

Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado

Curso 2016-2017



*Ecuaciones diferenciales  
con retardo:  
Aplicación a un  
modelo de quimiostato*

Realizado por *Ángeles Ruiz González*

Dirigido por *Tomás Caraballo Garrido y José Antonio Langa Rosado*







*Con amor a mis padres y a  
mis hermanos, en especial a  
mi hermano el mayor,  
Miguel Ángel,  
por la paciencia derrochada a  
lo largo de todos estos años.*

*Agradecer, sin lugar a dudas,  
a mis magníficos tutores  
Tomás Caraballo Garrido y  
José Antonio Langa Rosado  
por ayudarme a crecer en todo  
y por creer en mí.*



## **Abstract**

*In this work we will study the theory of dynamical systems with application to a chemostat. Starting with the autonomous models without delay where we will stop to analyze what happens in this model if we contemplate the possibility of having a microorganism or two. In each of these cases, we will see how the model behaves by taking also into account the wall growth. In the analysis of each model we will study the existence solutions, the stability and we will conclude with the existence of a global attractor. We continue with the non autonomous models without delay, where we will investigate the characteristics of this model with the same procedure. Summing up, these two blocks are needed to complete models with delay, where we will also see the characteristics of this model with growth of microorganisms with or without wall. This time, we will analyze the sign, the dimension of the solutions of the model and their stability. Nevertheless, we will not analyze the existence of the global attractor due to the complexity of the required techniques.*





## Resumen

*En este trabajo vamos a profundizar sobre los sistemas dinámicos con aplicación a un quimiotato. Comenzando por los modelos autónomos sin retardo, donde nos pararemos a analizar qué sucede en dicho modelo si contemplamos la posibilidad de tener un microorganismo o dos. En cada uno de estos casos veremos cómo se comporta el modelo cuando hay o no crecimiento en pared. En el análisis de cada modelo veremos las soluciones, la estabilidad de las mismas, concluyendo con la existencia de atractor global. Continuamos con los modelos no autónomos sin retardo, donde indagaremos en las características de este modelo con el mismo proceder. Estos dos bloques son necesarios para concluir con los modelos con retardo, en los cuales también veremos las características de este modelo con crecimiento de los microorganismos en pared o sin ella. En este caso, analizamos el signo, la acotación de las soluciones del modelo y su estabilidad. A diferencia de los modelos anteriores, no llegamos a saber de la existencia del atractor global debido a la complejidad de las técnicas requeridas.*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Modelo autónomo sin retardo</b>	<b>15</b>
2.1. Interés del modelo en los quimiostatos . . . . .	15
2.2. Modelo con uno y dos microorganismos . . . . .	16
2.2.1. Principios basados en la biología . . . . .	16
2.2.2. Modelo matemático de un microorganismo . . . . .	19
2.2.3. Propiedades de las soluciones del modelo con un microorganismo . . . . .	20
2.2.4. Puntos estacionarios o de equilibrios del modelo con un microorganismo . . . . .	23
2.2.5. Análisis de estabilidad del modelo con un microorganismo . . . . .	24
2.2.6. Existencia de atractor global del modelo con un microorganismo . . . . .	29
2.2.7. Modelo con dos microorganismos . . . . .	31
2.3. Modelo con crecimiento en pared . . . . .	45
2.3.1. Puntos estacionarios o de equilibrio . . . . .	46
2.3.2. Estabilidad del modelo . . . . .	50
2.3.3. Existencia de atractor global . . . . .	55
<b>3. Modelo no autónomo sin retardo</b>	<b>57</b>
3.1. Ratio de consumo de nutriente variable . . . . .	57
3.1.1. Modelo de crecimiento sin pared . . . . .	57
3.1.2. Modelo de crecimiento con pared . . . . .	66
3.2. Ratio de concentración de nutriente variable . . . . .	76
3.2.1. Modelo de crecimiento sin pared . . . . .	76
3.2.2. Modelo de crecimiento con pared . . . . .	80

---

<b>4. Modelo con retardo. Aplicación en un quimiostato</b>	<b>87</b>
4.1. Introducción . . . . .	87
4.2. Modelo sin crecimiento en pared . . . . .	87
4.2.1. Signo y acotación de soluciones . . . . .	89
4.2.2. Análisis de la estabilidad . . . . .	91
4.3. Modelo de crecimiento con pared . . . . .	95
4.3.1. Signo y acotación de soluciones . . . . .	97
4.3.2. Análisis de la estabilidad . . . . .	100
<b>A. Sistemas dinámicos autónomos</b>	<b>113</b>
<b>B. Sistemas dinámicos no autónomos</b>	<b>129</b>
<b>C. Sistemas dinámicos con retardo</b>	<b>141</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>151</b>

# Índice de figuras

1.1. Imagen de un quimiostato natural, al aire libre. . . . .	8
1.2. Imagen de un quimiostato de un único recipiente; recipiente de cultivo. . . . .	9
1.3. Imagen de un quimiostato al natural. . . . .	11
2.1. Recipiente de cultivo. . . . .	17
2.2. Dos recipientes de cultivos reales en un laboratorio. . . . .	18
2.3. Distinción de zonas. . . . .	27
2.4. Conjuntos M y E. . . . .	38
3.1. Representación gráfica del conjunto $\overline{B}_\varepsilon$ . . . . .	61
3.2. Representación gráfica del conjunto $\overline{\mathbf{B}}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ . . . . .	63
3.3. Representación gráfica del conjunto $T_\varepsilon$ . . . . .	74
3.4. Representación gráfica del conjunto $\overline{\mathbf{B}}$ . . . . .	79
3.5. Representación gráfica del conjunto $T_\varepsilon$ . . . . .	84
A.1. Representación gráfica de un conjunto atrayente A. . . . .	117
A.2. Representación gráfica de un conjunto absorbente, $T(t)D$ . . . . .	119
A.3. Representación gráfica de la propiedad de seguimiento de un sistema dinámico <i>S</i> . . . . .	127
A.4. Representación gráfica de una variedad inestable y una variedad estable. . . . .	128
B.1. Convergencia en sentido forward. . . . .	133
B.2. Convergencia en sentido pullback. . . . .	134
C.1. Representación. . . . .	147



# Capítulo 1

## Introducción

Un quimiostato es un mecanismo de laboratorio que consiste en tres recipientes interconectados y es usado para el crecimiento de microorganismos en un ambiente de cultivo. En su forma más básica, el excedente del primer recipiente pasa al segundo y el excedente de éste pasa al tercero.

El primer recipiente se denomina **botella de alimentación** y contiene todos los nutrientes requeridos para el crecimiento de los microorganismos. Suponemos que todos estos los nutrientes se aportan de forma abundante excepto uno de ellos, que denominaremos **nutriente limitante**.

El contenido de la botella de alimentación es bombeado al segundo recipiente, al que denominaremos **recipiente de cultivo**, con un ratio constante. Los microorganismos se alimentan de los nutrientes provenientes de la botella de alimentación y crecen en el recipiente de cultivo. El recipiente de cultivo remueve de forma continua para que todos los microorganismos tengan la misma probabilidad de acceder a los nutrientes.

El contenido del recipiente de cultivo es bombeado entonces al tercer recipiente, al que denominamos **recipiente colector**. Naturalmente tal recipiente contiene microorganismos, nutrientes y los productos que generan dichos microorganismos.

El quimiostato juega un papel fundamental en los estudios ecológicos [2, 12, 14, 18, 28, 29, 30, 31]. Además, con algunas modificaciones, también son usados como modelos para procesos de tratamiento de aguas residuales [1, 21]. El modelo de quimiostato puede considerarse como el punto de partida para muchas variantes de modelos biológicos más realistas, como



Figura 1.1: Imagen de un quimiostato natural, al aire libre.

pueden ser los problemas de microorganismos genéticamente alterados [26, 27] y modelos de antibióticos [23].

En el modelo más simple de quimiostato, la disponibilidad de nutriente y su ratio de administración se suponen fijados. Sin embargo, la disponibilidad de un nutriente en un sistema natural normalmente depende del ratio de consumo del nutriente y de la concentración del mismo, lo que conduce a un sistema dinámico no autónomo.

Otro supuesto básico en el modelo más simple de quimiostato es que el ratio de flujo sea suficientemente rápido como para no permitir el crecimiento en las paredes del recipiente. Sin embargo, el crecimiento en la pared tiene lugar cuando el ratio de limpieza no es suficientemente rápido, lo que da lugar a los problemas de bioreactores.

Los estudios de los modelos de quimiostato tratados como sistemas dinámicos no autónomos están mucho más limitados hasta la fecha. Por ejemplo, **Smith** y **Thieme** [24] introdujeron persistencia práctica para sistemas dinámicos no autónomos con el modelo más simple de quimiostato.

Antes de resumir de lo que va a tratar el trabajo, vamos a hablar sobre **la analogía entre un quimiostato y un lago**<sup>1</sup>, pues es una manera sencilla de entender mejor su funcionamiento. En efecto, los modelos de quimiostatos son usados extensamente para representar el

---

<sup>1</sup>Al final de este capítulo se adjunta un cuadro comparativo entre un quimiostato y el lago.



---

crecimiento de especies en un lago donde los organismos, como por ejemplo pueden ser las algas, se alimentan de nutrientes con crecimiento limitado, como el nitrógeno y el fósforo. La disponibilidad de un nutriente en un sistema natural como el de un lago depende de la afluencia de nutriente. Si lo aplicamos a nuestro ejemplo anterior, las algas sobreviven incluso con niveles muy bajos (*casi indetectables*) de nutrientes, en contra de la opinión de que perecen debido a insuficiencias. Pero hay un crecimiento oscilatorio y bajo. Para representar este fenómeno de crecimiento oscilatorio en las ecuaciones hay varias posibilidades de investigación.

En el primero de todos, se introducen una cantidad de nutrientes y un ratio de limpieza variables en el modelo, los cuales se asumen fijos en un principio, a pesar de que la disponibilidad de los nutrientes **I** y también su ratio de aportación **D** en un lago dependen de la estación del año en la que nos encontremos [4, 15, 25].

A continuación, hemos variado los parámetros **I** y **D** de forma periódica de acuerdo con el tiempo. Esto puede explicar el crecimiento oscilatorio y la coexistencia en caso de que hubiese competidores. Pero asumir periodicidad es muy sencillo, ya que la influencia puede variar continuamente durante una estación concreta o puede mantenerse regulada. Es decir, los parámetros **I** y **D** pueden variar sobre un ciclo o pueden estar fijados (*constantes*) o con variaciones marginales durante una parte específica del ciclo. Por tanto, su influencia en el sistema debe entenderse para estaciones específicas o en periodos de tiempo.

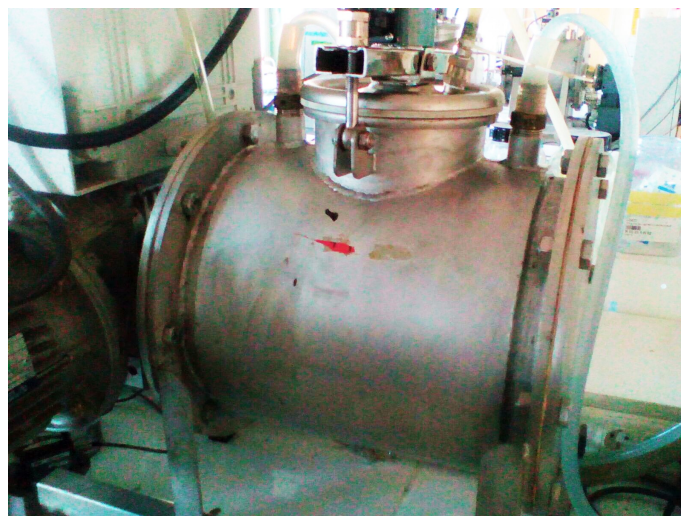


Figura 1.2: Imagen de un quimiostato de un único recipiente; recipiente de cultivo.

Otra posibilidad consiste en intentar introducir otros *niveles tróficos*<sup>2</sup>. Así, el modelo se modifica para incluir un nutriente, un microorganismo que se alimenta de tal nutriente, y los dos competidores se alimentan del microorganismo [5, 6, 7, 13, 17, 19, 20, 33]. También está demostrado que hay coexistencia de todas las especies siempre que se establezca la presencia de ciclos límite bajo condiciones apropiadas sobre los parámetros, pero no es posible introducir un depredador<sup>3</sup> en un sistema cerrado tal como un quimiostato cuando estamos estudiando el crecimiento de un nutriente<sup>4</sup> sólo.

El modelo más básico con el que vamos a partir en este trabajo es el modelo autónomo sin retardo, sin pared y sólo teniendo en cuenta un microorganismo. Tomando como variables  $x$  e  $y$ , el nutriente y el microorganismo, respectivamente:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = aU(x(t))y(t) - Dy(t) \end{cases}$$

donde:

- $D (> 0)$  : es el ratio de aportación nutrientes y / eliminación del medio.
- $I (> 0)$  : es la cantidad de nutriente disponible en el sistema.
- $a (> 0)$  : es el ratio de consumo máximo de nutrientes y de crecimiento de los microorg.
- $U$  : es la función de consumo  $U(x) = \frac{x}{m+x}$ , con  $m > 0$ .

A partir de él, sacamos soluciones y veremos propiedades sobre su signo, su acotación según las condiciones iniciales que tomemos; estabilidad, distinguiendo entre el equilibrio axial y los equilibrios positivos; finalizando el análisis del modelo con la existencia de un atractor global según nos lo permita el modelo.

---

<sup>2</sup>Depredadores.

<sup>3</sup>Otro nivel trófico.

<sup>4</sup>o un microorganismo o competidor

---

Este trabajo está organizado en tres bloques fundamentales, claramente diferenciados; la primera parte<sup>5</sup> nos sumerge en el mundo de los modelos autónomos sin retardo; en la segunda<sup>6</sup> profundizamos sobre los modelos no autónomos sin retardo; pasando por una tercera parte<sup>7</sup> donde analizamos los modelos de los capítulos anteriores con retardo y aplicándolos a un quimiostato. Concluyendo con tres apéndices que nos ayudan a entender y profundizar en la teoría utilizada en cada bloque.



Figura 1.3: Imagen de un quimiostato al natural.

El segundo capítulo está estructurado en tres secciones; en la primera se explican las nociones biológicas necesarias sobre los quimiostatos y se construye un modelo que revela la dinámica que posee, en la segunda, introducimos al modelo un microorganismo más; en la tercera, vemos un modelo de quimiostato en el que tiene lugar el crecimiento de los microorganismos en la pared del recipiente donde se lleva a cabo la dinámica.

En todas estas secciones estudiamos los puntos críticos o de equilibrio del modelo en cuestión, así como la estabilidad de los mismos y la existencia de atractor global de éste.

El tercer capítulo está dividido en dos secciones; la primera nos permite hacer depender del ratio de consumo de nutriente  $\mathbf{D}$  con respecto al tiempo; así podremos estudiar el caso del modelo con o sin pared tratado en el capítulo 2; estudiando los puntos críticos, estabilidad y existencia del atractor global del sistema; en la segunda sección, de manera análoga, ahora permitimos, tanto en el modelo sin pared como en el con pared, que el parámetro del ratio

---

<sup>5</sup>Capítulo 2.

<sup>6</sup>Capítulo 3.

<sup>7</sup>Capítulo 4.

de concentración de nutriente **I** tenga también dependencia temporal; analizando también dichos puntos críticos, estabilidad y existencia del atractor global.

El cuarto capítulo está dividido en dos bloques bien diferenciados; el primero con el modelo más sencillo: el modelo sin pared; en el cual consideramos que posee un retardo variable y observamos su comportamiento; en el segundo introducimos retardos variables en el modelo con pared, donde también observamos su comportamiento. En ambos bloques, se estudiarán los puntos críticos y estabilidad de los mismos, sin llegar a la existencia del atractor.

Al final, para complementar las demostraciones de los capítulos, hemos decidido incorporar tres apéndices correspondientes a cada uno de los bloques, colocados en el orden en el que se ha ido desarrollando la teoría del trabajo. Con lo cual, comenzamos por *A. Sistemas dinámicos autónomos*, continuando por *B. Sistemas dinámicos no autónomos* y concluyendo con *C. Sistemas dinámicos con retardo*.

Dichos apéndices contienen más información que la estrictamente necesaria. Pues hemos creído conveniente extenderlos y tener algo más completo, extendiendo nuestro aprendizaje.

Uno de los **objetivos** de este trabajo, además de extender la teoría de sistemas dinámicos, es aplicarla a modelos reales y de gran impacto en el entorno de la Ciencia. Eg:

- Juegan un papel importante en estudios ecológicos.
- Estos modelos se utilizan para procesos de tratamiento de aguas residuales.
- Puede considerarse como punto de partida para muchas variantes que cedan el paso a modelos más realistas:
  - Problemas de microorganismos genéticamente alterados.
  - Modelos de producción de antibióticos.
  - Modelos de fermentación: vino, cerveza...

Para concluir, veamos un cuadro comparativo entre un lago y el quimiostato, como anteriormente habíamos anunciado:

---

Propiedad	Lago	Quimiostato
<b>Nutriente</b>	Las especies en un lago reciben los nutrientes a través de las corrientes que fluyen en/por la regeneración durante la primavera.	El nutriente se suministra a través de una entrada puesta por el ser humano.
<b>Muerte</b>	Las especies se extinguen, ya que continuamente caen fuera de las capas luminosas a las capas inferiores de la columna de agua.	El nutriente y la especie se lavan fuera del sistema a través de una salida.
<b>Escasez de nutrientes</b>	Durante el verano no hay suficiente aportación de nutrientes y debido a la sequía del lago, algunos nutrientes tales como fósforo, nitrógeno o vitamina $B_{12}$ están menos disponibles.	La aportación de uno o más nutrientes <sup>8</sup> está controlada por el experimentador.

Cuadro 1.1: Tabla comparativa entre un lago y el quimiostato.



## Capítulo 2

# Modelo autónomo sin retardo

### 2.1. Interés del modelo en los quimiostatos

Comenzamos con la relación clásica que tiene lugar entre las matemáticas y la biología. Para ello comenzamos con uno de los problemas de origen como son los modelos **Malthusianos** y de **Lotka-Volterra**, entre otros. El modelo:

$$x'(t) = rx(t),$$

donde  $' = \frac{d}{dt}$  y  $r$  es un coeficiente que refleja el ratio de crecimiento, describe el crecimiento exponencial de una población  $x$  de individuos en cualquier instante de tiempo  $t$ .

En el modelo también puede introducirse una constante de capacidad de carga del medio,  $k$ , como pudiera ser la comida, la luz, ... Éstas toman el control sobre el crecimiento de las especies, y modifican dicho modelo:

$$x' = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

Un modelo de Lotka-Volterra que describe la competición entre dos especies  $x$  e  $y$ , *depredadores*, por la misma comida, *presa*, **sin interferencia** viene dado por:

$$\begin{cases} x' = rx \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) \\ y' = ry \left(1 - \frac{y}{k_2}\right). \end{cases} \quad (2.1)$$

Ahora, el modelo con **interferencia**, que varía introduciendo dicho término de *interferencia*:

$$\begin{cases} x' = rx \left(1 - \frac{x}{k_1} - \lambda_1 y\right) \\ y' = ry \left(1 - \frac{y}{k_2} - \lambda_2 x\right). \end{cases} \quad (2.2)$$

En estos modelos (2.1) y (2.2), tenemos dos constantes de capacidad de carga  $k_1$  y  $k_2$  y también dos constantes de interferencia  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , todas ellas positivas.

Es posible medir los coeficientes de interferencia que deciden el resultado de la competición sólo cuando los organismos crecen juntos, es decir, mientras el experimento está siendo realizado. De esta forma, se descarta la posibilidad de anticipar el resultado del experimento antes de llevarlo a cabo. Este es un inconveniente del modelo Lotka-Volterra. Además, no hay representación para el crecimiento de la comida<sup>1</sup> gracias a la cual la población crece, debido a que se alimenta de ella.

La inclusión de la ecuación que describe el crecimiento de la fuente<sup>2</sup> nos permite predecir los cambios del crecimiento de la población consumidora<sup>3</sup>.

La **importancia** de los modelos de **quimiostatos** reside en la inclusión de la ecuación que describe el crecimiento de la fuente junto con las ecuaciones que describen la competición entre los organismos que intervienen en la misma. Ésta misma observación ha sido la que ha llevado a investigadores a estudiar ecuaciones de modelos de quimiostatos de forma intensiva.

De esta forma, analizando las ecuaciones del modelo, el resultado de la competición que tiene lugar en un quimiostato se puede predecir, además dichas predicciones pueden ser confirmadas a través de experimentos.

Llegados a este punto, podemos proceder a la construcción del modelo matemático.

## 2.2. Modelo con un microorganismo y con dos microorganismos

### 2.2.1. Principios basados en la biología

El primer modelo que vamos a tratar consiste en un microorganismo que se alimenta de un único nutriente cuyo crecimiento es limitado. Vamos a denotar por  $x$  al nutriente (crecimiento acotado) y por  $y$ , al microorganismo que se alimentará del nutriente  $x$ . Para formular nuestro modelo necesitamos:

\* Todos los nutrientes, excepto  $x$ , se encuentran en total disponibilidad sin suplir la ausencia de  $x$ , si se diese el caso.

---

<sup>1</sup>Fuente o presa.

<sup>2</sup>Comida o presa.

<sup>3</sup>depredador



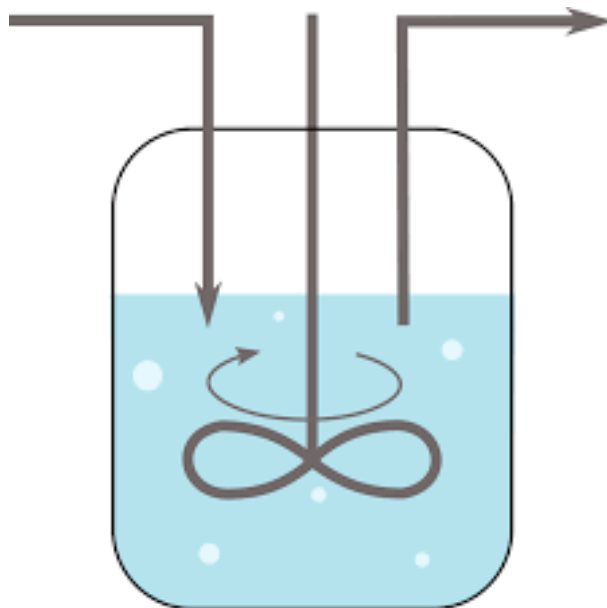


Figura 2.1: Recipiente de cultivo.

- \* Contamos con una fuente externa desde la que el microorganismo  $y$  recibe el nutriente  $x$  junto con otros nutrientes.
- \* El nutriente es administrado con un ratio.
- \* El nutriente que ha sido aportado tiene una concentración en el medio de crecimiento.
- \* El nutriente es uniformemente distribuido en el medio de crecimiento, de tal forma que los microorganismos tienen igual acceso al nutriente disponible, esto es, no hay disparidad en la distribución.
- \* Si hay un excedente en el sistema donde el material que se encuentra en exceso, ya sean nutrientes, o bien microorganismos, y algún otro producto, es eliminado continuamente.

Ahora enumeramos una serie de aspectos a tener en cuenta:

1. Los microorganismos consumen nutrientes continuamente y el ratio del consumo se mantiene constante.
2. El consumo posee una saturación, es decir, la suplenia ilimitada de nutrientes no implica el consumo ilimitado de nutrientes por las especies.
3. El crecimiento de los microorganismos es proporcional al consumo de nutrientes.

4. Todos los factores externos tales como temperatura, presión, . . . son apropiados para el crecimiento y no afectan al sistema.



Figura 2.2: Dos recipientes de cultivos reales en un laboratorio.

De esta forma, alguno de los parámetros serán reales y también relaciones funcionales en el sistema. La enumeración de ellos es:

- $I$ : es la cantidad de nutriente disponible en el sistema en cualquier instante de tiempo. (constante positiva)
- $D$ : es el ratio según el que el nutriente aporte y también según el que los contenidos del medio de crecimiento sean eliminados; (constante positiva).
- $a$ : es el ratio de consumo máximo de nutrientes y ratio de crecimiento de los microorganismos; (constante positiva).
- $U$ : es la respuesta funcional de los microorganismos que describe cómo se produce el consumo de nutrientes.

Con todos estos datos, podemos introducir el modelo matemático que describe una dinámica de un sistema con un consumo de nutrientes limitado.

### 2.2.2. Formulación del modelo matemático con un microorganismo

Denotamos por  $x(t)$  y  $y(t)$  a las concentraciones de nutrientes y microorganismos en un instante de tiempo  $t$  cualquiera, respectivamente.<sup>4</sup>

De esta manera, contamos en un principio con un **término de ganancia**: partiendo de  $I$ , que se suministra al sistema, en cada instante de tiempo, un ratio  $D$  de nutriente. Por lo tanto, el ratio de incremento de la concentración de nutrientes en el instante  $t$  es  $DI$ .

Además, los siguientes **términos de pérdida** son:

- Una cantidad de  $x(t)$  es eliminada del sistema con un ratio  $D$ . El sistema pierde  $Dx(t)$  nutrientes por cada instante de tiempo.
- Cada microorganismo  $y$  consume  $U(x(t))$  nutrientes.  $U(x(t))y(t)$  es la concentración de nutrientes consumida por  $y$  con un ratio  $a$ . Entonces la concentración de nutrientes viene afectada por:  $aU(x(t))y(t)$ .

Quedando la ecuación:

ratio de cambio de la concentración de nutrientes en el medio de crecimiento =  
ratio de aportación de nutrientes - ratio de eliminación - ratio de consumo.

Matemáticamente sería:

$$\frac{dx(t)}{dt} = DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t). \quad (2.3)$$

Para el crecimiento de los microorganismos  $y$  asumimos que el consumo de nutrientes,  $x$ , implica el crecimiento de  $y$ . Además, el ratio con el que tal nutriente es consumido, es decir,  $aU(x(t))y(t)$  es también el ratio con el que crece el microorganismo  $y$ .

Por otro lado, el microorganismo es eliminado del sistema con un ratio constante  $D$ , con lo que  $Dy(t)$  denota la cantidad de microorganismos eliminados del sistema.

Quedándonos la ecuación:

---

<sup>4</sup>Los resultados teóricos sobre sistemas dinámicos autónomos necesarios para desarrollar este capítulo están en el apéndice A.

ratio de cambio del microorganismo en cualquier instante de tiempo =  
ratio de crecimiento del microorganismo - ratio de eliminación del microorganismo.

De nuevo, matemáticamente:

$$\frac{dy(t)}{dt} = aU(x(t))y(t) - Dy(t). \quad (2.4)$$

En conclusión, obtenemos un sistema dinámico del consumo con una fuente limitada que intentamos conseguir en el quimiostato, que viene dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = aU(x(t))y(t) - Dy(t). \end{cases} \quad (2.5)$$

### 2.2.3. Propiedades de las soluciones del modelo con un microorganismo

Es conveniente comenzar esta sección por las características del sistema anterior (2.5). Éstas son esencialmente decididas por el término no lineal de su miembro derecho,  $U(x)$ . Conocida  $U$  como **la respuesta funcional o función de consumo**.

Hay algunas suposiciones básicas de la respuesta funcional  $U : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , que son:

1.  $U(0) = 0$ ,  $U(x) > 0$  para  $x > 0$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = L$ , con  $0 < L < \infty$ .
3.  $U$  es continuamente diferenciable.
4.  $U$  es monótona creciente.

Los dos primeros puntos son esenciales para cualquier función de consumo. El tercero proporciona la condición local de Lipschitz, lo que garantiza la existencia local de solución del sistema (2.5). El último supuesto, aunque no es estrictamente necesario, nos ayudará a concluir algunos resultados posteriormente.

Algunas funciones prototipo que cumplen estas cuatro condiciones son:

1.  $U(x) = x$ ; función de consumo **Lotka-Volterra o Holling tipo-I**.<sup>5</sup>
2.  $U(x) = \frac{x}{m+x}$ ,  $m > 0$ ; función de consumo **Michaelis-Menten o Holling tipo-II**.

---

<sup>5</sup>Aunque no satisface la segunda condición pero es usada con frecuencia en los modelos de tipo **Lotka-Volterra**.

3.  $U(x) = \frac{x^2}{(p+x)(q+x)}, p, q > 0$ ; función de consumo **Senoidal o Holling tipo-III**.

Claramente, los dos primeros supuestos garantizan la *existencia* de  $L > 0$  constante, tal que:

$$U(x) < L, \text{ para todo } x \in [0, \infty). \quad (2.6)$$

Además, el tercer supuesto junto con el (2.6) garantizan la *unicidad* de solución del sistema (2.5); dichas soluciones se pueden extender a su intervalo maximal de existencia para cualquier conjunto de condiciones iniciales.

Vamos a tomar como función de consumo la segunda, es decir,  $U(x) = \frac{x}{m+x}, m > 0$ , **Michaelis-Menten o Holling tipo-II**. En este caso:

1. **Primer supuesto** :  $U(0) = 0/m = 0$ . ✓

2. **Segundo supuesto** :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{m+x} = 1 =: L \in (0, \infty). \checkmark$$

3. **Tercer supuesto**: Puede parecer que posee una discontinuidad en  $x = -m$  pero como  $m$  es una constante positiva esta igualdad no tendría sentido porque significaría que habría una cantidad negativa de nutrientes. Es más, cualquier derivada de esta función posee en el denominador potencias de  $x + m$  siendo  $x > 0, m > 0$  lo que verifica este supuesto. ✓

4. **Cuarto supuesto**:

$$U'(x) = \frac{m}{(x+m)^2} > 0,$$

de donde deducimos que  $U$  es monótona creciente. ✓

Ahora vamos a demostrar que las soluciones de (2.5), con condiciones iniciales no negativas, se mantienen no negativas a lo largo del tiempo.

**Teorema 2.2.1** *Todas las soluciones del problema (2.5), con condiciones iniciales no negativas, son no negativas para todo  $t \geq 0$ .*

### Demostración

Sea:

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Veamos que cualquier solución que entra en el cuadrante  $\Omega$ , permanece siempre en él. Por continuidad de las soluciones del sistema (2.5), cada solución debe pasar por cero antes de alcanzar cualquier valor negativo. Ahora bien, si tenemos  $y = 0$  para algún instante de tiempo  $t = t_1 > 0$ , en virtud de la segunda ecuación de (2.5), obtenemos:

$$y'(t_1) = aU(x(t_1))y(t_1) - Dy(t_1) = 0,$$

con lo que  $y$  es no decreciente en el instante de tiempo  $t = t_1$ ; es por esto que  $y$  nunca tomará valores negativos.

De forma análoga, si  $x = 0$  para algún instante de tiempo  $t = t_2 > 0$ , gracias a la primera ecuación del (2.5), obtenemos:

$$x'(t_2) = DI - Dx(t_2) - aU(x(t_2))y(t_2) > 0,$$

debido a que  $U(0) = 0$ ,  $y \geq 0$ . De esta forma hemos demostrado que las soluciones no atravesarán las semirectas positivas de los ejes de ordenadas ni de abscisas.

Veamos ahora qué ocurre en el origen. Para ello, supongamos que existe un instante de tiempo  $t = t_3 > 0$  tal que  $x(t_3) = y(t_3) = 0$ ; entonces utilizando las ecuaciones de (2.5) se llega a que:

$$\begin{aligned} x'(t_3) &= DI - Dx(t_3) - aU(x(t_3))y(t_3) \\ y'(t_3) &= aU(x(t_3))y(t_3) - Dy(t_3) \end{aligned}$$

de donde se deduce  $x'(t_3) > 0$ ,  $y'(t_3) = 0$ . Así, podemos concluir que las soluciones del sistema (2.5) son no negativas para todo instante de tiempo  $t > 0$ . ■

**Teorema 2.2.2** *Cualquier solución positiva de (2.5) está acotada para condiciones iniciales no negativas que sean no nulas.*

**Demostración**

Consideramos la función  $V$  dada por:

$$V = x + y.$$

Derivando  $V$  a lo largo de soluciones del sistema (2.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= DI - Dx - aU(x)y + aU(x)y - Dy \\ &= DI - D(x + y) \\ &= DI - DV, \end{aligned}$$

de esta manera, obtenemos  $\dot{V} + DV = DI$ . Para resolverla, multiplicamos por un término exponencial conveniente (*factor integrante*) obteniendo:

$$e^{Dt}\dot{V} + De^{Dt}V = DIe^{Dt}.$$

Así, llegamos a que  $V = (V(0) - I)e^{-Dt} + I$ . Observamos que si  $V(0) < I$ , entonces  $V \leq I$ , por otro lado, si  $V(0) > I$ , entonces  $V \leq V(0)$ .

Vemos que en cualquier caso la función  $V$  está acotada, con lo que, por definición de  $V$ ,  $x$  e  $y$  también lo están. ■

#### 2.2.4. Puntos estacionarios o de equilibrios del modelo con un microorganismo

El estudio de los puntos estacionarios de un sistema tiene una gran relevancia, que reside en que dichos puntos representan estados de energía mínima del sistema que se esté estudiando. Los equilibrios del sistema (2.5) vienen dados por los puntos del plano  $xy$  tales que satisfacen:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Entonces, los equilibrios del sistema (2.5) vienen dados por las soluciones del sistema algebraico:

$$\begin{aligned} DI - Dx - aU(x)y &= 0 \\ aU(x)y - Dy &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

La primera solución es inmediata:  $(I, 0)$ , **equilibrio axial**.

Para llegar a los equilibrios positivos  $(x^*, y^*)$  de (2.7) resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} DI - Dx^* - aU(x^*)y^* &= 0 \\ aU(x^*)y^* - Dy^* &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Trivialmente deducimos de la segunda ecuación que  $U(x^*) = \frac{D}{a}$ , y sustituyendo en la primera ecuación de (2.8) llegamos a que:  $D(I - x^*) - Dy^* = 0$ , de donde obtenemos:

$$I - x^* - y^* = 0 \text{ que es igual a } x^* + y^* = I.$$

En resumen, hemos llegado a las condiciones:

$$U(x^*) = \frac{D}{a} \text{ e } I = x^* + y^* \tag{2.9}$$

Entonces, podemos deducir que para obtener un equilibrio positivo, el nivel de consumo debe alcanzar, al menos una vez, el valor  $\frac{D}{a}$ , es decir, que  $\exists x^* \in (0, \infty)$  tal que  $U(x^*) = \frac{D}{a}$ . También sabemos que  $U(x) \leq L$ , para todo  $x \in (0, \infty)$ . Por tanto, (2.9) implica que  $\frac{D}{a} \leq L$  que es una condición necesaria para la existencia de equilibrio positivo para (2.8). Si suponemos también que  $I > x^*$  entonces, como  $I = x^* + y^*$ , tenemos que  $x^* + y^* > x^*$ , de donde se deduce  $y^* > 0$  y  $x^* > 0$ , con lo que (2.5) posee un equilibrio positivo denotado por  $(x^*, y^*)$ .

### 2.2.5. Análisis de estabilidad del modelo con un microorganismo

En la sección anterior vimos los equilibrios que poseía el sistema (2.5). Ahora nos disponemos a estudiar la estabilidad de cada uno de ellos.

Antes de comenzar vemos que tendremos que trabajar en dos situaciones:

- \* El equilibrio axial  $(I, 0)$ , estable. Significa que los microorganismos  $y$  tienden a extinguirse.
- \* Si buscamos conseguir la supervivencia de ambas variables  $x$  e  $y$  debemos establecer condiciones bajo las cuales el equilibrio  $(x^*, y^*)$  sea estable.

El equilibrio  $(x^*, y^*)$  del sistema (2.5) será globalmente asintóticamente estable si toda solución  $(x(t), y(t))$  de (2.5), correspondiente a condiciones iniciales arbitrarias, satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^* \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*$$

**Teorema 2.2.3** *El equilibrio axial  $(I, 0)$  es globalmente asintóticamente estable si se verifica la condición  $aL < D$ .*

#### Demostración

De la segunda ecuación del sistema (2.5) se tiene:

$$\frac{dy(t)}{dt} = aU(x(t))y(t) - Dy(t).$$

Ahora, como sabemos que  $U(x(t)) \leq L$ :

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq aLy(t) - Dy(t) = (aL - D)y(t) < 0,$$

debido a que  $aL - D < 0$ , por hipótesis. De esta forma,

$$0 \leq y(t) \leq y(0)e^{(aL-D)t}.$$



Tenemos que  $y$  es decreciente a cero, pues hemos visto que en virtud de que  $aL - D < 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Veamos ahora que se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I.$$

Para ello, consideramos una función  $v$  dada por:

$$v(t) = x(t) + y(t).$$

Derivando:

$$\begin{aligned} v' &= DI - Dx - \cancel{aU(x)y} + \cancel{aU(x)y} - Dy \\ &= DI - Dx - Dy = DI - D(x + y) = DI - DV. \end{aligned}$$

De esta forma, llegamos a la ecuación diferencial lineal de primer orden  $v' = DI - DV$ , cuya solución viene dada por:

$$v = (v(0) - I)e^{-Dt} + I.$$

Así:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} \cancel{y(t)} \overset{0}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t).$$

Por otro lado:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [(v(0) - I)e^{-Dt} + I] = \lim_{t \rightarrow \infty} \cancel{(v(0) - I)e^{-Dt}} \overset{0}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} I = I.$$

Entonces, concluimos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I.$$

■

**Teorema 2.2.4** *El equilibrio positivo  $(x^*, y^*)$  de (2.5) es globalmente asintóticamente estable, siempre que se verifique  $aL > D$ .*

La idea de la demostración es similar a la del **Teorema 2.2.6**.<sup>6</sup>

Ahora hacemos uso directo de la función de consumo que llevamos usando en este capítulo:

$$U(x) = \frac{x}{m + x},$$

---

<sup>6</sup>Se verá posteriormente.

siendo  $m$  la constante de saturación del medio,  $m > 0$ . Podemos reescribir nuestro sistema (2.5) como:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a\frac{x}{m+x}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a\frac{x}{m+x}y - Dy.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Entonces un equilibrio positivo de (2.10) viene dado por:  $U(x^*) = \frac{x^*}{m+x^*} = \frac{D}{a}$ .<sup>7</sup> Es decir,

$$\frac{x^*}{m+x^*} = \frac{D}{a}.$$

Sacando factor común  $x^*$  nos queda:

$$x^* = \frac{Dm}{a-D}.$$

Usando  $x^* + y^* = I$ , llegamos a:

$$\frac{Dm}{a-D} + y^* = I.$$

Donde despejando  $y^*$ :

$$y^* = I - \frac{Dm}{a-D}.$$

Luego, el equilibrio obtenido es:

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{Dm}{a-D}, I - \frac{Dm}{a-D} \right).$$

Ya hemos conseguido el conjunto de condiciones necesarias y suficientes para la existencia del equilibrio positivo para (2.10) es:  $a > D$  y  $I > x^*$ . Ahora bien, de  $I > x^*$  podemos deducir que:  $I > \frac{mD}{a-D}$ , luego  $\frac{mD}{I} < a - D$ , sacando factor común y tomando inversos obtenemos:

$$\frac{I}{D(m+I)} > \frac{1}{a}.$$

Hemos obtenido una tercera condición que implica:  $a > D$ , debido a que  $\frac{I}{m+I} < 1$  con lo que:

$$D < \frac{aI}{m+I} < a.$$

Como contábamos con dos condiciones,  $a > D$  e  $I < x^*$ , y hemos probado que la segunda condición es equivalente a:

$$D < \frac{aI}{m+I} < a,$$

---

<sup>7</sup>Esto se debe al estudio que se ha hecho previamente para una función de consumo genérica. En este punto, lo único que se hace es particularizar lo anterior a la función de consumo que estamos considerando.

y de ésta hemos deducido la primera, entonces realmente la condición necesaria y suficiente para la existencia de equilibrios positivos para el problema tratado (2.10) viene dada por:

$$D < \frac{aI}{m+I}.$$

Por lo tanto, los dos teoremas anteriores quedarían modificados.

**Teorema 2.2.5** *Supongamos  $a \leq D$ , o bien,  $a > D$  y  $\frac{mD}{a-D} \geq I$ . Entonces:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

### Nota 2.1

Notemos que estas condiciones implican la *no existencia* de equilibrios positivos.

La idea de la demostración es similar a la que hemos hecho en el **Teorema 2.2.6**. En este caso podemos ilustrar la distinción de las zonas con una gráfica:

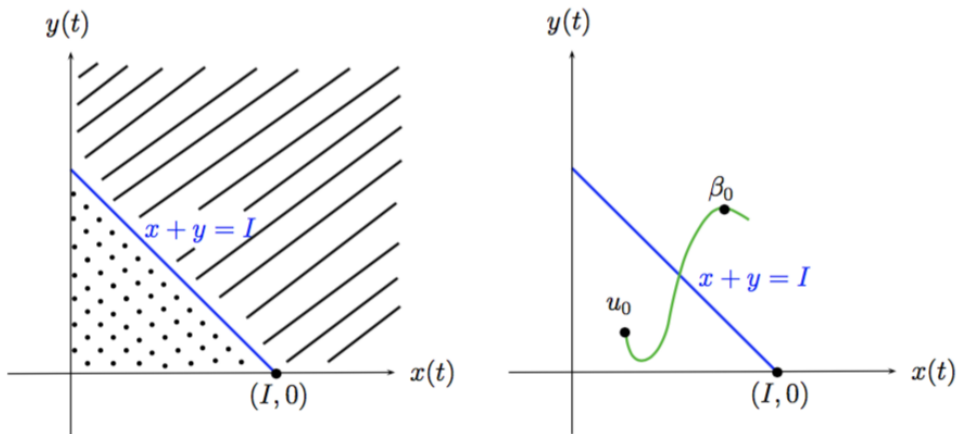


Figura 2.3: Distinción de zonas.

**Teorema 2.2.6** *Supongamos  $a > D$  y  $\frac{mD}{a-D} < I$ . Entonces:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^* = \frac{mD}{a-D}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^* = I - x^*.$$

### Demostración

Consideramos la función  $V$  dada por:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(I - x - y)^2 + \alpha \left( y - y^* - y^* \log \frac{y}{y^*} \right).$$

Claramente tenemos que:

$$V(x^*, y^*) = \frac{1}{2}(I - x^* - y^*)^2 + \alpha \left( y^* - y^* - y^* \log \frac{y^*}{y^*} \right) = 0.$$

Así, derivando  $V$  a lo largo de las soluciones del problema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a \frac{x}{m+x} y \\ \frac{dy}{dt} &= a \frac{x}{m+x} y - Dy, \end{aligned} \tag{2.11}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(I - x - y) \left\{ DI - Dx - a \frac{x}{m+x} y + a \frac{x}{m+x} y - Dy \right\} \\ &\quad + \alpha \left\{ \frac{axy}{m+x} - Dy - \frac{axy^*}{m+x} + Dy^* \right\} \\ &= -(I - x - y) \left\{ DI - Dx - a \frac{x}{m+x} y + a \frac{x}{m+x} y - Dy \right\} \\ &\quad + \alpha(y - y^*) \left( a \frac{x}{m+x} - D \right) \\ &= -D(I - x - y)^2 + \alpha(y - y^*) \left( a \frac{x}{m+x} - D \right) \\ &= -D(x^* + y^* - x - y)^2 + \alpha(y - y^*) \left( a \frac{x}{m+x} - D \right) \\ &= -D([x - x^*] + [y - y^*])^2 + \alpha(y - y^*) \left( a \frac{x}{m+x} - D \right) = (\otimes) \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$x^* = \frac{mD}{a - D},$$

con lo que:

$$(a - D)x^* = mD, \text{ entonces } ax^* = Dx^* = mD,$$

de donde:

$$ax^* = D(m + x^*). \text{ Por tanto } D = a \frac{x^*}{m + x^*}.$$

De esta forma, continuamos la cadena de igualdades que dejamos en  $(\otimes)$  como:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -D([x - x^*] + [y - y^*])^2 + \alpha(y - y^*) \left( \frac{axm + axx^* - amx^* - axx^*}{(m+x)(m+x^*)} \right) \\ &= -D([x - x^*] + [y - y^*])^2 + \alpha \frac{am}{(m+x)(m+x^*)} (y - y^*)(x - x^*). \end{aligned}$$

Como sabemos que:

$$D = a \frac{x^*}{m + x^*} \implies \frac{D}{x^*} = \frac{a}{m + x^*}.$$

Continuando la cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -D([x - x^*] + [y - y^*])^2 + \alpha \frac{Dm}{x^*(m + x)}(y - y^*)(x - x^*) \\ &= -D \left\{ (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + 2(y - y^*)(x - x^*) - \alpha \frac{Dm}{x^*(m + x)}(y - y^*)(x - x^*) \right\} \\ &= -D \left\{ (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + \left( 2 - \alpha \frac{m}{x^*(m + x)} \right) (y - y^*)(x - x^*) \right\}. \end{aligned}$$

Nos hemos dado cuenta de que la última expresión es de la forma:  $AX_1^2 + BX_1Y_1 + CY_1^2 =: H(X_1, Y_1)$ , con lo que será definida positiva  $H(X_1, Y_1) \Leftrightarrow A > 0$  y  $B^2 < 4AC$ . De esta forma, para que nuestra  $V$  sea definida negativa debe ocurrir que:

$$\left( 2 - \alpha \frac{m}{x^*(m + x)} \right)^2 < 4,$$

desarrollándolo:

$$4 + \frac{\alpha^2 m^2}{x^{*2}(m + x)^2} - 4 \frac{\alpha m}{x^*(m + x)} < 4 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 m^2 - 4\alpha m x^*(m + x)}{x^{*2}(m + x)^2} < 0,$$

es decir,

$$\alpha^2 m^2 < 4\alpha m x^*(m + x).$$

En otras palabras tenemos que:

$$\alpha m < 4x^*(m + x) \Leftrightarrow \frac{\alpha m}{x^*(m + x)} < 4 \Leftrightarrow \frac{\alpha m}{x^*(m + x)} < 4.$$

De esta forma, será  $V$  definida negativa. ■

### 2.2.6. Existencia de atractor global del modelo con un microorganismo

Consideramos el sistema (2.5) dado por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = aU(x(t))y(t) - Dy(t).$$

**Notación 2.2**

Vamos a denotar de aquí en adelante por  $u(t=0) = u_0$  a un dato inicial del sistema (2.5). Por otro lado, también denotaremos por  $u(t; u_0) = (x(t, u_0); y(t, u_0))$  a una solución del sistema (2.5) y por  $\mathbf{S}(t)$  al **sistema dinámico o semigrupo de operadores** que está definido por:

$$S(t)u_0 = S(t)(x_0, y_0) = (x(t), y(t)) \equiv u(t; u_0).$$

Consideremos  $B$  cómo un conjunto acotado a  $B \subset \mathbf{R}^2$ . De esta manera,  $\exists M > 0$  tal que  $B \subset B(0; M)$ , donde  $B(0; M)$  es la notación de la bola de centro el origen y radio  $M$  en  $\mathbf{R}^2$ . Entonces, para todo dato inicial  $u_0 = (x_0, y_0) \in B$ , se tiene que  $|u_0|^2 \leq M^2$ .

Podemos definir entonces  $w(t) := x(t) + y(t)$ ; por tanto derivando  $w'(t) = x'(t) + y'(t)$ . Sustituimos en el sistema (2.5):

$$\begin{aligned} w'(t) &= DI - DX - \overbrace{\frac{ax}{x+m}y + \frac{ax}{x+m}y}^0 - Dy \\ &= DI - Dx - Dy \\ &= DI - Dw. \end{aligned}$$

Y con la condición inicial  $w(0) = x(0) + y(0) = x_0 + y_0$ . Resolvemos el problema de Cauchy que nos ha quedado:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = -Dw + DI \\ w(0) = w_0 = x_0 + y_0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Usando la demostración del **Teorema 2.2.1** tenemos que la solución es:

$$w(t) = Ce^{-Dt} + I, \quad C = x_0 + y_0 - I,$$

como  $x(t), y(t) \geq 0$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} |S(t)u_0|^2 &= x^2(t) + y^2(t) \\ &\leq |x(t) + y(t)|^2 \\ &= |w(t)|^2 \\ &\leq (Ce^{-Dt} + I)^2 \\ &= [(x_0 + y_0)e^{-Dt} + I - Ie^{-Dt}]^2 \\ &= [(x_0 + y_0)e^{-Dt} + I(1 - e^{-Dt})]^2 \leq (*). \end{aligned}$$

La **desigualdad de Young** va a sernos muy útil en los siguientes pasos que vamos a dar:

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

De ella, es fácil deducir:

$$(a + b)^2 \leq a^2 + (a^2 + b^2) + b^2 = 2a^2 + 2b^2. \quad (2.13)$$

Por tanto, continuamos pues con la desigualdad anterior (\*):

$$\begin{aligned} |S(t)u_0|^2 &\leq 2(x_0 + y_0)^2 e^{-Dt} + 2I^2 \overbrace{(I - e^{-Dt})^2}^{\leq 1} \\ &\leq 2(x_0^2 + y_0^2) e^{2-Dt} + 2I^2 \\ &\leq 4M^2 e^{-2Dt} + 2I^2. \end{aligned}$$

Denotamos por  $\rho^2 := 1 + 2I^2$ , como  $\lim_{t \rightarrow \infty} 4M^2 e^{-2Dt} = 0$ . Entonces  $\exists T_B \geq 0$  tal que  $\forall t \geq T_B$  se tiene  $4M^2 e^{-2Dt} \leq 1$ . En efecto:

$$4M^2 e^{-2Dt} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4M^2 \leq e^{2Dt} \quad \Leftrightarrow \quad \log(4M^2) \leq 2Dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2D} \log(4M^2) \leq t,$$

Por lo tanto, definimos:

$$T_B := \frac{1}{2D} \log(4M^2).$$

**Concluimos** con que hemos demostrado que  $\exists$  un compacto,  $\overline{B}(0, \rho)$ , de tal forma que existe  $T_B \geq 0$  tal que  $\forall t \geq T_B$  se tiene  $|S(t)u_0| \leq \rho$ . Por lo tanto,  $\exists$  un compacto absorbente, con lo que **existe un atractor global  $\mathbf{A}$** . (Ver apéndice A).  $\checkmark$

### 2.2.7. Modelo autónomo con dos microorganismos

En el caso de tener dos microorganismos, el modelo es más sofisticado que el anterior. Pues ahora tenemos dos microorganismos  $y_1, y_2$ , que compiten por el mismo nutriente  $x$ . El modelo es de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = DI - Dx - \frac{a_1 x}{m_1 + x} y_1 - \frac{a_2 x}{m_2 + x} y_2 \\ \frac{dy_1}{dt} = \frac{a_1 x}{m_1 + x} y_1 - Dy_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{a_2 x}{m_2 + x} y_2 - Dy_2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Las cantidades  $a_1, a_2$  son los ratios máximos específicos de crecimiento de ambos microorganismos  $y_1, y_2$ , también denominados **los ratios de consumo**, y las correspondientes **constantes de saturación de consumo del medio** son  $m_1$  y  $m_2$ .

Por analogía a los apartados anteriores, obtenemos los **puntos estacionarios o de equilibrio** de este sistema (2.14). Haciendo el sistema igual a cero, claramente se obtiene como solución inmadiaata  $(I, 0, 0)$ , así como otras soluciones no triviales:  $(x^*, y_1^*, 0), (x^*, 0, y_2^*)$ .

Las soluciones no triviales son las soluciones correspondientes al caso en el que el modelo sólo posea un microorganismo, haciendo  $y = y_1$  o bien  $y = y_2$ , ambas ya están estudiadas. En el caso de querer encontrar los equilibrios positivos  $(x^*, y_1^*, y_2^*)$ , debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} DI - Dx - \frac{a_1x}{m_1 + x}y_1 - \frac{a_2x}{m_2 + x}y_2 &= 0 \\ \frac{a_1x}{m_1 + x} - D &= 0 \\ \frac{a_2x}{m_2 + x} - D &= 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos de la segunda y tercera ecuación:

$$\frac{a_1x}{m_1 + x} = D = \frac{a_2x}{m_2 + x},$$

quedando la primera ecuación como :  $DI - Dx - Dy_1 - Dy_2 = 0$ , pudiendo quitar  $D$ . Quedando el siguiente sistema que nos dará los equilibrios positivos:

$$\begin{aligned} I - x^* - y_1^* - y_2^* &= 0 \\ \frac{a_1x^*}{m_1 + x^*} - D &= 0 \\ \frac{a_2x^*}{m_2 + x^*} - D &= 0, \end{aligned}$$

y obteniendo:

$$x^* = \frac{Dm_1}{a_1 - D} = \frac{Dm_2}{a_2 - D}, \quad y_1^* + y_2^* = I - x^*.$$

Así, existirá equilibrio positivo  $\Leftrightarrow a_1 > D, a_2 > D, I > x^*$ .

Para el estudio de la **estabilidad** en este caso, definimos unas nuevas cantidades de interferencias:

$$\lambda_1 = \frac{m_1D}{a_1 - D}, \quad \lambda_2 = \frac{m_2D}{a_2 - D}.$$

Por analogía con el caso de un microorganismo, tenemos un resultado para este modelo de dos microorganismos:



**Teorema 2.2.7** *Se verifican los siguientes resultados:*

1° Si  $a_i \leq D$  para  $i = 1, 2$ , ó  $a_i > D$ ,  $i = 1, 2$  e  $I < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ , entonces cualquier solución de (2.14) satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0.$$

2° Si  $a_i > D$ ,  $i = 1, 2$ , y  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < I$  ó  $0 < \lambda_1 < I < \lambda_2$ , entonces cualquier solución de (2.14) con datos iniciales positivos satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{m_1 D}{a_1 - D} \equiv \lambda_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = I - \lambda_1 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0.$$

En el caso  $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < I$  o  $0 < \lambda_2 < I < \lambda_1$ , entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lambda_2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = I - \lambda_2.$$

3° Si  $a_i > D$  y  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{m_1 D}{a_1 - D}$ , entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lambda_1 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) + y_2(t)) = I - \lambda_1.$$

### Demostración

1° Consideramos la función  $V$ , dada por  $V(x, y_1, y_2)$ , como:

$$V = x + y_1 + y_2;$$

Derivando  $V$  a lo largo de las soluciones del sistema tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= DI - Dx - a_1 \frac{xy_1}{m_1 + x} - a_2 \frac{xy_2}{m_2 + x} + a_1 \frac{xy_1}{m_1 + x} - Dy_1 + a_2 \frac{xy_2}{m_2 + x} - Dy_2 \\ &= DI - Dx - Dy_1 - Dy_2 \\ &= DI - D(x + y_1 + y_2) \\ &= DI - DV(t). \end{aligned}$$

Así, llegamos a  $\dot{V} = -DV + DI$ , con lo que  $V = (V(0) - I)e^{-Dt} + I$ , tal y como ya vimos en el **Teorema 2.2.3**. De esta forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y_1(t) + y_2(t)] = I.$$

Como posteriormente se verá que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t),$$

se tiene que:

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} V = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t),$$

con lo que hemos terminado.

Ahora tenemos que distinguir dos situaciones.

\*La primera es la que tiene como hipótesis  $a_i \leq D$ ,  $i = 1, 2$ . En este caso, para  $i = 1, 2$ , se tiene:

$$\frac{dy_i}{dt} = a_i \frac{xy_i}{m_i + x} - Dy_i = y_i \left( \frac{a_i x}{m_i + x} - D \right) \leq y_i (a_i - D) \leq 0,$$

gracias a la hipótesis y a  $\frac{x}{m_i + x} \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ . De esta manera:

$$y_i(t) \leq Ce^{(a_i - D)t},$$

con lo que:

$$0 \leq y_i(t) \leq Ce^{(a_i - D)t} \longrightarrow 0,$$

cuando hacemos tender  $t \rightarrow \infty$ , por lo que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = 0, \quad i = 1, 2.$$

\*Una segunda situación es aquella que tiene por hipótesis  $a_i > D$  e  $I < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ . En este caso, sabemos que existen equilibrios positivos si, y sólo si, se verifican:

$$a_i > D \text{ y } I > \min\{\lambda_1, \lambda_2\} \tag{2.15}$$

y sabemos que:

$$x(t) + y_1(t) + y_2(t) = V = (V(0) - I)e^{-Dt} + I,$$

con lo que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y_1(t) + y_2(t)] = I.$$

Como ya tenemos demostrado que  $\dot{V} = D(I - V)$ , debemos considerar dos zonas de estudio en este caso.

En la zona superior de  $x + y_1 + y_2 = I$ , se verifica que  $V = x + y_1 + y_2 > I$ , con lo que  $\dot{V} < 0$ . Por lo tanto,  $\dot{V} \leq 0$ . Gracias a que además no se verifica (2.15), no existirán equilibrios positivos, por lo que, como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y_1(t) + y_2(t)] = I,$$

obligatoriamente las soluciones que comienzan con un dato inicial en la zona superior de  $x + y_1 + y_2 = I$  convergen a nuestro equilibrio axial  $(I, 0, 0)$ .

Por otra parte, en la zona inferior de  $x + y_1 + y_2 = I$ , partimos de datos iniciales  $(x_0, y_{10}, y_{20})$  verificando:

$$x_0 + y_{10} + y_{20} < I,$$

de donde deducimos que  $x_0 < I$ . Sabemos además que:

$$I \leq \frac{m_i D}{a_i - D}, \quad i = 1, 2,$$

con lo que se tiene:

$$x_0 < I \leq \frac{m_i D}{a_i - D} \quad i = 1, 2.$$

Ahora, para  $i = 1, 2$ , se tiene:

$$y'_i(0) = a_1 \frac{x_0 y_{0i}}{m_i + x_0} - D y_{0i} = y_{0i} \left[ \frac{a_i x_0}{m_i + x_0} - D \right].$$

Por otro lado, para  $i = 1, 2$ , tenemos:

$$\frac{a_i x_0}{m_i + x_0} - D < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i x_0 < D(m_i + x_0),$$

o lo que es lo mismo:

$$a_i x_0 < D m_i + D x_0 \quad \Leftrightarrow \quad (a_i - D) x_0 < D m_i \quad \Leftrightarrow \quad x_0 < \frac{D m_i}{a_i - D}$$

y esto se verifica.

Así, llegamos a  $y'_i(0) < 0$ ,  $i = 1, 2$ , con lo que  $y_i$ ,  $i = 1, 2$ , comienza decreciendo. Luego la suma  $y_1 + y_2$  también decrece.

En **conclusión**, si el dato inicial se encuentra en la zona inferior, la solución converge al equilibrio axial  $(I, 0, 0)$ , pues en caso de crecer y atravesar la zona superior, nos reduciríamos al caso previamente estudiado.

Conviene notar que este argumento está basado sólidamente en la única solución del sistema. En efecto, si comienzo con un dato inicial  $u_0$  en la zona inferior y la solución atraviesa la zona superior, la solución que comenzó en  $u_0$  se encuentra ahora, tras un tiempo  $t$ , en lo que puede tomarse como dato inicial para la zona superior  $\beta_0 = u(t = t_0; 0, u_0)$  y entonces la solución que obtenemos tomando este dato inicial debe ser la misma que la que teníamos tomando el dato inicial  $u_0$ .

Por tanto, el equilibrio axial  $(I, 0, 0)$  es un equilibrio asintóticamente estable y de esta forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t). \quad \checkmark$$

2º En este caso, para  $i = 1, 2$ , se tiene:

$$\begin{aligned} a_i \frac{x}{m_i + x} y_i - D y_i &= a_i \frac{x}{m_i + x} y_i - D \frac{m_i + x}{m_i + x} y_i = (a_i - D) \frac{x}{m_i + x} y_i - \frac{m_i D y_i}{m_i + x} \\ &= (a_i - D) \frac{x}{m_i + x} y_i - (a_i - D) \lambda_i \frac{y_i}{m_i + x} = (a_i - D) \frac{x}{m_i + x} y_i - m_i D \frac{y_i}{m_i + x} \\ &= (a_i - D) \left\{ \frac{x y_i}{m_i + x} - \lambda_i \frac{y_i}{m_i + x} \right\} = (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} y_i. \end{aligned}$$

Así, (2.14) queda:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= DI - Dx - \frac{a_1 x y_1}{m_1 + x} - \frac{a_2 x y_2}{m_2 + x} \\ \frac{dy_1}{dt} &= (a_1 - D) \frac{x - \lambda_1}{m_2 + x} y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= (a_2 - D) \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Consideramos la función  $V$ , dada por:

$$V(x, y_1, y_2) = x - \lambda_1 - \lambda_1 \log \frac{x}{\lambda_1} + c_1 \left( y_1 - y_1^* - y_1^* \log \frac{y_1}{y_1^*} \right) + c_2 y_2,$$

con  $c_i = \frac{a_i}{a_i - D}$ ,  $i = 1, 2$ , constantes positivas.

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{x - \lambda_1}{x} \left\{ DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 \right\} \\
&\quad + c_1 \left( 1 - \frac{y_1^*}{y_1} \right) (a_1 - D) \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 + c_2 y_2 (a_2 - D) \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} \\
&= \frac{x - \lambda_1}{x} \left\{ DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 \right\} \\
&\quad + c_1 \frac{y_1 - y_1^*}{y_1} (a_1 - D) \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 + c_2 y_2 (a_2 - D) \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} \\
&= \frac{x - \lambda_1}{x} (DI - Dx) - a_1 \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \\
&\quad + a_1 y_1 \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} - a_1 y_1^* \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} + a_2 \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \\
&= \frac{x - \lambda_1}{x} (DI - Dx) - a_1 y_1^* \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} + a_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \\
&= (x - \lambda_1) \left\{ \frac{D(I - x)}{x} - a_1 \frac{y_1^*}{m_1 + x} \right\} + a_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{m_2 + x} y_2.
\end{aligned}$$

Consideraremos ahora el equilibrio ( $x^* = \lambda_1, y_2^* = 0$ ). Por (2.16), entonces:

$$\frac{dx}{dt} = DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2,$$

evaluándolo en el equilibrio:

$$\frac{dx^*}{dt} = DI - Dx^* - a_1 \frac{x^*}{m_1 + x^*} y_1^* - a_2 \frac{x^*}{m_2 + x^*} 0.$$

Equivalentemente tenemos:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = DI - D\lambda_1 - a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_1^* \quad \Leftrightarrow \quad D(I - \lambda_1) = a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_1^*.$$

Llegando finalmente a la igualdad que nos interesa, despejando  $y_1^*$ :

$$y_1^* = D(I - \lambda_1) \frac{m_1 + \lambda_1}{a_1 \lambda_1}.$$

Con esto, el término:

$$\begin{aligned} \frac{D(I-x)}{x} - a_1 \frac{y_1^*}{m_1+x} &= \frac{D(I-x)\lambda_1(m_1+x) - Dx(I-\lambda_1)(m_1+\lambda_1)}{\lambda_1 x(m_1+x)} \\ &= \frac{D}{\lambda_1 x(m_1+x)} \left\{ \lambda_1 I m_1 + \lambda_1 I x - \lambda_1 x m_1 - \lambda_1 x^2 - x I m_1 \right. \\ &\quad \left. - x I \lambda_1 + \lambda_1 x m_1 + x \lambda_1^2 \right\} \\ &= -\frac{D(x-\lambda_1)}{\lambda_1 x(m_1+x)} (m_1 I + \lambda_1 x). \end{aligned}$$

Así,

$$\dot{V} = \frac{-D(x-\lambda_1)^2}{\lambda_1 x(m_1+x)} (m_1 I + \lambda_1 x) + a_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \leq 0,$$

pues  $\lambda_1 < \lambda_2$ . De esta forma,  $\dot{V}$  es semidefinida positiva. A continuación, vamos a demostrar que:

$$M := \{(x^* = \lambda_1, y_1^*, 0)\},$$

es el mayor conjunto invariante de:

$$E := \{(x^* = \lambda_1, y_1, 0), y_1 \geq 0\}.$$

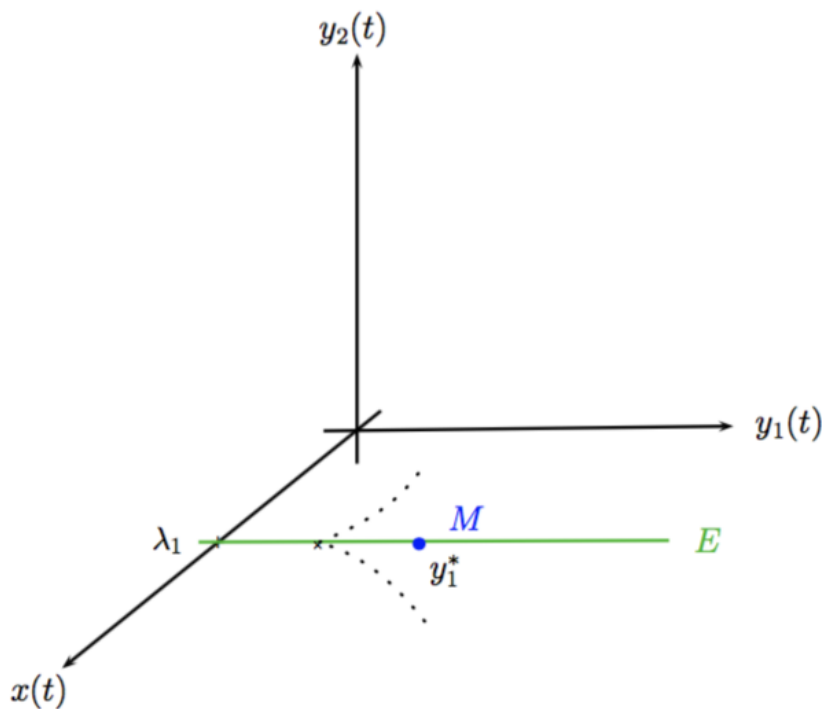


Figura 2.4: Conjuntos M y E.

Consideramos el conjunto  $E$  anterior y por otro lado:

$$x'|_E = DI - D\lambda_1 - a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_{10}.$$

Y por tanto:

$$x'|_E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad DI - D\lambda_1 - a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_{10} = 0,$$

equivalentemente:

$$D(I - \lambda_1) = a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{D(m_1 + \lambda_1)(I - \lambda_1)}{a_1 \lambda_1},$$

y esto sólo ocurre cuando  $y_{10} = y_1^*$ . Esto quiere decir que si empiezo con un dato inicial distinto de  $y_1^*$  me salgo del conjunto  $E$ , con lo que el conjunto  $M$  anteriormente definido sería el mayor subconjunto invariante.

En **conclusión**,  $(x^*, y_1^*, 0)$  es asintóticamente estable, gracias a una consecuencia del **Teorema de La Salle**.<sup>8</sup>

Notamos que la demostración de la segunda parte, es exactamente la misma pero intercambiando los papeles de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . √

3º Extendiendo la función usada en el **Teorema 2.2.6**, consideramos:

$$V = \frac{1}{2}(I - x - y_1 - y_2)^2 + \alpha \sum_{i=1}^2 \left( y_i^* - y_i - y_i^* \log \frac{y_i}{y_i^*} \right).$$

Además,

$$\begin{aligned} V(x^*, y_1^*, y_2^*) &= \frac{1}{2}(I - x^* - y_1^* - y_2^*)^2 + \alpha \sum_{i=1}^2 \left( y_i - y_i^* - y_i^* \log \frac{y_i}{y_i^*} \right) \\ &= \frac{1}{2}(I - x^* - y_1^* - y_2^*)^2 = \frac{1}{2}(y_1^* + y_2^* - y_1^* - y_2^*)^2 = 0. \end{aligned}$$

. Así, derivando  $V$  a lo largo de soluciones de (2.14) y procediendo como en el **Teorema**

---

<sup>8</sup>Para complementarlo ver teoría básica de EDOS.

**2.2.6**, tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= (I - x - y_1 - y_2) \left( -DI + Dx + a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 + a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 \right. \\
&\quad \left. + (D - a_1) \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 + (D - a_2) \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \right) \\
&\quad + \alpha \sum_{i=1}^2 \left( (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} y_i - y_i^* (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} \frac{y_i}{y_i} \right) \\
&= (I - x - y_1 - y_2) \left( -DI + Dx + a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 + a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 + D \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 \right. \\
&\quad \left. + D \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 + a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + x} y_1 + a_2 \frac{\lambda_2}{m_2 + x} y_2 - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 \right) \\
&\quad + \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*) (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} \right\} = (*).
\end{aligned}$$

Ahora bien, como sabemos que  $\lambda_i = \frac{m_i D}{a_i - D}$ ,  $i = 1, 2$ , entonces:

$$\begin{aligned}
&D \frac{x}{m_1 + x} y_1 + D \frac{x}{m_2 + x} y_2 - D \frac{\lambda_1}{m_1 + x} y_1 - D \frac{\lambda_2}{m_2 + x} y_2 + a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + x} y_1 + a_2 \frac{\lambda_2}{m_2 + x} y_2 \\
&= \sum_{i=1}^2 \left\{ D \frac{x}{m_i + x} y_i + (a_i - D) \frac{m_i D}{(m_i + x)(a_i - D)} y_i \right\} \\
&= \sum_{i=1}^2 \left\{ D \frac{x}{m_i + x} y_i + D \frac{m_i}{m_1 + x} y_i \right\} \\
&= D \sum_{i=1}^2 \left\{ y_i \left[ \frac{x + m_i}{x + m_i} \right] \right\} \\
&= D(y_1 + y_2),
\end{aligned}$$

entonces tenemos que:

$$\dot{V} = (I - x - y_1 - y_2)(-DI + Dx + D(y_1 + y_2)) + \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*) (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} \right\}.$$



Por lo tanto, nos centramos en la expresión:

$$\begin{aligned}
& \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(a_i - D) \frac{x}{m_i + x} - (y_i - y_i^*)(a_i - D) \frac{Dm_i}{m_i + x} \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*) \frac{a_i x - Dx - Dm_i}{m_i + x} \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*) \left[ \frac{a_i x}{m_i + x} - \frac{Dx}{m_i + x} - \frac{Dm_i}{m_i + x} \frac{a_i - D}{a_i - D} \right] \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*) \left[ \frac{a_i x}{m_i + x} - \frac{Dx}{m_i + x} - \frac{(a_i - D)x^*}{m_i + x} \right] \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(x - x^*) \frac{a_i - D}{m_i + x} \right\} = (*).
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
a_i - D &= \frac{a_i m_i}{m_i + x^*} \Leftrightarrow a_i - D = \frac{a_i m_i}{m_i + \frac{m_i D}{a_i - D}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow a_i - D &= \frac{a_i m_i}{\frac{m_i(a_i - D) + m_i D}{a_i - D}} \Leftrightarrow a_i - D = \frac{a_i m_i}{\frac{m_i a_i - \cancel{D m_i} + \cancel{D m_i}}{a_i - D}} \Leftrightarrow \\
&\frac{a_i m_i}{a_i - D} \\
\Leftrightarrow a_i - D &= \frac{a_i m_i}{a_i - D} \Leftrightarrow a_i - D = a_i - D,
\end{aligned}$$

llegando a que  $a_i - D = \frac{a_i m_i}{m_i + x^*}$ . Enlazando esto con la cadena de igualdades (\*):

$$(*) = \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(x - x^*) \frac{a_i m_i}{(m_i + x)(m_i + x^*)} \right\}.$$

Por lo tanto, (\*) hará que  $\dot{V}$  sea:

$$\dot{V} = (*) = -D(I - x - y_1 - y_2)^2 + \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(x - x^*) \frac{a_i m_i}{(m_i + x)(m_i + x^*)} \right\}.$$

Sin embargo, sabemos que  $x^* = \frac{m_i D}{a_i - D}$  y  $a_i - D = \frac{a_i m_i}{m_i + x^*}$ . De esta forma:

$$\begin{aligned} x^* \frac{\frac{m_i D}{a_i m_i}}{m_i + x^*} &\Leftrightarrow x^* = \frac{(m_i + x^*) m_i D}{a_i m_i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{m_i + x^*}{a_i} = \frac{x^*}{D} \Leftrightarrow \frac{a_i}{m_i + x^*} = \frac{D}{x^*}; \end{aligned}$$

entonces  $\frac{a_1}{m_1 + x} = \frac{D}{x^*} = \frac{a_2}{m_2 + x^*}$ . Así:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -D(I - x - y_1 - y_2)^2 + \alpha \sum_{i=1}^2 \frac{m_i D}{m_i + x x^*} (x - x^*)(y_i - y_i^*) \\ &= -D(I - x - y_1 - y_2)^2 + \frac{\alpha D}{x^*} \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{m_i + x} (x - x^*)(y_i - y_i^*) \\ &= -D(-I + x + y_1 + y_2)^2 + \frac{\alpha D}{x^*} \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{m_i + x} (x - x^*)(y_i - y_i^*) \\ &= -D(-x^* - y_1^* - y_2^* + x + y_1 + y_2)^2 + \frac{\alpha D}{x^*} \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{m_i + x} (x - x^*)(y_i - y_i^*) \\ &= -D[(x - x^*) + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)]^2 + \frac{\alpha D}{x^*} \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{m_i + x} (x - x^*)(y_i - y_i^*). \end{aligned}$$

Como  $\frac{m_i}{m_i + x}$  es monótona creciente como función de  $m_i$ , y además sabemos que es decreciente como función de  $x$ , siendo:

$$0 \leq \frac{m_i}{m_i + x} \leq 1, \quad \forall m_i \geq 0, x \geq 0,$$

obteniendo:

$$\begin{aligned} -D[(x - x^*) + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)]^2 &\leq \dot{V} \leq -D[(x - x^*) + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)]^2 + \\ &+ \frac{\alpha D}{x^*} (x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*). \end{aligned}$$

✓

Nos preguntamos ahora si la expresión:

$$-D[(x - x^*) + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)]^2 + \frac{\alpha D}{x^*} (x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)$$

es definida negativa, por lo que tendríamos que  $\dot{V} < 0$ . Ahora bien:

$$\begin{aligned} -D[(x - x^*) + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)]^2 &+ \frac{\alpha D}{x^*} (x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*) \\ &= -D \left[ (x - x^*)^2 + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)^2 + \left(2 - \frac{\alpha}{x^*}\right) (x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*) \right]. \end{aligned}$$

Falta que veamos que  $(\Delta)$  es definido positivo, con:

$$(\Delta) = \left[ (x - x^*)^2 + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)^2 + \left( 2 - \frac{\alpha}{x^*} \right) (x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*) \right].$$

Pero con el **Teorema 2.2.6**, ya sabemos que si  $\alpha \in \left[ 0, \frac{4m_1D}{a_1 - D} \right)$  entonces  $(\Delta)$  es definido positivo como queríamos. Con lo cual concluimos nuestra demostración. ■

Veamos que sucede con la **existencia de atractor global**. Estamos considerando el problema (2.14):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = DI - Dx - \frac{a_1x}{m_1 + x}y_1 - \frac{a_2x}{m_2 + x}y_2 \\ \frac{dy_1}{dt} = \frac{a_1x}{m_1 + x}y_1 - Dy_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{a_2x}{m_2 + x}y_2 - Dy_2, \end{cases}$$

como hicimos también el caso de un microorganismo, denotamos ahora por:  $u_0 = (x_0, y_1(t), y_2(t))$  al dato inicial del sistema, y por  $u(t) = (x(t), y_1(t), y_2(t))$  a la solución del sistema (2.14). Al **sistema dinámico o semigrupo de operadores** lo denotamos también por  $\mathbf{S}(t)$ , está definido por:

$$S(t)u_0 = S(t)(x_0, y_{10}, y_{20}) = (x(t), y_1(t), y_2(t)) \equiv u(t; u_0).$$

Volvemos a considerar como conjunto acotado a  $B \subset \mathbf{R}^3$ , entonces  $\exists M > 0 : B \subset B(0; M)$ , donde  $B(0; M)$  denota la bola unidad cuyo centro es el origen y tiene de radio  $M$  en  $\mathbf{R}^3$ . Con esto, para cualquier dato inicial  $u_0 = (x_0, y_{10}, y_{20}) \in B$  se tiene  $|u_0|^2 \leq M^2$ .

Definimos  $w(t) := x(t) + y_1(t) + y_2(t)$  y por tanto su derivada como:  $w'(t) := x'(t) + y_1'(t) + y_2'(t)$ . Sustituimos en el sistema (2.14) con la condición inicial  $w(0) := x(0) + y_1(0) + y_2(0) = x_0 + y_{10} + y_{20}$ .

Entonces, resolviendo el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = Dw + DI \\ w(0) = w_0 = x_0 + y_{10} + y_{20}, \end{cases}$$

tal y como vimos en el caso de un microorganismo, la solución del problema de Cauchy es:

$$w(t) = Ce^{-Dt} + I \quad C = x_0 + y_{10} + y_{20} - I.$$

Como sabemos que  $x(t), y_1(t), y_2(t) \geq 0$  tendremos que:

$$\begin{aligned}
 |S(t)u_0|^2 &= x^2(t) + y_1^2(t) + y_2^2(t) \\
 &\leq |x(t) + y_1(t) + y_2(t)|^2 \\
 &= |w(t)|^2 \\
 &\leq (Ce^{-Dt} + I)^2 \\
 &= [(x_0 + y_{10} + y_{20})e^{-Dt} + I - Ie^{-Dt}]^2 \\
 &\stackrel{\text{Des.Young}}{\leq} 2(x_0 + y_{10} + y_{20})^2 e^{-2Dt} + 2I^2 \underbrace{(1 - e^{-Dt})^2}_{\leq 1}
 \end{aligned}$$

por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned}
 (x_0 + y_{10} + y_{20})^2 &= x_0^2 + y_{10}^2 + y_{20}^2 + 2y_{10}y_{20} + 2x_0y_{10} + 2x_0y_{20} \\
 &\stackrel{2ab \leq a^2 + b^2}{\leq} x_0^2 + y_{10}^2 + y_{20}^2 + y_{10}^2 + y_{20}^2 + x_0^2 + y_{10}^2 + x_0^2 + y_{20}^2 \\
 &= 3(x_0^2 + y_{10}^2 + y_{20}^2) \\
 &= 3|(x_0, y_{10}, y_{20})|^2.
 \end{aligned}$$

Por tanto, podemos continuar con la desigualdad:

$$\begin{aligned}
 |S(t)u_0|^2 &\leq 6|(x_0, y_{10}, y_{20})|^2 e^{-2Dt} + 2I^2 \\
 &\leq 6M^2 e^{-2Dt} + 2I^2.
 \end{aligned}$$

Denotando  $\rho := 1 + 2I^2$ , y como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 6M^2 e^{-2Dt} = 0,$$

entonces  $\exists T_B \geq 0$  tal que  $\forall t \geq T_B$ , se tiene:

$$6M^2 e^{-2Dt} \leq 1.$$

En efecto:

$$6M^2 e^{-2Dt} \leq 1 \Leftrightarrow 6M^2 \leq e^{2Dt} \Leftrightarrow \log(6M^2) \leq 2Dt \Leftrightarrow \frac{1}{2D} \log(6M^2) \leq t.$$

Luego definimos como:

$$T_B := \frac{1}{2D} \log 6M^2.$$

Si recopilamos todo lo que tenemos, **concluimos** que hemos demostrado que existe un compacto  $\bar{B}(0, \rho)$ , de tal forma que existe  $T_B \geq 0$  tal que para todo  $t \geq T_B$ , se tiene  $|S(t)u_0| \leq \rho$ ; por lo tanto existe un compacto absorbente, por lo que **existe un atractor global** que volveremos a denotar por **A**.

### 2.3. Modelo con crecimiento en pared

Hemos estudiado modelos que sólo tenían en cuenta el crecimiento de un microorganismo o de dos pero sólo teniendo en cuenta el medio de cultivo o medio de crecimiento. Es frecuente que los microorganismos no sólo crezcan en el medio de crecimiento, sino que también en las paredes del recipiente en el que se encuentran. Esto se debe a la habilidad de los microorganismos para adherirse a las paredes del medio en el que se encuentran, o bien, a que el ratio de flujo no es suficientemente rápido para limpiar y eliminar estos microorganismos del sistema.

Podemos considerar la **población consumidora**  $y(t)$ , es un conjunto de dos categorías de poblaciones, una en el medio de crecimiento,  $y_1(t)$ , y la otra sobre las paredes de dicho recipiente,  $y_2(t)$ . Estos individuos pueden modificar su categoría en cualquier momento. Siendo  $r_1$  y  $r_2$  los ratios con los que las especies se adhieren o se despegan de las paredes, entonces  $r_1 y_1(t)$  y  $r_2 y_2(t)$  representan los términos de especies que cambian su categoría.

Asumimos entonces que los nutrientes están distribuidos de manera equitativa para ambas categorías y también asumimos que ambas categorías consumen la misma cantidad de nutriente y con el mismo ratio. Cuando el ratio de flujo es bajo, los organismos pueden llegar a morir de forma natural antes de que el sistema los elimine, con lo que la limpieza del sistema deja de ser un principal factor de mortalidad.

Denotamos como  $\nu > 0$  al **coeficiente de mortalidad colectiva** de  $y(t)$ .<sup>9</sup>

Por otro lado, cuando el ratio de flujo sigue siendo bajo, la biomasa muerta no se elimina del sistema, y ésta a su vez está sujeta a una descomposición bacteriana, la cual produce una regeneración del nutriente de manera inmediata. Luego, no se espera que el 100% de la biomasa sea reciclada sino sólo una pequeña parte de ella, denotada por  $b \in (0, 1)$ .

Cuando  $I$  y  $D$  son ambas constantes y no tenemos retardos en el sistema, el modelo se presenta como se describe en la dinámica de quimiostatos con crecimiento en pared. Y

<sup>9</sup>Representa factores como puede ser: enfermedades, edades.

nos damos cuenta de que sólo  $y_1(t)$  contribuye a ese material reciclado de la biomasa que está muerta en el medio. Además, como los microorganismos que se encuentran adheridos a las paredes no se limpian del sistema, el término  $-Dy_2(t)$  no se incluye en la ecuación, el cual representa el crecimiento de  $y_2(t)$ .

Todos los parámetros que aparecen son los mismos que en el sistema (2.5)<sup>10</sup> a diferencia de que  $0 < c \leq a$  reemplaza a  $a$  como el ratio de crecimiento de las especies consumidoras. Entonces obtendremos el siguiente problema, siendo muy parecido al modelo de dos microorganismos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = DI - Dx - a\frac{x}{m+x}y_1 - a\frac{x}{m+x}y_2 + b\nu y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = -(\nu + D)y_1 + c\frac{x}{m+x}y_1 - r_1y_1 + r_2y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -\nu y_2 + c\frac{x}{m+x}y_2 + r_1y_1 - r_2y_2. \end{cases} \quad (2.17)$$

### 2.3.1. Puntos estacionarios o de equilibrio

En este caso los equilibrios del sistema (2.17) vuelven a salir de hacer cero dicho sistema, dando claramente una solución trivial  $(I, 0, 0)$ . Sin embargo, si intentamos hacer el mismo procedimiento que hemos seguido hasta ahora para sacar los puntos estacionarios positivos no es posible encontrar dichos equilibrios.

Veamos el porqué.

Supongamos, sin pérdida de generalidad,  $y_2 = 0$ , entonces la tercera ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} DI - Dx - a\frac{x}{m+x}y_1 - a\frac{x}{m+x}y_2 + b\nu y_1 &= 0 \\ -(\nu + D)y_1 + c\frac{x}{m+x}y_1 - r_1y_1 + r_2y_2 &= 0, \\ -\nu y_2 + c\frac{x}{m+x}y_2 + r_1y_1 - r_2y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

tenemos que  $r_1y_1 = 0$ , siendo  $r_1 > 0$ , con lo que deducimos que  $y_1 = 0$  y por lo tanto  $x = I$ , y obtendríamos el equilibrio  $(I, 0, 0)$ .

Por el contrario, si suponemos que  $y_1 = 0$ , de la segunda ecuación del sistema (2.18) tenemos  $r_2y_2 = 0$ , siendo  $r_2 > 0$ , con lo que deducimos que  $y_2 = 0$  y entonces  $x = I$ , luego volvemos a obtener el mismo equilibrio  $(I, 0, 0)$ . Por lo tanto,  $(I, 0, 0)$  es un equilibrio, trivial.

<sup>10</sup>Dicho sistema es el inicial, el sistema del modelo con un microorganismo sin crecimiento en pared del capítulo 2.2.

Ahora debemos buscar los equilibrios positivos. Pero antes de continuar, para facilitar el proceso vamos a hacer un cambio de variables:

$$\alpha(t) = \frac{y_1(t)}{y_1(t) + y_2(t)}, \quad z(t) = y_1(t) + y_2(t).$$

Quedándonos el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a \frac{x}{m+x} z + b\nu\alpha z \\ \frac{dz}{dt} &= -\nu z - D\alpha z + c \frac{x}{m+x} z \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -D\alpha(1-\alpha) - r_2\alpha + r_2(1-\alpha). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Donde la primera ecuación se obtiene trivialmente al hacer el cambio, pero la segunda proviene de:

$$\begin{aligned} z' &= y_1' + y_2' \\ &= -\nu y_1 - Dy_1 + c \frac{x}{m+x} y_1 \overbrace{-r_1 y_1 + r_2 y_2 + r_1 y_1 - r_2 y_2}^0 - \nu y_2 + c \frac{x}{m+x} y_2 \\ &= -\nu(y_1 + y_2) - Dy_1 + c \frac{x}{m+x} (y_1 + y_2) \\ &= -\nu z - Dy_1 + c \frac{x}{m+x} z. \end{aligned}$$

Como por definición de  $\alpha$  tenemos que  $y_1 = \alpha(y_1 + y_2) = \alpha z$  deducimos que:

$$z' = \nu z + c \frac{x}{m+x} z - D\alpha z.$$

Finalizamos viendo de dónde proviene la tercera ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{y_1'(y_1 + y_2) - y_1(y_1' + y_2')}{(y_1 + y_2)^2} \\ &= \frac{y_1' y_2 + \overbrace{y_1' y_1 - y_1 y_1' - y_1 y_2'}^0}{(y_1 + y_2)^2} \\ &= \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{(y_1 + y_2)^2}. \end{aligned}$$

Además como:

$$\begin{aligned} y_1' y_2 &= -(\nu + D)y_1 y_2 + c \frac{x}{m+x} y_1 y_2 - r_1 y_1 y_2 + r_2 y_2^2, \\ -y_1 y_2' &= \nu y_1 y_2 - c \frac{x}{m+x} y_1 y_2 - r_1 y_1^2 + r_2 y_1 y_2. \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$y_1' y_2 - y_1 y_2' = (y_1 + y_2)^2 \alpha' = -D y_1 y_2 - r_1 (y_1 y_2 + y_1^2) + r_2 (y_2^2 + y_2 y_1).$$

Concluyendo con:

$$\alpha' = -D \frac{y_1 y_2}{(y_1 + y_2)^2} - r_1 \frac{y_1 y_2 + y_1^2}{(y_1 + y_2)^2} + r_2 \frac{y_2^2 + y_2 y_1}{(y_1 + y_2)^2}.$$

Pero nos damos cuenta que cada sumando puede expresarse de manera más sencilla porque:

$$\begin{aligned} \alpha(1 - \alpha) &= \frac{y_1}{y_1 + y_2} \left( 1 - \frac{y_1}{y_1 + y_2} \right) = \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} \\ \frac{y_1 y_2 + y_1^2}{(y_1 + y_2)^2} &= \frac{y_1 (y_1 + y_2)}{(y_1 + y_2)^2} = \frac{y_1}{y_1 + y_2} = \alpha \\ \frac{y_2^2 + y_2 y_1}{(y_1 + y_2)^2} &= \frac{y_2 (y_1 + y_2)}{(y_1 + y_2)^2} = \frac{y_2}{y_1 + y_2} = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Por fin llegamos a la ecuación diferencial para  $\alpha$ :

$$\alpha' = -D\alpha(1 - \alpha) - r_1\alpha + r_2(1 - \alpha),$$

quedando así justificadas todas las ecuaciones que forman el sistema (2.19).

Para todas las soluciones positivas  $y_1, y_2$  de (2.19) se tiene que  $0 < \alpha(t) < 1$ , por definición de  $\alpha$ . Es más, si tomamos el intervalo  $(0, 1)$  vemos que es una región positivamente invariante para cualquier  $\alpha(t)$  porque:

$$\alpha'|_{\alpha=0} = r_2 > 0$$

$$\alpha'|_{\alpha=1} = -r_1 < 0.$$

En cambio, la ecuación que verifica  $\alpha$  es independiente de  $x$  y de  $z$  y sus puntos de equilibrio son las soluciones de la ecuación de segundo grado siguiente:

$$-D\alpha(1 - \alpha) - r_1\alpha + r_2(1 - \alpha) = 0.$$

Resolvemos:

$$\alpha_{\pm}^* = \frac{D + r_1 + r_2 \pm \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D},$$

Podemos obtener dos soluciones, la positiva  $\alpha_+^*$  que no pertenece al intervalo en cuestión y la negativa  $\alpha_-^*$  que pertenece al  $(0, 1)$ . Además su valor es mayor que el de la solución



positiva. Porque:

$$\begin{aligned}
(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2 &= D^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 + 2Dr_1 + 2Dr_2 - 4Dr_2 = \\
&= D^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 + 2Dr_1 - 2Dr_2 > D^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 - 2Dr_1 - 2Dr_2 = \\
&= (D - (r_1 + r_2))^2 = (D - r_1 - r_2)^2.
\end{aligned}$$

Con lo que podremos comprobar lo dicho anteriormente. Pues:

$$\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} > \sqrt{(D - r_1 - r_2)^2} = \sqrt{(r_1 + r_2 - D)^2} = r_1 + r_2 - D.$$

Haciendo un cambio de signo obtenemos:

$$-\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} < -(r_1 + r_2 - D),$$

equivalentemente:

$$D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} < D + r_1 + r_2 - (r_1 + r_2 - D) = 2D.$$

En consecuencia, obtenemos  $\alpha_-^*$  como:

$$\alpha_-^* = \frac{D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D} < \frac{2D}{2D} = 1.$$

Comprobemos ahora que la solución negativa efectivamente es mayor que la solución positiva:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} &< \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2} = D + r_1 + r_2 \Rightarrow \\
-\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} &> -(D + r_1 + r_2),
\end{aligned}$$

llegando a:

$$D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} > D + r_1 + r_2 - (D + r_1 + r_2) = 0.$$

Luego:

$$\alpha_-^* > \frac{0}{2D} = 0.$$

Deducimos seguidamente que  $\alpha_+^* > 1$ , pues:

$$\frac{D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} > D - r_1 - r_2,$$

sabemos que equivalente a esta expresión también es cierta:

$$(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2 > (D - r_1 - r_2)^2.$$

A continuación veamos que  $\alpha(t) \rightarrow \alpha_-^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y así  $\alpha_-^*$  será asintóticamente estable. Para empezar vemos que  $\alpha(t)$  verifica la ecuación diferencial ordinaria de  $\alpha'(t)$ :

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= -D\alpha(1-\alpha) - r_1\alpha + r_2(1-\alpha) \\ &= -D\alpha + D\alpha^2 - r_1\alpha + r_2 - r_2\alpha \\ &= D\alpha^2 - (D + r_1 + r_2)\alpha + r_2.\end{aligned}$$

Como  $\alpha_-^*$  es solución, utilizando el cambio  $\alpha(t) = \alpha_-^* + \frac{1}{z(t)}$ , se obtiene una ecuación de  $z'(t)$  cuya solución es:

$$z = e^{(D+r_1+r_2-2D\alpha_-^*)t}C + \frac{D}{D+r_1+r_2-2D\alpha_-^*}.$$

Deshaciendo el cambio y tomando como  $\alpha(t) = \alpha_-^*$  deducimos que:

$$\frac{\gamma}{\gamma C e^{\gamma t^*}} + D = 0, \text{ donde } \gamma = D + r_1 + r_2 - 2D\alpha_-^*,$$

como  $\gamma \neq 0$  y  $t^* = +\infty$ , donde  $t^*$  denota el instante de tiempo para el que se alcanza  $\alpha_-^*$ .

Entonces sustituyendo en el sistema  $\alpha$  por  $\alpha_-^*$  (2.19) tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= DI - Dx - \frac{ax}{m+x}z + b\nu\alpha_-^*z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\nu z - D\alpha_-^*z + \frac{cx}{m+x}z.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Los equilibrios de este sistema se resuelven haciendo cero este sistema. De una manera similar al procedimiento seguido en los casos anteriores. Teniendo como equilibrio en este caso a:

$$z^* = \frac{DI - Dx^*}{a\frac{x^*}{m+x^*} - \nu b\alpha_-^*},\tag{2.21}$$

y teniendo estas condiciones para que los equilibrios sean positivos:

$$\nu + D\alpha_-^* < c, \quad (I - x^*) \left( a\frac{x^*}{m+x^*} - \nu b\alpha_-^* \right) > 0.$$

### 2.3.2. Análisis de estabilidad

Toda la información necesaria para analizar la estabilidad de nuestro modelo está registrada en el siguiente teorema, pero antes realicemos un cambio de notación.

**Notación 2.3**

Vamos a tomar  $\alpha_* = \alpha^*$  como única solución del modelo que estamos tratando.

**Teorema 2.3.1** *Se verifican los siguientes resultados:*

(I) *Si  $\nu + D\alpha^* > 0$ , entonces el equilibrio axial  $(I, 0)$  del sistema (2.20) es globalmente asintóticamente estable, es decir, cualquier solución de (2.20) satisface:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) + y_2(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

(II) *Si  $\nu + D\alpha^* < 0$ ,  $D - c + az^* > 0$  y  $x^* < I$ , entonces el equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$  del sistema (2.20) es globalmente asintóticamente estable, es decir, cualquier solución de (2.20) satisface:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) + y_2(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z^*.$$

**Demostración**

(I) Consideramos la segunda ecuación del sistema (2.20) y sabemos que como  $\frac{x}{m+x} \leq 1$  entonces  $-c \frac{x}{m+x} \geq -c$ , trivialmente. De esta forma, se tiene:

$$\nu + D\alpha^* - c \frac{x}{m+x} \geq \nu - D\alpha^* - c.$$

Se tiene que  $\nu + D\alpha^* - c > 0$  con lo que la expresión anterior es mayor estricto que 0.

Obteniendo por tanto que:

$$\frac{dz}{dt} = - \left( \nu + D\alpha^* - c \frac{x}{m+x} \right) < 0$$

Esto nos dice que  $z(t)$  es decreciente y en consecuencia que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) + y_2(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Por otro lado, usando la primera ecuación del sistema (2.20), dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists T > 0 : \forall t \geq T$  se verifica que:

$$\left| \left( -a \frac{x(t)}{m+x(t)} + b\nu\alpha^* \right) z(t) \right| \leq \varepsilon.$$

Seguidamente, usando esa nueva condición llegamos a que  $x(t) \leq x(t)e^{-Dt} + \left( I + \frac{\varepsilon}{D} \right)$  y a  $x(t) \leq x(t)e^{-Dt} + \left( I - \frac{\varepsilon}{D} \right)$ . Por tanto, como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in \left[ I - \frac{\varepsilon}{D}, I + \frac{\varepsilon}{D} \right],$$

y como  $\varepsilon > 0$  arbitrario obtenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I. \quad \checkmark$$

(II) En este caso, hay que reescribir el sistema (2.20) para obtener los puntos de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Dz + Dx^* - a \frac{x}{m+x} (z - z^*) - az^* \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right) + b\nu\alpha^* (z - z^*) \\ \frac{dz}{dt} &= cz \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

De la primera ecuación del sistema, del cual hemos sacado los puntos de equilibrio, obtenemos:

$$DI = Dx^* + a \frac{x^*}{m+x^*} z^* - b\nu\alpha^* z^*.$$

Sustituyéndola en la primera ecuación del sistema (2.22), sumando y restando  $\frac{axz^*}{m+x}$ , obtenemos:

$$\frac{dx}{dt} = -Dx + Dx^* - a \frac{x}{m+x} (z - z^*) - az^* \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right) + b\nu\alpha^* (z - z^*).$$

Por otro lado,  $-\nu - D\alpha^* + c \frac{x^*}{m+x^*} = 0$  sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos:

$$\frac{dz}{dt} = cz \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right)$$

quedando justificada la escritura del sistema (2.22).

Ahora veamos la estabilidad del equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$ . Consideramos una función  $V = x - x^* + \log z - \log z^*$ . Derivando  $V$  se tiene:

$$\dot{V} < -D(x - x^*) + (c - az^*) \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right) - \left( a \frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^* \right) (z - z^*).$$

Esta desigualdad se obtiene gracias a que la función de consumo es monótona creciente.

Además, si  $c - az^* \leq 0$  obtenemos que:

$$\dot{V} < -D(x - x^*) - \left( a \frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^* \right) (z - z^*) < 0.$$

Gracias a la hipótesis de que  $x^* < I$  deducimos que  $V \leq 0$  porque  $a \frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^* > 0$ .

Además, en el caso contrario, si  $c - az^* > 0$ , volvemos a obtener que es  $V \leq 0$ . En **conclusión**, el equilibrio  $(x^*, z^*)$  es globalmente asintóticamente estable.  $\blacksquare$

**Teorema 2.3.2** *Supongamos que  $\nu + D\alpha^* < c$  y  $x^* < I$ . Entonces el equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$  es globalmente asintóticamente estable.*

### Demostración

Partimos del sistema en cuestión:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -Dx + Dx^* - a\frac{x}{m+x}(z - z^*) - az^* \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right) + b\nu\alpha^*(z - z^*) \\ \frac{dz}{dt} &= cz \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right)\end{aligned}\tag{2.23}$$

la justificación de este ya la tenemos en la prueba del **Teorema 2.3.1**. A continuación, hagamos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &:= x(t) - x^* \\ \tilde{z}(t) &:= \log \frac{z(t)}{z^*} \\ \tilde{U}(\cdot) &:= U(\cdot + x^*) - U(x^*).\end{aligned}\tag{2.24}$$

De esta forma nuestro sistema (2.23) queda:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= -D\tilde{x}(t) - a \left( \tilde{U}(\tilde{x}) + U(x^*) \right) z^*(e^{\tilde{z}} - 1) - az^*\tilde{U}(\tilde{x}) + b\nu\alpha^*z^*(e^{\tilde{z}} - 1) \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} &= z^*e^{\tilde{z}}\tilde{U}(\tilde{x}).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Comenzamos definiendo un funcional, que será de Lyapunov:

$$V_1(\tilde{x}) := \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds.$$

Si tenemos que  $x > x^*$  entonces  $\tilde{x} > 0$  y de esta manera, como  $s \in (0, \tilde{x}(t))$  entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $s + x^* > x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $X$ , por lo que:

$$\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) > 0.$$

En conclusión,

$$V_1(\tilde{x}) := \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds > 0$$

siempre y cuando  $x(t) \neq x^*$ .

Análogamente, si  $x < x^*$  entonces  $\tilde{x} < 0$  y por lo tanto, como  $s \in (\tilde{x}(t), 0)$  entonces tenemos que  $s < 0$ . Entonces  $s + x^* < x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$ , con lo que  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) < 0$ .

En conclusión:

$$V_1(\tilde{x}) := \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds = - \int_{\tilde{x}(t)}^0 \tilde{U}(s) ds$$

siempre y cuando  $x(t) \neq x^*$ .

Resumiendo tenemos que  $V_1(x^*) > 0 \forall x \neq x^*$ .

Derivando  $V_1(\tilde{x})$ :

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= -D\tilde{x}\tilde{U}(\tilde{x}) - az^*e^{\tilde{z}}\tilde{U}(\tilde{x})^2 - az^*U(x^*)\tilde{U}(\tilde{x})(e^{\tilde{z}} - 1) + b\nu\alpha^*z^*(e^{\tilde{z}} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}) \\ &= -D\tilde{x}\tilde{U}(\tilde{x}) - az^*e^{\tilde{z}}\tilde{U}(\tilde{x})^2 - (aU(x^*) - b\nu\alpha^*)\tilde{U}(\tilde{x})(e^{\tilde{z}} - 1)z^* \end{aligned}$$

El siguiente paso una vez definido el funcional, es definir  $V_2$ :

$$V_2(\tilde{z}) := \int_0^{\tilde{z}(t)} (e^s - 1) ds.$$

Ahora bien, si  $z > z^*$ , entonces  $\tilde{z} > 0$ ; de esta forma, como  $s \in (0, \tilde{z}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $e^s - 1 > 0$ , por lo que  $V_2(\tilde{z}) > 0$ , siempre y cuando  $z \neq z^*$ .

Análogamente, si  $z < z^*$ , entonces  $\tilde{z} < 0$ ; por lo tanto, como  $s \in (\tilde{z}, 0)$ , entonces  $s < 0$ . Entonces  $e^s - 1 < 0$ , con lo que:  $V_2(\tilde{z}) > 0$ , siempre y cuando  $z \neq z^*$ .

Resumiendo ahora, tenemos que  $V_2(\tilde{z}) > 0 \forall z \neq z^*$ .

Al igual que hicimos antes, derivamos  $V_2$  a lo largo de las soluciones del sistema (2.25):

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(t)}{dt} &= (e^{\tilde{z}} - 1) \frac{d\tilde{z}(t)}{dt} \\ &= cz^*e^{\tilde{z}}\tilde{U}(e^{\tilde{z}} - 1) \end{aligned}$$

Pues ahora, con todo esto ya podemos considerar el funcional  $v$  como:

$$v(x, z) := V_1(\tilde{x}) + \eta V_2(\tilde{z}),$$

donde:

$$\eta := \frac{aU(x^*) - b\nu\alpha^*}{c}.$$

Está claro que  $v(x, z) > 0 \forall (x, z) \neq (x^*, z^*)$ .

#### Observación 2.4

Notemos que si  $(x, z) = (x^*, z^*)$  nos encontramos en el equilibrio y por definición de punto estacionario, no nos moveremos de él.

De esta manera, derivando  $v$  respecto al tiempo a lo largo de las soluciones del sistema (2.25) llegamos a que:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -D\tilde{x}\tilde{U}(\tilde{x}) - az^*e^{\tilde{z}}\tilde{U}(\tilde{x})^2 - (aU(x^*) - b\nu\alpha^*)\tilde{U}(\tilde{x})(e^{\tilde{z}} - 1)z^* \\ &\quad + \frac{aU(x^*) - b\nu\alpha^*}{c}cz^*e^{\tilde{z}}\tilde{U}(\tilde{x})(e^{\tilde{z}} - 1) \\ &= -D\tilde{x}\tilde{U}(\tilde{x}) - az^*e^{\tilde{z}}\tilde{U}(\tilde{x})^2 < 0 \end{aligned}$$

Como ya tenemos todas las hipótesis necesarias para aplicar el **Teorema de Lyapunov**, aplicándolo tenemos inmediatamente la estabilidad del equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$  que queríamos. ■

### 2.3.3. Existencia de atractor global

Consideramos el sistema (2.17):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a\frac{x}{m+x}y_1 - a\frac{x}{m+x}y_2 + b\nu y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= -(\nu + D)y_1 + c\frac{x}{m+x}y_1 - r_1y_1 + r_2y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\nu y_2 + c\frac{x}{m+x}y_2 + r_1y_1 - r_2y_2. \end{aligned}$$

Como llevamos haciendo en todo el capítulo, denotamos ahora por:  $u_0 = (x_0, y_{10}, y_{20})$  al dato inicial del sistema y por  $u(t; u_0) = (x(t; x_0), y_1(t; y_{10}), y_2(t; y_{20}))$  a una solución del sistema (2.17). Al **sistema dinámico o semigrupo de operadores** seguimos denotándolo por  $\mathbf{S}(t)$ , está definido por:

$$S(t)u_0 = S(t)(x_0, y_{10}, y_{20}) = (x(t), y_1(t), y_2(t)) \equiv u(t; u_0).$$

Pues bien, considero como conjunto acotado a  $B \subset \mathbf{R}^3$ , entonces  $\exists M > 0 : B \subset B(0; M)$ , donde  $B(0; M)$  denota la bola unidad cuyo centro es el origen y tiene de radio  $M$  en  $\mathbf{R}^3$ . Con esto, para cualquier dato inicial  $u_0 = (x_0, y_{10}, y_{20}) \in B$  se tiene  $|u_0|^2 \leq M^2$ .

Definimos  $w(t) := x(t) + \frac{a}{c}y_1(t) + \frac{a}{c}y_2(t)$  y por tanto su derivada como:  $w'(t) := x'(t) + \frac{a}{c}y_1'(t) + \frac{a}{c}y_2'(t)$ . Sustituimos en el sistema (2.17) llegamos a:

$$w'(t) := DI - Dx + \left( b\nu - \frac{a(\nu + D)}{c}y_1 \right) - \frac{a\nu}{c}y_2.$$

Ahora bien,  $0 < c \leq a$  entonces  $\frac{a}{c} \geq 1$  y  $b \in (0, 1)$ , entonces  $-b > -1$ , tenemos que  $\frac{a}{c}(\nu + D) - b\nu > 0$ . Podemos definir  $k := \min\left\{\frac{a}{c}(\nu + D) - b\nu, \frac{a\nu}{c}\right\}$ . Entonces  $w' \leq DI - Dx - ky_1 - ky_2$ . Ahora  $\widehat{k} := \min\{D, k\}$ . De esta forma  $w' \leq DI - \widehat{k}w$ . Usando la condición inicial  $w(0) = x_0 + y_{10} + y_{20}$ , podemos sacar una cota superior para  $w(t)$  si resolvemos el problema de Cauchy que hemos formado:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} \leq -\widehat{k}w + DI \\ w(0) = w_0 = x_0 + y_{10} + y_{20}. \end{cases}$$

Multiplicando la EDO por un factor integrante  $e^{\widehat{k}t}$  e integrando en ambos lados, siendo  $t_0 \geq 0$ ,  $-e^{\widehat{k}t} \leq -1$ , obtenemos:

$$e^{\widehat{k}t}w(t) - w(t_0) \leq \int_{t_0}^t DIe^{\widehat{k}s} ds = \frac{DI}{\widehat{k}}(e^{\widehat{k}t} - e^{\widehat{k}t_0}) \leq \frac{DI}{\widehat{k}}(e^{\widehat{k}t} - 1).$$

Por lo que  $w(t) \leq Ce^{-\widehat{k}t} + \frac{DI}{\widehat{k}}$  siendo  $C = x_0 + y_{10} + y_{20} - \frac{DI}{\widehat{k}}$ . De esta manera, volviendo a usar la **Desigualdad de Young** y que  $x(t), y_1(t), y_2(t) \geq 0$  llegamos a que:

$$|S(t)u_0| \leq 2(x_0 + y_{10} + y_{20})^2 e^{-2\widehat{k}t} + 2 \left(\frac{DI}{\widehat{k}}\right)^2 \overbrace{(1 - e^{-2\widehat{k}t})^2}^{\leq 1}.$$

Además, en la sección anterior vimos también que  $(x_0 + y_{10} + y_{20})^2 \leq 3|(x_0, y_{10}, y_{20})|^2$ , lo que nos permite finalizar la cota:

$$|S(t)u_0|^2 \leq 1 + 2 \left(\frac{DI}{\widehat{k}}\right)^2 =: \rho^2$$

porque  $\lim_{t \rightarrow \infty} 6M^2 e^{-2\widehat{k}t} = 0$ . De tal forma que  $\exists T_B \geq 0$  tal que  $\forall t \geq T_B$ ,  $6M^2 e^{-2\widehat{k}t} \leq 1$ . En efecto:

$$6M^2 e^{-2\widehat{k}t} \leq 1 \Leftrightarrow 6M^2 \leq e^{2\widehat{k}t} \Leftrightarrow \log(6M^2) \leq 2\widehat{k}t \Leftrightarrow \frac{1}{2\widehat{k}} \log(6M^2) \leq t.$$

Luego definimos como:

$$T_B := \frac{1}{2\widehat{k}} \log 6M^2.$$

En **conclusión**, hemos demostrado que existe un compacto  $\overline{B}(0, \rho)$ , de tal forma que existe  $T_B \geq 0$  tal que para todo  $t \geq T_B$ , se tiene  $|S(t)u_0| \leq \rho$ ; por lo tanto existe un compacto absorbente, por lo que existe un atractor global que volveremos a denotar por **A**.



## Capítulo 3

# Modelo no autónomo sin retardo

### 3.1. Ratio de consumo de nutriente variable

En este capítulo vamos a estudiar el caso de un modelo de ratio de consumo de nutriente variable. Vamos a asumir que  $\mathbf{D}$  varía de forma continua en tiempo. Un ejemplo sería si cambiase de manera aleatoria o periódica en un intervalo acotado positivo  $D(t) \in (d_m, d_M)$   $\forall t \in \mathbf{R}$ . En el resto del capítulo trataremos en primer lugar el caso del modelo sin pared y concluiremos con el modelo con crecimiento en pared.

Los resultados teóricos sobre sistemas dinámicos no autónomos necesarios para desarrollar este capítulo están en el apéndice B.

#### 3.1.1. Modelo de crecimiento sin pared

Para comenzar con este modelo necesitamos tomar  $I$  como constante positiva y variando en el tiempo  $D$ , resulta el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = D(t)(I - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -D(t)y(t) + a \frac{x(t)}{m + x(t)} \end{cases} \quad (3.1)$$

**Lema 3.1.1** *En las condiciones dadas anteriormente, para cualquier tiempo inicial  $t_0 \in \mathbf{R}$  y cualesquiera condiciones iniciales  $x_0, y_0 \geq 0$ , todas las soluciones del sistema (3.1) son no negativas y acotadas para todo  $t \geq t_0$ .*

#### Demostración

Los coeficientes son continuamente diferenciables para  $x, y \geq 0$ . En particular, el término no lineal  $\frac{axy}{m+x} = ay \frac{1-m}{m+x}$  es no negativo y acotado por la función lineal,  $ay$ , en el cuadrante

positivo.

En efecto,  $a$  y  $m$  son constantes positivas y  $x, y \geq 0$ , con lo que el término no lineal es no negativo; además, sabemos que  $\frac{x(t)}{m+x(t)} \leq 1$  con lo que:

$$\frac{axy}{m+x} \leq ay,$$

en el primer cuadrante, por ser  $x, y \geq 0$ . Esto nos asegura la **existencia** y **unicidad** de soluciones para todo tiempo que permanezca en el primer cuadrante.

En virtud de la segunda ecuación del sistema (3.1) y del hecho de que  $\frac{x(t)}{m+x(t)} \leq 1$  tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= -D(t)y(t) + a\frac{x(t)}{m+x(t)}y(t) \\ &\leq -D(t)y(t) + ay(t) = (a-D(t))y(t). \end{aligned}$$

De esta forma, si resolvemos la inecuación diferencial resultante obtenemos que:

$$y(t) - y(t_0) \leq \int_{t_0}^t (a - D(s))y(s) ds \leq (a - d_m) \int_{t_0}^t y(s) ds.$$

Por lo tanto,  $y(t) \leq y(t_0) + (a - d_m) \int_{t_0}^t y(s) ds$ . Aplicando el **Lema de Gronwall**, obtenemos como consecuencia que:

$$0 \leq y(t) \leq y(t_0)e^{(a-d_m)(t-t_0)}.$$

Entonces  $y(t)$  está definida para cual instante de tiempo  $y$ , por tanto, efectivamente, tenemos **existencia** de solución.

La **unicidad** del problema la tenemos gracias a la teoría básica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por continuidad de soluciones, con la condición inicial  $x(t_0) = x_0 > 0$ , tenemos que  $x(t)$  puede tomar valores negativos, pero antes ha tenido que tomar el valor 0, pero:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=0} = D(t)I > 0,$$

con lo que  $x(t)$  no puede tomar esos valores negativos mencionados previamente.

Con la condición inicial  $y(t_0) = y_0 > 0$ , existe  $t_1 > t_0$  tal que  $y(t) > 0$  en  $[t_0, t_1]$ . Además, para  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t \left( -D(s) + a\frac{x(s)}{m+x(s)} \right) ds}.$$

Debido a la unicidad de solución  $y(t)$  es no negativa para todo  $t \geq t_0$ . Sumando las ecuaciones del sistema (3.1) deducimos inmediatamente que cuando  $x(t) + y(t) \geq I$  entonces  $I \leq x(t) + y(t) \leq x_0 + y_0$ .

De forma análoga, cuando  $x(t) + y(t) \leq I$  tendremos  $0 \leq x(t) + y(t) \leq I$ . Luego  $0 \leq x(t) + y(t) \leq \max\{x_0 + y_0, I\}$ , con lo que  $x(t)$  y  $y(t)$  están **acotadas**. ■

Veamos ahora el comportamiento de las soluciones del sistema (3.1) a largo plazo. Específicamente, estableceremos **condiciones** bajo las cuales el **atractor es una solución completa** o **un único** punto.<sup>1</sup>

**Teorema 3.1.1** *Supongamos que  $D : \mathbf{R} \rightarrow [d_m, d_M]$ , donde  $0 < d_m < d_M < \infty$ , es continua. Entonces el sistema (3.1) tiene un **atractor pullback**  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$  en el cuadrante positivo  $\mathbf{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ . Además,*

*i) Si  $a < d_m$  el equilibrio axial  $(I, 0)$ , es asintóticamente estable en el cuadrante positivo y el atractor pullback  $\mathbf{A}$  tiene una única componente que es el subconjunto  $A(t) = \{(I, 0)\}$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ .*

*ii) Si lo que sucede es que:*

$$a > \left(1 + \frac{m}{I}\right) d_M,$$

*entonces el atractor pullback  $\mathbf{A}$  también contiene soluciones estrictamente dentro del cuadrante positivo, además del punto  $(I, 0)$ .*

*iii) Cuando tenemos la hipótesis de ii) y también:*

$$d_m < a < \frac{d_m(md_m + d_M I)^2}{(md_m + d_M I)^2 - mId_m^2},$$

*el atractor pullback  $\mathbf{A}$  está formado por el punto de equilibrio axial  $(I, 0)$  y una solución completa  $\xi^*$  que está uniformemente acotada fuera de los ejes, así como soluciones completas heteroclínicas entre ellas, es decir, sus componentes para todo  $t \in \mathbf{R}$  son:*

$$A(t) = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : x + y = I; \xi^*(t) \leq x \leq I\}.$$

---

<sup>1</sup>Notemos que  $(I, 0)$  es el único equilibrio del sistema para todos los valores de los parámetros. Otras soluciones atrayentes no serán puntos de equilibrio.

**Demostración**

Definamos  $w(t) = x(t) + y(t)$ . Sumando las ecuaciones del sistema (3.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} &= D(t)I - D(t)x(t) - D(t)y(t) - \overbrace{a \frac{x(t)y(t)}{m+x(t)} + a \frac{x(t)y(t)}{m+x(t)}}^0 \\ &= D(t)(I - w(t)). \end{aligned}$$

Esta ecuación ordinaria posee un equilibrio dado por  $D(t)(I - w^*) = 0$ , que incluso cuando  $D(t)$  no es constante, el equilibrio sigue siendo  $I = w^*$ .

Veamos ahora que es atrayente, tanto en el sentido pullback como en el forward.

Sea  $w_0 := w(t_0) = x(t_0) + y(t_0)$ ,  $x(\cdot), y(\cdot)$  denotan la solución del sistema (3.1) con datos iniciales  $(t_0; (x_0(t_0), y_0(t_0)))$ . Resolviendo la EDO:

$$\frac{dw(t)}{dt} = D(t)(I - w(t)),$$

aplicando la fórmula general de solución para la resolución de EDOS obtenemos :

$$w(t) = w_0 e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} + I,$$

convergente a I en dos situaciones:

- (1) cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$ , tomando  $t$  fijo,
- (2)  $t \rightarrow \infty$ , estando  $t_0$  fijo,

ya que  $0 \leq e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} \leq e^{-d_m(t-t_0)} \rightarrow 0$  en ambos casos.

Gracias al **Lema 3.1.1** se tiene que,  $\forall \varepsilon > 0$ , el conjunto compacto no vacío  $\overline{B}_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : x + y \leq I + \varepsilon\}$  es positivamente invariante y absorbente en  $\mathbf{R}_+^2$ . Luego el sistema dinámico no autónomo en  $\mathbf{R}_+^2$  generado por el sistema (3.1) tiene un atractor pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$  que está formado por subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbf{R}_+^2$ .

Hay tres casos que se distinguen en dicho teorema y que ofrecen mucha más información sobre la estructura del atractor pullback:

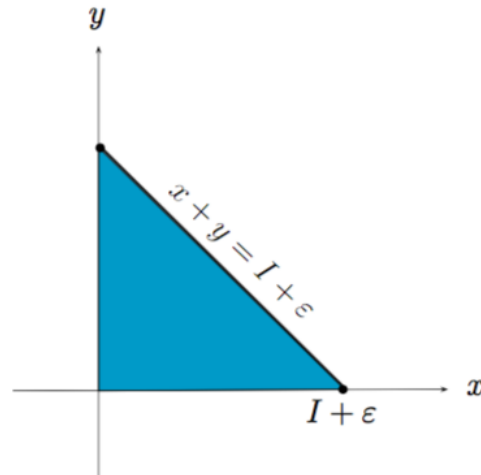


Figura 3.1: Representación gráfica del conjunto  $\overline{B}_\varepsilon$ .

- (1) Debido a que  $w(t) = x(t) + y(t)$  tiende a  $I$  cuando  $t \rightarrow \infty$  en el cuadrante positivo, es suficiente considerar puntos  $(x, y)$  sobre la recta  $x + y = I$  que están en el primer cuadrante positivo. Como  $x(t)$  satisface la ecuación correspondiente del sistema (3.1) con  $y(t) = I - x(t) > 0$ , tenemos:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (I - x(t)) \left( D(t) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} \right).$$

Además tenemos  $x(t) + y(t) = I$ , luego  $\frac{dx(t)}{dt} = (I - x(t)) \left( D(t) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} \right)$ .

Si  $d_m > a$ ,  $D \leq d_M$  y  $\frac{x(t)}{m + x(t)} \leq 1$ , tenemos que:

$$D - a \frac{x(t)}{m + x(t)} \geq D - a \geq d_m - a.$$

Por tanto,

$$\frac{dx(t)}{dt} \geq (d_m - a)(I - x(t)) > 0,$$

siempre que  $x(t) \neq I$ . Como:

$$m > 0; \quad a \frac{x(t)}{m + x(t)} \leq a,$$

para  $x \geq 0$  entonces  $x(t)$  crece a  $I$  e  $y(t)$  decrece a 0 a lo largo de la recta.

Es más, como  $d_m > a$ ,  $D \leq d_m$  tenemos  $D \leq d_m \leq -a$ , llegando entonces a que:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -D(t)y(t) + a \frac{x(t)}{m + x(t)}y(t) < -ay(t) + ay(t) = 0.$$

Significa que  $y(t)$  es decreciente a 0. Por lo que todas las soluciones en el cuadrante positivo convergen hacia  $(I, 0)$  asintóticamente.  $\checkmark$

- (2) Sea  $0 < \varepsilon_1 < I$  suficientemente pequeño; entonces tenemos  $a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} < d_m$  y cogiendo la información proporcionada por la primera ecuación del sistema (3.1) sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \left( D(t) - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} \right) (I - \varepsilon_1) \\ &\geq \left( d_m - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} \right) (I - \varepsilon_1) \\ &> \left( a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} \right) (I - \varepsilon_1) = 0. \end{aligned}$$

También, gracias a la segunda ecuación del sistema (3.1):

$$\frac{dx(t)}{dt} \geq (d_m - a)(I - x(t)) > 0,$$

con lo que al restringirla a  $y = I - \varepsilon_1$  llegamos a que:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{y=I-\varepsilon_1} = - \left( D(t) - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} \right) (I - \varepsilon_1).$$

Ahora como  $I - \varepsilon_1 > 0$  y  $D(t) - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} > 0$ , nuestra restricción es negativa,

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{y=I-\varepsilon_1} < 0.$$

En este segundo caso, el atractor está formado por los subconjuntos  $A(t) = \{(I, 0)\}$  y también es asintóticamente estable en sentido forward y en el sentido atrayente pullback.

Por analogía, por (ii) implica que  $d_M < a$  y se tiene para  $0 < \varepsilon_2 < I - \varepsilon_1$  suficientemente pequeño:

$$\frac{a(I - \varepsilon_2)}{m + I - \varepsilon_2} > d_M.$$

De esta manera, de la primera ecuación del sistema (3.1) obtenemos:

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=I-\varepsilon_2} \leq \left( d_M - \frac{a(I - \varepsilon_2)}{m + I - \varepsilon_2} \right) \varepsilon_2 < 0,$$

gracias a la segunda ecuación del sistema (3.1):

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{y=\varepsilon_2} \geq \left( -d_M + \frac{a(I - \varepsilon_2)}{m + I - \varepsilon_2} \right) \varepsilon_2 > 0.$$

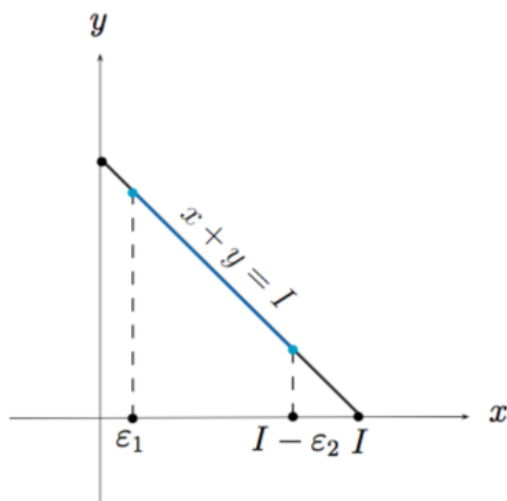


Figura 3.2: Representación gráfica del conjunto  $\overline{\mathbf{B}}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ .

Con estos dos resultados, vemos que el subconjunto compacto  $\overline{B}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} := \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : x + y = I, \varepsilon_1 \leq x \leq I - \varepsilon_2\}$  es positivamente invariante y absorbente para el sistema (3.1), restringido a la recta invariante  $x + y = I$  en el cuadrante positivo.

De esta forma, la teoría de sistema no autónomos<sup>2</sup> asegura que **existe** un atractor pullback  $\mathbf{A}_{res} = \{A_{res}(t) : t \in \mathbf{R}\}$  en  $\overline{\mathbf{B}}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ . Como la recta invariante es asintóticamente atrayente para el sistema en todo el cuadrante positivo, es una variedad estable,  $\mathbf{A}$  es el atractor pullback para este sistema sin restringir. Y esto incluye la solución de equilibrio axial  $(I, 0)$  y los subconjuntos  $A(t) = \{(x, y) : x + y = I, \xi^*(t) \leq x \leq I\}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , en  $\mathbf{R}_+^2$ , donde  $(\xi^*(t), I - \xi^*(t))$  es la solución completa acotada y estrictamente positiva con los valores de  $x$  más pequeños.

Por otro lado, podemos expandir  $\overline{\mathbf{B}}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  hasta incluir una pequeña banda que cubra a la recta invariante y también demostrar que este conjunto es absorbente para el sistema sin restringir.  $\checkmark$

- (3) Todas las soluciones del sistema (3.1) igualadas a cero con  $0 \leq x \leq I$  satisfacen  $d_m I - d_M x(t) - aI \leq \frac{dx(t)}{dt} \leq d_M I - d_m x(t)$ . En efecto, de la primera ecuación obtenemos que:

$$\frac{dx(t)}{dt} (I - x(t)) \left( D(t) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} \right) \geq d_m I - d_M x(t) - aI,$$

<sup>2</sup>Apéndice B

y de la segunda  $\frac{dx(t)}{dt} \leq d_M I - d_m x(t)$ . Implicando que:

$$\frac{(d_m - a)I}{d_M} \leq x(t) \leq \frac{d_M I}{d_m}. \quad (3.2)$$

Si consideramos la inecuación  $\frac{dx(t)}{dt} \leq d_M I - d_m x(t)$ , la multiplicamos por un factor integrante  $e^{d_m t}$  e integramos, obtenemos:

$$x(t) \leq x(0)e^{-d_m t} + \frac{d_M I}{d_m}(1 - e^{-d_m t}),$$

tal y como vimos en la demostración de existencia de atractor global del capítulo anterior, podemos acotar:

$$x(t) \leq Ie^{-d_m t} + \frac{d_M I}{d_m}(1 - e^{-d_m t}) \longrightarrow \frac{-d_M I}{d_m},$$

para un  $t$  suficientemente grande. En consecuencia,  $x(t) \leq \frac{d_M I}{d_m}$ . Tratando exactamente igual la inecuación:

$$\frac{dx(t)}{dt} \geq d_m I - d_M x(t) - aI,$$

sólo que ahora teniendo en cuenta  $x(0) \geq 0$  obtenemos  $x(t) \geq \frac{(d_m - a)I}{d_M}$ , tal y como queríamos.

De esta manera, por una parte suponiendo que  $aI > (I + m)d_M$  tenemos que  $d_m I - d_M x(t) - aI < 0$ ; por otra parte  $d_M I - d_m x(t) = d_M(I - x(t)) + (d_M - d_m)x(t) > 0$ . Entonces, para cualesquiera dos soluciones del sistema  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  de  $\Delta(t) := x_1(t) - x_2(t)$ , se satisface:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(t)}{dt} &= \frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \\ &= (I - x_1(t)) \left( D(t) - a \frac{x_1(t)}{m + x_1(t)} \right) - (I - x_2(t)) \left( D(t) - a \frac{x_2(t)}{m + x_2(t)} \right) \\ &= -D(t)(x_1(t) - x_2(t)) - aI \frac{x_1(t)(m + x_2(t)) - x_2(t)(m + x_1(t))}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \\ &+ a \frac{x_1^2(t)(m + x_2(t)) - x_2^2(t)(m + x_1(t))}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \\ &= -D(t)\Delta(t) - aI \frac{m}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \Delta(t) \\ &+ a \frac{m(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)x_2(t)}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \Delta(t), \end{aligned}$$



pues  $(m(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)x_2(t))\Delta(t) = mx_1^2(t) - mx_2^2(t) + x_1^2(t)x_2(t) - x_1(t)x_2^2(t)$ . Además, por (3.2) obtenemos:

$$x_I(t) \leq \frac{d_M I}{d_m}, \quad i = 1, 2,$$

por lo tanto:

$$-\frac{amI}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \leq -\frac{amI}{\left(m + \frac{d_M I}{d_m}\right)^2},$$

con lo que  $m(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)x_2(t) < (m + x_1(t))(m + x_2(t))$ . Por tanto:

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} < -d_m\Delta(t) - \frac{amI}{\left(m + \frac{d_M I}{d_m}\right)^2}\Delta(t) + a\Delta(t),$$

siempre y cuando tengamos  $d_m + \frac{amI}{\left(m + \frac{d_M I}{d_m}\right)^2} > a$ , cuando  $t \rightarrow \infty$  entonces  $\Delta(t) \rightarrow 0$ .

En efecto,

$$a < d_m + \frac{amI d_m^2}{d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I},$$

operando, podemos concluir que:

$$a < \frac{d_m(d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I)}{d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I - mI d_m^2}.$$

Esto se cumple si  $a < d_m$  como en el primer caso (1).

Sin embargo, puede también cumplirse que si  $a$  es ligeramente mayor que  $d_m$ , entonces el límite pullback para condiciones iniciales estrictamente positivas del sistema escalar de los equilibrios es uniformemente estrictamente contractivo en  $(0, I)$  y **existe una solución completa**  $\xi^*(t) \in (0, I)$  que es asintóticamente estable en el sentido forward usual. El correspondiente atractor pullback  $\mathbf{A}_1$  de este sistema en  $[0, I]$  incluye el equilibrio  $I$  y los conjuntos  $A_1(t) = [\xi^*(t), I]$ , para cada  $t \in \mathbf{R}$ .

En otras palabras, incluye las trayectorias heteroclínicas que unen los *equilibrios*  $\xi^*(t)$  e  $I$ . Para el sistema 2-dimensional (3.1) el atractor pullback  $\mathbf{A}$  está formado por los conjuntos  $A(t) = \{(x, y) : x + y = I; \quad \xi^*(t) \leq x \leq I\}$  en  $\mathbf{R}_+^2$ , para  $t \in \mathbf{R}$ .

■

### 3.1.2. Modelo de crecimiento con pared

En esta sección estudiaremos qué ocurre cuando variamos el ratio de consumo de nutrientes en el modelo con pared. Cuando  $I$  es constante y  $D$  varía en tiempo, el modelo que tenemos es:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = D(t)(I - x(t)) - a\frac{x(t)}{m + x(t)}(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t), \\ \frac{dy_1(t)}{dt} = -(\nu + D(t))y_1(t) + c\frac{x(t)}{m + x(t)}y_1(t) - r_1y_1(t) + r_2y_2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -\nu y_2(t) + c\frac{x(t)}{m + x(t)}y_2(t) + r_1y_1(t) - r_2y_2(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Recordemos que  $\mathbf{a}$  era el ratio máximo de crecimiento específico,  $\mathbf{c}$  representaba el ratio de crecimiento de las especies consumidoras, con lo que  $a \geq c$ ;  $\mathbf{m}$  es la constante de saturación del medio de consumo;  $r_1$  y  $r_2$  representan los ratios con los que las especies pasarán de estar en el medio a estar en la pared, o viceversa;  $\nu$  denota el ratio de muerte colectiva de  $y$ ; y  $\mathbf{b}$  describe la fracción de biomasa muerta que es reciclada.

Como las variables  $x, y_1, y_2$  representan concentraciones, suponemos condiciones iniciales no negativas:

$$x(t_0) = x_0; \quad y_1(t_0) = y_{10}; \quad y_2(t_0) = y_{20}.$$

**Lema 3.1.2** *Supongamos que  $(x_0, y_{10}, y_{20}) \in \mathbf{R}_+^3 := \{(x, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^3 : x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$ . Entonces todas las soluciones del sistema (3.3) correspondientes a datos iniciales en  $\mathbf{R}_+^3$  son:*

(i) *no negativas para todo  $t > t_0$ ;*

(ii) *uniformemente acotadas en  $\mathbf{R}_+^3$ .*

*Además, el sistema dinámico no autónomo sobre  $\mathbf{R}_+^3$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de (3.3) tiene un atractor pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$  en  $\mathbf{R}_+^3$ .*

#### Demostración

(i) Por continuidad, toda solución tiene que tomar el valor 0 antes de tomar cualquier valor negativo. Con  $x = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ , la ecuación diferencial ordinaria para  $x(t)$  se reduce a:

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(t)I + b\nu y_1(t) > 0,$$

con lo que  $x(t)$  es estrictamente creciente en  $x = 0$ . Con  $y_1 = 0, x \geq 0, y_2 \geq 0$ , la EDO reducida para  $y_1(t)$  es:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = r_2y_2(t) \geq 0,$$

con lo que  $y_1(t)$  es no decreciente en  $y_1 = 0$ . De forma similar, haciendo ahora  $y_2 = 0, x \geq 0, y_1 \geq 0$ , obtenemos:

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = r_1 y_1(t) \geq 0,$$

con lo que  $y_2(t)$  también es no decreciente en  $y_2 = 0$ .

Además,  $(x(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbf{R}_+^3$  para cualquier instante de tiempo  $t$ . ✓

(ii) Definimos, para  $X(t) = (x(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbf{R}_+^3$ , la norma  $\|X(t)\|_1 := x(t) + y_1(t) + y_2(t)$ . Entonces  $\|X(t)\|_1 \leq S(t) \leq \frac{a}{c} \|X(t)\|_1$  donde  $S(t) = x(t) + \frac{a}{c}(y_1(t) + y_2(t))$ . En efecto, sabemos que  $0 < c < a$ , luego  $\frac{a}{c} \geq 1$ . De esta forma:

$$\begin{aligned} \|X(t)\|_1 &= x(t) + y_1(t) + y_2(t) \leq x(t) + \frac{a}{c}(y_1(t) + y_2(t)) \\ &= S(t) = x(t) + \frac{a}{c}(y_1(t) + y_2(t)) \\ &\leq \frac{a}{c}(x(t) + y_1(t) + y_2(t)) = \frac{a}{c} \|X(t)\|_1. \end{aligned}$$

Derivando  $S(t)$  a lo largo de soluciones del sistema (3.3) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{a}{c} \frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{a}{c} \frac{dy_2(t)}{dt} \\ &= D(t)[I - x(t)] - \left[ \frac{a}{c}(\nu + D(t)) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c} \nu y_2(t) \quad (3.4) \\ &\leq d_M I - d_m x(t) - \left[ \frac{a}{c}(\nu + d_m) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c} \nu y_2(t), \end{aligned}$$

notamos que  $0 < c \leq a$  y  $0 < b < 1$ , entonces:

$$\frac{a}{c}(\nu + d_m) - b\nu \geq \nu + d_m - b\nu > \nu + d_m - \nu = d_m.$$

Sea  $\mu := \min\{d_m, \nu\}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &\leq d_M I - d_m x(t) - \left[ \frac{a}{c}(\nu + d_m) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c} \nu y_2(t) \\ &\leq d_M I - d_m x(t) - d_m y_1(t) - \nu y_2(t) \\ &\leq d_M I - \mu(x(t) + y_1(t) + y_2(t)) \\ &= d_M I - \mu S(t). \end{aligned}$$

De esta forma llegamos a:

$$\frac{dS(t)}{dt} < d_M I - \mu S(t). \quad (3.5)$$

Tratando esta inecuación como en la tercera parte de la demostración del **Teorema 3.2.1**, llegamos a:

$$\frac{d}{dt}[e^{\mu t}S(t)] < d_M I e^{\mu t}.$$

Integrando por partes entre  $t_0$  y  $t$ , dado que  $t_0 \geq 0$ :

$$e^{\mu t}S(t) - S(t_0) < \frac{d_M I}{\mu}(e^{\mu t} - 1).$$

Equivalentemente:

$$S(t) < S(t_0)e^{-\mu t} + \frac{d_M I}{\mu} \underbrace{(1 - e^{-\mu t})}_{\geq 0}.$$

Así, si  $S(t_0) < \frac{d_M I}{\mu}$ , entonces:

$$S(t) < s(t_0)e^{-\mu t} + S(t_0)(1 - e^{-\mu t}) = S(t_0), \forall t \geq t_0.$$

En resumen, si  $S(t_0) < \frac{d_M I}{\mu}$ , entonces  $S(t) < \frac{d_M I}{\mu}$  para todo  $t \geq t_0$ .

Por otro lado, si  $S(t_0) \geq \frac{d_M I}{\mu}$ , entonces  $S(t)$  será no creciente para todo  $t \geq t_0$ , con lo que  $S(t) < S(t_0)$ . Entonces implica que  $\|X(t)\|_1$  está acotada superiormente, es decir,

$$\|X(t)\|_1 \leq \max \left\{ \frac{d_M I}{\mu}, x(t_0) + \frac{a}{c}(y_1(t_0) + y_2(t_0)) \right\},$$

para todo  $t \geq t_0$ . Por consiguiente, para todo  $\varepsilon > 0$ , el conjunto compacto no vacío:

$$\bar{\mathbf{B}}_\varepsilon := \left\{ (x, y_1, y_2) \in \mathbf{R}_+^3 : x + \frac{a}{c}(y_1 + y_2) \leq \frac{d_M I}{\mu} + \varepsilon \right\},$$

es positivamente invariante y absorbente en  $\mathbf{R}_+^3$ . El sistema dinámico no autónomo en  $\mathbf{R}_+^3$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.3) tiene por tanto un atractor pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$ , que consiste en subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbf{R}_+^3$  tal que están contenidos en  $\bar{\mathbf{B}}_\varepsilon$ . ■

Para obtener más información sobre la estructura interna del atractor pullback del sistema no autónomo generado por el sistema de ecuaciones ordinarias (3.3), hacemos el cambio de variable:

$$\alpha(t) = \frac{y_1(t)}{y_1(t) + y_2(t)}, \quad z(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad (3.6)$$

tal y como hicimos en el estudio que realizamos en el primer capítulo del trabajo. De esta forma, y análogamente a lo que hicimos allí, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= D(t)(I - x(t)) - a\frac{x(t)}{m + x(t)}z(t) + b\nu\alpha(t)z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\nu z(t) - D(t)\alpha(t)z(t) + c\frac{x(t)}{m + x(t)}z(t), \\ \frac{d\alpha(t)}{dt} &= -D(t)\alpha(t)(1 - \alpha(t)) - r_1\alpha(t) + r_2(1 - \alpha(t)).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Observemos que el punto de equilibrio  $(I, 0, 0)$  del sistema (3.3) no cuenta para el sistema (3.7), ya que  $\alpha$  no está definido para él. Por otra parte,  $(I, 0)$  es un equilibrio para las dos primeras ecuaciones del sistema (3.7).

### Dinámica global de $\alpha(t)$

Observamos que la dinámica de  $\alpha(t) = \alpha(t, t_0, \alpha_0)$  está desacoplada de  $x(t)$  y  $z(t)$ , y satisface la ecuación de Ricatti que aparece como tercera ecuación del sistema (3.7). Para cualesquiera  $y_1, y_2$  positivos, tenemos  $0 < \alpha(t) < 1$  para todo  $t$ . Recordemos que:

$$\alpha'|_{\alpha=0} = r_2 > 0 \quad y \quad \alpha'|_{\alpha=1} = -r_1 < 0,$$

con lo que el intervalo  $(0, 1)$  es positivamente invariante, tal y como estudiamos anteriormente en el trabajo. Ésta es la región biológicamente relevante. Cuando  $D$  es constante, ya estudiamos que existe un único punto crítico  $\alpha^* \in (0, 1)$ , dado por:

$$\alpha^* := \frac{D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D}.\tag{3.8}$$

Queremos ahora tratar el caso en que  $D$  varía en tiempo, aleatoria o periódicamente, en un intervalo positivo y acotado,  $D(t) \in [d_m, d_M]$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ . En este caso necesitaremos atractores pullback aleatorios o determinísticos, para  $\alpha(t)$ ,  $\mathbf{A}_\alpha = \{A_\alpha(t) : t \in \mathbf{R}\}$  en el intervalo  $(0, 1)$ . Tal atractor existe, ya que el intervalo unidad es positivamente invariante, con lo que sus componentes están dadas por:

$$A_\alpha(t) = \bigcap_{t_0 < t} \alpha(t, t_0, [0, 1]), \forall t \in \mathbf{R}.$$

Estas componentes son de la forma:

$$A_\alpha = [\alpha_l^*(t), \alpha_u^*(t)],$$

donde  $\alpha_l^*(t)$  y  $\alpha_u^*(t)$  son soluciones completas y acotadas para la ecuación de Ricatti. El resto de soluciones completas y acotadas se encuentran entre ellas.

Podemos usar inecuaciones diferenciales para obtener cotas de estas soluciones completas. Para ello, lo primero que vamos a hacer es reescribir la ecuación de Ricatti del sistema (3.7):

$$\alpha'(t) = D(t)(\alpha^2(t) - \alpha(t)) - (r_1 + r_2)\alpha(t) + r_2, \quad (3.9)$$

tal y como ya hemos justificado en los estudios de los capítulos previos.

Como  $\alpha(t) < 1$  y  $D(t) > 0$ , entonces:

$$\alpha'(t) \leq -(r_1 + r_2)\alpha(t) + r_2.$$

Así,  $\alpha(t) \leq \beta(t)$ , con  $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ , donde  $\beta'(t) = -(r_1 + r_2)\beta(t) + r_2$ .

Esta EDO tiene un punto estacionario asintóticamente estable, dado por  $\beta^* = \frac{r_2}{r_1 + r_2}$ , con lo que las soluciones completas de la ecuación de Ricatti del sistema (3.7) se encuentran por debajo, en otras palabras,  $\alpha_u^*(t) \leq \beta^*$  para  $t \in \mathbf{R}$ . Esto nos proporciona una cota superior.

Por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= D(t)\alpha^2(t) - (D(t) + r_1 + r_2)\alpha(t) + r_2 \\ &\geq -(d_m + r_1 + r_2)\alpha(t) + r_2. \end{aligned}$$

Así,  $\alpha(t) \geq \gamma(t)$  con  $\alpha(t_0) = \gamma(t_0)$ , donde  $\gamma'(t) = -(d_M + r_1 + r_2)\gamma(t) + r_2$ . Esta EDO tiene un punto crítico asintóticamente estable, dado por:

$$\gamma^* := \frac{r_2}{r_1 + r_2 + d_M}.$$

En este caso, obtenemos una cota inferior  $\alpha_l^*(t) \geq \gamma^*$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ .

En resumen,  $\mathbf{A}(t) = [\alpha_l^*(t), \alpha_u^*(t)] \subset [\gamma^*, \beta^*]$ . Para investigar el caso en que el atractor pullback se compone de una única solución completa, necesitamos encontrar condiciones bajo las cuales tengamos  $\alpha_l^*(t) = \alpha_u^*(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

Supongamos que no son iguales y consideremos su diferencia:  $\Delta_\alpha(t) := \alpha_u^*(t) - \alpha_l^*(t)$ .

Entonces, derivando:

$$\begin{aligned}
\Delta'_\alpha(t) &= D(t)(\alpha_u^{*2}(t) - \alpha_u^*(t)) - (r_1 + r_2)\alpha_u^*(t) + r_2 \\
&\quad - D(t)(\alpha_l^{*2}(t) - \alpha_l^*(t)) + (r_1 + r_2)\alpha_l^*(t) - r_2 \\
&= D(t)(\alpha_u^{*2}(t) - \alpha_l^{*2}(t)) - (D(t) + r_1 + r_2)(\alpha_u^* - \alpha_l^*) \\
&= D(t)(\alpha_u^*(t) - \alpha_l^*(t))\Delta_\alpha(t) - (D(t) + r_1 + r_2)\Delta_\alpha(t) \\
&\leq 2d_M\alpha_u^*(t)\Delta_\alpha(t) - (d_m + r_1 + r_2)\Delta_\alpha(t) \\
&\leq 2d_M\beta_u^*(t)\Delta_\alpha(t) - (d_m + r_1 + r_2)\Delta_\alpha(t) \\
&= \left( \frac{2d_M r_2}{r_1 + r_2} - d_m - r_1 - r_2 \right) \Delta_\alpha(t).
\end{aligned}$$

Así, llegamos a que:

$$0 \leq \Delta_\alpha(t) \leq e^{\left[ \left( \frac{2d_M r_2}{r_1 + r_2} - d_m - r_1 - r_2 \right) (t - t_0) \right]} \Delta_\alpha(t_0) \rightarrow 0,$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ , siempre y cuando:

$$\frac{2d_M r_2}{r_1 + r_2} - d_m - r_1 - r_2 < 0.$$

Operando con esta desigualdad, quitando denominadores, y teniendo que  $d_m < d_M$  y  $r_1 + r_2 > 0$ , tenemos:

$$2r_2 d_M < d_M(r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)^2,$$

y finalmente tendremos  $d_M(r_2 - r_1) < (r_1 + r_2)^2$ .

De esta forma, esencialmente llegamos a una restricción en la longitud del intervalo en el que se mueve  $D(t)$ . A no ser que  $r_1 < r_2$ , con lo que:

$$d_M > \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2 - r_1} > 0.$$

Y si tenemos  $r_1 > r_2$ , entonces  $d_M < \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2 - r_1} > 0$ .

### Observación 3.1

Notar que  $\alpha^*(t)$  es también asintóticamente estable en el sentido forward en este caso.

**Dinámica global de  $x(t)$  y  $z(t)$**

Supongamos que  $\alpha^*(t)$  es la única solución completa del atractor pullback de la EDO de Ricatti que aparece en la tercera ecuación del sistema (3.7). Entonces  $\alpha^*(t) \in [\gamma^*, \beta^*] \subset (0, 1)$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ . Además, para  $t$  suficientemente grande tenemos que  $x(t)$  y  $z(t)$  satisfacen:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= D(t)(I - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t) + b\nu\alpha^*(t)z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\nu z(t) - D(t)\alpha^*(t)z(t) + c \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t). \end{aligned} \tag{3.10}$$

El sistema (3.10) tiene un equilibrio  $(I, 0)$ . Por lo tanto  $(I, 0, \alpha^*(t))$  puede considerarse como un **equilibrio no autónomo** del sistema (3.7).

**Teorema 3.1.2** *Supongamos que  $D : \mathbf{R} \rightarrow [d_m, d_M]$ , con  $0 < d_m < d_M < \infty$ , es continua,  $a \geq c$ ,  $b \in (0, 1)$  y  $\nu > 0$ . Entonces, el sistema (3.10) tiene un atractor pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$  dentro del cuadrante positivo. Además,*

(i) *Cuando  $\nu + d_m\gamma^* > c$ , el equilibrio axial  $(I, 0)$  es asintóticamente estable en el cuadrante positivo y el atractor pullback  $\mathbf{A}$  tiene una única componente  $A(t) = \{(I, 0)\}$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ .*

(ii) *Cuando:*

$$\nu + d_M\beta^* < \frac{cd_m I}{m(a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*) + d_m I}$$

*el atractor pullback  $\mathbf{A}$  también contiene puntos estrictamente dentro del cuadrante positivo, además del punto  $\{(I, 0)\}$ .*

**Demostración**

(i) Cuando  $\nu + d_m\gamma^* \geq c$ ,  $z(t)$  satisface:

$$\frac{dz(t)}{dt} = - \left( \nu + D(t)\alpha^*(t) - c \frac{x(t)}{m + x(t)} \right) z(t),$$

donde:

$$\nu + D(t)\alpha^*(t) - c \frac{x(t)}{m + x(t)} > \nu + d_m\gamma^* - c \geq 0.$$

Así,  $z(t)$  decrece a 0 a medida que  $t$  tiende a infinito. Como consecuencia tenemos que  $x(t)$  satisface  $\frac{dx(t)}{dt} = D(t)(I - x(t))$  para valores grandes de  $t$ . Entonces:

$$x(t) = x(t_0)e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} + I,$$



que converge a  $I$  cuando  $t \rightarrow \infty$  o  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Además, en vista de la definición de la transformación  $\alpha$ , no es posible que  $z = 0$  aunque este sistema tenga un equilibrio análogo  $(I, 0, 0)$  en sus variables  $(x, y_1, y_2)$ .  $\checkmark$

(ii) Sea  $u(t) := x(t) + z(t)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \\ &= D(t)(I - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t) + b\nu\alpha^*(t)z(t) \\ &\quad - \nu z(t) - D(t)\alpha^*(t)z(t) + c \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t) \\ &= D(t)(I - x(t)) + (c - a) \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t) \\ &\quad + b\nu\alpha^*(t)z(t) - \nu z(t) - D(t)\alpha^*(t)z(t). \end{aligned}$$

Por un lado, como  $c \leq a$ , entonces:

$$\frac{du(t)}{dt} \leq D(t)(I - x(t)) - (\nu + D(t)\alpha^*(t) - b\nu\alpha^*(t))z(t).$$

Como  $0 < \alpha^*(t) < 1$  y  $0 < b < 1$ , entonces  $\nu - b\nu\alpha^*(t) > \nu - b\nu > 0$ . Por un lado tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &< D(t)I - D(t)x(t) - D(t)\alpha^*(t)z(t) \\ &< D(t)I - D(t)\alpha^*(t)u(t) \\ &\leq d_M I - d_m \gamma^* u(t). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\frac{x(t)}{m + x(t)} \leq 1 \quad y \quad c \leq a, \quad \text{con lo que} \quad (c - a) \frac{x(t)}{m + x(t)} \geq (c - a),$$

porque  $c - a \leq 0$ . De esta manera, como  $0 < \alpha^*(t) < 1$  y  $\alpha^*(t) \in [\gamma^*, \beta^*]$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &\geq D(t)(I - x(t)) - (a - c + \nu + D(t)\alpha^*(t) - b\nu\alpha^*(t))z(t) \\ &\geq D(t)I - D(t)x(t) - (a - c + \nu + D(t) - b\nu\beta^*(t))z(t). \end{aligned}$$

Podemos comprobar además que  $-D(t)x(t) > -ax(t) + cx(t) - \nu x(t) - D(t)x(t) + b\nu\beta^*x(t)$ , pues  $-ax(t) + cx(t) = (c - a)x(t) \leq 0$ , con lo que:

$$\frac{du(t)}{dt} \geq d_m I - (a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*)u(t).$$

Ahora, veamos que tenemos unas cotas superiores e inferiores para  $u(t)$ :

$$q_1 I := \frac{d_m I}{a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*} < u(t) < \frac{d_M I}{d_m \gamma^*} =: q_2 I. \quad (3.11)$$

Notemos que  $q_1 < 1$  y  $q_2 > 1$ . Para la primera de las desigualdades, comenzamos demostrando que:

$$\frac{d_m}{a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*} < 1 \quad \equiv \quad a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^* > d_m.$$

Como  $c \leq a$ ,  $0 < b < 1$ ,  $0 < \beta^* < 1$ , tenemos:

$$\begin{aligned} a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^* &> c + \nu + d_M - \nu \\ &= a - c + d_M \geq d_M \geq d_m, \end{aligned}$$

con lo que  $q_1 < 1$ .  $\checkmark$

Para demostrar ahora que  $q_2 > 1$ , basta con tener en cuenta que  $0 < \gamma^* < 1$ ; así,  $d_m \gamma^* < d_m \leq d_M$ , entonces  $q_2 > \frac{d_M}{d_m \gamma^*} = 1$ . Para  $\varepsilon > 0$ , definimos  $T_\varepsilon$  como el trapecoide:

$$T_\varepsilon := \{(x, z) \in \mathbf{R}_+^2 : x \geq \varepsilon, \quad z \geq \varepsilon, \quad q_1 I \leq x + z \leq q_2 I\},$$

entonces  $T_\varepsilon$  es absorbente. Demostremos que es invariante.

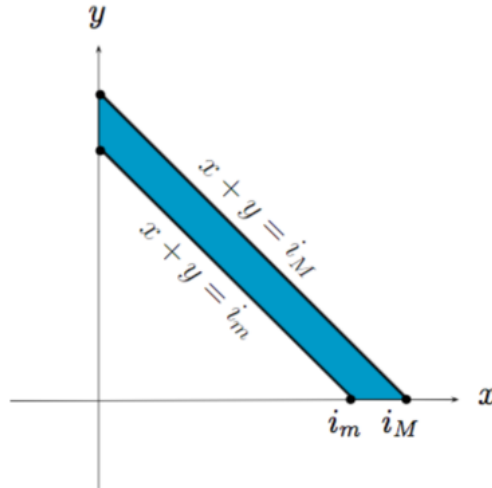


Figura 3.3: Representación gráfica del conjunto  $T_\varepsilon$ .

En primer lugar, notamos como  $f$  a la función:

$$f(x) = a \frac{x}{m+x}, \quad (3.12)$$

es creciente en  $[0, +\infty)$ ; para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, tenemos  $\frac{a\varepsilon}{m+x} < b\nu\gamma^*$ .

Por tanto:

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=\varepsilon} = D(t)(I - \varepsilon) + \left( b\nu\alpha^*(t) - \frac{a\varepsilon}{m + \varepsilon} \right) z(t) > 0. \quad (3.13)$$

En segundo lugar, la solución:

$$\nu + d_M\beta^* < \frac{cd_m I}{m(a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*) + d_m I} \equiv \nu + d_M\beta^* < \frac{cq_1 I}{m + q_1 I}.$$

En efecto,  $q_1 = \frac{d_m}{a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*}$ , con lo que:

$$\frac{cq_1 I}{m + q_1 I} = \frac{cd_m I}{m(a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*) + d_m I}.$$

Así, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, tenemos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{z=\varepsilon} &= \left( -\nu - D(t)\alpha^*(t) + c\frac{x(t)}{m + x(t)} \right) \varepsilon \\ &> \left( -\nu - d_M\beta^* + c\frac{q_1 I - \varepsilon}{m + q_2 I - \varepsilon} \right) > 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Las desigualdades (3.13), (3.14) junto con:

$$\left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=q_1 I} > 0 \quad \left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=q_2 I} < 0 \quad (3.15)$$

aseguran la invariancia positiva del conjunto compacto  $T_\varepsilon$  y la existencia de un atractor pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$  en  $T_\varepsilon$ .  $\checkmark$

Vamos a demostrar, para concluir la demostración, las desigualdades (3.15).

Por un lado:

$$\begin{aligned} \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=q_1 I} &> d_m I - (a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*)q_1 I \\ &= I[d_m - (a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*)q_1] \\ &= I[d_m - d_m] = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

De esta forma:

$$\left. \frac{x(t) + z(t)}{dt} \right|_{x+z=q_1 I} = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=q_1 I} > 0.$$

Análogamente tenemos la segunda desigualdad:

$$\begin{aligned} \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=q_2 I} &< d_M I - d_m\gamma^*q_2 I = I(d_M - d_m\gamma^*q_2) \\ &= I\left(d_M - d_M\frac{d_m\gamma^*}{d_m\gamma^*}\right) = 0 \end{aligned}$$

con total analogía:

$$\left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=q_2I} = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=q_2I} < 0$$

Desafortunadamente, en esta ocasión **no** somos capaces de obtener la **existencia** de una **solución completa estable** que atraiga a todas las soluciones completas positivas como se hizo en el caso del modelo sin crecimiento en pared.

## 3.2. Ratio de concentración de nutriente variable

Vamos a estudiar el caso en el que el ratio de consumo de nutriente es constante, pero el ratio de concentración del mismo es variable. Aquí vamos a suponer que el ratio de concentración de nutriente  $\mathbf{I}$  puede variar de forma continua con el paso del tiempo, por lo que denotaremos por  $\mathbf{I}(t)$ . De forma similar a como hemos hecho en la anterior sección, suponemos que  $\mathbf{I}$  está acotada con valores positivos. En particular,  $\mathbf{I}(t) \in [i_m, i_M]$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ , donde  $0 < i_m < i_M < \infty$ .

En el resto de esta sección trataremos primero sobre el modelo sin pared y concluiremos introduciendo crecimiento en pared.<sup>3</sup>

### 3.2.1. Modelo de crecimiento sin pared

Consideramos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = D(I(t) - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -Dy(t) + a \frac{x(t)}{m + x(t)} y(t). \end{cases} \quad (3.17)$$

Sea  $w(t) := x(t) + y(t)$ . Entonces:

$$\frac{dw(t)}{dt} = D(I(t) - w). \quad (3.18)$$

Esta ecuación no tiene equilibrios cuando  $I(t)$  no es constante, pero tiene un **equilibrio no autónomo no trivial**. De hecho, es una solución especial que se construye usando una

<sup>3</sup>Debido a la analogía de esta sección con la anterior, en las demostraciones de los teoremas omitiremos algunos detalles.

técnica pullback<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} w(t) &= w(t_0)e^{-D(t-t_0)} + De^{-D(t-t_0)} \int_{t_0}^t I(s)e^{D(s-t_0)} ds \\ &= w(t_0)e^{-D(t-t_0)} + De^{-Dt} \int_{t_0}^t I(s)e^{Ds} ds, \end{aligned}$$

converge a:

$$w^*(t) = De^{-Dt} \int_{t_0}^t I(s)e^{Ds} ds,$$

cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$  y cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |w(t) - w^*(t)| = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} |w(t) - w^*(t)| = 0.$$

### Observación 3.2

Notar que  $w^*(t) \in [i_m, i_M]$  para todo  $t \in \mathbf{R}$  debido a las cotas para  $I$ .

**Lema 3.2.1** *Para cualquier tiempo inicial  $t_0 \in \mathbf{R}$  y cualquiera de las condiciones iniciales  $x_0, y_0 \geq 0$ , todas las soluciones del sistema (3.17) son no negativas y acotadas para todo  $t \geq t_0$ .*

### Demostración

Los coeficientes son continuamente diferenciables para  $x, y \geq 0$ . En particular, el término no lineal:

$$a \frac{xy}{m+x} = ay \left( 1 - \frac{m}{m+x} \right),$$

es no negativo y acotado por la función lineal  $ay$  en el cuadrante positivo, tal y como ya vimos en la demostración del **Lema** (3.1.1). Esto asegura la **existencia y unicidad de soluciones** para cualquier tiempo para el que permanezcan en el primer cuadrante.

Por continuidad de soluciones, la condición inicial  $x(t_0) = x_0 > 0$ ,  $x(t)$  tiene que tomar el valor 0 antes de tomar cualquier valor positivo. Pero:

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=0} = DI(t) = 0,$$

con lo que  $x(t)$  no puede tomar valores negativos. Con la condición inicial  $y(t_0) = y_0 > 0$ , existe  $t_1 > t_0$  tal que  $y(t) > 0$  en  $[t_0, t_1]$ . Además,

$$y(t) = y_0 e^{-D(t-t_0) + \int_{t_0}^t a \frac{x(s)}{m+x(s)} ds},$$

<sup>4</sup>Es tanto atrayente pullback como forward.

para  $t \in [t_0, t_1]$ . Debido a la unicidad de solución, esta expresión se cumple para todo  $t \leq t_0$ , así  $y(t)$  es no negativa. ■

**Teorema 3.2.1** *El sistema dinámico no autónomo generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.17) tiene un atractor pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$  en  $\mathbf{R}_+^2$ . Además,*

(1) *cuando  $D > a$ , la solución completa  $(x^*(t), y^*(t)) = (w^*(t), 0)$  es asintóticamente estable en  $\mathbf{R}_+^2$  y el atractor pullback tiene una única componente  $A(t) = \{(w^*(t), 0)\}$ ;*

(2) *cuando además:*

$$ai_m > D(m + i_M),$$

*el atractor pullback tiene componentes no triviales que incluyen  $(w^*(t), 0)$  y puntos estrictamente positivos;*

(3) *cuando tenemos la hipótesis de (2) y, además,*

$$D < a \quad \text{y} \quad a(m^2 + m(2i_M - i_m) + i_M^2) < D(m + i_M)^2,$$

*el atractor pullback contiene una solución completa no trivial que atrae a todas las otras soluciones completas positivas.*

### Demostración

En virtud del **Lema 3.2.1** y del hecho de que  $w^*(t) \in [i_m, i_M]$ , el conjunto compacto no vacío  $\overline{\mathbf{B}} := \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : i_m \leq x + y \leq i_M\}$  es positivamente invariante y absorbente en  $\mathbf{R}_+^2$  para la EDO (3.18).

El sistema dinámico no autónomo en  $\mathbf{R}_+^2$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.17) tiene así un atractor pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$  formado por subconjuntos no vacíos de  $\overline{\mathbf{B}}$ . Entonces  $(w^*(t), 0) \in A(t)$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ , ya que el atractor pullback contiene a todas las soluciones completas acotadas. Para probar (1) notamos que la primera ecuación del sistema (3.17) se puede acotar superiormente:

$$\frac{dy(t)}{dt} = - \left( D - a \frac{x(t)}{m + x(t)} \right) y(t) \leq -(D - a)y(t),$$

con lo que se tiene de forma inmediata que  $y(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para  $D > a$ .

En cuanto a (2), del signo positivo en la derivada de la segunda ecuación del sistema (3.17), tenemos que  $x(t)$  es creciente en la zona  $x = 0$  del conjunto absorbente  $\overline{\mathbf{B}}$ . La zona

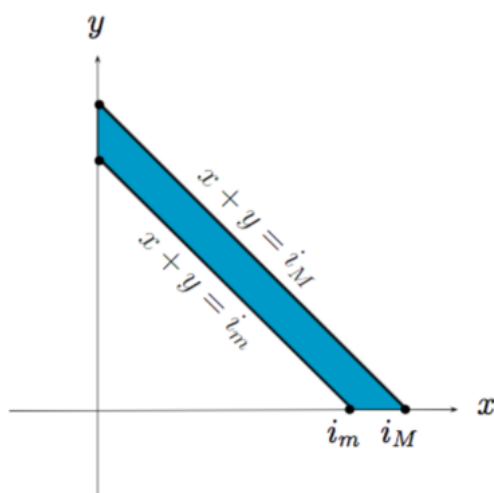


Figura 3.4: Representación gráfica del conjunto  $\bar{\mathbf{B}}$ .

$y = 0$  es invariante, pero para  $y = \varepsilon \ll i_m$  y  $i_m \leq x \leq i_M$ , la primera ecuación del sistema (3.17) da:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left( -D + a \frac{x(t)}{m + x(t)} \right) y(t) \geq \left( \frac{ai_m}{m + i_M} - D \right) y(t) > 0,$$

cuando  $ai_m > D(m + i_M)$ . Esto significa que el interior positivo del conjunto absorbente también contiene puntos del atractor pullback.

Finalmente, para ver (3) consideramos la primera EDO del sistema (3.17) restringida a la variedad estable  $x(t) + y(t) = w^*(t)$ , sobre la cual adquiere la forma:

$$\frac{dx(y)}{dt} = D(I(t) - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} (w^*(t) - x(t)). \quad (3.19)$$

Para cualquiera de las dos soluciones  $x_1(t), x_2(t)$  de (3.19) definimos  $\Delta_x(t) := x_1(t) - x_2(t)$ . Entonces  $\Delta_x$  satisface:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_x(t)}{dt} &= \frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \\ &= -Dx_1(t) + Dx_2(t) - a \frac{x_1(t)(m + x_2(t)) - x_2(t)(m + x_1(t))}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} w^*(t) + \\ &\quad + a \frac{x_1^2(t)(m + x_2(t)) - x_2^2(t)(m + x_1(t))}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \\ &= -D\Delta_x(t) - \frac{amw^*(t)}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \Delta_x(t) + a \frac{m(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)x_2(t)}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \Delta_x(t), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene por los razonamientos realizados en la demostración de la tercera parte del **Teorema 3.1.1**. Como  $0 \leq x(t) \leq w^*(t) \leq i_M$  y  $w^*(t) \geq i_m$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_x(t)}{dt} &= -D\Delta_x(t) - a \frac{amw^*(t)}{(m+x_1(t))(m+x_2(t))} \Delta_x(t) + a \frac{m(x_1(t)+x_2(t))+x_1(t)x_2(t)}{(m+x_1(t))(m+x_2(t))} \Delta_x(t) \\ &< -D\Delta_x(t) - a \frac{mi_m}{(m+i_M)^2} \Delta_x(t) + a\Delta_x(t), \end{aligned}$$

análogamente a la demostración de la segunda parte del **Teorema 3.1.1**. Así,  $\Delta_x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , siempre y cuando:

$$a(m^2 + m(2i_M - i_m) + i_M^2) < D(m + i_M)^2 \text{ ya que } a < D + a \frac{mi_m}{(m + i_M)^2}.$$

Esto también se cumple si  $a < D$ , en cuyo caso estamos en la situación (1) del Teorema. Sin embargo, puede también cumplirse si  $a$  es ligeramente mayor que  $a(m^2 + m(2i_M - i_m) + i_M^2) < D(m + i_m)^2$ , en cuyo caso para las estimaciones anteriores con  $x_1(t), x_2(t)$  igual a  $w^*(t)$ , el sistema es contractivo uniformemente estrictamente en el cuadrante positivo y entonces tiene una única solución completa como su atractor pullback en el cuadrante positivo.

### 3.2.2. Modelo de crecimiento con pared

Estudiaremos en esta parte lo que ocurre cuando hacemos variar el ratio de concentración de nutriente en el modelo con pared. Cuando  $\mathbf{D}$  es constante e  $\mathbf{I}$  varía con el tiempo, el modelo es:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = D(I(t) - x(t)) - a \frac{x(t)}{m+x(t)}(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t) \\ \frac{dy_1(t)}{dt} = -(\nu + D)y_1(t) + c \frac{x(t)}{m+x_1(t)}y_1(t) - r_1y_1(t) + r_2y_2(t) \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -\nu y_2(t) + c \frac{x(t)}{m+x(t)}y_2(t) + r_1y_1(t) + r_2y_2(t). \end{cases} \quad (3.20)$$

**Lema 3.2.2** *Supongamos que  $(x_0, y_{10}, y_{20}) \in \mathbf{R}_+^3$ . Entonces todas las soluciones del sistema (3.20) con datos iniciales  $(x(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0)) = (x_0, y_{10}, y_{20})$  son:*

- (i) *no negativas para todo  $t \geq t_0$ ,*
- (ii) *uniformemente acotadas en  $\mathbf{R}_+^3$ .*

*Además, el sistema dinámico no autónomo en  $\mathbf{R}_+^3$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.20) tiene un atractor pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$  en  $\mathbf{R}_+^3$ .*



**Demostración**

- (1) Por continuidad, cada solución tiene que tomar el valor 0 antes de tomar cualquier valor negativo. Con  $x = 0$ ,  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ , la EDO para  $x(t)$  se reduce a:

$$\frac{dx(t)}{dt} = DI(t) + b\nu y_1 > 0,$$

con lo que  $x(t)$  es estrictamente creciente en  $x = 0$ .

Con  $y_1 = 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ , la EDO reducida para  $y_1(t)$  es:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = r_2 y_2 \geq 0,$$

por tanto,  $y_1(t)$  es no decreciente en  $y_1 = 0$ .

De forma similar, con  $y_2 = 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y_1 \geq 0$ , la EDO para  $y_2(t)$  es:

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = r_1 y_1 \geq 0,$$

por lo que  $y_2(t)$  es no decreciente en  $y_2 = 0$ . Además,  $(x(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbf{R}_+^3$  para cualquier  $t \in \mathbf{R}$ .  $\checkmark$

- (2) Definimos para  $(x(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbf{R}_+^3$  la norma:

$$\|X(t)\|_1 := x(t) + y_1(t) + y_2(t).$$

Entonces  $\|X(t)\|_1 \leq S(t) \leq \frac{a}{c}\|X(t)\|_1$ , donde  $S(t) = x(t) + \frac{a}{c}(y_1(t) + y_2(t))$ , análogamente a como se hacía en la demostración de la segunda parte del **Lema 3.1.2**.

Derivando  $S(t)$  a lo largo del sistema (3.20), tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{a}{c} \frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{a}{c} \frac{dy_2(t)}{dt} \\ &\leq Di_M - Dx(t) - \left[ \frac{a}{c}(\nu + D) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c} \nu y_2(t). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Notemos que como  $a \geq c$  y  $0 < b < 1$ , entonces  $\frac{a}{c}(\nu + D) - b\nu \geq \nu + D - b\nu > D$ .

Sea  $\mu := \min\{D, \nu\}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &\leq Di_M - Dx(t) - \left[ \frac{a}{c}(\nu + D) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c} \nu y_2(t) \\ &\leq Di_M - Dx(t) - Dy_1(t) - \nu y_2(t) \\ &\leq Di_M - \mu S(t). \end{aligned}$$

De esta forma llegamos a:

$$\frac{dS(t)}{dt} < Di_M - \mu S(t). \quad (3.22)$$

Análogamente a como hemos razonado en la demostración de la segunda parte del **Lema 3.1.2**, podemos comprobar que si  $S(t_0) < \frac{Di_M}{\mu}$ , entonces  $S(t) \leq \frac{Di_M}{\mu}$  para todo  $t \geq t_0$ .

Por otro lado, si  $S(t_0) \geq \frac{Di_M}{\mu}$ , entonces  $S(t)$  será no creciente para todo  $t \geq t_0$ , con lo que  $S(t) \leq S(t_0)$ . Entonces implica que  $\|X(t)\|_1$  está acotada superiormente:

$$\|X(t)\|_1 \leq \max \left\{ \frac{Di_M}{\mu}, x(t_0) + \frac{a}{c}(y_1(t_0) + y_2(t_0)) \right\} \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Se sigue entonces que para todo  $\varepsilon > 0$ , el conjunto compacto no vacío:

$$\bar{\mathbf{B}}_\varepsilon := \left\{ (x, y_1, y_2) \in \mathbf{R}_+^3 : x + \frac{a}{c}(y_1 + y_2) \leq \frac{Di_M}{\mu} + \varepsilon \right\},$$

es positivamente invariante y absorbente en  $\mathbf{R}_+^3$ .

El sistema dinámico no autónomo en  $\mathbf{R}_+^3$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.20) tiene por tanto un atrator pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$ , que consiste en subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbf{R}_+^3$  tal que están contenidos en  $\bar{\mathbf{B}}_\varepsilon$ . ■

Usando de nuevo el cambio de variables  $z(t)$  y  $\alpha(t)$  definidos como ya hicimos en (3.6), el sistema (3.20) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= D(I(t) - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t) + b\nu\alpha(t)z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\nu z(t) - D\alpha(t)z(t) + c \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t) \\ \frac{d\alpha(t)}{dt} &= -D\alpha(t)(1 - \alpha(t)) - r_1\alpha(t) + r_2(1 - \alpha(t)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

La tercera ecuación del sistema (3.23) tiene un único punto de equilibrio que es:

$$\alpha^* = \frac{D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D},$$

que es asintóticamente estable en  $(0, 1)$ , tal y como demostramos en el primer capítulo del trabajo. Así, cuando  $t \rightarrow \infty$ , sustituyendo  $\alpha(t)$  por  $\alpha^*$  en el sistema (3.23), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= D(I(t) - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t) + b\nu\alpha^*(t)z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\nu z(t) - D\alpha^*(t)z(t) + c \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Para obtener más detalles de la dinámica de las soluciones de este sistema (3.24) a lo largo plazo, vamos a presentar el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.2** *Supongamos que  $I : \mathbf{R} \rightarrow [i_m, i_M]$ , con  $0 < i_m < i_M < \infty$ , es continua,  $a \geq c$ ,  $b \in (0, 1)$  y  $\nu > 0$ . El sistema (3.24) tiene un atractor pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$  contenido en el primer cuadrante. Además,*

(1) *cuando  $\nu + D\alpha^* > c$ , la solución completa  $(w^*(t), 0)$  es asintóticamente estable en  $\mathbf{R}_+^2$ , donde:*

$$w^*(t) = De^{-Dt} \int_{-\infty}^t I(s)e^{Ds} ds,$$

*y el atractor pullback  $\mathbf{A}$  tiene una única componente  $A(t) = \{(w^*(t), 0)\}$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ ,*

(2) *cuando:*

$$\nu + D\alpha^* < \frac{cDi_M}{m(a - c + \nu + b\nu\alpha^* + D) + Di_M},$$

*el atractor pullback  $\mathbf{A}$  también contiene puntos estrictamente contenidos en el cuadrante positivo, además del conjunto  $\{(w^*(t), 0)\}$ .*

### Demostración

(1) Cuando  $\nu + D\alpha^* > c$ , tenemos:

$$\frac{dz(t)}{dt} = - \left( \nu + D\alpha^* - c \frac{x(t)}{m + x(t)} \right) z(t) \leq 0,$$

lo que implica que  $z(t)$  decrece a 0 cuando  $t$  tiende a  $\infty$ , para cualquier  $z(t_0) \geq 0$ . En consecuencia,  $x(t)$  satisface:

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(I(t) - x(t)),$$

y equivalentemente es:

$$x(t) = x(t_0)e^{-D(t-t_0)} - De^{-Dt} \int_{t_0}^t I(s)e^{Ds} ds,$$

que converge a  $w^*(t)$ , bien cuando  $t \rightarrow \infty$ , o bien cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$ .  $\checkmark$

(2) Sea  $u(t) := x(t) + z(t)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \\ &= D(I(t) - x(t)) + \frac{(c - a)x(t)}{m + x(t)} z(t) + b\nu\alpha^* z(t) - \nu z(t) - D\alpha^* z(t). \end{aligned}$$

Por un lado tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &\leq D(I(t) - x(t)) - (\nu - b\nu\alpha^* + D\alpha^*)z(t) \\ &< DI(t) - Dx(t) - D\alpha^*z(t) \\ &\leq Di_m - D\alpha^*u(t). \end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &\geq D(I(t) - x(t)) - (a - c + \nu + D\alpha^* - b\nu\alpha^*)z(t) \\ &\geq DI(t) - Dx(t) - (a - c + \nu - b\nu\beta^* + D)z(t) \\ &> Di_m - (a - c + \nu - b\nu\beta^* + D)u(t). \end{aligned}$$

Además, tenemos las siguientes cotas superior e inferior para  $u(t)$ :

$$l := \frac{Di_M}{a - c + \nu - b\nu\alpha^* + D} < u(t) < \frac{i_M}{\alpha^*}. \quad (3.25)$$

Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, definimos  $T_\varepsilon$  como el trapecoide:

$$T_\varepsilon := \left\{ (x, z) \in \mathbf{R}_+^2, x \geq \varepsilon, z \geq \varepsilon, \frac{Di_M}{a - c + \nu - b\nu\alpha^* + D} \leq x + z \leq \frac{i_M}{\alpha^*} \right\},$$

con lo que  $T_\varepsilon$  es absorbente.

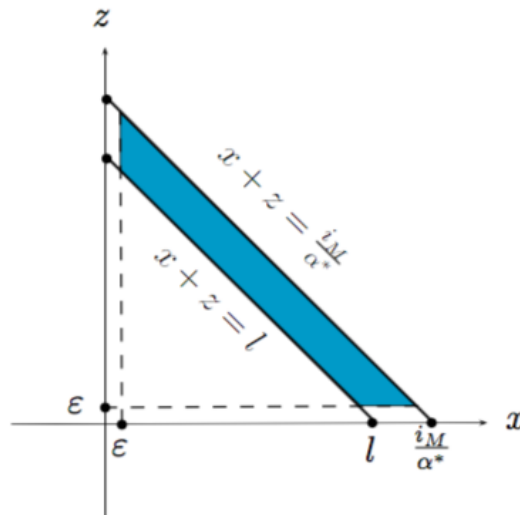


Figura 3.5: Representación gráfica del conjunto  $T_\varepsilon$ .

Demostremos ahora que es también invariante. De forma muy similar a la demostración del **Teorema 3.2.1**, que cuando  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño se tienen las siguientes

desigualdades sobre la acotación de  $T_\varepsilon$ :

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=\varepsilon} = D(I(t) - \varepsilon) + \left( b\nu\alpha^* - \frac{a\varepsilon}{m + \varepsilon} \right) z(t) > 0$$

$$\left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{z=\varepsilon} > \left( -\nu + D\alpha^* + \frac{c(l - \varepsilon)}{m + l - \varepsilon} \right) \varepsilon > 0$$

$$\left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=\frac{i_M}{\alpha^*}} < 0$$

$$\left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=l} > 0.$$

Veamos las dos últimas desigualdades primero. Comencemos por:

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=\frac{i_M}{\alpha^*}} < Di_M - D\alpha^* \frac{i_M}{\alpha^*} = 0. \quad \checkmark$$

Para la segunda:

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=l} < Di_M - D(a - c + \nu + b\nu\beta^* + D)l = Di_m - Di_m = 0. \quad \checkmark$$

Luego  $T_\varepsilon$  es invariante.

En conclusión, esto implica que existe un atractor pullback  $\mathbf{A} = \{A(t) : t \in \mathbf{R}\}$  en  $T_\varepsilon$ .

■



# Capítulo 4

## Modelo con retardo

### 4.1. Introducción

A la hora de estudiar los modelos de quimiostato hay otra posibilidad que aún no hemos contemplado. La posibilidad de considerar un retardo en tales modelos de tal forma que quede explicado el crecimiento oscilatorio de los microorganismos. Los retardos son naturales en los sistemas biológicos, debido a que permiten la coexistencia de poblaciones en competición como una solución periódica no forzada.

La presencia de términos con retardo en modelos de quimiostato está completamente justificada, ya que el comportamiento de los sistemas dinámicos no sólo depende en general del presente, sino también de su historia. A veces sólo un corto periodo de tiempo pasado es el que proporciona información relevante al sistema, que es el caso de **retardos constantes o variables**, y otras veces es toda la historia la que hay que tener en cuenta, como sucede con los **retardos distribuidos**.

Debemos notar que la presencia de retardos no constantes hace que estemos trabajando con modelos de quimiostato no autónomos.

### 4.2. Modelo sin crecimiento en pared

Los primeros modelos de quimiostato con retardo que se han estudiado en la historia han sido gracias a **Caperon** [8]. Más tarde, **Bush and Cook** propusieron un modelo de quimiostato con retardo en el ratio de crecimiento intrínseco de los microorganismos, pero sin retardo en la ecuación del nutriente [3].

Podemos introducir entonces un retardo al modelo más sencillo que ya hemos estudiado:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx - aU(x(t))y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -Dy(t) + cU(x(t))y(t),\end{aligned}$$

llegando al siguiente modelo, siendo  $\rho(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow [0, h]$  una función continua, con  $h > 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx - aU(x(t))y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -Dy(t) + cU(x(t - \rho(t)))y(t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

En este caso, hemos considerado un retardo variable en lugar de uno constante.

### **CONSIDERACIONES PREVIAS:**

Para resolver el sistema (4.1), necesitamos fijar los valores de la solución no sólo en un tiempo inicial  $t_0 \in \mathbf{R}$ , sino también un intervalo  $[t_0 - h, t_0]$ . Realmente lo que necesitamos es encontrar las soluciones del sistema (4.1) para  $t \geq t_0$  tal que:

$$x(t) = \phi_1(t - t_0), \quad y(t) = \phi_2(t - t_0), \quad \text{para } t \in [t_0 - h, t_0],\tag{4.2}$$

donde  $(\phi_1, \phi_2) \in C_h := C([-h, 0]; \mathbf{R}^2)$ .

Observemos que el sistema (4.1) se puede escribir como ecuación diferencial funcional no autónoma:

$$\frac{dz(t)}{dt} = f(t, z_t),\tag{4.3}$$

donde  $f(\cdot, \cdot) : \mathbf{R} \times C_h \rightarrow \mathbf{R}^2$  está dada por:

$$f(t, \phi) = \begin{pmatrix} DI - D\phi_1(0) - aU(\phi_1(0))\phi_2(0) \\ -D\phi_2(0) + cU(\phi_1(-\rho(t)))\phi_2(0) \end{pmatrix}$$

para:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in C_h, \quad z_t \in C_h,$$

que denota la función:

$$z_t(\theta) = z(t + \theta), \quad \text{para } \theta \in [-h, 0],$$

para cualquier función continua  $z : [-h, +\infty] \rightarrow \mathbf{R}^2$ .

Para resolver el problema de valores iniciales para (4.3), una posibilidad es considerar una condición inicial  $\phi \in C_h$  en el tiempo inicial  $t_0 \in \mathbf{R}$ . Esto nos proporcionará, bajo ciertas



condiciones adecuadas, la única solución  $z(\cdot; t_0, \phi)$  de (4.3) tal que  $z_0(\cdot; t_0, \phi) = \phi$ , lo que significa que:

$$z_{t_0}(\theta; t_0, \phi) := z(t_0 + \theta; t_0, \phi) = \phi(\theta) \text{ para } \theta \in [-h, 0].$$

De esta forma, podemos construir un sistema dinámico no autónomo, como puede ser un proceso, en el espacio de fases  $C_h$  en el siguiente sentido: para cualquier  $t \geq t_0$ , definimos el operador  $Z(t, t_0) : C_h \rightarrow C_h$  como:

$$Z(t, t_0)\phi = z_t(\cdot; t_0, \phi), \text{ para } \phi \in C_h. \quad (4.4)$$

### 4.2.1. Signo y acotación de soluciones

Al igual que en los capítulos previos, la región biológicamente interesante en nuestro modelo es aquella donde las soluciones sean positivas y finitas. En el próximo lema demostraremos que dichas soluciones del sistema (4.1) son no negativas y acotadas.

**Lema 4.2.1** *Dada cualquier condición inicial  $\phi \geq 0$  en  $[t_0 - h, t_0]$ , las soluciones de (4.1) son no negativas.*

#### Demostración

Lo primero que vamos a demostrar es que si una solución comienza en el cuadrante:

$$\mathbf{R}_+^2 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\},$$

permanece allí para siempre.

Por continuidad, cada solución debe tomar el valor 0 antes de alcanzar cualquier valor negativo. De hecho, como:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{y=0} = [-Dy(t) + cU(x(t - \rho(t)))y(t)] \Big|_{y=0} = 0.$$

entonces  $y$  no decrece en  $y = 0$ , con lo que nunca tomará valores negativos.

Por otro lado:

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=0} = [DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t)] \Big|_{x=0} = DI > 0,$$

lo que implica que  $x$  es creciente en  $x = 0$ .

En conclusión, las soluciones del sistema (4.1) son no negativas para cualquier  $t \geq t_0$ . ■

**Teorema 4.2.1** *Supongamos que:*

$$\delta := D - c > 0 \quad (4.5)$$

entonces para todo  $t > t_0$ , las soluciones del sistema (4.1) están acotadas para cualquier condición inicial<sup>1</sup>.

### Demostración

Definimos el funcional  $u(t) := x(t) + y(t)$ . Derivando  $u$  a lo largo de soluciones del sistema (4.1), donde  $0 < \delta < D$  definido como en (4.5):

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} \\ &= DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t) - Dy(t) + cU(x(t - \rho(t)))y(t) \\ &\leq DI - Dx(t) - ay(t) - Dy(t) + cy(t) \\ &\leq DI - Dx(t) - Dy(t) + cy(t) \\ &= DI - Dx(t) - (D - c)y(t) \\ &= DI - Dx(t) - \delta y(t). \end{aligned}$$

Definimos:

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : Dx + \delta y \leq DI\}.$$

Vamos a estudiar las cotas superiores de las soluciones caso por caso:

- a) Si una trayectoria comienza en  $t = t_0$  en  $\mathbf{R}_+^2 \setminus \Omega$ , entonces la función  $u(x, y)$  a lo largo de las trayectorias que comienzan en este punto deben ser decrecientes para todo  $t \geq t_0$  tal que  $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2$ , pues en tal zona,  $Dx + \delta y > DI$ , con lo que:

$$\frac{du(t)}{dt} = DI - Dx(t) - \delta y(t) < 0,$$

es decir,  $u$  decrece. De esta forma,

$$u(t) := u(x(t), y(t)) \leq u(x(t_0), y(t_0)) = x(t_0) + y(t_0) \leq |\phi_1| + |\phi_2|.$$

Así:

$$\|(x(t), y(t))\| := x(t) + y(t) = u(t) \leq |\phi_1| + |\phi_2|, \quad (4.6)$$

con lo que tenemos que  $x$  e  $y$  están acotadas.  $\checkmark$

<sup>1</sup>Notemos que tal condición inicial siempre está acotada porque  $\phi$  es continua en  $[-h, 0]$ .

- b) Si una trayectoria comienza o entra en la región  $\Omega$  en un tiempo  $t = t_1 \geq t_0$ , está allí para siempre, entonces por la definición de  $\Omega$  tenemos que para  $t \geq t_1$ ,  $Dx(t) + \delta y(t) \leq DI$ , de donde se deduce:

$$\frac{D}{\delta}x(t) + y(t) \leq \frac{DI}{\delta}.$$

De esta forma, como  $0 < \delta < D$ , entonces  $\frac{D}{\delta} > 1$ , con lo que:

$$\|(x(t), y(t))\| := x(t) + y(t) < \frac{D}{\delta}x(t) + y(t) \leq \frac{DI}{\delta}, \quad (4.7)$$

de donde se tiene que  $x$  e  $y$  están acotadas.  $\checkmark$

- c) Si una trayectoria comienza y entra o vuelve a entrar después de haber salido de la región  $\Omega$  en un tiempo  $t = t_{2i-1} \geq t_0$  y sale en el tiempo  $t = t_{2i}$  ( $i=1,2,\dots$ ), entonces (4.6) se verifica para todos los tiempos  $(t_{2i-1}, t_{2i})$ .  $\checkmark$

En resumen, para cualquier  $t > t_0$ , las soluciones  $(x(t), y(t))$  están acotadas por:

$$\|(x(t), y(t))\| := x(t) + y(t) \leq \max \left\{ |\phi_1| + |\phi_2|, \frac{DI}{\delta} \right\}.$$

■

### 4.2.2. Análisis de la Estabilidad

Consideramos el modelo del quimiostato con retardo dado por el sistema (4.1) con una función de retardo variable  $\rho(\cdot) \in C^1(\mathbf{R}; [0, h])$ .

Es fácil darse cuenta de que  $(I, 0)$  es un equilibrio factible y asintóticamente estable cuando  $D \geq c$ . De hecho, cuando  $D \geq c$ , se sigue directamente de la segunda ecuación del sistema (4.1) que  $y'(t) < 0$  para todo  $t$ . Por tanto,  $y = 0$  es un equilibrio asintóticamente estable de la segunda ecuación de (4.1), y haciendo  $y = 0$  en la primera ecuación del sistema (4.1) tenemos inmediatamente  $x = I$ .

Cualquier otro equilibrio no trivial  $(x^*, y^*)$  debe satisfacer:

$$DI - Dx^* - a \frac{x^*}{m + x^*} y^* = 0; \quad (4.8)$$

$$-Dy^* + c \frac{x^*}{m + x^*} y^* = 0. \quad (4.9)$$

Pues ahora, sólo estamos interesados en los equilibrios positivos debido al significado de las soluciones de nuestro problema. Dividiendo (4.9) por  $y^*$  y despejando  $x^*$ , obtenemos:

$$c \frac{x^*}{m + x^*} = D \Leftrightarrow cx^* = mD + Dx^* \Leftrightarrow cx^* - Dx^* = mD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^*(c - D) = mD \Leftrightarrow x^* = \frac{mD}{c - D}$$

Por otro lado, de la ecuación (4.8), también obtenemos:

$$DI - Dx^* - a \frac{x^*}{m + x^*} y^* = 0 \quad \equiv$$

$$DI - D \frac{mD}{c - D} - a \frac{\frac{mD}{c - D}}{m + \frac{mD}{c - D}} y^* = 0. \quad \equiv$$

$$DI - \frac{mD^2}{c - D} = \frac{aD}{c} y^*,$$

de otra forma sería también equivalente:

$$y^* = \frac{DI - \frac{mD^2}{c - D}}{\frac{aD}{c}} = \frac{c^2 DI - cD^2 I - cmD^2}{(c - D)aD}$$

En resumen, tenemos que:

$$x^* = \frac{mD}{c - D}, \quad y^* = \frac{c^2 DI - cD^2 I - cmD^2}{(c - D)aD}. \quad (4.10)$$

Nos disponemos a analizar las propiedades de estabilidad del equilibrio positivo  $(x^*, y^*)$ . Para ello, construiremos un funcional de Lyapunov adecuado y obtendremos condiciones suficientes sobre los parámetros asociados a la función de retardo y sobre el resto de parámetros del modelo, con objetivo de asegurar la estabilidad de este punto estacionario.

**Teorema 4.2.2** *Supongamos que  $\rho(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow [0, h]$  tal que  $\rho'(t) \leq M < 1$ . Entonces el equilibrio positivo  $(x^*, y^*)$  definido en (4.10) para el sistema (4.1) es globalmente asintóticamente estable.*

### Demostración

Primero introducimos la transformación siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &:= x(t) - x^* \\ \tilde{y}(t) &:= \log \frac{y(t)}{y^*} \\ \tilde{U}(\cdot) &:= U(\cdot + x^*) - U(x^*). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Entonces, el sistema inicial (4.1) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= -D\tilde{x}(t) - ay^*e^{\tilde{y}(t)}\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - ay^*U(x^*)(e^{\tilde{y}(t)} - 1) \\ \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} &= c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))).\end{aligned}\tag{4.12}$$

En efecto, como de (4.8) se tiene  $DI - Dx^* = a\frac{x^*}{m + x^*}y^* = aU(x^*)y^*$ , entonces:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= DI - D\tilde{x}(t) - Dx^* - a\left(\tilde{U}(\tilde{x}(t)) + U(x^*)\right)y^*e^{\tilde{y}(t)} \\ &= -D\tilde{x}(t) - ay^*e^{\tilde{y}(t)}\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - ay^*e^{\tilde{y}(t)}U(x^*) + aU(x^*)y^* \\ &= -D\tilde{x}(t) - ay^*e^{\tilde{y}(t)}\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - ay^*U(x^*)(e^{\tilde{y}(t)} - 1).\end{aligned}$$

Por otro lado, de (4.9) deducimos  $-Dy^* = -c\frac{x^*}{m + x^*}y^* = -cU(x^*)y^*$ , con lo que:

$$\begin{aligned}y^*e^{\tilde{y}(t)}\frac{d\tilde{y}(t)}{dt} &= -Dy^*e^{\tilde{y}(t)} + c\left(\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) + U(x^*)\right)y^*e^{\tilde{y}(t)} \\ &= -Dy^*e^{\tilde{y}(t)} + c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t)))y^*e^{\tilde{y}(t)} + cU(x^*)y^*e^{\tilde{y}(t)} \\ &= c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t)))y^*e^{\tilde{y}(t)},\end{aligned}\tag{4.13}$$

y por tanto  $\frac{d\tilde{y}(t)}{dt} = -\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t)))$ .

Ahora construimos un funcional de Lyapunov, paso a paso, adecuado. Primero definimos:

$$V_1(\tilde{x}) := \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds.$$

Si  $x > x^*$  entonces  $\tilde{x} > 0$ ; de esta forma, como  $s \in (0, \tilde{x}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $s + x^* > x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$  por lo que  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) > 0$ . En conclusión,

$$V_1(\tilde{x}) := \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds > 0,$$

siempre y cuando  $x \neq x^*$ .

Análogamente, si  $x < x^*$ , entonces  $\tilde{x} < 0$ ; por lo tanto, como  $s \in (\tilde{x}(t), 0)$  entonces  $s < 0$ . Luego  $s + x^* < x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$ , con lo que  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) < 0$ . En conclusión,

$$V_1(\tilde{x}) := \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds = - \int_{\tilde{x}(t)}^0 \tilde{U}(s) ds > 0$$

siempre y cuando  $x \neq x^*$ .

Resumiendo,  $V_1(\tilde{x}) > 0$  para todo  $x \neq x^*$ . Derivando  $V_1$  a lo largo de soluciones del sistema (4.12) tenemos:

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - ay^*e^{\tilde{y}(t)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) - ay^*U(x^*)(e^{\tilde{y}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)).$$

Definimos ahora:

$$V_2(\tilde{y}) := \int_0^{\tilde{y}(t)} (e^s - 1) ds.$$

Ahora bien, si  $y > y^*$ , entonces  $\tilde{y} > 0$ ; de esta forma, como  $s \in (0, \tilde{y}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $e^s - 1 > 1 - 1 = 0$ , por lo que:

$$V_2(\tilde{y}) := \int_0^{\tilde{y}(t)} (e^s - 1) ds > 0,$$

siempre y cuando  $y \neq y^*$ .

Análogamente, si  $y(t) < y^*$ , entonces  $\tilde{y} > 0$ ; por tanto, como  $s \in (\tilde{y}(t), 0)$ , entonces  $s < 0$ . Entonces  $e^s - 1 < 1 - 1 = 0$ , con lo que:

$$V_2(\tilde{y}) := \int_0^{\tilde{y}(t)} (e^s - 1) ds = - \int_{\tilde{y}(t)}^0 (e^s - 1) ds > 0,$$

siempre y cuando  $y \neq y^*$ .

Resumiendo,  $V_2(\tilde{y}) > 0$  para todo  $y \neq y^*$ . Derivando  $V_2$  a lo largo de soluciones del sistema (4.12) tenemos:

$$\frac{dV_2}{dt} = c(e^{\tilde{y}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))).$$

Y consideramos ahora el funcional:

$$v(\tilde{x}, \tilde{y}) := V_1(\tilde{x}(t - \rho(t))) + \lambda V_2(\tilde{y}(t)),$$

con  $\lambda := \frac{a}{c}(1 - M)U(x^*)y^*$ , tenemos lo que queríamos.

#### Nota 4.1

Notemos que si  $(x, y) = (x^*, y^*)$ , nos encontrarnos en el equilibrio, por lo tanto, por definición de punto estacionario no me moveré de él.

Derivando  $v$  a lo largo de soluciones del sistema (4.12) tenemos:

$$\begin{aligned}
v' &= \left\{ -D\tilde{x}(t - \rho(t))\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) - ay^*e^{\tilde{y}(t)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \rho(t))) \right. \\
&\quad \left. - ay^*U(x^*)(e^{\tilde{y}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) \right\} (1 - M) \\
&\quad + \frac{a}{c}(1 - M)U(x^*)y^*c(e^{\tilde{y}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) \\
&= \left\{ -D\tilde{x}(t - \rho(t))\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) - ay^*e^{\tilde{y}(t)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \rho(t))) \right\} (1 - M) < 0
\end{aligned}$$

con lo que  $v$  es definida negativa, deduciendo que el equilibrio positivo  $(x^*, y^*)$  es globalmente asintóticamente estable. ■

### 4.3. Modelo de crecimiento con pared

El sistema (4.1) estudiado en la anterior sección representa el comportamiento de un quimiostato con retardo variable. Pero no refleja el crecimiento de microorganismos en la pared.

Como ya sabemos, es muy frecuente que los microorganismos no sólo crezcan en el medio de crecimiento, sino que también lo hagan en las paredes del recipiente donde están contenidos.

De esta forma, el modelo con pared estudiado en capítulos previos, o sea:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t) \\
\frac{dy_1(t)}{dt} &= -(\nu - D)y_1(t) + cU(x(t))y_1(t) - r_1y_1(t) + r_2y_2(t) \\
\frac{dy_2(t)}{dt} &= -\nu y_2(t) + cU(x(t))y_2(t) + r_1y_1(t) - r_2y_2(t)
\end{aligned}$$

queda, una vez introducido el correspondiente retardo variable, como:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t - \tau_1(t)) \\
\frac{dy_1(t)}{dt} &= -(\nu - D)y_1(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))y_1(t) - r_1y_1(t) + r_2y_2(t) \\
\frac{dy_2(t)}{dt} &= -\nu y_2(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))y_2(t) + r_1y_1(t) - r_2y_2(t),
\end{aligned} \right. \quad (4.14)$$

donde  $\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow [0, h]$ , con  $h > 0$ , son funciones continuas.

**CONSIDERACIONES PREVIAS:**

Cuando el ratio de limpieza del quimiostato no es suficientemente rápido, el crecimiento en la pared se convierte en un factor importante a tener en cuenta. Por ello, ahora vamos a estudiar el **modelo de quimiostato con retardos variables y crecimiento en pared**. Trabajaremos entonces con el sistema (4.14), que volvemos a escribirlo:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t - \tau_1(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -(\nu - D)y_1(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))y_1(t) - r_1y_1(t) + r_2y_2(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\nu y_2(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))y_2(t) + r_1y_1(t) - r_2y_2(t). \end{cases}$$

Suponemos que:

$$x(t) = \phi_1(t - t_0), \quad y_1(t) = \phi_{21}(t - t_0), \quad y_2(t) = \phi_{22}(t - t_0), \quad (4.15)$$

para  $t \in [t_0 - h, t_0]$ , donde  $(\phi_1, \phi_{21}, \phi_{22}) \in C([-h, 0]; \mathbf{R}^3) =: \tilde{C}_h$ . Denotamos por  $\phi = (\phi_1, \phi_{21}, \phi_{22})$ , con lo que el sistema (4.14) puede escribirse como la siguiente ecuación diferencial funcional no autónoma:

$$\frac{dz(t)}{dt} = g(t, z_t), \quad (4.16)$$

donde  $g(\cdot, \cdot) : \mathbf{R} \times \tilde{C}_h \rightarrow \mathbf{R}^3$  está dada por:

$$g(t, \phi) = \begin{pmatrix} DI - D\phi_1(0) - aU(\phi_1(0))(\phi_{21}(t) + \phi_{22}(0)) + b\nu\phi_{21}(-\tau(t)) \\ -(\nu + D)\phi_{21}(t) + cU(\phi_1(-\tau_2(0)))\phi_{21}(0) - r_1\phi_{21}(0) + r_2\phi_{22}(0) \\ -\nu\phi_{22}(0) + cU(\phi_1(-\tau(t)))\phi_{22}(0) + r_1\phi_{21}(0) - r_1\phi_{22}(0) \end{pmatrix},$$

y  $z_t \in \tilde{C}_h$  es la función  $z_t(\theta) = z(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$  para cualquier función continua  $z : [-h, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^3$ .

La existencia y unicidad de soluciones del (4.16) con condiciones iniciales (4.15) se puede establecer sencillamente bajo ciertos supuestos sobre la función de consumo  $U$ . [9] Entonces tenemos que la única solución  $z(\cdot; t_0, \phi)$  de (4.16) es tal que  $z_{t_0}(\cdot; t_0, \phi)$ , es decir,

$$z_{t_0}(\theta; t_0, \phi) := z(t_0 + \theta; t_0, \phi) = \phi(t), \quad \text{para } \theta \in [-h, 0].$$

En consecuencia, construimos un sistema no autónomo o proceso en el espacio de fases  $\tilde{C}_h$ ,  $Z(t, t_0) : \tilde{C}_h \rightarrow \tilde{C}_h$  definida para todo  $t \geq t_0$  como:

$$Z(t, t_0)\phi = z_t(\cdot; t_0, \phi), \quad \phi \in \tilde{C}_h.$$



En las siguientes secciones demostraremos que todas las soluciones de (4.16) son no negativas y acotadas para todo  $t \geq t_0$  correspondientes a condiciones iniciales (4.15) no negativas y acotadas.

### 4.3.1. Signo y acotación de soluciones

Vamos a dar resultados muy útiles para nuestro problema en cuestión.

**Lema 4.3.1** *Dadas cualesquiera condiciones iniciales (4.1) en  $[t_0 - h, t_0]$ , las condiciones iniciales del sistema (4.14) son no negativas.*

#### Demostración

Vamos a comenzar a demostrar que si una solución que comienza en el cuadrante:

$$\mathbf{R}_+^3 = \{(x, y_1, y_2) : x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\},$$

permanece allí siempre. De hecho, por continuidad cada solución tiene que tomar el valor 0 antes de alcanzar cualquier valor negativo. Además, cuando  $x = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ , la primera ecuación del sistema (4.14) se reduce a:

$$\frac{dx(t)}{dt} = DI + b\nu y_1(t - \tau_1(t)) > 0,$$

con lo que  $x(t)$  es estrictamente creciente en  $x = 0$ . Cuando  $y_1 = 0, x \geq 0, y_2 \geq 0$ , la EDO reducida para  $y_1(t)$  sería:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = r_2 y_2 \geq 0,$$

con lo que  $y_1(t)$  es no decreciente en  $y_1 = 0$ . De forma muy similar,  $y_2$  es no decreciente en  $y_2 = 0$ , quedando la EDO reducida:

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = r_1 y_1(t) \geq 0.$$

Por tanto,  $(x(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbf{R}_+^3$  para cualquier  $t$ . ■

Ahora presentamos un resultado de acotación de soluciones de (4.14).

**Teorema 4.3.1** *Supongamos que  $\tau_1'(t) \leq M_1 < 1$ , entonces las soluciones de (4.14) están acotadas para todas las condiciones iniciales, siempre y cuando:*

$$\mu := \min\{\delta, \nu - c\} > 0, \quad \text{con } \delta := D - \frac{\nu M_1}{1 - M_1} - c. \quad (4.17)$$

**Demostración**

Definimos el funcional:

$$v(x(t), y_1(t), y_2(t)) := x(t) + by_1(t) + by_2(t) + \frac{b\nu}{1 - M_1} \int_{t-\tau_1(t)}^t y_1(s) ds.$$

Entonces la derivada de  $v$  a lo largo de soluciones del sistema (4.14) es:

$$\begin{aligned} v'(x(t), y_1(t), y_2(t)) &= DI - Dx(t) - aU(x(t))(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t - \tau_1(t)) - \\ &\quad - b(\nu + D)y_1(t) - b\nu y_2(t) + bcU(x(t - \tau_2(t)))(y_1(t) + y_2(t)) + \\ &\quad + \frac{b\nu}{1 - M_1} (y_1(t) - (1 - \tau_1'(t))y_1(t - \tau_1(t))). \end{aligned}$$

Como  $\tau_1'(t) \leq M_1 < 1$  y  $\frac{1}{1 - M_1} < 1$ , entonces:

$$\frac{-1}{1 - M_1} (1 - \tau_1'(t)) \leq -1.$$

Además, usando la propiedad  $U(\cdot) \leq 1$ :

$$\begin{aligned} v' &= DI - Dx(t) - aU(x(t))(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t - \tau_1(t)) - \\ &\quad - b(\nu + D)y_1(t) - b\nu y_2(t) + bcU(x(t - \tau_2(t)))(y_1(t) + y_2(t)) + \\ &\quad + \frac{b\nu}{1 - M_1} y_1(t) - \frac{b\nu}{1 - M_1} (1 - \tau_1'(t))y_1(t - \tau_1(t)) \\ &\leq DI - Dx(t) - b(\nu + D)y_1(t) - b\nu y_2(t) + bc(y_1(t) + y_2(t)) + \\ &\quad + \frac{b\nu}{1 - M_1} y_1(t) + \left(1 - \frac{1}{1 - M_1} (1 - \tau_1'(t))\right) b\nu y_1(t - \tau_1(t)) \\ &\leq DI - Dx(t) - b(\nu + D)y_1(t) - b\nu y_2(t) + bc(y_1(t) + y_2(t)) + \frac{b\nu}{1 - M_1} y_1(t) \\ &= DI - Dx(t) - b \left( \nu + D - c - \frac{\nu}{1 - M_1} \right) y_1(t) - b(\nu - c)y_2(t) \\ &= DI - Dx(t) - b \left( D - c - \nu \left[ \frac{1}{1 - M_1} - 1 \right] \right) y_1(t) - b(\nu - c)y_2(t) \\ &= DI - Dx(t) - b \left( D - c - \nu \frac{M_1}{1 - M_1} \right) y_1(t) - b(\nu - c)y_2(t) \\ &\leq DI - Dx(t) - b\delta y_1(t) - b(\nu - c)y_2(t), \end{aligned}$$

Donde  $\delta$  está definido en (4.17).

Definimos la región:

$$\tilde{\Omega} := \{(x, y_1, y_2) \in \mathbf{R}_+^3 : Dx + b\delta y_1 + b(\nu - c)y_2 \leq DI\}.$$

Si una trayectoria comienza en  $t = t_0$  en  $\mathbf{R}_+^3 \setminus \tilde{\Omega}$ , entonces:

$$Dx + b\delta y_1 + b(\nu - c)y_2 > DI,$$

con lo que el funcional  $v'(x(t), y_1(t), y_2(t))$  a lo largo de esa trayectoria comenzando en ese punto será decreciente para todo  $t \geq t_0$  tal que  $(x(t), y_1(t), y_2(t))$  en  $\mathbf{R}_+^3 \setminus \tilde{\Omega}$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} v(x(t), y_1(t), y_2(t)) &\leq v(x(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0)) \\ &= x(t_0) + by_1(t_0) + by_2(t_0) + \frac{d\nu}{1 - M_1} \int_{t_0 - \tau_1(t_0)}^{t_0} y_1(s) ds \\ &\leq |\phi_1| + b \left( 1 + \frac{\nu h}{1 - M_1} \right) |\phi_{21}| + b|\phi_{22}|, \end{aligned}$$

lo que implica que, como  $b < 1$ , entonces:

$$\begin{aligned} \|(x(t), y_1(t), y_2(t))\| &:= x(t) + y_1(t) + y_2(t) \\ &< \frac{1}{b}x(t) + y_1(t) + y_2(t) \\ &\leq \frac{1}{b}x(t) + y_1(t) + y_2(t) + \frac{\nu}{1 - M_1} \int_{t_0 - \tau_1(t_0)}^{t_0} y_1(s) ds \\ &= \frac{1}{b} \left[ x(t) + by_1(t) + by_2(t) + \frac{b\nu}{1 - M_1} \int_{t_0 - \tau_1(t_0)}^{t_0} y_1(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{b}v(x(t), y_1(t), y_2(t)) \\ &\leq \frac{1}{b}|\phi_1| + \left( 1 + \frac{\nu h}{1 - M_1} \right) |\phi_{21}| + |\phi_{22}|. \end{aligned}$$

Obteniendo como cota:

$$\|(x(t), y_1(t), y_2(t))\| \leq \frac{1}{b}|\phi_1| + \left( 1 + \frac{h\nu}{1 - M_1} \right) |\phi_{21}| + |\phi_{22}|. \quad (4.18)$$

Si una trayectoria comienza o entra en la región  $\tilde{\Omega}$  en un tiempo  $t = t_1 \geq t_0$  y permanece en  $\tilde{\Omega}$  para siempre, entonces por la definición de  $\tilde{\Omega}$  tenemos que  $\forall t \geq t_0$ :

$$Dx(t) + b\delta y_1(t) + b(\nu - c)y_2(t) \leq DI,$$

lo que implica que, como  $b < 1$ ,  $\mu \leq \delta = D - \frac{M_1}{1 - M_1} - c$ ,  $\mu \leq \delta$  y  $\mu \leq \nu - c$ , entonces  $\frac{1}{b} > 1$ ,  $\frac{D}{\mu} \geq 1$  y  $\frac{\nu - c}{\mu} \geq 1$ , con lo que:

$$\begin{aligned} \|(x(t), y_1(t), y_2(t))\| &:= x(t) + y_1(t) + y_2(t) \\ &< \frac{D}{\mu b}x(t) + \frac{\delta}{\mu}y_1(t) + \frac{\mu - c}{\mu}y_2(t) \\ &\leq \frac{DI}{\mu b}. \end{aligned}$$

Obteniendo como cota:

$$\|(x(t), y_1(t), y_2(t))\| \leq \frac{DI}{\mu b}. \quad (4.19)$$

Si una trayectoria comienza o entra o vuelve a entrar después de haber salido de la región  $\tilde{\Omega}$  en tiempos  $t = t_{2i-1} \geq t_0$  y sale en el tiempo  $t_{2i}$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ), entonces (4.18) se verifica para todos los tiempos  $(t_{2i}, t_{2i+1})$  y (4.19) para todos los tiempos  $(t_{2i-1}, t_{2i})$ .

En conclusión, para cualquier tiempo  $t > 0$ , tenemos que las soluciones de  $(x(t), y_1(t), y_2(t))$  estás acotadas por:

$$\begin{aligned} \|(x(t), y_1(t), y_2(t))\| &:= x(t) + y_1(t) + y_2(t) \\ &< \max \left\{ \frac{|\phi_1|}{b} + \left( 1 + \frac{h\nu}{1 - M_1} \right) |\phi_{21}| + |\phi_{22}|, \frac{DI}{b\nu} \right\}. \end{aligned}$$

■

### 4.3.2. Análisis de la estabilidad

Notemos que cualquier solución de equilibrio  $(x, y_1, y_2)$  del sistema (4.14) debe satisfacer las ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} DI - Dx - aU(x)(y_1 + y_2) + b\nu y_1 &= 0 \\ -(\nu + D)y_1 + cU(x)y_1 - r_1 y_1 + r_2 y_2 &= 0 \\ -\nu y_2 + cU(x)y_2 + r_1 y_1 - r_2 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Claramente,  $(x, y_1, y_2) = (I, 0, 0)$  es un equilibrio asintóticamente estable cuando  $\nu \geq c$ . De hecho cuando  $\nu \geq c$ :

$$\begin{aligned} \frac{d(y_1(t) + y_2(t))}{dt} &= -(\nu + D)y_1(t) - \nu y_2(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))(y_1(t) + y_2(t)) \\ &< -(\nu - c)(y_1(t) + y_2(t)) < 0. \end{aligned}$$

Para estudiar la estabilidad de las soluciones de equilibrio no triviales del sistema (4.14), primero llevamos a cabo el siguiente cambio de variables:

$$\eta := y_1(t) + y_2(t); \quad \beta(t) := \frac{y_1(t)}{\eta(t)}.$$

De esta forma, y análogamente a lo estudiado en los primeros capítulos, el sistema (4.14) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))\eta(t) + b\nu\beta(t - \tau_1(t))\eta(t - \tau_1(t)) \\ \frac{\eta(t)}{dt} &= -\nu\eta(t) - D\beta(t)\eta(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ \frac{\beta(t)}{dt} &= D\beta(t)(1 - \beta(t)) - r_1\beta(t) + r_2(1 - \beta(t)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

La ecuación para  $\beta(t)$  está desacoplada de las ecuaciones para  $x(t)$  y  $\eta(t)$ . Resolviendo la ecuación algebraica  $-D\beta(1 - \beta) - r_1\beta + r_2(1 - \beta) = 0$ , tenemos:

$$\beta = \frac{D + r_1 + r_2 \pm \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D}.$$

Notemos que  $\beta(t) \in (0, 1)$  para cualquiera soluciones positivas  $y_1(t) > 0$ ,  $y_2(t) > 0$  del sistema (4.14). Además, como  $\beta'|_{\beta=0} = r_2 > 0$  y  $\beta'|_{\beta=1} = -r_1 < 0$ , entonces  $(0, 1)$  es positivamente invariante para  $\beta(t)$  y es la región biológicamente interesante. Por lo tanto, por analogía con los estudios anteriores, tenemos que el equilibrio de la ecuación desacoplada del sistema (4.19) está dado por:

$$\beta^* := \frac{D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D}. \quad (4.21)$$

**Lema 4.3.2** *El punto crítico  $\beta^*$  tal y como está definido en (4.21) es un equilibrio asintóticamente estable de la tercera ecuación del sistema (4.19).*

### Demostración

Definimos  $\Delta(t) := \beta(t) - \beta^*$ , entonces  $\Delta(t)$  satisface la siguiente EDO:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta(t)}{dt} &= -D(\Delta(t) + \beta^*)(1 - \Delta(t) - \beta^*) - r_1(\Delta(t) + \beta^*) + r_2(1 - \Delta(t) - \beta^*) \\ &= -D\Delta(t)(1 - \Delta(t) - \beta^*) - D\beta^*(1 - \Delta(t) - \beta^*) - r_1\Delta(t) - r_1\beta^* \\ &\quad + r_2 - r_2\Delta(t) - r_2\beta^* \\ &= -D\Delta(t) + D\Delta^2(t) + D\Delta(t)\beta^* - D\beta^* + D\beta^*\Delta(t) + \\ &\quad + D\beta^{*2} - r_1\Delta(t) - r_1\beta^* + r_2 - r_2\Delta(t) - r_2\beta^*. \end{aligned}$$

Ahora bien, por ser  $\beta^*$  equilibrio de la tercera ecuación del sistema (4.19), se tiene:

$$-D\beta^*(1 - \beta^*) - r_1\beta^* + r_2(1 - \beta^*) = 0,$$

continuando en la derivada de  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta(t)}{dt} &= -D\Delta(t) + D\Delta^2(t) + D\Delta(t)\beta^* + D\beta^*\Delta(t) - r_1\Delta(t) - r_2\Delta(t) \\ &= D\Delta(t) \left( \Delta(t) + 2\beta^* - 1 - \frac{r_1 + r_2}{D} \right). \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = D\Delta(t) \left( \Delta(t) - \frac{\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{D} \right). \quad (4.22)$$

Resolviendo (4.22) con la condición inicial  $\Delta(t_0) = \Delta_0$ , tendremos que:

$$\Delta(t) = \frac{\Delta_0 \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{\Delta_0 - (\Delta_0 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2})} e^{\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}(t - t_0)} \quad (4.23)$$

cuando  $t \rightarrow 0$ , implicando que  $\beta^*$  es asintóticamente estable.

Para finalizar, veamos que se tiene (4.23). En efecto, partimos de (4.22), que podemos reescribir como:

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = D\Delta^2(t) - \sqrt{(Dr_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}\Delta(t).$$

Para un tiempo suficientemente grande, reemplazando  $\beta(t)$  por  $\beta^*$  en las dos primeras ecuaciones del sistema (4.19), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))\eta(t) + b\nu\beta^*\eta(t - \tau_1(t)) \\ \frac{d\eta(t)}{dt} &= -\nu\eta(t) - D\beta^*\eta(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))\eta(t). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Cualquier solución de equilibrio no trivial del sistema (4.24) debe satisfacer las ecuaciones algebraicas:

$$DI - Dx^* - aU(x^*)\eta^* + b\nu\beta^*\eta^* = 0, \quad (4.25)$$

$$-\nu - D\beta^* + cU(x^*) = 0. \quad (4.26)$$

Despejando  $x^*$  en (4.26) tenemos:

$$-\nu - D\beta^* + c \frac{x^*}{m + x^*} = 0 \quad \equiv \quad c \frac{x^*}{m + x^*} = \nu + D\beta^*,$$

reagrupando los términos de  $x^*$  llegamos a:

$$cx^* - \nu x^* - D\beta^* x^* = m\nu + mD\beta^*.$$

Luego:

$$x^* = \frac{m(\nu + D\beta^*)}{c - \nu - D\beta^*}.$$

Ahora como sabemos que  $-\nu - D\beta^* + cU(x^*) = 0$  entonces  $cU(x^*) = \nu + D\beta^*$  con lo que:

$$U(x^*) = \frac{\nu + D\beta^*}{c},$$

sustituyendo en la expresión (4.25) tenemos:

$$DI - Dx^* - a\frac{\nu + D\beta^*}{c}\eta^* + b\nu\beta^*\eta^* = 0 \quad \equiv \quad DI - Dx^* - \left[\frac{a}{c}(\nu + D\beta^*) - b\nu\beta^*\right] = 0,$$

con lo que:

$$\begin{aligned} \eta^* &= \frac{DI - Dx^*}{\frac{a}{c}(\nu + D\beta^*) - b\nu\beta^*} = \frac{DI - Dx^*}{\frac{a}{c}(\nu + D\beta^*) - \frac{bc\nu\beta^*}{c}} \\ &= \frac{DcI - Dcx^*}{a(\nu + D\beta^*) - bc\nu\beta^*} = \frac{Dc(I - x^*)}{a(\nu + D\beta^*) - bc\nu\beta^*}. \end{aligned}$$

Para que sean equilibrios positivos debe ocurrir que:

$$c - \nu - D\beta^* > 0, \text{ ie, } c > \nu + D\beta^*,$$

y también que  $cD(I - x^*)(a(\nu + D\beta^*) - bc\nu\beta^*) > 0$ .

Ahora bien:

$$I - x^* = I - \frac{m(\nu + D\beta^*)}{c - \nu - D\beta^*} = \frac{I(c - \nu - D\beta^*) - m(\nu + D\beta^*)}{c - \nu - D\beta^*},$$

por tanto, como tenemos la primera condición exigida  $c - \nu - D\beta^* > 0$ ; entonces la segunda condición es equivalente a:

$$(I(c - \nu - D\beta^*) - m(\nu + D\beta^*))(a(\nu + D\beta^*) - bc\nu\beta^*) > 0.$$

■

A continuación, establecemos un resultado de estabilidad para el equilibrio  $(x^*, \eta^*)$ .

**Teorema 4.3.2** *Supongamos que  $\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow [0, h]$ ,  $\tau_i'(t) \leq M_i < 1$ ,  $i = 1, 2$ ; entonces, el equilibrio  $(x^*, \eta^*)$  del (4.24) es asintóticamente estable, siempre y cuando:*

$$\frac{1}{\nu + D\beta^*} \left( e^{(\nu + D\beta^*)h} - 1 \right) + \frac{1}{1 - M_1} h < \frac{2a}{bc\nu\beta^*}.$$

**Demotración**

En primer lugar, consideraremos la transformación:

$$\tilde{x}(t) := x(t) - x^*;$$

$$\tilde{\eta} := \log \frac{\eta(t)}{\eta^*};$$

$$\tilde{U}(\cdot) := U(\cdot + x^*) - U(x^*).$$

De esta manera, el sistema (4.24) queda reescrito como:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = -D\tilde{x}(t) - a\tilde{U}(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) + b\nu\beta^*\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} - 1)$$

$$\frac{d\tilde{\eta}(t)}{dt} = c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))).$$

Veamos que es cierto. Sacando de (4.25) la expresión:  $DI - Dx^* = aU(x^*)\eta^* - b\nu\beta^*\eta^*$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= DI - D\tilde{x}(t) - Dx^* - a(\tilde{U}(\tilde{x}(t)) + U(x^*))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} + b\nu\beta^*\eta^*e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} \\ &= aU(x^*)\eta^* - b\nu\beta^*\eta^* - D\tilde{x}(t) - a\tilde{U}(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*)\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} + b\nu\beta^*\eta^*e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} \\ &= -D\tilde{x}(t) - a\tilde{U}(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) + b\nu\beta^*\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} - 1). \end{aligned}$$

Por otro lado, de (4.26) se tiene  $-\nu - D\beta^* + cU(x^*) = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \eta^*e^{\tilde{\eta}(t)}\frac{d\tilde{\eta}(t)}{dt} &= -\nu\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - D\beta^*\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} + c(\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + U(x^*))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} \\ &= (-\nu - D\beta^* + cU(x^*))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} + c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} \\ &= c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)}. \end{aligned}$$

Así:

$$\frac{d\tilde{\eta}(t)}{dt} = c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))).$$

Vamos a definir un nuevo funcional de Lyapunov adecuado paso a paso. Definimos:

$$V_1(\tilde{x}) := \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds.$$

Ahora, si  $x > x^*$ , entonces  $\tilde{x} > 0$ ; de esta forma, como sabemos que  $s \in (0, \tilde{x}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $s + x^* > x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$ , por lo que:  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) > 0$ . En conclusión:

$$V_1(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds > 0,$$



siempre y cuando  $x \neq x^*$ .

Análogamente, si  $x < x^*$ , entonces  $\tilde{x} < 0$ ; por tanto, como  $s \in (\tilde{x}(t), 0)$ , entonces  $s < 0$ . Entonces  $s + x^* < x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$ , con lo que  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) < 0$ . En conclusión:

$$V_1(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds = - \int_{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds > 0,$$

siempre y cuando  $x \neq x^*$ .

Resumiendo,  $V_1(x^*) > 0$  para todo  $x \neq x^*$ .

Derivando  $V_1$  a lo largo de las soluciones del sistema (4.24) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &= -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) + \\ &\quad + b\nu\beta^* \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &= -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &\quad + b\nu\beta^* \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \pm b\nu\eta^* \beta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - \\ &= -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) + \\ &\quad + b\nu\beta^* \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))}) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &= -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &\quad - b\nu\beta^* \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))}) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &< -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) + \\ &\quad + b\nu\beta^* \eta^* |e^{\tilde{\eta}(t)} - e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))}| \tilde{U}(\tilde{x}(t)). \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}
|e^{\tilde{\eta}(t)} - e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))}| &= \left| \int_{t-\tau_1(t)}^t \frac{d}{ds} [e^{\tilde{\eta}(s)}] ds \right| = \left| \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \frac{d\tilde{\eta}(s)}{ds} ds \right| \\
&= c \left| \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right| \leq c \int_{t-\tau_1(t)}^t |e^{\tilde{\eta}(s)}| |\tilde{U}(\tilde{x}(s - \tau_2(s)))| ds \\
&= c \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} |\tilde{U}(\tilde{x}(s - \tau_2(s)))| ds
\end{aligned}$$

utilizando la **desigualdad de Young**, ya recordada en el segundo capítulo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1(t)}{dt} &< -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\quad + b\nu\beta^*\eta^* |e^{\tilde{\eta}(t)} - e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))}| \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\leq -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\quad + bc\nu\beta^*\eta^* \left( \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} |\tilde{U}(\tilde{x}(s - \tau_2(s)))| ds \right) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&= -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\quad + bc\nu\beta^*\eta^* \left\{ \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} |\tilde{U}(\tilde{x}(s - \tau_2(s)))| \tilde{U}(\tilde{x}(t)) ds \right\} \\
&\leq -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\quad + \frac{bc\nu\beta^*\eta^*}{2} \left\{ \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} ds \cdot \tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) + \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} |\tilde{U}(\tilde{x}(s - \tau_2(s)))|^2 ds \right\} \\
&= -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\quad + \frac{bc\nu\beta^*\eta^*}{2} \left\{ \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} ds \cdot \tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) + \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right\}.
\end{aligned}$$

Además, en segundo lugar podemos definir:

$$V_2(\tilde{\eta}) := \int_0^{\tilde{\eta}(t)} (e^s - 1) ds.$$

Con estas dos definiciones de  $V_1$  y  $V_2$  tenemos:

\*En primer lugar, si  $\eta > \eta^*$  entonces  $\tilde{\eta} > 0$ ; de esta forma como  $s \in (0, \tilde{\eta}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $e^s - 1 > 0$ , por tanto

$$V_2(\tilde{\eta}) = \int_0^{\tilde{\eta}(t)} (e^s - 1) ds > 0,$$

siempre y cuando se tenga que  $\eta \neq \eta^*$ .

\*En segundo lugar y de manera análoga, si  $\eta < \eta^*$  entonces  $\tilde{\eta} < 0$ ; por lo tanto como  $s \in (\tilde{\eta}(t), 0)$ , entonces  $s < 0$ . Entonces  $e^s - 1 < 0$  con lo que  $V_2(\tilde{\eta}) > 0$ , siempre y cuando  $\eta \neq \eta^*$ . Porque:

$$V_2(\tilde{\eta}) = \int_0^{\tilde{\eta}(t)} (e^s - 1) ds = - \int_{\tilde{\eta}(t)}^0 (e^s - 1) ds > 0.$$

En resumen,  $V_2(\eta^*) > 0$  para todo  $\eta \neq \eta^*$ .

Derivando  $V_2$  a lo largo de las soluciones del sistema (4.24) tenemos que:

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = \frac{d\tilde{\eta}(t)}{dt} (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))).$$

Finalmente, damos el funcional  $V_3$ :

$$V_3(\tilde{x}, \tilde{\eta}) := \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^*\eta^* \int_{t-\tau_1(t)}^t \int_v^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds dv.$$

Obviamente  $V_3 > 0$  para todo  $\eta \neq \eta^*$  y  $x \neq x^*$ , ya que todas las constantes que aparecen, además del integrando, son estrictamente positivas, teniendo también en cuenta los extremos de integración.

Derivando  $V_3$  a lo largo de las soluciones del mismo sistema (4.24) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dV_3(t)}{dt} &= \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^*\eta^* \frac{d}{dt} \left[ \int_{t-\tau_1(t)}^t \int_v^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds dv \right] \\ &= \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^*\eta^* \left\{ \int_{t-\tau_1(t)}^t \left[ \frac{d}{dt} \int_v^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right] dv \right. \\ &\quad \left. - \left( \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right) (1 - \tau_1'(t)) \right\} \\ &= \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^*\eta^* \left\{ e^{\tilde{\eta}(t)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \tau_1(t) \right. \\ &\quad \left. - \left( \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right) (1 - \tau_1'(t)) \right\}. \end{aligned}$$

Ahora consideramos el funcional  $v$  como:

$$v(\tilde{x}, \tilde{\eta}) := V_1(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + \kappa V_2(\tilde{\eta}(t)) + V_3(\tilde{\eta}(t)) \text{ con } \kappa = \frac{(aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*}{c} (1 - M_2). \quad (4.27)$$

Derivando  $v$  y usando  $\tau'_i(t) \leq M_1 < 1$ ,  $i = 1, 2$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
v' \leq & \left\{ -D\tilde{x}(t - \tau_2(t))\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} \right. \\
& - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \\
& \left. + \frac{bc\nu\beta^*\eta^*}{2} \left[ \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} ds \cdot \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right] \right\} \\
& \cdot (1 - \tau_2(t)) + (1 - M_2) \frac{(aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*}{c} (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^*\eta^* \left\{ e^{\tilde{\eta}(t)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\tau_1(t) \right. \\
& \left. - \left( \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right) \cdot (1 - \tau'_1(t)) \right\} \\
\leq & \left\{ -D\tilde{x}(t - \tau_2(t))\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} \right. \\
& - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \\
& \left. + \frac{bc\nu\beta^*\eta^*}{2} \left\{ \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} ds \cdot \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right\} \right. \\
& \left. \cdot (1 - M_2) + (1 - M_2) \frac{(aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*}{c} (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(s))) \right. \\
& \left. + \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^*\eta^* \left\{ e^{\tilde{\eta}(t)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))h - (1 - M_1) \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right\} \right\} \\
= & -D\tilde{x}(t - \tau_2(t))\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} \\
& + \frac{bc\nu\beta^*\eta^*}{2} \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} ds \cdot \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^*\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))h.
\end{aligned}$$

En virtud de la segunda ecuación de (4.24), sabemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d\eta(t)}{dt} &= -\nu\eta(t) - D\beta^*\eta(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ &\geq -\nu\eta(t) - D\beta^*\eta(t) \\ &= -(\nu + D\beta^*)\eta(t).\end{aligned}$$

De esta forma, como hemos hecho anteriormente en varias ocasiones anteriores, llegamos a que  $\eta(s) \leq \eta(t)e^{(\nu+D\beta^*)(t-s)}$ , con lo que:

$$\begin{aligned}\eta^* \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} ds &= \int_{t-\tau_1(t)}^t \eta^* e^{\tilde{\eta}(s)} ds = \int_{t-\tau_1(t)}^t \eta(s) ds \\ &\leq \int_{t-\tau_1(t)}^t \eta(t) e^{(\nu+D\beta^*)(t-s)} ds = \eta(t) \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{(\nu+D\beta^*)(t-s)} ds \\ &= \frac{\eta(t)}{\nu + D\beta^*} \int_{t-\tau_1(t)}^t (\nu + D\beta^*) e^{(\nu+D\beta^*)(t-s)} ds = \frac{\eta(t)}{\nu + D\beta^*} (e^{(\nu+D\beta^*)(t-s)} - 1) \\ &\leq \frac{\eta(t)}{\nu + D\beta^*} (e^{(\nu+D\beta^*)h} - 1).\end{aligned}$$

Introduciendo cálculos nuevos en (4.28), llevamos inmediatamente a:

$$\begin{aligned}v' &\leq \left\{ -D\tilde{x}(t - \tau_2(t))\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{bc\nu\beta^*\eta(t)}{2(\nu + D\beta^*)} (e^{(\nu+D\beta^*)h} - 1)\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \right\} (1 - M_2) \\ &\quad + \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^*\eta(t)\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))h \\ &\leq -a(1 - M_2)\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ &\quad + \frac{bc\nu\beta^*(1 - M_2)}{2(\nu + D\beta^*)} (e^{(\nu+D\beta^*)h} - 1)\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ &\quad + \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^*h\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ &= -\left\{ a - \frac{bc\nu\beta^*}{2(\nu + D\beta^*)} (e^{(\nu+D\beta^*)h} - 1) - \frac{bc\nu\beta^*h}{2(1 - M_1)} \right\} (1 - M_2)\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ &= -\left\{ a - \frac{bc\nu\beta^*}{2} \left[ \frac{1}{\nu + D\beta^*} (e^{(\nu+D\beta^*)h} - 1) - \frac{h}{1 - M_1} \right] \right\} < 0\end{aligned}$$

con lo que la derivada del funcional  $v$ , es  $v' \leq 0$ , por lo tanto, el equilibrio positivo  $(x^*, \eta^*)$  es globalmente asintóticamente estable. ■

**Nota 4.2**

Faltaría analizar la existencia de atractor pero es desconocido por ahora; podrá ser objeto para analizar en un futuro.







# Apéndice A

## Sistemas dinámicos autónomos

En esta primera parte vamos a dar las nociones necesarias para analizar todos aquellos modelos que vienen dados por ecuaciones de evolución del tipo:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

donde  $F : X \rightarrow X$ , siendo  $X$  un espacio métrico.

**Definición A.1** *Un espacio métrico es un conjunto  $M$  con una función distancia o métrica asociada,  $d : M \times M \rightarrow \mathbf{R}$ . Decir que  $d$  es una distancia sobre  $M$ , es decir, que para todo  $x, y, z \in M$ , esta función debe satisfacer las siguientes propiedades de una distancia:*

1.  $d(x, y) \geq 0$  **Positividad.**
2.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  **Identidad de los indiscernibles.**
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  **Simetría.**
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  **Desigualdad triangular.**

### Primeras definiciones

Como ya hemos definido  $X$  como espacio métrico con distancia  $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ , podemos comenzar con las definiciones.

#### **Ejemplo A.2**

Consideramos

$$\frac{du}{dt} = F(u)$$

donde  $F : \mathbf{O} \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  es una **función Lipschitz**. Entonces, para cada  $u_0 \in \mathbf{O}$ , existe una única solución máxima del problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

definida para todo  $t \geq 0$ .

**Definición A.3** Decimos que una familia  $\{T(t) : t \geq 0\}$  de aplicaciones continuas del espacio  $X$  en sí mismo es un **semigrupo no lineal** en  $X$ , o simplemente un **semigrupo de operadores** si no hay riesgo de confusión, cuando se cumplen las tres propiedades siguientes:

- i)  $T(0) = I$  la aplicación identidad del espacio  $X$ .
- ii)  $T(t+s) = T(t)T(s)$ , cualquiera que sea la pareja de números reales no negativos, donde  $t$  es el tiempo transcurrido (**Propiedad de semigrupo o de concatenación**).
- iii) La aplicación  $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \rightarrow T(t)x \in X$  es continua.

En el tercer apartado de ésta definición, se está considerando el conjunto  $[0, \infty) \times X$  dotado de la topología producto.

Los semigrupos no lineales son también llamados **sistemas dinámicos autónomos**. Por la propiedad de semigrupo, se tiene que la familia de aplicaciones  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es conmutativa para la operación de composición de aplicaciones, pues cualesquiera  $t, s \geq 0$  se tiene que  $T(s)T(t) = T(t+s) = T(t+s) = T(t)T(s)$ .

#### Nota A.4

En dimensión infinita, en otras palabras, para EDP's, no hay resultados generales sobre existencia y unicidad de solución y, por lo tanto, tenemos que realizar un análisis preliminar.

El concepto de espacio métrico, en conjunto con toda su estructura topológica, y la noción de semigrupo no lineal como ya hemos definido con anterioridad, son algunos de los ingredientes teóricos que vamos y hemos utilizado a lo largo de este trabajo.

Fijemos un semigrupo no lineal,  $\{T(t) : t \geq 0\}$  en un espacio métrico  $X := (X, d)$ , que llamaremos **espacio de fases** del semigrupo y lo denotaremos por  $T(\cdot)$ . Veamos ahora lo necesario para decir qué entendemos por atractor.

**Definición A.5** Decimos que un subconjunto  $A \subset X$  es **invariante** respecto del semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$ , o simplemente **invariante**, cuando para todo  $t \geq 0$  se tiene  $T(t)A = A$ .

---

Sea  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  una familia de subconjuntos de  $X$  invariantes por el semigrupo  $T(\cdot)$ , entonces su unión  $A := \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  es también invariante por él. De hecho, para todo real  $t \geq 0$ ,  $T(t)(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L} T(t)A_\lambda$  y, por la hipótesis  $T(t)A_\lambda = A_\lambda$ , cualquiera que sean  $\lambda \in L$  y  $t \geq 0$ .

Por otro lado, la intersección de conjuntos invariante no es un conjunto invariante, generalmente. Sin embargo, si para cada  $t > 0$  la aplicación  $T(t) : X \rightarrow X$  es inyectiva, entonces es fácil ver, por un argumento semejante al que hemos usado para la unión que la intersección de invariantes es invariante. La noción de conjunto invariante está íntimamente ligada a la de solución global, cuya definición es:

**Definición A.6** *Se dice que una aplicación  $\xi : \mathbf{R} \rightarrow X$  es una **solución global** del semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$ , cuando para todo  $t \geq 0$  y todo  $\tau \in \mathbf{R}$  se cumple que:*

$$T(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau).$$

**Notación A.7**

Si  $\xi : \mathbf{R} \rightarrow X$  es una solución global, se va a indicar su imagen por el símbolo  $\gamma(\xi)$ , es decir,  $\gamma(\xi) := \{\xi(\tau) : \tau \in \mathbf{R}\}$ .

**Definición A.8** *Se llama **órbita** de la solución  $\xi$  o **órbita global** de la solución  $\xi$  a la imagen  $\gamma(\xi)$ .*

**Observación A.9**

Si  $\xi(0) = x \in X$  se suele decir que  $\xi$  es una **solución que pasa por** el punto  $x$ .

En efecto, dado  $x \in \gamma(\xi)$  tenemos que  $x$  es de la forma  $x = \xi(\tau)$  para algún  $t \in \mathbf{R}$ ; entonces si  $t \geq 0$  se tiene que  $T(t)x = T(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau) \in \gamma(\xi)$ . Recíprocamente si  $t \geq 0$  y  $x \in \gamma(\xi)$  concluyendo la invarianza.

**Observación A.10**

Toda solución global de un semigrupo  $T(\cdot)$  es necesariamente continua, pues dados  $t$  y  $t_0$  reales, escogiendo cualquier real  $\tau$  con  $\tau < \min\{t_0, t\}$  y usando la definición de solución, podemos escribir:

$$d(\xi(t), \xi(t_0)) = d(T(t - \tau)\xi(\tau), T(t_0 - \tau)\xi(\tau)),$$

y la conclusión se sigue de la propiedad tercera de la definición de semigrupo.

Las nociones de conjunto invariante y de solución global están conectadas por medio del siguiente resultado, que explica la estructura geométrica que tienen los conjuntos invariantes en términos de órbitas globales del semigrupo.

**Proposición A.0.3** *Un subconjunto  $A \subset X$  es invariante por  $T(\cdot)$  si y sólo si,  $A$  es una unión de órbitas globales de  $T(\cdot)$ .*

Para estudiar el comportamiento asintótico de los sistemas dinámicos, una herramienta muy útil va a ser la semidistancia de Hausdorff, que va a ser la *medida* responsable que vamos a coger para describir la dinámica de las soluciones del sistema.

**Definición A.11** *Dados  $A, B$ , subconjuntos no vacíos de  $X$ , se define la **semidistancia de Hausdorff desde  $A$  hasta  $B$**  como:*

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) = \sup_{a \in A} d(a, B)$$

donde  $d(a, B) := \inf_{b \in B} d(a, b)$  es la distancia usual entre un punto y un conjunto, mientras que la **distancia simétrica de Hausdorff entre  $A$  y  $B$**  es definida por:

$$d_H(A, B) := \text{dist}(A, B) + \text{dist}(B, A).$$

Un hecho que hace de la semidistancia de Hausdorff una herramienta útil en esta teoría es que se cumple la desigualdad triangular, es decir:

**Lema A.0.3** *Para todos los subgrupos  $A, B$  y  $C$  de  $X$  se tiene:*

$$\text{dist}(A, C) \leq \text{dist}(A, B) + \text{dist}(B, C). \quad (\text{A.2})$$

Es evidente que si  $B \subset A$ , entonces  $\text{dist}(B, A) = 0$ .

**Observación A.12**

Para cualquier subconjunto  $A$  y  $B$  de  $X$  se tiene que  $\text{dist}(A, B) = 0$  si y sólo si  $A \subset \overline{B}$ , porque, si  $\text{dist}(A, B) = 0$  entonces, fijado  $a \in A$  se tiene que  $d(a, B) = 0$ , luego para cada natural  $n$  existe un punto  $a_n \in B$  tal que  $d(a, a_n) < \frac{1}{n}$ , luego  $a_n \rightarrow a$ , y esto significa que  $a \in \overline{B}$ .

Con esta observación podemos concluir junto con el anterior lema que la distancia simétrica de Hausdorff define en sentido estricto una distancia en la colección de todos los subconjuntos cerrados de  $X$ .

Con lo cual, una vez enunciado la semidistancia de Hausdorff, ya podemos introducir el concepto de atracción.

---

**Definición A.13** Se dice que un subconjunto  $A$  de  $X$  **atrae** a un subconjunto  $B$  de  $X$ , o que el subconjunto  $B$  es **atraído** por el subconjunto  $A$ , por medio del semigrupo  $T(\cdot)$  cuando:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)B, A) = 0.$$

Recordemos también que, dados un subconjunto  $A \subset X$  y un número positivo  $\varepsilon > 0$ , su  $\varepsilon$ -entorno, denotado por  $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ , es la unión de todas las bolas abiertas centradas en sus puntos y poseyendo radio  $\varepsilon$ , o lo que es lo mismo:

$$\mathcal{O}_\varepsilon(A) := \bigcup_{a \in A} B(a; \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}.$$

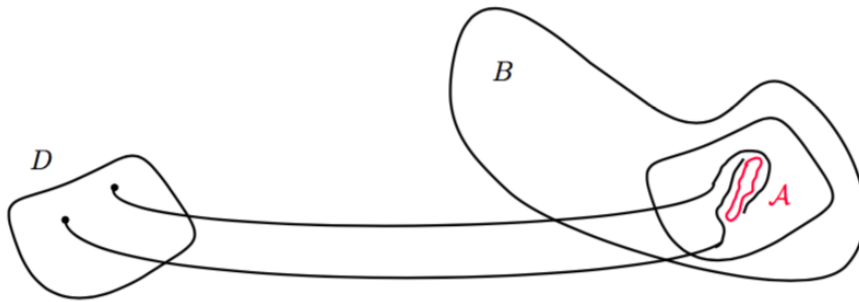


Figura A.1: Representación gráfica de un conjunto atrayente  $A$ .

De una de las definiciones dadas ahora, decimos que un subconjunto  $B$  es atraído por un subconjunto  $A$  si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $T = T(\varepsilon, B) \geq 0$  tal que:

$$T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A) \text{ para todo } t \geq T. \quad (\text{A.3})$$

Ahora se puede introducir la noción de atractor global. [11]

**Definición A.14** Decimos que un subconjunto  $A$  de  $X$  es un **atractor global** para el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$ , si es un conjunto compacto, invariante por  $T(\cdot)$  y atrae a todos los subconjuntos acotados de  $X$  por la acción de  $T(\cdot)$ .

**Observación A.15**

Tal y como hemos definido el atractor global, a priori, parece que un cierto semigrupo pudiera poseer más de un atractor global. No obstante, se puede probar fácilmente que un semigrupo posee, **a lo más**, un atractor global en el sentido de la definición (A.14). Es decir,

**Proposición A.0.4** Si existe un atractor global para el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$ , entonces dicho atractor es único.

Uno de los principales problemas en el estudio de los sistemas dinámicos es describir la estructura geométrica que tiene un atractor. Una clase importante de sistemas dinámicos autónomos para los cuales se conoce muy bien la estructura de sus atractores son los llamados **semigrupos gradientes**.

Con estas herramientas tenemos:

**Teorema A.0.5** *Si un semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  en un espacio métrico  $X$  posee atractor global  $\mathbf{A}$  entonces  $\mathbf{A}$  es la unión de todos los subconjuntos acotados invariantes de  $X$ .*

**Corolario A.0.6** *Si un semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  en un espacio métrico  $X$  posee atractor global  $\mathbf{A}$ , entonces  $\mathbf{A}$  es la unión de todas las órbitas globales acotadas de  $\{T(t) : t \geq 0\}$ .*

Veamos ahora resultados generales que ofrezcan condiciones suficientes para garantizar la existencia de atractor global una vez que ya tenemos conocido el semigrupo no lineal  $\{T(t) : t \geq 0\}$ .

**Definición A.16** *Dado un subconjunto de  $B$  en  $X$  denotamos por  $\gamma^+(B)$  su **semiórbita positiva** respecto del semigrupo  $T(\cdot)$ :*

$$\gamma^+(B) := \{T(t)x : t \geq 0, x \in B\} = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x).$$

A veces nos puede ser útil considerar trozos o fragmentos de órbitas para tiempos arbitrariamente grandes, o sea, dados  $B \subset X$  y  $\tau \geq 0$  vamos a indicar por  $\gamma_\tau^+(B)$  el conjunto  $\gamma^+(T(\tau)B)$ , equivalentemente,  $\gamma_\tau^+ := \{T(t)x : t \geq \tau, x \in B\}$ .

**Definición A.17** *Decimos que un semigrupo no lineal  $\{T(t) : t \geq 0\}$ , es **acotado**, cuando la semiórbita positiva de cualquier subconjunto acotado de  $X$  es un acotado de  $X$ , mientras que se dice **eventualmente acotado** cuando para cada subconjunto acotado  $B \subset X$  existe  $\tau = \tau(B) \geq 0$  tal que  $\gamma_\tau^+(B)$  es un acotado de  $X$ .*

**Observación A.18**

Si un semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  en un espacio métrico  $X$  posee atractor global  $\mathbf{A}$  entonces  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es necesariamente eventualmente acotado, pues dado un acotado  $B \subset X$ , haciendo  $\varepsilon = 1$  en la definición de atractor global dada, tendremos:

- $\mathcal{O}_1(\mathbf{A})$  es acotado.

- 
- Por (A.3), existe  $\tau = \tau(B)$  de modo que  $\gamma_\tau^+(B) \subset \mathcal{O}_1(\mathbf{A})$ , de donde  $\gamma_\tau^+(B)$  es acotado. En particular, si  $\xi : \mathbf{R} \rightarrow X$  es una solución global para  $T(\cdot)$  entonces, para todo real  $\tau$ , el conjunto  $\{\xi(t) : t \geq \tau\}$  es acotado.

**Definición A.19** *Dados dos subconjuntos  $B$  y  $D$  de  $X$ , se dice que  $D$  **absorbe** al conjunto  $B$ , por medio del semigrupo, si existe  $\tau = \tau(B) \geq 0$  de manera que  $T(t)B \subset D$  siempre que  $t \geq \tau$ .*

**Definición A.20** *Sea  $B \subset X$  no vacío. Se dice que  $B$  es **absorbente** para el sistema dinámico  $T(t)$  si, para todo  $D \subset X$  acotado, existe  $T(D) > 0$  tal que  $T(t)D \subset B$  para todo  $t \geq T(D)$ .*

**Definición A.21** *Se dice que un semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es **disipativo** cuando existe un subconjunto acotado  $D$  de  $X$  que absorbe a todos los subconjuntos acotados de  $X$  por medio del semigrupo.*

**Observación A.22**

Las nociones de atracción y absorción son equivalentes en el sentido de que un semigrupo  $T(\cdot)$  es disipativo si y sólo si existe un subconjunto acotado  $A$  que atrae a todos los subconjuntos acotados de  $X$ . En efecto, de la definición de semidistancia de Hausdorff está claro que si  $D$  absorbe a todos los acotados de  $X$ , entonces atrae a todos los subconjuntos acotados de  $X$ . Recíprocamente, suponiendo que  $A$  atrae a todos los acotados, entonces fijado  $\varepsilon > 0$  cualquiera, es inmediato de la observación de la **Definición A.14** que, poniendo  $D := \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ , resulta que  $D$  es acotado y satisface la definición de disipatividad.

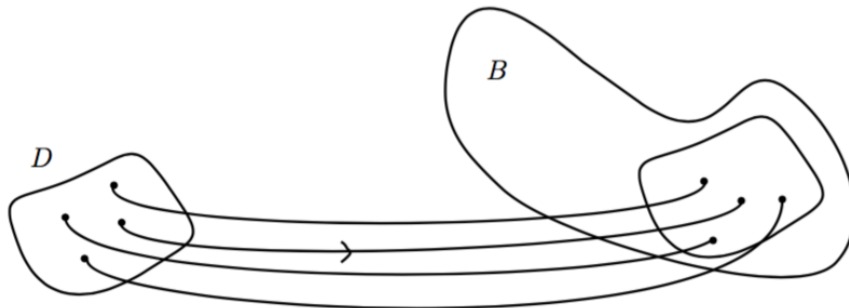


Figura A.2: Representación gráfica de un conjunto absorbente,  $T(t)D$ .

## Conjuntos $w$ -límites

El concepto de  **$w$ -límite** tendrá un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de atractores globales.

**Definición A.23** *Dado un subconjunto  $B$  de  $X$ , definimos su conjunto  $w$ -límite y lo denotamos por  $w(B)$ , como:*

$$w(B) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} T(s)B} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

### Nota A.24

Es inmediato probar que el conjunto  $w$ -límite de cualquier subconjunto  $B$  de  $X$  es un conjunto cerrado, por ser una intersección de cerrados.

Para demostrar los teoremas esta definición no es muy útil; entonces la cambiamos por otra mucho más manejable en términos de límites de sucesiones, como vamos a mostrar en el siguiente lema, donde  $\mathbf{R}_0^+$  indica el conjunto de números reales no negativos  $[0, \infty)$ :

**Lema A.0.4** *El conjunto  $w$ -límite de un subconjunto  $B \subset X$  está caracterizado por:*

$$\begin{aligned} w(B) = \{x \in X : \text{existen sucesiones } (t_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ en } \mathbf{R}_0^+ \text{ con } t_n \rightarrow \infty \\ \text{y } (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ en } B, \text{ tales que } x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n\}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

### Observación A.25

Con la ayuda de este último resultado es bastante sencillo ver que si  $B \subset C$  entonces  $w(B) \subset w(C)$  y si  $\xi : \mathbf{R} \rightarrow X$  es una solución global de  $T(\cdot)$  de tiene que  $w(\xi(t)) = w(\xi(s))$  cualesquiera que sean los números reales  $s$  y  $t$ . En algunos casos, se puede tratar un concepto semejante al conjunto  $w$ -límite, pero donde el tiempo corre hacia atrás definiendo lo que se conoce como conjuntos  $\alpha$ -límite. Sin embargo, apenas consideraremos el caso de conjuntos  $\alpha$ -límite asociado a una solución, o lo que es lo mismo, no consideraremos conjuntos  $\alpha$ -límites asociados a un subconjunto arbitrario  $B$  de  $X$ .

**Definición A.26** *Sea  $\xi : \mathbf{R} \rightarrow X$  una solución global del semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$ . Definimos su conjunto  $\alpha$ -límite como:*

$$\alpha(\xi) := \left\{ x \in X : \exists (t_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ en } \mathbf{R} \text{ con } t_n \rightarrow -\infty \text{ tal que } x = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_n) \right\}.$$



---

Las principales propiedades de los conjuntos  $w$ -límites necesarias en el estudio de los atratores globales se verifican siempre para los semigrupos asintóticamente compactos.

**Definición A.27** Definimos que un semigrupo no lineal  $\{T(t) : t \geq 0\}$  en un espacio métrico  $X$  es **asintóticamente compacto**, cuando para toda sucesión acotada de puntos de  $X$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , y toda sucesión de números reales no negativos  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$  con  $t_n \rightarrow \infty$ , se tiene que la sucesión de puntos de  $X$ ,  $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ , posee una subsucesión convergente.

**Definición A.28** Se dice que un semigrupo no lineal  $\{T(t) : t \geq 0\}$  en un espacio métrico  $X$  es **eventualmente compacto**, si existe un  $t_0 > 0$  tal que la aplicación  $T(t_0) : X \rightarrow X$  es una aplicación compacta, es decir, si para cada subconjunto acotado  $B$  de  $X$  su imagen por  $T(t_0)$ ,  $T(t_0)B$ , es un conjuntos relativamente compacto de  $X$ .

Ahora supongamos que  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es un semigrupo eventualmnte compacto y sea  $t_0 > 0$  tal que  $T(t_0) : X \rightarrow X$  es una aplicación compacta. Entonces, del hecho de que una aplicación continua transforma conjuntos compactos en conjuntos compactos y de la propiedad de semigrupo, se deduce que para todo  $t \geq t_0$ ,  $T(t) : X \rightarrow X$  es una aplicación compacta, pues  $T(t) = T(t - t_0)T(t_0)$ .

Para ver que un semigrupo eventualmente compacto  $\{T(t) : t \geq 0\}$  y eventualmente acotado es asintóticamente compacto, sean  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$  una sucesión de números con  $t_n \rightarrow \infty$  y  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  una sucesión acotada de puntos de  $X$ . Sea, por la compacidad eventual,  $t_0 > 0$  tal que  $T(t_0) : X \rightarrow X$  es una aplicación compacta y, por la acotación eventual de  $T(\cdot)$ ,  $\tau \geq 0$  de manera que la semiórbita,  $\gamma_\tau^+(B_0)$ , del subconjuntos acotado  $B_0 := \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ , es acotada.

Finalmente, escogiendo un número real  $t' > t_0 + \tau$ , consideremos  $n_0 \in \mathbf{N}$  tal que  $t_n \geq t'$  para todo  $n \geq n_0$ . Definiendo el conjunto acotado  $B := \{T(t_n - t')x_n : n \geq n_0\} \subset \gamma_\tau^+(B_0)$ , de la observación que sigue a la definición de compacidad eventual, resulta inmediato que  $T(t')B$  es relativamente compacto, siendo  $\{T(t_n)x_n : n \geq n_0\}$  un subconjunto de  $T(t')B$ .

Presentamos ahora las principales propiedades que tienen los conjuntos  $w$ -límites para semigrupos asintóticamente compactos, resumidas en el siguiente lema:

**Lema A.0.5** Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo asintóticamente compacto en un espacio métrico  $X$ . Para todo subconjunto acotado no vacío  $B \subset X$  se tiene que su conjuntos  $w$ -límite satisface las siguientes propiedades:

- i)  $w(B)$  es no vacío, compacto, invariante y atrae a  $B$  por la acción de  $T(\cdot)$ .

- ii)  $w(B)$  es el menor conjunto cerrado de  $X$  que atrae a  $B$ .
- iii) Si  $B$  es conexo o existe un conexo  $C$  que contiene a  $B$  y que es atraído por  $w(B)$ , entonces  $w(B)$  es conexo.

Se puede demostrar para los conjuntos  $\alpha$ -límites de las soluciones globales acotadas de los semigrupos asintóticamente compactos, y con demostraciones enteramente análogas, propiedades similares a las presentadas en el lema anterior, es decir, que se verifica este resultado:

**Lema A.0.6** Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo asintóticamente compacto en un espacio métrico  $X$  y  $\xi : \mathbf{R} \rightarrow X$  una solución global acotada suya. Entonces, el conjunto  $\alpha$ -límite de  $\xi$ ,  $\alpha(\xi)$ , es no vacío, compacto, conexo, invariante y:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \alpha(\xi)) = 0. \quad (\text{A.5})$$

**Lema A.0.7** Sean  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  y  $A \subset X$  cerrado e invariante por  $T(\cdot)$ . Entonces:

$$w(A) = A.$$

### Existencia de atractores

En esta parte vamos a probar que la existencia del atractor global para un sistema autónomo es un fenómeno equivalente a la compacidad asintótica con disipatividad.

**Teorema A.0.7** Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$ . Entonces,  $\{T(t) : t \geq 0\}$  posee atractor global  $\mathbf{A}$  si y sólo si es asintóticamente compacto y disipativo. Además, en ese caso si  $\mathbf{B}$  denota la colección de todos los subconjuntos acotados no vacíos de  $X$ , entonces el atractor viene dado por:

$$\mathbf{A} = \bigcup_{B \in \mathbf{B}} w(B). \quad (\text{A.6})$$

**Teorema A.0.8** Supongamos  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un sistema dinámico en un espacio métrico  $(X, d)$  completo. Supongamos que es **disipativo**, es decir,  $\exists B_0 \subset X$  absorbente y compacto, entonces  $\exists \mathbf{A}$  atractor global del sistema dinámico y viene dado por  $\mathbf{A} = w(B_0)$ . Además,  $\mathbf{A}$  es maximal entre los conjuntos invariantes de  $X$  y conexo si  $X$  lo es [11].

---

**Teorema A.0.9** *Supongamos que  $T(t) = S(t) + U(t)$ , donde  $S(t)$  verifica que para todo  $B \subset X$  acotado, existe  $t_0(B)$  tal que  $\gamma_{t_0(B)}(B)$  es compacto, y  $U(t)$  verifica que para todo  $C \subset X$  acotado:*

$$\sup_{c \in C} |U(t)x|_X \longrightarrow 0,$$

*cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Entonces, si existe  $B_0 \subset X$  acotado y absorbente, existe  $\mathbf{A}$  atractor global[11].*

### Observación A.29

En dimensión finita, demostrar la existencia de un compacto absorbente se reduce a demostrar que existe un acotado absorbente<sup>1</sup>. En cambio, en dimensión infinita las cosas son mucho más complicadas, pues ya no tenemos que un cerrado y acotado sea compacto como nos pasaba para las EDP's.

### La estructura y las propiedades del atractor. Semigrupos gradientes.

Conocer la estructura y las propiedades del atractor global es una cuestión fundamental, ya que el atractor global es el que determina todo el comportamiento futuro del sistema disipativo. Por lo tanto, cuanto más complicada sea su estructura más complejo podrá resultar el comportamiento del sistema dinámico.

Seguimos considerando  $T(t)$  un sistema dinámico y  $\mathbf{A}$  su atractor global.

**Teorema A.0.10** *Si  $T(t)$  es inyectivo en  $\mathbf{A}$ , es decir, si  $T(t)u_0 = T(t)v_0$  para algún  $t > 0$ , entonces  $u_0 = v_0$ , entonces por cada punto de  $\mathbf{A}$  para una única órbita completa, que además es acotada. En consecuencia  $\mathbf{A}$  está formado por todas las órbitas completas y acotadas.*

Existe una clase de sistemas dinámicos para lo que se puede conocer la estructura de sus atractores con más profundidad. Son los sistemas **tipo gradiente**, es decir, para los que existe una función de Lyapunov. Pero para dar el concepto de función de Lyapunov necesitamos algunos conceptos previos.

**Definición A.30** *Sean  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  y  $\Xi$  un conjunto invariante.*

---

<sup>1</sup>Porque compacto es equivalente a cerrado y acotado, por el **Teorema de Hëine-Borel**.

- Se dice que  $X$  es un **conjunto invariante aislado** si existe  $\delta > 0$  tal que  $\xi$  es el conjunto invariante maximal de  $T(\cdot)$  contenido en  $\mathcal{O}_\delta(\Xi)$ , es decir, si  $A$  es un conjunto invariante por  $T(\cdot)$  contenido en  $\mathcal{O}_\delta(\Xi)$ , entonces  $A \subset \Xi$ .
- Sea  $\mathbf{S} := \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$  un conjunto finito de conjuntos invariantes por  $T(\cdot)$ . Se dice que  $\mathbf{S}$  es una **familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados**, cuando cada uno de sus elementos es un conjunto invariante aislado según (i) y existe  $\delta > 0$  de manera que  $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j) = \emptyset$ .

No es difícil ver que si  $T(\cdot)$  posee atractor global, entonces la clausura de un subconjunto invariante acotado suyo es también invariante, de donde resulta que para estos semigrupos sus invariantes aislados acotados son conjuntos cerrados.

**Definición A.31** Diremos que una solución global  $\xi : \mathbf{R} \rightarrow X$  es una **solución estacionaria o un punto de equilibrio** de  $\{T(t) : t \geq 0\}$  cuando es una aplicación constante, es decir, cuando es de la forma  $\xi(t) = z^*$  para todo real  $T$  y un cierto punto  $z^* \in X$ .

**Definición A.32** Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  y  $\mathbf{S} = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$  una familia finita de conjuntos invariantes aislados. Diremos que  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es un **semigrupo gradiente generalizado** respecto de la familia  $\mathbf{S}$ , cuando existe una función  $V : X \rightarrow \mathbf{R}$  satisfaciendo las cuatro propiedades siguientes:

1.  $V : X \rightarrow \mathbf{R}$  es una función continua.
2.  $V : x \rightarrow \mathbf{R}$  es no creciente a lo largo de las soluciones, es decir, para todo  $x \in X$  la función real  $[0, \infty) \ni t \rightarrow V(T(t)x) \in \mathbf{R}$  es no creciente.
3. Si para algún  $x \in X$  se tiene que  $V(T(t)x) = V(x)$  para todo  $t \geq 0$ , entonces  $x \in \Xi$  para algún  $\Xi \in \mathbf{S}$ .
4.  $V : X \rightarrow \mathbf{R}$  es constante sobre cada subconjunto invariante aislado perteneciente a  $\mathbf{S}$ , o sea, para cada  $\Xi \in \mathbf{S}$  existe un número real  $L = L(\Xi)$  tal que  $V(x) = L$  cualquiera que sea  $x \in \Xi$ .

Una función  $V : X \rightarrow \mathbf{R}$  que cumple estas cuatro propiedades se llama **función de Lyapunov generalizada** para  $T(\cdot)$  asociada a la familia  $\mathbf{S}$ . En el caso especial en que  $\mathbf{S} := \{z_1^*, \dots, z_n^*\}$ , el conjunto de puntos estacionarios de  $T(\cdot)$  se dice simplemente que  $T(\cdot)$  es un **semigrupo gradiente** y la función  $V : X \rightarrow \mathbf{R}$  asociada, una función **función de Lyapunov**.

---

### Observación A.33

Un semigrupo gradiente es una terna  $(T(\cdot), \mathbf{S}, V)$ , donde  $T(\cdot)$  representa el semigrupo no lineal,  $\mathbf{S}$  la familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados y  $V$  la función de Lyapunov correspondiente.

Ilustramos la definición de función de Lyapunov con el siguiente ejemplo:

### Ejemplo A.34

Sean  $N \in \mathbf{N}$  y  $f \in C^2(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ . Consideremos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\nabla f(x), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^N \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

donde  $\nabla f(x)$  representa el gradiente de la función  $f$  evaluada en el punto  $x \in \mathbf{R}^N$ . Supongamos también que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Siendo  $\nabla f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  un campo de clase  $C^1$ , es localmente Lipschitz, por tanto sabemos que el operador solución al problema (A.7) define un semigrupo no lineal en el espacio métrico  $\mathbf{R}^N$ . O sea, define para  $t \geq 0$  y  $x_0 \in \mathbf{R}$  el valor  $T(t)x_0 := x(t, x_0)$ , donde  $x(\cdot, x_0) : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^N$  es la solución del problema (A.7) y se tiene que  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es un semigrupo no lineal en  $\mathbf{R}^N$ . Supongamos que  $\nabla f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  posea solamente un número finito de ceros en  $\mathbf{R}^N$ , denotados por  $\varepsilon := \{z_1^*, \dots, z_n^*\}$ . Con estas condiciones, la función  $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  es una función de Lyapunov para el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$ .

### Demostración

Evidentemente,  $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  es una función continua, ya que es de clase  $C^2$ , y  $\mathbf{S} = \{z_1^*, \dots, z_n^*\}$  es el conjunto de todos los puntos de equilibrio de  $\{T(t) : t \geq 0\}$ . Luego también se verifica la propiedad cuarta de la **Definición A.32**. Por tanto, sólo hacen falta probar las propiedades dos y tres de la definición de función de Lyapunov.

En efecto, dado  $x_0 \in \mathbf{R}^N$ , tenemos que la función real de una variable real  $[0, \infty) \ni t \rightarrow f(T(t)x_0) = f(x(t, x_0)) \in \mathbf{R}$  es de clase  $C^1$  y entonces, la regla de la cadena y el hecho de que  $x(\cdot, x_0) : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^N$  es la solución del problema (A.7) nos conducen a que, para todo  $t > 0$ :

$$\frac{d}{dt}(f \circ x(\cdot, x_0))(t) = \nabla f(x(t, x_0)) \cdot \dot{x}(t, x_0) = -|\nabla f(x(t, x_0))|^2 \leq 0, \quad (\text{A.8})$$

donde el punto  $\cdot$  representa el producto escalar euclídeo en  $\mathbf{R}^N$  y  $|\cdot|$  su norma correspondiente. La igualdad (A.8) implica que la derivada de la función:

$$[0, \infty) \ni t \mapsto f(T(t)x_0) = f(x(t, x_0)) \in \mathbf{R},$$

es no positiva, luego dicha función debe ser no creciente, quedando establecida la condición segunda de la **Definición A.32**.

Finalmente, supongamos que  $x_0 \in \mathbf{R}^N$  cumple que  $f(T(t)x_0) = f(x_0)$  para todo  $t \geq 0$ . Entonces (A.8) nos muestra que para todo  $t > 0$  se tiene:

$$0 = \frac{d}{dt}f(x_0) = \frac{d}{dt}(f \circ x(\cdot, x_0))(t) = -|\nabla f(x, (t, x_0))|^2 = -|\dot{x}(t, x_0)|^2,$$

o sea, que  $\dot{x}(t, x_0) = 0$  para todo  $t > 0$ , lo que implica que  $x(t, x_0) = x_0$  para todo  $t > 0$ , es decir, que  $x_0 \in \mathbf{S}$ , completando la justificación del ejemplo. ■

### Propiedades de seguimiento sobre el atractor

Esta propiedad nos viene a decir que toda trayectoria del sistema dinámico es seguida por otra sobre el atractor durante cierto tiempo finito. Es como si sobre el atractor uno pudiera observar *la sombra* de la trayectoria del sistema, o dicho de otra manera, las trayectorias del sistema dinámico van siguiendo lo que hacen las trayectorias sobre el atractor, lo que refleja cómo la estructura del atractor es la responsable del comportamiento del sistema dinámico.

**Teorema A.0.11** *Sea  $T(t)$  un sistema dinámico y sea  $\mathbf{A}$  su atractor global. Sea  $u_0 \in X$  y sea  $u(t) = T(t)u_0$  una órbita del sistema dinámico. Dados  $\varepsilon > 0$ ,  $\tau > 0$  fijos, existen  $\tau = \tau(\varepsilon, \tau) \geq 0$ ,  $v_0 \in \mathbf{A}$  tales que:*

$$|u(t - \tau) - T(t)v_0| \leq \varepsilon, \quad \forall 0 \leq t \leq \tau.$$

Si se quiere seguir toda una trayectoria durante un intervalo de tiempo infinito, entonces habrá que usar diferentes órbitas sobre  $\mathbf{A}$ , saltando de unas a otras.

**Corolario A.0.12** *Sea  $\{u(t)\}_{t \geq 0}$  una órbita del sistema dinámico y  $\mathbf{A}$  su atractor global. Entonces, existe  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , existe  $t_n$  creciente tal que  $t_{n+1} - t_n \rightarrow +\infty$  y existe  $v_n \in \mathbf{A}$  tales que*

$$|u(t) - T(t - t_n)v_n| \leq \varepsilon. \quad \text{para } t_n \leq t \leq t_{n+1}.$$

*Más aún, los saltos:*

$$|v_{n+1} - T(t_{n+1} - t_n)v_n| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

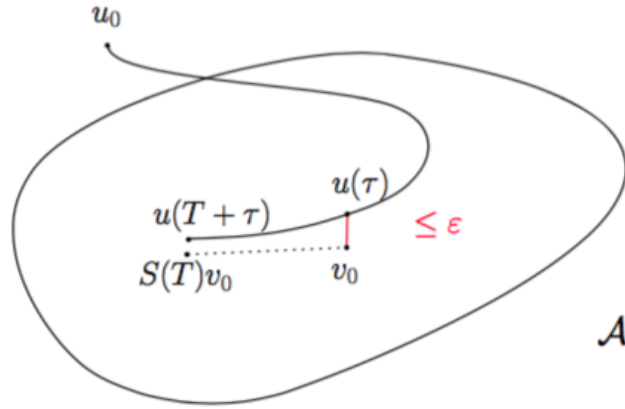


Figura A.3: Representación gráfica de la propiedad de seguimiento de un sistema dinámico  $S$ .

### Estructura de semigrupos gradientes

Los sistemas dinámicos gradientes constituyen unos de los pocos ejemplos de sistemas, que por ahora se conocen, en lo que se puede describir de manera bastante precisa la dinámica que poseen.

**Proposición A.0.13** Sean  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo gradiente generalizado respecto de la familia disjunta de conjuntos invariantes aislados **acotados**  $\mathbf{S} := \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ , que posee atractor global  $\mathbf{A}$  y  $V : x \rightarrow \mathbf{R}$  su función de Lyapunov correspondiente. Entonces, se verifican las dos propiedades siguientes:

- (1) Si  $\xi : \mathbf{R} \rightarrow X$  es una solución global acotada de  $T(\cdot)$  entonces, existen  $\Xi_{l_1}, \Xi_{l_2} \in \mathbf{S}$  tales que:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi_{l_1}) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), \Xi_{l_2}) = 0.$$

- (2) No existen estructuras homoclínicas asociadas a  $\mathbf{S}$ .

Basándonos en la proposición anterior y el **Colorario A.0.6** podemos obtener alguna información más sobre la estructura geométrica de los atractores de los semigrupos gradientes.

**Definición A.35** Sean  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lienal en un espacio métrico  $X$  y  $\Xi$  un conjunto invariante por él. Se define:

- *El conjunto inestable de  $\Xi$  como:*

$$W^u(\Xi) := \{x \in X : \exists \xi : \mathbf{R} \rightarrow X \text{ solución global con } \xi(0) = x$$

$$\text{tal que } \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi) = 0\}.$$

- *El conjunto estable de  $\xi$  como:*

$$W^s(\Xi) := \left\{x \in X : \lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)x, \Xi) = 0\right\}.$$

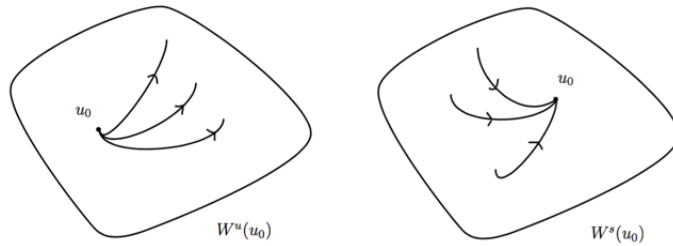


Figura A.4: Representación gráfica de una variedad inestable y una variedad estable.

Observemos que si  $x \in W^u(\Xi)$  y  $\xi : \mathbf{R} \rightarrow X$  es una solución global para  $T(\cdot)$  con  $\xi(0) = x$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi) = 0$ , entonces  $\xi(s) \in W^u(\Xi)$  para todo real  $s$ , puesto que, dado  $s \in \mathbf{R}$ , definiendo que  $\xi_s : \mathbf{R} \rightarrow X$  por  $\xi_s(t) := \xi(t + s)$  para cada real  $t$ , es inmediato que  $\xi_s : \mathbf{R} \rightarrow X$  es solución global para  $T(\cdot)$ , y además cumpliendo que:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_s(t), \Xi) = \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t + s), \Xi) = 0.$$

**Corolario A.0.14** Sean  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo gradiente generalizado respecto de la familia disjunta de conjuntos invariantes aislados  $\mathbf{S} := \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$  acotados. Si  $\{T(t) : t \geq 0\}$  posee un atractor global  $\mathbf{A}$ , entonces  $\mathbf{A}$  se escribe como unión de los conjuntos inestables de los conjuntos invariantes aislados pertenecientes a  $\mathbf{S}$ , o sea:

$$\mathbf{A} = \bigcup_{j=1}^n W^u(\Xi_j). \tag{A.9}$$

Si un semigrupo no lineal  $T(\cdot)$  posee atractor global  $\mathbf{A}$  y una familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados  $\mathbf{S} = \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$  de manera que el atractor admite la representación (A.9) decimos que  $T(\cdot)$  posee atractor de tipo gradiente.



## Apéndice B

# Sistemas dinámicos no autónomos

En este apéndice damos nociones sobre el análisis del comportamiento de sistemas dinámicos que se modelan por ecuaciones diferenciales no autónomas:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

En este caso, no sólo es importante el valor de la solución en el instante presente, como ocurría en el caso de los sistemas modelados por ecuaciones diferenciales autónomas, sino el instante inicial, es decir, la evolución del sistema viene determinada no sólo por el tiempo transcurrido. Por ejemplo si consideramos:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -2tu \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

se obtiene:

$$u(t) = u_0 e^{-(t^2 - t_0^2)}$$

y claramente  $t^2 - t_0^2 = (t - t_0)^2 + 2(t - t_0)t_0$ , por lo que resulta imposible escribir  $t^2 - t_0^2$  en función de  $t - t_0$  sólo, es decir, el tiempo transcurrido.

Así, no es posible definir un semigrupo a partir de (B.1), sino que en este caso lo que se define es un proceso. Suponiendo que para cada  $(t_0, u_0)$  el problema (B.1) posee única solución  $u(t; t_0, u_0)$ ,  $t, t_0 \in \mathbf{R}$ ,  $u_0 \in X$  (espacio métrico), se puede definir una familia biparamétrica.

$$U(\cdot, \cdot)(\cdot) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times X \longrightarrow X$$

definida como:

$$U(t, s)u_0 = u(t; s, u_0) \quad t \geq s, u_0 \in X,$$

que verifica:

1.  $U(t, t)u_0 = u_0, \forall t \in \mathbf{R}$ .
2.  $U(t, \tau)U(\tau, s)u_0 = U(t, s)u_0, t \geq \tau \geq s, u_0 \in X$ .
3.  $(t, s, u_0) \in \mathbf{R}_d^2 \times X \mapsto U(t, s)u_0$  es continua, donde  $\mathbf{R}_d^2 := \{(t, s) : t \geq s\}$ .

Esto motiva la definición siguiente:

**Definición B.1** Un **proceso** sobre  $X$  es una aplicación  $U(\cdot, \cdot)(\cdot) : \mathbf{R}_d^2 \times X \mapsto X$  que verifica los puntos 1., 2., 3. dados anteriormente.

Ahora bien, dado un proceso  $U$  sobre  $X$  veamos cómo se puede construir un sistema dinámico autónomo a partir de él.

**Definición B.2** Definamos  $\tilde{X} = \mathbf{R} \times X$  y  $\tilde{U} = \mathbf{R}^+ \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  como:

$$\tilde{U}(t, (t_0, u_0)) = (t + t_0, U(t + t_0, t_0)u_0).$$

Entonces  $\tilde{U}$  es un **sistema dinámico autónomo** sobre  $\tilde{X}$ .

En efecto:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(0, (t_0, u_0)u_0) &= (t_0, u_0) \\ \tilde{U}(t + s, (t_0, u_0)) &= (t_0 + t + s, U(t_0 + t + s, t_0)u_0) \\ &= (t_0 + t + s, U(t_0 + t + s, t_0 + t)U(t_0 + t, t_0)u_0) \\ &= \tilde{U}(s, (t + t_0, U(t_0 + t, t_0)u_0)) \\ &= \tilde{U}(s, \tilde{U}(t, (t_0, u_0))). \end{aligned}$$

**Definición B.3** Si  $\tilde{A} \subset \tilde{X}$  es compacto,  $\tilde{\mathbf{A}} \subset [a, t] \times K$  con  $K \subset X$ , entonces:

$$\tilde{U}(t, \mathbf{A}) = \bigcup_{(t_0, u_0) \in \mathbf{A}} \tilde{U}(t, (t_0, u_0)) = \bigcup_{(t_0, u_0) \in \mathbf{A}} (t + t_0, U(t + t_0, t_0)u_0),$$

y para  $t$  suficientemente grande  $t + t_0 \notin [a, b]$ .

Esto va a tener repercusiones importantes y significa que muchos conceptos de la teoría de sistemas dinámicos autónomos necesitarán modificaciones apropiadas en el contexto no autónomo. Por ejemplo, notemos que un conjunto invariante de  $\tilde{X}$  tendrá la forma:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bigcup_{t_0 \in \mathbf{R}} (t_0, \mathbf{A}(t_0)) \quad \text{con } \mathbf{A}(t_0) \subset X.$$

---

Entonces,  $\tilde{U}(t)\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}$  implicará que se verifique:

$$\bigcup_{t'_0 \in \mathbf{R}} (t'_0, \mathbf{A}(t'_0)) = \bigcup_{t_0 \in \mathbf{R}} (t_0 + t, U(t_0 + t, t_0)\mathbf{A}(t_0)),$$

lo que es equivalente a:

$$t'_0 = t_0 + t \quad \text{y} \quad U(t_0 + t, t_0)\mathbf{A}(t_0) = \mathbf{A}(t_0 + t),$$

y lo que va a motivar la definición de invarianza posterior.

#### Observación B.4

En las explicaciones previas, queremos resaltar la idea de que transformar un sistema no autónomo en otro autónomo a través de incluir la variable temporal como una nueva variable dependiente del sistema no parece adecuada. En este punto podemos hablar de **cociclos** y **skew-product flows** o **flujos hermismétricos**.

Otro hecho curioso aunque no muy conveniente, es que el concepto de  $w$ -límite no resulta un conjunto invariante. En efecto, para sistemas no autónomos, se define como:

**Definición B.5** *El conjunto  $w$ -límite para el proceso  $U$  se define como el conjunto*

$$w(t_0, u_0) = \{y \in X : \exists t_n \uparrow +\infty, U(t_n, t_0)u_0 \rightarrow y\}.$$

Se demuestra fácilmente que  $w(t_0, u_0)$  es un compacto no vacío cuando, por ejemplo,  $\bigcup_{t \geq t_0} U(t, t_0)$  es precompacto. Sin embargo, este conjunto puede no ser invariante, como en el caso de la versión autónoma.

#### Ejemplo B.6

Sea:

$$\frac{du}{dt} = -u + e^{-t}.$$

La solución de esta ecuación es:

$$u(t; t_0, u_0) = e^{-(t-t_0)}u_0 + (t - t_0)e^{-t}.$$

Es obvio que  $u(t; t_0, u_0) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow +\infty$ , para todo  $t_0 \in \mathbf{R}$ ,  $u_0 \in \mathbf{R}$ , luego:

$$w(t_0, u_0) = \{0\}, \quad \forall (t_0, u_0) \in \mathbf{R}^2.$$

Sin embargo,  $U(t; t_0, 0) = (t - t_0)e^{-t} \neq 0, \forall t \neq t_0$ , luego  $w^+(t_0, u_0)$  no es positivamente invariante.

Con esta serie de preliminares, parece difícil desarrollar una teoría general sobre atractores globales para procesos generados por sistemas dinámicos no autónomos, en el mismo sentido que se ha desarrollado la de sistemas autónomos. No obstante, es posible llevar a cabo este objetivo haciendo buen uso de la teoría *pullback* que ahora daremos su motivación.

Para ello consideremos un nuevo ejemplo:

### Ejemplo B.7

Consideramos un problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u + t \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

calculamos su única solución:

$$u(t; t_0, u_0) = u_0 + 1 - t_0 + (t - t_0)e^{-(t-t_0)} + t - 1.$$

Luego podemos definir un proceso  $U(t; t_0)u_0 = u(t; t_0, u_0)$ .

Ya que es muy importante el dato inicial en el comportamiento asintótico del problema, veamos cómo lo hace. Observemos en primer lugar que todas las soluciones existen globalmente, y que  $u(t; t_0, u_0) \rightarrow \infty$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Luego, del efecto disipativo introducido por el término  $-u$  no se observa ningún efecto de atracción. Sin embargo, si escogemos dos soluciones cualesquiera,  $u, v$  correspondientes a datos iniciales  $u_0, v_0$ , tendremos:

$$\frac{d}{dt}(u(t) - v(t)) = -(u(t) - v(t)),$$

y por lo tanto,

$$u(t) - v(t) = (u_0 - v_0)e^{-(t-t_0)}.$$

Luego, aunque cada solución se va a infinito cuando  $t$  tiende a  $+\infty$ , todas se van a la *misma forma*. Ahora nos preguntamos si hay algún *sitio especial* que describa explícitamente este comportamiento.

### Observación B.8

Observemos que  $u(t; t_0, u_0) - (t - 1) = (u_0 + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)} \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Luego todas las soluciones se aproximan a la recta  $u = t - 1$ , que también es solución.

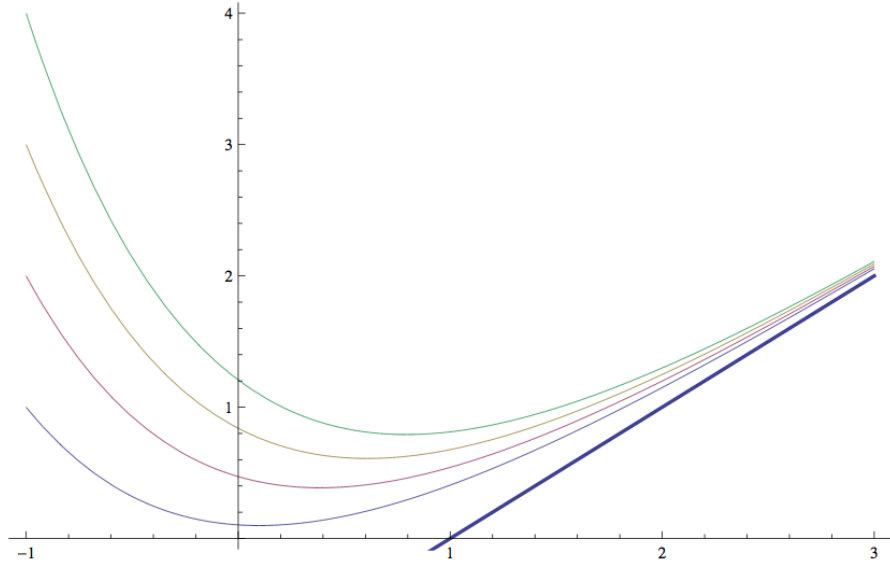


Figura B.1: Convergencia en sentido forward.

Definamos:

$$\{\mathbf{A}(t)\}_{t \in \mathbf{R}} = \{t - 1\}_{t \in \mathbf{R}},$$

se tiene que  $u(t; t_0, \mathbf{A}(t_0)) = \mathbf{A}(t)$ . En efecto,  $u(t; t_0, \mathbf{A}(t_0)) = (t_0 - 1 + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)} + t - 1 = t - 1$ , y si  $B \subset \mathbf{R}$  está acotado, entonces se tiene que  $\text{dist}(U(t, t_0)B, \mathbf{A}(t)) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Porque:

$$\begin{aligned} \text{dist}(U(t, t_0)B, \mathbf{A}(t)) &= \sup_{b \in B} \inf_{a \in \mathbf{A}(t)} |U(t, t_0)b - a| \\ &= \sup_{b \in B} |U(t, t_0)b - (t - 1)| \\ &= \sup_{b \in B} |(b + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)}| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Consecuencia:** sería sensato decir que la familia  $\{\mathbf{A}(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  es un atractor para el proceso  $U$ , en sentido *forward* hacia delante.

Notemos que aunque cada componente  $\mathbf{A}(t)$  es acotada, la unión de todas resulta ser no acotada. Esto llevaría a definir el atractor no autónomo como una familia  $\{\mathbf{A}(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  tal que  $\mathbf{A}(t)$  es compacto para que  $t \in \mathbf{R}$ , es invariante en el sentido anterior ( $U(t, s)\mathbf{A}(s) = \mathbf{A}(t)$ ) y atrae a cada acotado  $B \subset X$ , es decir, para cada  $s \in \mathbf{R}$  y  $B \subset X$  acotado:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(U(t, s)B, \mathbf{A}(t)) = 0.$$

Desafortunadamente, una definición como ésta es probablemente adecuada para casos bastante particulares y restrictivos. Por ejemplo, cuando el proceso es uniformemente asintóti-

camente compacto. No obstante, es importante observar que la familia  $\{\mathbf{A}(t) = t - 1\}_{t \in \mathbf{R}}$  también aparece como el límite de  $u(t; t_0, u_0)$  cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$ ; a esto se le conoce como **límite pullback** o desde  $-\infty$ , y del mismo modo, la diferencia de dos soluciones  $u$  y  $v$  también tienen el mismo límite pullback, es decir,

$$u(t) - v(t) = (u_0 - v_0)e^{-(t-t_0)} \rightarrow 0,$$

cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Más interesante aún es el hecho de que al tomar límite pullback vamos a obtener un objeto con interesantes propiedades dinámicas y bajo condiciones muy poco restrictivas sobre el sistema dinámico.

Observemos en el ejemplo precedente que  $\{\mathbf{A}(t)\} = \{t - 1\}$  es tanto atractor forward como pullback.

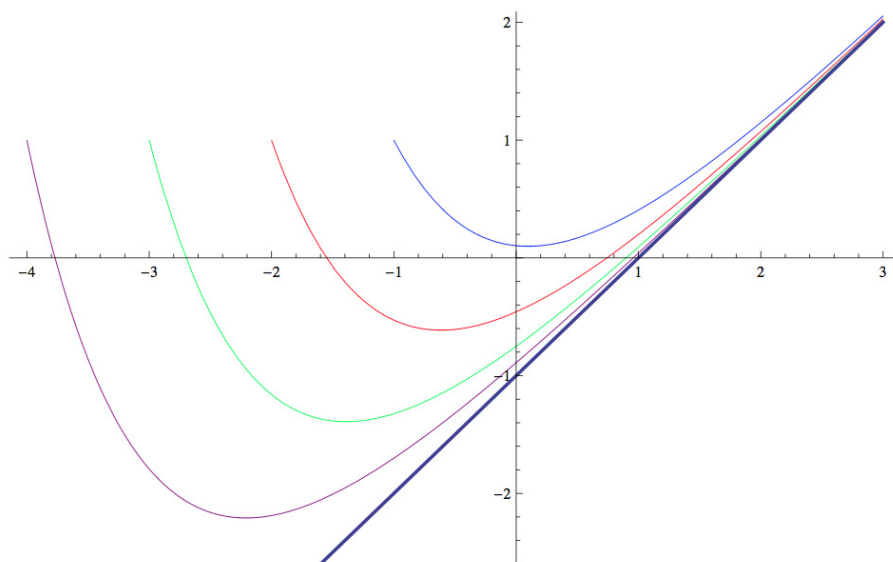


Figura B.2: Convergencia en sentido pullback.

En la atracción pullback no miramos lo que ocurre cuando el tiempo final se va a  $-\infty$ , evolución hacia atrás, es decir, que sino miramos lo que ocurre en el instante  $t$  cuando el instante inicial se va a  $-\infty$ , lo que queremos decir es lo que ocurre *ahora* si comenzamos el experimento cada vez antes.

### Observación B.9

Los conceptos de atracción pullback y forward son independientes, si bien en sistemas autónomos o bajo condiciones de uniformidad son equivalentes.

---

Consideremos los problemas:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \pm 2tu + 1 \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Resolviendo la EDO, obtenemos:

$$u_{\pm}(t; t_0, u_0) = u_0 e^{\pm t_0^2 \mp t^2} + e^{\pm t^2} \int_{t_0}^t e^{\mp s^2} ds,$$

con lo que:

$$u_+(t; t_0, u_0) = u_0 e^{t^2 - t_0^2} + e^{t^2} \int_{t_0}^t e^{-s^2} ds,$$

$$u_-(t; t_0, u_0) = u_0 e^{t_0^2 - t^2} + e^{-t^2} \int_{t_0}^t e^{s^2} ds.$$

Observemos que:

$$u_+(t) \rightarrow +\infty, \quad \text{si } t \rightarrow +\infty,$$

$$u_+(t) \rightarrow e^{t^2} \int_{-\infty}^t e^{-s^2} ds \quad \text{si } t_0 \rightarrow -\infty.$$

Luego  $u_+$  posee límite pullback pero no forward. Por otra parte,

$$u_-(t) \rightarrow 0, \quad \text{si } t \rightarrow +\infty,$$

$$u_-(t) \rightarrow +\infty, \quad \text{si } t_0 \rightarrow -\infty,$$

luego,  $u_-$  converge forward pero no pullback.

Veamos ahora las definiciones básicas de la teoría de atractores pullback.

**Definición B.10** Sea  $U(t, s)$  un proceso. Dado  $t \in \mathbb{R}$ , se dice que un conjunto  $K(t) \subset X$  **atrae en sentido pullback** a los acotados de  $X$  en el instante  $t$  si:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t, s)D, K(t)) = 0, \forall D \subset X \text{ acotado.}$$

La familia  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  se dice que es **pullback atrayente** para los acotados de  $X$  si  $K(t)$  atrae pullback a todos los acotados de  $X$  en el instante  $t$ .

**Definición B.11** Dado  $t \in \mathbb{R}$ , se dice que  $B(t)$  **absorbe** en sentido pullback los acotados de  $X$  en el instante  $t$ , si para cada acotado  $D \subset X$  existe  $T(t, D) \leq t$  tal que  $U(t, s)D \subset B(t)$ ,  $\forall s \leq T(t, D)$ . Se dice que la **familia**  $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es **absorbente pullback** para los acotados de  $X$  si  $B(t)$  absorbe en sentido pullback a los acotados de  $X$  en el instante  $t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

**Definición B.12** Se dice que  $\{U(t, s)\}$  es **pullback disipativo** para acotados si existe  $\{B(t)\}_{t \in B}$  con  $B(t) \subset X$  acotado y absorbente pullback para acotados.

**Definición B.13** Sea  $\{B(t)\}_{t \in B}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\{B(t)\}_{t \in B}$  es **invariante** para el proceso  $\{U(t, s)\}$  si  $U(t, s)B(s) = B(t)$ ,  $\forall t \geq s$ ,  $(t, s) \in \mathbf{R}_d^2$ .

**Definición B.14** Una familia  $\{A(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  de conjuntos compactos se llama **atractor pullback** para el proceso  $\{U(t, s)\}$  si es invariante y atrae pullback a los acotados de  $X$ , y es minimal, es decir, si  $\{C(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  es otra familia invariante que atrae pullback a los acotados de  $X$ , entonces  $\mathbf{A}(t) \subseteq C(t)$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$ .

### Observación B.15

La condición de minimalidad garantiza la unicidad del atractor pullback, pero no es necesaria imponerla en situaciones más generales, como pueden ser universos de conjuntos, carácter uniformemente acotado del atractor, etc.

Veamos la relación existente entre el atractor pullback y el atractor global. Obviamente, siempre podemos hablar del concepto de atractor global y pullback para un sistema dinámico. Esta condición no era necesaria en el caso autónomo, pero es crucial en este contexto no autónomo para garantizar la unicidad del atractor pullback.

### Ejemplo B.16

Como ejemplo trivial, podemos considerar:

$$T(t)u_0 = e^{-t}u_0$$

y sus procesos asociados:

$$U(t, s) = T(t - s) = e^{-(t-s)},$$

que provienen del problema:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Está claro que  $\mathbf{A} = \{0\}$ , aunque la familia  $\{[-e^{-t}, e^{-t}]\}_{t \in \mathbf{R}}$  es invariante para  $U(t, s)$  y atrae pullback a los acotados de  $\mathbf{R}$ , es decir, sería un atractor pullback si no exigiéramos minimalidad. En efecto, sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un sistema dinámico autónomo sobre  $X$ . Definamos  $\{U(t, s)\}_{(t,s) \in \mathbf{R}_d^2}$  como  $U(t, s) = T(t-s)$ . Es inmediato comprobar que  $\{U(t, s)\}$  es un proceso. Entonces, se verifica.



---

**Teorema B.0.15** *El sistema dinámico  $\{T(t)\}$  posee atractor global  $\mathbf{A}$  si y sólo si el proceso  $\{U(t, s) = T(t - s)\}$  posee atractor pullback  $\{\mathbf{A}(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ . Más aún,  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$ .*

Establecemos unos resultados que nos garantizarán la existencia de atractor pullback, aunque serán necesarias algunas definiciones previas.

**Definición B.17** *Sea  $\{U(t, s)\}$  un proceso y sea  $B \subset X$ . Se define el conjunto **pullback  $w$ -límite** de  $B$  en el instante  $t$  como:*

$$\Lambda(B, t) := \bigcap_{\sigma \leq s} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} U(t, s)B}.$$

Se verifica:

$$\Lambda(B, t) := \left\{ y \in X : \exists \{s_n\}_{n \geq 1} \subset (-\infty, t), s_n \rightarrow -\infty, \exists \{x_n\} \subset B, y = \lim_{n \rightarrow \infty} U(t, s_n)x_n \right\}.$$

Obviamente, si  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un sistema dinámico y  $U(t, s) = T(t - s)$ ,  $t \geq s$ , entonces:

$$\begin{aligned} \Lambda(B, t) &= \bigcap_{\sigma \leq s} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} U(t, s)B} = \bigcap_{\sigma \leq s} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} T(t - s)B} = \bigcap_{0 \leq t - \sigma} \overline{\bigcup_{\sigma - s \geq 0} \underbrace{T(t - s)}_r B} \\ &= \bigcap_{0 \leq t - \sigma} \overline{\bigcup_{\sigma - s \geq 0} T(r)B} = \bigcap_{0 \leq s} \overline{\bigcup_{r \geq s} T(r)B} = w(B), \end{aligned}$$

luego en el caso autónomo ambos conceptos coinciden.

El siguiente lema es la clave para demostrar la existencia del atractor pullback.

**Lema B.0.8** *Sea  $U(t, s)$  un proceso. Si  $B \subset X$  entonces  $U(t, s)\Lambda(B, s) \subset \Lambda(B, t)$ , es decir, el  $w$ -límite es positivamente invariante.*

Si  $B \subset X$  tal que  $\Lambda(B, t)$  es compacto y atrae a  $B$  en sentido pullback en el instante  $s$ , entonces

$$U(t, s)\Lambda(B, s) = \Lambda(B, t), \quad \forall t \geq s.$$

Más aún, si  $\Lambda(B, t)$  atrae en sentido pullback al conjunto  $C$  en el instante  $t$ , y  $C$  es conexo y contiene a  $\bigcup_{s \leq t} \Lambda(B, s)$ , entonces  $\Lambda(B, t)$  es también conexo.

**Lema B.0.9** *Sea  $U(t, s)$  un proceso. Si  $B \subset X$  es no vacío y  $\overline{\bigcup_{s \leq s_0} U(t, s)B}$  es compacto para algún  $s_0 \in \mathbf{R}$ , con  $s_0 \leq t$ , entonces  $\Lambda(B, t)$  es un compacto, no vacío, invariante y atrae pullback al conjunto  $B$  en el instante  $t$ .*

**Observación B.18**

Notemos que estos lemas poseen, particularizando en procesos autónomos, es decir,  $U(t, s) = T(t - s)$ , versiones autónomas que ya fueron enunciadas en el apéndice A.

Veamos los resultados que nos aseguran la existencia de atractor pullback.

**Teorema B.0.16** *Sea  $\{U(t, s)\}$  un proceso en el espacio métrico  $X$ . Son equivalentes:*

1.  $U(t, s)$  posee un atractor pullback  $\{\mathbf{A}(t), t \in \mathbf{R}\}$ .
2. Existe una familia de conjuntos compactos  $\{K(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  que atrae en sentido pullback a los acotados de  $X$ , en cuyo caso  $\mathbf{A}(t)$  viene dado por:

$$\mathbf{A}(t) = \overline{\bigcup \{\Lambda(B, t) : B \subset X, \text{ acotado} \}}$$

y  $\{\mathbf{A}(t)\}$  es minimal en el sentido de que, si existe otra familia de conjuntos cerrados y acotados  $\{\tilde{\mathbf{A}}(t) : t \in \mathbf{R}\}$  que atrae en sentido pullback a los acotados de  $X$ , entonces  $\mathbf{A}(t) \subset \tilde{\mathbf{A}}(t)$ , para  $\forall t \in \mathbf{R}$ .

A continuación vamos a considerar otro concepto útil en las aplicaciones de existencia del atractor pullback sin la necesidad de exhibir una familia de compactos que atrae a los acotados de  $X$  en sentido pullback. Ésta es de una gran utilidad en el caso de EDP's en dominios no acotados [10].

**Definición B.19** *Se dice que el proceso  $\{U(t, s)\}$  es **pullback asintóticamente compacto** si, para cada  $t \in \mathbf{R}$ , cada sucesión  $\{s_n\} \subset (-\infty, t)$  y cada sucesión acotada  $\{x_n\} \subset X$  tales que  $s_n \rightarrow -\infty$  y  $\{U(t, s_k)x_k\}_{k=1}^{\infty}$  está acotada, se verifica que  $\{U(t, s_k)x_k\}_{k=1}^{\infty}$  posee una subsucesión convergente.*

Obtenemos el siguiente resultado:

**Lema B.0.10** *Sea  $\{U(t, s)\}$  pullback asintóticamente compacto y sea  $B \subset X$  acotado tal que  $\bigcup_{\tau \leq s_0} U(t, s)B$  está acotado para algún  $s_0 \in (-\infty, t)$ . Entonces  $\Lambda(B, t)$  es un compacto, no vacío, invariante y atrae a  $B$  en el instante  $t$  en sentido pullback.*

Entonces podemos establecer el siguiente resultado:

**Teorema B.0.17** *Supongamos que  $U(t, s)$  es pullback asintóticamente compacto y que existe una familia  $\{B(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  de acotados que absorbe en sentido pullback a los acotados de  $X$ . Entonces, la familia  $\{\mathbf{A}(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  es minimal entre las familias  $\{C(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  tales que  $C(t)$  es cerrado y atrae en sentido pullback los acotados de  $X$  en el instante  $t$ .*

---

**Observación B.20**

Una observación interesante es darse cuenta de que los resultados que hemos visto se basan en la atracción de conjuntos acotados fijos,  $D \subset X$ . Sin embargo, el atractor pullback es una familia dependiente del tiempo de compactos. Una consecuencia inmediata de esto es que el atractor no pertenece a la familia o universo de conjuntos que son atraídos; en otras palabras, no podemos decir que el atractor se atraiga a sí mismo, lo que **ha impedido** obtener un resultado de **unicidad** sobre el mismo. Además, suele ocurrir en las aplicaciones que el atractor pullback atraiga a clases de conjuntos más generales que los acotados, y de esta forma resulta interesante encontrar el atractor pullback dentro del universo de conjuntos que son atraídos [10, 24, 32].



## Apéndice C

# Sistemas dinámicos con retardo

### Definición de la ecuación con retardo

Suponemos  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{R}^n$  es el espacio vectorial  $n$ -dimensional cuya norma es  $|\cdot|$ , entonces  $\mathbf{C}([a, b], \mathbf{R}^n)$  es un espacio de Banach de funciones continuas aplicadas en  $[a, b]$  y uniformemente convergentes con la topología de  $\mathbf{R}^n$ . Si:

$$\sigma \in \mathbf{R}, A \geq 0, \quad x \in \mathbf{C}([\sigma - r, \sigma + A], \mathbf{R}^n),$$

entonces para  $t \in [\sigma, \sigma + A]$ , definimos  $x_t \in \mathbf{C}$  como:

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Si  $D$  es un subconjunto de  $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$  una función dada que representa la derivada derecha, decimos que la relación existente:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{C.1}$$

es una ecuación diferencial funcional con retardo en  $D$  y ahora la denotaremos como **RFDE**<sup>1</sup>. Si queremos enfatizar que la ecuación está definida por  $f$  escribimos la **RFDE** ( $f$ ). Una función  $x$  se dice que es una *solución* de la ecuación (C.1) en  $[\sigma - r, \sigma + A]$  si  $x \in \mathbf{C}([\sigma - r, \sigma + A], \mathbf{R}^n)$ ,  $(t, x_t) \in D$  y  $x(t)$  satisface la ecuación (C.1) para  $t \in [\sigma, \sigma + A]$ . Para  $\sigma \in \mathbf{R}$ ,  $\phi \in \mathbf{C}$ , decimos que  $x(\sigma, \phi, f)$  es una **solución de la ecuación** (C.1) con valor inicial  $\phi$  en  $\sigma$  o simplemente una solución a través de  $(\sigma, \phi)$  si hay un  $A > 0$  tal que  $x(\sigma, \phi, f)$  es una solución de la ecuación (C.1) en  $[\sigma - r, \sigma + A]$  y  $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$ .

---

<sup>1</sup>Siglas en inglés.

La ecuación (C.1) es un tipo de ecuación muy general e incluye ecuaciones diferenciales con  $r = 0$ :

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_p(t))),$$

con  $0 \leq \tau_j(t) \leq r$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , y también su integral diferencial es una ecuación diferencial con retardo:

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 g(t, \theta, x(t + \theta)) d\theta.$$

Además, en (C.1) se incluyen ecuaciones mucho más generales.

La ecuación (C.1) es lineal si  $f(t, \phi) = L(t)\phi + h(t)$ , donde  $L(t)$  es lineal; lineal homogéneo si  $h \equiv 0$  y lineal no homogéneo si  $h \neq 0$ . Decimos que la ecuación (C.1) es autónoma si  $f(t, \phi) = g(\phi)$  donde  $g$  no depende de  $t$ .

**Lema C.0.11** *Si  $\sigma \in \mathbf{R}$ ,  $\phi \in \mathbf{C}$  son dados, y  $f(t, \phi)$  es continua, entonces encontrar una solución de la ecuación (C.1) a través de  $(\sigma, \phi)$  es equivalente a resolver la ecuación integral:*

$$\begin{cases} x_\sigma = \phi, \\ x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s) ds, \quad t \geq \sigma. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

### Existencia, unicidad y continuidad

Vamos a enunciar un teorema de existencia básico para el problema de valor inicial de la Ecuación (C.1) suponiendo que  $f$  es continua. Además, veremos un resultado en la dependencia continua, así como un simple resultado en la unicidad.

Para probar la existencia de la solución a través de un punto  $(\sigma, \phi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{C}$ , consideramos que  $\sigma > 0$  y todas las funciones  $x$  en  $[\sigma - r, \sigma + A]$  que son continuas y coinciden con  $\phi \in [\sigma - r, \sigma]$  que es  $x_\sigma = \phi$ . Los valores de estas funciones en  $[\sigma, \sigma + A]$  están restringidos en la clase de  $x$  tal que  $|x(t) - \phi(0)| \leq \beta$  para  $t \in [\sigma, \sigma + A]$ . De la aplicación usual  $T$  obtenida de la correspondiente ecuación integral, se define entonces que  $A$  y  $\beta$  pueden ser elegidos de tal manera que  $T$  los manda en sí mismos y son completamente continuos. Así, el **Teorema del punto fijo de Schauder**<sup>2</sup> implica la existencia.

La dependencia continua es un poco más difícil porque la aplicación  $T$  depende de parámetros y se debe discutir la dependencia de ellos. Si uno está intentando probar la dependencia

<sup>2</sup>Posteriormente enunciado

---

en un valor  $\lambda_0$  del parámetro, entonces el procedimiento usual es asumir que el único punto fijo es  $\lambda_0$  y luego demostrar la compacidad, que es la propiedad de que  $T$  es uniforme con respecto a los conjuntos compactos que contienen  $\lambda_0$ .

**Lema C.0.12** *Si  $x \in \mathbf{C}([\sigma - r, \sigma + A], \mathbf{R}^n)$  entonces  $x_t$  es una función continua de  $t$  si  $t$  está en  $[\sigma, \sigma + A]$ .*

Es conveniente introducir algunas notaciones para mejorar el entendimiento los lemas siguientes.

**Notación C.1**

Para cualquier  $(\sigma, \phi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{C}$ , sea  $\tilde{\phi} \in \mathbf{C}([\sigma - r, \infty), \mathbf{R}^n)$  definido por:

$$\tilde{\phi}_\sigma = \phi, \quad \tilde{\phi}(t + \sigma) = \phi(\sigma), \quad t \geq 0. \quad (\text{C.3})$$

Supongamos que  $x$  es una solución de la ecuación (C.1) a través de  $(\sigma, \phi)$ . Si:

$$x(t + \sigma) = \tilde{\phi}(t + \sigma) + y(t), \quad t \geq -r,$$

entonces con el **Lema C.0.12** se satisface:

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, & t \geq 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Por el contrario, si  $y$  es una solución de esta ecuación, entonces se obtiene una solución  $x$  de la ecuación (C.1) por esta transformación. Por lo tanto, encontrar una solución de (C.1) es equivalente a encontrar una función  $\alpha > 0$  y una función  $y \in \mathbf{C}([-r, \alpha], \mathbf{R}^n)$  tal que la ecuación (C.4) se satisface para  $0 \leq t \leq \alpha$ .

Si  $V$  es un subconjunto de  $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ , entonces  $\mathbf{C}(V, \mathbf{R}^n)$  es la clase de todas las funciones  $f : V \rightarrow \mathbf{R}^n$  que son continuas y  $\mathbf{C}^0(V, \mathbf{R}^n) \subseteq \mathbf{C}(V, \mathbf{R}^n)$  es el subconjunto de las funciones continuas acotadas de  $V$  a  $\mathbf{R}^n$ . Entonces el espacio  $\mathbf{C}^0(V, \mathbf{R}^n)$  se convierte en un espacio de Banach con la norma:

$$\|f\|_V = \sup_{(t, \phi) \in V} |f(t, \phi)|. \quad (\text{C.5})$$

Para cualquier real  $\alpha$  y  $\beta$  se define:

$$I_\alpha = [0, \alpha], \quad B_\beta = \{\psi \in \mathbf{C} : |\psi| \leq \beta\}, \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{A}(\alpha, \beta) = \{y \in \mathbf{C}([-r, \alpha], \mathbf{R}^n) : y_0 = 0, y_t \in B_\beta, t \in I_\alpha\}.$$

**Lema C.0.13** *Suponemos que  $\Omega \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{C}$  es un abierto,  $W \subseteq \Omega$  un compacto y  $f^0 \in \mathbf{C}(\Omega, \mathbf{R}^n)$  dados. Entonces existe un entorno  $V \subseteq \Omega$  de  $W$  tal que  $f^0 \in \mathbf{C}^0(V, \mathbf{R}^n)$ , existe otro entorno  $U \subseteq \mathbf{C}^0(V, \mathbf{R}^n)$  de  $f^0$  y constantes positivas  $M$ ,  $\alpha$ , y  $\beta$  tales que:*

$$|f(\sigma, \phi)| < M \quad \text{para } (\sigma, \phi) \in V \text{ y } f \in U, \quad (\text{C.7})$$

Además, para cualquier  $(\sigma^0, \phi^0) \in W$ , tenemos  $(\sigma^0 + t, y_t + \tilde{\phi}_{\sigma^0+t^0}) \in V$  para  $t \in I_\alpha$ ,  $y \in \mathbf{A}(\alpha, \beta)$ .

El siguiente lema se utilizará para aplicar teoremas de punto fijo para la existencia y la dependencia continua de las soluciones de la ecuación (C.1).

**Lema C.0.14** *Suponemos que  $\Omega \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{C}$  es abierto,  $W \subseteq \Omega$  es compacto,  $f^0 \in \mathbf{C}(\Omega, \mathbf{R}^n)$  dado, y dos entornos  $U$  y  $V$ , con constantes  $M$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  obtenidas en el **Lema C.0.13**. Si:*

$$T : W \times U \times \mathbf{A}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{C}([-r, \alpha], \mathbf{R}^n)$$

$$T(\sigma, \phi, f, y)(t) = 0, \quad t \in [-r, 0],$$

$$T(\sigma, \phi, f, y)(t) = \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, \quad t \in I_\alpha,$$

entonces  $T$  es continua y hay un conjunto compacto  $K$  en  $\mathbf{C}([-r, \alpha], \mathbf{R}^n)$  tal que:

$$T : W \times U \times \mathbf{A}(\alpha, \beta) \rightarrow K.$$

Además, si  $M\alpha \leq \beta$ , entonces:

$$T : W \times U \times \mathbf{A}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{A}(\alpha, \beta).$$

Incluso después de este lema, el operador  $T$  es continuo bajo condiciones más débiles que las establecidas en el **Lema C.0.14**.

Para probar nuestro teorema básico de existencia, necesitamos el **Teorema de punto fijo de Schauder**. Si  $U$  es un subconjunto de un espacio de Banach  $X$  y  $T : U \rightarrow X$ , entonces  $T$  es completamente continua si  $T$  es continua y para cualquier conjunto acotado  $B \subseteq U$ , el cierre de  $T(B)$  es compacto.

**Teorema C.0.18** (Teorema del punto fijo de Schauder). *Si  $U$  es un convexo, cerrado, subconjunto de un espacio de Banach  $X$  y  $T : U \rightarrow U$  es completamente continuo, entonces  $T$  tiene un punto fijo en  $U$ .*



---

**Teorema C.0.19** (Existencia). *Supongamos que  $\Omega$  es un subconjunto abierto en  $\mathbf{R} \times C$  y  $f^0 \in \mathbf{C}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ . Si  $(\sigma, \phi) \in \Omega$ , entonces hay una solución del **RFDE** ( $f^0$ ) que pasa a través de  $(\sigma, \phi)$ . Más generalmente, si  $W \subseteq \Omega$  es compacto y  $f^0 \in \mathbf{C}(\Omega, \mathbf{R}^n)$  es dado, entonces hay un entorno  $V \subseteq \Omega$  de  $W$  tal que  $f^0 \in \mathbf{C}^0(V, \mathbf{R}^n)$ , hay otro entorno  $U \subseteq \mathbf{C}^0(V, \mathbf{R}^n)$  de  $f^0$  y un  $A > 0$  tal que para cualquier  $(\sigma, \phi) \in W$   $f \in U$ , existe una solución  $x(\sigma, \phi, f)$  de la **RFDE** ( $f$ ) a través de  $(\sigma, \phi)$  que existe en  $[\sigma - r, \sigma + A]$ .*

**Teorema C.0.20** (Continuidad). *Suponemos que  $\Omega \subseteq \mathbf{R} \times C$  es abierto,  $(\sigma^0, \phi^0) \in \Omega$ ,  $f^0 \in \mathbf{C}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ , y  $x^0$  una solución de **RFDE**( $f^0$ ) a través de  $(\sigma^0, \phi^0)$  que existe y es única en  $[\sigma^0 - r, b]$ . Sea  $W^0 \subseteq \Omega$  el conjunto compacto definido por:*

$$W^0 = \{(t, x_t^0) : t \in [\sigma^0, b]\},$$

*y sea  $V^0$  un entorno de  $W^0$  donde  $f^0$  está acotado. Si  $(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  satisface  $\sigma^k \rightarrow \sigma^0$ ,  $\phi^k \rightarrow \phi^0$ , y  $|f^k - f^0|_{V^0} \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces existe un  $k^0$  tal que la **RFDE** ( $f^k$ ) para  $k \geq k^0$  es tal que cada solución  $x^k = x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$  a través de  $(\sigma^k, \phi^k)$  existe en  $[\sigma^k - r, b]$  y  $x^k \rightarrow x^0$  uniformemente en  $[\sigma^0 - r, \beta]$ .<sup>3</sup>*

**Teorema C.0.21** *Supongamos que  $\Omega$  es un conjunto abierto en  $\mathbf{R} \times C$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  es continua, y  $f(t, \phi)$  es Lipschitziana en  $\phi$  en cada conjunto compacto de  $\Omega$ . Si  $(\sigma, \phi) \in \Omega$  entonces hay una solución única de la ecuación (C.1) a través de  $(\sigma, \phi)$ .*

### Continuación de soluciones

Supongamos que  $f$  en la ecuación (C.1) es continua. Si  $x$  es una solución de la ecuación (C.1) en un intervalo  $[\sigma, a)$ ,  $a > \sigma$ , decimos  $x$  es una *continuación de  $x$*  si hay un  $b > a$  tal que  $x$  se define en  $[\sigma - r, b)$ , coincide con  $x$  en  $[\sigma - r, a)$ , y  $x$  satisface la ecuación (C.1) sobre  $[\sigma, b)$ . Una solución  $x$  es *no-continuable* si no existe tal continuidad, es decir, el intervalo  $[\sigma - r, a)$  es el intervalo máximo de existencia de la solución  $x$ . Además, el intervalo máximo de existencia debe ser abierto.

**Teorema C.0.22** *Supongamos que  $\Omega$  es un conjunto abierto en  $\mathbf{R} \times C$  y  $f \in \mathbf{C}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ . Si  $x$  es una solución no-continuable de la ecuación (C.1) en  $[\sigma - r, b)$ , entonces, para cualquier conjunto compacto  $W \subset \Omega$ , hay un  $t_W$  tal que  $(t, x_t) \notin W$  para  $t_w \leq t < b$ .*

---

<sup>3</sup>Puesto que todo  $x^k$  no puede ser definido en  $[\sigma^0 - r, b]$ , por  $x^k \rightarrow x^0$  uniformemente en  $[\sigma^0 - r, b]$ , queremos decir que para cualquier  $\varepsilon > 0$ , hay una  $k_1(\varepsilon)$  tal que  $x^k(t)$ ,  $k \geq k_1(\varepsilon)$ , definido en  $[\sigma^0 - r + \varepsilon, b]$  y  $x^k \rightarrow x^0$  uniformemente en  $[\sigma^0 - r + \varepsilon, b]$ .

**Corolario C.0.23** *Supongamos que  $\Omega$  es un conjunto abierto en  $\mathbf{R} \times C$  y  $f \in \mathbf{C}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ . Si  $x$  es una solución no-continuable de la ecuación (C.1) en  $[\sigma - r, b)$  y  $W$  es el cierre del conjunto  $\{(t, x_t) : \sigma \leq t < b\}$  en  $\mathbf{R} \times C$ , entonces  $W$  compacto implica que hay una sucesión  $\{t_k\}$  de números reales,  $t_k \rightarrow b^-$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , tal que  $(t_k, x_{t_k})$  tiende a  $\partial\Omega$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Si  $r > 0$ , entonces hay un  $\psi \in C$  tal que  $(b, \psi) \in \partial\Omega$  y  $(t, x_t) \rightarrow (b, \psi)$  cuando  $t \rightarrow b^-$ .*

**Teorema C.0.24** *Supongamos que  $\Omega$  es un conjunto abierto en  $\mathbf{R} \times C$ ,  $f$  es completamente continua; es decir,  $f$  es continua y toma conjuntos cerrados de  $\Omega$  en conjuntos acotados de  $\mathbf{R}^n$ , y  $x$  es una solución no-continuable de la ecuación (C.1) en  $[\sigma - r, b)$ . Entonces, para cualquier conjunto acotado cerrado  $U$  en  $\mathbf{R} \times C$ ,  $U \subseteq \Omega$ , hay un  $t_U$  tal que  $(t, x_t) \notin U$  para  $t_U \leq t < b$ .*

Este **Teorema C.0.24** da condiciones bajo las cuales la trayectoria  $(t, x) \in \mathbf{R} \times C$  de una solución no-continuable de  $[\sigma, b)$  se aproxima al límite de  $\Omega$  cuando  $t \rightarrow b^-$ . El acercamiento a la frontera de  $\Omega$  se describió diciendo que la trayectoria debe salir y permanecer fuera de cada conjunto cerrado en  $\Omega$ . Si no se impone la condición de que  $f$  es completamente continua, entonces es concebible que la trayectoria  $\{(t, x_t) : \sigma \leq t < b\}$ , en sí mismo es un subconjunto acotado cerrado de  $\Omega$ ; es decir, la curva  $(t, x(t))$  oscila de manera que no hay puntos límite de  $(t, x_t) \in \mathbf{R} \times C$  cuando  $t \rightarrow b^-$ .

Ahora daremos un ejemplo explícito que ilustra este hecho.

**Ejemplo C.2**

Sea  $\Delta(t) = t^2$  y seleccione dos sucesiones  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$  de números negativos,  $a_1 < a_2 < \dots$ ,  $b_1 < b_2 < \dots$ ,  $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  tal que:

$$a_k = b_k - \Delta(b_k), \quad b_k \leq a_{k+1} - \Delta(a_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Por ejemplo, podemos elegir  $b_k = -2^{-k}$ , con  $k = 1, 2, \dots$ . Sea  $\psi(t)$  una función arbitraria continua y diferenciable tal:

$$\psi(t) = \begin{cases} +1, & \text{para } t \in (-\infty, a_1), [b_{2k}, a_{2k+1}], \quad k = 1, 2, \dots \\ -1, & \text{para } t \in [b_{2k-1}, a_{2k}], \quad k = 1, 2, \dots \\ \psi'(t) \neq 0, & t \in (a_k, b_k), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Sea  $H$  un conjunto de puntos  $(t, x)$  tal que  $|x| < 1 - t$ . Éstas inecuaciones son equivalentes:

$$x + t < 1 \quad \text{si } x > 0,$$

$$-x + t < 1 \quad \text{si } x < 0.$$

Ahora definimos una función  $h(t, x)$  en  $H$ . En la gráfica de la curva  $\psi(t)$ , sea:

$$h(t - \Delta(t), \psi(t, \Delta(t))) = \psi'(t),$$

donde esa prima ' denota la derivada de  $\psi$ ,  $-\infty < t < 0$ . La función  $h$  es continua en la gráfica de  $\psi$ . Para cualquier  $t \in (a_k, b_k)$ ,  $k \geq 2$ , es decir, un punto de aumento o disminución en la gráfica;  $t - \Delta(t) \in [b_{k-1}, a_k]$ . Para  $t$  en  $(-\infty, b_1]$ ,  $t - \Delta(t) \in (-\infty, a_1]$ . Por lo tanto,  $h = 0$  para cualquier  $t$  en  $(-\infty, b_1]$ ,  $(a_k, b_k)$ ,  $k \geq 2$  y, en particular,  $h = 0$  en todos los puntos de aumento o de disminución de la gráfica de la curva  $\psi(t)$ . Ahora continua la función  $h(t, x)$  de cualquier manera, siempre que permanezca continua y sea igual a cero en el cuadrado  $P : |t| + |x| \leq 1$ .

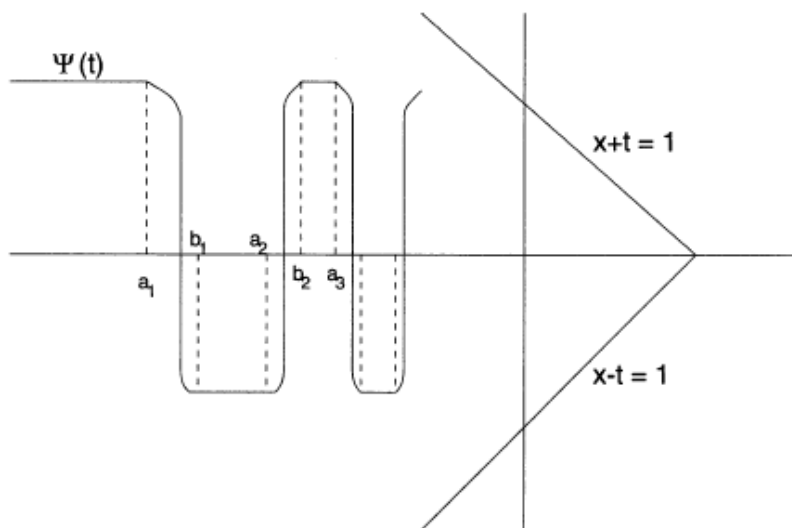


Figura C.1: Representación.

Ahora consideramos la función:

$$\dot{x}(t) = h(t - \Delta(t), x(t - \Delta(t))), \quad t < 0, \quad \Delta(t) = t^2. \quad (\text{C.8})$$

Elegimos  $\sigma < a_1$  y sea  $r = \sigma - \min\{(t - t^2) : \sigma \leq t \leq 0\}$ . Consideramos el problema de valores iniciales comenzando en  $\sigma$ . La función  $x(t) = \psi(t)$  es una solución de la ecuación para  $t < 0$  y es una solución *no-continuable* en  $[\sigma - r, 0)$ .

Si el lado derecho de la ecuación (C.8) se denota por  $f(t, x_t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,  $x_t \in \mathbf{C}([-r, 0], \mathbf{R})$ , entonces  $f(t, \phi)$  no manda los conjuntos cerrados de  $\Omega = \mathbf{R} \times \mathbf{C}([-r, 0], \mathbf{R})$  en conjuntos acotados. De hecho, el conjunto  $\{(t, \psi_t) : t \geq 0\}$  es un conjunto acotado y está cerrado ya que no hay sucesiones cuando  $t_k \rightarrow 0$  tales que  $\psi_{t_k}$  converja.

Este comportamiento extraño, es una de las formas en que la no compacidad de la bola unitaria en  $\mathbf{C}([-r, 0], \mathbf{R}^n)$ ,  $r > 0$  puede influir en la solución de **RFDE**.

La propiedad particular que hemos expuesto en este ejemplo es en realidad un fenómeno general. De hecho, uno puede probar el siguiente resultado.

**Teorema C.0.25** *Suponemos  $x : [-r, A) \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $r > 0$ ,  $A$  finito, es una función arbitrariamente acotada y continuamente diferenciable que satisface la propiedad de que  $x(t)$  no se aproxima a un límite como  $t \rightarrow A^-$ . Entonces existe una función continua  $f : C \rightarrow \mathbf{R}^n$  tal que  $x$  es una solución no-continuable de la **RFDE** ( $f$ ) en  $[-r, A)$ .*

### Conclusiones

Tomemos como ejemplo canónico de ecuación con retardo no autónoma un sistema con un **retardo variable**,  $\rho(t)$ , donde  $\rho : \mathbf{R} \rightarrow [0, h]$  es una función continua y  $h > 0$ ,

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t), x(t - \rho(t))), \quad x_s = \psi, \psi \in \mathbf{C}. \quad (\text{C.9})$$

La condición inicial  $x_s$  está en  $\mathbf{C}$ , el espacio  $C^0([-h, 0]; \mathbf{R}^n)$  de funciones continuas sobre  $[-h, 0]$  en  $\mathbf{R}^n$ , y para una función  $x \in C^0([-h, T]; \mathbf{R}^n)$ , la notación  $x_s$ , denota la función de  $\mathbf{C}$  dada por  $x_s(\theta) = x(s + \theta)$  para todo  $\theta \in [-h, 0]$ . Con lo que tiene sentido  $x_s$  para cualquier  $0 \leq s \leq T$ .

Esta ecuación se puede escribir en un marco mucho más general, que permite considerar un conjunto mayor de problemas de forma unificada. Mejor que tomar el retardo explícito, escribimos:

$$f(t, x_t) = F(t, x(t), x(t - \rho(t))),$$

con lo que podemos reescribir (C.9) como:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad x_s = \psi, \psi \in \mathbf{C}. \quad (\text{C.10})$$

En lo que sigue nos centraremos en esta última forma de la ecuación, asumiendo que  $f : \mathbf{R} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}^n$  es continua y es una aplicación acotada, en el sentido de que transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Notemos que esta formulación incluye inmediatamente ejemplos con retardos que no sean constantes ni variables. Como por ejemplo la ecuación *integro-diferencial*:

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^0 g(t, s, x(t + s)) ds,$$

---

también entra en este marco.

Para concluir vamos a presentar un resultado de existencia y unicidad de solución de este tipo de ecuaciones.

**Teorema C.0.26** *Dado  $(s, \psi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{C}$ , existe una única solución  $x(t; s, \psi)$  de (C.10) definida sobre  $[s - h, \alpha_{s, \psi}]$ , con  $\alpha_{s, \psi} > 0$ .*

Asumimos que  $A_{s, \psi} = +\infty$ , para todo  $s \in \mathbf{R}$ , ya que estamos interesados en el comportamiento de las soluciones a largo plazo en tiempo.

Definamos entonces el operador  $\phi(t, s)$  tal que da la solución en  $\mathbf{C}$  en el tiempo  $t$  cuando  $x_s = \psi$ , es decir,

$$\phi(t, s)\psi = x_t(\cdot; s, \psi). \tag{C.11}$$



# Bibliografía

- [1] G. D. 'Ans, P. V. Kokotovic y D. Gottlieb, A nonlinear regulation problem for a model of biological waster treatment, *IEEE Transactions on Auntomatic Control* **AC-16** (1971), 341 – 347.
- [2] H. R. Bungay y M. L. Bunhay, Microbial interactions in continuous culture, *Advances in Applied Microbiology* 10 (1968), 269 – 290.
- [3] A. W. Bush y A. E. Cook, The effect of time delay and growth rate inhibition in the bacterial descomposition of waste, *J Theor. Biol.* 63 (1975), 385 – 395.
- [4] G. J. Butler, S. B. Hsu y P. Waltman, A mathematical model of the chemostat with periodic washout rate, *SIAM J. Appl. Math.*, 45 (1985), 435-449.
- [5] G. J. Butler, S. B. Hsu y P. Waltman, Coexistence of competing predators in a chemostat, *J. Math. Biol.*, 17 (1983) 133-151.
- [6] G. J. Butler y P. Waltman, Bifurcation from a limit cycle in a two predator-one prey ecosystem modeled on a chemostat, *J. Math. Biol.*, 12 (1981), 295-310.
- [7] G. J. Butler y G. S. K. Wolkowicz, Predator-mediated competition in the chemostat, *J. Math. Biol.*, 27 (1986), 167-191.
- [8] J. Caperon, Time lag in population response of isochrysis galbana to a variable nitrate environment, *Ecology* 24 (1969), 188 – 192.
- [9] T. Caraballo, X. Han y P. E. Kloeden, *Chemostats with time-dependent inputs and wall growth*, *Applied Mathematic and Information Sciences*, vol **9** no. 5, (2015) 2283-2296.

- 
- [10] T. Caraballo, X. Han y P. E. Kloeden, *Non-autonomous Chemostats with Non-constant Delays*, enviado a publicación.
- [11] A. N. Carvalho, J. A. Langa, J. C. Robinson, (2013) *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, Applied Mathematical Series 182, Springer, New York.
- [12] A. Cunningham y R. M. Nisbet, Transients and oscillations in continuous cultures, *Mathematics in Microbiology*, Academic Press, New York (1983), 77 – 103.
- [13] A. Cunningham y R. M. Nisbet, Transients and oscillations in continuous culture, M. Bazin (Ed.), in *Mathematics in Microbiology*, Academic, London, 1983, pp. 77-103.
- [14] A. G. Fredrickson y G. Stephanopoulos, Microbial competition, *Science* 213 (1981), 972 – 979.
- [15] H. I. Freedman y F. Yang, Competing predators for a prey in a chemostat model with periodic nutrient recycling, *J. Math. Biol.* 29 (1991), 715-732.
- [16] J. K. Hale, S. M. Verduyn-Lunel, *Introduction to Functional Differential Equation*, (1977), 38-51.
- [17] A. Hastings, Multiple limit cycles in predator-prey models, *J. Math. Biol.*, 11 (1981), 51-63.
- [18] H. W. Jannash y R. T. Mateles, Experimental bacterial ecology studies in continuous culture, *Advances in Microbial Physiology* **11** (1974), 165 – 212.
- [19] J. P. Keener, Oscillatory coexistence in the chemostat: A codimension two unfolding, *SIAM J. Appl. Math.*, 43 (1983), 1005-1018.
- [20] Y. Kuang, Limit cycles in a chemostat-related model, *SIAM J. Appl. Math.*, 49 (1989), 1759-1767.
- [21] J. W. M. La Rivière, Microbial ecology of liquid waste, *Advances in Microbial Ecology* **1** (1977), 215-259.



- 
- [22] J. López de la Cruz, *Dinámica de un quimiostato no autónomo con retardo*, Trabajo Fin de Máster (2014), Universidad de Sevilla.
- [23] Mei Lin, Hai-Feng Huo, Yu-Ning Li, A competitive model in a chemostat with nutrient recycling and antibiotic treatment. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 13 (2012), 2540 – 2555.
- [24] H. L. Smith y H. R. Thieme, *Dynamical Systems and Population Persistence*, American Mathematical Society, Providence, RI (2010).
- [25] H. L. Smith, Competitive coexistence in an oscillating chemostat, *SIAM J. Appl. Math.*, 40 (1981), 498-522.
- [26] G. Stephanopoulos y G. Lapidus, Chemostat dynamics of plasmid-bearing plasmid-free mixed recombinant cultures, *Chemical Engineering Science* **43** (1988), 49-57.
- [27] F. M. Stewart y B. R. Levin, The population biology of bacterial plasmids: A priori conditions for the existence of conjugationally transmitted factors, *Genetics* **87** (1977) 209-228.
- [28] P. A. Taylor y J. L. Williams, Theoretical studies on the coexistence of competing species under continuous flow conditions, *Canadian Journal of Microbiology* **21** (1975), 90 – 98.
- [29] H. Veldcamp, Ecological studies with the chemostat, *Advances in Microbial Ecology* 1 (1977), 59 – 95.
- [30] P. Waltman *Competition Models in Populations Biology*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1983).
- [31] P. Waltman, S. P. Hubbel y S. B. Hsu, Theoretical and experimental investigations of microbial competition in continuous culture, *Modeling and Differential Equations in Biology*, New York (1980) 107 – 152.

- [32] P. Waltman, Coexistence in chemostat-like model, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **20** (1990), 777-807.
- [33] G. S. K. Wolkowicz, Successful invasion of a food web in a chemostat, *Math. Biosci.*, 93 (1989), 249-268.





