trabajo Fin de Grado.

Capítulo 2

Juegos Cooperativos

En este capítulo vamos a proporcionar los conceptos necesarios para poder analizar distintas aplicaciones de los juegos cooperativos. Para esto nos hemos basado en [13] y en [3].

La idea principal de los juegos cooperativos es analizar las distintas coaliciones que pueden formar los individuos implicados en una situación para, o bien, maximizar los beneficios que pueden obtener, o bien, minimizar los costes que les supone dicha situación. El objetivo de un juego cooperativo es asignar un valor a cada grupo de individuos, coaliciones, para poder elegir la óptima para todos ellos.

Nuestro objetivo principal, durante este capítulo, es estudiar el core de un juego cooperativo y dar una condición necesaria y suficiente para que un juego cooperativo tenga core no vacío. Veremos que el core se puede entender como solución de un juego cooperativo.

Al comienzo del capítulo encontraremos las ideas básicas y necesarias para poder estudiar cualquier juego cooperativo, los conceptos de coalición y función característica. Se definen dos formas de relacionar dos juegos cooperativos, S-equivalencia e isomorfismo. Además, definimos distintos tipos de juegos cooperativos. También se define la relación de dominio entre dos imputaciones, que es el concepto clave para definir el core.

En la segunda sección, se desarrolla el concepto de core, que será muy útil durante todo el Trabajo Fin de Grado. En esta sección, hemos añadido algunos

ejemplos de juegos con core vacío o no vacío.

Para finalizar este capítulo, definimos el concepto de colección equilibrada y se da una condición necesaria y suficiente para que el core de un juego sea no vacío, Teorema de Bondareva-Shapley. Antes se ven algunas propiedades de dichas colecciones y, para terminar, se ven algunos ejemplos donde se ilustra el Teorema de Bondareva-Shapley.

2.1. Conceptos Introdudctorios

Definamos los conceptos necesarios para desarrollar el Trabajo Fin de Grado.

Definición 2.1. Para un juego de n personas, denotamos $N = \{1, 2, \dots, n\}$ al conjunto de todos los jugadores. Cualquier subconjunto no vacío de N (incluidos N y todos los subconjuntos de un solo elementos) es llamado coalición.

Definición 2.2. Se entiende como función característica de un juego de n personas una función v de valor real definida en los subconjuntos de N que asigna cada subconjunto $S \subseteq N$ el mismo valor (a S) del juego de 2 personas entre S y $N - S$, suponiendo que estas coaliciones se formen.

Así, $v(S)$ es la cantidad de utilidad que los miembros de S pueden obtener por el juego, hagan lo que hagan el resto de jugadores. A partir de esta definición se tiene que $v(\emptyset) = 0$.

Sean S y T dos coaliciones disjuntas, esta claro que se puede lograr al menos lo mismo haciendo una coalición juntos que permaneciendo por separado. Por tanto, obtenemos la propiedad de superaditividad: $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

Definición 2.3. Un juego de n personas en forma de función característica es una función real v , definida en los subconjuntos de N , que satisfacen:

$$v(\emptyset) = 0, \tag{2.1}$$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad \text{si } S \cap T = \emptyset. \tag{2.2}$$

La propiedad (2.2) se conoce como superaditividad, algunos autores prescinden de ella y denotan este tipo de juegos como impropios y los que la verifican como propios. En general, identificaremos un juego con su función característica.

Definición 2.4. Se dice que un juego (en forma de función característica) es de suma-constante si,

$$\forall S \subseteq N, \quad v(S) + v(N - S) = v(N). \quad (2.3)$$

Definición 2.5. Una imputación, para el juego v de n personas, es un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ que satisface:

1. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$,
2. $x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N$.

Notaremos por $E(v)$ al conjunto de todas las imputaciones en el juego v .

Se podría argumentar que, en el caso de suma constante, la primera condición es demasiado fuerte, ya que es muy probable que los jugadores no logren llegar a ningún entendimiento y terminarán obteniendo menos que la cantidad total, $v(N)$, que pueden obtener. Si bien esta es una objeción válida, se verá más adelante que muchos de nuestros conceptos de solución eliminan todos los vectores que no satisfacen esta condición.

La pregunta ahora es la siguiente: ¿cuál de todas las imputaciones se obtendrá? Esto es, por supuesto, un problema difícil (o incluso imposible). Sin embargo, hay una condición en la que este problema es trivial: es decir, cuando el conjunto $E(v)$ tiene sólo un elemento. En este caso, esa imputación única será el resultado obvio. No importa que coaliciones se formen. Esto da lugar a la distinción entre los juegos esenciales y los no esenciales. Está claro (por súperadictividad, repetida n veces) que

$$v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\}). \quad (2.4)$$

Ahora, $E(v)$ tendrá sólo un punto si la igualdad se mantiene en (2.4). Así tenemos:

Definición 2.6. Un juego v se dice esencial si

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\}) \quad (2.5)$$

En otro caso, v será inessential.

Dado un un juego v , sean x e y dos imputaciones. Supongamos que los jugadores son confrontados entre elegir x e y . En general se intenta usar el siguiente criterio:

Definición 2.7. Sean x o y dos imputaciones y sea S una coalición. Diremos que x domina a y por S si:

$$\begin{aligned} (a) \quad & x_i > y_i \quad \forall i \in S \\ (b) \quad & \sum_{i \in S} x_i \leq v(S) \end{aligned} \tag{2.6}$$

La condición (a) nos indica que todos los miembros de S prefieren x a y y la condición (b) que son capaces de obtener lo que x les da.

Se denota como: $x \succ_S y$

Es fácil comprobar que la relación \succ_S (para cualquier S dado) es una relación de orden parcial. Por otro lado, la relación \succ_S , mientras que es irreflexiva, no es transitiva ni antisimétrica (ya que, la coalición S puede ser distinta en diferentes casos).

Puesto que planeamos analizar los juegos por medio de la relación de dominio, estamos naturalmente interesados en juegos cuyos conjuntos de imputaciones tienen la misma estructura de dominación.

Definición 2.8. Dos juegos de n personas, u y v , son isomorfos si existe una función inyectiva que va de $E(u)$ a $E(v)$ de tal manera que, para $x, y \in E(u)$, y $S \subset N$, $x \succ_S y \leftrightarrow f(x) \succ_S f(y)$.

Puede ser difícil decir si dos juegos son isomorfos en este sentido. Tenemos, sin embargo, el siguiente criterio:

Definición 2.9. Se dice que dos juegos de n personas, u y v , son S -equivalentes si existe un número positivo r y n constantes reales $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tales que, $\forall S \subseteq N$,

$$v(S) = ru(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i \tag{2.7}$$

Fundamentalmente, si dos juegos son S -equivalentes, podemos obtener uno del otro mediante una transformación lineal en los espacios de utilidad de varios jugadores. Es fácil comprobar que S -equivalente implica isomorfismo:

Teorema 2.1. *Si u y v son S – equivalentes, entonces son isomorfismo.*

Demostración. Asumimos que u y v son S – equivalentes. Consideremos la función definida sobre $E(v)$,

$$f(x) = rx + \alpha$$

donde r y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ son como en la Definición 2.9. Es fácil comprobar que, si $x \in E(u)$, $f(x) \in E(v)$. Además, si $x \succ_S y$, esta claro que $f(x) \succ_S f(y)$. Por lo tanto, f es un isomorfismo. \square

Por lo tanto, la condición de S – equivalente es suficiente para ser isomorfismo.

Es obvio que S – equivalente es una relación de equivalencia. Es interesante elegir un juego particular de cada clase de equivalencia.

Definición 2.10. Se dice que un juego esta (0,1) normalizado si:

$$\begin{aligned} (i) \quad & v(\{i\}) = 0 \quad \forall i \in N \\ (ii) \quad & v(N) = 1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Teorema 2.2. *Si u es un juego esencial, es S – equivalente a un juego (0,1) normalizado.*

La ventaja de elegir estos juegos es que, en tales juegos, el valor $v(S)$ de una coalición nos dice la cantidad extra que ganan sus miembros por ella y que todas las imputaciones son vectores de probabilidad.

El conjunto de los juegos de n personas normalizados (0,1) es el conjunto de todas las funciones reales, v , definidas en los subconjuntos de N , tales que

$$\begin{aligned} (i) \quad & v(\emptyset) = 0; \\ (ii) \quad & v(\{i\}) = 0 \quad , \forall i \in N; \\ (iii) \quad & v(N) = 1; \\ (iv) \quad & v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad , \text{si } S \cap T = \emptyset. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Estas cuatros condiciones determinan un conjunto convexo de dimensión $2^n -$

$n - 2$. Si el juego es de suma constante, tenemos una condición adicional.

$$(v) \quad v(n - S) = v(N) - v(S) \quad , \forall S \subseteq N. \quad (2.10)$$

Con esta nueva condición nuestro conjunto tiene dimensión $2^{n-1} - n - 1$. Por lo tanto, es claro que la dimensión del conjunto de juegos de n personas en suma constante es la misma que la del conjunto de juegos de $(n - 1)$ personas. De hecho son conjuntos congruentes.

En particular, si u es un juego de $(n - 1)$ personas normalizado $(0, 1)$, puede ser ampliado a un juego de suma constante de n personas mediante la adición de un nuevo jugador n , definimos:

$$v(S) = \begin{cases} u(S) & \text{si } n \notin S \\ 1 - u(N - S) & \text{si } n \in S. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que es un juego de suma constante.

Definamos ahora dos tipos de juegos especiales que son de nuestro interés:

Definición 2.11. Un juego v se dice simétrico si $v(S)$ depende solo del número de elementos de S .

Definición 2.12. Un juego normalizado en norma $(0, 1)$ se dice simple si, para cada $S \subseteq N$, se tiene que, o bien, $v(S) = 0$, o bien, $v(S) = 1$. Un juego es simple si su normalización en $(0, 1)$ es simple.

Esencialmente, un juego simple es aquel en el que cualquier coalición o bien gana (valor 1) o pierde (valor 0), sin posibilidad de tomar valores intermedios. Como tales, los juegos simples son aplicables a ciencias políticas, como juegos de votaciones en elecciones.

Entre los juegos simples, distinguimos un clase especial: los juegos de mayor peso:

Definición 2.13. Sea (p_1, p_2, \dots, p_n) un vector no negativo, y sea q satisfaciendo:

$$0 < q \leq \sum_{i=1}^n p_i.$$

Entonces, el juego de mayor peso $[q; p_1, p_2, \dots, p_n]$ es el juego simple v definido por

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{i \in S} p_i < q \\ 1 & \text{si } \sum_{i \in S} p_i \geq q. \end{cases}$$

2.2. Core

Ahora vamos a proceder al análisis de juegos en términos de relación de dominio. Comenzamos, obviamente, estudiando las imputaciones no dominadas.

Definición 2.14. El conjunto de todas las imputaciones no dominadas para un juego v es llamado Core. Lo denotaremos como $C(v)$.

Teorema 2.3. *El core del juego v es el conjunto de todos los vectores x satisfaciendo:*

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad , \forall S \subseteq N \\ (b) \quad & \sum_{i \in N} x_i = v(N). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lo podemos escribir en forma de conjunto:

$$Core(v) = C(v) = \{x \in \mathbb{R}_+^N : x(N) = v(N); x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\} \tag{2.12}$$

Demostración. Si $S = \{i\}$, la primera condición se reduce a $x_i \geq v\{i\}$.

Supongamos que x satisface ambas condiciones, y que $y_i > x_i, \forall i \in S$. Pero esto, junto con (a), significa que

$$\sum_{i \in S} y_i > v(S),$$

luego no es posible que $x \succ_S y$. Por lo tanto, $x \in C(v)$.

Por el contrario, supongamos que y no satisface las condiciones. Si no satisface la segunda ni siquiera es una imputación y por lo tanto no está en $C(v)$. Supongamos, entonces que hay algún $S \subseteq N$ no vacío tal que:

$$\sum_{i \in S} y_i = v(S) - \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$. Sea:

$$\alpha = v(N) - v(S) - \sum_{i \in N-S} x_i = v(\{i\})$$

Es fácil ver, por superaditividad, que $\alpha \geq 0$. Finalmente, sea s el cardinal de S .

Ahora definimos z como:

$$z_i = \begin{cases} y_i + \frac{\varepsilon}{s} & , i \in S \\ v(\{i\}) + \frac{\alpha}{n-s} & , i \notin S. \end{cases}$$

Se ve fácilmente que z es una imputación y, además $z \succ_S y$. Por lo tanto, $y \notin C(v)$. \square

Observación 2.1. Más adelante, en el Juego de Localización el core será el de un juego de coste (N, c) que es el siguiente:

$$Core(v) = C(v) = \{x \in \mathbb{R}_+^N : x(N) = v(N); x(S) \leq v(S), \forall S \subseteq N\} \quad (2.13)$$

El Teorema 2.3 muestra que $C(v)$ es un conjunto convexo cerrado (ya que se define con desigualdades no estrictas). Esto es muy interesante, ya que la teoría económica clásica suele dar el core como "solución" a la mayoría de los problemas de teoría de juegos.

Generalmente, por supuesto, el Core puede tener más de un punto. Esto no es una gran desventaja; simplemente significa que más de un resultado es estable. La gran dificultad con el core es que puede ser vacío.

Teorema 2.4. Si v es un juego esencial de suma constante, entonces $C(v) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos $x \in C(v)$. Para cualquier $i \in N$, sabemos que

$$\sum_{j \in N - \{i\}} x_j \geq v(N - \{i\})$$

pero, al ser un juego de suma constante:

$$v(N - \{i\}) = v(N) - v(\{i\})$$

y, ya que x es una imputación, tenemos $x_i \leq v(\{i\})$. Dado que v es esencial,

tenemos

$$\sum x_i \leq \sum v(\{i\}) < v(N).$$

Pero esto significa que $x \notin E(v)$. La contradicción implica que $C(v) = \emptyset$. \square

Ejemplo 2.1. Ahora analizamos el caso particular de los llamados Juegos Simples. Vamos a comprobar que el core de estos juegos normalizados $(0, 1)$ es no vacío en ciertas condiciones.

Sea v un juego simple normalizado $(0, 1)$. Decimos que el jugador i es un jugador vetado si

$$v(N - \{i\}) = 0$$

donde, como hemos observado antes, N es el conjunto de todos los jugadores.

Supongamos que v no tiene jugadores vetados. Entonces, para cada $i \in N$, tenemos $v(N - \{i\}) = 1$. Para que la imputación x este en el *core*, tiene que verificar:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} x_j &= v(N) = 1, \\ \sum_{j \neq i} x_j &\geq v(N - \{i\}) = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_i = 0, \forall i$, y entonces x no puede ser una imputación. Esta contradicción prueba que $Core(v) = C(v) = \emptyset$.

Supongamos ahora que v tiene uno o más jugadores vetados; sea S el conjunto de todos ellos. Sea x tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &= 1, \\ x_i &\geq 0 \quad \text{para todo } i \in S, \\ x_i &= 0 \quad \text{para } i \notin S. \end{aligned}$$

Ahora, si T es una coalición ganadora, tenemos que $S \subset T$, entonces

$$\sum_{i \in T} x_i \geq \sum_{i \in S} x_i = 1 = v(T),$$

y podemos comprobar que $x \in C(v) = Core(v)$. Por lo tanto, $C(v) \neq \emptyset$, y concluimos que, para un juego simple v , el core es no vacío si y sólo si hay al menos un jugador vetado.

2.3. Colecciones equilibradas

El Teorema 2.4 nos proporciona un caso en el que el *core* es vacío. Esto parece de interés para determinar, de forma más general, aquellos juegos que tienen *core* no vacío. Es fácil comprobar que, para cualquier n , el conjunto de juegos de n personas con *core* no vacío (pensado como un subconjunto del espacio euclídeo de dimensión $2^n - 1$) es un cono convexo. Supongamos que tenemos dos juegos v y w con *core* no vacío, con $x \in C(v), y \in C(w)$. Es fácil comprobar que, para dos escalares no negativos r y s ,

$$rx + sy \in C(rv + sw).$$

Con el fin de caracterizar este cono convexo, observemos que $C(v) = \emptyset$ si y sólo si el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín} \quad \sum_{i=1}^n x_i = z \\ & \text{s.a.:} \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \text{para toda } S \subset N. \end{aligned} \tag{2.14}$$

tiene un mínimo $z^* \leq v(N)$. Para, en tal caso, cualquier x^* mínimo esta en el *core*. A la inversa, si $x \in C(v)$, entonces x satisface la condición de (2.14) y, además, $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Por lo tanto, el mínimo debe ser $z^* \leq v(N)$.

Ahora consideremos el dual del problema (P):

$$\begin{aligned} (P^*) \quad & \text{máx} \quad \sum_{S \subset N} y_S v(S) = q \\ & \text{s.a.:} \quad \sum_{i \in S \subset N} y_S = 1 \quad \text{para todo } i \in N, \\ & \quad \quad y_S \geq 0 \quad \text{para toda } S \subset N. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ambos problemas de programación lineal (P) y (P*) son factibles, y entonces el mínimo, z^* , tiene que ser igual al máximo, q^* . Por lo tanto, $C(v) \neq \emptyset$ si y sólo si el máximo $q^* \leq v(N)$. Esto lo podemos escribir con las siguientes palabras,

Teorema 2.5. *Una condición necesaria y suficiente para que un juego v tenga *core* no vacío, $C(v) \neq \emptyset$, es que, para cada vector no negativo $(y_S)_{S \subset N}$ que*

verifique la primera condición de (2.15), tengamos

$$\sum_{S \subset N} y_S v(S) \leq v(N). \quad (2.16)$$

En este formato, el Teorema 2.5 no es una herramienta muy eficiente. Ya que necesita resolver el programa lineal (P) , que no es más simple que su dual. Sin embargo, resulta que podemos caracterizar los puntos extremos del programa dual (P^*) con un concepto bastante fino: que son las colecciones equilibradas.

Definición 2.15. Sea $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ colección no vacía de subconjuntos de $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Diremos que \mathcal{C} es N -equilibrado (o simplemente, equilibrado cuando no haya confusión respecto a N) si existen números positivos y_1, y_2, \dots, y_m tales que, para cada $i \in N$,

$$\sum_{j: i \in S_j} y_j = 1.$$

Entonces $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ es el vector de equilibrio para \mathcal{C} ; los y_j son llamados coeficientes de equilibrio.

Ejemplo 2.2. La colección $\{N\}$ es claramente equilibrada y, de hecho, cualquier partición de N (cualquier colección de conjuntos no vacíos disjuntos cuya unión es N) es equilibrada. Los coeficientes de equilibrio aquí son todos 1.

Ejemplo 2.3. Sea $N = \{1, 2, 3\}$. Entonces la colección

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

es equilibrada con coeficientes de equilibrio $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. De forma general, para cualquier N , la colección de todos los conjuntos $\binom{N}{s}$ con s elementos es equilibrada, con todos los coeficientes de equilibrio igual a $\binom{n-1}{s-1}^{-1}$.

Ejemplo 2.4. Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

es equilibrada, con vector de equilibrio $y = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Esencialmente, una colección equilibrada es una partición generalizada (como hemos visto en el Ejemplo 2.2). Hay, por supuesto, muchas más colecciones N -equilibradas que particiones de N . La siguiente propiedad de las colecciones equilibradas es de interés.

Teorema 2.6. *La unión de colecciones equilibradas es equilibrada.*

Demostración. Sean $\mathcal{C} = \{S_1, \dots, S_m\}$ y $\mathcal{D} = \{T_1, \dots, T_k\}$ colecciones equilibradas, con vectores de equilibrio respectivos (y_1, \dots, y_m) y (z_1, \dots, z_k) . Entonces,

$$\mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{R_1, \dots, R_q\}$$

donde $q \leq m + k$. Para cada t , $0 < t < 1$, definimos:

$$w_j = \begin{cases} ty_i & \text{si } R_j = S_i \in \mathcal{C} - \mathcal{D} \\ (1-t)z_p & \text{si } R_j = T_p \in \mathcal{D} - \mathcal{C} \\ ty_i + (1-t)z_p & \text{si } R_j = S_i = T_p \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \end{cases}$$

Es fácil comprobar que (w_1, \dots, w_q) es un vector de equilibrio para $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. Por lo tanto, la unión de dos colecciones equilibradas es equilibrada, y, por inducción, la unión de colecciones equilibradas es equilibrada. \square

Lema 2.1. *Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} colecciones equilibradas tales que: $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ con $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$. Entonces existe una colección equilibrada \mathcal{B} tal que:*

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \mathcal{D},$$

con $\mathcal{B} \neq \mathcal{D}$. Además, el vector de equilibrio \mathcal{D} no es único.

Demostración. Sean:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{S_1, S_2, \dots, S_k\}, \\ \mathcal{D} &= \{S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_m\}, \quad m > k, \end{aligned} \tag{2.17}$$

que tienen como vectores de equilibrio (y_1, \dots, y_k) y (z_1, \dots, z_m) , respectivamente. Para $t > 0$, definimos:

$$\begin{aligned} w_j &= (1+t)z_j - ty_j, \quad j = 1, \dots, k, \\ w_j &= (1+t)z_j, \quad j = k+1, \dots, m. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Para $t > 0$ pequeño, vemos que todos $w_j > 0$. Además, para $i \in N$,

$$\sum_{j:i \in S_j \in \mathcal{D}} w_j = (1+t) \sum_{j:i \in S_j \in \mathcal{D}} z_j - t \sum_{j:i \in S_j \in \mathcal{C}} y_j = 1,$$

y entonces w es un vector equilibrado para \mathcal{D} . Puesto que $w_j > z_j$ para $k+1 \leq j \leq m$, vemos que z no es único.

Ahora, debe haber algún j , $1 \leq j \leq k$, tal que $y_j > z_j$, cuando no sea así, para cualquier $i \in S_{k+1}$, tendríamos

$$1 = \sum_{i \in S_j \in \mathcal{C}} y_j \leq \sum_{i \in S_j \in \mathcal{C}} z_j < \sum_{i \in S_j \in \mathcal{D}} z_j = 1,$$

lo cual es una contradicción. Establecemos, entonces,

$$t = \min \left\{ \frac{z_j}{y_j - z_j} : y_j > z_j \right\}.$$

Sea $\mathcal{C}' = \{S_j | S_j \in \mathcal{C}, (1+t)z_j = ty_j\}$, y el conjunto: $\mathcal{B} = \mathcal{D} - \mathcal{C}'$. Claramente, \mathcal{C}' es una subcolección no vacía de \mathcal{C} , y entonces tenemos:

$$\mathcal{B} \neq \mathcal{D}, \quad \mathcal{B} \cup \mathcal{C}' = \mathcal{D}.$$

Además, $w_j > 0$, $\forall S_j \in \mathcal{B}$, y esto es fácil de comprobar (para este valor de t) w es un vector de equilibrio de la colección \mathcal{B} . Por lo tanto, \mathcal{B} es como deseamos. □

A continuación, definimos el concepto de colección mínima equilibrada como una colección equilibrada que no tiene subcolecciones propias equilibradas.

Teorema 2.7. *Cualquier colección equilibrada es unión de colecciones mínimas equilibradas.*

Demostración. Por inducción sobre m (el número de conjuntos en la colección). El teorema se verifica claramente cuando $m = 1$, la única colección equilibrada con un conjunto es $\{N\}$, que evidentemente es cierto.

Supongamos, entonces, que esto es cierto para todas las colecciones con $m-1$ o menos elementos. Sea \mathcal{D} una colección equilibrada con m elementos.

Si \mathcal{D} es en sí misma mínima, entonces es claramente unión de colecciones mínimas equilibradas.

Si \mathcal{D} no es mínima, entonces tenemos que probar que tiene una subcolección propia equilibrada, \mathcal{C} , y, por el lema anterior, existirá otra subcolección propia equilibrada, \mathcal{B} , tal que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \mathcal{D}$. Como \mathcal{B} y \mathcal{C} son subcolecciones propias, cada uno tendrá $m - 1$ o menos elementos, y por lo tanto cada uno se puede expresar como unión de colecciones mínimas equilibradas. Pero entonces \mathcal{D} es también unión de colecciones mínimas equilibradas. \square

Ahora, vamos a demostrar un resultado técnico relativo a la suma de los coeficientes de equilibrio de la familia de coaliciones equilibradas. Recordemos que una colección de coaliciones, $\mathcal{B} \subset 2^N$, es equilibrada si y sólo si existe un conjunto de coeficientes reales positivos $\{\gamma_S / S \in \mathcal{B}\}$ (coeficientes de equilibrio) satisfaciendo que $\sum_{S: a_i \in S} \gamma_S = 1$ para cada $a_i \in N$. El conjunto de los coeficientes de equilibrio asociados a una colección equilibrada no tiene porque ser único. Sin embargo, cada colección equilibrada mínima de coaliciones (en el sentido de que no contiene otra recolección equilibrada) tiene un único conjunto de coeficientes de equilibrio (como ya hemos probado en el Teorema 2.8). También hemos probado anteriormente que un juego (N, c) tiene *core* no vacío si y sólo si para cada coalición mínima equilibrada \mathcal{B} , con coeficientes de equilibrio $\{\gamma / S \in \mathcal{B}\}$, se verifica que $\sum_{S \in \mathcal{B}} \gamma_S c(S) \geq c(N)$ (Teorema de Bondareva-Shapley, observemos que la desigualdad es la contraria al ser un juego de coste).

Observemos que solo la colección equilibrada con coeficientes de equilibrio que suman 1 es $\mathcal{B} = 1$. En efecto, para cada colección equilibrada \mathcal{B} y cada $a_i \in N$, $\sum_{S: a_i \in S} \gamma_S = 1$; si, además, $\sum_{S \in \mathcal{B}} \gamma_S = 1$ entonces, para cada $S \in \mathcal{B}$ y cada $a_i \in N$, $a_i \in S$. Por lo tanto, $S = N$, y por lo tanto $\mathcal{B} = \{N\}$. Diremos que $\mathcal{B} = \{N\}$ es la colección trivial.

El siguiente resultado acota la suma de los coeficientes de equilibrio para cualquier colección no trivial equilibrada.

Lema 2.2. *Sea \mathcal{B} una colección no trivial equilibrada con coeficientes de equilibrio $\{y_S : S \in \mathcal{B}\}$. Entonces,*

$$\frac{n}{n-1} \leq \sum_{S \in \mathcal{B}} y_S \leq n.$$

Demostración. Consideremos el siguiente problema de programación lineal (1):

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{S \in 2^N \setminus \{N\}} y_S \\ \text{s. a.:} \quad & \sum_{S \in 2^N \setminus \{N\}: a_i \in S} y_S = 1, \\ & y_s \geq 0, \forall S \in 2^N \setminus \{N\}. \end{aligned}$$

La solución de este problema es un conjunto de coeficientes equilibrados de una colección no trivial con suma mínima ($\mathcal{B} = \{S \in 2^N : y_S > 0\}$). Denotemos la coalición $N \setminus \{a_j\} = \{a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n\}$ por $-j$. Consideremos la base B del problema (1) cuyas columnas corresponden a $y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-n}$. En este problema la matriz de B , su inversa B^{-1} y la transformación por el lado derecho $B^{-1}b$ son:

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} -(n-2) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(n-2) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -(n-2) \end{bmatrix}, \\ B^{-1} &= \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} -(n-2) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(n-2) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -(n-2) \end{bmatrix}, \\ B^{-1}b &= \left[\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1} \right]^t. \end{aligned}$$

Los costes reducidos para cualquier coalición S con $1 \leq k \leq n-1$ jugadores son:

$$\begin{aligned} c_b B^{-1} a_S - c_S &= \frac{k}{n-1} - 1 < 0 \quad \text{sii } k < n-1, \\ c_b B^{-1} a_S - c_S &= \frac{n-1}{n-1} - 1 = 0 \quad \text{sii } k = n-1. \end{aligned}$$

Entonces B es una base asociada con una solución óptima de (1), que prueba el límite inferior. La prueba para el límite superior es directa y se sigue tomando la colección cuyos elementos son todos los conjuntos de tamaño uno con coeficientes iguales a 1. \square

Teorema 2.8. *Una colección equilibrada tiene un único vector de equilibrio si*

y sólo si es una colección mínima.

Demostración. El Lema 2.1 nos dice que el vector de equilibrio será único solo para colecciones mínimas equilibradas. A la inversa, supongamos que $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ tiene dos vectores de equilibrio distintos z e y . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $y_j > z_j$ para al menos un valor de j . Como antes, elegimos

$$w = (1+t)z - ty,$$

donde $t = \min\{\frac{z}{y_j - z_j} : y_j > z_j\}$, veamos que w es un vector de equilibrio para $\mathcal{B} = \{S_j | (1+t)z_j > ty_j\}$. Como \mathcal{B} es una subcolección propia de \mathcal{C} , observamos que \mathcal{C} no es mínima. \square

Entonces, podemos observar que, las colecciones equilibradas son precisamente uniones de colecciones mínimas equilibradas, y estas a su vez son aquellas que tienen vector de equilibrio único.

Teorema 2.9. *Los puntos extremos del programa (P^*) son vectores de equilibrio de colecciones mínimas equilibradas.*

Demostración. Sea $y = (y_S)_{S \subset N}$ satisfaciendo las restricciones de (P^*) . Entonces es un vector de equilibrio para la colección:

$$\mathcal{C} = \{S | y_S > 0\}.$$

Si \mathcal{C} es no mínima, sea \mathcal{B} una subcolección propia equilibrada, con vector de equilibrio $z = (z_S)_{S \subset N}$. Sabemos que $z_S > 0$ solo si $y_S > 0$, y entonces, para t pequeño, ambos:

$$\begin{aligned} w &= (1-t)y + tz; & y \\ w' &= (1+t)y - tz \end{aligned} \tag{2.19}$$

satisfacen las restricciones de (P^*) . Ahora, $w \neq w'$, como $w_S < w'_S$ para cada $S \in \mathcal{C} - \mathcal{B}$. Pero

$$y = \frac{1}{2}(w + w'),$$

y entonces y no es extremo en (P^*) .

Por otro lado, supongamos que \mathcal{C} es una colección mínima equilibrada. Si y

no es extremo, podemos escribir

$$y = \frac{1}{2}(w + w'), \quad (2.20)$$

donde $w \neq w'$, y ambos w y w' satisfacen las condiciones de (P^*) . Gracias a la no negatividad de la segunda restricción de (P^*) , debemos tener $w_S = w'_S = 0$ cuando sea $y_S = 0$. Por lo tanto, w y w' serán vectores de equilibrio para \mathcal{B} y \mathcal{B}' , respectivamente, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{S | w_S > 0\}; \quad y \\ \mathcal{B}' &= \{S | w'_S > 0\} \end{aligned}$$

ambas son subcolecciones de \mathcal{C} . Puesto que \mathcal{C} es mínima, entonces \mathcal{B} y \mathcal{B}' coinciden con \mathcal{C} . Pero entonces por el Teorema 2.8, $w = w' = y$. Esta contradicción demuestra que y debe ser extremo. \square

Veamos una condición necesaria y suficiente para que un juego tenga el core no vacío, el Teorema de Bondareva-Shapley. Este es el resultado más importante de este capítulo.

Teorema 2.10. [*Bondareva-Shapley*] *Una condición necesaria y suficiente para que un juego v de n personas tenga core no vacío es que, para cada colección mínima N -equilibrada $\mathcal{C} = \{S_1, \dots, S_m\}$ con vector de equilibrio $y = (y_1, \dots, y_m)$,*

$$\sum_{j=1}^m y_j v(S_j) \leq v(N). \quad (2.21)$$

Demostración. La condición necesaria se deduce del Teorema 2.5 y de que todo vector de equilibrio debe satisfacer las condiciones del programa (P^*) .

Para probar la suficiencia, observamos que el máximo del programa (P^*) , que sabemos que existe, se encuentra en un punto extremo. Este punto extremo es un vector de equilibrio de alguna colección mínima equilibrada. Por lo tanto, si se mantiene (2.21) para todos estos vectores, el máximo de (P^*) será menor o igual que $v(N)$. \square

El Teorema de Bondareva-Shapley nos proporciona un sistema de desigualdades que se debe satisfacer si el juego tiene core no vacío. Ahora para juegos superaditivos, la condición (2.21) se mantendrá si \mathcal{C} es una partición de N . Por

lo tanto, necesitamos preocuparnos sólo con colecciones mínimas equilibradas que no sean particiones.

Veamos algunos ejemplos donde utilizamos el Teorema de Bondareva-Shapley.

Ejemplo 2.5. Sea $N = \{1, 2, 3\}$. Aparte de las particiones hay solo una colección balanceada mínima, a saber

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

con vector de equilibrio $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Por lo tanto, un juego v de tres personas tiene *core* no vacío si y sólo si

$$\frac{1}{2}v(\{1, 2\}) + \frac{1}{2}v(\{1, 3\}) + \frac{1}{2}v(\{2, 3\}) \leq v(N).$$

Ejemplo 2.6. Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Las colecciones mínima N -equilibradas, a parte de las particiones, son

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathcal{C} &= \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, & y &= (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \\ (b) \quad \mathcal{C} &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, & y &= (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ (c) \quad \mathcal{C} &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4\}\}, & y &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \\ (d) \quad \mathcal{C} &= \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, & y &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Aparte de estas colecciones, podemos obtener otras mediante permutaciones, siendo un total de quince colecciones: una del tipo (a), cuatro del tipo (b), cuatro del tipo (c) y seis del tipo (d). Asumiendo que el juego está en normalización $(0,1)$ (y superaditivo), esto nos proporciona un sistema de quince inecuaciones:

$$\begin{aligned} (a) \quad v(\{1, 2, 3\}) + v(\{1, 2, 4\}) + v(\{1, 3, 4\}) + v(\{2, 3, 4\}) &\leq 3; \\ (b) \quad v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\}) + v(\{1, 4\}) + 2v(\{2, 3, 4\}) &\leq 3; \\ (c) \quad v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\}) + v(\{2, 3\}) &\leq 2; \\ (d) \quad v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3, 4\}) + v(\{2, 3, 4\}) &\leq 2. \end{aligned}$$

Por superaditividad, (d) implica (c). Por lo tanto, nos quedan once inecuaciones: (a), cuatro tipos de (b) y seis tipos de (d), las cuales debe verificar v para tener *core* no vacío.

Capítulo 3

Juego de Asignación

En este capítulo vamos a analizar el Juego de Asignación. Al comienzo lo trataremos de forma general y veremos que tiene core no vacío, pero que no tiene porque tener una única imputación en su core. Finalmente, veremos un ejemplo de este tipo de juegos.

Fue introducido por Shapley y Shubik en [20] en el año 1972.

El Juego de Asignación consiste en un juego con dos tipos de jugadores, poseedores de un producto o tareas e individuos que demandan dicho producto o tarea. Básicamente se trata de un problema de reparto de bienes o tareas a individuos que los demandan o que las realizarán. El juego trata de asignar los objetos o tareas a los individuos que los demandan, maximizando el valor de las coaliciones mediante su función característica. Debemos tener en cuenta que cada uno de los individuos demandantes valorará cada producto o tarea de forma distinta.

Al final del capítulo, veremos algunos casos reales, relacionados entre ellos, que se resuelven mediante algoritmos producidos por el estudio de "Matching Markets" y trataremos su relación con el Juego de Asignación.

Sea $N = M \cup M'$, donde M y M' son conjuntos disjuntos con m elementos cada uno, digamos $M = \{1, 2, \dots, m\}$ y $M' = \{m + 1, m + 2, \dots, 2m\}$.

El jugador $i \in M$ (el i -ésimo vendedor), $i = 1, \dots, m$, posee un objeto que valora en a_i . El jugador $m + j$, $j = 1, \dots, m$, el (el j -ésimo comprador) desea comprar dicho objeto, y valora el i -ésimo objeto en b_{ij} . Por lo tanto, una coalición

entre los jugadores $i \in M$ y $m + j \in M'$ puede obtener un beneficio:

$$v(\{i, m + j\}) = c_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - a_i & , b_{ij} \geq a_i, \\ 0 & , b_{ij} \leq a_i. \end{cases}$$

Para cualquier $S \subseteq M$ o $S \subseteq M'$, tendremos $v(S) = 0$. Para otros S (que contienen tanto vendedores como compradores), $v(S)$ será igual al máximo beneficio total generado por las ventas de objetos entre los miembros de S , sujeto a las restricciones naturales, ningún vendedor puede vender a más de un comprador, y ningún comprador puede comprar de más de un vendedor. Así, si S no tiene más vendedores que compradores, asignamos al comprador $m + j(i)$ al vendedor i , y el beneficio total

$$\sum_{i \in S \cup M} c_{i, j(i)}.$$

Entonces,

$$v(S) = \text{máx} \sum_{i \in S \cup M} c_{i, j(i)},$$

donde el máximo se toma sobre todas estas asignaciones. Un tratamiento ligeramente distinto nos da:

$$v(S) = \text{máx} \sum_{m+j \in S \cup M'} c_{i(j), j},$$

en caso de que S tenga más vendedores que compradores.

Para el conjunto N en particular, tenemos:

$$v(N) = \text{máx} \sum_{i=1}^m c_{i, j(i)},$$

donde el máximo se toma sobre todas las permutaciones $(j(1), j(2), \dots, j(m))$ del conjunto M . Esto también puede escribirse como:

$$v(N) = \text{máx} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_i c_{ij},$$

donde $P = (p_{ij})$ es una matriz de permutaciones, es decir, una matriz de ceros

y unos donde hay exactamente un uno en cada fila y columna. Esencialmente, tendremos $p_{ij} = 1$ si el j -ésimo comprador compra al i -ésimo vendedor, y $p_{ij} = 0$ en otro caso.

Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
 \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m q_{ij} c_{ij} \\
 \text{s.a.:} \quad & \sum_{i=1}^m q_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^m q_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, \dots, m, \\
 & q_{ij} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Claramente cada matriz $P = (p_{ij})$ satisface las restricciones de (3.1). Por otra parte, no todos las $Q = (q_{ij})$ factibles son matrices de permutaciones ya que algunas componentes pueden ser fraccionarias. La matriz de restricciones es TU así los puntos extremos del problema anterior son precisamente las matrices de permutación. Dado que el máximo se encuentra en un punto extremo, concluimos que $v(N)$ es el máximo del problema de programación lineal anterior.

A continuación, consideremos el dual del problema anterior, que es:

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^m y_i + \sum_{j=1}^m z_j \\
 \text{s.a.:} \quad & y_i + z_j \geq c_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Generalmente, no hay restricción no negativa sobre las variables duales. No es difícil ver que el vector mínimo no es único. En efecto, si $(u^*, z^*) = (y_1^*, \dots, y_m^*; z_1^*, \dots, z_m^*)$ es un vector que minimiza el problema, entonces para cualquier número real t , definimos (y', z') , donde:

$$y'_i = y_i^* - t, \quad z'_j = z_j^* + t, \quad \forall i, j.$$

En particular, podemos elegir $t = \min_i y_i^*$ y entonces $\min_i y'_i = 0$. Entonces todo $y'_i \geq 0$, y, para algún k , $y'_k = 0$. Para cada j , tenemos:

$$z'_j = y'_k + z'_j \geq c_{kj} \geq 0,$$

y entonces todo $z'_j \geq 0$. Por lo tanto, (y', z') es una imputación del juego v . Veamos que pertenece a $C(v)$.

Para cualquier S , tenemos:

$$v(S) = c_{i_1 j_1} + \dots + c_{i_q j_q},$$

donde $i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_q$ son distintos miembros de S . Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} y'_i + \sum_{m+j \in S} z'_j &\geq y'_{i_1} + \dots + y'_{i_q} + z'_{i_1} + \dots + z'_{i_q} \geq \\ &\geq c_{i_1 j_1} + \dots + c_{i_q j_q} = v(S). \end{aligned}$$

y concluimos que $(y', z') \in C(v)$.

En algunos casos, (y', z') será la única imputación del core. Más habitualmente la imputación no será única. De hecho, cualquier vector mínimo (y^*, z^*) con componentes no negativas estará situado en el core. Lo usual es que la asignación óptima de vendedores a compradores, dada por el problema principal, es única; sin embargo, el precio de mercado, dado por el dual, no es único.

Ejemplo 3.1. Un ejemplo de un juego de asignación.

Un vendedor (Juan, j_1) tiene un coche sin valor para él, a menos que pueda venderlo. Dos compradoras (Rocío, j_2 , y María, j_3) valoran el objeto en 90€ y en 100€ respectivamente. Si Juan vende el coche a Rocío al precio de x , él obtendrá un beneficio de x , mientras que el beneficio de Rocío será de $90 - x$. El beneficio total de la coalición $\{j_1, j_2\}$ es entonces 90€. Para la coalición $\{j_1, j_3\}$ es similar con un beneficio de 100€. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v(\{j_1, j_2\}) &= 90, \\ v(\{j_1, j_3\}) &= 100. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por otro lado, un jugador solo, o los dos compradores, no obtiene ningún beneficio. Por lo tanto,

$$v(\{j_1\}) = v(\{j_2, j_3\}) = 0.$$

Por último, la coalición de los tres jugadores puede no hacer nada mejor que

asignar el coche a María, j_3 . Por lo tanto,

$$v(\{j_1, j_2, j_3\}) = 100.$$

Por todo esto el core está formado por todos los vectores (x_1, x_2, x_3) que verifican:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 90, \\ x_1 + x_3 &\geq 100, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 100, \\ x_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $x_1 \geq 90, x_2 = 0, x_1 + x_3 = 100, x_3 \geq 0$. Por lo tanto,

$$Core(v) = C(v) = \{(t, 0, 100 - t) | 90 \leq t \leq 100\}. \quad (3.3)$$

Esto quiere decir que María, j_3 , comprará el coche al precio de al menos 90€. Rocío, j_2 , tiene un precio fuera de mercado - a partir que la "puja" supere el precio de 90€.

Podemos concluir que los Juegos de Asignación tienen siempre core no vacío, luego podremos dar alguna solución al problema. Aunque en muchas situaciones tendremos más de una imputación en el core, luego tendremos más de una posible solución.

3.1. Matching Markets

Encontramos una situación muy similar a la anterior en "Matching Markets", la gran diferencia consiste en que ahora el coste no puede ajustarse para asignar recursos, ya que en muchos casos reales el coste se descarta por motivos éticos. Algunos de estos casos son asignar estudiantes a colegios o institutos, asignar órganos a pacientes enfermos, médicos a hospitales y otros muchos casos. Como curiosidad debemos señalar que Alvin E. Roth obtuvo su premio Nobel de economía en 2012 por sus contribuciones a "Matching Markets".

El algoritmo de Shapley-Gale, descrito en 1962, para asignar parejas entre hombres y mujeres, es la primera vez en la que aparecen este tipo de problemas. Analizaron, desde un punto de vista abstracto, como deberían asignarse

diez hombres y diez mujeres, respetando sus preferencias. Con el algoritmo de "aceptación en diferido" ("deferred acceptance") dieron con una correspondencia estable. El algoritmo puede configurarse de dos maneras alternativas: o los hombres proponen a las mujeres, o las mujeres proponen a los hombres. Si son las mujeres las que proponen a los hombres, el proceso comienza con cada mujer proponiéndose al hombre que más le gusta. A continuación, cada hombre mira las diferentes propuestas que ha recibido (si existen), retiene la que considera como la mejor propuesta y rechaza el resto. Las mujeres que fueron rechazadas en la primera ronda se proponen entonces a sus segundas mejores elecciones, mientras que los hombres vuelven a mantener su mujer propuesta. Esto continúa hasta que ninguna mujer quiera hacer más propuestas. Cuando cada uno de los hombres acepta la propuesta que tiene el proceso finaliza. Gale y Shapley demostraron que este algoritmo siempre conduce a una situación estable. Es importante conocer la estructura distributiva del algoritmo, ya que si el derecho a proponer se le da a las mujeres, como hemos descrito antes, el resultado es mejor para los hombres y, al contrario, si el derecho a proponer es de los hombres.

Alvin E. Roth estudió el problema de asignar de médicos recién graduados a hospitales. En Estado Unidos cuando un estudiante de medicina finaliza sus estudios, en gran parte, pasa a trabajar de residente en un Hospital. Se percató de que el algoritmo usado por "National Resident Matching Program (NRMP)", para asignar recién licenciados a hospitales, estaba muy relacionado con el algoritmo de Shapley-Gale. A pesar de funcionar correctamente, y ser usado más allá de Estados Unidos, el NRMP no funcionaba a la perfección. Uno de los problemas fue que el número de mujeres estudiantes creció y, así, el número de parejas recién graduadas que querían hacer la residencia de forma conjunta. Como ya hemos comentado anteriormente, el lado que propone (en este caso los hospitales) es sistemáticamente favorecido, esto provocó muchas críticas. En 1995, se le pidió a Roth que ayudara a diseñar un algoritmo mejorado que eliminará estos problemas. El nuevo algoritmo, implementado desde 1997, ha funcionado bastante bien. Parecía que los solicitantes podían manipular el algoritmo al rechazar ofertas que realmente preferían y mantener las que eran peores, para así lograr un mejor resultado. En varios trabajos teóricos Roth mostró que esto podía suceder, por ello el algoritmo fue revisado y diseñado para ser inmune a

manipulación.

El algoritmo de Gale-Shapley también se puede usar, por ejemplo, en la elección de institutos o colegios. En 2003, Roth y sus colaboradores ayudaron a rediseñar el proceso de admisión que había hasta entonces, basado en un algoritmo del tipo de Gale-Shapley. El algoritmo resultó ser exitoso. Hoy, un número creciente de áreas metropolitanas de Estados Unidos usa alguna variante de éste.

Todo esto está claramente relacionado con el Juego de Asignación. La característica más sorprendente de estos algoritmos es que los precios no forman parte del proceso.

Capítulo 4

Juego de Producción Lineal

Analicemos ahora el Juego de Producción Lineal. Este problema fue analizado por primera vez por G. Owen, en [14]. Se trata de un juego en el que los jugadores combinan recursos para producir productos terminados que puedan venderse a un precio de mercado determinado. El proceso de producción es lineal, de modo que la función característica puede obtenerse resolviendo programas lineales. La teoría de la dualidad de la programación lineal se utiliza para obtener vectores de equilibrios de precios y para probar que el core es no vacío.

Consideremos entonces el juego de producción con $N = \{1, 2, \dots, n\}$ conjunto de jugadores, cada jugador tiene un paquete de tamaño q de productos. Más específicamente, el jugador i tiene b_{i1} unidades del producto C_1 , b_{i2} unidades de C_2, \dots , y b_{iq} unidades de C_q . Los productos carecen de valor por si mismos, excepto que pueden ser usados para producir bienes B_1, \dots, B_m , que puedan venderse a precios fijos de mercado. Asumimos un proceso de producción lineal, en el que una unidad de B_l requiere a_{1l} unidades de C_1 , a_{2l} unidades de C_2, \dots , y a_{ql} unidades de C_q , y puede ser vendido por un precio p_l .

Cuando se forma una coalición S , sus miembros pondrán en común sus recursos (materia prima) para maximizar el valor de venta en el mercado de sus productos. Así, la función característica viene dada por los problemas de pro-

gramación lineal

$$\begin{aligned}
 v(S) = \text{máx} \quad & \sum_{l=1}^m p_l x_l \\
 \text{s.a.:} \quad & \sum_{l=1}^m a_{kl} x_l \leq b_k(S), \quad k = 1, 2, \dots, q, \\
 & x_l \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde: $b_k(S) = \sum_{i \in S} b_{ik}$ es la cantidad total de C_k que tiene la coalición S.

Teorema 4.1. *En este juego, v tiene core no vacío.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ una colección equilibrada, con vector de equilibrio (y_1, y_2, \dots, y_r) . Para cada $S_j \in \mathcal{C}$, sea $x^j = (x_1^j, \dots, x_m^j)$ vector de optimización del programa anterior definido para S_j , y sea

$$x^* = \sum_{j=1}^r y_j x^j \geq 0.$$

Para cada k , tenemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^m a_{kl} x_l^* &= \sum_{j=1}^r y_j \sum_{l=1}^m a_{kl} x_l^j \\
 &\leq \sum_{j=1}^r y_j \sum_{i \in S_j} b_{ik} = \sum_{i \in N} b_{ik} \sum_{j; i \in S_j} y_j \\
 &= \sum_{i \in N} b_{ik} = b_k(N).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, x^* satisface las condiciones del programa definido para $v(N)$, luego

$$\sum_{l=1}^m p_l x_l^* \leq v(N).$$

Ahora,

$$\sum_{j=1}^r y_j v(S_j) = \sum_{j=1}^r y_j \sum_{l=1}^m p_l x_l^j = \sum_{l=1}^m p_l x_l^* \leq v(N).$$

Como esto es cierto para toda colección equilibrada \mathcal{C} , concluimos que el juego tiene core no vacío. \square

Hemos demostrado que v tiene core no vacío. Sin embargo, es importante encontrar puntos en el core. Para ello, consideramos el programa dual de (4.1):

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \sum_{k=1}^q b_k(S)z_k \\
 \text{s.a.:} \quad & \sum_{l=1}^q a_{lk}z_l \geq p_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\
 & z_l \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, q,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$v(S)$ será igual al mínimo del programa (4.2). Observemos, ahora que las restricciones del programa (4.2) son independientes de S ; sin embargo, el vector solución (z_1, \dots, z_q) dependerá de S .

En particular, sea (z_1^*, \dots, z_q^*) el vector solución de (4.2) cuando $S = N$. Entonces,

$$v(N) = b_1(N)z_1^* + \dots + b_q(N)z_q^* \tag{4.3}$$

mientras que, para cualquier S ,

$$v(S) \leq b_1(S)z_1^* + \dots + b_q(S)z_q^* \tag{4.4}$$

ya que $v(S)$ es el mínimo para todos los vectores factibles z .

Ahora, consideremos el vector de pago $u = (u_1, \dots, u_n)$ definido como sigue:

$$u_i = b_{i1}z_1^* + b_{i2}z_2^* + \dots + b_{iq}z_q^* = \sum_{k=1}^q b_{ik}z_k^* \tag{4.5}$$

Para cualquier S , tenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in S} u_i &= \sum_{i \in S} \sum_{k=1}^q b_{ik}z_k^* = \sum_{k=1}^q \sum_{i \in S} b_{ik}z_k^* = \\
 &= b_1(S)z_1^* + \dots + b_q(S)z_q^*
 \end{aligned}$$

y entonces, por (4.3),

$$\sum_{i \in N} z_i = v(N)$$

y, por (4.4),

$$\sum_{i \in S} z_i \geq v(S),$$

para cualquier $S \subset N$. Por lo tanto, z es una imputación del core. Entonces, tenemos un método para obtener un punto del core: calculamos el vector z^*

resolviendo un programa lineal de tamaño razonable (q variables y m restricciones). Esto entonces nos da una imputación u por (4.5)

Heurísticamente, las componentes z_1^*, \dots, z_m^* pueden considerarse precios de equilibrio de los recursos. A cada uno de los jugadores se les paga por sus recursos según el vector de equilibrio z^* ; los pagos resultantes siempre darán un vector en el core.

Vemos que cualquier vector de equilibrio de precio z^* dará lugar a un punto en el core. (Puede haber más de un vector de equilibrio y, por lo tanto, el core puede contener más de un punto). La pregunta es si el inverso es verdadero, es decir, si todos los puntos en el core se pueden obtener por este procedimiento.

En [20], Shapley y Shubik consideran un tipo especial de programa lineal - un problema de asignación - en el cual los "bienes" producidos son oficios. En ese caso, todos los puntos centrales se pueden obtener resolviendo el programa dual; de hecho, las limitaciones del programa dual reducen a las desigualdades básicas, pero esto se debe puramente al hecho de que es un tipo de programa tan especial. Para nuestros juegos más generales, esta conjetura no es verdad.

Ejemplo 4.1. Veamos un contraejemplo trivial, consideremos un juego de dos personas con paquetes de recursos:

$$b_1 = (1, 0), \quad b_2 = (0, 2)$$

y un único producto final, una unidad requiere una unidad de cada recurso, y se vende por 100€. Entonces, el programa lineal (4.1) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v(S) &= \text{máx } x \\ \text{s.a.: } &x \leq b_1(S), \quad x \leq b_2(S), \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

que nos da $v(1) = v(2) = 0, v(\{1, 2\}) = 1$. El core aquí está formado por todos los puntos (u_1, u_2) con $0 \leq u_1 \leq 1, u_1 + u_2 = 1$.

Siendo $S = N$, tenemos $b(N) = (1, 2)$. Entonces el problema dual (4.2) es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{mín } &z_1 + 2z_2, \\ \text{s.a.: } &z_1 + z_2 \geq 1, \quad z_1, z_2 \geq 0, \end{aligned}$$

Este tiene una única solución $z_1^* = 1, z_2^* = 0$. Por lo tanto, el precio de equilibrio

no usa nada para el segundo recurso; ya que el jugador 2 comienza solo con este recurso, no puede recibir nada por este esquema. Así, sólo se puede obtener de este manera $u = (1, 0)$, mientras que el core contiene otros muchos puntos.

Concluimos entonces que el core del Juego de Producción Lineal es no vacío. Aunque, el core puede tener más de un punto por lo que podrá haber más de un vector de equilibrio.

4.1. Aplicación con CPLEX

Ahora vamos a hacer una aplicación del Juego de Producción Lineal mediante CPLEX usando la página web www.neos-server.org. NEOS-SERVER es un servicio gratuito de Internet para resolver problemas de optimización numérica. Organizado por el Wisconsin Institute for Discovery de la Universidad de Wisconsin, NEOS-SERVER proporciona acceso a más de 60 métodos para resolver organizados en más de una docena de categorías.

Vamos a resolver una situación en la que tres empresas, E_1, E_2, E_3, E_4 , quieren generar tres bienes, B_1, B_2, B_3 , que necesitan distintos productos, en este caso son necesarios siete productos para generar los tres bienes, p_1, \dots, p_7 . Las empresas poseen la siguiente cantidad de productos, las mostramos mediante el Cuadro 4.1. La cantidad de producto necesario para generar cada bien se dan en el Cuadro 4.2.

	E_1	E_2	E_3	E_4
p_1	100	0	50	150
p_2	40	40	0	0
p_3	0	40	0	80
p_4	0	90	100	200
p_5	60	100	0	40
p_6	40	0	30	30
p_7	10	70	50	0

Cuadro 4.1: Cantidad de producto que tienen las empresas E_j .

Los bienes que producen se venden a un precio fijo de mercado:

$$p_1 = 1 \quad p_2 = 2 \quad p_3 = 3.$$

	B_1	B_2	B_3
p_1	3	5	0
p_2	0	1	0
p_3	4	0	0
p_4	1	2	9
p_5	8	0	3
p_6	0	2	1
p_7	0	2	0

Cuadro 4.2: Cantidad de producto necesario para generar el bien B_k .

Vamos a calcular el valor $v(S)$ para S cada coalición posible:

$$\begin{aligned}
 &\{E_1\}, \{E_2\}, \{E_3\}, \{E_4\}, \\
 &\{E_1, E_2\}, \{E_1, E_3\}, \{E_1, E_4\}, \{E_2, E_3\}, \{E_2, E_4\}, \{E_3, E_4\} \\
 &\{E_1, E_2, E_3\}, \{E_1, E_2, E_4\}, \{E_1, E_3, E_4\}, \{E_2, E_3, E_4\} \\
 &\{E_1, E_2, E_3, E_4\},
 \end{aligned}$$

para ello vamos a resolver programas lineales como el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{máx } &x_1 && + & 2x_2 & + & 3x_3 \\
 \text{s.a.: } &3x_1 && + & 5x_2 && \leq & b_1(S), \\
 &&& & x_2 && \leq & b_2(S), \\
 &4x_1 && & && \leq & b_3(S), \\
 &x_1 && + & 2x_2 & + & 9x_3 & \leq & b_4(S), \\
 &8x_1 && + & & & 3x_3 & \leq & b_5(S), \\
 &&& & 2x_2 & + & x_3 & \leq & b_6(S), \\
 &&& & 2x_2 && & \leq & b_7(S), \\
 &x_1, x_2, x_3 \geq 0,
 \end{aligned}$$

donde $b_k(S)$ es la cantidad de producto p_k que tienen las empresas que forman la coalición S .

Al resolver los quince programas lineales primales mediante CPLEX en NEOS SERVER obtenemos que la función característica evaluada en cada coa-

lición toma los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 v(\{E_1\}) &= 0, & v(\{E_2\}) &= 0, \\
 v(\{E_3\}) &= 0, & v(\{E_4\}) &= 40, \\
 v(\{E_1, E_2\}) &= 56'037, & v(\{E_1, E_3\}) &= 73'333, \\
 v(\{E_1, E_4\}) &= 76'522, & v(\{E_2, E_3\}) &= 73'934, \\
 v(\{E_2, E_4\}) &= 96'25, & v(\{E_3, E_4\}) &= 40, \\
 v(\{E_1, E_2, E_3\}) &= 102'83, & v(\{E_1, E_2, E_4\}) &= 136'557, \\
 v(\{E_1, E_3, E_4\}) &= 141'739, & v(\{E_2, E_3, E_4\}) &= 144'098, \\
 v(\{E_1, E_2, E_3, E_4\}) &= 181'475.
 \end{aligned}$$

También obtenemos que cantidad de bienes se produce para cada coalición en la situación óptima, los vectores óptimos son:

$$\begin{aligned}
 x_{\{E_1\}}^* &= x_{\{E_2\}}^* = x_{\{E_3\}}^* = [0, 0, 0], \\
 x_{\{E_4\}}^* &= [0, 0, 13'33], \\
 x_{\{E_1, E_2\}}^* &= [4'7169, 17'169, 5'66], \\
 x_{\{E_1, E_3\}}^* &= [0, 30, 4'444], \\
 x_{\{E_1, E_4\}}^* &= [4'782, 5, 20'579], \\
 x_{\{E_2, E_3\}}^* &= [5'246, 5'328, 19'344], \\
 x_{\{E_2, E_4\}}^* &= [6'25, 0, 30], \\
 x_{\{E_3, E_4\}}^* &= [0, 0, 13'333], \\
 x_{\{E_1, E_2, E_3\}}^* &= [3'774, 27'736, 14'528], \\
 x_{\{E_1, E_2, E_4\}}^* &= [15'409, 22'213, 25'574], \\
 x_{\{E_1, E_3, E_4\}}^* &= [2'609, 30, 26'377], \\
 x_{\{E_2, E_3, E_4\}}^* &= [2'131, 9'508, 40'984], \\
 x_{\{E_1, E_2, E_3, E_4\}}^* &= [11'967, 32'623, 34'754].
 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos los correspondientes problemas duales, que son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & b_1(S)z_1 + b_2(S)z_2 + b_3(S)z_3 + b_4(S)z_4 + b_5(S)z_5 + b_6(S)z_6 + b_7(S)z_7 \\
 \text{s.a.:} \quad & 3z_1 + 4z_3 + z_4 + 8z_5 \geq 1, \\
 & 5z_1 + z_2 + 2z_4 + 2z_6 + 2z_7 \geq 2, \\
 & 9z_4 + 3z_5 + z_6 \geq 3 \\
 & z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 \geq 0,
 \end{aligned}$$

donde, de nuevo, $b_k(S)$ es la cantidad de producto p_k que tienen las empresas que forman la coalición S .

Los valores óptimos de estos programas coinciden con los valores óptimos de los programas primales. Los vectores óptimos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 z_{\{E_1\}}^* &= [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], \\
 z_{\{E_2\}}^* &= [0'333, 0, 0, 0, 0, 3, 0], \\
 z_{\{E_3\}}^* &= [0, 2, 0, 0, 1, 0, 0], \\
 z_{\{E_4\}}^* &= [[0, 2, 0, 0, 1, 0, 0], \\
 z_{\{E_1, E_2\}}^* &= [0'226, 0, 0, 0'321, 0, 0'113, 0], \\
 z_{\{E_1, E_3\}}^* &= [0, 0, 0'167, 0'333, 0, 0, 0'667], \\
 z_{\{E_1, E_4\}}^* &= [0, 0, 0, 0'304, 0'869, 0, 0'696], \\
 z_{\{E_2, E_3\}}^* &= [0, 0, 0, 0'213, 0'98, 0'787, 0], \\
 z_{\{E_2, E_4\}}^* &= [0, 0, 0, 0, 0'125, 2'625, 0], \\
 z_{\{E_3, E_4\}}^* &= [0, 2, 0, 0, 1, 0, 0], \\
 z_{\{E_1, E_2, E_3\}}^* &= [0'264, 0, 0, 0'321, 0, 0'113, 0], \\
 z_{\{E_1, E_2, E_4\}}^* &= [0, 0, 0, 0'213, 0'098, 0'787, 0], \\
 z_{\{E_1, E_3, E_4\}}^* &= [0, 0, 0, 0'304, 0'869, 0, 0'696], \\
 z_{\{E_2, E_3, E_4\}}^* &= [0, 0, 0, 0'213, 0'098, 0'787, 0], \\
 z_{\{E_1, E_2, E_3, E_4\}}^* &= [0, 0, 0, 0'213, 0'098, 0'787, 0].
 \end{aligned}$$

Calculemos ahora el correspondiente vector de pago de la mayor coalición

posible, $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, es el siguiente vector:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 100z_1^* + 40z_2^* + 60z_5^* + 40z_6^* + 10z_7^* &= 5'88 + 31'48 &= 37'36, \\
 u_2 &= 40z_2^* + 40z_3^* + 90z_4^* + 100z_5^* + 70z_7^* &= 19'17 + 9'8 &= 28'97, \\
 u_3 &= 50z_1^* + 100z_4^* + 30z_6^* + 50z_7^* &= 21'3 + 23'61 &= 44'91, \\
 u_4 &= 150z_1^* + 80z_3^* + 200z_4^* + 40z_5^* + 30z_6^* &= 42'6 + 3'92 + 23'61 &= 70'13;
 \end{aligned}$$

para no recargar la notación aquí hemos denotado z_k^* la k -ésima componente del vector $z_{\{E_1, E_2, E_3, E_4\}}^*$.

Como deducimos anteriormente para cualquier caso se tiene que el vector u que acabamos de calcular pertenece al core, luego podemos afirmar que la imputación $u = [37'36, 28'97, 44'91, 70'13]$ pertenece al core de nuestro Juego de Producción Lineal. Es necesario señalar que a $[37'36, 28'97, 44'91, 70'13]$ se le conoce como el valor de Owen.

En consecuencia, una posible solución para esta situación de producción lineal es que las cuatro empresas trabajen de forma conjunta, formando una coalición. La empresa k recibirá una cantidad u_k , componente k -ésima de u . Es decir,

- La Empresa 1, E_1 , recibirá, en el caso de formar una gran coalición, 37'36 unidades monetarias.
- La Empresa 2, E_2 , recibirá, en el caso de formar una gran coalición, 28'97 unidades monetarias.
- La Empresa 3, E_3 , recibirá, en el caso de formar una gran coalición, 44'91 unidades monetarias.
- La Empresa 4, E_4 , recibirá, en el caso de formar una gran coalición, 70'13 unidades monetarias.

Para ver como hemos resuelto este Juego de Producción Lineal mediante CPLEX usando NEOS-SERVER consultar el Apéndice A.

Capítulo 5

Juegos de Localización

Durante este capítulo vamos a analizar uno de los problemas más importante tratados por la investigación operativa, vamos a ver distintos tipos de Juegos de Localización. La idea principal es asignar una localización a una instalación que necesitan distintos jugadores, individuos, que deciden colaborar para construir las, el juego consiste en asignar un lugar en el espacio a la instalación que minimice los costes de construcción de la instalación y posibles costes derivados, como infraestructuras que comuniquen a los jugadores con la instalación u otro tipo de costes. De tal manera nuestro objetivo es que se satisfagan las necesidades de los usuarios potenciales y construir una función objetivo que básicamente dependa de las distancias de los usuarios a las instalaciones. Este problema ha dado lugar a la teoría de localización, para conocer más acerca de esta ver [4].

Observemos que el problema puede consistir en construir no una sino varias instalaciones para los jugadores.

Al comienzo de este capítulo introducimos el juego de localización continuo, donde definimos los conceptos necesarios para tratar las situaciones de localización y algunas propiedades de los juegos de localización. Se proporcionan distintos ejemplos de situaciones de localización y otros relacionados con el core de estos juegos. Los resultados más importantes de esta sección son los que nos dan una condición suficiente para tener core no vacío.

Después vemos el primer caso particular de juego de localización, el juego de localización minimax, definimos su core y damos una condición suficiente, y

fácil de probar, para que la solución proporcionalmente igualitaria este en él.

Para finalizar el capítulo tratamos el juego de localización de Weber con coste fijo no variable y con coste variable. Veremos una condición necesaria para que la solución igualitaria esté en el core y, también, daremos varios ejemplos de ambas situaciones analizando las diferencias entre ambos juegos.

Para este capítulo hemos usado las fuentes [18] y [9].

5.1. Problema Continuo de Localización

En primer lugar, describimos que es un problema continuo de localización de instalaciones individuales. El problema consiste en encontrar una ubicación para la instalación que minimice el coste de transporte (que depende de la distancia de los usuarios a la instalación). Formalmente, un problema continuo de localización de instalaciones individuales es una tripleta: (N, Φ, d) donde:

- $N = \{a_1, \dots, a_n\}$ conjunto de n puntos distintos en \mathbb{R}^m (con $n \geq 2$).
- $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de globalización semicontinua inferior que verifica:
 1. Φ es definida, i.e., $\Phi(x) = 0$ si y solo si $x = 0$;
 2. Φ es monótona, i.e., $\Phi(x) \leq \Phi(y)$ para $x \leq y$.
- $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida de distancia, satisfaciendo que, para cada $r, s \in \mathbb{R}^m$, $d(r, s) = f(\|r - s\|)$, donde f es una aplicación semicontinua inferior, no decreciente y no negativa de \mathbb{R} en \mathbb{R} con $f(0) = 0$, y $\|\cdot\|$ es una norma sobre \mathbb{R}^m .

Resolver el problema de localización continuo con una única instalación (N, Φ, d) , para $S \subset N$, consiste en encontrar un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ que minimice $\Phi(d^S(x))$, donde $d^S(x)$ es el vector en \mathbb{R}^n cuya i -ésima componente es igual a $d(x, a_i)$ si $a_i \in S$ e igual a 0 en otro caso. Denotaremos $L(S) = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \Phi(d^S(x))$. Observemos que este problema siempre tiene solución para cada $S \subset N$ (ver [16]).

Esta es la versión clásica del problema de localización continuo con una única instalación. Vamos a considerar una variante, natural, de este problema en el que

los usuarios en N están interesados no sólo en encontrar una ubicación óptima de la instalación, sino también en compartir los costes totales correspondientes. Por coste total entendemos la suma de los costes variables (dependiendo de los usuarios y de la ubicación de la instalación, en su mayor parte serán costes de transporte), más los costes fijos (independiente de lo anterior, principalmente los costes de la instalación). Formalmente, una situación de localización continua de una sola instalación es una 4-tupla (N, Φ, d, K) donde (N, Φ, d) es un problema de localización continuo con única instalación y $K \in \mathbb{R}, K \geq 0$, es el coste fijo de instalación de la instalación. Tengamos en cuenta que podemos asociar (N, Φ, d, K) con un juego (N, c) cuya función característica c se define, para cada $S \subset N = \{a_1, \dots, a_n\}$, por:

$$c(S) = \begin{cases} K + L(S) & \text{si } S \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } S = \emptyset. \end{cases}$$

Denotaremos por $\mathcal{L}(N)$ a la clase de juegos de localización con el conjunto de jugadores N (identificaremos cada jugador con su posición en el plano). Como de costumbre, también identificaremos el juego (N, c) con la función característica c .

El objetivo de los jugadores, de un problema de localización, es encontrar una ubicación para la instalación que minimice el coste total y asignar el coste total mínimo correspondiente.

Veamos un par de situaciones de localización:

Ejemplo 5.1. Supongamos que los alcaldes de n ciudades cercanas (ciudad i localizada en el punto $a_i \in \mathbb{R}^2$), desean hacer un acuerdo para construir un aeropuerto conjuntamente. El coste de construcción del aeropuerto es, aproximadamente, $K \text{ €}$. El acuerdo incluye el compromiso de invertir en cada ciudad una cantidad de euros igual a A veces su distancia al cuadrado al aeropuerto (con A un número real positivo) para crear buenas carreteras e infraestructura ferroviaria comunicando las ciudades y el aeropuerto. Los ayuntamientos quieren encontrar una ubicación óptima para el aeropuerto (minimizar el coste total) y compartir los costes totales correspondientes. Observemos que se trata de una situación de localización (N, Φ, d, K) con $\Phi(d^S(x)) = A \sum_{a_i \in S} \|x - a_i\|_2^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, y toda $S \subset N$. Observemos que $\Phi(x) = A \sum_{i=1}^n x_i$, $\forall x \in$

\mathbb{R}^n , $f(y) = y^2$, $\forall y \in \mathbb{R}$, y $d = \|\cdot\|_2$ la norma euclídea. (Aquí hemos tomado $\|\cdot\|_2$, pero otras normas podrían ser más naturales en otras circunstancias).

Ejemplo 5.2. Supongamos que los ayuntamientos de n ciudades cercanas (ciudad i localizada en el punto $a_i \in \mathbb{R}^2$), desean hacer un acuerdo para crear una televisión local. Esto tiene un coste fijo de K euros (construcción del edificio de oficinas y el estudio) y un coste variable. Se ha estimado que el coste variable (el coste del propio canal) es A veces el cuadrado del radio de cobertura del canal de televisión (el radio de cobertura de un canal es la distancia máxima a la ubicación del canal desde la cual la señal de televisión puede ser recibida correctamente, A es un número real positivo). Los ayuntamientos quieren encontrar una ubicación óptima para la estación de televisión (de tal manera que todas las ciudades reciban correctamente la señal y a un coste mínimo) y compartir los costes totales correspondientes. Observemos que esto es una situación de localización (N, Φ, d, K) con $\Phi(d^S(x)) = A \max_{a_i \in S} \|x - a_i\|_2^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(y) = y^2$, $\forall y \in \mathbb{R}$, y $d = \|\cdot\|_2$ la norma euclídea. (De nuevo hemos tomado $\|\cdot\|_2$, pero otras normas podrían ser más naturales en otras circunstancias).

Un problema interesante que se plantea ahora es estudiar bajo que condiciones el *core* del juego de localización correspondiente es no vacío. Porque los usuarios no sólo quieren encontrar una ubicación óptima para la instalación, sino también asignar los costes totales. Si esto no sucediera probablemente estos usuarios no podrían llegar a un acuerdo y no construirían la instalación juntos.

Daremos condiciones suficientes para que el *core* sea no vacío. Más tarde veremos algunas clases importantes de juegos de localización y veremos que condiciones son necesarias para usar la regla de asignación igualitaria (que normalmente se usa en la práctica) que proporciona asignaciones.

Veamos ahora algunas propiedades preliminares de los juegos de localización.

Proposición 5.1. *Tomemos $c \in \mathcal{L}(N)$ el juego de localización correspondiente a (N, Φ, d, K) . Entonces c es monótono, es decir, $c(S) \leq c(T)$, $\forall S, T \subset N$ con $S \subset T$.*

Demostración. Sean $S \subseteq T$ dos coaliciones. Por definición $d_i^S(x) \leq d_i^T(x)$ para todo i e x . Entonces, dado que Φ es monótona, $\Phi(d^S(x)) \leq \Phi(d^T(x))$. Por lo tanto, se tiene el resultado. \square

Proposición 5.2. Tomemos $c \in \mathcal{L}(N)$ juego de localización correspondiente a (N, Φ, d, K) . Si $\mathcal{L}(N) \leq K$ entonces c es subaditivo, es decir, $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T) \forall S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$.

Demostración. Sean S, T dos coaliciones. Entonces, por la monotonía de L (ver la prueba anterior) y las propiedades de Φ ,

$$L(S \cup T) - (L(S) - L(T)) \leq L(S \cup T) \leq L(N).$$

Ahora, dado que $L(N) \leq K$, se tiene que $L(S \cup T) \leq K + L(S) + L(T)$ y

$$c(S \cup T) = K + L(S \cup T) \leq K + L(S) + K + L(T) = c(S) + c(T). \quad \square$$

Obsérvese que en el resultado anterior probamos que, si $L(N) \leq K$, entonces $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$ para cualquier par de coaliciones S y T disjuntas o no. El siguiente ejemplo muestra un juego de localización subaditivo con *core* vacío. Esto motiva los resultados posteriores donde buscamos condiciones suficientes para que el *core* del juego de localización sea no vacío.

Ejemplo 5.3. Sea $N = \{a_1, a_2, a_3\}$ el conjunto de los jugadores, localizados en los vertices de un triángulo equilátero de lado l . Consideremos que la función de globalización es la suma y que d es la distancia euclídea elevada a la potencia b , ($b \geq 2$). Entonces,

$$\Phi(d^S(x)) = \sum_{a_i \in S} \|x - a_i\|_2^b,$$

para cada $S \subset N$ y cada $x \in R^m$. Es fácil comprobar que el juego de localización asociado con (N, Φ, d, K) esta dado por:

$$\begin{aligned} c(a_1) = c(a_2) = c(a_3) &= K, \\ c(a_1 a_2) = c(a_1 a_3) = c(a_2 a_3) &= K + 2(l/2)^b, \\ c(a_1 a_2 a_3) &= K + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^b. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que el juego es subaditivo si y sólo si $K \geq (l^b/\sqrt{3}^{b-2}) - (l^b/2^{b-1})$. Sin embargo, tomando por ejemplo $K = (l^b/\sqrt{3}^{b-2}) - (l^b/2^{b-1})$, se puede ver que el juego de localización resultante tiene *core* vacío. Es decir, dado que todos sus actores son simétricos, una condición necesaria y suficiente para

tener core no vacío es que la asignación igualitaria $(c(N)/3, c(N)/3, c(N)/3)$ pertenezca al *core*. Se puede comprobar que no es el caso cuando $b > 2$.

Los siguientes resultados tienen la motivación de proporcionar una condición suficiente para que el *core* del juego de localización sea no vacío. En la Observación 2.1 describimos el *core* de un juego de localización (N, c) , lo recordamos:

$$\text{Core}(v) = C(v) = \{x \in \mathbb{R}_+^N : x(N) = v(N); x(S) \leq v(S), \forall S \subseteq N\}. \quad (5.1)$$

Utilizando el Lema 2.2 vamos a probar el teorema más importante de esta sección.

Teorema 5.1. *Sea (N, Φ, d, K) una situación de localización y sea (N, c) el correspondiente juego de localización. Denotamos $l_2 = \min_{S \subset N: |S|=2} L(S)$.*

- (a) *Supongamos que $2 \leq n \leq 2 + \frac{l_2}{K}$. Si $K(n-1) \geq L(N)$, entonces c tiene core no vacío.*
- (b) *Supongamos que $2 + \frac{l_2}{K} \leq n$. Si $K \geq (n-1)L(N) - nl_2$, entonces c tiene core no vacío.*

Demostración. En un juego de localización tenemos para cualquier colección equilibrada B con coeficientes de equilibrio $\{y_s : S \in \mathcal{B}\}$:

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} y_S c(S) = K \left(\sum_{S \in \mathcal{B}} y_S \right) + \sum_{S \in \mathcal{B}} y_S L(S).$$

Teniendo en cuenta la monotonía de L y el hecho de que $L(S) = 0$ para cualquier coalición de tamaño uno, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{B}} y_S c(S) &= K \left(\sum_{S \in \mathcal{B}} y_S \right) + \sum_{S \in \mathcal{B}: |S| \geq 2} y_S L(S) \\ &\geq K \left(\sum_{S \in \mathcal{B}} y_S \right) + \sum_{S \in \mathcal{B}: |S| \geq 2} y_S l_2. \end{aligned}$$

Para cualquier colección equilibrada mínima \mathcal{B} denotamos:

$$m(\mathcal{B}) = K \left(\sum_{S \in \mathcal{B}} y_S \right) + l_2 \sum_{S \in \mathcal{B}: |S| \geq 2} y_S.$$

(Observamos que, si \mathcal{B} es mínima, los coeficientes de equilibrio están determinados de forma única). Entonces, una condición suficiente para que el core sea no vacío es:

$$\min_{\{\mathcal{B}: \mathcal{B} \text{ no trivial y mínima equilibrada}\}} m(\mathcal{B}) \geq c(N). \quad (5.2)$$

Supongamos que este mínimo se alcanza en $\hat{\mathcal{B}}$. Si $\{a_i\} \notin \hat{\mathcal{B}}$ para cada $a_i \in N$, entonces $\hat{\mathcal{B}} = \{-i : a_i \in N\}$ (ver lema anterior) y $m(\hat{\mathcal{B}}) = (K + l_2)\frac{n}{n-1}$. Si $\hat{\mathcal{B}} = \{\{a_i\} : a_i \in N\}$, entonces $m(\hat{\mathcal{B}}) = Kn$. En otro caso $\hat{\mathcal{B}}$ solo puede ser una familia $\{\{a_i\}, N \setminus a_i\}$ (para un $a_i \in A$) y, entonces, $m(\hat{\mathcal{B}}) = 2K + l_2$.

Ahora, dado que $m(\hat{\mathcal{B}}) = \min\{(K + l_2)\frac{n}{n-1}, Kn, 2K + l_2\}$, es fácil comprobar que:

$$m(\hat{\mathcal{B}}) = \begin{cases} Kn, & \text{si } 2 \leq n \leq 2 + \frac{l_2}{K}, \\ (K + l_2)\frac{n}{n-1}, & \text{si } \frac{l_2}{K} < n. \end{cases}$$

Esto junto con (5.2) completa la prueba. □

Los siguientes ejemplos demuestran que los límites en el teorema son ajustados, en el sentido de que no se puede mejorar para todo n . En particular, estos ejemplos muestran que se consiguen para $n = 2$ y $n = 3$.

Ejemplo 5.4. Sea $N = \{a_1, a_2\}$ un conjunto de jugadores, localizados en los extremos de un segmento de longitud 2. Considere que la función de globalización es la suma y que d es la distancia euclidiana cuadrada. Es fácil comprobar que, el juego de localización (N, c) asociado a (N, Φ, d, K) está dado por: $c(a_1) = c(a_2) = K, c(a_1, a_2) = K + 2$. Claramente, este juego tiene core no vacío si y sólo si $K \geq 2$. Observemos que, en este caso, bajo la condición (a) del teorema anterior y $K(n - 1) \geq L(N)$ es equivalente a $K \geq 2$, entonces la cota es ajustada para este juego.

Ejemplo 5.5. Tomemos la misma situación de localización y el mismo juego de localización del Ejemplo 5.3 con $b = 2$. Por lo tanto, $N = \{a_1, a_2, a_3\}$ y la función característica del juego es:

$$\begin{aligned} c(a_1) = c(a_2) = c(a_3) &= K, \\ c(a_1 a_2) = c(a_1 a_3) = c(a_2 a_3) &= K + l^2/2, \\ c(a_1 a_2 a_3) &= K + l^2. \end{aligned}$$

Ya que los jugadores son simétricos en c , $core(c) \neq \emptyset$ si y sólo si la asignación

igualitaria $\left(\frac{c(N)}{3}, \frac{c(N)}{3}, \frac{c(N)}{3}\right)$ pertenece a $core(c)$. Es fácil comprobar que esta asignación pertenece $core(c)$ si y sólo si $K \geq \frac{l^2}{2}$. Observemos que, en este caso, si $K > \frac{l^2}{2}$ estamos bajo la condición (b); si $K \leq \frac{l^2}{2}$ estamos bajo la condición (a). En ambos casos, la cota dada por el Teorema es $K \geq \frac{l^2}{2}$. Entonces, de nuevo la cota es ajustada para este ejemplo.

Con el teorema anterior tenemos una condición suficiente para que el $core$ de cualquier juego de localización sea no vacío. Esta condición es buena porque: a) no puede mejorarse en general, y b) puede ser comprobada de una manera razonablemente fácil (sólo hay que calcular l_2 y $L(N)$). Otra condición suficiente más sencilla que la del Teorema 5.1 es la siguiente.

Proposición 5.3. *Sea (N, Φ, d, K) una situación de localización y sea (N, c) su correspondiente juego de localización. Si $K \geq (n-1)L(N)$, entonces c tiene $core$ no vacío.*

Demostración. Comprobemos que la asignación igualitaria $\left(\frac{K+L(N)}{n}, \dots, \frac{K+L(N)}{n}\right)$ pertenece a $core(c)$. Específicamente, para cada $S \subset N$ con $|S| \leq n-1$,

$$|S| \frac{K+L(N)}{n} \leq (n-1) \frac{K+L(N)}{n} \leq K \leq c(S).$$

De donde se deduce lo que queríamos probar. \square

Obsérvese que, aunque la condición en la Proposición 5.3 es más simple que la condición en el Teorema 5.1, también es más débil. Sólo en el caso de que l_2 sea muy pequeña (es decir, en caso de que haya dos usuarios situados en dos puntos muy cercanos), la condición en el Teorema 5.1 tiende a ser la misma que la de la Proposición 5.3. Pero, en tal caso, tal vez sería más conveniente considerar a estos dos jugadores cercanos como un solo jugador.

5.2. Juego de localización minimax

Consideremos ahora la clase de Juegos de Localización Minimax en \mathbb{R}^m . Para empezar observemos que en esta clase, d es la distancia euclídea y la función de

globalización es mín máx, además:

$$c_M(S) = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \max_{a \in S} \|x - a\|_2^2 + K. \quad (5.3)$$

Luego:

$$l_2 = \min_{a, b \in N, a \neq b} \frac{\|a - b\|_2^2}{4}.$$

Por lo tanto, l_2 se puede calcular de una manera razonablemente fácil y las condiciones del Teorema 5.1 se pueden comprobar fácilmente.

Ahora denotemos $l_k = \min_{S \subset N: |S|=k} L(S)$, para $k \in \{2, \dots, n\}$. En teoría de localización, es una característica bien conocida que, para cada $S \subset N$ con $|S| \geq m + 1$, $L(S)$ es igual a $L(\bar{S})$ para un $\bar{S} \subset S$ con $|\bar{S}| = m + 1$ (ya que, en un problema de localización minimax con un conjunto de puntos S , la solución es el centro de la esfera más pequeña que contenga S , y esta esfera está completamente determinada por a lo más $m + 1$ puntos de S , sólo tres puntos para un círculo en \mathbb{R}^2). Por lo tanto, puesto que L es monótona, $l_k = l_{k+1}, \forall k \geq m + 1$.

A continuación vamos a dar una condición suficiente y fácil de probar para que la solución proporcionalmente igualitaria pertenezca al core en un juego de localización minimax. Primero vamos a decir lo que entendemos por solución proporcionalmente igualitaria en este contexto. Como diremos en los juegos de localización de Weber, supongamos que aquí hay un vector de coeficientes de proporcionalidad real positivo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$. Denotemos $\alpha = \sum_{a_i \in N} \alpha_i$. Observemos que, en los juegos de localización minimax, un usuario en particular no produce costes de transporte una vez que se decide la ubicación de la instalación, en el sentido de que los costes de transporte serían iguales si se abandonará el juego. (Pensemos en el Ejemplo 5.2: la ubicación y el radio de cobertura del canal se ha decidido, un usuario particular no produce costes de transporte. Este no es el caso del juego de localización de Weber, como en el Ejemplo 5.1. Por lo tanto, la forma correcta de definir aquí la solución proporcionalmente igualitaria E es la siguiente. Si (N, c_M) es el juego de localización minimax asociado con la situación de localización minimax (N, Φ, d, K) , entonces $E_i(c_M) = (K + L(N))\alpha_i/\alpha, \forall a_i \in N$. El siguiente teorema establece una condición suficiente para que E proporcione asignaciones al *core*.

Teorema 5.2. *Sea (N, c_M) el correspondiente juego de localización minimax a la situación de localización minimax (N, Φ, d, K) . Entonces, $E(c_M)$ pertenece al $core(c_M)$ si*

$$L(N) \frac{\sum_{j=n-k+1}^n \alpha_j}{\alpha} - r(k) \leq K \left(1 - \frac{\sum_{j=n-k+1}^n \alpha_j}{\alpha} \right), \quad (5.4)$$

para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, donde $r(1) = 0$, $r(k) = l_k$ para cada $2 \leq k \leq m+1$ y $r(k) = l_{m+1}$, $\forall k \geq m+1$.

Demostración. $E(c_M) \in core(c_M)$ si y sólo si, para todo $S \subset N$,

$$\sum_{a_i \in S} (K + L(N)) \frac{\alpha_i}{\alpha} \leq K + L(S). \quad (5.5)$$

Teniendo en cuenta $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ y que $l_k = l_{m+1}$ para todo $k \geq m+1$, es claro que, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ (5.4) implica (5.5) para cada $S \subset N$ con $|S| = k$. \square

Podemos interpretar la condición (5.4) de la siguiente manera. La mitad izquierda de la desigualdad es la parte del coste de cobertura que los jugadores en $\{a_1, \dots, a_k\}$ ahorran, menos el coste de cobertura más pequeño que debe ser pagado por una coalición de k jugadores si sólo ellos cooperan. El lado derecho es la parte del coste fijo pagado por los jugadores en $\{a_1, \dots, a_n\}$. Por lo tanto, $E(c_M)$ pertenece a $core(c_M)$ si y sólo si los jugadores con coeficientes de proporcionalidad pequeño pagan una parte suficientemente grande del coste de cobertura. Una vez más, la condición (5.4) se cumple, para cada problema de localización minimax y cada vector de proporcionalidad α , si K es suficientemente grande.

Obsérvese que se podría encontrar fácilmente una condición suficiente más débil. Sin embargo, la del Teorema 3.8. anterior es especialmente fácil de comprobar. Sólo hay que considerar n desigualdades, y calcular l_2, \dots, l_{m+1} que en el caso del plano (\mathbb{R}^2) se reduce a l_2 y l_3 .

Anteriormente hemos visto un ejemplo de este juego en el Ejemplo 5.2.

5.3. Juego de localización de Weber, con coste fijo

Ahora consideremos el Juego de Localización de Weber, con coste fijo no variable. En el problema de localización de Weber la función de globalización es la suma. El juego de localización correspondientes viene dado por:

$$c_W(S) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{a \in S} \|x - a\|_2^2 + K, \quad (5.6)$$

para toda $S \subset N$. Siendo (N, Φ, d, K) situación de localización, con d distancia euclídea al cuadrado. Observemos que el Ejemplo 5.1 es una situación de localización de Weber.

Esta clase de problemas de localización es muy conocida. Es fácil deducir que la solución óptima del problema (3) es:

$$x^*(S) = \frac{1}{|S|} \sum_{a \in S} a.$$

Obviamente, todos los resultados anteriores siguen siendo aplicables a estos juegos.

En muchas situaciones prácticas, cuando varios usuarios deciden construir una instalación conjuntamente, acuerdan usar algún tipo de solución proporcionalmente igualitaria para la asignación de los costes. Para las situaciones de localización de Weber, una regla proporcionalmente igualitaria consiste en lo siguiente:

- (a) La instalación se construirá en la ubicación $x^*(P)$,
- (b) Los coste fijos K se dividen proporcionalmente entre los usuarios, de acuerdo con un vector de coeficientes de proporcionalidad $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,
- (c) Cada usuario paga los costes de transporte que produce.

Esto significa que, si (N, c_W) es el juego de localización asociado con la situación de localización de Weber (N, Φ, d, K) , de acuerdo con esta regla (la

denotamos por E), el usuario i debe pagar:

$$E(c_W) = K_i + \|x^*(N) - a_i\|_2^2,$$

donde $K_i = K \frac{\alpha_i}{\alpha}$, y $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Para entender mejor el ítem b), observemos que en muchos casos, el vector de proporcionalidad será $(1/n, \dots, 1/n)$, pero a veces otro vector será mas adecuado. Por ejemplo, en el Ejemplo 5.1, las ciudades utilizan su número de habitantes como coeficientes de proporcionalidad.

Veamos una condición necesaria y suficiente para que esta solución proporcional igualitaria proporcione asignaciones básicas.

Teorema 5.3. *Sea (N, c_W) el correspondiente juego de localización de Weber a la situación de localización de Weber (N, Φ, d, K) . Entonces $E(c_W)$ pertenece al $core(c_W)$ si y sólo si*

$$|S| \|x^*(S) - x^*(N)\|_2^2 \leq \sum_{a_i \notin S} K_i \quad (5.7)$$

para cualquier coalición $S \subset N$.

Demostración. $E(c_W)$ pertenece al $core(c)$ si y sólo si, para toda $S \subset N$,

$$\sum_{a_i \in S} K_i + \sum_{a_i \in S} \|x^*(N) - a_i\|_2^2 \leq K + \sum_{a_i \in S} \|x^*(S) - a_i\|_2^2$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{a_i \in S} \|x^*(N) - a_i\|_2^2 - \sum_{a_i \in S} \|x^*(S) - a_i\|_2^2 \leq \sum_{a_i \notin S} K_i.$$

Pero

$$\begin{aligned} & \sum_{a_i \in S} (\|x^*(N) - a_i\|_2^2 - \sum_{a_i \in S} \|x^*(S) - a_i\|_2^2) \\ &= \sum_{a_i \in S} \left(\|x^*(N)\|_2^2 - \|x^*(S)\|_2^2 - 2\langle x^*(N) - x^*(S), a_i \rangle \right) \\ &= |S| \left(\|x^*(N)\|_2^2 - \|x^*(S)\|_2^2 - 2 \sum_{a_i \in S} \langle x^*(N) - x^*(S), \frac{a_i}{|S|} \rangle \right) \\ &= |S| \left(\|x^*(N)\|_2^2 + \|x^*(S)\|_2^2 - 2\langle x^*(N), x^*(S) \rangle \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

De donde se sigue el resultado del Teorema. \square

La condición (5.7) puede ser interpretada de la siguiente manera. La primera mitad de la desigualdad puede considerarse aproximadamente como el coste extra de transporte que los usuarios en S mantendrán si se forma la coalición N . La parte derecha es la parte de K apoyada por los jugadores en $N \setminus S$. Por lo tanto, $E(c_W)$ pertenece al $core(c_w)$ si y sólo si el coste extra de transporte que cada coalición debe soportar es menor o igual que el coste fijo que ahorra. Es digno de mención que la condición (5.7) se cumple, para cada problema de localización de Weber y cada vector de proporcionalidad α , si K es suficientemente grande.

Una condición más fácil que no depende del conjunto de coaliciones S se deriva de nuestro siguiente resultado. Sea $r_N = \max_{a \in N} \|x^*(N) - a\|_2^2$.

Corolario 5.1. $E(c_W) \in core(c)$ si:

$$(n - 1)r_N \leq \min_{a_i \in N} K_i$$

Demostración. Observemos primero que $r_N \geq \|x^*(N) - x^*(S)\|_2^2$ para cada coalición $S \subset N$. Entonces, bajo la hipótesis del corolario,

$$r_N \leq \frac{\min_{a_i \in N} K_i}{n - 1} \leq \frac{\sum_{a_i \notin S} K_i}{n - 1} \leq \frac{\sum_{a_i \notin S} K_i}{|S|}$$

para cada coalición $S \subset N, S \neq N$. Por lo tanto,

$$|S| \|x^*(N) - x^*(S)\|_2^2 \leq \sum_{a_i \notin S} K_i,$$

y obtenemos de (5.7) que $x_P \in core(c)$ (observemos que (5.7) es obviamente cierto para $S = N$). \square

5.4. Juego de localización de Weber, con coste fijo variable

Ahora trataremos el Juego de Localización de Weber, con coste fijo dependiendo del lugar elegido.

Consideramos el problema de localización de ubicación para una sola insta-

lación en un espacio continuo con diferentes costes fijos, dependiendo del lugar elegido, esto se puede analizar de forma computacional como en [2].

Un conjunto de n usuarios de una instalación determinada ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) se encuentran en n puntos a_1, \dots, a_n en el plano \mathbb{R}^2 . Denotaremos por N el conjunto de puntos y sea Ω un rectángulo compacto que contiene a N . El coste total de transporte se mide por una función monótona $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y n funciones no decrecientes $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\Phi(f_1(\|x - a_1\|), \dots, f_n(\|x - a_n\|))$ es el coste de conectar cada punto en N con la instalación en x y $\|\cdot\|$ cualquier norma en \mathbb{R}^2 . Además, consideramos un coste de apertura adicional de la nueva instalación $x \in \Omega$ dependiendo de x , a saber, una función no negativa $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Dividimos el plano en zonas mutuamente excluyentes y asignamos un valor constante a todos los puntos de la misma zona (por ejemplo, los impuestos autonómicos cumplen este supuesto). Asumamos que $\Omega = \bigcup_{j=1}^h P_j$ con P_j polígonos convexos cerrados no superpuestos y para cualquier $j = 1, \dots, h$ denotemos

$$K(x) = k_j, \quad \forall x \in P'_j,$$

para una constante no negativa $k_j \in \mathbb{R}_+$, donde P'_j representa el conjunto de los puntos interiores de P'_j y el conjunto de las aristas libres, es decir, el conjunto de los puntos frontera que le pertenecen exclusivamente. Además asumimos que en una arista común B_l compartida por dos zonas adyacentes P_i y P_j se aplica el mínimo de los dos costes fijos

$$K(x) = \min\{k_i, k_j\}, \quad \forall x \in B_l = P_i \cap P_j.$$

Observemos que algún punto puede pertenecer a la intersección de dos o más aristas comunes; en este caso consideramos el mínimo entre los costes fijos de todas las regiones involucradas. El coste fijo $K(x)$ es muy grande (infinito) para $x \notin \Omega$.

El problema consiste en encontrar un punto $x^* \in \Omega$ solución de:

$$\min_{x \in \Omega} \Phi(f_1(\|x - a_1\|), \dots, f_n(\|x - a_n\|)) + K(x). \quad (5.9)$$

Denotemos por x_M^* la solución de (5.9) con $K = 0$, es decir, sin costes fijos:

$$x_M^* \in \arg \min_{x \in \Omega} \Phi(f_1(\|x - a_1\|), \dots, f_n(\|x - a_n\|)).$$

Dado que la función $\Phi(f_1(\|x - a_1\|), \dots, f_n(\|x - a_n\|))$ resulta ser convexa por construcción, tenemos el siguiente resultado que generaliza la Propiedad 1 de [2].

Teorema 5.4. *Asumiendo que Φ, f_1, \dots, f_n son semicontinuas inferiores, crecientes y funciones en sus respectivos dominios, tales que $\Phi(0) = 0, f_1(0), \dots, f_n(0) = 0$, existe una solución óptima x^* del problema (5.9) tal que $x^* = x_M^*$ ó x^* es un punto en una arista B_l donde el coste fijo $K(x^*) < K(x_M^*)$ para cualquier $x^* \in B_l$.*

Ejemplo 5.6. Sea $N = \{a_1, a_2, a_3\}$ tres puntos de demanda en un rectángulo $\Omega = [0, 1] \times [0, \sqrt{3}/2]$ localizados en $(0, 0), (1/2, \sqrt{3}/2), (1, 0)$, respectivamente. Consideremos el problema (5.9) con $\Phi(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n z_i, f_i(\|x - a_i\|) = \|x - a_i\|_2^2$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $K(x) = k, \forall x, (k > 0)$. En esta caso una nueva instalación x se instalará en el baricentro del triángulo de vértices a_1, a_2, a_3 , es decir, $x_M^* = (1/2, \sqrt{4}/6)$. Este ejemplo lo hemos interpretado antes como una situación continua de de localización simple donde 3 pueblos (que están en $a_i \in \Omega$) quieren construir un aeropuerto juntos y los costes de construcción son $k \text{ €}$. Además, cada pueblo tiene que crear infraestructuras para comunicarse con el aeropuerto con coste directamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el pueblo y las instalaciones.

Consideremos ahora dos regiones diferentes en el rectángulo, digamos $\Omega = A_1 \cup A_2$ donde $A_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \Omega : 0 \leq x_1 \leq 1/4\}$. El coste fijo es $K(x) = 1$ para $x \in A_1$ y $K(x) = 1\varepsilon$ para $x \in A_2 (\varepsilon > 0)$. En este caso para ε suficientemente grande ($\varepsilon > 3/16$) la nueva instalación x se localizará en $x^* = (1/4, \sqrt{3}/6)$. En este caso tenemos la solución del problema

$$\begin{aligned} \min_{x \in \Omega} \delta(x) &= \min_{(x_1, x_2) \in \Omega} x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_1 - 1/2)^2 \\ &\quad + (x_2 - \sqrt{3}/2)^2 + K(x_1, x_2) \end{aligned}$$

y $K(x^*) = 1 < K(x_M^*) = 1 + \varepsilon$ como dice el Teorema 5.4, donde $x_M^* =$

$(1/2, \sqrt{3}/6)$ es la solución del problema sin costes fijos.

En este caso la función de característica c varía ya que el coste de instalación no es fijo sino que depende de la posición, tenemos la siguiente función característica:

$$c(S) = \begin{cases} \min_{x \in \Omega} \{\Phi(d^S(x) + K(x))\} & , \forall S \subseteq N \\ 0 & , S = \emptyset. \end{cases} \quad (5.10)$$

Consideremos ahora el problema de localización de Weber $\Phi(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n z_i$ y $f_i(\|x - a_i\|) = \|x - a_i\|_2$ para cada $i = 1, \dots, n$, y la correspondiente situación de localización continua de instalación única: $(N, \Phi, f, K), K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ función de coste fijo. El problema es encontrar un punto $x^*(N) \in \Omega$ solución de:

$$\min_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^n \|x - a_i\|_2 + K(x).$$

Para cualquier coalición $S \subseteq N$, $c(S) = \sum_{i: a_i \in S} \|x^*(S) - a_i\|_2 + K(x^*(S))$.

La regla proporcional, dada en [11], considera un vector:

$$x_i^P = \|x^*(N) - a_i\|_2 + \alpha_i K(x^*(N)), \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un vector de coeficientes proporcionales reales positivos tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Por ejemplo, si los jugadores son municipios, estos coeficientes pueden ser proporcionales al número de habitantes o a la densidad de la población. Usaremos la siguiente notación $\alpha_S = \sum_{i: a_i \in S} \alpha_i$ para cualquier coalición $S \subseteq N$.

En la demostración de la Proposición 5.3, hemos probado que la asignación igualitaria está en el core si $k_{min} \geq (n-1)D(N)$. Observemos que la solución igualitaria $(c(N)/n, \dots, c(N)/n)$ conduce a compartir el coste total de transporte entre los jugadores, mientras que la regla de proporcionalidad (x_1^P, \dots, x_n^P) asigna a cada jugador su coste de transporte mas una cuota de coste fijo.

La siguiente proposición dá una condición suficiente para que el problema de Weber la regla proporcional (x_1^P, \dots, x_n^P) , pertenezca al *core*.

Teorema 5.5. *Si para cualquier coalición $S \subseteq N$ tenemos:*

$$|S| \|x^*(N) - x^*(S)\|_2 \leq K(x^*(S)) - \alpha_S K(x^*(N)) \quad (5.11)$$

entonces (x_1^P, \dots, x_n^P) está en el core.

Demostración. Dado que $\sum_{i=1}^n x_i^P = \sum_{i=1}^n \|x^*(N) - a_i\|_2 + K(x^*(N)) = c(N)$, tenemos que probar que $\sum_{i:a_i \in S} x_i^P \leq c(S)$ para cada coalición S con $|S| \leq n-1$.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i:a_i \in S} x_i^P &= \sum_{i:a_i \in S} \|x^*(N) - a_i\|_2 + \alpha_S K(x^*(N)) \\ &\leq \sum_{i:a_i \in S} (\|x^*(S) - a_i\|_2 + \|x^*(N) - x^*(S)\|_2) + \alpha_S K(x^*(N)) \\ &= |S| \|x^*(N) - x^*(S)\|_2 + \sum_{i:a_i \in S} \|x^*(S) - a_i\|_2 + \alpha_S K(x^*(N)) \\ &\leq \sum_{i:a_i \in S} \|x^*(S) - a_i\|_2 + K(x^*(S)) = c(S) \end{aligned}$$

entonces (x_1^P, \dots, x_n^P) está en el core. \square

La condición (5.11) describe un efecto de compensación entre los costes de transporte y los costes fijos para que el punto (x_1^P, \dots, x_n^P) esté en el core: esto significa que el coste de transporte adicional que los usuarios en S tienen en caso de que se formara la gran coalición (i.e., el lado izquierdo de la desigualdad (5.11)) tiene que ser inferior al coste fijo adicional soportado por los jugadores de S cuando pertenecen a la coalición S con respecto al coste fijo que pagarían en caso de gran coalición.

A partir de la condición (5.11) tenemos un límite superior para los coeficientes $\alpha_i, i \in S$ para cualquier coalición $S \subseteq N$:

$$\alpha_s \leq \frac{K(x^*(S))}{K(x^*(N))} - \frac{|S| \|x^*(N) - x^*(S)\|_2}{K(x^*(N))}. \quad (5.12)$$

Al considerar la propiedad principal para la coalición S tenemos un límite superior mayor:

$$\alpha_s \leq \frac{K(x^*(S))}{K(x^*(N))} - \frac{\sum_{i:a_i \in S} \|x^*(N) - a_i\|_2 + K(x^*(S))}{K(x^*(N))}. \quad (5.13)$$

De hecho, $\|x^*(N) - a_i\|_2 \leq \|x^*(N) - x^*(S)\|_2 + \|x^*(S) - a_i\|_2$ para cualquier $i \in S$ y para cualquier $x^*(S)$. Entonces, para algún vector α , es posible que el valor proporcional x_1^P, \dots, x_n^P pertenezca al core incluso si la condición (5.11) no se cumple. Tal situación puede ocurrir, por ejemplo, cuando todas las instalaciones se encuentran en una línea del plano. Por ejemplo, esto ocurre cuando

tenemos una línea de ferrocarril y el problema es decidir dónde construir una estación de ferrocarril para mejorar el servicio a los habitantes de la región.

Para simplificar consideremos $\Omega = [0, L]$, ($L > 0$), y el conjunto de instalaciones $N = \{a_1, \dots, a_n\}$ ubicadas en Ω con coordenadas x_{a_1}, \dots, x_{a_n} . Supongamos también que el coste fijo definido en Ω es:

$$K(x) = \begin{cases} k_1 & x \leq \bar{x}, \\ k_2 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (5.14)$$

con $0 < k_1 < k_2$ y la solución correspondiente al problema de Weber es $x^*(N) = \bar{x}$. Centremos el análisis en dos instalaciones consecutivas a_i, a_j , ($x_{a_i} < x_{a_j}$). Como en la siguiente figura:

Fig. 1: el problema de localización sobre una recta.



En este caso si $k_1 + (x_{a_j} - \bar{x}) < k_2$, tenemos que $c(\{a_i\}) = k_1$, $c(\{a_j\}) = k_1 + (x_{a_j} - \bar{x})$, $c(\{a_i, a_j\}) = k_1 + (x_{a_j} - x_{a_i})$. Si el valor proporcional $x_i^P = \|x^*(N) - a_i\|_2 + \alpha_i k_1$ pertenece al core, por la inecuación (5.13) para $S = \{a_i\}$ tenemos la cota $\alpha_i \leq 1 - \frac{\|x^*(N) - a_i\|_2}{k_1}$ y para $S = \{a_j\}$ la inecuación trivial $\alpha_j \leq 1$. Por otro lado, si el jugador a_i y el jugador a_j deciden localizar su instalación en $x^*(\{a_i, a_j\}) = a_i$, la inecuación (5.12) dice $\alpha_i + \alpha_j \leq 1 - \frac{2\|x^*(N) - a_i\|_2}{k_1}$, que no se satisface con $\alpha_i > 1 - \frac{2\|x^*(N) - a_i\|_2}{k_1}$. Si este es el caso, no tenemos el efecto de compensación dado por la condición (5.11). Tengamos en cuenta que para el jugador a_i y el jugador a_j es indiferente ubicar $x^*(\{a_i, a_j\})$ en cualquier punto del intervalo $[x_{a_i}, \bar{x}]$.

Finalmente, observemos que en caso del coste fijo constante la condición (5.11) es similar a la condición (5.7), que hemos dado en el problema anterior.

Capítulo 6

Juegos de Radio y Diámetro

Durante este capítulo continuamos analizando los juegos de localización, aunque ahora nos centramos en un tipo específico que se tratan de forma ligeramente distinta. Aquí hemos usado la referencia [17]. De nuevo los jugadores son los clientes (puntos de demanda) en el problema de localización y el valor característico de una coalición es el coste de servir a sus miembros. Específicamente, el coste en estos juegos es el radio de servicio de la coalición. A estos juegos se les conoce como Juegos de Localización de Radio Mínimo.

Estudiaremos la existencia de puntos en el core y la existencia de representaciones polinomiales de los cores de estos juegos, centrándonos en espacios de red, es decir, espacios métricos finitos inducidos por grafos no dirigidos y longitudes de aristas positivo y en los espacios métricos definidos sobre \mathbb{R}^d .

Además, analizaremos la relación entre los Juegos de Localización de Radio Mínimo y los Juegos de Localización de Diámetro Mínimo. Por esto comenzamos el capítulo con unos conceptos introductorios sobre el radio y el diámetro de un conjunto finito de un espacio métrico. Demostraremos un teorema que proporciona una situación en el que el core de ambos juegos es igual y no vacío.

Durante el capítulo veremos distintos ejemplos de este tipo de juegos, en alguno de ellos comprobaremos distintas situaciones en las que el core puede ser vacío o no vacío.

Sea X un espacio métrico y sea $N_0 = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto finito de puntos de X . El subconjunto $N = \{v_1, \dots, v_k\}$ se identifica con el conjunto

de k jugadores, nos referimos a estos puntos como instalaciones existentes, o puntos de demanda. También hay un punto v_0 , que representa la ubicación de un servidor que proporciona servicios a los jugadores, que puede ser visto como un elemento especial en el sistema, por ejemplo, cada punto de demanda debe tener acceso a v_0 . Observemos que v_0 no es un jugador. Por ejemplo, supongamos que los puntos de demanda representan a los pacientes y v_0 es la ubicación de un médico que presta servicios sanitarios.

Este estudio está motivado por modelos de localización, donde el tiempo transcurrido hasta que se proporciona el servicio (tiempo de respuesta) es crítico. Continuando con el ejemplo anterior, el servicio médico no se proporciona en su origen. Por otra parte, la coalición de pacientes S puede seleccionar de forma óptima la ubicación del centro (por ejemplo, clínica u hospital), donde se proporcionará el servicio. Cuando hay una llamada de servicio, tanto el paciente como el médico viajarán a la clínica. El coste del servicio se supone como el radio de servicio, definido como la distancia máxima recorrida por un paciente o el médico al centro de servicio (centro). Utilizando la terminología de la teoría de localización, el coste de una coalición S es el valor de solución del problema 1-centro para el conjunto $S \cup \{v_0\}$.

Definamos algunos conceptos necesarios:

Definición 6.1. Dado un subconjunto finito de puntos $Y \subseteq X$, su diámetro $D(Y)$ se define como:

$$D(Y) = \max_{y_1, y_2 \in Y} d(y_1, y_2).$$

Un par de puntos $y_1, y_2 \in Y$, que verifiquen: $D(Y) = d(y_1, y_2)$ se denominan diametrales.

Definición 6.2. Dado un subconjunto finito de puntos $Y \subseteq X$, se define el radio de Y como:

$$R(Y) = \inf_{x \in X} \max_{y \in Y} d(x, y).$$

Un punto $x \in X$ satisfaciendo $R(Y) = \max_{y \in Y} d(x, y)$ se llama 1-centro de Y .

Observemos que por la desigualdad triangular:

$$R(Y) \leq D(Y) \leq 2R(Y). \tag{6.1}$$

Observemos que el core de (N, v) , en el caso de un juego de coste, como ya hemos visto en secciones anteriores, es el conjunto:

$$\mathcal{C}(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^k : x(N) = v(N), x(S) \leq v(S), \forall S \subseteq N\}. \quad (6.2)$$

El Juego de Localización de Diámetro Mínimo (MDLG), (N, v_I) , respecto al espacio métrico X y el conjunto de puntos N_0 , tiene como función característica:

$$v_I(S) = D(S \cup \{v_0\}).$$

Ahora definimos formalmente la clase de juegos de costes cooperativos basados en los problemas de localización de instalaciones anteriores que estudiamos a continuación: el Juego de Localización de Radios Mínimo (MRLG). Su función característica se define como:

$$v_{II}(S) = 2R(S \cup \{v_0\}).$$

Consideremos el espacio métrico de red inducido por un grafo conectado no dirigido.

Supongamos $G = (V, E)$ un grafo conectado no dirigido con longitudes de aristas positivas $\{l_e\}, e \in E$, donde $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$. Donde $e = (v_i, v_j)$, usaremos la notación $l(v_i, v_j) = l_e$. Suponemos que cada arista en E es rectificable. Nos referimos a los puntos interiores de una arista por su distancia (a lo largo de la arista) de los dos nodos de la arista. $A(G)$ es el conjunto continuo de puntos en las aristas de G . Para cualquier par de puntos $x, y \in A(G)$, denotaremos por $d(x, y)$ el camino más corto en $A(G)$ conectando x e y . Nos referimos a $A(G)$ como el espacio métrico inducido por G y las distancias mínimas.

Por definición la función característica v_{II} es monótona. Sin embargo, cuando el espacio métrico X es discreto, es decir, $|X|$ es finito, el juego de localización de radios, (N, v_{II}) no tiene porque verificar la propiedad de superaditividad. Como resultado los jugadores pueden no tener ningún incentivo para cooperar y el core puede estar vacío, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.1. Consideremos una ruta con 5 nodos con el siguiente conjunto de aristas: $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_0), (v_0, v_3), (v_3, v_4)\}$. Las respectivas longitudes son

1, 1, 2 y 2. El espacio finito (discreto) X esta compuesto de 5 nodos (puntos) con función de distancia inducida por la longitud de las aristas. También podemos ver X como un conjunto de 5 puntos en la línea real. Consideremos primero el juego de 2 jugadores sobre X definido por $N = \{v_1, v_4\}$. No es subaditivo ya que: $v_{II}(\{v_1, v_4\}) > v_{II}(\{v_1\}) + v_{II}(\{v_4\})$. Se tiene también que para el juego discreto completo sobre el conjunto X y el conjunto $N = X \setminus \{v_0\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tampoco verifica la subaditividad pues: $v_{II}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = 8$, $v_{II}(\{v_1, v_2\}) = 2$, $v_{II}(\{v_3, v_4\}) = 4$, luego:

$$v_{II}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) > v_{II}(\{v_1, v_2\}) + v_{II}(\{v_3, v_4\})$$

Ejemplo 6.2. Veamos ahora un ejemplo que verifica subaditividad pero tiene *core* vacío.

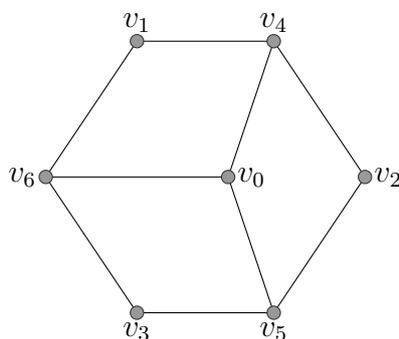
Consideremos el espacio métrico discreto definido por $X = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, $d(v_0, v_1) = d(v_2, v_3) = 2$ y $d(v_0, v_2) = d(v_0, v_3) = d(v_1, v_2) = d(v_1, v_3) = 1$. Sea $N = \{v_1, v_2, v_3\}$, y consideremos el juego radial (discreto) (N, v_{II}) . Tenemos $v_{II}(N) = 4$ y $v_{II}(S) = 2$ para cualquier coalición S , con $|S| \leq 2$. Es fácil comprobar que no hay un vector x que verifique

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + x_3 &\leq 2 \end{aligned}$$

Luego este juego tiene *core* vacío.

Cuando el espacio métrico X consiste en un conjunto continuo de puntos, $C(N, v_{II})$ también puede ser vacío para un juego de 3 jugadores, como se ilustra en el siguiente ejemplo de un espacio métrico de red $A(G)$. Este ejemplo corresponde a una red de carretera plana geométrica muy simple, donde las aristas son segmentos de línea y sus longitudes son las distancias euclidianas respectivas.

Ejemplo 6.3. Consideremos el grafo $G = (V, E)$ donde $V = \{v_0, v_1, \dots, v_6\}$ y $E = \{(v_0, v_4), (v_0, v_5), (v_0, v_6), (v_1, v_4), (v_1, v_6), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_5), (v_3, v_6)\}$. Todas las aristas de longitud 1. Como en la siguiente figura:



Sea $X = A(G)$. Consideremos el juego (N, v_{II}) , definido sobre X , con $N_0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ y $N = \{v_1, v_2, v_3\}$. Es fácil comprobar que para cada coalición $S \subseteq N$ con $|S| \leq 2$ tenemos $v_{II}(S) = 2$, y $v_{II}(N) = 4$.

Por simetría, si el core es no vacío la asignación simétrica $x = (4/3, 4/3, 4/3)$ estaría en el *core* contradiciendo la restricción $x_1 + x_2 \leq v_{II}(\{v_1, v_2\}) = 2$.

Para cualquier espacio métrico X , la definición de v_{II} asegura la monotonía del juego (N, v_{II}) , mientras que la subaditividad se demuestra en la proposición siguiente, antes veamos una definición necesaria para poder asegurarla:

Definición 6.3. Sea X un espacio métrico tal que para cada par de puntos $x, y \in X$, y un real $0 \leq \alpha \leq 1$, hay un punto $z \in X$ tal que $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$ y $d(x, z) = \alpha d(x, y)$. Entonces X se llama espacio métrico geodésico (ver [15]).

Proposición 6.1. Si X es un espacio métrico geodésico, entonces el juego de radio (N, v_{II}) sobre X es subaditivo.

Demostración. Consideremos un par de coaliciones S_1 y S_2 . Tenemos que probar que

$$v_{II}(S_1 \cup S_2) \leq v_{II}(S_1) + v_{II}(S_2).$$

Para $j = 1, 2$, sean c_j y r_j el centro y el radio de la bola más pequeña que encierra los puntos $S_j \cup \{v_0\}$, respectivamente.

Sea $P(c_1, c_2)$ el camino mas corto en X , conectando c_1 y c_2 . Denotemos $d(c_1, c_2)$ como la distancia de $P(c_1, c_2)$. Entonces, $d(c_1, c_2) \leq d(c_1, v_0) + d(v_0, c_2) \leq r_1 + r_2$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $r_2 \geq r_1$. Si $r_2 \geq r_1 + d(c_1, c_2)$,

entonces un centro establecido en c_2 garantizará un radio de cobertura r_2 para todos los nodos en $S_1 \cup S_2 \cup \{v_0\}$. Por lo tanto, $v_{II}(S_1 \cup S_2) \leq r_2 = v_{II}(S_2)$.

Si $r_1 \leq r_2 \leq r_1 + d(c_1, c_2)$, entonces consideremos un centro establecido en el punto c^* , tal que $d(c_1, c^*) = (d(c_1, c_2) + r_2 - r_1)/2$, y $d(c_2, c^*) = (d(c_1, c_2) - r_2 + r_1)/2$. Es fácil comprobar que este centro garantizará un radio de cobertura de $(d(c_1, c_2) + r_1 + r_2)/2 \leq r_1 + r_2$ para todos los nodos de $S_1 \cup S_2 \cup \{v_0\}$. (Observemos que v_0 está en la intersección de las bolas más pequeñas que encierran $S_1 \cup \{v_0\}$ y $S_2 \cup \{v_0\}$). Por lo tanto, $v_{II}(S_1 \cup S_2) \leq v_{II}(S_1) + v_{II}(S_2)$. \square

6.1. Espacios métricos de red

Ahora vamos a considerar espacios métricos específicos que se estudian con frecuencia en el análisis de localización y muestran que en estos casos el *core* puede ser representado por un número polinómico de desigualdades lineales. En general, necesitaremos un número exponencial de desigualdades lineales para representar el *core* de un juego, (6.2).

En primer lugar, vamos a considerar el caso donde $X = A(G)$, es espacio métrico inducido por un grafo conectado no dirigido $G = (V, E)$, $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, y sus longitudes de arista positivas. Supongamos que el conjunto de jugadores N satisface que $N \subseteq V \setminus \{v_0\}$. Además, consideremos sin pérdida de generalidad que $N = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, donde $k = |N|$.

Proposición 6.2. *Consideremos el juego de radio (N, v_{II}) , definido sobre un espacio métrico de red $A(G)$, inducido por el grafo $G = (V, E)$ con longitud de arista positiva. Entonces, hay una colección de subconjuntos de N , $\{S_{p,q}^{i,j}\}$, $(v_i, v_j) \in E$, $v_p, v_q \in N \cup \{v_0\}$, $(i, j, p, q) \in I$, tal que $|I| = O(m|N|^2)$ y*

$$C(N, v_{II}) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^N : x(N) = v_{II}(N), x(S_{p,q}^{i,j}) \leq v_{II}(S_{p,q}^{i,j}), \forall (i, j, p, q) \in I \right\}.$$

Como resultado, la pertenencia al core, además de ver que el core es no vacío, puede ser comprobada en tiempo fuertemente polinomial.

Demostración. Primero observemos que, si $N = \{v_1, \dots, v_n\}$, $v_{II}(N)$ es igual al diámetro de un árbol de expansión de diámetro mínimo de V . Este árbol de expansión, digamos T^* , resuelve el problema continuo (o absoluto) de 1-centro

sobre G , y puede encontrarse en tiempo $O(mn + n^2 \log n)$, (ver [8]).

Más generalmente, cuando $N \subseteq V \setminus \{v_0\}$, $v_{II}(S)$ se define como la longitud del diámetro de un árbol spanning de diámetro mínimo de $S \cup \{v_0\}$, $\forall S \subseteq N$. Tal árbol, digamos $T^*(S)$, resuelve el problema de un centro continuo para el subconjunto de los nodos $S \cup \{v_0\}$, y se puede encontrar en tiempo $O(mn + n^2 \log n)$. Recordemos que el problema continuo de 1-centro para algunos subconjuntos $V' \subseteq V$, define la vecindad de radio más pequeña es el espacio métrico $A(G)$, que recubre V' .

Además, $T^*(S)$ tiene la siguiente propiedad. Hay una arista de G , digamos (v_i, v_j) , tal que el 1-centro de $T^*(S)$ está sobre esta arista, de nuevo ver [8], y

$$v_{II}(S) = d(v_p, v_i) + l(v_i, v_j) + d(v_j, v_q),$$

para algunos nodos $v_p, v_q \in S \cup \{v_0\}$.

En total hay a lo más $O(|N|^2)$ centros de árboles de diámetro mínimo sobre la arista (v_i, v_j) . Cada uno de estos centros $C_{p,q}^{i,j}$ está asociado con un radio de la forma:

$$r_{p,q}^{i,j} = (d(v_p, v_i) + l(v_i, v_j) + d(v_j, v_q))/2.$$

Después, para cada centro $c_{p,q}^{i,j}$ tal que $d(v_0, c_{p,q}^{i,j}) \leq r_{p,q}^{i,j}$, definamos la coalición máxima:

$$S_{p,q}^{i,j} = \{u \in N : d(u, c_{p,q}^{i,j}) \leq r_{p,q}^{i,j}\}.$$

Sea

$$I = \{(i, j, p, q) : (v_i, v_j) \in E, v_p, v_q \in N \cup \{v_0\}, d(v_0, c_{p,q}^{i,j}) \leq r_{p,q}^{i,j}\}$$

Ahora consideremos la coalición $S \subseteq N$. Entonces, a partir de lo anterior se deduce que hay un cierto centro $c_{p,q}^{i,j}$ y radio $r_{p,q}^{i,j}$, tal que $v_{II}(S) = 2r_{p,q}^{i,j}$, y $S \subseteq S_{p,q}^{i,j}$. Por lo tanto, la monotonía del juego implica que la restricción del core $x(S) \leq v_{II}(S)$ que se deduce por la restricción $x(S_{p,q}^{i,j}) \leq v_{II}(S_{p,q}^{i,j})$. Esto valida la representación eficiente del núcleo indicada en la proposición. Finalmente, observemos que utilizando los algoritmos anteriores para resolver problemas de un centro, se necesita tiempo polinomial para construir toda la colección $\{S_{p,q}^{i,j}\}$, $(v_i, v_j) \in E, v_p, v_q \in N \cup \{v_0\}, (i, j, p, q) \in I$. En particular, la

propiedad de pertenencia al core, como ser no vacío puede ser comprobada en tiempo fuertemente polinomial por el algoritmo que encontramos en [22]. Esto completa la prueba. \square

Observación 6.1. Relativo al MRLG definido sobre un espacio métrico de red podemos suponer sin pérdida de generalidad que el grafo subyacente $G = (V, E)$ es un grafo completo, y sus longitudes de aristas satisfacen la desigualdad triangular. En otro caso, siempre podremos introducir una arista entre cualquier par de nodos y establecer su longitud igual a la distancia en $A(G)$ entre el par. Consideremos una coalición S . Observemos que en este caso cada ruta simple de $T^*(S)$ tiene a lo más 3 aristas. Sin embargo, incluso en este caso $T^*(S)$ no es necesariamente un subárbol de $G_{v_0}(S)$, el subgrafo de G inducido por el conjunto de nodos $S \cup \{v_0\}$. Como ejemplo consideremos el grafo completo con conjunto de nodos $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$. Con longitudes de las aristas $(v_3, v_0), (v_3, v_1), (v_3, v_2)$ igual a 1, y la longitud del resto igual a 2. Cuando $S = \{v_1, v_2\}$, $T^*(S)$ es la estrella centrada en v_3 , que no está en $G_{v_0}(S)$.

Corolario 6.1. Si G es un árbol, hay una colección de subconjuntos de N , $\{S_{p,q}\}$, $v_p, v_q \in N \cup \{v_0\}, p, q \in I'$, tal que $|I'| = O(|N|^2)$, y el core del juego (N, v_{II}) esta definido por:

$$C(N, v_{II}) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x(N) = v_{II}(N).x(S_{p,q}) \leq v_{II}(S_{p,q}), \forall p, q \in I'\}$$

Demostración. Si G es un árbol, el número total de centros de los subárboles de expansión de diámetro mínimo es solo $O(|N|^2)$. En este caso, cada par de nodos, v_p, v_q aporta un centro candidato, denotado por $c_{p,q}$, el punto medio de la ruta simple única que conecta v_p con v_q . Si $d(v_0, c_{p,q}) \leq d(v_p, v_q)/2$, la coalición máxima respectiva se define entonces por

$$S_{p,q} = \{u \in N : d(u, c_{p,q}) \leq d(v_p, v_q)/2\}$$

Sea $I' = \{(p, q) : d(v_0, c_{p,q}) \leq d(v_p, v_q)/2\}$. Entonces el resultado general en la proposición anterior conduce a la descripción más sencilla de $C(N, v_{II})$ dada en el corolario. \square

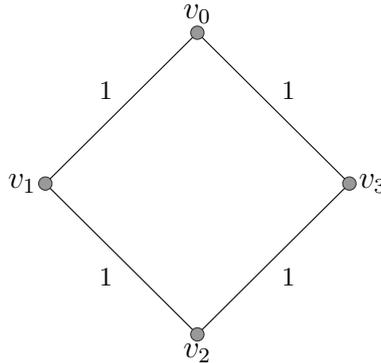
Observación 6.2. Dado un grafo conectado no dirigido $G = (V, E)$, con

$V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, observamos que el espacio métrico respectivo $X = A(G)$, inducido por G y sus longitudes de aristas positivos, es geodésico.

El Ejemplo 6.3 ilustra que cuando el conjunto de jugadores N es el subconjunto propio $V \setminus \{v_0\}$, el *core* del juego de locación radial puede ser vacío. Sin embargo, todavía no sabemos si el *core* del juego (N, v_{II}) definido sobre el espacio $X = A(G)$ es siempre no vacío en el caso donde $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido conectado general y $N = \{v_1, \dots, v_n\}$. Nos referimos a este caso como el juego de localización completo de radio mínimo (CMRLG) sobre redes.

Ahora nos centramos en algunas observaciones y casos especiales del juego de radio completo, CMRLG. Primero observamos que la función v_{II} no puede ser submodular si la gráfica G contiene un ciclo.

Ejemplo 6.4. Consideremos el 4-ciclo con longitud de arista 1, y $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$. Como en la figura:



Sea $S_1 = \{v_1, v_2\}$ y $S_2 = \{v_3, v_2\}$. Entonces, $v_{II}(S_1) = v_{II}(S_2) = 2$, $v_{II}(S_1 \cup S_2) = 3$, $v_{II}(S_1 \cap S_2) = 2$, y por lo tanto $v_{II}(S_1 \cup S_2) + v_{II}(S_1 \cap S_2) > v_{II}(S_1) + v_{II}(S_2)$.

Hemos observado en la introducción que hay una asignación del *core* para el juego de diámetro (N, v_I) que divide $v_I(N)$ entre un par de jugadores que corresponden al diámetro de V . Por el contrario, el núcleo del juego completo de localización de radio (N, v_{II}) no puede contener en general una asignación en la que sólo 2 jugadores paguen un coste positivo. Por ejemplo, en el Ejemplo 6.4, $d(v_0, v_2) = 2$, y $d(v_0, v_1) = d(v_0, v_3) = 1$. Sin embargo, la asignación del *core* única es el vector $(1, 1, 1)$.

También observemos que en nuestros intentos de demostrar que el núcleo del CMRLG es no vacío, hemos producidos ejemplos interesantes, indicando que en general no hay un número fijo c , tal que para cualquier n , hay una asignación del core, donde el número de jugadores que pagan un coste positivo está limitado por c .

Para resumir, todavía no sabemos si el core del MRLG es siempre no vacío para el caso donde $X = A(G)$ y $N = V \setminus \{v_0\}$.

A continuación, se considera una familia de grafos para las cuales los respectivos juegos de radio tienen núcleos no vacíos. Necesitamos la siguiente observación.

Observación 6.3. Dado un espacio métrico X y en conjunto de puntos N_0 , consideremos los juegos (N, v_I) y (N, v_{II}) . Para cada subconjunto $S \subseteq N$, $v_I(S) \leq v_{II}(S)$. Por lo tanto, si $v_I(N) = v_{II}(N)$, $C(N, v_I) \subseteq C(N, v_{II})$. Por ejemplo, para cada grafo $G = (V, E)$, si $X = A(G)$ y V satisface $D(V) = 2R(V)$, entonces $C(N, v_{II})$ es no vacío. Esto se cumple para la clase de los grafos medianos (que incluyen todos los grafos árboles), y la clase de grafos con gran diámetro.

6.1.1. Grafos medianos

Un grafo mediano $G = (V, E)$ se define por la siguiente propiedad, ver [12]. Para cada tripleta de nodos, $\{x, y, z\}$, hay un único nodo, $v = m(x, y, z)$, llamado el mediano de $\{x, y, z\}$, que es la intersección del conjunto de nodos de todos los caminos más cortos que conectan pares distintos de nodos con tripleta $\{x, y, z\}$.

Lema 6.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo mediano con longitudes de aristas positivas. Entonces, $v_I(N) = D(V) = 2R(V) = v_{II}(N)$ en el espacio métrico $X = A(G)$.

Demostración. Para probar que para un grafo mediano $G = (V, E)$, $D(V) = 2R(V)$, consideremos $P(x, y)$ el trayecto más largo en un árbol de expansión T^* de G . Por la desigualdad triangular $D(V) \leq d_{T^*}(x, y) = 2R(V)$. Por lo tanto es suficiente probar que $d_G(x, y)$, la distancia de x a y en $A(G)$ es igual a $2R(V)$.

Sea z el 1-centro definido como el punto medio de $P(x, y)$, ver [8]. Supongamos sin pérdida de generalidad que z es un nodo. (En otro caso, aumentamos el grupo de los nodos de G . El nuevo grafo sigue siendo mediano, y su diámetro es el mismo que el de G).

Ahora aplicando la propiedad mediano de la tripleta $\{x, y, z\}$. A partir de la definición de z como centro, los dos subcaminos de $P(x, y)$ en T^* , conectan z con x , y z con y son de hecho, respectivamente, los caminos más cortos en G , entre z y x , y entre z e y . Como z es el único nodo que está en ambos subcaminos, z debe ser la mediana de $\{x, y, z\}$. Por lo tanto, z debe estar en cada camino más corto en G , conectando x e y . Por lo tanto, $d_G(x, z) + d_G(y, z) = d_G(x, y)$. Pero el lado derecho de la última ecuación es, por definición igual a $2R(V)$. \square

6.1.2. MSTG y MRLG

En el caso de un espacio métrico de red es interesante compara el MRLG con el Juego de Árbol de Extensión de Longitud Mínima (MSTG), consultar [10], [6] y [7]. Como se ha indicado anteriormente, en el MRLG (N, v_{II}) la función característica se define por el diámetro mínimo que abarca el subárbol de expansión Steiner, mientras que en el MSTG, que denotamos por (N, v') , la función característica $v'(S)$ se define por la distancia mínima del subarbol spanning Steiner $S \cup \{v_0\}$. Por definición, tenemos $v_{II}(S) \leq v'(S)$ para cada colación S . Por lo tanto, si $v_{II}(N) = v'(N)$, el core del MRLG está contenido en el core del MSTG. Específicamente, este último se cumple si el árbol de expansión de diámetro mínimo de V es un camino.

En general, se sabe que cuando N es un subconjunto propio de $V \setminus \{v_0\}$, $C(N, v')$, el core del MSTG puede ser vacío, ver [21]. Además, probar la pertenencia a $C(N, v')$ es NP-duro, ver [5].

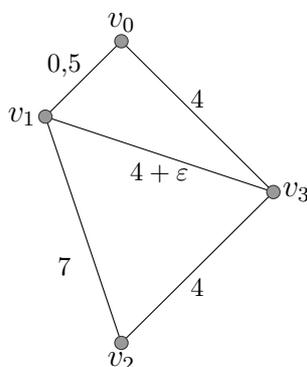
Consideremos el caso completo, es decir, $N = V \setminus \{v_0\}$. Entonces dada una longitud mínima de árbol de expansión T^* de $N \cup v_0$, hay una asignación natural en $C(N, v')$ que no depende de las aristas de fuera de T^* . En esta asignación del core, el coste asignado al nodo v_i es la longitud de la única arista incidente de v_i que está en el (único) camino de T^* , conectando v_i a v_0 .

Este no es el caso del MRLG. Todas las asignaciones de núcleo pueden depender de aristas de fuera de T^* , como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5. Consideremos el grafo $G = (V, E)$ donde:

$$\begin{aligned} V &= \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \\ E &= \{(v_0, v_1), (v_0, v_3), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}. \end{aligned}$$

Las longitudes de aristas son: $l(v_0, v_1) = 0,5$, $l(v_0, v_3) = l(v_2, v_3) = 4$, $l(v_1, v_2) = 7$, $l(v_1, v_3) = 4 + \varepsilon$. Como en la figura:



El único árbol spanning de diámetro mínimo de G , T^* , se define por la estrella centrada en v_3 . El diámetro de G se alcanza por los nodos v_0 y v_2 . Cualquier asignación del core no puede cargar a v_1 más de $0,5$. Por lo tanto, si una asignación del core ignora las aristas de fuera de T^* , y asigna cargas que son distancias en T^* , v_1 tendrá que cargarse 0 . Pero entonces v_2 y v_3 juntos no pueden cargarse más e 8 , que es menor que $D(T^*) = 8 + \varepsilon$.

Una asignación extrema en el core se define por el vector $(x_1, x_2, x_3) = (\varepsilon, 4, 4)$. Los otros tres puntos extremos son: $(\varepsilon, 7, 5 - \varepsilon, 0, 5 + \varepsilon)$, $(0, 5, 7, 0, 5 + \varepsilon)$, $(0, 5, 3, 5 + \varepsilon, 4)$.

6.2. Espacios métricos discretos

Anteriormente hemos indicado que cuando el espacio métrico subyacente X consiste en un número finito de puntos, el MRLG respectivo puede no ser subaditivo y los jugadores pueden no tener incentivos para cooperar, por ejemplo, el core $C(N, v_{II})$ puede ser vacío. Sin embargo, en el caso finito discreto $C(N, v_{II})$ tiene una representación compacta, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 6.3. *Supongamos que $X = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ es un espacio métrico finito, y sea $N \subseteq X \setminus \{v_0\}$. Para cada $i = 0, \dots, n$, y $v_p \in N \cup \{v_0\}$, definimos $r_p^i = d(v_i, v_p)$. Si $d(v_0, v_i) \leq r_p^i$, definimos*

$$S_p^i = \{u \in N : d(u, v_i) \leq r_p^i\}.$$

Sea $I = \{(i, p) : d(v_0, v_i) \leq r_p^i\}$. Entonces,

$$C(N, v_{II}) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^N : x(N) = v_{II}(N), x(S_p^i) \leq v_{II}(S) \right\}.$$

Demostración. Consideremos una coalición $S \subseteq N$. Entonces, hay algún $v_i \in X$, y $v_p \in N \cup \{v_0\}$, tal que $v_{II}(S) = 2d(v_i, v_p) = 2r_p^i$. Por definición $S \subseteq S_p^i$. Usando la monotonía del juego, concluimos que la restricción del core $x(S) \leq v_{II}(S)$ es dominada por la restricción $x(S_p^i) \leq v_{II}(S_p^i)$. Esto completa la prueba. \square

6.3. l_p espacio métrico sobre \mathbb{R}^d

En esta sección nos centraremos en el caso en que el MRLG (N, v_{II}) se define sobre el espacio métrico sobre \mathbb{R}^d con norma l_p . De nuevo, denotemos $N_0 = V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^d , y el conjuntos $N = V \setminus \{v_0\}$.

Los siguientes ejemplos muestran que en general el MRLG no es submodular, y que con la excepción del caso $p = \infty$, $v_I(N) = D(V) \neq 2R(V) = v_{II}(N)$. Por lo tanto, la existencia de asignaciones en el core no es clara en el caso donde $p \neq \infty$.

Ejemplo 6.6. Consideremos el plano l_p con $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, donde, $v_0 = (0, 0)$, $v_1 = (0, 1)$, $v_2 = (1, 0)$ y $v_3 = (-1, 0)$.

Tenemos: $v_{II}(\{v_1, v_2, v_3\}) = 2$, $v_{II}(\{v_1\}) = 1$ y $v_{II}(\{v_1, v_2\}) = v_{II}(\{v_1, v_3\}) = 2^{1/p}$. Por lo tanto, v_{II} no es submodular para cada p tal que $2^{1/p} < 3/2$, que se aplica en particular a $2 \leq p \leq \infty$.

Ejemplo 6.7. Consideremos el plano l_1 con $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, donde $v_0 = (0, 0)$, $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (1, 1)$ y $v_3 = (-1, -1)$.

Tenemos: $v_{II}(\{v_1, v_2, v_3\}) = 4$, $v_{II}(\{v_1\}) = 2$, y $v_{II}(\{v_1, v_2\}) = v_{II}(\{v_1, v_3\}) = 2$. Por lo tanto, v_{II} no es submodular en este caso.

Los siguientes dos ejemplos muestran que para cada $1 < p < \infty$ en el caso plano, y para la norma l_1 , incluso en \mathbb{R}^3 , $v_{II}(N) = 2R(N \cup \{v_0\})$ puede ser estrictamente mayor que $v_I(N) = D(N \cup \{v_0\})$. (En \mathbb{R}^2 la norma l_1 es equivalente a la norma l_∞ .)

Ejemplo 6.8. Consideremos el conjunto de puntos $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ donde $v_1 = (a, b)$, $v_2 = (-a, b)$, $v_3 = (0, -1)$ y $v_0 = (0, 0)$. Para $1 < p < \infty$, sea

$a = b = 2^{-1/p}$. Entonces, el diámetro l_p de V es $(a^p + (b+1)^p)^{1/p}$ mientras que el radio l_1 es 1 y el 1-centro es $(0, 0)$. Por lo tanto, $v_I(N) = D(V) < b + 1 < 2 = 2R(V) = v_{II}(N)$.

Ejemplo 6.9. Consideremos el conjunto de puntos $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ donde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, -1, 1)$, $v_3 = (-1, 1, -1)$ y $v_0 = (1, -1, -1)$. El diámetro l_1 de V es 4 mientras que el radio l_1 es 3 y el 1-centro es $(0, 0, 0)$. Por lo tanto, $v_I(N) = D(V) < 2R(V) = v_{II}(N)$.

Veamos primero que para cada $p \geq 1$, el core del juego (N, v_{II}) , definido en el espacio métrico l_p sobre \mathbb{R}^d , puede representarse como un conjunto descrito por un número polinomial de desigualdades lineales, para cada d fijo.

Consideremos primero el caso donde $1 < p < \infty$.

Teorema 6.1. *Sea $1 < p < \infty$, y consideremos el juego (N, v_{II}) , definido en el espacio métrico l_p sobre \mathbb{R}^d . Sea $\{S_j\}, j \in J$, la colección de todos los subconjuntos $S \subseteq N$ con $|S| \leq d + 1$. Para cada $j \in J$, sea $B(S_j)$, la menor bola que contenga $S_j \cup \{v_0\}$, y sea S'_j el subconjunto de todos los puntos en N , contenidos en $B(S_j)$. Entonces el core del juego esta dado por,*

$$C(N, v_{II}) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : x(S'_j) \leq v_{II}(S_j), \forall j \in J, \text{ y } x(N) = v_{II}(N) \right\}.$$

Demostración. Para cada subconjunto $S \subseteq N$, $v_{II}(S)$ es el diámetro de $B(S)$, la menor bola que contiene $S \cup \{v_0\}$. (Dado que $1 < p < \infty$, $B(S)$ es única, ver [24].)

Por la propiedad Helly hay un subconjunto $S_j \subseteq S, j \in J$, tal que $v_{II}(S) = v_{II}(S_j)$. Entonces, por definición $S \subseteq S'_j$. Además, por la monotonía del juego cada vector en el core es no negativo, y por lo tanto $x(S) \leq x(S'_j)$. Por lo tanto, la restricción $x(S) \leq v_{II}(S)$ es dominada por la restricción $x(S'_j) \leq v_{II}(S_j)$. Esto completa la prueba. \square

Consideremos ahora el caso donde $p = \infty$. Como antes, sea $\{S_j\}, j \in J$, la colección de todos los subconjuntos $S \subseteq N$ con $|S| \leq d + 1$.

Teorema 6.2. *Consideremos el juego (N, v_{II}) , definido en el espacio métrico l_∞ sobre \mathbb{R}^d . Entonces hay una colección de subconjuntos de N , $\{S_j^\infty(k)\}, j \in J, k = 1, \dots, c_j^\infty(n, d)$, tal que $c_j^\infty(n, d) = O(2^d n^{(d-1)})$, y el core del juego está*

dado por,

$$C(N, v_{II}) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : x(S_j^\infty(k)) \leq v_{II}(S_j), \forall j \in J, k = 1, \dots, c_j^\infty(n, d) \text{ y } x(N) = v_{II}(N) \right\}.$$

Demostración. Para cada subconjunto S el problema de encontrar la menor bola en l_∞ que encierra S se reduce a encontrar el menor hipercubo que contiene a S . Tal hipercubo no es único. El conjunto de centros de todos los hipercubos óptimos es un hipercubo de dimensión menor o igual que $d - 1$. Para $j \in J$ consideremos el hipercubo óptimo $H(S_j)$ encerrando $S_j \cup \{v_0\}$ y sea $P(H(S_j))$ el subconjunto maximal de N , contenido en $H(S_j)$. Podemos desplazar $H(S_j)$ a lo largo de los ejes y obtener un hipercubo $H'(S_j)$ tal que $P(H'(S_j)) = P(H(S_j))$, y para cada coordenada $i = 1, \dots, d$, una de las dos caras de $H'(S_j)$ corresponden a la coordenada i -ésima conteniendo un punto en N . Por lo tanto, hay solo $c_j^\infty(n, d) = O(2^d n^{d-1})$ subconjuntos maximales de N , asociados con un subconjunto dado $S_j, j \in J$. Denotemos esta colección de subconjuntos por $\{S_j^\infty(k)\}, k = 1, \dots, c_j^\infty(n, d)$.

Usando la monotonía del juego y siguiendo el argumento de la prueba anterior, observemos que para cada subconjunto $S \subseteq N$, hay un subconjunto $S_j, j \in J$, y $k = 1, \dots, c_j^\infty(n, d)$, tal que la restricción $x(S) \leq v_{II}(S)$, es dominada por la restricción $x(S_j^\infty(k)) \leq v_{II}(S_j)$. Esto completa la prueba. \square

Un análisis similar se aplica al caso $p = 1$.

Teorema 6.3. *Consideremos el juego (N, v_{II}) , definido en espacio métrico l_1 sobre \mathbb{R}^d . Entonces hay una colección de subconjuntos de N , $\{S_j^1(k)\}, j \in J, k = 1, \dots, c_j^1(n, d) = O(2^{d^2} n^d - 1)$, y el core del juego esta dado por,*

$$C(N, v_{II}) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : x(S_j^1(k)) \leq v_{II}(S_j), \forall j \in J, k = 1, \dots, c_j^1(n, d) \text{ y } x(N) = v_{II}(N) \right\}.$$

Demostración. Esta prueba es similar a la anterior y por tanto se hace un pequeño resumen. En este caso una bola l_1 cerrada es un poliedro con 2^d caras. De nuevo, al desplazar una bola cerrada de un subconjunto $S_j, j \in J$, a lo largo de cada cara, cada subconjunto dado $S_j, j \in J$, esta asociado con $c_j^1(n, d)$ subconjuntos maximales de N , donde $c_j^1(n, d) = O(2^{d^2} n^d - 1)$. Denotamos esta colección de subconjuntos por $\{S_j^1(k)\}, k = 1, \dots, c_j^1(n, d)$.

Como antes, observamos que para cada subconjunto $S \subseteq N$, hay un subconjunto $S_j, j \in J$ y $k = 1, \dots, c_j^1(n, d)$, tal que la restricción $x(S) \leq v_{II}(S)$, es dominada por la restricción $x(S_j^1(k)) \leq v_{II}(S_j)$. Esto completa la prueba. \square

Con la excepción del caso $p = \infty$, todavía no se conoce si $C(N, v_{II})$ es no vacío para todo espacio métrico l_p sobre \mathbb{R}^d . Asumimos sin pérdida de generalidad que $v_i \neq v_0, \forall i = 1, \dots, n$.

Teorema 6.4. *El core del juego (N, v_{II}) , definido en el espacio métrico l_∞ sobre \mathbb{R}^d , es no vacío. Específicamente, $C(N, v_I) = C(N, v_{II})$.*

Además, si $D(N_0) = d(v_0, v_j)$, para algún $v_j \in N$, la dimensión de $C(N, v_{II})$ es $n - 1$, y hay un $x^ \in C(N, v_{II})$ tal que $x_t^* > 0$, para cualquier $v_t \in N$. También, si $D(N_0) = d(v_i, v_j)$, para algún $v_i, v_j \in N$ y $d(v_i, v_j) < d(v_i, v_0) + d(v_j, v_0)$, entonces la dimensión de $C(N, v_{II})$ es $n - 1$, y hay un $x^* \in C(N, v_{II})$ tal que $x_t^* > 0$, para cualquier $v_t \in N$.*

Demostración. Cuando $p = \infty$, es fácil ver que para cualquier conjunto S tenemos $v_I(S) = D(S \cup \{v_0\}) = 2R(S \cup \{v_0\}) = v_{II}(S)$. Por lo tanto, $C(N, v_I) = C(N, v_{II})$, y la propiedad de core no vacío se sigue de la Observación 6.3.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $D(N_0) = d(v_0, v_1)$. Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un vector real arbitrario que verifica $0 \leq \alpha_0 \leq \min_{t=1, \dots, n} d(v_0, v_t)$, $\alpha_1 = \sum_{j=2}^n \alpha_j$ y $\alpha_j \geq 0, j = 2, \dots, n$. Consideremos ahora una coalición $S \subseteq N$. Si $v_1 \in S$, entonces $x^\alpha(S) \leq \alpha_1 \leq \min_{t=1, \dots, n} d(v_0, v_t) \leq v_{II}(S)$.

Para ver que la dimensión afín de $C(N, v_{II})$ en este caso es $n - 1$, vamos a probar que el core contiene n vectores independientes. Uno de ellos es el vector $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$, definido por $x_1^1 = d(v_0, v_1)$ y $x_j^1 = 0$, para $j = 2, 3, \dots, n$. Los otros $n - 1$ vectores se definen como sigue:

Sea ε un real positivo suficientemente pequeño, y consideremos las $n - 1$ asignaciones independientes del core $\{x^{\alpha(q)}\}, q = 2, \dots, n$, donde $\alpha(q)$ es el vector definido por $\alpha_1(q) = \varepsilon, \alpha_q(q) = \varepsilon$ y $\alpha_t(q) = 0$, para cualquier $t = 2, \dots, n; t \neq q$. La asignación $x^* = \sum_{q=2}^n x^{\alpha(q)} / (n - 1)$ esta en el core y tiene componentes estrictamente positivas.

Ahora, supongamos sin pérdida de generalidad que $D(N_0) = d(v_1, v_2)$ y $d(v_1, v_2) < d(v_0, v_1) + d(v_0, v_2)$. Sean δ_1, δ_2 reales positivos que verifican $0 < \delta_1 < d(v_0, v_1), 0 < \delta_2 < d(v_0, v_2)$, y $\delta_1 + \delta_2 = d(v_1, v_0) + d(v_2, v_0) - d(v_1, v_2)$.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un vector real arbitrario verificando $\alpha_1 \leq d(v_1, v_0) - \delta_1, \alpha_2 \leq d(v_2, v_0) - \delta_2, 0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq \min_{t=1, \dots, n} d(v_0, v_t), 0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq \min \delta_1, \delta_2, \alpha_1 + \alpha_2 = \sum_{j=3}^n \alpha_j$ y $\alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, n$.

Demostraremos que la asignación:

$$x^\alpha = (d(v_0, v_1) - \delta_1 - \alpha_1, d(v_0, v_2) - \delta_2 - \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

esta en $C(N, v_{II})$. Primero, por definición $x^\alpha(N) = d(v_1, v_2) = D(N_0) = v_{II}(N)$. Ahora consideremos la coalición $S \subseteq N$. Si $v_1, v_2 \in S$, entonces $x^\alpha(S) \leq d(v_1, v_2) = v_{II}(S)$. Si $v_1 \in S, v_2 \notin S$, entonces $x^\alpha(S) \leq d(v_1, v_0) - \delta_1, \alpha_1 + \sum_{q=3}^n \alpha_q \leq d(v_1, v_0) - \alpha_2 - \alpha_1 + \sum_{q=3}^n \alpha_q \leq d(v_1, v_0) \leq v_{II}(S)$. Similarmente, si $v_1 \notin S, v_2 \in S$, obtenemos $x^\alpha(S) \leq d(v_2, v_0) \leq v_{II}(S)$. Finalmente, supongamos que $v_1, v_2 \notin S$. Entonces $x^\alpha(S) \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq \min_{t=1, \dots, n} d(v_0, v_t) \leq v_{II}(S)$.

Para ver que la dimensión afín de $C(N, v_{II})$ en este caso es $n - 1$, demostraremos que el core contiene n vectores independientes. Dos de ellos son los vectores $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ y $x^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)$, definidos por $x_1^1 = d(v_1, v_0), x_2^1 = d(v_1, v_2) - d(v_1, v_0), x_j^1 = 0$ para $j = 3, 4, \dots, n, x_1^2 = d(v_1, v_2) - d(v_2, v_0), x_2^2 = d(v_2, v_0)$ y $x_j^2 = 0$ para $j = 3, 4, \dots, n$. Los otros $n - 2$ vectores se definen como sigue:

Sea ε un real positivo suficientemente pequeño, y consideremos la colección de $n - 2$ asignaciones independientes del core $\{x^{\alpha(q)}\}, q = 3, \dots, n$, donde $\alpha(q)$ es un vector definido por $\alpha_1(q) = \varepsilon, \alpha_q(q) = \varepsilon$, y $\alpha_t(q) = 0$, para cualquier $t = 2, \dots, n; t \neq q$. La asignación $x^* = (x^1 + x^2 + \sum_{q=3}^n x^{\alpha(q)})/n$ esta en el core y sus componentes son estrictamente positivas. Esto completa la prueba. \square

Aumentando el resultado del teorema anterior, el siguiente ejemplo ilustra que cuando no se satisfacen las condiciones del teorema, la dimensión del core puede incluso ser cero. Específicamente, para cualquier número de jugadores, incluso en el caso plano l_∞ , el core puede ser un único punto donde solo dos jugadores compartan el coste total, a pesar de que la distancia de cada jugador al servidor v_0 sea positiva.

Ejemplo 6.10. Consideremos el conjunto de puntos $N_0 = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ donde $v_0 = (0, 0), v_1 = (0, 1), v_2 = (0, -1), v_3 = (1, 0)$ y $v_i = (a_i, 0), 0 < a_i < 1$, para $i = 4, 5, \dots, k$. Dado que $v_I(S) = 2$, si $v_1, v_2 \subseteq N$, y $v_I(S) \leq 1$, en otro

caso, es fácil probar que $C(N, v_I) = C(N, v_{II}) = \{(1, 1, 0, \dots, 0)\}$.

Corolario 6.2. *El core del juego (N, v_{II}) definido en el espacio métrico l_1 es no vacío. Específicamente, $C(N, v_I) = C(N, v_{II})$.*

Demostración. Dado que la norma rectilínea l_1 , es equivalente a la norma l_∞ sobre el plano, para cualquier subconjunto $S, D(S \cup \{v_0\}) = 2R(S \cup \{v_0\})$ para el caso del plano. Por lo tanto, el core del respectivo juego de radio mínimo en el plano es no vacío. \square

6.3.1. Espacios euclídeos

Volviendo al caso euclídeo, en general, la igualdad $v_I(N) = v_{II}(N)$ no se verifica incluso en el caso plano. De la Proposición 6.1 se deduce que la función característica $v_{II}(S)$ es subaditiva también para el modelo euclídeo. Sin embargo, no se sigue del análisis general en secciones anteriores que el núcleo del juego plano euclídeo sea no vacío.

A pesar de ello, vamos a probar que $C(N, v_{II})$ es no vacío para el caso del plano euclídeo. Más específicamente, hay una asignación básica donde al menos 3 jugadores (puntos) pagan cantidades positivas. Estos son puntos que definen $C(V)$, el círculo mínimo en el plano que encierra el conjunto V .

Teorema 6.5. *El core $C(N, v_{II})$ del juego de localización de radio mínimo (N, v_{II}) en el caso del plano euclídeo es no vacío.*

Demostración. Ver apéndice de [17].

Observación 6.4. En el juego de localización de radio mínimo (N, v_{II}) , para cada coalición S, v_{II} se define como el doble del valor de la solución para el problema de un centro para el conjunto de nodos $S \cup \{v_0\}$. Del mismo modo, podemos considerar los juegos de localización definidos por otros criterios de optimización comunes que se usan con frecuencia en los modelos de localización de instalaciones. Por ejemplo, consideremos el juego de localización de mediana mínima, (N, v_{III}) , donde para cada coalición S, v_{III} se define como el valor de la solución al problema 1-mediana para conjunto de los nodos $S \cup \{v_0\}$.

Observamos que desde del punto de vista cooperativo la definición anterior ni siquiera induce la propiedad deseable de la subaditividad. Por lo tanto, los

jugadores pueden no tener incentivos para cooperar, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.11. Consideremos una ruta de 4 nodos con el siguiente conjunto de aristas: $E = \{(v_1, v_0), (v_0, v_2), (v_2, v_3)\}$. Aristas de longitud 1. Es fácil ver que $v_{III}(N) = 4$, $v_{III}(\{v_1\}) = 1$ y $v_{III}(\{v_2, v_3\}) = 2$. Por lo tanto, $v_{III}(\{v_1\}) + v_{III}(\{v_2, v_3\}) = 3 < 4 = v_{III}(N)$. El core es vacío en este ejemplo, ya que el conjunto de restricciones, $x_1 \leq 1$, $x_2 + x_3 \leq 2$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ es inconsistente.

Capítulo 7

Conclusiones

Para realizar este Trabajo Fin de Grado he necesitado los conocimientos adquiridos, principalmente, en dos asignaturas del Grado en Matemáticas: Programación Matemática y Métodos de Investigación Operativa. Donde conocí como resolver un programa lineal de optimización y la utilidad del respectivo programa dual.

Como conclusión general del Trabajo Fin de Grado, podemos decir que una forma efectiva de resolver problemas de asignación de costes es usar la teoría de juegos cooperativos. El Teorema de Bondareva-Shapley nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que un juego cooperativo tenga core no vacío. Podemos entender el core como solución de un juego cooperativo, aunque en algunos casos el core es vacío, si verifica las condiciones del Teorema de Bondareva-Shapley, en otros casos puede haber más de un punto en el core, lo que nos proporcionará más de una solución.

Ahora veamos las conclusiones específicas de cada capítulo.

Respecto al Juego de Asignación podemos concluir que tiene core no vacío, luego siempre podremos obtener al menos una solución, aunque en muchas ocasiones el core no proporcionará una solución única.

De los Juegos de Producción Lineal, como en los de Asignación, hemos probado que su core es no vacío. Además hemos encontrado un punto del core, a través del respectivo programa dual. Aquí hemos añadido una aplicación de una situación de producción lineal usando CPLEX, la cual hemos resuelto mediante

NEOS-SERVER, donde hemos comprobado como lo que hemos desarrollado de forma teórica se verifica en un ejemplo.

Además, al trabajar con CPLEX y NEOS-SERVER he aprendido a resolver programas lineales de optimización de forma computacional.

Después hemos introducido lo que es una situación de localización y los juegos de localización para estas. Podemos afirmar que existen condiciones necesarias y suficientes para que el core de estos juegos sea no vacío, y así tener soluciones para dichas situaciones. Hemos descrito tres tipos de juegos de localización, donde en cada caso hemos visto ejemplos y hemos probado que el core de cada juego es no vacío. Las situaciones de localización son un caso muy práctico sobre el que hay una gran variedad de casos estudiados.

En el caso de Juegos de Radio y Diámetro hemos trabajado en diferentes espacios métricos, hemos visto ejemplos de distintas situaciones con core vacío o no vacío, y distintas propiedades para los juegos de radio. Hemos definido el core para el caso de estos juegos dependiendo del espacio donde trabajásemos y las diferencias entre los distintos juegos (MSTG vs MRLG). También hemos trabajado sobre \mathbb{R}^d donde hemos extendido, la definición del core y que este es no vacío en el caso euclídeo, en el caso del juego de localización de radio mínimo. Por lo tanto, los juegos cooperativos, en muchos casos, proporcionan una solución para estas situaciones mediante el core.

Finalmente, podemos concluir que el core es una buena herramienta para solucionar problemas de asignación de costes, aunque no siempre exista, o posea más de una imputación.

Como conclusión personal de este Trabajo Fin de Grado, se han descrito situaciones reales, de la vida cotidiana, donde las matemáticas, de la mano de la Teoría de Juegos, pueden resolver conflictos interpersonales. Definitivamente las matemáticas viven entre nosotros y, como hemos desarrollado, nos ayudan a solucionar una gran variedad de situaciones cotidianas de forma efectiva.

En concreto en este trabajo hemos mostrado situaciones tan cotidianas como: asignar alumnos a un colegio; organizar distintos ayuntamientos para construir un aeropuerto, con sus respectivas infraestructuras; o, que beneficio podrán

obtener varias empresas al poner en común sus productos para generar determinados bienes, que se pueden vender en el mercado a un precio fijo, pueden ser analizados cuantitativamente con técnicas matemáticas.

Los científicos, en nuestro caso matemáticos, tenemos el deber de transmitir todo lo anterior y mostrar al mundo de una forma amena y atractiva la importancia de la ciencia y su gran variedad de aplicaciones.

Apéndice A

Aplicación del Juego de Producción Lineal

Hoy en día disponemos de bastantes software para resolver programas lineales de optimización como el XPress, Gurobi o CPLEX. Nosotros hemos elegido CPLEX, para implementarlo hemos usado la página web www.neos-server.org, donde podemos trabajar con NEOS-SERVER, aquí encontramos un servicio gratuito ofrecido por la Universidad de Wisconsin. En NEOS-SERVER encontraremos más de 60 métodos para resolver distintos programas de optimización entre ellos los nombrados anteriormente.

Para resolver un programa, como los que nosotros tenemos que resolver, hay que enviar a NEOS-SERVER tres archivos.

El primero de ellos tiene que ser un archivo con extensión ".mod", aquí debemos reflejar nuestro modelo, este es el código de nuestro modelo para el programa primal:

```
1 param n;  
2 param m;  
3 set J := {1..n}; #conjunto de variables de decisión  
4 set I := {1..m}; #conjunto de restricciones  
5  
6 param C {J} >= 0; #coeficientes de la función objetivo  
7 param A {I,J} >= 0; #matriz de los coeficientes de las  
   restricciones  
8 param B {I} >= 0; #vector del lado derecho de las restricciones
```

```

9
10 var X {J} >=0; #variables decisoras
11
12 maximize z: sum {j in J} C[j] * X[j];
13
14 s.t. Constraint {i in I}:
15     sum {j in J} A[i,j] * X[j] <= B[i];

```

También debemos añadir un archivo con extensión ".dat" con los datos de nuestro programa de optimización, en nuestro caso el código de los datos del programa primal es:

```

1 param n := 3;
2 param m := 7;
3
4 param C :=
5     1      1
6     2      2
7     3      3;
8 param A : 1 2 3:=
9     1 3 5 0
10    2 0 1 0
11    3 4 0 0
12    4 1 2 9
13    5 8 0 3
14    6 0 2 1
15    7 0 2 0;
16 param B :=
17    1 300
18    2 80
19    3 120
20    4 390
21    5 200
22    6 100
23    7 130;

```

Observemos que para cada coalición n, m, C y A no varían, pero el vector B , el lado derecho de las restricciones depende de la coalición S que estemos estudiando, en este caso es la total, $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$. Cada componente, b_i , del vector B es la suma de las cantidades de producto i que poseen los miembros de la coalición S .

El último archivo necesario es uno con extensión ".run" que le indica a NEOS-SERVER como debe resolver el problema. En el caso del primal es el siguiente:

```

1 #Mostramos la formulación del problema
2 expand z, Constraint;
3
4 #Solución
5 solve;
6
7 #Mostrar los resultados
8 display X, z;

```

Así, enviando los tres archivos al NEOS-SERVER, obtenemos una solución de nuestro programa lineal en nuestro correo electrónico. NEOS-SERVER nos envía, en el caso de la coalición $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, lo siguiente:

```

1 File exists
2 You are using the solver cplexamp.
3
4 %% YOUR COMMENTS %%%%%%%%%%%
5 DUAL
6 COALICIÓN E1,E2,E3,E4
7 %%%%%%%%%%%
8
9 Checking ampl.mod for cplex_options...
10 Checking ampl.com for cplex_options...
11 Executing AMPL.
12 processing data.
13 processing commands.
14 Executing on prod-exec-1.neos-server.org
15
16 minimize z:
17     300*X[1] + 80*X[2] + 120*X[3] + 390*X[4] + 200*X[5] + 100*X[6]
18     + 130*X[7];
19 subject to Constraint [1]:
20     3*X[1] + 4*X[3] + X[4] + 8*X[5] >= 1;
21 subject to Constraint [2]:
22     5*X[1] + X[2] + 2*X[4] + 2*X[6] + 2*X[7] >= 2;
23 subject to Constraint [3]:
24     9*X[4] + 3*X[5] + X[6] >= 3;

```

```
25 7 variables , all linear
26 3 constraints , all linear; 12 nonzeros
27     3 inequality constraints
28 1 linear objective; 7 nonzeros.
29
30 CPLEX 12.7.0.0: timelimit=300
31 threads=4
32 CPLEX 12.7.0.0: optimal solution; objective 181.4754098
33 3 dual simplex iterations (0 in phase I)
34 X [*] :=
35 1  0
36 2  0
37 3  0
38 4  0.213115
39 5  0.0983607
40 6  0.786885
41 7  0;
42
43 z = 181.475
```

Observemos que en nuestro Juego de Producción Lineal hemos tenido que realizar el proceso quince veces, una para cada coalición.

El dual se resuelve de forma análoga.

Bibliografía

- [1] BONDAREVA O.N.; *Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games.* (1963)
- [2] BRIMBERG J., SALHI S., *A continuous location-allocation problem with zone-dependent fixe cost.* Ann. Oper. Res. 136 (2005) 99-115.
- [3] CERDÁ E., JIMENO J. L., PERÉZ J., *Teoría de Juegos.* Pearson Prentice Hall (2004).
- [4] DREZNER Z, *Facility Location - A Survey of Applications and Methods.* Springer Series in Operations Research (1995).
- [5] FAIGLE U., KERN W., FAKETE S.P., HOCHSTÄTTLER W., *On the complexity of testing membership in the core of min-cost spanning tree games.* International Journal of Game Theory 26, 361-366 (1997).
- [6] GRANOT D., HUBERMAN G., *Minimum cost spanning tree games* Mathematical Programming 21, 1-18 (1981).
- [7] GRANOT D., HUBERMAN G., *On the core and nucleolus of minimum cost spanning tree games.* Mathematical Programming 29, 323-347 (1984).
- [8] HASSIN R., TAMIR A., *On the minimum diameter spanning tree problem.* Information Processing Letters 53, 109-111 (1995).
- [9] MALLOZI L., *Cooperative games in facility location situations with regional fixed costs.* Optim Lett (2011) 5: 173-181.
- [10] MEGIDDO N., *Computational complexity of the game theory approach to cost allocation for a tree.* Mathematics of Operational Research 3, 189-196 (1978).

-
- [11] MOULIN H., *Game Theory for the Social Sciences*. Rev. edn New York Press (1986).
- [12] MULDER H., *The Interval Function of a Graph, vol 132*. Math. Center Tracts (1980).
- [13] OWEN G; *Game Theory*. Academic Press (1995).
- [14] OWEN G., *On the core of linear production games*. Mathematical Programming 9 (1975) 358-370.
- [15] PAPADOPOULOS A., *Metric spaces, convexity and nonpositive curvature*. European Mathematical Society (2005).
- [16] PLASTRIA F, *Continuous location problems*. In: Drezner Z (ed) Facility location - A survey of applications and methods. Journal of Algorithms 3: 358-368 (1995).
- [17] PUERTO J, ARIE T, PEREA F, *A cooperative location game based on the 1-center location problem*. European Journal of Operational Research 214 (2011) 317-330.
- [18] PUERTO J, GARCÍA-JURADO I, R. FERNÁNDEZ F.; *On the core of a class of location games*. Math Meth Oper Res (2001) 54: 373-385.
- [19] SHAPLEY L.S.; *A value for n person games* Contribution to the Theory of Games II, 307- 317 (1953).
- [20] SHAPLEY L.S., SHUBIK M., *The assignment game I: the core*. International Journal of Game Theory I 111-130 (1972).
- [21] TAMIR A., *On the core of network synthesis games*. Mathematical Programming 50, 123-135 (1991).
- [22] TARDOS E., *A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs*. Operational Research 34, 250-256 (1986).
- [23] VON NEUMANN J., MORGENSTERN O.; *Theory of Games and Economic Behavior* Princeton University Press (1944).

- [24] ZURCHER S., *Smallest Enclosing Ball for a Point Set with Strictly Convex Level Sets*. Masters Thesis, Institute of Theoretical Computer Science, ETH Zurich (2007).