**Facultad de Matemáticas**
Dpto. de Análisis Matemático

# Algunas desigualdades del Análisis Matemático

**Esperanza Macarena Rico Domínguez**

**Trabajo Fin de Grado**
**Curso académico 2016/2017**

**Tutor: José A. Facenda Aguirre**

# Índice general

# Índice de figuras

# Abstract


The comparison of quantities is an essential tool in mathematics. The art of inequalities is found in the clever, often subtle methods used to generate and verify them. The science of inequalities lies in their careful interpretation and in the knowledge of their scope and limitations. In this work we study some fundamental inequalities in mathematics.

In the first chapter we prove the arithmetic - geometric mean inequality. A plenty of proofs of this inequality are known, induction, backward induction, use of Jensen inequality, swapping terms, use of Lagrange multiplier, convexity. We include the Cauchy original proof and another one due to Pólya.

We deal with convexity in second chapter. The Jensen inequality give us a new proof of the arithmetic - geometric mean inequality with arbitrary weights. Also, from the inequality of Young we derive the Hölder inequality with positive weights.

In the third chapter we study the behavior of weighted means of order $p$, including the extreme cases $p = \pm\infty$. We prove the equivalence between some studied inequalities: the arithmetic - geometric mean inequality, Hölder inequality and weighted power mean inequality.

The fourth chapter is dedicated to the Carleman's inequality. In 1923, Carleman gave necessary and sufficient conditions for functions not to be quasi-analytic. As a lemma (stated as a theorem) for one of the implications, Carleman proved that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} < e \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

if $(a_k)$ is a sequence of real positive numbers and the sum on the righthand side is convergent. The constant $e$ is sharp. We begin with Carleson original proof. In 1926 George Pólya gave an elegant proof that depended on little more than the arithmetic - geometric mean inequality. We also include proofs by Knopp and Redheffer.

We start the fifth chapter with a functional equation of the $\Gamma$ function that is necessary to prove Hilbert inequality

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} < 2\pi \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Several years after Hilbert's discovery, Issai Schur provided a new proof which showed Hilbert's inequality actually holds with constant $\pi$. Hilbert evaluated certain trigonometric integrals to prove his inequality. Nevertheless, we prove this inequality through an appropriate application of Cauchy - Schwarz inequality. We also give the integral version of this inequality and we derive from it a finer version of Hilbert's inequality. We conclude the chapter demonstrating the generalization of Schur.

In the last chapter we prove this inequality:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

where $(a_n)$ is a nonnegative $p$-power summable sequence, $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ and $1 < p < \infty$, known as Hardy inequality because this mathematician, in his search for a new proof of Hilbert's double series theorem proved it in 1920, although with another constant that was later rectified by Landau in 1926. As in the previous chapter, we also demonstrate the integral version. Our proof of Hardy's inequality is due to Elliot (1926) and that of the integral version is essentially Hardy's original proof. Hardy's inequality allow us to give a new proof of Carleman's inequality. We now prove the integral version of this inequality, known a Knopp inequality. It will be necessary to study Jensen's inequality. We finish the work with an inequality due to Carleson:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha}\exp\left(-\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx \leq e^{\alpha+1}\int_0^{\infty} x^{\alpha}\exp(-\varphi'(x))\, dx,$$

where $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ is differentiable convex function with $\varphi(0) = 0$ and $-1 < \alpha < \infty$. The constant $e^{\alpha+1}$ is sharp. This inequality yield both Carleman's inequality and Knopp's inequality as corollaries.

# Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar ciertas desigualdades clásicas en el campo del Análisis Matemático.

Comenzamos con la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, de la que damos varias demostraciones, entre las que se incluyen la prueba original de Cauchy, en la que usa el método de "inducción hacia atrás", así como otra muy interesante debida a Pólya que prueba la desigualdad con pesos, usando una propiedad de la función exponencial. Pólya había referido que la demostración le vino en un sueño, y años más tarde, preguntado al respecto, comentó que eran las mejores matemáticas que había soñado nunca[1].

La convexidad es uno de los pilares fundamentales en la teoría de desigualdades, y a ella le dedicamos el segundo capítulo de nuestro trabajo. Comenzamos con la desigualdad de Jensen, probada por este matemático danés en 1906, que incluye como casos particulares otras desigualdades, como por ejemplo la que vimos en el capítulo anterior sobre las medias aritmética y geométrica con pesos.

También deducimos como consecuencia la desigualdad de Young y la de Hölder, esta última tanto en los casos $p > 1$ como $0 < p < 1$.

En el tercer capítulo introducimos las medias elementales, com pesos o sin ellos. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un vector con coordenadas positivas, $p$ es un número real no nulo y $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, definimos lo que llamamos medias de potencias ponderadas como

$$M_p(\mathbf{x}, \alpha) = \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

El objetivo es probar que la aplicación $p \in \mathbb{R} \mapsto M_p$ es una aplicación continua en la recta real, y ello nos llevará a estudiar como definir $M_0$, $M_\infty$ y $M_{-\infty}$. En este sentido se prueba que

$$\lim_{p \to 0} M_p(\mathbf{x}, \alpha) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

que conduce a la definición lógica de $M_0(\mathbf{x}, \alpha)$. Asimismo, demostramos que

$$\lim_{p \to +\infty} M_p(\mathbf{x}, \alpha) = \max\{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad \lim_{p \to -\infty} M_p(\mathbf{x}, \alpha) = \in \{x_1, \ldots, x_n\},$$

que nos llevan a las definiciones de $M_\infty$ y $M_{-\infty}$. Probamos también que la aplicación $p \mapsto M_p$ es creciente en $\mathbb{R}$.

Estudiamos también la desigualdad de Minkowski para estas medias, tanto en los casos $p \geq 1$ como $p < 1$ y damos el paso a integrales, probando las desigualdades de Hölder y Minkowski en este campo.

[1] Véase [11], página 23.

Finalizamos el tema probando la equivalencia entre ciertas desigualdades estudiadas hasta el momento.

El capítulo 4 está dedicado a la desigualdad de Carleman, demostrada por este matemático sueco en 1922 (véase [2]): si $\sum_{n\geq 1} a_n$ es una serie convergente de números reales no negativos entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} \leq e\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

El trabajo citado de Carleman trata sobre funciones quasi-analíticas. Difícilmente podía pensar en ese momento que su desigualdad despertara tal interés. Existe una versión continua que se atribuye a Knopp (aunque parece ser que Pólya fue el primero que la descubrió y a veces se conoce como desigualdad de Pólya-Knopp) y se verá en el capítulo 6.

Se incluyen varias pruebas de ella, comenzando por la propia de Carleman. En ella, el autor demuestra la desigualdad calculando el máximo de cierta expresión bajo una condición, que resuelve aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange.

La demostración de Knopp es corta, usa series telescópicas y la desigualdad ya demostrada anteriormente de las medias aritmética y geométrica.

Pólya publicó una demostración en 1925[2]. En 1949 explicó en su trabajo [9] como encontró esa prueba. También usa series telescópicas, y su resultado es más fuerte que el inicial de Carleman.

En [10], Redheffer unifica demostraciones de desigualdades conocidas (Hardy, Knopp, Pólya, Hölder, Abel, Carleman) mediante una técnica que denomina desigualdades recurrentes.

Terminamos el capítulo dando una última demostración de la desigualdad de Carleman que se deduce de la acotación de los términos de la serie. Si $a_n \geq 0$ entonces

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{e}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

La desigualdad de Hilbert, que afirma que dadas dos sucesiones $(a_n)$ y $(b_n)$ de números reales, se cumple que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_mb_n}{m+n} < 2\pi\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

se prueba en el capítulo 5. Schur probó que la desigualdad es cierta también sustituyendo $2\pi$ por $\pi$. De hecho, $\pi$ es la mejor constante. Comenzamos dicho capítulo probando una ecuación funcional de la función $\Gamma$ que será necesaria en el proceso, en concreto,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}.$$

Hilbert demostró la desigualdad evaluando ciertas integrales trigonométricas. La prueba que incluimos en el trabajo usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz eligiendo adecuadamente una familia paramétrica.

Como dice J. Michael Steele (véase [11], página 161), cada vez que aparece $\pi$ en un problema sin círculo a la vista, hay cierto misterio. Hay veces en que ese misterio permanece sin explicación satisfactoria, pero no sucede así en el caso de la desigualdad de Hilbert. En

[2] G. Pólya. Proof of an inequality. *Proc. London Math. Soc.* (2), **24**, (1925), 55.

1993, Krysztof Oleszkiewicz (véase [8]) encontró una explicación geométrica a la aparición del número $\pi$, que incluimos en el trabajo.

Probamos en este capítulo la versión integral de la desigualdad de Hilbert, y deducimos de ella una versión más fina que la discreta probada inicialmente.

Terminamos el capítulo viendo dos resultados más. Por una parte, la demostración dada por Toeplitz en 1910 de la desigualdad de Hilbert, demostración elemental pero válida solamente parea sumas finitas. Por otra, la generalización de Schur de la desigualdad: si $a_m$ y $b_n$ son sucesiones de números complejos y $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\left|\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m b_n}{m+n-\alpha}\right| \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}\left(\sum_{m=1}^{N}|a_m|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N}|b_n|^2\right)^{1/2}.$$

Este recorrido entre desigualdades acaba en el capítulo 6, donde abordamos la conocida desigualdad de Hardy, tanto en su versión discreta: si $1 < p < \infty$, $(a_n)$ es una sucesión de potencia $p$-ésima sumable no idénticamente nula y $A_n = a_1 + \cdots + a_n$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

como continua: si $1 < p < \infty$, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función de potencia $p$-ésima integrable no idénticamente nula y $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, entonces

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p\,dx.$$

Hardy probó su desigualdad en 1920, buscando otra demostración de la desigualdad de Hilbert. La demostración dada en el trabajo de la versión discreta se debe a Elliot[3] y la de la continua es esencialmente la prueba que hizo el propio Hardy.

Consecuencia de la desigualdad de Hardy es la desigualdad de Carleman de nuevo, así como la versión integral de la misma, conocida como desigualdad de Knopp que se prueba en este último capítulo.

El capítulo finaliza probando una desigualdad atribuida a Lennart Carleson en 1954, que nos proporciona nuevas demostraciones de las desigualdades de Carleman y Knopp, esta última para funciones decrecientes.

[3]Elliot, E.B. A simple extension of some recently proved facts as to convergency. *J. London Math. Soc.*, **1**, (1926), 93–96.

CAPÍTULO 1

# Cauchy y las medias

La comparación de cantidades es una herramienta esencial en matemáticas. Vamos a estudiar en este trabajo algunas de las desigualdades más conocidas en el campo del Análisis Matemático.

En el presente capítulo se pretende mostrar la utilidad de una desigualdad tan elemental como la relación entre las medias aritmética y geométrica, y veremos la demostraciones realizadas por Cauchy y Pólya.

## 1.1. Desigualdad de Bernoulli y consecuencias

Comenzamos con una desigualdad clásica, publicada por Jacob Bernoulli en la segunda página de su trabajo *Positiones Arithmeticae de Seriebus Infinitis (Basel, 1689).*

**Teorema 1.1** (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Si $x \geq -1$, entonces $(1+x)^n \geq 1+nx$ para todo natural $n = 1,2,3,\dots$. La igualdad se da solo si $n = 1$ o bien $x = 0$.*

*Demostración.* Fijemos $x \geq -1$. La desigualdad se cumple claramente para $n = 1$, luego si suponemos que $(1+x)^n \geq 1+nx$ para algún $n > 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\
&\geq (1+x)(1+nx) \quad (\text{porque } 1+x \geq 0) \qquad (1.1)\\
&= 1+(n+1)x+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Así, la desigualdad es válida para todo $n = 1,2,3,\dots$.

Obsérvese que la igualdad ocurre solo si $n = 1$ o $x = 0$, la igualdad en (1.2) fuerza que $x = 0$. □

Podemos pues enunciar el resultado anterior afirmando que si $x \geq -1$, $x \neq 0$, entonces $(1+x)^n > 1+nx$ para todo $n = 2,3,4,\dots$.

**Corolario 1.2.** *Dados $x,y > 0$, tenemos que$(x+y)^n > x^n + nx^{n-1}y$ para todo $n = 2,3,4,\dots$. La igualdad solo puede ocurrir si $y = 0$.*

*Demostración.* Basta aplicar el comentario anterior, pues

$$(x+y)^n = x^n\left(1+\frac{y}{x}\right)^n > x^n\left(1+n\frac{y}{x}\right) = x^n + nx^{n-1}y.$$

□

Consecuencia directa es el conocido resultado, que usaremos en algún momento en este trabajo, sobre la sucesión que define el número $e$.

**Corolario 1.3.** *La sucesión* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *es estrictamente creciente.*

*Demostración.* Basta probar que $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 1$. Para ello, reescribimos y aplicamos la desigualdad de Bernoulli:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1+\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&> \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+(n+1)\cdot\frac{-1}{(n+1)^2}\right) \qquad \text{(por Bernoulli)} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1
\end{aligned}$$

□

**Ejemplo 1.4.** $n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ *para* $n \geq 6$.

Por inducción; para $n = 6$ no es difícil comprobar directamente que $6! < 3^6$. Por el paso inductivo:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n > \left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot 2\cdot n! = (n+1)!$$

## 1.2. Desigualdad de las medias aritmética y geométrica

La desigualdad de Bernoulli es aparentemente buena, vamos a probar a partir de ella una desigualdad ya demostrada por Cauchy, la conocida desigualdad entre las medias aritméticas y geométricas de un conjunto de números reales.

**Teorema 1.5** (Desigualdad de las medias aritmética y geométrica)**.** *Dados* $n \in \mathbb{N}$ *y números positivos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$*, se cumple que*

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \tag{AGM}$$

*con igualdad si y solo si* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

*Demostración.* Lo probamos por el método de inducción matemática. La desigualdad es verdaderamente cierta para $n = 1$, y no es difícil establecerla para $n = 2$. Veámoslo:

$$
\begin{aligned}
(a_1 - a_2)^2 &\geq 0 \\
a_1^2 - 2a_1x_2 + a_2^2 &\geq 0 \\
a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 &\geq 4a_1x_2 \\
(a_1 + a_2)^2 &\geq 4a_1a_2 \\
\frac{(a_1 + a_2)^2}{4} &\geq a_1a_2 \\
\frac{a_1 + a_2}{2} &\geq \sqrt{a_1a_2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, supongamos que el teorema se cumple para algún $n$ natural y para todas las elecciones $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Como $a_{n+1} > 0$, vamos a suponer (por simplificar la notación) que $a_{n+1} \geq a_k$ para $k = 1, \ldots, n$ (si no fuera así, basta reordenar los términos).
Convengamos también en escribir

$$G_k = (a_1a_2 \cdots a_k)^{1/k} \quad \text{y} \quad A_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

Entonces

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1} = A_n + \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}$$

donde, por lo supuesto, $a_{n+1} \geq A_n$. Por lo tanto, por el corolario (1.2),

$$
\begin{aligned}
A_{n+1}^{n+1} &\geq A_n^{n+1} + (n+1)A_n^n\left(\frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}\right) \qquad (1.3) \\
&= a_{n+1}A_n^n \\
&\geq a_{n+1}G_n^n = G_{n+1}^{n+1} \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Tengamos en cuenta que la igualdad en (1.3) fuerza a que $a_{n+1} = A_n$, mientras la igualdad en (1.4) fuerza a que $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1}$ (por hipótesis). Por lo tanto, la igualdad en todas partes daría $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1}$.

□

Veamos a continuación algunas aplicaciones de esta desigualdad.

**Teorema 1.6.** *El área de un triángulo de perímetro dado $2p = a + b + c$ es máxima si los lados a, b y c son iguales.*

*Demostración.* En un triángulo no degenerado, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es estrictamente mayor que el tercero, luego $2p = a + b + c > 2c$ e igual con los demás, por lo que

$$p - a, \quad p - b, \quad p - c$$

son positivos. Por la fórmula de Heron para el área y el teorema 1.5,

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27},$$

con igualdad si y solo si $a = b = c$.

□

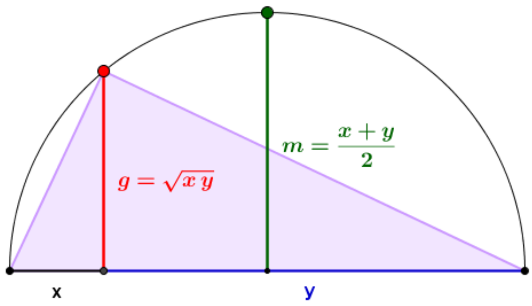



Figura 1.1: Demostración visual de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica.

**Teorema 1.7.** *Si $m$ y $n$ son enteros tales que $0 < m < n$ y $\xi > -m$ es real, entonces*

$$\left(1+\frac{\xi}{m}\right)^m < \left(1+\frac{\xi}{n}\right)^n.$$

*Demostración.* Basta aplicar la desigualdad a $m$ copias de $1+\frac{\xi}{m}$ y $n-m$ copias de 1:

$$\left(1+\frac{\xi}{m}\right)^{\frac{m}{n}} 1^{\frac{n-m}{n}} \leq \frac{m}{n}\left(1+\frac{\xi}{m}\right)+\frac{n-m}{m}\cdot 1 = 1+\frac{\xi}{n},$$

y la desigualdad es estricta se $\xi \neq 0$.

□

Observemos que si en el resultado anterior ponemos $t = \xi/n > -m/n$ y tomamos raíces $m$-ésimas, obtenemos

$$(1+t)^{n/m} \geq 1+\frac{n}{m}t.$$

Esta desigualdad es trivialmente cierta para $-1 \leq t \leq -\frac{m}{n}$. Así que para todo $t \geq -1$ y racional $p \geq 1$, se cumple que

$$(1+t)^p \geq 1+pt,$$

que es la versión “racional” de la desigualdad de Bernoulli, y enunciamos como teorema.

**Teorema 1.8** (Versión racional de la desigualdad de Bernoulli)**.** *Si $t \geq -1$ y $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq 1$, se verifica que*

$$(1+t)^r \geq 1+rt.$$

Vamos a terminar esta sección viendo una versión de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica para números complejos.

**Teorema 1.9.** *Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos tales que si $z_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ entonces*

$$0 \leq \rho_j < \infty, \quad 0 \leq |\theta_j| < \psi < \pi/2, \quad 1 \leq j \leq n.$$

*Entonces*

$$(\cos\psi)\,|z_1 z_2 \cdots z_n|^{1/n} \leq \frac{1}{n}|z_1+z_2+\cdots+z_n|.$$

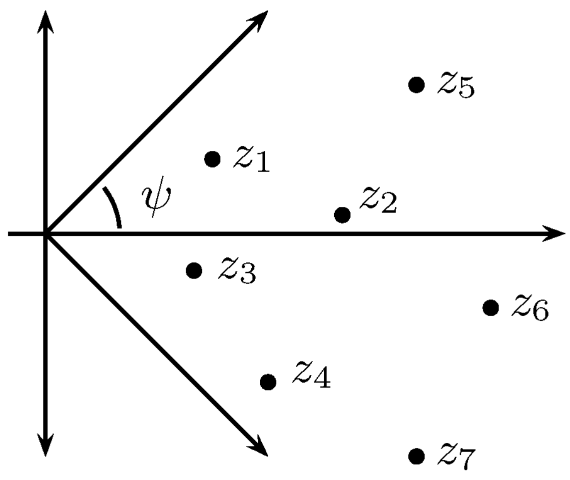



Figura 1.2: Complejos en el semiplano $\Re(z) > 0$.

Como vemos en la figura de arriba, los números complejos están contenidos en un cono simétrico de ángulo central $2\psi$ con $0 \leq \psi < \pi$.

*Demostración.* Sabemos que $|\Re(z)| \leq |z|$ y $\Re(z+w) = \Re(z) + \Re(w)$, así que como en nuestro caso es $\Re(z_j) = \rho_j \cos\theta_j$,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| &\geq |\Re(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)| \\ &= |z_1 \cos\theta_1 + |z_2| \cos\theta_2 + \cdots + |z_n| \cos\theta_n \\ &\geq (|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|) \cos\psi \\ &\geq n\,(|z_1|\,|z_1| \cdots |z_n|)^{1/n} \cos\psi, \end{aligned}$$

donde hemos usado que el coseno es decreciente en $[0, \pi/2]$ y hemos aplicado la desigualdad de las medias aritmética y geométrica a los números reales no negativos $|z_j|$, $1 \leq j \leq n$.

□

Si los $z_j$ son reales podemos tomar $\psi = 0$ y la desigualdad es la ya conocida de las medias.

### 1.2.1. La demostración de Cauchy

La desigualdad de Cauchy (o de Cauchy-Schwarz) para números reales nos dice que

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Es muy conocida y ampliamente usada. ¿Cómo la podemos probar? Es obviamente cierta para $n = 1$, y para $n = 2$ la desigualdad es

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Podemos ver que esta desigualdad también es cierta. No hay nada más sistemático que desarrollar ambos miembros y llegar a la expresión

$$a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 \leq a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2$$

y simplificarla para llegar a

$$0 \leq (a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2)(a_2b_1) + (a_2b_1)^2,$$

que no es más que

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

lo que nos permite concluir que la desigualdad de Cauchy también es cierta para $n = 2$.

Para probar la desigualdad de Cauchy recurrimos a inducción. Si denotamos por $H(n)$ el hecho de que la desigualdad de Cauchy es cierta para $n$, necesitamos probar que $H(2)$ y $H(n)$ implican que $H(n+1)$ es cierta. Para ello,

$$\begin{aligned}
&a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} \\
&\quad = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) + a_{n+1}b_{n+1} \\
&\quad \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} + a_{n+1}b_{n+1} \\
&\quad \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 + b_{n+1}^2},
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos usado la hipótesis de inducción $H(n)$ y en la segunda desigualdad usamos $H(2)$ en la forma

$$\alpha\beta + a_{n+1}b_{n+1} \leq \sqrt{\alpha^2 + a_{n+1}^2}\sqrt{\beta^2 + b_{n+1}^2}.$$

La dificultad de esta prueba está en el último paso, donde necesitamos ver como usar $H(2)$. Aunque modesta, anticipa la naturaleza del reto que uno puede encontrarse en situaciones más complejas.

Como hemos visto, la desigualdad de Cauchy se basa en aplicar la desigualdad elemental

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

En principio, no puede esperar uno mucho de una desigualdad que viene simplemente de la observación de ser $(x-y)^2 \geq 0$.

Si $x$ e $y$ son no negativos, la desigualdad nos dice que el área de un rectángulo de lados $x$ e $y$ nunca es mayor que la media de las áreas de dos cuadrados de lados $x$ e $y$. Sin embargo, haciendo un pequeño cambio, reemplazando $x$ e $y$ por sus raíces cuadradas, podemos escribir la desigualdad como

$$4\sqrt{xy} < 2x + 2y, \qquad \forall x \neq y,\ x, y > 0. \tag{1.5}$$

Y esta desigualdad tiene una interpretación más interesante. Supongamos que consideramos el conjunto de todos los rectángulos de área $A$ y lados $x$ e $y$. Como $A = xy$, la desigualdad (1.5) nos dice un cuadrado cuyos lados miden $s = \sqrt{xy}$ debe tener el menor perímetro entre todos los rectángulos de área $A$. O lo que es equivalente, la desigualdad nos dice que entre todos los rectángulos de perímetro $p$, el cuadrado de lado $s = p/4$ tiene área máxima.

Así que la desigualdad (1.5) no es más que una versión rectangular de la propiedad isoperimétrica del círculo, que dice que entre todas las regiones planas de perímetro $p$, el círculo de circunferencia $p$ tiene la mayor área.

De esta interpretación isoperimétrica de la desigualdad (1.5) podemos pasar a pensar su análogo en $\mathbb{R}^3$. Es decir, que un cubo tiene el mayor volumen entre todos los paralelepípedos rectangulares de área dada. Y pasar a $\mathbb{R}^n$, una caja en $\mathbb{R}^n$ tiene $2^n$ esquinas, en cada una de ellas coinciden $n$ lados de la caja. Si llamamos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sus longitudes, la intuición nos lleva a suponer que un cubo con lado $S/n$ debe tener el mayor volumen entre todos las cajas para las que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$. Y esto nos conduce a la desigualdad entre las medias aritméticas y geométricas.

Veamos la demostración de Cauchy del teorema 1.5. La demostración original de Cauchy de la AGM usa una técnica llamada “Inducción hacia atrás”.

Para $n = 2$ sigue directamente de la desigualdad elemental $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$ que ya mencionamos. Cauchy se percató de que se puede aplicar la misma cota dos veces para obtener

$$(a_1a_2a_3a_4)^{\frac{1}{4}} \leq \frac{(a_1a_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3a_4)^{\frac{1}{2}}}{2} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}. \tag{1.6}$$

Esta desigualdad prueba (1.5) para $n = 4$, y la nueva cota (1.6) puede usarse otra vez con la desigualdad inicial $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$ para probar que

$$(a_1a_2\cdots a_8)^{\frac{1}{8}} \leq \frac{(a_1a_2a_3a_4)^{\frac{1}{4}} + (a_5a_6a_7a_8)^{\frac{1}{4}}}{2} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_8}{8}, \tag{1.7}$$

que confirma que (1.5) es cierto para $n = 8$.

Está claro el proceso que siguió Cauchy. Podemos usar inducción o repetir este razonamiento $k$ veces para deducir que

$$(a_1a_2\cdots a_{2^k})^{1/2^k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}, \quad \forall k \geq 1. \tag{1.8}$$

Es decir, está probada la desigualdad para las potencias de 2, y necesitamos verificarlo para el resto. El plan consiste en elegir $n \in \mathbb{N}$ y $k$ tal que $n < 2^k$; dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definir una sucesión mayor $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}$ a la que aplicarle la desigualdad (1.8).

Definamos $\alpha_i = a_i$ si $1 \leq i \leq n$ y

$$\alpha_i = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A \quad n < i \leq 2^k.$$

En definitiva, simplemente añadimos a la sucesión original $\{a_i : 1 \leq i \leq n\}$ suficientes copias de la media $A$ para obtener la sucesión $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq 2^k\}$ que tiene de longitud $2^k$. La media $A$ aparece $2^k - n$ veces en la sucesión $\{\alpha_i\}$, así que aplicando la desigualdad (1.8), tenemos que

$$\left(a_1a_2\cdots a_n \cdot A^{2^k-n}\right)^{1/2^k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (2^k - n)A}{2^k} = \frac{2^kA}{2^k} = A.$$

Es decir,

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/2^k} \leq A^{n/2^k},$$

de donde concluimos que

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Como corolario obtenemos un caso particular de la desigualdad de Young, que probaremos en el siguiente capítulo.

**Corolario 1.10.** *Sean $x, y > 0$ y $1 \leq m < n$. Entonces,*

$$x^{m/n} y^{1-m/n} \leq \frac{mx + (n-m)y}{n}.$$

*Es decir, si $r$ es racional y $r \in (0,1)$ entonces*

$$x^r y^{1-r} \leq rx + (1-r)y.$$

*Demostración.* Basta considerar la sucesión $a_i$, con $1 \leq i \leq n$ definida por

$$a_i = \begin{cases} x, & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ y, & \text{si } m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Pues en ese caso

$$\sqrt[n]{x^n y^{n-m}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{mx + (n-m)y}{n}.$$

□

El razonamiento empleado en el corolario anterior no hace ver que la desigualdad de las medias aritmética y geométrica admite unas generalizaciones que vamos a ver a continuación.

**Teorema 1.11** (Desigualdad con pesos racionales)**.** *Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números racionales no negativos que suman uno. Cualesquiera que sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no negativos, se cumple que*

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n. \tag{1.9}$$

*Demostración.* Sea $M$ natural tal que para cada $j$, $p_j = k_j / M$ para algún entero $k_j$. El resultado sigue de aplicar la desigualdad a una sucesión de longitud $M$ con términos que se repiten. Esta sucesión está formada por $k_j$ copias de $a_j$, para $1 \leq j \leq n$.

□

Establecida la desigualdad (1.9), la misma es válida para pesos $p_j \geq 0$ arbitrarios sin más que hacer un proceso de "paso al límite". Basta elegir una sucesión de números $p_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ y $t = 1, 2, \ldots$ de modo que

$$p_j(t) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j(t) = 1, \quad \lim_{t \to \infty} p_j(t) = p_j.$$

Se aplica la desigualdad (1.9) a las $n$-tuplas $(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))$ y, finalmente, hacemos $n \to \infty$ para obtener el resultado. Veremos a continuación la demostración de Pólya de este resultado.

### 1.2.2. La demostración de Pólya

La desigualdad (1.5) tiene muchas demostraciones; en este apartado vamos a exponer la que hizo el matemático Pólya, que según comentó, le vino en un sueño. Preguntado años más tarde por esa prueba, Pólya contestó que fueron las mejores matemáticas que había soñado.

Al igual que Cauchy, Pólya comienza observando una propiedad de la función no negativa $x \mapsto e^x$, en lugar de $x \mapsto x^2$.

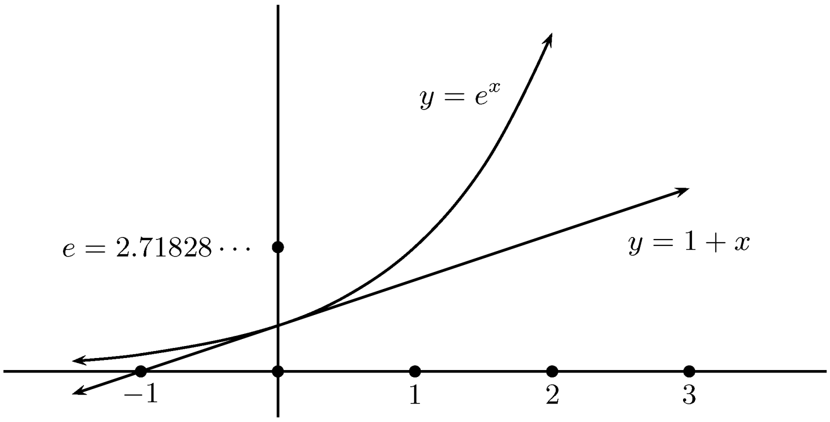



Figura 1.3: Curva $y = e^x$ y tangente en el origen.

La figura 1.3 ilustra la propiedad clave en la prueba de Pólya, la tangente $y = 1 + x$ está por debajo de la curva $y = e^x$, así que

$$1 + x \leq e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Enunciamos la desigualdad de las medias aritmética y geométrica con pesos arbitrarios.

**Teorema 1.12** (Desigualdad con pesos arbitrarios)**.** *Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ tales que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales no negativos, entonces se cumple que*

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n. \tag{1.11}$$

*Demostración.* Sabemos que

$$x \leq e^{x-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando esta desigualdad tenemos que

$$a_k \leq e^{a_k - 1} \quad \text{y} \quad a_k^{p_k} \leq e^{p_k a_k - p_k},$$

así que

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leq R(a_1, a_2, \ldots, a_n) = e^{\sum_{k=1}^n p_k a_k - 1} \tag{1.12}$$

Luego la media geométrica $G = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}$ está acotada superiormente por $R = R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, y vamos a ver la relación de esta cantidad con la media aritmética

$$A = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n,$$

que es donde el problema se vuelve interesante.

Si nos preguntamos por una relación entre $A$ y $R$, tenemos una respuesta inmediata. De la cota

$$A \leq e^{A-1}$$

vemos que $R$ es también una cota superior de $A$, es decir, tenemos que

$$\max\{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}, p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n\} \leq e^{\sum_{k=1}^n p_ka_k-1}. \tag{1.13}$$

La cota (1.13) proporciona una relación entre $A$ y $G$ en el caso especial en que uno de los elementos de la izquierda es igual al término de la derecha. Veamos como manejar esta situación. Para ello, vamos a recurrir a la normalización. Consideramos nuevas variables $\alpha_k$, $k=1,2,\ldots,n$ definidas como

$$\alpha_k = \frac{a_k}{A}$$

y si aplicamos la desigualdad (1.12) a estas variables, tenemos que

$$\left(\frac{a_1}{A}\right)^{p_1}\left(\frac{a_2}{A}\right)^{p_2}\cdots\left(\frac{a_n}{A}\right)^{p_n} \leq e^{\sum_{k=1}^n p_k\frac{a_k}{A}-1} = 1,$$

y queda probada la desigualdad.

□

Examinando la prueba anterior, comprobamos que también vemos cuando se da la igualdad, pues tenemos que

$$\frac{a_k}{A} < e^{\frac{a_k}{A}-1} \quad \text{a menos que} \quad \frac{a_k}{A}=1, \tag{1.14}$$

y siempre es cierto que

$$\frac{a_k}{A} \leq e^{\frac{a_k}{A}-1},$$

por lo que siempre se cumple que

$$\left(\frac{a_1}{A}\right)^{p_1}\left(\frac{a_2}{A}\right)^{p_2}\cdots\left(\frac{a_n}{A}\right)^{p_n} < e^{\sum_{k=1}^n p_k\frac{a_k}{A}-1} = 1 \tag{1.15}$$

a menos que $a_k = A$ para todo $k=1,2,\ldots,n$. En otras palabras, tenemos que se da la igualdad en (1.11) si y solo si

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Podemos decir que las desigualdades (1.14) y (1.15) constituyen la prueba de la desigualdad generalizada a pesos arbitrarios entre las medias aritmética y geométrica.

Terminamos este capítulo demostrando un resultado equivalente a la desigualdad de las medias aritmética y geométrica con una interpretación muy intuitiva, que formaliza el comentario que hacíamos en la página 7.

**Teorema 1.13.** *El teorema 1.5 es equivalente al siguiente enunciado: sean $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, se cumple que*

1. *si $a_1a_2\cdots a_n = 1$ entonces $a_1+a_2+\cdots+a_n \geq n$.*
2. *Si $a_1+a_2+\cdots+a_n = 1$ entonces $a_1a_2\cdots a_n \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n$.*

*Demostración.* Es inmediato comprobar que el teorema 1.5 implica este resultado.

Supongamos que se cumple la primera condición. Sean $G = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ y $b_i = a_i/G$, $1\leq i\leq n$. Es claro que $b_1b_2\cdots b_n = 1$ así que

$$\sum_{i=1}^n b_i \geq n,$$

que es equivalente a

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Si se cumple la segunda condición del enunciado, sean $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ y para $1 \le i \le n$, $c_i = a_i/(nA)$. Es $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1$ luego

$$c_1 c_2 \cdots c_n \le \left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

que es equivalente de nuevo a la desigualdad $G \le A$.

□

**Corolario 1.14.** *1. Entre todos los paralelepípedos de volumen dado en $\mathbb{R}^n$ el de menos perímetro es el cubo.*

*2. Entre todos los paralelepípedos de perímetro dado en $\mathbb{R}^n$ el de mayor volumen es el cubo.*

## 1.3. Equivalencia entre las desigualdades AGM y Bernoulli

Hemos dado en la sección anterior un par de demostraciones de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, de la que se conocen muchas, en concreto, en [1] se dan 74. En la primera sección probamos la desigualdad de Bernoulli. Vamos a ver a continuación que ambas son equivalentes, véase [7]. Recordemos que la desigualdad de las medias aritmética y geométrica es:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad (\forall a_n > 0). \tag{AGM}$$

mientras que la de Bernoulli es

$$x^n \ge 1 + n(x-1), \quad \forall x > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{B}$$

**Teorema 1.15.** *Las desigualdades* (AGM) *y* (B) *son equivalentes.*

*Demostración.* (B) $\Rightarrow$ (AGM). Definamos

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Dado que $A_n/A_{n-1} > 0$, se sigue de la desigualdad de Bernoulli que

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \ge 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) = \frac{nA_n - (n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}}.$$

Así que

$$A_n^n \ge a_n \cdot A_{n-1}^{n-1}.$$

Usando esta desigualdad reiteradamente, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} A_n^n &\ge a_n \cdot A_{n-1}^{n-1} \ge a_n \cdot a_{n-1} \cdot A_{n-2}^{n-2} \\ &\ge \cdots \ge a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_2 \cdot A_1^1 \\ &= a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_2 \cdot a_1, \end{aligned}$$

y obtenemos la desigualdad (AGM).

(AGM) $\Rightarrow$ (B). Para $n = 1$ se da la igualdad en la desigualdad de Bernoulli. Si $n \geq 2$ y $0 < x \leq 1 - \frac{1}{n}$, entonces

$$x^n > 0 \geq 1 + n(x-1),$$

es decir, se cumple la desigualdad de Bernoulli. Luego podemos suponer que $n \geq 2$ y $x > 1 - \frac{1}{n}$. Entonces

$$1 + n(x-1) > 0$$

y aplicando (AGM) a los $n$ números positivos

$$1 + n(x-1), \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1 \text{ veces}}$$

tenemos

$$\begin{aligned} x^n &= \left[\frac{(1 + n(x-1)) + 1 + \cdots + 1}{n}\right]^n \\ &\geq ((1 + n(x-1)) \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1 + n(x-1) \end{aligned}$$

y hemos probado la desigualdad de Bernoulli.

$\square$

Del teorema se sigue que un modo de obtener una demostración simple de la desigualdad (AGM) es dar una prueba sencilla de la desigualdad (B). Veamos una a continuación.

$$\begin{aligned} x^n - 1 - n(x-1) &= (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1\right) - n(x-1) \\ &= (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 - n\right) \geq 0. \end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a que la expresión $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1$ es mayor o igual que $n$ si $x \geq 1$ y menor o igual que $n$ si $0 < x \leq 1$. Así que probada la desigualdad de Bernoulli, tenemos probada de nuevo la desigualdad (AGM).

CAPÍTULO 2

# Convexidad

Vamos a aplicar en este capítulo los resultados de funciones reales convexas a desigualdades clásicas en el campo del Análisis Matemático.

Recordemos que una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en un intervalo $I$ no trivial, se dice que es *convexa* si

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y) \tag{2.1}$$

para cualesquiera $x, y \in I$ y $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$. Si la desigualdad en (2.1) es siempre estricta para $x \neq y$ y $\lambda, \mu > 0$, diremos que $f$ es *estrictamente convexa*. Diremos que $f$ es *cóncava (resp., estrictamente cóncava)* si $-f$ es convexa (resp., estrictamente convexa). Usaremos sin demostración algunos resultados ya conocidos sobre funciones convexas.

## 2.1. Desigualdad de Jensen

Johan Ludwig Jensen fue un matemático danés que publicó en 1906 un artículo en la revista Acta Mathematica en el que demostró una desigualdad para funciones convexas, que incluía como casos particulares otras ya conocidas.

**Teorema 2.1** (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces,*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

*para todos $x_1, \ldots, x_n \in I$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.*

*Demostración.* Para $n = 2$ la desigualdad de Jensen no es más que la definición de convexidad, así que lo lógico es proceder por inducción a demostrar el resultado. Admitamos que se cumple para $n$. Entonces, si $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in I$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ son escalares no negativos que suman 1,

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$

□

Usaremos a menudo esta desigualdad, y, como sucede siempre, estamos interesados en ver cuando se da la igualdad.

**Corolario 2.2.** *Si $f$ es estrictamente convexa y*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i),$$

*siendo $\lambda_1,\dots,\lambda_n>0$ y sumando uno entonces*

$$x_1=x_2=\cdots=x_n.$$

*Demostración.* A menudo, examinando la prueba de una desigualdad se encuentran las razones para ver cuando se da la igualdad. Veámoslo en este caso. Si no fuera cierta la conclusión, el conjunto

$$S=\left\{j : x_j\neq \max_{1\le k\le n} x_k\right\}$$

sería un subconjunto propio de $\{1,2,\dots,n\}$. Veamos que esto nos lleva a una contradicción. Pongamos

$$\lambda=\sum_{j\in S}\lambda_j,\quad x=\sum_{j\in S}\frac{\lambda_j}{\lambda}x_j,\quad y=\sum_{j\notin S}\frac{\lambda_j}{1-\lambda}x_j.$$

La convexidad estricta de $f$ implica que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Además, aplicando la convexidad de $f$ separadamente a $x$ e $y$, tenemos la desigualdad

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\le\lambda\sum_{j\in S}\frac{\lambda_j}{\lambda}f(x_j)+(1-\lambda)\sum_{j\notin S}\frac{\lambda_j}{1-\lambda}f(x_j)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(x_j).$$

Por tanto,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)<\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(x_j),$$

que contradice nuestra hipótesis y concluye la prueba.

□

Consecuencia inmediata de esta desigualdad es una nueva demostración de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica con pesos que vimos en el capítulo anterior en el teorema 1.11.

**Teorema 2.3.** *Sea $x_1,\dots,x_k,\alpha_1,\dots,\alpha_k>0$ con $\alpha_1+\cdots+\alpha_k=1$. Entonces*

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}\le\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_kx_k$$

*con igualdad si y solo si $x_1=\cdots=x_k$.*

*Demostración.* Dado que $\log x$ es estrictamente cóncava en $(0, \infty)$ tenemos

$$\begin{aligned}\log\left(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k}\right) &= \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2 + \cdots + \alpha_k \log x_k \\ &\le \log(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k),\end{aligned}$$

con igualdad si y solo si $x_1 = \cdots = x_k$. Y, ya que $\log x$ (o la exponencial, como queramos) es estrictamente creciente, tenemos el resultado enunciado.

□

Observemos que el caso $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1/k$ es simplemente la desigualdad de las medias aritmética y geométrica.

Veamos como aplicar la desigualdad de Jensen en un problema de tipo geométrico.

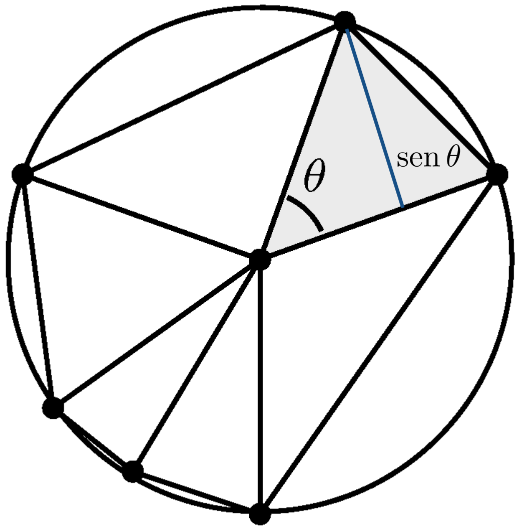



Figura 2.1: Polígono inscrito en un círculo.

**Ejemplo 2.4.** *Entre todos los polígonos convexos de $n$ lados inscritos en un círculo dado, el polígono regular da el área máxima.*

El área del triángulo sombreado de la figura, inscrito en el círculo unidad, es $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$, así que la del polígono es

$$A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\theta_k, \quad \text{donde} \quad 0 < \theta_k < \pi, \ \sum_{k=1}^{n} \theta_k = 2\pi.$$

En el polígono regular, $\theta = \frac{2\pi}{n}$, así que el área de dicho polígono es

$$A' = \frac{1}{2} n \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

La función $t \in [0, \pi] \mapsto \operatorname{sen} t$ es estrictamente cóncava, luego por la desigualdad de Jensen,

$$\operatorname{sen}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\theta_k\right) \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\theta_k,$$

de donde

$$A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\theta_k \leq \frac{1}{2} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) = \frac{1}{2} n \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} = A',$$

y se da la igualdad si y solo si $\theta_k = 2\pi/n$ para todo $1 \leq k \leq n$. Dado que $A'$ es el área del polígono regular inscrito en el círculo, queda probado el resultado.

## 2.2. Desigualdades de Young y Hölder

**Teorema 2.5** (Desigualdad de Young)**.** *Si $p, q > 1$ satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

*para todo $x, y > 0$, con igualdad si y solo si $x^p = y^p$.*

Es habitual referirse a $q$ como el índice conjugado de $p$.

*Demostración.*

- Podemos verlo como consecuencia directa de la convexidad de la exponencial;

  $$e^{\alpha a + \beta b} \leq \alpha e^a + \beta e^b, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

  Basta hacer

  $$\alpha = \frac{1}{p},\ \ \beta = \frac{1}{q},\ \ a = p\log x,\ \ b = q\log y.$$

- También podemos verlo como consecuencia de la versión racional de la desigualdad de Bernoulli que vimos en el teorema 1.8. Si hacemos

  $$u = x^p, \quad v = y^q, \quad 1 + pt = \frac{u}{v},$$

  tenemos esta cadena de equivalencias:

  $$\begin{aligned} xy &\leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \\ u^{1/p}v^{1/q} &\leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q} \\ (uv)^{1/p} &\leq \frac{u/v}{p} + \frac{1}{q} \\ (1+pt)^{1/p} &\leq \frac{1+pt}{p} + \frac{1}{q} \\ 1 + pt &\leq (1+t)^p. \end{aligned}$$

- Como consecuencia del teorema 1.11 o 2.3: si $x, y \geq 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, entonces

  $$x^\alpha y^\beta \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y^{\alpha+\beta}.$$

Si elegimos

$$u = x^{\alpha}, \quad v = y^{\beta}, \quad p = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}, \quad q = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$$

tenemos que para todo $p > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q, \ \ \forall u, v > 0.$$

□

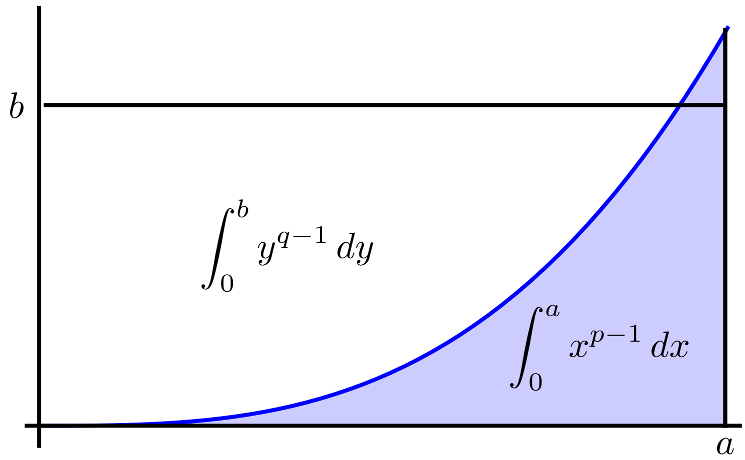



Figura 2.2: Demostración visual de la desigualdad de Young.

Esta versión de la *desigualdad de Young* conduce a una prueba simple de la desigualdad de Hölder.

**Teorema 2.6** (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$ y sean $p, q > 1$ satisfaciendo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \tag{2.2}$$

*con igualdad si y solo si $(x_i^p)$ e $(y_i^q)$ son proporcionales; es decir, si y solo si, para algunos $\alpha, \beta$, ambos no nulos, tenemos $\alpha x_i^p = \beta y_i^q$ para todo $i = 1, \ldots, n$. El caso $p = q = 2$ se conoce generalmente como desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

*Demostración.* Podemos asumir que

$$u = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \neq 0, \qquad v = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \neq 0,$$

en cuyo caso tenemos, por la desigualdad de Young, que

$$\frac{x_i}{u} \cdot \frac{y_i}{v} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q \tag{2.3}$$

para cada $i$, con igualdad si y solo si $(x_i/u)^p = (y_i/v)^q$. Sumando en $i$, obtenemos

$$\frac{1}{uv}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{1}{pu^p}\sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{qv^q}\sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1,$$

de donde se deduce la desigualdad. Debemos tener en cuenta que la igualdad en (2.2) implicaría la igualdad en (2.3) para todo $i$ y, por lo tanto, $(x_i/u)^p = (y_i/v)^q$ para todo $i$; esto es, $(x_i^p)$ e $(y_i^q)$ serían proporcionales.

□

Si $0 < p < 1$ la desigualdad cambia de sentido.

**Corolario 2.7.** *Sea $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$, sea $0 < p < 1$, y $q$ satisfaciendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$$

*con igualdad si y solo si $(x_i^p)$ e $(y_i^q)$ son proporcionales.*

*Demostración.* Veamos que sigue realmente de nuestra versión anterior. Pongamos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)^p \cdot y_i^{-p}$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Hölder usando el par de exponentes conjugados

$$p' = \frac{1}{p} > 1 \quad \text{y} \quad q' = -\frac{q}{p} = 1 - q > 1,$$

pues cumplen que

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = p + \left(-\frac{p}{q}\right) = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = 1.$$

La desigualdad de Hölder implica entonces que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i^p &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)^{p\cdot(1/p)}\right)^p \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{(-p)\cdot(-q/p)}\right)^{-p/q} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^p \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{-p/q},\end{aligned}$$

y sacando raíces $p$-ésimas y reordenando los términos tenemos la desigualdad.

□

Terminamos viendo una generalización de la desigualdad de Hölder, la desigualdad con pesos.

**Teorema 2.8.** *Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ números positivos tales que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N = 1$. Sean $a_{j,1}, a_{j,2}, \ldots, a_{j,N}$ números positivos para todo $j = 1, 2, \ldots, N$. Entonces,*

$$\sum_{j=1}^{N} a_{j,1}^{\alpha_1} a_{j,2}^{\alpha_2} \cdots a_{j,N}^{\alpha_N} \leq \left(\sum_{j=1}^{N} a_{j,1}\right)^{\alpha_1} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{j,2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\sum_{j=1}^{N} a_{j,N}\right)^{\alpha_N}.$$

*Si los números $a_{j,1}, a_{j,2}, \ldots, a_{j,N}$ no son proporcionales la desigualdad es estricta.*

*Demostración.* Por simplificar la escritura, llamemos

$$S = \sum_{j=1}^{N} a_{j,1}^{\alpha_1} a_{j,2}^{\alpha_2} \cdots a_{j,N}^{\alpha_N}, \qquad S_i = \sum_{j=1}^{N} a_{j,i},\ 1 \le i \le N.$$

Entonces, aplicando el teorema 2.3,

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \cdots S_N^{\alpha_N}} &= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{a_{j,1}}{S_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_{j,2}}{S_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{a_{j,N}}{S_N}\right)^{\alpha_N} \\ &\le \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\alpha_1 a_{j,1}}{S_1} + \frac{\alpha_2 a_{j,2}}{S_2} + \cdots + \frac{\alpha_N a_{j,N}}{S_N}\right) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N = 1. \end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 3

# Medias elementales

## 3.1. La escala de influencia de las medias elementales

Antes de continuar con nuevas desigualdades, introduzcamos las medias elementales. Las cotas superiores en la desigualdad de Cauchy son un caso particular de estas.

**Definición 1.** *Dado un vector* $\mathbf{x} = (x_i)$ *en* $\mathbb{R}^n$ *con coordenadas positivas y un número real* $p \neq 0$*, escribimos*

$$S_p(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \qquad y \qquad M_p(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}.$$

La expresión $S_p(\mathbf{x})$ a veces se escribe como $\|\mathbf{x}\|_p$. La expresión $M_p(\mathbf{x})$ se conoce como la *media simple de* $\mathbf{x}$ *de orden* $p$. Estamos familiarizados con cada una de las expresiones anteriores para $p > 0$ pero investigaremos todo el rango de valores para $p$, incluido $p = \pm\infty$.

**Definición 2.** *Dados* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *con coordenadas positivas y un conjunto de pesos positivos* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *con* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$*, definimos la media ponderada de* $\mathbf{x}$ *orden* $p$ *como*

$$M_p(\mathbf{x}, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p\right)^{1/p}. \tag{3.1}$$

Escribiremos a veces simplemente $M_p$. Para ciertos valores de $p$ estas expresiones reciben nombres particulares, así, $M_1$ no es más que la media aritmética, $M_2$ la cuadrática y $M_{-1}$ la armónica. Vamos a ver como interpretar $M_\infty$, $M_{-\infty}$ y $M_0$. El objetivo es hacer que la función $p \mapsto M_p$ sea una función continua en la recta real

**Teorema 3.1** (La media geométrica como límite)**.** *Dados números reales no negativos* $x_i$*,* $i = 1, 2, ..., n$ *y pesos no negativos* $\alpha_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *con masa total uno, es decir,* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$*, se cumple que*

$$\lim_{p \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p\right)^{1/p} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \tag{3.2}$$

*o lo que es igual,*

$$\lim_{p \to 0} M_p(\mathbf{x}, \alpha) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

*Demostración.* Primero escribimos

$$M_p(\mathbf{x},\alpha) = \exp\left\{\frac{1}{p}\log\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^p\right)\right\}.$$

A continuación, aplicamos la regla de l'Hôpital para deducir

$$\lim_{p\to 0}\frac{\log\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^p\right)}{p} = \lim_{p\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^p\log x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^p} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\log x_i = \log(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}), \tag{3.3}$$

de donde se concluye la prueba.

□

A la vista de este resultado, definimos

$$M_0(\mathbf{x},\alpha) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

La fórmula (3.2) proporciona una representación general de la media geométrica como un límite de una suma, y vale la pena señalar que para dos sumandos simplemente dice lo que afirma el siguiente corolario, que da un modo de convertir información de una suma en información sobre un producto.

**Corolario 3.2.** *Cualesquiera que sean $a$ y $b$ no negativos y $\theta \in [0,1]$, se cumple que*

$$\lim_{p\to\infty}\left(\theta a^{1/p} + (1-\theta)b^{1/p}\right)^p = a^\theta b^{1-\theta}.$$

Carl Ludwig Siegel (1896-1981) observó que la fórmula (3.2) puede usarse para probar una desigualdad que afina la de las medias aritmética y geométrica. Su prueba se basa en la desigualdad de Cauchy y la caracterización como límite de las medias geométricas.

**Teorema 3.3.** *Dados pesos no negativos $\alpha_i$, $i = 1,\ldots,n$ de masa total uno, es decir, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, y dados números reales no negativos $x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, se cumple que*

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^p\right)^{1/p}, \qquad \forall p > 0. \tag{3.4}$$

*Demostración.* Como comentamos inicialmente, aplicando la desigualdad de Cauchy,

$$M_p^p = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^p = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{1/2}\alpha_i^{1/2}x_i^p \le \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{2p}\right)^{1/2} = M_{2p}^p,$$

de donde deducimos que

$$M_p \le M_{2p}, \qquad \forall p > 0. \tag{3.5}$$

Si iteramos el proceso, después de $j$ pasos tenemos que cualquiera que sea $p > 0$,

$$M_{p/2^j} \le M_{p/2^{j-1}} \le \cdots \le M_{p/2} \le M_p.$$

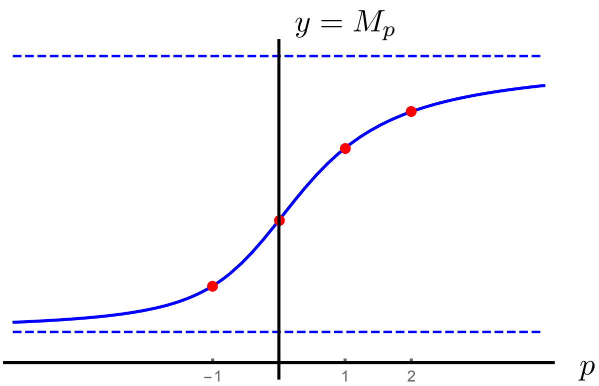
Aplicando (3.2) tenemos

$$\lim_{j\to\infty} M_{p/2^j} = M_0 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

así que de (3.5) deducimos que cualquiera que sea $p \geq 0$,

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = M_0 \leq M_p = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^p\right)^{1/p}.$$

□




$$\begin{aligned} M_\infty &= \text{máx}\{x, y\} \\ M_2 &= \sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2} \\ M_1 &= \alpha x + \beta y \\ M_0 &= x^\alpha y^\beta \\ M_{-1} &= 1/(\alpha/x + \beta/y) \\ M_{-\infty} &= \text{mín}\{x, y\} \end{aligned}$$

Figura 3.1: Curva de las medias

La relación (3.5) que probó Siegel y la figura 3.1 en la que aparece la gráfica de la función $p \mapsto (\alpha x^p + \beta y^p)^{1/p}$ nos dan indicaciones sobre el comportamiento de la media general $M_p$. Quizás la fundamental sea la monotonía de la aplicación $p \mapsto M_p$ que probamos en el siguiente resultado.

**Teorema 3.4** (Desigualdad de las medias de potencias ponderadas)**.** *Dados pesos positivos $\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, de masa total uno y dados $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ números reales no negativos , la aplicación $p \mapsto M_p$ es creciente en $\mathbb{R}$. Es decir, para todo $-\infty < s < t < \infty$, tenemos que*

$$M_s(\mathbf{x}, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^s\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t\right)^{1/t} = M_t(\mathbf{x}, \alpha). \tag{3.6}$$

*La igualdad se da en* (3.6) *si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

*Demostración.* Debemos darnos cuenta de la relación de la desigualdad que queremos probar con la desigualdad de Jensen aplicada a la función $p \mapsto x^p$ con $p > 1$, que dice

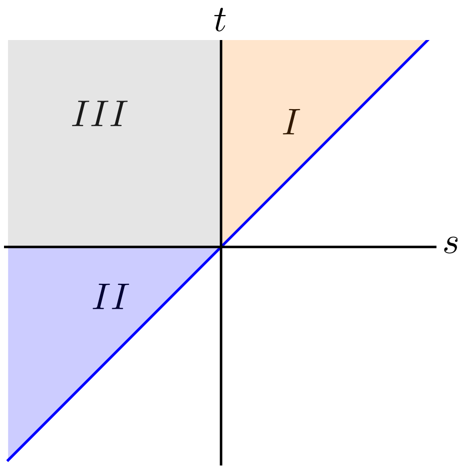
$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^p.$$

Así que si suponemos que $0 < s < t$ las sustituciones $y_i^s = x_i$ y $p = t/s > 1$ nos dan

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^s\right)^{t/s} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^t. \tag{3.7}$$

Sacando raíces probamos la desigualdad en este caso. Además, la convexidad estricta de $p \mapsto x^p$ si $p > 1$ nos da que si $\alpha_i > 0$ para todo $i$ entonces se da la igualdad en (3.7) si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Queda por estudiar el resto de casos. A veces resulta un poco latoso hacer demostraciones estudiando distintos casos de un problema, pero en este momento resulta inevitable proceder así. Como sugiere la figura 3.2, debemos considerar dos casos más.




Caso I: $0 < s < t$
Caso II: $s < t < 0$
Caso III: $s < 0 < t$

Figura 3.2: Desigualdad de la media según los valores de t

Hemos tratado el caso I con la desigualdad de Jensen, y vamos a ver que indirectamente también abarca el caso II. El caso III se descompone en dos, uno con $s = 0 < t$ y el otro $s < t = 0$ que son consecuencia de la desigualdad (3.4).

Procedamos a continuación a estudiar esos casos. En el caso II, con $s < t < 0$ aplicamos lo ya demostrado pues $-s > -t > 0$, así que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-t}\right)^{-1/t} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-s}\right)^{-1/s}.$$

Luego

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-s}\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-t}\right)^{1/t},$$

y haciendo $x_i = y_i^{-1}$ tenemos probado el caso II.

Queda finalmente el caso III que es el más fácil. Usando (3.4) para $x_i^{-1}$, $1 \leq i \leq n$ y la potencia $-s \geq 0$, tenemos que

$$(x_1^{-1})^{p_1}(x_2^{-1})^{p_2}\cdots(x_n^{-1})^{p_n} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i^{-1})^{-s}\right)^{-1/s},$$

es decir,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{s}\right)^{1/s} \leq x_1^{p_1} x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}, \quad \forall s < 0. \tag{3.8}$$

Como $t > 0$, una nueva aplicación de la desigualdad (3.4) concluye la prueba de este caso.

Para concluir la demostración, nos queda ver qué sucede en la frontera de los casos contemplados en la firgura **??**. Es decir, los casos $0 = s < t$ y $s < t = 0$. Pero estos quedan incluidos en las desigualdades (3.4) y (3.8), así que hemos acabado la demostración.

□

### 3.1.1. Algunas medias especiales

Ya comentamos al principio que algunas de las medias merecen una atención especial. Después de $p = 2$, $p = 1$ y $p = 0$, los casos más interesantes son $p = -1$ y los valores límites que obtenemos haciendo $p \to +\infty$ y $p \to -\infty$.

Cuando $p = -1$, la media $M_{-1}$ se llama *media armónica* y viene dada por

$$M_{-1} = M_{-1}(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{1}{\dfrac{\alpha_1}{x_1} + \dfrac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{x_n}}.$$

Por el teorema 3.4 sabemos que $M_{-1}$ nos da una cota inferior de la media geométrica, y, a fortiori, tenemos una cota de la media aritmética. Tenemos la conocida como desigualdad de las medias armónica y geométrica,

$$\frac{1}{\dfrac{\alpha_1}{x_1} + \dfrac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{x_n}} \leq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}. \tag{3.9}$$

Como consecuencia tenemos la desigualdad entre las medias armónica y aritmética,

$$\frac{1}{\dfrac{\alpha_1}{x_1} + \dfrac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{x_n}} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n. \tag{3.10}$$

Es habitual a veces manejar las desigualdades anteriores (3.9) y (3.10) en la forma inversa, dando lugar a cotas inferiores de los inversos de las sumas ponderadas, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n} &\leq \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n} \\ \frac{1}{\dfrac{\alpha_1}{x_1} + \dfrac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{x_n}} &\leq \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}. \end{aligned}$$

El último de los casos de medias elementales que exige un manejo especial son los valores extremos $p = -\infty$ y $p = \infty$ siendo las definiciones las siguientes.

$$M_{-\infty}(\mathbf{x}, \alpha) = \text{mín}\{x_1, \ldots, x_n\} \qquad \text{y} \qquad M_{\infty}(\mathbf{x}, \alpha) = \max_i\{x_1, \ldots, x_n\} \tag{3.11}$$

Con esta interpretación se tienen todas las propiedades que la figura 3.1 sugiere.

**Lema 3.5.** *Se cumple que*

1. $\min\{x_1,\dots,x_n\} \leq M_p(\mathbf{x},\alpha) \leq \max\{x_1,\dots x_n\}$, *es decir,*
$$M_{-\infty}(\mathbf{x},\alpha) \leq M_p(\mathbf{x},\alpha) \leq M_\infty(\mathbf{x},\alpha), \qquad \forall p \in \mathbb{R}.$$
*La igualdad, en cualquiera de las desigualdades, ocurre si y solo si* $x_1 = \cdots = x_n$.
2. *Se verifican las relaciones de continuidad*
$$M_\infty(\mathbf{x}) = \lim_{p\to+\infty} M_p(\mathbf{x},\alpha), \qquad M_{-\infty}(\mathbf{x}) = \lim_{p\to-\infty} M_p(\mathbf{x},\alpha).$$

*Demostración.* 1. Si $p > 0$ es claro. Si $p < 0$, se deduce de considerar
$$M_{-p}(\mathbf{x},\alpha) = \frac{1}{M_p(1/\mathbf{x},\alpha)} \tag{3.12}$$
donde $1/\mathbf{x} = (1/x_i)$.

2. Supongamos que $x_k = \max\{x_1,\dots,x_n\}$. Entonces
$$\alpha_k^{1/p} x_k \leq M_p(\mathbf{x},\alpha) \leq x_k,$$
y basta tener en cuenta que $\alpha_k^{1/p} \to 1$ cuando $p \to +\infty$.
La otra igualdad se prueba de igual forma, o también deducirla de la igualdad (3.12).

□

Resumimos pues algunas desigualdades a destacar en cuanto a las medias:
$$M_{-\infty}(\mathbf{x},\alpha) \leq M_{-1}(\mathbf{x},\alpha) \leq M_0(\mathbf{x},\alpha) \leq M_1(\mathbf{x},\alpha) \leq M_2(\mathbf{x},\alpha) \leq M_\infty(\mathbf{x},\alpha).$$

### 3.1.2. Desigualdad de Minkowski

Vistas las propiedades de las medias, es de interés la siguiente desigualdad.

**Teorema 3.6.** *Sean* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con coordenadas positivas y* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *un peso tal que* $\alpha_1 + \cdots \alpha_n = 1$. *Se cumple que:*

1. $M_p(\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha) \leq M_p(\mathbf{x},\alpha) + M_p(\mathbf{y},\alpha)$ *si* $1 \leq p \leq \infty$.
2. $M_p(\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha) \geq M_p(\mathbf{x},\alpha) + M_p(\mathbf{y},\alpha)$ *si* $-\infty \leq p \leq 1$

*Si* $p \neq 1$ *es finito, entonces la igualdad se da si y solo si* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *son proporcionales.*

*Demostración.* La igualdad se da en ambos casos cuando $p = 1$, luego vamos a suponer que $p \neq 1$.

Primero suponemos que $1 < p < \infty$. Sea $p'$ el conjugado de $p$, es decir, satisfaciendo $1/p + 1/p' = 1$. Entonces $(p-1)p' = p$ y
$$\begin{aligned}
M_p(\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha)^p &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i+y_i)^p = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i+y_i)(x_i+y_i)^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i (x_i+y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i (x_i+y_i)^{p-1} \\
&\leq \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i+y_i)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'} \qquad (3.13) \\
&= [M_p(\mathbf{x},\alpha) + M_p(\mathbf{y},\alpha)] \cdot M_p(\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha)^{p-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$M_p(\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha) \leq M_p(\mathbf{x},\alpha) + M_p(\mathbf{y},\alpha).$$

La igualdad se da sólo si la igualdad ocurre en ambas aplicaciones de la *desigualdad de Hölder* en (3.13), esto es, solo si $(x_i^p)$ es proporcional a $((x_i+y_i)^p)$ y a su vez es proporcional a $(y_i^p)$. Todo se traduce en que se da la igualdad si y solo si $\mathbf{x}$ es proporcional a $\mathbf{y}$.

Para $0 < p < 1$, la desigualdad de Hölder cambia de sentido (corolario 2.7) así que prácticamente de igual forma se prueba que

$$M_p(\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha) \geq M_p(\mathbf{x},\alpha) + M_p(\mathbf{y},\alpha).$$

Si $-\infty < p < 0$ sigue por la misma razón ya que en este caso, el exponente conjugado $p'$ verifica que $0 < p' < 1$ y la desigualdad de Hölder va en sentido contrario de nuevo.

Los tres casos restantes son relativamente fáciles de manejar. Veamos el caso $p = 0$, pero usando una notación diferente:

$$\begin{aligned}
\frac{M_0(\mathbf{x},\alpha)+M_0(\mathbf{y},\alpha)}{M_0(\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha)} &= \frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} + y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n}}{(x_1+y_1)^{\alpha_1}\cdots(x_n+y_n)^{\alpha_n}} \\
&= \left(\frac{x_1}{x_1+y_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{x_n}{x_n+y_n}\right)^{\alpha_n} + \left(\frac{y_1}{x_1+y_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{y_n}{x_n+y_n}\right)^{\alpha_n} \\
&\leq \alpha_1\frac{x_1}{x_1+y_1} + \cdots + \alpha_n\frac{x_n}{x_n+y_n} + \alpha_1\frac{y_1}{x_1+y_1} + \cdots + \alpha_n\frac{y_n}{x_n+y_n} = 1.
\end{aligned}$$

La igualdad sólo puede ocurrir si cada una de las sucesiones $(x_i/(x_i+y_i))$ e $(y_i/(x_i+y_i))$ son constantes, de la que se deduce rápidamente que $x$ e $y$ deben ser proporcionales.

La desigualdad de Minkowski también es cierta en los casos $p = \pm\infty$, pero para la igualdad la situación es distinta. Por ejemplo,

$$M_\infty(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \max\{x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n\} \leq M_\infty(\mathbf{x}) + M_\infty(\mathbf{y}).$$

La igualdad se da si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ alcanzan su máximo valor en la misma coordenada, es decir, si y solo si, para cierto $k$, tenemos $x_k = M_\infty(\mathbf{x})$ e $y_k = M_\infty(\mathbf{y})$.

□

### 3.1.3. El paso a series infinitas

Sería natural preguntarse si nuestro trabajo sobre sumas finitas y sus respectivas medias elementales se extienden a sumas infinitas. En su mayor parte, todo lo que hemos hecho se satisface análogamente en el caso de la series infinitas. Sin embargo, las pruebas aumentan de dificultad ya que muchas veces no será suficiente simplemente pasar al límite.

Por ahora, nos conformaremos con exponer algunas de estas extensiones, de las que daremos su demostración. Como veremos posteriormente, será mejor generalizar estos resultados a través de integrales.

Dada una sucesión de pesos positivos $\alpha = (\alpha_i)$ que satisface $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i = 1$ y un número positivo $0 < p < \infty$, definimos

$$M_p(\mathbf{x},\alpha) = \left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_i x_i^p\right)^{1/p}$$

para $\mathbf{x} = (x_i)$ con $x_i \geq 0$ para todo $i$. Renunciaremos al caso $p < 0$, pero consideraremos también los casos

$$M_0(\mathbf{x}, \alpha) = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{\alpha_i} = \exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \log x_i\right\}$$

y

$$M_\infty(\mathbf{x}, \alpha) = \sup_{i\geq 1}\{x_i\}.$$

Se tienen las siguientes propiedades.

**Teorema 3.7.** *1. Si $M_s$ es finito para algún $0 < s < \infty$ entonces $M_r$ es finito para todo $0 < r < s$, y se cumple que $M_r \leq M_s$ con igualdad si y solo si $\mathbf{x}$ es constante. Además, en este caso $M_0$ es finito y $M_0 = \lim_{r\to 0^+} M_r$.*

2. *Se verifica la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, es decir, $M_0 \leq M_1$, y la igualdad se da si y solo si $\mathbf{x}$ es constante.*
3. *Si $\mathbf{x}$ es una sucesión acotada entonces $M_\infty = \lim_{r\to+\infty} M_r$.*

*Demostración.* 1. Es consecuencia del teorema 3.4.

2. De la desigualdad $\log x \leq x - 1$ deducimos que

$$\log x_i - \log M_1 = \log \frac{x_i}{M_1} \leq \frac{x_i}{M_1} - 1,$$

así que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\log x_i - \log M_1) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{x_i}{M_1} - 1\right), \tag{3.14}$$

o, lo que es igual, $\log M_0 - \log M_1 \leq 1 - 1 = 0$. La igualdad implicaría la igualdad en (3.14), lo que significa que $x_i = M_1$ para todo $i$.

3. Sea $A = \sup_i\{x_i\} < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $j$ tal que $x_j > A - \varepsilon$. Entonces, dado que

$$\alpha_j (A - \varepsilon)^r \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i^r \leq A^r,$$

deducimos que

$$\alpha_j^{\frac{1}{r}} (A - \varepsilon) \leq M_r \leq A,$$

de donde concluimos el resultado.

□

### 3.1.4. El paso a integrales

En lo que sigue, consideraremos funciones no negativas y finitas en casi todo punto definidas en un intervalo (o conjunto medible), $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Supondremos que son integrables (en sentido Riemann o Lebesgue). En situaciones donde el intervalo en particular no tiene relación con el razonamiento que estemos haciendo o, más comúnmente, que sea el mismo para todas las integrales, podemos suprimirlo y simplemente escribir $\int f$.

Comenzamos recordando un par de desigualdades muy conocidas.

**Teorema 3.8** (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables no negativas y sean $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$. Entonces $f^\lambda g^\mu$ es integrable y satisface*

$$\int f^\lambda g^\mu \leq \left(\int f\right)^\lambda \left(\int g\right)^\mu$$

*la igualdad solo ocurre si, para algunas constantes A y B, ambas no nulas, tenemos $Af = Bg$.*

*Demostración.* La demostración sigue unos pasos ya conocidos. Podemos suponer que $u = \int f \neq 0$ y $v = \int g \neq 0$, en cuyo caso aplicando la desigualdad de Young, tenemos

$$\left(\frac{f(x)}{u}\right)^\lambda \left(\frac{g(x)}{v}\right)^\mu \leq \lambda \frac{f(x)}{u} + \mu \frac{g(x)}{v},$$

con igualdad si y solo si $f/u = g/v$. Ahora integrando en ambos lados, tenemos que

$$\frac{1}{u^\lambda v^\mu} \int f^\lambda g^\mu \leq \frac{\lambda}{\mu} \int f + \frac{\mu}{v} \int g = 1,$$

de donde concluimos la demostración.

□

**Corolario 3.9.** *Dado $1 < p < \infty$ y $q$ su conjugado, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f^p$ y $g^q$ son integrables, entonces $fg$ es integrable y satisface*

$$\int fg \leq \left(\int f^p\right)^{1/p}$$

*La igualdad se da solo si $Af^p = Bg^q$ para algunas constantes A y B, no nulas ambas.*

**Corolario 3.10.** *Si $0 < p < 1$ y $0 < \int g^q < \infty$ entonces*

$$\int fg \geq \left(\int f^p\right)^{1/p} \left(\int g^q\right)^{1/q}.$$

*Demostración.* Sea $h = fg$. Podemos suponer que

$$\int g^q = 1 = \int h,$$

multiplicando $g$ y $h$ por constantes. Así que debemos probar que

$$\int \left(\frac{h}{g}\right)^p \leq 1.$$

Y para ello basta aplicar la desigualdad de Hölder, teniendo en cuenta que $g^{p/(1-p)} = g^{-q}$,

$$\int h^p \cdot \frac{1}{g^p} \leq \left(\int (h^p)^{\frac{1}{p}}\right)^p \left(\int \frac{1}{g^{\frac{p}{1-p}}}\right)^{1-p} = 1.$$

□

Vemos a continuación la desigualdad de Minkowski.

**Teorema 3.11** (Desigualdad de Minkowski)**.** *Dado* $1 \leq p < \infty$*. Si* $|f|^p$ *y* $|g|^p$ *son integrables, entonces también lo es* $|f+g|^p$ *y*

$$\left(\int |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}. \tag{3.15}$$

*Si* $p=1$*, la igualdad se da sólo si* $fg \geq 0$*. Si* $p>1$*, la igualdad se da solo si* $fg \geq 0$ *y* $Af = Bg$ *para ciertas constantes no negativas A y B, no nulas simultáneamente.*

*Demostración.* Si $p=1$, entonces

$$\int |f+g| \leq \int (|f|+|g|) = \int |f| + \int |g| \tag{3.16}$$

por lo tanto $|f+g|$ es integrable. La igualdad en (3.16) fuerza a que $|f+g| = |f|+|g|$ y entonces debemos tener $fg \geq 0$, es decir, $f(x)$ y $g(x)$ deben tener el mismo signo para todo $x$.

Si $p>1$, notaremos en primer lugar que

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2\,\text{máx}\,\{|f|,|g|\})^p = 2^p\,\text{máx}\,\{|f|^p,|g|^p\} \leq 2^p\left(|f|^p+|g|^p\right),$$

por lo tanto, $|f+g|^p$ es integrable. Sea ahora $q = p/(p-1)$ y apliquemos la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}
\int |f+g|^p &= \int |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} \\
&\leq \int |f|\cdot|f+g|^{p-1} + \int |g|\cdot|f+g|^{p-1} && (3.17)\\
&\leq \left(\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right)\left(\int |f+g|^p\right)^{1-1/p}, && (3.18)
\end{aligned}$$

y tenemos probada la desigualdad. Nótese que la igualdad en (3.15) fuerza a la igualdad tanto en (3.17) como en (3.18). Entonces tenemos $fg \geq 0$ y las siguientes relaciones de proporcionalidad

$$A|f|^p \sim B|g|^p \sim C|f+g|^p$$

Esto fuerza $A'f = B'g$ para algunas constantes no negativas $A'$ y $B'$, no nulas ambas.

□

A continuación, muy brevemente, consideremos medias integrales. Dada una función peso positiva e integrable $\alpha(x)$, definimos

$$M_p(f,\alpha) = \left(\int_I f(x)^p \alpha(x)\,dx\right)^{1/p}$$

para $0 < p < \infty$ y $f \geq 0$ medible. También definimos

$$M_0(f,\alpha) = \exp\left(\int_I \alpha(x)\log f(x)\,dx\right), \qquad M_\infty(f) = \sup_{x\in I} f(x).$$

Podríamos entonces desarrollar la teoría de las medias $M_p(f,\alpha)$ de forma completamente análoga a nuestros casos previos. Nos reducimos simolemente a las siguientes propiedades, que enunciamos en el teorema que sigue.

**Teorema 3.12.** *Si $M_s(f,\alpha) < \infty$ para algún $0 < s < \infty$, entonces $M_r(f,\alpha) < \infty$ para todo $0 < r < s$ y $M_r(f,\alpha) \leq M_s(f,\alpha)$, con igualdad si y sólo si f es constante.*

*Demostración.* Como antes, la demostración se deduce de la desigualdad de Hölder, aplicado a $p = \frac{s}{r} > 1$.

$$\begin{aligned}
\left(\int f^r\alpha\right)^{1/r} &= \left(\int f^r\alpha^{r/s}\alpha^{1-(r/s)}\right)^{1/r} \\
&\leq \left(\int f^s\alpha\right)^{(r/s)(1/r)} \left(\int \alpha\right)^{(1/r)-(1/s)} \\
&= \left(\int f^s\alpha\right)^{1/s}
\end{aligned}$$

□

Este resultado debería compararse con las normas en los espacios $L_p$,

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Estas normas no se pueden comparar si el intervalo $I$ tiene longitud infinita. Si $I = [a,b]$ y $r < s$ satisfacen

$$\|f\|_r \leq (b-a)^{(1/r)-(1/s)}\|f\|_s,$$

como se deduce tomando simplemente $\alpha = 1$ en nuestros cálculos anteriores.

## 3.2. Equivalencia entre desigualdades

Hemos visto hasta ahora tres desigualdades que queremos destacar.

**(W-AM-GM) Desigualdad de las medias arimética y geométrica ponderadas.** La vimos en los teoremas 1.11 y 2.3.

Sean $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$ tales que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales no negativos, entonces se cumple que

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n.$$

**(H) Desigualdad de Hölder.** La vimos en el teorema 2.6.

Sean $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$ y sean $p, q > 1$ satisfaciendo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$$

con igualdad si y solo si $(x_i^p)$ e $(y_i^q)$ son proporcionales; es decir, si y solo si, para algunos $\alpha, \beta$, ambos no nulos, tenemos $\alpha x_i^p = \beta y_i^q$ para todo $i = 1, \dots, n$. El caso $p = q = 2$ se conoce generalmente como desigualdad de Cauchy-Schwarz.

**(W-PM) Desigualdad de las medias de potencias ponderadas.** La vimos en el teorema 3.4.

Dados pesos positivos $\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, de masa total uno y dados $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ números reales no negativos , la aplicación $p \mapsto M_p$ es creciente en $\mathbb{R}$. Es decir, para todo $-\infty < s < t < \infty$, tenemos que

$$M_s(x,\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^s\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^t\right)^{1/t} = M_t(x,\alpha).$$

La igualdad se da en (3.6) si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Vamos a probar a continuación la equivalencia de las tres.

**Teorema 3.13.** *La desigualdad de Hölder es equivalente a la desigualdad de las medias aritmética y geométrica ponderadas.*

*Demostración.* **(H) ⇒ (W-AM-GM)** Sea $x_i = (p_i a_i)^{\frac{1}{p}}$ e $y_i = p_i^{\frac{1}{q}}$. Entonces, la desigualdad de Hölder implica que

$$\sum_{i=1}^{n} \left((p_i a_i)^{\frac{1}{p}} p_i^{\frac{1}{q}}\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{q}},$$

y como $p$ y $q$ suman 1 y $p_1 + \cdots + p_n = 1$, tenemos entonces

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\frac{1}{p}}\right)^{p}. \tag{3.19}$$

Usando recurrentemente (3.19),

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\frac{1}{p}}\right)^{p} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\frac{1}{p^2}}\right)^{p^2} \geq \cdots \geq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\frac{1}{p^m}}\right)^{p^m} \geq \cdots. \tag{3.20}$$

La regla de L'Hopital nos permite afirmar que (véase (3.3) en la página 22)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^x}{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i \log a_i,$$

por lo que

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^x\right)^{\frac{1}{x}} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}.$$

Luego tomando limite cuando $m \to \infty$ en (3.20),

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}$$

y terminamos la implicación.

**(W-AM-GM) ⇒ (H)** Solo necesitamos un caso particular de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica ponderadas, en concreto

$$p_1a_1 + p_2a_2 \geq a_1^{p_1}a_2^{p_2}$$

para probar esta implicación. En efecto, tenemos que si $p$ y $q$ son conjugados, tomando en esta desigualdad

$$p_1 = \frac{1}{p}, \quad p_2 = \frac{1}{q}, \quad a_1 = x_i^p \sum_{j=1}^{n} y_j^q, \quad a_2 = y_i^q \sum_{j=1}^{n} x_j^p,$$

podemos afirmar que

$$\frac{1}{p}x_i^p \sum_{j=1}^{n} y_j^q + \frac{1}{q}y_i^q \sum_{j=1}^{n} x_j^p \geq x_iy_i \left(\sum_{k=1}^{n} y_j^q\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} x_j^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sumando en $i$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p \sum_{j=1}^{n} y_j^q \geq \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \left(\sum_{k=1}^{n} y_j^q\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} x_j^p\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.21}$$

de donde se deduce la desigualdad de Hölder.

□

**Teorema 3.14.** *La desigualdad de Hölder es equivalente a la desigualdad de las medias de potencias ponderadas.*

*Demostración.* **(H) ⇒ (W-PM)** Por el teorema anterior y la desigualdad de Hölder, podemos escribir dados $\alpha_i > 0$ con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$, $y_i > 0$ y $p > 1$,,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

Si $r < s$ sea $p = s/r$ y $x_i^s = y_i$ en la desigualdad anterior. Obtenemos entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^s \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^r\right)^{\frac{s}{r}}$$

que podemos escribir como

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^s\right)^{\frac{1}{s}},$$

y queda probada la implicación.
**(W-PM) ⇒ (H)** Veamos ahora la implicación en sentido contrario. Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\frac{1}{2}}\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\frac{1}{3}}\right)^3 \geq \cdots \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\frac{1}{m}}\right)^m \geq \cdots,$$

y la regla de L'Hopital nos sirve para demostrar que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\frac{1}{x}}\right)^{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\log a_i,$$

lo que nos conduce tomando límites en las desigualdades anteriores a que se cumple

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i},$$

(obsérvese que hemos probado que la desigualdad de las medias de potencias ponderadas implica la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica ponderadas), y de modo completamente análogo a como hicimos en el teorema anterior llegamos a (3.21) lo que concluye la demostración.

□

**Teorema 3.15.** *La desigualdad de las medias aritmética y geométrica ponderadas es equivalente a la desigualdad de las medias de potencias ponderadas.*

*Demostración.* **(W-AM-GM) ⇒ (W-PM)** Para probar esta implicación usamos un caso particular de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica ponderadas, en concreto,

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\leq p_1a_1+p_2a_2. \tag{3.22}$$

Sean $s<t$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ y $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ con coordenadas positivas. Llamemos $U_n(\mathbf{x}))=\alpha_1x_1^t+\cdots+\alpha_nx_n^t$. Y pongamos

$$a_1=\frac{\alpha_kx_k^t}{U_n(\mathbf{x})},\quad a_2=\alpha_k,\quad p_1=\frac{s}{t},\quad p_2=1-\frac{s}{t}$$

en (3.22). Obtenemos entonces

$$\frac{\alpha_kx_k^s}{(U_n(\mathbf{x}))^{\frac{s}{t}}}\leq\frac{s}{t}\cdot\frac{\alpha_kx_k^t}{U_n(\mathbf{x})}+\left(1-\frac{s}{t}\right)\alpha_k,\quad 1\leq k\leq n.$$

Si sumamos en $k$, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_kx_k^s}{(U_n(\mathbf{x}))^{\frac{s}{t}}}\leq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{s}{t}\cdot\frac{\alpha_kx_k^t}{U_n(\mathbf{x})}+\left(1-\frac{s}{t}\right)\alpha_k\right)=1,$$

de donde concluimos lo buscado,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_kx_k^s\right)^{\frac{1}{s}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_kx_k^t\right)^{\frac{1}{t}}.$$

**(W-PM) ⇒ (W-AM-GM)** Ya lo vimos en el teorema anterior.

□

CAPÍTULO 4

# Desigualdad de Carleman

La desigualdad de Carleman, publicada en 1923 como parte de una demostración de un resultado de Denjoy sobre funciones casi analíticas, es el siguiente resultado.

**Teorema 4.1** (Desigualdad de Carleman)**.** *Dada una sucesión $(a_n)$ de números reales positivos, se cumple que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

De hecho, Carleman ([2]) demostró que si la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, también converge la serie de las medias geométricas y la desigualdad es estricta, y la constante que aparece en la desigualdad no puede mejorarse, sea la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergente o no.

Vamos a ver varias demostraciones de este resultado, siguiendo el trabajo de Duncan y McGregor ([4]) y en algunas, la desigualdad elemental

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \tag{4.1}$$

jugará un papel fundamental.

## 4.1. La demostración de Carleman

Usa un método habitual en problemas similares que tratan de transformaciones de series convergentes. Considera el problema para series finitas y usa los multiplicadores de Lagrange. Dada la sucesión $(a_n)$ de números positivos, sea $(\gamma_n)$ la sucesión de medias geométricas. Entonces, determina el máximo $\lambda_n$ de $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ bajo la condición $a_1 + \cdots + a_n = 1$. La homogeneidad entonces implica que

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \leq \lambda_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

y la demostración se reduce a estudiar la acotación de la sucesión $\lambda_n$. En este caso, necesitamos probar que $\lambda_n \leq e$ para todo $n$. De hecho, Carleman probó la desigualdad estricta.

Sea pues

$$F = a_1 + (a_1 a_2)^{1/2} + \cdots + (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} - \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 1).$$

Debemos resolver la ecuación $\nabla F = 0$. El sistema es

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + \frac{1}{2a_1}\gamma_2 + \cdots + \frac{1}{na_1}\gamma_n - \lambda \\
0 &= \frac{1}{2a_2}\gamma_2 + \cdots + \frac{1}{na_2}\gamma_n - \lambda \\
&\vdots \\
0 &= \frac{1}{na_n}\gamma_n - \lambda \\
0 &= -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 1)
\end{aligned}$$

Multiplicando la $j$-ésima ecuación por $a_j$, con $1 \le j \le n$ tenemos que el sistema es

$$\begin{aligned}
a_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 + \cdots + \frac{1}{n}\gamma_n &= \lambda a_1 \\
\frac{1}{2}\gamma_2 + \cdots + \frac{1}{n}\gamma_n &= \lambda a_2 \\
&\vdots \\
\frac{1}{n}\gamma_n &= \lambda a_n \\
a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= 1
\end{aligned}$$

y sumando en $j$ de 1 a $n$, tenemos

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lambda,$$

así que $\lambda = \lambda_n$.

Restando cada dos ecuaciones consecutivas podemos escribir el sistema de forma equivalente así:

$$\gamma_1 = \lambda_n(a_1 - a_2), \quad \frac{1}{2}\gamma_2 = \lambda_n(a_2 - a_3), \quad \ldots \quad \frac{1}{n}\gamma_n = \lambda_n a_n.$$

Si ahora definimos

$$w_k = k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

el sistema se convierte en

$$\lambda_n w_k a_k = \gamma_k, \quad 1 \le k \le n-1, \quad \lambda_n n a_n = \gamma_n.$$

Si $k = 1, 2, \ldots, n-2$ tenemos

$$w_{k+1}^{k+1} = \left(\frac{\gamma_{k+1}}{\lambda_n a_{k+1}}\right)^{k+1} = \frac{1}{\lambda_n} w_k^k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^k = \frac{1}{\lambda_n} w_k^k \left(1 - \frac{w_k}{k}\right)^{-k}.$$

Definimos por inducción una sucesión de funciones reales $\Omega_n(\lambda)$ por

$$\Omega_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \quad \Omega_{k+1}(\lambda)^{k+1} = \frac{1}{\lambda}\Omega_k(\lambda)^k\left(1 - \frac{\Omega_k(\lambda)}{k}\right)^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Es claro que $\Omega_k(\lambda_n) = w_k$ si $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Además,

$$\begin{aligned}
\Omega_n(\lambda_n)^n &= \frac{1}{\lambda_n}\Omega_{n-1}(\lambda_n)^{n-1}\left(1 - \frac{\Omega_{n-1}(\lambda_n)}{n-1}\right)^{-(n-1)} \\
&= \frac{1}{\lambda_n} w_{n-1}^{n-1}\left(1 - \frac{w_{n-1}}{n-1}\right)^{-(n-1)} = \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{\gamma_{n-1}}{\lambda_n a_{n-1}}\right)^{n-1}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{-(n-1)} \\
&= \frac{1}{\lambda_n^n}\frac{\gamma_{n-1}^{n-1}}{a_n^{n-1}} = \frac{1}{\lambda_n^n}\frac{\gamma_n^n}{a_n^n} = n^n,
\end{aligned}$$

por lo que $\Omega_n(\lambda_n) = n$. Demostremos por inducción que

$$\Omega_k(\lambda) < \frac{k}{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

para $\lambda \geq e$. Dado que $\Omega_n(\lambda_n) = n$, tendríamos entonces que $\lambda_n < e$ que es lo que queremos demostrar.

Es evidente que $\Omega_1(\lambda) < 1/2$ si $\lambda \geq e$. Supongamos que tenemos la desigualdad para $\Omega_k$. Entonces,

$$\Omega_{k+1}(\lambda)^{k+1} < \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\dfrac{k}{k+1}}{1 - \dfrac{k}{k(k+1)}}\right)^k = \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{e} < \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}.$$

Así que

$$\Omega_{k+1}(\lambda) < \frac{k+1}{k+2}$$

y la demostración queda terminada.

Como comentamos al inicio, Carleson prueba en su artículo también que si la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la desigualdad es estricta. Pues si se diera la igualdad, las cantidades

$$\omega_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

deben en ese caso satisfacer la relación

$$\omega_n = \frac{1}{e}\left(\frac{\omega_{n-1}}{1 - \dfrac{w_{n-1}}{n-1}}\right)^{n-1}$$

de donde se concluye al igual que antes que

$$\omega_n < \frac{n}{n+1}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1}$$

así que

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} > \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no sería convergente.

La constante $e$ no se puede mejorar pues si tomamos $a_k = \dfrac{1}{k}$ si $k \leq n$ y $a_k = 0$ si $> n$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

## 4.2. La demostración de Knopp

Quizás sea la más corta. Considera la mitad de una media ponderada de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En concreto,

$$c_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}.$$

Decimos la mitad de una media ponderada pues $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$. Además, la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ tiene la particularidad de ser una serie telescópica,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

lo que permite calcular su suma y además,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} c_n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} (a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} - \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Si llamamos

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n},$$

tendríamos que

$$b_{n+1} = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n + (n+1)a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1} + a_{n+1},$$

así que volvemos arriba y tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} c_n &= \sum_{n=1}^{N} \left(b_n - (b_{n+1} - a_{n+1})\right) = \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_{n+1}) + \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} \\
&= b_1 - b_{N+1} + \sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N+1} a_n - b_{N+1} = \sum_{n=1}^{N+1} a_n - (N+2)c_{N+1}
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}(N+2)c_{N+1} &= \frac{a_1+2a_2+\cdots+(N+1)a_{N+1}}{N+1} = \frac{a_1+2a_2+\cdots+Na_N}{N+1} + a_{N+1}\\ &= Nc_N + a_{N+1},\end{aligned}$$

por lo que en definitiva,

$$\sum_{n=1}^{N} c_N = \sum_{n=1}^{N} a_n - Nc_N < \sum_{n=1}^{N} a_n. \tag{4.2}$$

Aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica a los números

$$\frac{a_1}{n+1}, \frac{2a_1}{n+1}, \ldots, \frac{na_n}{n+1},$$

y deducimos que

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n+1}\gamma_n = \left(\frac{n! a_1 a_2 \cdots a_n}{(n+1)^n}\right)^{1/n} \leq \frac{\frac{a_1}{n+1} + \frac{2a_1}{n+1} + \cdots + \frac{na_n}{n+1}}{n} = c_n.$$

Por la desigualdad 4.1 sabemos que $(n+1)^n < en^n$, y de aquí

$$(n+1)^n < e^n n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, la desigualdad es cierta para $n = 1$ y admitida para $n$,

$$(n+2)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} (n+1)^{n+1} < en^n n!(n+1) = e^{n+1}(n+1)!.$$

Volviendo a nuestra demostración,

$$\frac{\gamma_n}{e} \leq \frac{(n!)^{1/n}}{n+1}\gamma_n \leq c_n$$

luego $\gamma_n \leq ec_n$ y concluimos la prueba por 4.2.

## 4.3. La demostración de Pólya

Pólya publicó su prueba en 1925[1] pero en 1949 publicó el trabajo [9] en el que explica como encontró su demostración.

En principio puede pensarse demostrar esta implicación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} < \infty. \tag{4.3}$$

Si aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k},$$

[1]G. Pólya. Proof of an inequality. *Proc. London Math. Soc. (2)* **24** (1925), 55.

y vemos que esto no funciona pues la serie armónica diverge.

Ahora bien, dada la sucesión $(a_n)$ de números reales positivos, la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica sí nos dice que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_1c_1a_2c_2\cdots a_nc_n)^{1/n}}{(c_1c_2\cdots c_n)^{1/n}} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n}{n(c_1c_2\cdots c_n)^{1/n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}a_nc_n\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j(c_1c_2\cdots c_j)^{1/j}}. \qquad (4.4)\end{aligned}$$

De aquí deducimos que nuestra conjetura (4.3) es cierta si encontramos unos coeficientes $c_k$ de modo que las sumas

$$s_k = c_k\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j(c_1c_2\cdots c_j)^{1/j}}, \quad k=1,2,\cdots \qquad (4.5)$$

estén acotadas.

Para la búsqueda de esos coeficientes, y pensando que debemos estimar la suma $s_k$, recordamos que las series telescópicas tienen esta propiedad:

$$\sum_{j=k}^{\infty}\left(\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}\right)=\frac{1}{b_k},$$

y la elección más simple está dada por

$$\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)}=\sum_{j=k}^{\infty}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)=\frac{1}{k}. \qquad (4.6)$$

Si comparamos (4.5) y (4.6) vemos que podemos expresar $s_k$ de una forma más simple si definimos los coeficientes $c_k$ por

$$(c_1c_2\cdots c_j)^{1/j}=j+1, \quad j=1,2,\ldots \qquad (4.7)$$

pues nos da esta expresión para $s_k$,

$$s_k=c_k\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j(c_1c_2\cdots c_j)^{1/j}}=c_k\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)}=\frac{c_k}{k},$$

y lo que necesitamos ahora es estimar $c_k$.

Si aplicamos dos veces (4.7) tenemos que

$$c_1c_2\cdots c_{j-1}=j^{j-1}, \quad c_1c_2\cdots c_j=(j+1)^j,$$

así que dividiendo, tenemos la expresión explícita

$$c_j=\frac{(j+1)^j}{j^{j-1}}=j\left(1+\frac{1}{j}\right)^j.$$

De esta expresión y nuestra cota inicial (4.4) deducimos

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_k)^{1/k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k a_k, \qquad (4.8)$$

con lo que de nuevo por (4.1) queda demostrada la desigualdad de Carleman. Podemos incluso decir que (4.8) es un poco más fuerte que la desigualdad de Carleman, pues es estricta salvo si todos los $a_n$ son nulos.

## 4.4. La demostración de Redheffer

La prueba de Redheffer [10] parece como “un conejo sacado de la chistera” y muestra el poder de introducir parámetros en la resolución de un problema. Cualesquiera que sean $a_k > 0$ y $b_k \geq 0$ se cumple

$$(b_1 - 1)\gamma_1 + 2(b_2 - 1)\gamma_2 + \cdots + n(b_n - 1)\gamma_n + n\gamma_n \leq a_a b_1 + a_2 b_2^2 + \cdots + a_n b_n^n.$$

Para probar la desigualdad nos fijamos primero en $b_n$. ¿Qué elección de $b_n$ hace que esta desigualdad sea más difícil de satisfacer? Pues el valor de $x$ que maximiza

$$\phi(x) = n\gamma_n x - a_n x^n, \quad x \geq 0.$$

Como $\phi'(x) = n\gamma_n - na_n x^{n-1}$, el máximo buscado es $x^{n-1} = \gamma_n / a_n$. Y para ese valor de $x$,

$$\phi(x) = x(n\gamma_n - a_n x^{n-1}) = x(n-1)\gamma_n = (n-1)\left(\frac{\gamma_n^n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = (n-1)\gamma_{n-1}.$$

Así que la desigualdad inicial se cumple para todo $b_n \geq 0$ supuesto que se cumple cuando

$$n\gamma_n b_n - a_n b_n^n = (n-1)\gamma_{n-1}.$$

Si hacemos esta sustitución en la desigualdad inicial, esta se convierte en

$$(b_1 - 1)\gamma_1 + 2(b_2 - 1)\gamma_2 + \cdots + (n-1)(b_{n-1} - 1)\gamma_{n-1} + (n-1)\gamma_{n-1}$$
$$\leq a_a b_1 + a_2 b_2^2 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1}^{n-1}.$$

Y vemos que es la desigualdad inicial donde $n$ ha sido reemplazada por $n-1$. Redheffer llama a estas desigualdades recurrentes. Reducimos cada vez el número de parámetros en uno y resulta que la desigualdad es cierta para $n$ supuesto que lo es para $n = 1$. Pero en este caso, la desigualdad es simplemente $a_1 b_1 \leq a_1 b_1$. Luego queda probada la desigualdad de Redheffer.

Debe observarse que no se ha hecho uso de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica. En realidad, si $b_k = 1$ para todo $k$, la desigualdad de Redheffer es la de las medias.

Si elegimos $b_k = 1 + \dfrac{1}{k}$, tenemos que

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n + n\gamma_n \leq (1 + 1^1)a_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 a_2 + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n.$$

Esta desigualdad se ha probado cuando cada $a_k > 0$, pero por continuidad se tiene cuando cada $a_k \geq 0$. Así que

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \leq \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n + n\gamma_n < e(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

y queda probada la desigualdad.

CAPÍTULO 5

# Desigualdad de Hilbert

A comienzos del siglo XX, Hilbert probó la siguiente desigualdad. Dadas dos sucesiones $(a_n)$ y $(b_n)$ de números reales, se cumple que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < 2\pi\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pocos años después de la prueba de Hilbert, Issai Schur demostró que la desigualdad es cierta sustituyendo $2\pi$ por $\pi$. De hecho, $\pi$ es la mejor constante.

Comenzamos con una sección inicial en la que vemos una ecuación funcional de la función $\Gamma$ que usaremos en la demostración.

## 5.1. Una ecuación funcional de la función $\Gamma$

La función gamma se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}\,dx \qquad (\Re(z) > 0). \tag{5.1}$$

Si $z$ es real, la integral converge en infinito porque $e^{-x}$ tiende a cero más rápidamente que el crecimiento de cualquier potencia $x^{z-1}$. La convergencia es uniforme en $z \le b$ porque en ese caso, $x^{z-1} \le x^{b-1}$ para $x > 1$. La integral converge en cero si $z > 0$, uniformemente si $z \ge a$, para cualquier $a > 0$, porque si $z \ge a$ entonces $x^{z-1} \le x^{a-1}$ si $x < 1$.

Si $z$ es complejo, como $|x^{z-1}| = x^{\Re(z)-1}$, se sigue que la integral converge absolutamente si $\Re(z) > 0$, y uniformemente en $a \le \Re(z) \le b$, para cualesquiera $0 < a < b$. En particular, si $\Re(z) > 0$, la integral converge uniformemente en un entorno de $z$, podemos derivar bajo el signo integral para obtener

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}\log x\,dx.$$

Esto demuestra que $\Gamma(z)$ es analítica si $\Re(z) > 0$.

Integrando por partes tenemos que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad (\Re(z) > 0), \tag{5.2}$$

y, en particular, ya que $\Gamma(1) = 1$, tenemos que $\Gamma(n+1) = n!$.

Si escribimos (5.2) como

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

podemos usar esta expresión para definir una prolongación analítica de $\Gamma(z)$ al dominio $D_1 = \{\Re(z) > -1\} \setminus \{0\}$, luego a $D_2 = \{\Re(z) > -2\} \setminus \{0, -1\}$, y así sucesivamente a $D_n = \{\Re(z) > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, 1-n\}$. Esto nos permite afirmar que la función $\Gamma(z)$ definida por la ecuación (5.1) tiene una prolongación analítica al dominio $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ y verifica (5.2) para todo $z$ de ese dominio.

Para manejar ciertas propiedades de la función gamma es útil introducir la función beta, definida como

$$B(r, s) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\, dx \qquad (\Re(r), \Re(s) > 0). \tag{5.3}$$

Como en (5.1), esta integral converge absoluta y uniformemente en un entorno de cualquier punto $(r, s)$ tal que $\Re(r), \Re(s) > 0$ y define una función analítica en cada variable. Haciendo el cambio $y = 1 - x$ en (5.3) tenemos que $B(r, s) = B(s, r)$.

Veamos la relación entre estas funciones.

$$\Gamma(r)\Gamma(s) = \left(\int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}\, dx\right)\left(\int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}\, dy\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{r-1}y^{s-1}e^{-(x+y)}\, dx\, dy.$$

Si hacemos el cambio de variables

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u, \qquad \begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{x}{x+y} \end{cases}$$

tenemos que $0 < u < \infty$ y $0 < v < 1$. La integral es entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(r)\Gamma(s) &= \int_0^1 \int_0^\infty (uv)^{r-1} \left(u(1-v)\right)^{s-1} e^{-u}u\, du\, dv \\ &= \int_0^\infty u^{r+s-1}e^{-u}\, du \int_0^1 v^{r-1}(1-v)^{s-1}\, dy = \Gamma(r+s)B(r, s). \end{aligned} \tag{5.4}$$

A partir de esta relación, escribiéndola como

$$B(r.s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

es posible prolongar analíticamente la función beta a todo $r, s \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, pero no nos hará falta para lo que necesitamos en nuestro caso. Usaremos la función beta en el dominio definido en (5.3).

Si en la definición de la función beta hacemos el cambio

$$x = \frac{u}{u+1}, \quad 1 - x = \frac{1}{u+1}, \quad dx = \frac{du}{(u+1)^2},$$

tenemos entonces que

$$B(r, s) = \int_0^\infty \frac{u^{r-1}}{(u+1)^{r+s}}\, du \qquad (\Re(r), \Re(s) > 0).$$

La ventaja de esta expresión es que podemos calcular esta integral en el caso de ser $r + s = 1$ usando el teorema de los residuos. Para ello, consideremos la integral

$$\oint_C \frac{(-z)^{r-1}}{z+1}\, dz$$

donde usamos la rama principal $(-z)^{r-1} = e^{(r-1)\mathrm{Log}(-z)}$ y el contorno de la figura siguiente.

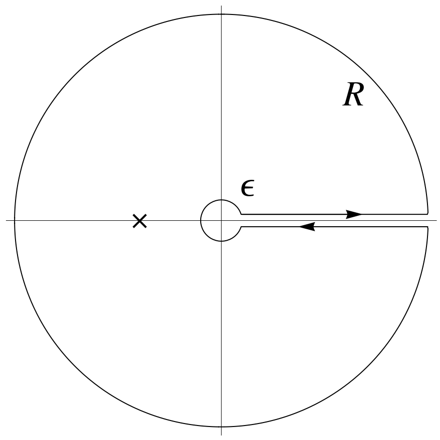



Figura 5.1: Integral de contorno para calcular $B(r,s)$ con $r+s=1$.

Como $\mathrm{Log}\, z$ tiene el corte de rama en el eje real negativo, $(-z)^{r-1}$ lo tiene en el eje real positivo. En la parte superior del corte, $\mathrm{Arg}(-z) = -\pi$ y $(-z)^{r-1} = e^{-i\pi(r-1)}x^{r-1}$. En la parte inferior es $\mathrm{Arg}(-z) = \pi$ y $(-z)^{r-1} = e^{i\pi(r-1)}x^{r-1}$. cuando $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$ la contribución a la integral de contorno de los lados correspondientes al corte son, por tanto,

$$\left(e^{-i\pi(r-1)} - e^{i\pi(r-1)}\right)\int_0^\infty \frac{x^{r-1}}{x+1}\,dx = -2i\,\mathrm{sen}\,(\pi(r-1))\,B(r,1-r).$$

La integral en el círculo grande, $|z| = R$ tiende a cero si $R \to \infty$ porque

$$r\left|\frac{z^{r-1}}{z+1}\right| \sim R\frac{R^{\rho-1}}{R} = R^{\rho-1},$$

siendo $\rho = \Re(r) = 1 - \Re(s) < 1$. Análogamente, la integral en el círculo pequeño, $|z| = \varepsilon$ tiende a cero si $\varepsilon \to 0$ porque

$$\varepsilon\left|\frac{z^{r-1}}{z+1}\right| \sim \varepsilon\varepsilon^{\rho-1} = \varepsilon^{\rho}, \qquad \rho > 0.$$

Por tanto,

$$\oint_C \frac{(-z)^{r-1}}{z+1}\,dz = -2i\,\mathrm{sen}\,(\pi(r-1))\,B(r,1-r).$$

Dado que la función $(-z)^{r-1}/(z+1)$ tiene un polo simple en $z = -1$ con residuo $1^{r-1} = 1$, el teorema de los residuos nos da

$$-2i\,\mathrm{sen}\,(\pi(r-1)) = 2\pi i,$$

o bien

$$\frac{\mathrm{sen}\,(\pi(1-r))}{\pi}B(r,1-r) = 1.$$

Usando (5.4), que $\Gamma(1) = 1$ y que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$, podemos escribir la relación anterior como

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}. \tag{5.5}$$

Hemos deducido esta expresión, que usaremos en la siguiente sección, suponiendo que $0 < \Re(z) < 1$. Dado que se trata de una igualdad entre funciones analíticas, se sigue que es cierta en sus dominios de definición, es decir en todo número complejo $z$ que no sea entero.

## 5.2. Demostración de la desigualdad de Hilbert

A pesar de la similitud en cierto sentido entre la desigualdad de Hilbert y la de Cauchy, la prueba original de Hilbert no hace uso de la desigualdad de Cauchy. Hilbert hizo una demostración completamente distinta en la que evaluaba ciertas integrales trigonométricas.

A pesar de ello, puede darse una demostración que no es complicada basada en la desigualdad de Cauchy, véase [11], página 155.

Si $\mathcal{S}$ es un conjunto numerable y $(\alpha_s)$, $(\beta_s)$ son dos colecciones de números reales con $s \in \mathcal{S}$, la desigualdad de Cauchy nos dice que

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \alpha_s\beta_s \leq \left(\sum_{s\in\mathcal{S}} \alpha_s^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s\in\mathcal{S}} \beta_s^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora debemos elegir convenientemente $\mathcal{S}$, $\alpha_s$ y $\beta_s$ para obtener lo que buscamos.

Un primer intento podría ser considerar $\mathcal{S} = \{(m,n) : m \geq 1,\ n \geq 1\}$ y

$$\alpha_s = \frac{a_m}{\sqrt{m+n}}, \quad \beta_s = \frac{b_n}{\sqrt{m+n}}, \qquad s = (m,n).$$

Es claro que el producto $\alpha_s\beta_s$ es el lado izquierdo de la desigualdad de Hilbert, pero al aplicar la desigualdad de Cauchy nos encontramos con un problema. Esta nos dice que

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}\right)^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m^2}{m+n} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{m+n},$$

y los dos términos de la derecha son infinito, pues el primer factor diverge como una serie armónica cuando sumamos en $n$ y el segundo cuando sumamos en $m$. Así que la desigualdad que obtenemos carece de valor. Sin embargo, examinando con más detalle lo hecho veremos como elegir mejor $a_s$ y $b_s$.

La divergencia de las series anteriores se deben a razones distintas; la de término general

$$\alpha_s = \frac{a_m}{\sqrt{m+n}}$$

diverge porque es grande como función de $n$ mientras que

$$\beta_s = \frac{b_n}{\sqrt{m+n}}$$

diverge porque es grande como función de $m$. La idea es entonces multiplicar $\alpha_s$ por una función decreciente de $n$ y $\beta_s$ por una función decreciente de $m$. Y queremos mantener la propiedad de ser

$$\alpha_s\beta_s = \frac{a_m b_n}{\sqrt{m+n}}.$$

Por ello, elegimos una familia paramétrica de candidatos, de la forma

$$\alpha_s = \frac{a_m}{\sqrt{m+n}}\left(\frac{m}{n}\right)^{\lambda}, \quad \beta_s = \frac{b_n}{\sqrt{m+n}}\left(\frac{n}{m}\right)^{\lambda},$$

con $s = (m,n)$ y $\lambda > 0$ una constante por determinar.

Si le aplicamos la desigualdad de Cauchy a estos $\alpha_s$ y $\beta_s$ tenemos que

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\right)^2 \le \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{2\lambda},$$

y mirando el primer factor de la derecha vemos que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda}.$$

Dada la simetría de los sumandos, terminamos la demostración si para alguna elección de $\lambda$ existe una constante $B_\lambda$ finita de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda} \le B_\lambda, \quad \forall m \ge 1.$$

Necesitamos por tanto estimar esta suma. Para ello, recordemos que dada una función no negativa decreciente $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ se cumpl,e

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \int_0^{\infty} f(x)\, dx.$$

Si tomamos

$$f(x) = \frac{m^{2\lambda}x^{2\lambda}}{m+x},$$

tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda} \le \int_0^{\infty}\frac{1}{m+x}\cdot\frac{m^{2\lambda}}{x^{2\lambda}}\, dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\, dy, \tag{5.6}$$

donde hemos hecho $x = my$ en la última integral. La integral converge si $0 < \lambda < 1/2$.

Para ver el valor de la constante que obtenemos con nuestro razonamiento evaluemos esta integral haciendo uso de la función $\Gamma$. Escribimos $1/(1+y)$ como una integral,

$$\frac{1}{1+y} = \int_0^{\infty} e^{-t(1+y)}\, dt,$$

lo que nos permite hacer el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\,dy &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-t(1+y)}\,dt\right)\frac{1}{y^{2\lambda}}\,dy\\ &= \int_0^\infty e^{-t}\left(\int_0^\infty e^{-ty}\frac{1}{y^{2\lambda}}\right)dt\\ &= \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{\Gamma(1-2\lambda)}{t^{1-2\lambda}}\right)dt = \Gamma(2\lambda)\Gamma(1-2\lambda),\end{aligned}$$

así que por (5.5),

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\,dy = \frac{\pi}{\operatorname{sen} 2\pi\lambda}, \quad 0<\lambda<\frac{1}{2}.$$

Dado que $\operatorname{sen} 2\pi\lambda$ alcanza el máximo cuando $\lambda = 1/4$, tenemos que el menor valor de $B_\lambda$ con $0<\lambda<1/2$ es

$$B_{1/4} = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\,dy = \pi. \tag{5.7}$$

Con esto demostramos la desigualdad de Hilbert, y de hecho, hemos conseguido la constante $\pi$, descubierta por Schur. Veamos a continuación que no se puede mejorar.

**Teorema 5.1.** *Si $C$ es una constante tal que*

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{a_m b_n}{m+n} < C\left(\sum_{m=1}^\infty a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^\infty b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.8}$$

*para todo par de sucesiones $(a_m)$ y $(b_n)$ de números reales, entonces $C \geq \pi$.*

Desde luego, eligiendo sucesiones $(a_m)$ y $(b_n)$ y poniéndolas en la desigualdad (5.8), obtendremos cotas inferiores sobre $C$. La idea que seguiremos es el modo de encontrar una familia de pares de sucesiones $(a_m(\varepsilon))$ y $(b_n(\varepsilon))$ que nos den una sucesión de cotas inferiores sobre la constante $C$ que tiendan a $\pi$ cuando $\varepsilon \to 0$. Veamos como elegir estos pares.

Debemos pensar que tendremos que calcular las sumas que aparecen en (5.8), y esto hace que nuestro campo de búsqueda se reduzca. También es conveniente buscar pares de modo que las cantidades que aparecen en la desigualdad tiendan a infinito.

Una posible elección es

$$a_n(\varepsilon) = b_n(\varepsilon) = n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Con esta elección, el lado derecho de (5.8) es

$$\left(\sum_{m=1}^\infty a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^\infty b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+2\varepsilon}} \sim \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+2\varepsilon}} = \frac{1}{2\varepsilon}. \tag{5.9}$$

Veamos a continuación que el lado izquierdo de (5.8) es asintóticamente equivalente a $\pi/(2\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Para ello, necesitamos un resultado.

**Lema 5.2** (Lema de la suma doble)**.** *Si $\varepsilon \to 0$, se tiene que*

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\cdot\frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\cdot\frac{1}{m+n} \sim \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

*Demostración.* Basta demostrar que

$$I(\varepsilon) = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{x+y}\, dx\, dy \sim \frac{\pi}{2\varepsilon} \quad \text{si } \varepsilon \to 0.$$

Haciendo $u = y/x$,

$$I(\varepsilon) = \int_1^\infty x^{-1-2\varepsilon} \left( \int_{\frac{1}{x}}^\infty u^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{du}{1+u} \right) dx. \tag{5.10}$$

Esta integral es más fácil de calcular si pudiéramos reemplazar el límite inferior $1/x$ de la integral interior por cero. Para estimar este cambio, observemos primero que

$$0 < \int_0^{\frac{1}{x}} u^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{du}{1+u} < \int_0^{\frac{1}{x}} u^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\, du = \frac{x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Usando esta cota en (5.10) y la notación $O$ de Landau,

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_1^\infty x^{-1-2\varepsilon} \left( \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{du}{1+u} \right) dx + O\left( \int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\, dx \right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{du}{1+u} + O(1). \end{aligned}$$

Para terminar, si $\varepsilon \to 0$, de acuerdo con (5.7),

$$\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{du}{1+u} \to \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{1+u} = \pi,$$

y concluimos la prueba del lema.

□

Cada vez que $\pi$ aparece en un problema que no tiene ningún círculo a la vista, hay un cierto sentido de misterio. A veces este misterio permanece sin una resolución satisfactoria, pero, en el caso de la desigualdad de Hilbert, una explicación geométrica para la aparición de $\pi$ fue encontrada en 1993 por Krysztof Oleszkiewicz (véase [8]). Este descubrimiento está un poco fuera de nuestro tema central, pero se basa en cálculos que acabamos de completar, y es demasiado hermoso para no exponerlo a continuación.

**Lema 5.3** (Lema del cuarto de círculo)**.** *Para todo $m \geq 1$ se cumple*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{m+n} \left( \frac{m}{n} \right)^{\frac{1}{2}} < \pi.$$

*Demostración.* Observemos que el triángulo sombreado de la siguiente figura

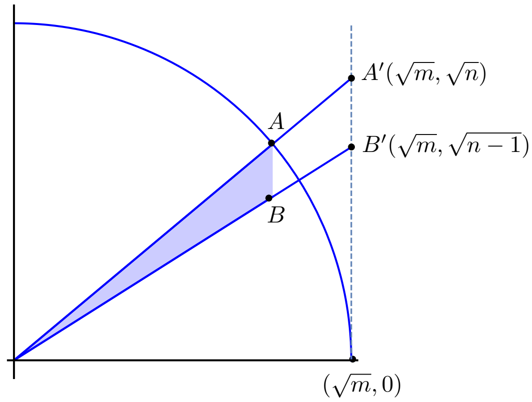



Figura 5.2: Lema del cuarto de círculo.

es semejante al triángulo $T$ determinado por $(0,0)$, $(\sqrt{m}, \sqrt{n-1})$ y $(\sqrt{m}, \sqrt{n})$. El área de $T$ es $\frac{1}{2}\sqrt{m}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$. Así que el área $A_n$ del triángulo sombreado es, teniendo en cuenta que

$$\frac{|OA|}{|OA'|}=\frac{|OB|}{|OB'|}=\sqrt{\frac{m}{n+m}},$$

reescalamos y

$$A_n=\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n+m}}\right)^2\frac{1}{2}\sqrt{m}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$$

Como $1/\sqrt{x}$ decrece en $(0,\infty)$,

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{2}\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{\sqrt{x}}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

así que

$$A_n>\frac{1}{4}\cdot\frac{m}{m+n}\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}.$$

Por último, lo que hace más interesante esta cota geométrica es que todos los triángulos sombreados están contenidos en el cuarto de círculo tienen interiores disjuntos por lo que la suma de sus áreas está acotada por $\pi m/4$ que es el área del cuarto de círculo de radio $\sqrt{m}$ que los contiene.

□

Usando la desigualdad de Hölder, podemos dar la siguiente versión de la desigualdad de Hilbert.

**Corolario 5.4.** *Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones de números reales no negativos, sea $1<p<\infty$ y sea $q$ el conjugado de $p$. Entonces,*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}<\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

*salvo si alguna de las sucesiones $(a_n)$ o $(b_n)$ es idénticamente nula.*

*Demostración.* Escribamos

$$\frac{1}{m+n} = \left[\frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{1}{q}},$$

y apliquemos la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_m\left[\frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(b_n\left[\frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}\right)\\ &\le \left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_m^p\left[\frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\left[\frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Ahora bien, por (5.6),

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q}} &\le \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)y^{1/q}}\,dy = \Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right),\\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}} &\le \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)y^{1/p}}\,dy = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right),\end{aligned}$$

y de ahí se deduce la desigualdad.

□

Usando (5.5) es habitual escribir la desigualdad anterior en la forma

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

## 5.3. Versión integral de la desigualdad de Hilbert

La versión integral de la desigualdad de Hilbert puede demostrarse esencialmente de la misma forma que la versión discreta, de hecho, producirá la versión discreta como un corolario.

**Teorema 5.5** (Versión integral de la desigualdad de Hilbert)**.** *Sean $f,g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $1 < p < \infty$ y $q$ el conjugado de $p$. Entonces,*

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\,dx\,dy < \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}}\left(\int_0^{\infty}f(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}g(y)^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

*salvo si $f$ o $g$ son idénticamente nulas. La constante que aparece en la desigualdad es la mejor posible.*

Una demostración sería escribir

$$\frac{1}{x+y} = \left[\frac{1}{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/q}\right]^{1/p}\left[\frac{1}{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/p}\right]^{1/q},$$

aplicar la desigualdad de Hölder y seguir igual que en la sección anterior.

En lugar de completar el cálculo, vamos a optar por demostrar un teorema más general.

**Teorema 5.6.** *Sea $K : [0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ satisfaciendo $K(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{-1}K(x,y)$ para todo $\lambda>0$. Entonces, para $f,g$ y $p$ como antes, se cumple que*

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\,dxdy \le C\left(\int_0^\infty f(x)^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty g(y)^p\,dy\right)^{1/p}. \tag{5.11}$$

*La constante $C$ viene dada por el valor común*

$$C=\int_0^\infty K(x,1)x^{-1/p}\,dx=\int_0^\infty K(1,y)y^{-1/q}\,dy. \tag{5.12}$$

*Si $K>0$, entonces la desigualdad es estricta salvo si $f$ o $g$ son idénticamente nulas.*

*Demostración.* La igualdad de las integrales que dan la constante $C$ se deduce con el cambio de variables $x=1/y$, teniendo en cuenta la homogeniedad de orden $-1$ del núcleo $K$.

$$\int_0^\infty K(x,1)x^{-1/p}\,dx=\int_\infty^0 K\left(\frac{1}{y},1\right)y^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{-1}{y^2}\,dy=\int_0^\infty K(1,y)y^{-\frac{1}{q}}\,dy.$$

Comenzamos con el cambio de variable $y=ux$ y algunos cambios en el orden de integración.

$$\begin{aligned}
I=\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\,dxdy &= \int_0^\infty f(x)\left[\int_0^\infty K(x,y)g(y)\,dy\right]dx\\
&=\int_0^\infty f(x)\left[\int_0^\infty xK(x,ux)g(ux)\,du\right]dx\\
&=\int_0^\infty f(x)\left[\int_0^\infty K(1,u)g(ux)\,du\right]dx\\
&=\int_0^\infty K(1,u)\left[\int_0^\infty f(x)g(ux)\,dx\right]du
\end{aligned}$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Hölder a la integral interna, usando el mismo cambio de variable y aplicando Fubini.

$$\int_0^\infty f(x)g(ux)\,dx\le\left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}u^{-1/q}\left(\int_0^\infty |g(y)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Así,

$$I\le\int_0^\infty K(1,u)u^{-1/q}\,du\left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty |g(y)|^q\,dy\right)^{1/q}.$$

Examinando con detalle el caso de la igualdad en la aplicación de la desigualdad de Hölder deducimos cuando es la desigualdad estricta en (5.11).

□

Como comentamos al principio, podemos deducir la versión discreta de la desigualdad de este resultado pues dado que

$$\int_{m-1}^m\int_{n-1}^n\frac{dy\,dx}{x+y}\ge\frac{1}{m+n},$$

podemos definir

$$\begin{cases} f(x) = a_m, & m-1 \le x < m \\ g(y) = b_n, & n-1 \le y < n \end{cases}$$

y escribir el sumatorio doble de la desigualdad de Hilbert como una integral en $(0,\infty)\times(0,\infty)$. Pero podemos incluso mejorar la desigualdad. Para ello, usando la convexidad estricta de

$$h(\alpha) = \frac{1}{m+n-1+\alpha}, \quad -1 \le \alpha \le 1,$$

tenemos que

$$\frac{1}{m+n-1-\alpha} + \frac{1}{m+n-1+\alpha} > \frac{2}{m+n-1}, \tag{5.13}$$

y entonces, haciendo

$$s = x - m + \frac{1}{2}, \qquad t = y - n + \frac{1}{2},$$

$$\int_{m-1}^{m}\int_{n-1}^{n} \frac{dy\,dx}{x+y} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt\,ds}{m+n-1+s+t}.$$

Y si ahora hacemos

$$s = -x, \quad t = -y,$$

llegamos a

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt\,ds}{m+n-1+s+t} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy\,dx}{m+n-1-x-y}.$$

Es decir, estas integrales son iguales y por (5.13)

$$\int_{m-1}^{m}\int_{n-1}^{n} \frac{dy\,dx}{x+y} > \frac{1}{m+n-1}.$$

Así que tenemos esta versión más fina de la desigualdad de Hilbert.

**Corolario 5.7.** *Si $(a_n)$ y $(b_n)$ son de cuadrado sumable, entonces*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n-1} < \pi \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n m^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

*salvo si $(a_m)$ o $(b_n)$ es idénticamente nula.*

Vamos a aplicar este resultado a la sucesión de los momentos de una función de cuadrado integrable. Será útil usar una desigualdad de Hölder inversa, resultado de interés en sí mismo.

**Lema 5.8.** *Sea $1 < p < \infty$ y sea $q$ el exponente conjugado de $p$. Sean $(a_n)$ una sucesión de números reales o complejos y $C > 0$ una constante tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \le C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

*para toda sucesión $(b_n)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q < \infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \le C^p.$$

*Demostración.* Veamos que cualquiera que sea $N$ natural se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\mathbb{N}} |a_n|^p \leq C^p.$$

Poniendo $b_n = |a_n|^{p-1}\mathrm{sig}(a_n)$, si $n = 1, 2, \ldots, N$ y $b_n = 0$ si $n > N$, tenemos que $|b_n|^q = |a_n|^p$ si $1 \leq n \leq N$. Así que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^p \leq C \left( \sum_{n=1}^{N} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Basta dividir por $\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ (que suponemos no nulo) para obtener el resultado.

□

**Corolario 5.9.** *Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ no nula de cuadrado integrable. Definamos*

$$a_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

*entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \leq \pi \int_0^1 f(x)^2\, dx.$$

*La constante $\pi$ es la mejor posible.*

*Demostración.* Podemos suponer que $f \geq 0$; de hecho,

$$|a_n| \leq \int_0^1 x^n |f(x)|\, dx = b_n,$$

siendo $(b_n)$ la sucesión de momentos de $|f|$, así que basta considerar $|f|$.

Si $\sum_{n\geq 1} b_n^2 < \infty$, cualquiera que sea $N \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=0}^{N} b_n \int_0^1 x^n f(x)\, dx = \int_0^1 f(x) \sum_{n=0}^{N} b_n x^n\, dx \\
&\leq \left( \int_0^1 f(x)^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{N} b_n x^n \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_0^1 f(x)^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} \frac{b_m b_n}{m + n - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \pi \left( \int_0^1 f(x)^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{N} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Se deduce del lema anterior que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \pi \int_0^1 f(x)^2\, dx.$$

Que $\pi$ es la mejor constante se obtiene considerando la función $f(x) = (1 - x)^{-\varepsilon - \frac{1}{2}}$ y hacer $\varepsilon \to 0$, cálculo que omitimos.

□

## 5.4. Otra demostración de la desigualdad de Hilbert

Nuestra segunda prueba de la desigualdad de Hilbert tiene la ventaja de ser completamente elemental, pero tiene la desventaja de dar un resultado ligeramente más débil. La prueba de Toeplitz (1910), comienza con una simple observación.

**Lema 5.10.** *Para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ se tiene que*

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)e^{int}dt = \frac{1}{n}.$$

*Demostración.* Integrando por partes

$$\begin{aligned}\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)e^{int}dt &= \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)d\left(\frac{1}{in}e^{int}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi n}(t-\pi)e^{int}\Big]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

□

Vemos que esto nos permite representar como una integral el lado izquierdo de la desigualdad de Hilbert. Lo enunciamos en el siguiente resultado.

**Lema 5.11.** *Se cumple que*

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m b_n}{m+n} = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)f(t)g(t)dt,$$

*donde*

$$f(t) = \sum_{m=1}^{N} a_m e^{imt}, \qquad g(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{int}.$$

Finalmente aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y dado que las funciones $e^{int}$ son ortonormales en $[0,2\pi]$ llegamos a que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m b_n}{m+n}\right| &= \left|\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)f(t)g(t)dt\right|\\ &\leq \pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,|g(t)|dt\\ &\leq \pi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t)|^2dt\right)^{1/2}\\ &= \pi\left(\sum_{m=1}^{N}a_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N}b_n^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Debido a la naturaleza especial de la representación en nuestro lema anterior, no está claro que esta prueba nos sirva para demostrar la versión de suma infinita, a menos que supongamos que $(a_m)$ y $(b_n)$ son sucesiones no negativas. Además, tendríamos dificultades para probar la desigualdad estricta usando este método solamente. Sin embargo, la demostración de Toeplitz tiene el beneficio de que prueba ampliamente la interacción entre espacios con producto interno discretos y continuos.

## 5.5. Generalización de Schur

Nuestro resultado final de este capítulo es la generalización de Schur (1911) de la desigualdad de Hilbert. Sorprendentemente, la demostración será breve, elemental y no apelará de ninguna manera a la desigualdad de Hilbert.

**Lema 5.12.** *Sean $c_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces*

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x} \right| dx \geq 2\,\mathrm{sen}(\pi\alpha) \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\lambda_k - \alpha} \right|.$$

*Demostración.* Comenzamos con la estimación

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x} \right| dx &\geq \left| \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i(\lambda_k - \alpha)x}\, dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda_k - \alpha)x}\, dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\lambda_k - \alpha} \int_0^{2\pi(\lambda_k - \alpha)} e^{iu}\, du \right|. \end{aligned}$$

Pero el módulo de la última integral depende solo de $\alpha$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi(\lambda_k - \alpha)} e^{iu}\, du &= -ie^{iu}\Big]_0^{2\pi(\lambda_k - \alpha)} \\ &= -i\left[e^{i2\pi(\lambda_k - \alpha)} - 1\right] = -i\left[e^{-i2\pi\alpha} - 1\right] \\ &= -ie^{-i\pi\alpha}\left[e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}\right] = -2e^{-i\pi\alpha}\,\mathrm{sen}(\pi\alpha). \end{aligned}$$

Así,

$$\left| \int_0^{2\pi(\lambda_k - \alpha)} e^{iu}\, du \right| = 2\,\mathrm{sen}(\pi\alpha)$$

y se obtiene el resultado.

□

**Teorema 5.13.** *Sean $a_m$ y $b_n$ sucesiones de números complejos y $0 < \alpha < 1$. Entonces*

$$\left| \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_m b_n}{m + n - \alpha} \right| \leq \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,(\pi\alpha)} \left( \sum_{m=1}^{N} a_m^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{N} b_n^2 \right)^{1/2}.$$

*Demostración.* La demostración consiste en aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y usar el lema previo. En primer lugar, repetimos los cálculos de la prueba de Toeplitz para obtener la desigualdad

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^{N} a_m e^{imx} \sum_{n=1}^{N} b_n e^{inx} \right| dx \leq \left( \sum_{m=1}^{N} |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.14}$$

Por otra parte, usando el lema anterior, poniendo $c_k = a_m b_n$ y $\lambda_k = m+n$, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{m=1}^N a_m e^{imx}\sum_{n=1}^N b_n e^{inx}\right| dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N a_m b_n e^{i(m+n)x}\right| dx$$
$$\geq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\operatorname{sen}(\pi\alpha)\left|\sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N \frac{a_m b_n}{m+n-\alpha}\right|, \tag{5.15}$$

y basta combinar (5.14) y (5.15) para completar la demostración.

□

CAPÍTULO 6

# Desigualdad de Hardy

En la búsqueda de una nueva demostración del teorema de las series dobles de Hilbert, Hardy descubrió nuevas desigualdades. La desigualdad de Hardy fue publicada y demostrada por primera vez, al menos en su versión discreta e involucrando una constante no optima, en 1920 en una nota de Hardy y más tarde fue rectificada por Landau en 1926.

## 6.1. Versión discreta de la desigualdad de Hardy

**Teorema 6.1** (Desigualdad de Hardy)**.** *Sean* $1 < p < \infty$, $(a_n)$ *una sucesión de potencia p-ésima sumable y* $A_n = a_1 + \cdots + a_n$. *Entonces,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \tag{6.1}$$

*salvo si* $(a_n)$ *es idénticamente cero. La constante es la mejor posible.*

Antes de comenzar la demostración es interesante exponer el razonamiento heurístico que llevó a Hardy a probar su desigualdad. Para demostrar el teorema de las series dobles de Hilbert, Hardy pensó que las sumas de los elementos que están por arriba de la diagonal son esencialmente iguales a los que están por abajo; es decir, pensaba que bastaría estudiar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} b_n. \tag{6.2}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder llegamos a que la conclusión del teorema de Hilbert es que la suma de la izquierda converge siempre que $\sum_{m\geq 1} a_m^p$ y $\sum_{n\geq 1} b_n^q$ converjan. Pero Hardy pensó que quizás la convergencia de $\sum_{m\geq 1} a_m^p$ podría implicar la convergencia de $\sum_{n\geq 1} (A_n/n)^p$, en cuyo caso aplicando la desigualdad de Hölder al lado derecho de (6.2) nos conduciría a una demostración más directa del teorema de Hilbert, y de ahí surge la desigualdad de Hardy.

*Demostración.* La demostración que daremos del teorema se debe a Elliot[1].

Comienza con una observación que nos ayudará a establecer una desigualdad estricta, esto es, podemos suponer que $a_1 > 0$. En efecto, si el teorema ha sido probado en este caso, entonces

[1]Elliot, E.B. A simple extension of some recently proved facts as to convergency. *J. London Math. Soc.*, **1**, (1926), 93–96.

también se mantendrá para una sucesión $(b_n)$ con $b_1 = 0$, pues poniendo $a_n = b_{n+1}$, tendríamos

$$\begin{aligned}\left(\frac{b_2}{2}\right)^p + \left(\frac{b_2+b_3}{3}\right)^p + \cdots &= \left(\frac{a_1}{2}\right)^p + \left(\frac{a_1+a_2}{3}\right)^p + \cdots \\ &\leq \left(\frac{a_1}{1}\right)^p + \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^p + \cdots \\ &< \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_n a_n^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_n b_n^p\end{aligned}$$

Sea ahora $x_n = A_n/n$ y estimamos:

$$\begin{aligned}x_n^p - \frac{p}{p-1}x_n^{p-1}a_n &= x_n^p - \frac{p}{p-1}\left(nx_n - (n-1)x_{n-1}\right)x_n^{p-1} \\ &= \left(1 - \frac{np}{p-1}\right)x_n^p + \frac{(n-1)p}{p-1}x_n^{p-1}x_{n-1} \\ &\leq \left(1 - \frac{np}{p-1}\right)x_n^p + \frac{(n-1)p}{p-1}\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)x_n^p + \frac{1}{p}x_{n-1}^p\right) \qquad (6.3) \\ &= \frac{1}{p-1}\left((n-1)x_{n-1}^p - nx_n^p\right)\end{aligned}$$

donde en la desigualdad (6.3) hemos usado la desigualdad de Young. Luego sumamos en $n = 1, \ldots, N$ y observando que los términos de la derecha son sumas telescópicas concluimos que

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^p - \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N} x_n^{p-1}a_n \leq -\frac{Nx_n^p}{p-1} \leq 0.$$

Esto es

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^p \leq \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N} x_n^{p-1}a_n$$

La aplicación de la desigualdad de Hölder produce entonces

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^p \leq \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N} x_n^p\right)^{1-1/p}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p\right)^{1/p}. \qquad (6.4)$$

Uniendo los términos y elevando a $p$ tenemos la versión finita de la desigualdad (débil, pues no hemos probado que sea estricta):

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p.$$

Se deduce entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \qquad (6.5)$$

donde ambos lados de la desigualdad son finitos.

Finalmente, para ver que en realidad tenemos una desigualdad estricta, observemos que la igualdad en (6.4) forzaría a que $(x_n^p)$ y $(a_n^p)$ sean proporcionales. Pero tomamos $a_1 = x_1 > 0$, así que la constante de proporcionalidad tendría que ser 1. Esto es, tendríamos $a_n = A_n/n$ para todo $n$, lo cual puede ocurrir sólo si $(a_n)$ es constante. Y esto es consistente con la igualdad en (6.3), que implicaría que $(x_n)$ fuese constante. Obviamente esto es inconsistente con el hecho de que $(a_n)$ tenga potencia $p$-ésima sumable. Por lo tanto, (6.5) en realidad se mantiene con desigualdad estricta.

Para ver que $(p/(p-1))^p$ es la mejor constante consideraremos la sucesión $a_n = n^{-1/p-\varepsilon}$ con $0 < \varepsilon < 1 - 1/p$ y haremos $\varepsilon \to 0$. Detallemos los pasos. Dada la elección de $a_n$,

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{p}-\varepsilon} > \int_1^n x^{-\frac{1}{p}-\varepsilon}\,dx \\ &= \frac{1}{1-\dfrac{1}{p}-\varepsilon}\left(n^{1-\frac{1}{p}-\varepsilon}-1\right) > \frac{p}{p-1}\left(n^{1-\frac{1}{p}-\varepsilon}-1\right), \end{aligned}$$

y esto implica que

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p &> \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\varepsilon p}\left(1-\frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)^p \\ &\geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\varepsilon p}\left(1-\frac{p}{n^{1-\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right) \\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(n^{-1-\varepsilon p} - p n^{-2+\frac{1}{p}+\varepsilon-\varepsilon p}\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p &> \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p - p\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2-\frac{1}{p}-\varepsilon+\varepsilon p}}\right) \\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p - pC_{N,\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

cumpliéndose que $C_{N,\varepsilon} \to C$ cuando $N \to \infty$ cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ porque

$$2-\frac{1}{p}-\varepsilon+\varepsilon p > 1.$$

Por tanto,

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n^p} > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(1-\frac{pC_{N,\varepsilon}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n^p}\right) \to \left(\frac{p}{p-1}\right)^p,$$

ya que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^p = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{1+\varepsilon p}} \to \infty \quad \text{si } N \to \infty \text{ y } \varepsilon \to 0^+.$$

□

## 6.2. Versión continua de la desigualdad de Hardy

Enunciamos la versión integral en el siguiente teorema.

**Teorema 6.2** (Desigualdad de Hardy). *Sean $1 < p < \infty$, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función de potencia p-ésima integrable y $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Entonces,*

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p\,dx \tag{6.6}$$

*salvo si $f$ es idénticamente cero. La constante es la mejor posible.*

*Demostración.* Es esencialmente la dada por Hardy. Como en el caso anterior, establecemos primero una versión un poco más débil de la desigualdad (6.6). En concreto,

$$\int_0^T \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^T f(x)^p\,dx \tag{6.7}$$

para $T$ suficientemente grande. Para ello, observemos que si $f$ no es idénticamente cero, entonces $\int_0^\infty f^p > 0$ y, de aquí, $\int_0^T f^p > 0$ para $T$ suficientemente grande (esta expresión juega el papel de $\sum_{n=1}^N a_n^p$ en el caso anterior, y tendremos que dividir por ella, como hicimos antes.)

A continuación observamos que si $f$ tiene potencia $p$-ésima integrable, entonces es integrable en $[0,x]$ cualquiera que sea $x > 0$ y, además,

$$F(x)^p = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p \le x^{p-1} \int_0^x f(t)^p\,dt,$$

de acuerdo con la desigualdad de Hölder. En particular, $x^{1-p}F(x)^p \to 0$ si $x \to 0^+$, hecho que usaremos dentro de poco.

Veamos como probar entonces (6.7). Integramos por partes y aplicamos la desigualdad de Hölder.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx &= \frac{1}{1-p}\int_0^T F(x)^p d(x^{1-p}) \\
&= \frac{1}{1-p} x^{1-p}F(x)^p \Bigg|_{x=0}^{x=T} + \frac{p}{p-1}\int_0^T x^{1-p}F(x)^{p-1}f(x)\,dx \\
&= \frac{p}{p-1}\int_0^T \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)\,dx - \frac{1}{p-1}T^{1-p}F(T)^p & (6.8)\\
&\le \frac{p}{p-1}\int_0^T \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)\,dx & (6.9)\\
&\le \frac{p}{p-1}\left(\int_0^T f(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}}, & (6.10)
\end{aligned}$$

donde en (6.8) hemos usado que $x^{1-p}F(x)^p \to 0$ si $x \to 0^+$ y en (6.9) que $F \ge 0$.

Ya estamos igual que en la demostración anterior; $\int_0^T (F(x)/x)^p\,dx$ aparece en los dos lados de la desigualdad, así que simplificamos, elevamos a $p$ ambos miembros y concluimos lo deseado,

$$\int_0^T \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^T f(x)^p\,dx.$$

Dado que se cumple para $T$ suficientemente grande, hemos probado que

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p\,dx, \tag{6.11}$$

que es casi lo que queremos. Queda ver que la desigualdad estricta, lo que se deduce de un examen más minucioso de la aplicación de la desigualdad de Hölder que hemos hecho en (6.10). De hecho, la igualdad en (6.11) implicaría la igualdad en (6.10), y, por tanto, $(F(x)/x)^p$ y $f(x)^p$ serían proporcionales. Pero esto nos llevaría a que $f$ sería una potencia de $x$, lo cual contradice el hecho de ser $f^p$ integrable.

Al igual que en el caso anterior, la prueba de que la constante $(p/(p-1))^p$ es la mejor se deduce considerando $f(x) = x^{-\frac{1}{p}-\varepsilon}$, $x \geq 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

□

## 6.3. Desigualdades de Carleman, Knopp y Jensen

Comenzamos con una simple aplicación de la versión discreta de la desigualdad de Hardy.

**Corolario 6.3.** *Sea* $1 < p < \infty$ *y sea* $(a_n)$ *una sucesión no negativa. Entonces*

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{a_1^{1/p} + a_2^{1/p} + \cdots + a_n^{1/p}}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^\infty a_n.$$

Observemos que el lado izquierdo puede escribirse como $M_{1/p}^{(n)}(\mathbf{a})$, donde el superíndice $(n)$ nos indica simplemente que estamos sumando en $n$ términos. Recordamos también que

$$M_0^{(n)}(\mathbf{a}) = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq M_{1/p}^{(n)}(\mathbf{a}),$$

De hecho, fijado $n$, como vimos en el tercer capítulo de este trabajo, si $p \to \infty$, entonces $M_{1/p}^{(n)}(\mathbf{a})$ decrece a $M_0^{(n)}(\mathbf{a})$, mientras que la constante en la derecha tiende a $e$. Así, tenemos de nuevo otra demostración de la desigualdad de Carleman que vimos en el teorema **??** del capítulo 4, aunque sin probar la desigualdad estricta.

Podemos dar una versión integral de la desigualdad de Carleman. Para ello, escribimos esta desigualdad en la forma

$$\sum_{n=1}^\infty \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log a_k\right) < e \sum_{n=1}^\infty a_n,$$

que sugiere la siguiente desigualdad.

**Teorema 6.4** (Desigualdad de Knopp)**.** *Si* $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ *es integrable, entonces*

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log\left(f(t)\right) dt\right) dx < e \int_0^\infty f(x)\,dx$$

*a menos que f sea idénticamente nula.*

La demostración original de Knopp ponía 1 como límite inferior de las integrales involucradas, y esa desigualdad es falsa, como puede comprobarse directamente con $f(x) = 1/x^2$. No obstante, la demostración de Knopp es válida para probar la desigualdad correcta.

Antes de probar esta desigualdad, vamos a otra, que tiene su interés particular aparte de sernos necesaria en una de las pruebas que daremos.

**Teorema 6.5** (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea $f, w : I \to \mathbb{R}$ funciones integrables con $w(x) \geq 0$ y $\int_I w(x)\,dx = 1$. Sea $\Phi : J \to \mathbb{R}$ una función convexa definida en un intervalo $J$ conteniendo el rango de $f$. Entonces*

$$\Phi\left(\int_I f(x)w(x)\,dx\right) \leq \int_I \Phi(f(x))w(x)\,dx.$$

*Demostración.* Sean

$$\mu = \int_I f(x)w(x)\,dx, \qquad T(x) = \Phi(\mu) + m(x-\mu).$$

La convexidad de $\Phi$ implica que $T(x) \leq \Phi(x)$ para todo $x$ y $T(\mu) = \Phi(\mu)$. Entonces

$$\Phi(\mu) - \Phi(f(x)) \leq m(\mu - f(x)) \quad \forall x \in I.$$

Multiplicando por $w$ e integrando sobre $I$ tenemos que

$$\Phi(\mu) - \int_I \Phi(f(x))w(x)\,dx \leq m(\mu - \mu) = 0,$$

y concluimos la demostración.

□

Si elegimos $\Phi(x) = e^x$ tenemos el siguiente resultado, que se conoce como la versión integral de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica.

**Corolario 6.6.** *Sea $f, w : I \to (0, \infty)$ con $\int_I w(x)\,dx = 1$. Entonces*

$$\exp\left(\int_I \log\,(f(x))w(x)\,dx\right) \leq \int_I f(x)w(x)\,dx.$$

¿Por qué decimos versión integral? Pongámoslo de manifiesto. Dados $a_1, \ldots, a_n > 0$ y pesos no negativos $p_i$ tales que $p_1 + \cdots + p_n = 1$, definamos $f(x) = a_k$ y $w(x) = p_k$ en $[k-1, k)$. Es claro que

$$\int_{[0,n]} w(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{[k-1,k)} p_k\,dx = 1,$$

$$\int_{[0,n]} f(x)w(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{[k-1,k)} a_k p_k\,dx = \sum_{k=1}^{n} p_k a_k,$$

mientras que

$$\begin{aligned}\int_{[0,n]} \log(f(x))w(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{[k-1,k)} p_k \log a_k\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_k \log a_k = \log(a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n}),\end{aligned}$$

así que la desigualdad de Jensen para estas elecciones de $f$ y $w$ se reduce a la desigualdad de las medias aritmética y geométrica con pesos.

Vale la pena mencionar un caso especial de la desigualdad de Jensen:

**Corolario 6.7.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\Phi : J \to \mathbb{R}$ una función convexa definida en un intervalo $J$ conteniendo el rango de $f$. Entonces*

$$\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(f(t))\,dt.$$

*Si $\Phi$ es estrictamente convexa, entonces la igualdad solo puede darse si $f$ es constante.*

*Demostración.* Sólo necesitamos probar la última afirmación. Definimos, como antes,

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt, \quad T(x) = \Phi(\mu) + m(x-\mu).$$

Si $\Phi$ es estrictamente convexa, $\Phi(y) - \Phi(\mu) > m(y-\mu)$ para $y \neq \mu$. Si $f$ no fuera constante, tendríamos que $f(x) \neq \mu$ para todo $x$ en algún subintervalo $I$ de $[a,b]$. Por lo tanto,

$$\begin{cases} \Phi(f(x)) - \Phi(\mu) > m(f(x)-\mu), & \text{en } I \\ \Phi(f(x)) - \Phi(\mu) \geq m(f(x)-\mu), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se deduce entonces que

$$\int_a^b (\Phi(f(x)) - \Phi(\mu))\,dx > 0.$$

Recíprocamente, si

$$\int_a^b (\Phi(f(x)) - \Phi(\mu))\,dx = 0,$$

significaría que $\Phi(f(x)) = \Phi(\mu)$ para todo $x$. Pero las funciones estrictamente convexas pueden tomar el mismo valor a lo sumo dos veces, luego $f(x)$ toma como máximo dos valores. Como $f$ es continua, esto fuerza a que $f$ sea constante.

□

Necesitamos por último el siguiente resultado para probar la desigualdad de Knopp.

**Lema 6.8.** *Sea $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ una función integrable y sea*

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x y f(y)\,dy.$$

*Entonces*

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty g(x)\,dx$$

*Demostración.* Es simplemente cambiar el orden de la integración.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(x)\,dx &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\int_0^x yf(y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^\infty yf(y)\int_y^\infty \frac{1}{x^2}\,dx\,dy = \int_0^\infty f(y)\,dy\end{aligned}$$

□

Vistos estos resultados, ya podemos demostrar la desigualdad de Knopp

*Demostración de la desigualdad de Knopp.* Recuerdemos que una primitiva de $\log x$ es $x\log x - x$ y esta función se anula en el origen. Por tanto,

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log\left(f(y)\right)dy\right) &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log\left(yf(y)\right)dy - \frac{1}{x}\int_0^x \log y\,dy\right) \\ &= \frac{e}{x}\cdot\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log\left(y(f(y)\right)dy\right) \\ &\leq \frac{e}{x}\cdot\frac{1}{x}\int_0^x \exp\log\left(yf(y)\right)dy \qquad (6.12) \\ &= \frac{e}{x^2}\int_0^x yf(y)\,dy\end{aligned}$$

donde en (6.12), hemos aplicado la desigualdad de Jensen. Apelando a nuestro lema previo tenemos que

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \log\left(f(t)\right)dt\right\}dx \leq e\int_0^\infty f(x)\,dx. \qquad (6.13)$$

La igualdad en (6.13) también fuerza la igualdad en (6.12) para todo $x$, que a su vez hace que $\log\left(yf(y)\right)$ sea constante. Si $f$ no es idénticamente nula, significa que $f(y) = c/y$ para alguna constante $c > 0$. Esto es claramente inconsistente con el hecho de que $f$ es integrable en $(0,\infty)$. Luego tenemos desigualdad estricta en (6.13) salvo si $f = 0$.

□

Vamos a terminar esta sección probando de nuevo la desigualdad de Carleman, usando el corolario 6.6, donde probamos la versión integral de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica.

Hemos visto varias demostraciones de la desigualdad de Carleman. Un comentario que podemos hacer a la inspirada demostración de Pólya que vimos en la sección 4.3 es que no se preocupa de evaluar cada sumando de la serie, sino la suma de la serie. Podemos dar una cota de esos términos que, en definitiva, proporciona otra demostración de la desigualdad.

**Teorema 6.9.** *Dados cualesquiera números positivos $a_k$, con $k \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{e}{2n^2}\sum_{k=1}^n (2k-1)a_k, \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (6.14)$$

*Demostración.* Veamos como usar el análogo integral de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica. Al tener que estimar los términos $(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$ parece razonable considerar

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=a_k$ en el intervalo $(k-1,k]$ para $1\le k<\infty$. Esta elección pone cada sumando como una integral, como ya vimos anteriormente:

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log a_k\right)=\exp\left(\frac{1}{n}\int_0^n\log f(x)\,dx\right)=\exp\left(\int_0^1\log f(ny)\,dy\right).$$

Teniendo en cuenta que también es $e=\exp\left(-\int_0^1\log y\,dy\right)$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\exp\left(\int_0^1\log f(ny)\,dy\right)&=\exp\left(\int_0^1((\log(yf(ny))-\log y)\ dy\right)\\&=e\exp\left(\int_0^1\log f(ny)\,dy\right)\\&\le e\int_0^1 yf(ny)\,dy,\end{aligned}\tag{6.15}$$

habiendo aplicado en el último paso la versión integral de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica. Además, como

$$\int_0^1 yf(ny)\,dy=\sum_{k=0}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}ya_k\,dy=\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k,$$

queda demostrado el resultado.

□

La demostración de la desigualdad de Carleman se deduce entonces del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k&=\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)a_k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)a_k\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{k-\frac{1}{2}}a_k=2\sum_{k=1}^{\infty}a_k,\end{aligned}$$

pues reuniendo lo anterior tenemos entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\int_0^1\log f(ny)\,dy\right)\\&\le e\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 yf(ny)\,dy\\&=e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k\\&=e\sum_{n=1}^{\infty}a_n.\end{aligned}$$

## 6.4. Desigualdad de Carleson

Vamos a ver ahora la prueba de una desigualdad debida a Lennart Carleson (1954), que está relacionada en parte con la desigualdad de Jensen, por su estilo de demostración, similar en cierto sentido con la desigualdad de Hardy como veremos posteriormente. Además, esta desigualdad nos dará como consecuencia las desigualdades ya vistas de Carleman y Knopp.

**Teorema 6.10** (Desigualdad de Carleson)**.** *Sea* $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *una función convexa, derivable con* $\varphi(0) = 0$. *Entonces, cualquiera que sea* $-1 < \alpha < \infty$*, se cumple que*

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp\left(-\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx \leq e^{\alpha+1} \int_0^\infty x^\alpha \exp(-\varphi'(x))\, dx. \tag{6.16}$$

*La constante* $e^{\alpha+1}$ *no se puede mejorar.*

En principio, la convexidad de $\varphi$ es útil para estimar diferencias del tipo $\varphi(y+t) - \varphi(y)$. Sin embargo, éstas no parecen ayudar mucho para demostrar la desigualdad anterior. La idea de Carleson fue considerar diferencias de la forma $\varphi(py) - \varphi(y)$, donde $p > 1$ es un parámetro que se optimazará después.

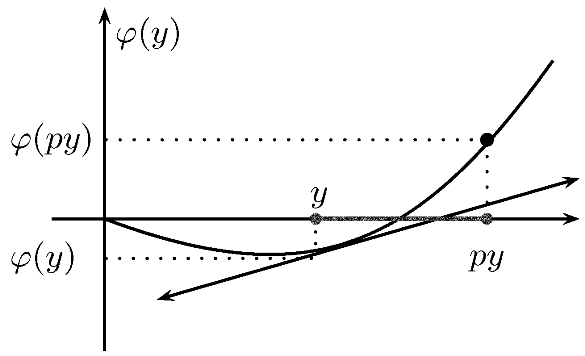



Figura 6.1: Diferencia $\varphi(py) - \varphi(y)$.

*Demostración.* Si $p > 1$, la convexidad de $\varphi$ implica que

$$\frac{\varphi(py) - \varphi(y)}{py - y} \leq \varphi'(y) \tag{6.17}$$

que podemos escribir como

$$-\varphi(py) \leq -\varphi(y) - (p-1)y\varphi'(y).$$

Vamos a estimar el lado izquierdo de (6.16) usando (6.17) y la desigualdad de Hölder con el conjugado de $p$ que es $q = p/(p-1)$.

$$\begin{aligned}
I_A = \int_0^A x^\alpha \exp\left(-\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx &= p^{\alpha+1}\int_0^{\frac{A}{p}} y^\alpha \exp\left(-\frac{\varphi(py)}{py}\right) dy \\
&\leq p^{\alpha+1}\int_0^{A} y^\alpha \exp\left(\frac{-\varphi(y)-(p-1)y\varphi'(y)}{py}\right) dy \\
&= p^{\alpha+1}\int_0^{A} y^{\alpha/p} \exp\left(-\frac{\varphi(y)}{py}\right)\cdot y^{\alpha/q}\exp\left(-\frac{\varphi'(y)}{q}\right) dy \\
&\leq p^{\alpha+1} I_A^{1/p}\left(\int_0^A y^\alpha \exp(-\varphi'(y))\, dy\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Dividimos por $I_A^{1/p}$ y elevamos a $q$ ambos miembros para obtener

$$\int_0^A x^\alpha \exp\left(-\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx \leq \left(p^{p/(p-1)}\right)^{\alpha+1}\int_0^A x^\alpha \exp(-\varphi'(x))\, dx.$$

Tenemos que

$$p^{p/(p-1)} = \left(\frac{q}{q-1}\right)^q = \left(1+\frac{1}{q-1}\right)^q \to e \quad \text{si} \quad q\to\infty,$$

así que terminamos la demostración haciendo primero $A \to \infty$ y luego $p \to 1^+$ (o lo que es igual $q \to \infty$).

□

Veamos como deducir la desigualdad de Carleman a continuación. Basta elegir $\varphi$ convenientemente. Sea $(a_n)$ una sucesión de números reales positivos. Si miramos la figura siguiente,

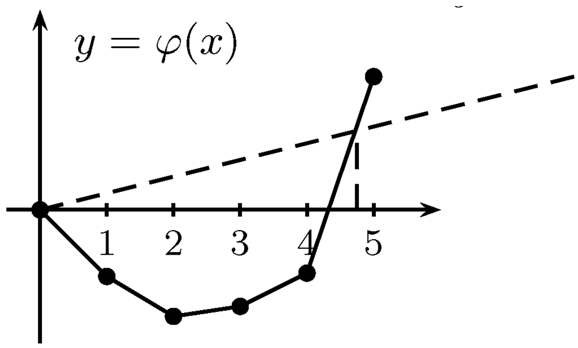



Figura 6.2: Elección de $\varphi$ para demostrar la desigualdad de Carleman.

en la que $y = \varphi(x)$ es la curva dada por la interpolación de los puntos $(n, s(n))$, donde

$$s(0) = 0, \quad s(n) = \log\frac{1}{a_1} + \log\frac{1}{a_2} + \cdots + \log\frac{1}{a_n},$$

es decir, $\varphi(n) = s_n$ para cada $n$ y $\varphi$ es lineal en cada subinetravlo $(n-1, n)$, en el intervalo $(n-1, n)$ tenemos que

$$\varphi'(x) = s_n - s_{n-1} = \log\frac{1}{a_n}.$$

Si suponemos que $a_n \geq a_{n+1}$, entonces $\varphi'$ es creciente y $\varphi$ convexa. Además, dado que $\varphi(0) = 0$, la pendiente de la cuerda del origen a $(x, \varphi(x))$, que es $\varphi(x)/x$ es monótona creciente. Además, si $n-1 < x < n$, se tiene que

$$\frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1}{a_k}. \tag{6.18}$$

La igualdad en (6.18) para todo $n$ y $x$ implicaría que la sucesión $(a_n)$ es constante, lo cual no puede ser si suponemos que la serie $\sum_n a_n$ es convergente. Así que la desigualdad debe ser estricta para ciertos $n$ y $x$. Tenemos por tanto que

$$\int_{n-1}^{n} \exp(-\varphi'(x))\, dx = a_k \tag{6.19}$$

y al ser $\varphi(x)/x$ creciente,

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = \exp\left(-\frac{\varphi(n)}{n}\right) \leq \int_{n-1}^{n} \exp\left(-\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx. \tag{6.20}$$

Sumando (6.19) y (6.20) y aplicando la desigualdad de Carleson, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} < \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx \leq e \int_0^{\infty} \exp(-\varphi'(x))\, dx = e \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

donde la desigualdad estricta sigue de los comentarios que hicimos anteriormente.

Hemos probado pues la desigualdad de Carleson pero con la hipótesis adicional de ser la sucesión $(a_n)$ decreciente. Pero esto no es problema como se deduce del siguiente lema.

**Lema 6.11.** *Sea $(a_n)$ una sucesión decreciente de números reales positivos y sea $(b_n)$ una reordenación cualquiera de la sucesión $(a_n)$. Entonces, cualquiera que sea $N \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{N} (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq \sum_{n=1}^{N} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}.$$

*Demostración.* Si $n$ es fijo, podemos suponer que $b_1, b_2, \ldots, b_n$ están ordenados en orden decreciente. En ese caso, es claro que se cumple que $b_1 \leq a_1$, $b_2 \leq a_2$, etc. Luego $b_1 b_2 \cdots b_n \leq a_1 a_2 \cdots a_n$ y se concluye que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n = e \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

pues al ser $a_n \geq 0$ la serie es incondicionalmente convergente, todas las reordenaciones suman lo mismo.

□

Terminamos viendo que la desigualdad de Carleson implica la de Knopp para funciones decrecientes. En ese caso, la funicón

$$\varphi(x) = -\int_0^x \log f(t)\, dt$$

es tal que

$$\varphi'(x) = -\log f(x)$$

es creciente, luego $\varphi$ es convexa.

**Corolario 6.12.** *Si* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *es decreciente, entonces*

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)\,dt\right\} dx < e\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

# Bibliografía


[1] Bullen, P. S. *Handbook of Means and their Inequalities*. Kluwer, Dordrecht, 2003.

[2] Carleman, T. Sur les fonctions quasi-analytiques. *Comptes Rendus du V^e Congres des Mathematiciens Scandinaves*, Helsingfors, (1922), 181–196.

[3] Carothers, N. L. *An Introduction to Inequalities.* Disponible en http://personal.bgsu.edu/~carother/Notes/IneqSu11-Final.pdf.

[4] Duncan, J., McGregor, C. M. Carleman's Inequality. *Amer. Math. Monthly* **110** (5), (2003), 424-431.

[5] Johansson, M., Persson, L.E., Wedestig, A. *Carleman's inequality - History, proofs and some new generalizations.*. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 4 (2003), no. 3, Article 53, 19 pp. (electronic only, http://www.emis.de/journals/JIPAM/images/135_02_JIPAM/135_02.pdf).

[6] Kufner, A., Maligranda, L., Persson, L. E. The prehistory of the Hardy inequality. *Amer. Math. Monthly* **113** (8), (2006), 715-732.

[7] Maligranda, L. The AM-GM Inequality is Equivalent to the Bernoulli Inequality. *Math. Intelligencer*, **34** (1), (2012), 1-2.

[8] Oleszkiewicz, K. An elementary Proof of Hilbert's Inequality. *Amer. Math. Monthly* **100** (3), (1993), 276-280.

[9] Pólya, G. With, or without motivation? *Amer. Math. Monthly* **56** (10), (1949), 684-691.

[10] Redheffer, R. Recurrent Inequalities. *Proc. London Math. Soc. (3)* **17**, (1967), 683-699.

[11] Steele, J. M. *The Cauchy-Schwarz master class. An introduction to the art of mathematical inequalities.* MAA Problem Books Series. Mathematical Association of America, Washington, DC; Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[12] Yongtao Li, Xian-Ming Gu. The Weighted AM-GM Inequality is Equivalent to the Hölder Inequality. Disponible en https://arxiv.org/abs/1504.02718v2