UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Grado en Matemáticas

Departamento de Análisis Matemático

Elementos aleatorios en espacios normados. Propiedades. Las leyes de los grandes números

Trabajo Fin de Grado

por

Alicia Pérez Coronilla

Director: Manuel Ordóñez Cabrera

Sevilla, junio 2017

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es dar una introducción a los elementos aleatorios con el fin de extender las clásicas leyes de los grandes números más allá de las variables aleatorias. Para ello, vemos algunas de sus propiedades más destacadas y definimos la esperanza a través de la integral de Pettis.

Posteriormente, probamos algunas leyes para elementos aleatorios, primero bajo hipótesis de idéntica distribución; después para elementos aleatorios tight y, por último, imponiendo condiciones geométricas sobre el espacio.

Abstract

The object of this work is to give an introduction to random elements in order to extend the classic laws of large numbers beyond random variables. For that, we will see some of its most important properties and define the expectation throught the Pettis integral.

After that, we prove some laws for random elements, first under same distribution hypothesis; then for random elements tight and, by last, imposing geometric conditions in the space.

Introducción

Las leyes de los grandes números juegan un papel muy importante en la investigación de la relación entre los aspectos teóricos y prácticos de la teoría de la probabilidad clásica y la estadística.

Las leyes de los grandes números se ocupan del estudio de la convergencia de la sucesión de medias aritméticas correspondiente a una sucesión de variables aleatorias, siendo el tipo de convergencia el que otorga el carácter de ley fuerte o ley débil. Si la convergencia es en probabilidad, entonces estaremos ante una ley débil, mientras que si hay convergencia casi segura, será una ley fuerte.

La reciente consideración de los procesos estocásticos como elementos aleatorios en espacios de funciones (es decir, variables aleatorias que toman valores en espacios de funciones cualesquiera) ha motivado el estudio de las leyes de los grandes números para elementos aleatorios.

El concepto de elemento aleatorio fue introducido por el matemático francés Maurice René Fréchet (1948), quien dijo «el desarrollo de la teoría de la probabilidad y la expansión de este área y de sus aplicaciones ha creado la necesidad de pasar de los esquemas donde los resultados (aleatorios) de los experimentos pueden ser descritos por un conjunto finito de números, a esquemas donde los resultados de experimentos representan, por ejemplo, vectores, funciones, procesos, campos, series, transformaciones y también conjuntos o colecciones de conjuntos». En los años 1953 y 1956, Mourier generalizaría la ley fuerte para variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas a elementos aleatorios en un espacio de Banach. Posteriormente, Beck (1963) conseguiría probar una extensión de la ley fuerte para elementos independientes, aunque no necesariamente con igual distribución, exigiendo condiciones de convexidad al espacio.

Hay muchos *teoremas límite* que pueden ser extendidos, con más o menos condiciones sobre los espacios, para elementos aleatorios. Sin embargo, no es el objetivo de este trabajo ser exhaustivo. Más bien, se dará una introducción detallada a los elementos aleatorios y sus propiedades y trataremos de exponer las generalizaciones de las leyes de los grandes números clásicas, donde haremos notar la inexorable unión entre el Análisis Matemático y la Teoría de la Probabilidad.

Para ello, en el capítulo 1 introducimos el concepto de elemento aleatorio y vemos algunas propiedades fundamentales y de tipo topológico. En el segundo capítulo mostramos las propiedades probabilísticas más importantes e introducimos el concepto de valor esperado usando la integral de Pettis. Por último, en el capítulo 3 generalizamos las leyes de los grandes números conocidas a espacios más generales bajo diferentes hipótesis: idéntica distribución, tightness y condiciones geométricas sobre el espacio.

También contaremos con dos apéndices. En el Apéndice A se encontrarán las definiciones y los resultados básicos de Análisis Funcional que usaremos a lo largo de las notas, mientras que el Apéndice B será un recordatorio de la teoría ya conocida sobre variables aleatorias.

Capítulo 1

Elementos aleatorios en espacios lineales normados

1.1. Motivación y definición de elemento aleatorio

Gerolamo Cardano (1501–1576) afirmó, aunque sin proporcionar pruebas matemáticas, que la precisión de las estadísticas empíricas tienden a mejorar con el número de intentos. Esta afirmación del matemático italiano fue formalizada siglos más tarde y se conocería con el nombre de Ley de los Grandes Números.

A Jacob Bernouilli le llevó más de 20 años desarrollar una prueba matemática suficientemente rigurosa de la ley para una variable aleatoria binaria. La prueba fue publicada en su *Ars Conjectandi (El arte de la conjetura)* en 1713 y Bernouilli le llamó su «Teorema dorado».

En 1837, Poisson la describió con más detalle bajo el nombre de *La loi des grands nombres (la ley de los grandes números)*. A partir de entonces, se conoce como la «ley de los grandes números». Después de que Bernoulli y Poisson publicasen sus trabajos, otros matemáticos también contribuyeron al refinamiento de la leyes, como Chebyshev, Markov, Borel, Cantelli, Kolmogorov y Khinchin, que finalmente proporcionó una prueba completa de la ley de los grandes números para variables arbitrarias.

A continuación, vamos a enunciar algunas de las leyes de los grandes números más relevantes para variables aleatorias con el fin de, una vez introducido el concepto de elemento aleatorio, ver cuándo podemos extenderlas a estos, bajo qué condiciones y, en caso de no poder hacerlo, mostrar los contraejemplos correspondientes.

Ley débil de los grandes números de Tchebycheff

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, con medias finitas (es decir, $E[X_n] < \infty$ para todo n) y varianzas uniformemente acotadas. Entonces $\dfrac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0$ cuando $n \to \infty$.

Ley débil de los grandes números de Khintchine

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E[X_1] < \infty$. Entonces $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{P} E[X_1]$.

Ley fuerte de los grandes números de Chung

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tales que $E[X_n] = 0$ para todo n. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos de forma que $a_n \uparrow \infty$. Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función positiva, par y continua que cuando $|x|$ es creciente verifica que $\dfrac{\varphi(x)}{|x|}$ es creciente y $\dfrac{\varphi(x)}{|x|^2}$ es decreciente. Si, además, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[\varphi(X_n)]}{\varphi(a_n)} < \infty$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n}$ converge casi

seguro. En consecuencia, se tiene que $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{c-s}{\longrightarrow} 0$
Vemos que la ley fuerte de Kolmogorov es un caso particular de la ley de Chung cuando $\varphi(x) = x^2$.

Ley fuerte de los grandes números de Kolmogorov
Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, con media finita. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números reales tal que $b_n \uparrow \infty$. Entonces, si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var[X_n]}{b_n^2} < \infty$, se tiene que $\frac{S_n - E[S_n]}{b_n} \overset{c-s}{\longrightarrow} 0$ cuando $n \to \infty$.

Ley fuerte de los grandes números de Kolmogorov para el caso de variables independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.)
Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. Entonces, $\frac{1}{n}S_n \overset{c-s}{\longrightarrow} \alpha$ un límite finito si, y solamente si, $E[X_1] < \infty$. En este caso se tiene que $\alpha = E[X_1]$.

A partir de ahora consideraremos el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y el espacio lineal normado X.

Definición 1.1.1. Una función $V : \Omega \longrightarrow X$ se dice que es un **elemento aleatorio** en X si V es $\mathcal{B}(X)$-medible, es decir, si para cada $B \in \mathcal{B}(X)$ se tiene

$$V^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : V(\omega) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{A}$$

Observación 1.1.1. Si en la definición de elemento aleatorio hacemos $X \equiv \mathbb{R}^n$ tenemos la definición de vector aleatorio y, haciendo $X \equiv \mathbb{R}$, la de variable aleatoria. Así, lo que se ha hecho es extender el concepto que ya conocíamos a espacios más generales.

A continuación, veremos algunas propiedades fundamentales de los elementos aleatorios. No obstante, para tener muchas de ellas, será necesario exigir ciertas características a X como, por ejemplo, la separabilidad. Una condición suficiente para tener esta hipótesis es que X posea una base de Schauder. Lo vemos con más detalle en la siguiente sección.

1.2. Bases de Schauder. Resultados.

Definición 1.2.1. Sea X un espacio lineal topológico. Se dice que una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una **base de Schauder** para X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{t_n\}$ de forma que

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k b_k$$

Se dirá que una base de Schauder $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **monótona** si la sucesión $\{\| \sum_{k=1}^{n} t_k b_k \|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente para cada sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Cuando un espacio X tiene base de Schauder $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se puede definir una sucesión de funcionales lineales $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, llamados **funcionales coordenada** para la base $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, del siguiente modo: para cada $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k b_k \in X$ se define

$$\begin{aligned} f_k : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_k(x) = t_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Los funcionales coordenada dependen de la base y **no son necesariamente continuos.** Sin embargo, en un espacio de Banach sí se tiene continuidad para los funcionales coordenada.

Definición 1.2.2. Se llama **sucesión de operadores suma parcial** para la base $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$\begin{aligned} U_n : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) b_k \text{ para cada } x \in X \end{aligned}$$

Teorema 1.2.1. *a) Si X es un espacio lineal normado que tiene una base monótona $\{b_n\}$, entonces $\|U_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $\|U_n(x)\| \leq \|x\|$ para cada $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.*
b) Si X es de Banach que tiene una base de Schauder $\{b_n\}$, entonces existe una constante $m \geq 0$ tal que $\|U_n(x)\| \leq m\|x\|$ para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación 1.2.1. Nótese que en la definición de base de Schauder interviene el límite, que es un concepto topológico. Esto marca la importancia de considerar las bases de Schauder frente a las clásicas bases de Hamel, puramente algebraicas.

Teorema 1.2.2. *Sea X un espacio normado con base de Schauder. Entonces X es separable.*

La proposición siguiente será de utilidad para conseguir las hipótesis necesarias de algunos resultados:

Proposición 1.2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico separable. Entonces, para cada $\lambda > 0$ existe una función $T : X \longrightarrow X$ medible-Borel numerablemente valuada tal que $d(T(x), x) < \lambda$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Según la hipótesis de separabilidad, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ subconjunto denso en X.
Consideremos ahora los conjuntos: $E_1 = B(x_1, \lambda)$ y $E_n = B(x_n, \lambda) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \lambda)$ siendo $B(x_i, \lambda) = \{x \in X : d(x, x_i) < \lambda\}$.
Tenemos así una colección numerable $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que recubre a X y, además,

$E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
Podemos definir $T(x) = x_1$ si $x \in E_1$ y $T(x) = x_n$ si $x \in E_n$ $\forall n \geq 2$. Veamos que T verifica las condiciones del enunciado.
T es medible-Borel, pues dado $B \in \mathcal{B}_X$, si $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ son aquellos elementos de $\{x_n\}$ que están en B, entonces se tiene $T^{-1}(B) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \in \mathcal{B}_X$, ya que cada $E_n \in \mathcal{B}_X$.
Además, dado $x \in X$, siempre tenemos que $x \in E_n$ para algún n≥1, por lo que $T(x) = x_n$ y $d(T(x), x) = d(x_n, x) < \lambda$.

□

A continuación, vamos a ver algunas propiedades de elementos aleatorios que constituyen una generalización de las propiedades de las variables aleatorias.

1.3. Propiedades básicas de los elementos aleatorios

Lema 1.3.1. *Sea V un elemento aleatorio (e.a.) en el espacio lineal normado (e.l.n.) X. Sea $T : X \longrightarrow Y$ una función medible-Borel, siendo Y otro e.l.n. Entonces, $T(V) \equiv T \circ V$ es un e.a. en Y.*

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}(Y)$. Entonces, por ser T medible-Borel se sigue que $T^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$.
Por consiguiente, $(T(V))^{-1} \equiv (T \circ V)^{-1} = V^{-1}(\underbrace{T^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}(X)}) \in \mathcal{A}$ por ser V elemento aleatorio.

□

Proposición 1.3.1. *Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ una sucesión de conjuntos disjuntos de forma que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de X y*

$V : \Omega \longrightarrow X$ tal que $V(\omega) = x_n$ cuando $\omega \in E_n$, entonces V es un elemento aleatorio en X.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}(X)$ y sea $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ el subconjunto de elementos de $\{x_n\}$ que están en B. Entonces, tenemos que $V^{-1}(B) = \bigcup_{k\geq 1} E_{n_k} \in \mathcal{A} \Rightarrow V$ es un elemento aleatorio en X.

□

Proposición 1.3.2. *Sea $\{V_n\}$ una sucesión de e.a. en un e.l.n. X de forma que $V_n(\omega) \longrightarrow V(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$. Entonces V es un elemento aleatorio en X.*

Demostración. Para probar que V es un elemento aleatorio vamos a ver que V es medible-Borel. Para ello, bastará probar que $V^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ para todo $C \subseteq X$ cerrado, ya que podemos generar $\mathcal{B}_X$ con los conjuntos cerrados.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $C_k = \bigcup_{x\in C} B(x, \frac{1}{k})$ con $B(x, \frac{1}{k}) = \{y \in X : \|x-y\| < \frac{1}{k}\}$.
Para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que C_k es abierto (pues es unión de abiertos). Además:

$$V^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega : V(\omega) \in C\} = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\longrightarrow\infty} V_n(\omega) \in C\}$$

Es decir, usando la definición de límite, tenemos que $\omega \in V^{-1}(C) \Leftrightarrow$
$\forall k \in \mathbb{N}$ (que es lo mismo que decir dado $\varepsilon = \frac{1}{k}$) $\exists m \in N$ tal que
$\forall n \geq m$ se tiene que $V_n(\omega) \in B(x, \frac{1}{k})$ para algún $x \in C$.
Esto puede reescribirse de la siguiente manera:

$$V^{-1}(C) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} V_n^{-1}(C_k)$$

De esta expresión deducimos que V es un elemento aleatorio, ya que cada C_k es abierto en X y V_n es elemento aleatorio en X para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Proposición 1.3.3. *Sea X un e.l.n. separable. Una aplicación $V : \Omega \longrightarrow X$ es un elemento aleatorio si, y solamente si, existe una sucesión $\{V_n\}$ de elementos numerablemente valuados de forma que $V_n \longrightarrow V$ uniformemente.*

Demostración. Veámoslo por doble implicación.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Si $V_n \longrightarrow V$, ya sabemos por la proposición anterior que V es un elemento aleatorio.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que $V : \Omega \longrightarrow X$ es un e.a.

Como X es un espacio separable, por la proposición 1.2.1 sabemos que para cada $n \geq 1$ existe una función $T_n : X \longrightarrow X$ medible-Borel y numerablemente valuada tal que $d(T_n(x), x) < \dfrac{1}{n}$ para todo $x \in X$.

Definamos $V_n = T_n(V) = T_n \circ V$. Por el lema 1.3.1, sabemos que para cada $n \geq 1$ $V_n : \Omega \longrightarrow X$ es un elemento aleatorio. Además, se tiene que $\|V_n(\omega) - V(\omega)\| = \|T_n(V(\omega)) - V(\omega)\| < \dfrac{1}{n}$ para todo $\omega \in \Omega$.

Luego, $V_n \longrightarrow V$ uniformemente.

□

Proposición 1.3.4. *Sea V un elemento aleatorio en un espacio lineal normado X y sea A una variable aleatoria. Entonces, AV es un elemento aleatorio en X.*

Demostración. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de variables aleatorias numerablemente valuadas tal que $A_n \longrightarrow A$ (sabemos que tal sucesión existe por la proposición anterior, pues si A es v.a. también es un e.a.). Por continuidad de la multiplicación por escalares tenemos que, para cada n, A_nV es un elemento aleatorio en X.

Como $A_nV \longrightarrow AV$, por la proposición anterior tenemos que AV es un elemento aleatorio en X.

□

1.4. Propiedades topológicas

Hasta ahora hemos podido generalizar muchas características de variables aleatorias a elementos aleatorios sin mucha dificultad. Sin embargo, no todas las propiedades pueden ser extendidas. Un claro ejemplo es que, trivialmente teníamos que la suma de variables aleatorias era una nueva variable aleatoria pero, si X no es lineal, la suma de elementos aleatorios puede que ni siquiera esté definida. A continuación, vamos a ver algunas de las propiedades topológicas más importantes de los elementos aleatorios.

Teorema 1.4.1. *Sea X un espacio lineal normado. Sea V un elemento aleatorio en X. Entonces, se tiene que:*
a) $\|V\|$ es una variable aleatoria.
b) Si $f \in X^*$, $f(V)$ es una variable aleatoria.

Demostración. La prueba es inmediata si tenemos en cuenta que las aplicaciones norma $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y, en consecuencia, medibles-Borel. Luego, aplicando el lema 1.3.1 tenemos que $\|V\|$ y $f(V)$ son variables aleatorias.

$\square$

Este teorema será muy utilizado ya que, muchos de los resultados que vamos a probar para elementos aleatorios dependen del hecho de que si V es un elemento aleatorio, entonces $\|V\|$ es una variable aleatoria.

También tiene gran importancia el siguiente resultado, pues nos da una caracterización de elemento aleatorio en espacios lineales normados y separables.

Teorema 1.4.2. *Sea X un espacio lineal normado separable. Entonces, una función $V : \Omega \longrightarrow X$ es un elemento aleatorio si, y solamente si, para cada $f \in X^*$ se tiene que $f(V)$ es una variable aleatoria.*

Demostración. La condición necesaria la tenemos por el teorema 1.4.1. Veamos la condición suficiente.
Consideremos el siguiente esquema.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{V} & X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ V^{-1}(f^{-1}(B)) & \xleftarrow{V^{-1}} & f^{-1}(B) & \xleftarrow{f^{-1}} & B \end{array}$$

Sea $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Entonces se tiene que $V^{-1}(f^{-1}(B)) \equiv (f(V))^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, pues suponemos que $f(V)$ es una variable alatoria para toda $f \in X^*$. Luego, si consideramos $\mathcal{B}(C) = \sigma\{f^{-1}(B) : f \in X^* \ , B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, para ver que V es un elemento aleatorio bastará probar que $\mathcal{B}(C) \equiv \mathcal{B}(X)$.

$\boxed{\subseteq}$ Es trivial, por definición de $\mathcal{B}(C)$.

$\boxed{\supseteq}$ Como X es separable, sabemos que existe un subconjunto denso numerable $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$.
Por el corolario del teorema de Hahn-Banach (ver apéndice A), sabemos que existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\|f_n\| = 1$ y $f_n(x_n) = \|x_n\| \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Sea $r > 0$. Definimos los conjuntos:

$$C_1 = \{x \in X : \|x\| \leq r\} = \overline{B}(0, r)$$
$$C_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \leq r\} = f_n^{-1} \underbrace{(-\infty, r]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(C)$$

Si $x \in C_1 \Rightarrow \|x\| \leq r$, por lo que $|f_n(x)| \leq \|f_n\|\|x\| = \|x\| \leq r \Rightarrow x \in C_2$.
Es decir, $C_1 \subseteq C_2$.
Sea ahora $x \in X : \|x\| > r$. Como $\{x_n\}$ es denso en X, entonces sabemos que existe $x_k : \|x - x_k\| < \frac{1}{2}(\|x\| - r)$. Así:
$\|x_k\| = \|x - (x - x_k)\| \geq \|x\| - \|x - x_k\| > \|x\| - \frac{1}{2}(\|x\| - r) = \frac{1}{2}(\|x\| + r)$
Además:

$$|f_k(x) - \|x_k\|| = |f_k(x) - f_k(x_k)| = |f_k(x - x_k)| \leq \|f_k\|\|x - x_k\| < \frac{1}{2}(\|x\| - r)$$

Como consecuencia de estas dos desigualdades, tenemos que:

$$f_k(x) = \|x_k\| - (\|x_k\| - f_k(x)) \geq \|x_k\| - |\|x_k\| - f_k(x)| > \frac{1}{2}(\|x\| + r) - \frac{1}{2}(\|x\| - r) = r$$

Luego, hemos probado que si $x \notin C_1 \Rightarrow x \notin C_2$. Es decir, $C_2 \subseteq C_1$.
Tenemos entonces que $C_2 = C_1$. Como $C_2 \in \mathcal{B}(C)$, también se tiene que $C_1 \in \mathcal{B}(C)$.
Es decir, para $r > 0$, $\overline{B}(0, r) \in \mathcal{B}(C)$. Como f es lineal (pues $f \in X^*$), $\mathcal{B}(C)$ es invariante por traslaciones, por lo que $\overline{B}(a, r) \in \mathcal{B}(C)$ para $a \in X$ y $r > 0$.
Entonces, ya tenemos que $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{B}(C)$ pues, por definición, $B(X)$ es la mínima σ-álgebra que contiene a tales bolas. Luego $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(C)$.

$\square$

La separabilidad del espacio X ha sido esencial a la hora de realizar la prueba. Veamos que, en la práctica, también es necesaria esta hipótesis. Para ello, consideremos X un espacio lineal, normado y separable, V y Z dos elementos aleatorios en X y $f \in X^*$.
Por el teorema que acabamos de probar sabemos que $f(V)$ y $f(Z)$ son variables aleatorias $\Rightarrow f(V) + f(Z)$ también es una variable aleatoria.
Si ahora usamos que f es una aplicación lineal, entonces $f(V) + f(Z) = f(V + Z)$ es una variable aleatoria. Aplicando el mismo teorema en la otra dirección tenemos que $V + Z$ es un elemento aleatorio en X.

Es decir, **para espacios separables tenemos que la suma de dos elementos aleatorios es un nuevo elemento aleatorio**. Sin embargo, la suma de dos elementos aleatorios en un espacio lineal normado no separable no tiene por qué estar definida, como se pone de manifiesto en **Taylor** [10].

Capítulo 2

Propiedades probabilísticas. Valor esperado

Un elemento aleatorio en un espacio topológico induce una medida de probabilidad en sus subconjuntos de Borel de manera análoga a como se obtenía la probabilidad inducida por las variables aleatorias. En este capítulo diremos qué se entiende por elementos aleatorios independientes y con igual distribución y veremos cómo podemos extender las propiedades que se tenían para variables aleatorias independientes y/o idénticamente distribuidas a los elementos aleatorios con estas mismas características.

Finalmente, definiremos la esperanza matemática o valor esperado de un elemento aleatorio. Para ello, necesitaremos introducir un nuevo concepto de integral: la integral de Pettis.

2.1. Propiedades probabilísticas de los elementos aleatorios

Definición 2.1.1. Sean V y Z dos elementos aleatorios sobre X. Diremos que V y Z son **idénticamente distribuidos** si $P[V \in B] = P[Z \in B]$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. Es decir, si inducen la misma medida de probabilidad.
Se dirá que una familia de elementos aleatorios está idénticamente distribuida si cada par de elementos aleatorios que la forman lo están.

Definición 2.1.2. Dado un conjunto finito $\{V_1, ..., V_n\}$ de elementos aleatorios sobre X, diremos que son independientes si para cada $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}(X)$ se verifica que $P[\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in B_i] = \prod_{i=1}^{n} P[V_i \in B_i]$.
Una familia de elementos aleatorios en X se dirá que es independiente si cada subconjunto finito de ella lo es.

Definición 2.1.3. Sea $\mathcal{C}$ una subfamilia de $\mathcal{B}(X)$ y sean P y Q dos medidas de probabilidad definidas sobre $\mathcal{B}(X)$. Se dice que $\mathcal{C}$ es una **familia de unicidad o clase determinante** para $\mathcal{B}(X)$ si $P[D] = Q[D]$ para todo $D \in \mathcal{C}$ implica que $P \equiv Q$ sobre $\mathcal{B}(X)$.

En relación a esta última definición se tienen dos resultados que no probaremos pero que nos ayudarán a demostrar algunas propiedades probabilísticas de los elementos aleatorios.

Lema 2.1.1. *1) Si $\mathcal{C}$ es un álgebra y $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(X)$, entonces $\mathcal{C}$ es una clase determinante para $\mathcal{B}(X)$.* (**Halmos** [5])
2) Si X es un espacio lineal normado separable, entonces

$$\mathcal{C} = \{\{x : f(x) < t\} : f \in X^*, t \in \mathbb{R}\}$$

es una clase determinante para $\mathcal{B}(X)$. (**Grenander** [4])

Proposición 2.1.1. *a) Sean $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de elementos aleatorios independientes en X y $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de funciones medibles-Borel del espacio topológico X en el espacio topológico Y. Entonces, $\{T_\alpha(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es una familia de elementos aleatorios independientes en Y.*
b) Sean $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en X y $T : X \longrightarrow Y$ una función medible-Borel. Entonces $\{T(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es una familia de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en Y.

Demostración. Aplicando el lema 1.3.1 ya tenemos que $T_\alpha(V_\alpha)$ es un elemento aleatorio en Y $\forall\alpha \in A$.
a) Sean $\alpha_i \in A$ y $B_i \in \mathcal{B}(Y)$, $i \in \{1..,n\}$. Entonces:
$P[\bigcap_{i=1}^{n} T_{\alpha_i}(V_{\alpha_i}) \in B_i] = P[\bigcap_{i=1}^{n}(V_{\alpha_i}) \in T_{\alpha_i}^{-1}(B_i)] =$ [por la independencia de V_α]
$= \prod_{i=1}^{n} P[(V_{\alpha_i}) \in T_{\alpha_i}^{-1}(B_i)] = \prod_{i=1}^{n} P[T_{\alpha_i}(V_{\alpha_i}) \in B_i]$
Luego ya tenemos la independencia para $\{T_\alpha(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$.
b) Análogamente, si consideramos $B \in B(Y)$ y $\alpha_i, \alpha_j \in A$ con $i \neq j$:
$P[T(V_{\alpha_i}) \in B] = P[V_{\alpha_i} \in T^{-1}(B)] = P[V_{\alpha_j} \in T^{-1}(B)] = P[T(V_{\alpha_j}) \in B]$
Con esto, probamos que $\{T(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es una familia de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en Y.

□

Proposición 2.1.2. *Sea X un espacio lineal normado separable. Se tiene que los elementos aleatorios V y Z en X son idénticamente distribuidos si, y solamente si, $f(V)$ y $f(Z)$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas para toda $f \in X^*$.*

Demostración. Por doble implicación:
$\boxed{\Longrightarrow}$ Sean V y Z dos elementos aleatorios con idéntica distribución. Como $f \in X^*$, entonces f es continua y, por tanto, medible-Borel. Así, aplicando la proposición anterior tenemos que $f(V)$ y $f(Z)$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas. No necesita, por tanto, la hipótesis de separabilidad.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que para cada $f \in X^*$ se tiene que $f(V)$ y $f(Z)$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas, es decir, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $\forall f \in X^*$ se verifica que $P[f(V) \in B] = P[f(Z) \in B]$. Se tiene que:
$P_V[\{x : f(x) < t\}] = P[V \in \{x : f(x) < t\}] = P[V \in f^{-1}(-\infty, t)] =$
$= P[f(V) \in (-\infty, t)] = P[f(Z) \in (-\infty, t)] = P[Z \in f^{-1}(-\infty, t)] =$
$= P[Z \in \{x : f(x) < t\}] = P_Z[\{x : f(x) < t\}]$
O sea, tenemos que $P_V = P_Z$ para $\mathcal{C} = \{\{x : f(x) < t\} : f \in X^*, t \in \mathbb{R}\}$ que, por el lema 2.1.1, sabemos que es clase determinante para $\mathcal{B}(X)$. Se sigue entonces que V y Z son elementos aleatorios idénticamente distribuidos en X.

$\square$

El resultado que acabamos de probar nos proporciona una caracterización de elementos aleatorios idénticamente distribuidos para espacios separables mientras que, en el siguiente, la tendremos para elementos aleatorios independientes.

Proposición 2.1.3. *Sea X un espacio lineal normado separable. Se tiene que los elementos aleatorios V y Z en X son independientes si, y solamente si, $f(V)$ y $g(Z)$ son variables aleatorias independientes para cada $f, g \in X^*$.*

Demostración. Lo vemos por doble implicación:
$\boxed{\Longrightarrow}$ Es inmediata usando la proposición 2.1.1. En consecuencia, no precisa la hipótesis de separabilidad.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Para cada $B \in \mathcal{B}(X)$, fijamos $f \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$ y definimos:

$$P_{t,f}(B) = \frac{P[[V \in \{x : f(x) < t\}] \bigcap [Z \in B]]}{P[V \in \{x : f(x) < t\}]} \text{ (si } P[V \in \{x : f(x) < t\}] > 0)$$

Si tomamos $B = \{\{x : g(x) < s\} : g \in X^*, s \in \mathbb{R}\}$, al estar bajo la hipótesis de independencia de $f(V)$ y $g(Z)$ para todos $f, g \in X^*$, tendríamos que:

$$P_{t,f}(B) = \frac{P[[V \in \{x : f(x) < t\}] \bigcap [Z \in B]]}{P[V \in \{x : f(x) < t\}]} =$$

$$= \frac{P[V \in \{x : f(x) < t\}] \bigcap P[Z \in \{\{x : g(x) < s\} : g \in X^*, s \in \mathbb{R}\}]}{P[V \in \{x : f(x) < t\}]} =$$

$= P[Z \in \{ x : g(x) < s\} : g \in X^*, s \in \mathbb{R}\}\}] \equiv P_Z$ sobre los conjuntos $\{\{x : g(x) < s\} : g \in X^*, s \in \mathbb{R}\}$ que, al ser una clase determinante para $\mathcal{B}(X)$ (lema 2.1.1), nos permite concluir que $P_{t,f} = P_Z$ sobre $\mathcal{B}(X)$.
Por tanto, para cada $B \in \mathcal{B}(X)$, $f \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$, se tiene que
$P_Z[B]P_V[\{x : f(x) < t\}] = P[V \in \{x : f(x) < t\}] \bigcap P[Z \in B]$.
Así, la expresión es cierta también para el caso $P[V \in \{x : f(x) < t\}] = 0$.
Sea ahora $B_1 \in \mathcal{B}(X)$ arbitrario pero fijo y definimos para cada $B \in \mathcal{B}(X)$

$P_1[B] = \dfrac{P[[V \in B] \bigcap [Z \in B_1]]}{P[Z \in B_1]}$ (suponiendo $P[Z \in B_1] > 0$). Por la igualdad obtenidad anteriormente tenemos que:

$$P_1[\{x : f(x) < t\}] = \frac{P[V \in \{x : f(x) < t\}]P[Z \in B_1]}{P_Z[B_1]} = P_V[\{x : f(x) < t\}]$$

Es decir, llegamos a que $P_1 \equiv P_V$ en $\mathcal{B}(X)$ (ya que coinciden para los conjuntos $\{x : f(x) < t\}$ para todo $f \in X^*$ y para todo $t \in \mathbb{R}$).
Luego, $P_V[B] = \dfrac{P[[V \in B] \bigcap [Z \in B_1]]}{P_Z[B_1]}$ para todo $B, B_1 \in B(X) \Longrightarrow$
$P_V[B]P_Z[B_1] = P[[V \in B] \bigcap [Z \in B_1]]$ para todo $B, B_1 \in B(X)$, pues $B, B_1 \in \mathcal{B}(X)$ eran fijos pero arbitrarios.
Por tanto, tenemos que V y Z son elementos aleatorios independientes en X.

$\square$

Observación 2.1.1. Aunque no se ha mencionado de forma explícita, en el teorema anterior es fundamental que X sea separable para probar la condición suficiente, ya que es una hipótesis del lema 2.1.1 y sin este resultado no tendríamos que los conjuntos que tomamos son clase determinante.

Las dos últimas proposiciones son muy parecidas en las hipótesis, pero conviene notar la diferencia entre ambas. El hecho de que $f(V)$ y $f(Z)$ sean independientes para cada $f \in X^*$ no es suficiente para que los elementos aleatorios V y Z lo sean. Vamos a verlo con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.1. Sean A_1,A_2 dos variables aleatorias independientes que siguen una distribución $N(0,1)$. A partir de ellas, definimos los elementos aleatorios $V = (A_1, A_2)$ y $Z = (A_2, -A_1)$.
Cada $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ es de la forma $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Así, $f(V) = aA_1 + bA_2$ y $f(Z) = aA_2 - bA_1$. Utilizando las propiedades de la normal, tenemos que $f(V), f(Z) \sim N(0, a^2 + b^2)$ independientes.
Sin embargo, si tomamos las funciones $g, h \in (\mathbb{R}^2)^*$ dadas por $g(x_1, x_2) = x_1$ y $h(x_1, x_2) = x_2$ se tiene que $g(Z) = h(V) = A_2$ que, obviamente, no son variables aleatorias independientes. Aplicando el resultado que acabamos de probar tenemos que V y Z no son elementos aleatorios independientes en $\mathbb{R}^2$.

En la proposición 2.1.3 hemos probado una caracterización de la independencia en función del espacio dual. Si X es un espacio lineal normado con base de Schauder, podemos conseguir una caracterización de la independencia en términos de los funcionales coordenada.

Proposición 2.1.4. *Sea X un espacio lineal normado con base de Schauder $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y funcionales coordenada medibles-Borel $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Se tiene que los elementos aleatorios V y Z son independientes en X si, y solamente si, los vectores aleatorios $(f_1(V), ..., f_n(V))$ y $(f_1(Z), ..., f_n(Z))$ son independientes para cada $n = 1, 2, ...$*

Demostración. Al ser $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ una función medible-Borel, ya tenemos la implicación 'solamente si'.

Supongamos ahora que $(f_1(V), ..., f_n(V))$ y $(f_1(Z), ..., f_n(Z))$ son independientes para cada $n = 1, 2, ...$ Para cada $f, g \in X^*$ y para cada n se tiene que $f(U_n(V)) = f(\sum_{k=1}^{n} f_k(V)b_k) = \sum_{k=1}^{n} f_k(V)f(b_k)$ es independiente de $f(U_n(Z)) = \sum_{k_1}^{n} f_k(Z)g(b_k)$.

Dado que $\lim_{n\to\infty} U_n(x) = x$ para cada $x \in X$, entonces: $\lim_{n\to\infty} f(U_n(V)) = f(\lim_{n\to\infty} U_n(V)) = f(V)$ y $\lim_{n\to\infty} g(U_n(Z)) = g(\lim_{n\to\infty} U_n(Z)) = f(Z)$.

Obsérvese que hemos podido intercambiar el límite gracias a la continuidad de f y g, que se tiene al ser $f, g \in X^*$. Así:

$E[e^{itf(V)+isg(Z)}] = E[\lim_{n\to\infty} e^{itf(U_n(V))+isg(U_n(Z))}] = \lim_{n\to\infty} E[e^{itf(U_n(V))+isg(U_n(Z))}] =$

$= \lim_{n\to\infty} E[e^{itf(U_n(V))}] \lim_{n\to\infty} E[e^{isg(U_n(Z))}] = E[\lim_{n\to\infty} e^{itf(U_n(V))}]E[\lim_{n\to\infty} e^{isg(U_n(Z))}] =$

$= E[e^{itf(V)}]E[e^{isg(Z)}]$ para cada $t, s \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(V)$ y $g(Z)$ son independientes para cada $f, g \in X^*$. Así, aplicando la proposición 2.1.3 tenemos que V y Z son elementos aleatorios independientes en X.

$\square$

2.2. Esperanza de un elemento aleatorio

Definición 2.2.1. Sean X un espacio topológico lineal y V un elemento aleatorio en X. Diremos que V tiene **esperanza o valor esperado** $E[V]$ si existe un elemento $E[V] \in X$ que cumple que:

$$f(E[V]) = E[f(V)] = \int_{\Omega} f(V)dP \ < \infty$$

para cualquier función $f \in X^*$.

Observación 2.2.1. Nótese que, así como se define la esperanza de una variable aleatoria a través de la integral de Lebesgue, aquí estamos definiendo la esperanza de un elemento aleatorio mediante la integral de Pettis, también conocida como integral débil en contraste con la integral fuerte o de Bochner.

Definición 2.2.2. Sean X un espacio lineal normado y V un elemento aleatorio en X con valor esperado $E[V]$. Se define la **varianza** de V como $\sigma_V^2 = E[\ \|V - E[V]\|\ ]$. Se define la **desviación típica o estándar** de V como $\sigma_V = +\sqrt{\sigma_V^2}$.

Lema 2.2.1. *Sea X un espacio topológico de forma que X^* separa puntos de X. Entonces, el valor esperado es único.*

Demostración. Supongamos que existe $E[V] = x_0 \in X$. Si $x_1 \in X$ cumple la definición, entonces:

$$f(x_1) = E[f(V)] = f(x_0)$$

de lo que sigue que $f(x_0) = f(x_1) \Rightarrow f(x_0 - x_1) = 0$.
Como tenemos que X^* es una familia de funciones que separa los puntos de X, si $x \neq 0$, existe $f \in X^*$ con $f(x) \neq 0$, de lo que se deduce que $x_0 - x_1 = 0$. Es decir, $x_0 = x_1$ y, por tanto, en caso de existir, el valor esperado es único. □

El valor esperado no siempre tiene por qué estar definido. El siguiente teorema nos da una condición suficiente para la existencia de la esperanza de un elemento aleatorio.

Teorema 2.2.1. *Sean X un espacio de Banach separable y V un elemento aleatorio en X. Si $E[\|V\|] < \infty$, entonces existe $E[V]$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que V es numerablemente valuado y toma valores reales $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset X$. Como tenemos por hipótesis que $E[\|V\|] < \infty$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| P[V = a_i]$ converge. Es decir, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i P[V = a_i]$ es absolutamente convergente y, como X es Banach, el límite

x es un elemento de X. Así, dada $f \in X^*$ cualquiera:

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{\infty} a_i P[V = a_i]) = f(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i P[V = a_i]) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i) P[V = a_i] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i) P[V = a_i] = E[f(V)]$$

Luego, por definición, tenemos que $x = E[V]$.

Veamos ahora el caso general.

Sea V un elemento aleatorio cualquiera en X. Por la proposición 1.3.3 sabemos que existe una sucesión $\{V_n\}$ de elementos aleatorios numerablemente valuados de forma que $V_n \longrightarrow V$ uniformemente.

Como $V_n \longrightarrow V$ uniformemente, la sucesión $\{V_n\}$ es de Cauchy, por lo que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq n_0$ se tiene $\|V_n - V_m\| < \varepsilon$. (*)

Además, al ser $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios numerablemente valuados, sabemos por el caso anterior que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $E[V_n]$.

Luego, para todo $n, m \geq n_0$:

$\|E[V_n] - E[V_m]\| = \|E[V_n - V_m]\| \leq E\|V_n - V_m\| \overset{(*)}{\leq} \varepsilon$.

Es decir, la sucesión $\{E[V_n]\}$ es de Cauchy. Como X es espacio de Banach, entonces $E[V_n] \longrightarrow x \in X$. Veamos que $x = E[V]$.

Dada $f \in X^*$, $f(x) = f(\lim_{n\to\infty} E[V_n]) = \lim_{n\to\infty} f(E[V_n]) = \lim_{n\to\infty} E(f(V_n)) =$
$= E[\lim_{n\to\infty} f(V_n)] = E[f(\lim_{n\to\infty} V_n)] = E[f(V)] \Longrightarrow x = E[V]$.

□

Una vez más, la hipótesis de completitud vuelve a ser fundamental. Lo hacemos notar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. Sea $X = \mathbb{R}^\infty$, formado por todas las sucesiones con tan solo una cantidad finita de términos no nulos, con la norma del supremo. Este espacio $(\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ no es completo.

Sea $e_n = (0, 0, ..., 0, \overbrace{1}^{n}, 0, ..., 0)$. Consideremos V un elemento aleatorio en

X tal que $P[V = e_n] = \dfrac{1}{2^n}$. Entonces, $E[\|V\|] = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$.
Si vemos a V como un elemento aleatorio dentro del espacio $c_0 = \overline{\mathbb{R}^\infty}$ que sí es completo, tendremos que $E[V] = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, ..., \dfrac{1}{2^n}, ...) \in c_0$.
Sin embargo, $E[V] \notin X$. En efecto, consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$, la proyección i-ésima:

$$\begin{aligned} h_i : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n, ...) &\longmapsto h_i(x) = x_i \end{aligned}$$

Como para cada $i \in \mathbb{N}$ las funciones h_i son lineales y continuas, $E[h_i(V)] = h_i(E[V]) = E[V_i] = \dfrac{1}{2^i}$ para todo $i = 1, 2, ...$

A continuación, enunciamos y probamos algunas propiedades de la esperanza que se derivan directamente de haberla definido mediante la integral de Pettis.

Teorema 2.2.2. *Sean V, y V_2 elementos aleatorios en un espacio lineal normado X. Sea $x \in X$. Se verifican:*
1) Si existen $E[V]$ y $E[Z]$ y $V + Z$ es un elemento aleatorio en X, entonces $E[V + Z] = E[V] + E[V]$.
2) Si $E[V]$ existe y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $E[\lambda V] = \lambda E[V]$.
3) Si $P[V = x] = 1$, entonces $E[V] = x$. Además, si A es una variable aleatoria y existe $E[A]$, se tiene que $E[AV] = E[A]x$.
4) Sea $h : X \longrightarrow Y$, siendo Y un espacio lineal topológico, una función lineal y continua. Si existe $E[V]$, entonces $E[h(V)] = h(E[V])$.
5) Si existe $E[V]$, entonces $\|E[V]\| \leq E[\|V\|]$, pudiendo ser esta última infinita.

Demostración. Sólo tenemos que probar los dos últimos apartados, pues 1), 2) y 3) se deducen directamente de la definición de integral de Pettis y de la linealidad de $f \in X^*$.

4) Obsérvese que como $h : X \longrightarrow Y$, para todo $f \in Y^*$ se tiene que $f \circ h \in Y^*$, pues $X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Asi:
$(f \circ h)E[V] = f(h(E[V])) = E[(f \circ h)V] = E[f(h(V))]$.
Es decir, para todo $f \in Y^*$ se tiene que $f(h(E[V])) = E[f(h(V))]$. Luego, por definición de valor esperado tenemos que $E[h(V)] = h(E[V])$.
5) Supongamos que existe $E[V]$ y que $E[V] \neq 0$ (si la esperanza es nula entonces el resultado es trivial).
Como X es un espacio lineal normado y $E[V] \in X$, $E[V] \neq 0$, aplicando el corolario del teorema de Hahn-Banach (ver el Apéndice A), podemos afirmar que existe $f \in X^* \ : \ \|f\| = 1$ y $f(E[V]) = \|E[V]\|$, de lo que sigue que:
$\|E[V]\| = |f(E[V])\ | = \|E[f(V)]\| \leq E\|f(V)\| \leq E[\|f\|\|V\|] = E[\|V\|]$.
Por lo que si existe $\|E[V]\|$, entonces existe $E[\|V\|]$ y $\|E[V]\| \leq E[\|V\|]$.

$\square$

Ejemplo 2.2.2. Sea X un espacio lineal topológico con base de Schauder $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con funcionales coordenadas $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ continuos (esto se verifica si el espacio es de Banach). Sea V un elemento aleatorio en X con esperanza $E[V] \in X$. Se tiene que:

$$E[V] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k(E[V]) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k E[f_k(V)]$$

Como f_k son continuos, entonces tenemos que $f_k(V)$ es una variable aleatoria para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, si $V = (V_1, V_2, ...)$, en los espacios de sucesiones donde $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder, con $b_k = (0, 0, ..., 0, \underbrace{1}_{k}, 0, ..., 0, 0)$, $E[V] = (E[V_1], E[V_2], ...)$.

Por tanto, ya sabemos cómo calcular la esperanza de un elemento aleatorio sobre un espacio con base de Schauder.

Capítulo 3

Las leyes de los grandes números

Una vez conocidas las propiedades más destacadas de los elementos aleatorios, en este capítulo veremos cómo se conservan o no algunas de las leyes clásicas de los grandes números para variables aleatorias al intentar extenderlas a elementos aleatorios. En primer lugar, probamos las leyes para elementos aleatorios idénticamente distribuidos. Luego, cambiamos esta condición y vemos qué ocurre si tenemos una sucesión de elementos aleatorios tight y, por último, estudiamos el caso en que imponemos condiciones geométricas sobre el espacio topológico X.

3.1. LGN para elementos aleatorios idénticamente distribuidos

Teorema 3.1.1. Ley fuerte de los grandes números de Mourier
Sean X un espacio de Banach separable y $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos en X de forma que

$E[\|V_1\|] < \infty$. *Entonces, se verifica que* $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k - E[V_1]\| \xrightarrow{c-s} 0$ *cuando* $n \uparrow \infty$.

Demostración. Como suponemos que $E[\|V_1\|] < \infty$ y X es un espacio completo y separable, tenemos que $E[V_1] \in X$ existe. Además, por la idéntica distribución, $E[V_1] = E[V_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En primer lugar, veamos que el enunciado es cierto si los elementos aleatorios $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sólo pueden tomar un conjunto numerable de valores $x_1, x_2, ...$

Para cada $t \in \mathbb{N}$ definimos $V_k^t = \sum_{i=1}^{t} x_i I_{[V_k = x_i]}$ para todo $k \in \mathbb{N}$

y $R_k^t = V_k - V_k^t = \sum_{i=t+1}^{\infty} x_i I_{[V_k = x_i]}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{I_{[V_k = x_i]}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E[I_{[V_k = x_i]}] = P[V_k = x_i]$. Además, usando las propiedades de la esperanza vistas en el capítulo anterior:

$E[V_k^t] = \sum_{i=1}^{t} x_i P[V_k = x_i] = \sum_{i=1}^{t} x_i P[V_1 = x_i] = E[V_1^t]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Entonces:

$$0 \leq \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k^t - E[V_1^t]\| = \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{t} x_i I_{[V_k = x_i]} - \sum_{i=1}^{t} x_i P[V_1 = x_i]\| =$$

$$= \|\sum_{i=1}^{t} x_i (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{[V_k = x_i]} - P[V_1 = x_i])\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{t} \|x_i\| |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{[V_k = x_i]} - P[V_1 = x_i])| \xrightarrow{c-s} 0 \ (1)$$

ya que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{[V_k = x_i]} \xrightarrow{c-s} P[V_1 = x_i])$ por la ley fuerte de los grandes números para variables aleatorias.

Por otro lado, tenemos que para cada $t \in \mathbb{N}$, $\{\|R_n^t\|\}$ es también una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $E[\|R_1^t\|] \leq E[\|V_1\|]$, pues $E[\|R_1^t\|] = \sum_{i=t+1}^{\infty} \|x_i\| I_{[V_1 = x_i]} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| I_{[V_1 = x_i]} =$

$E[\|V_1\|]$, por lo que, actuando como antes: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|R_k^t\| \stackrel{c-s}{\longrightarrow} E[\|R_1^t\|]$ para cada t (2).
Como $\|R_1^t\| \stackrel{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$ puntualmente y $\|R_1^t\| \leq \|V_1\|$ para cada t, con $E[\|V_1\|] < \infty$, el teorema de la convergencia dominada implica que $E[\|R_1^t\|] \stackrel{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$ (3).

Sea S el conjunto de medida nula para el que no se cumple (1) o (2). Sean $\omega \notin S$ y $\varepsilon > 0$ dados. Escogemos $t \in \mathbb{N}$ tal que $E[\|R_1^t\|] \leq \frac{\varepsilon}{4}$ (sabemos que podemos por (3)). Por (1) y (2), existe un entero positivo $N(\varepsilon, \omega)$ tal que para todo $n \geq N(\varepsilon, \omega)$ se tiene:
$\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k^t(\omega) - E[V_1^t]\| < \frac{\varepsilon}{4}$ y $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|R_k^t(\omega)\| < E[\|R_1^t\|] + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2}$
Entonces, $\|E[V_1^t] - E[V_1]\| \leq E[\|V_1^t - V_1\|] = E[\|R_1\|] \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
En consecuencia, para $\omega \notin S$ y para $n \geq N(\varepsilon, \omega)$ se tiene que:
$\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k(\omega) - E[V_1]\| = \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(V_k^t(\omega) - V_k^t(\omega) + V_k(\omega)) - E[V_1^t] + E[V_1^t] - E[V_1]\| \leq \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k^t(\omega) - E[V_1^t]\| + \frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(V_k(\omega) - V_k^t(\omega))}_{R_k^t(\omega)}\| + \|E[V_1^t] - E[V_1]\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$
Es decir, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k - E[V_1]\| \stackrel{c-s}{\longrightarrow} 0$ si $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos aleatorios numerablemente valuados.
Veamos ahora el caso general. Como estamos en un espacio separable, sabemos que existe una función medible-Borel numerablemente valuada
$T_m : X \longrightarrow X$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene $\|T_m(x) - x\| < \frac{1}{n}$ para todo $x \in X$ (proposición 1.2.1). En consecuencia, para cada $m, n \in \mathbb{N}$:
$\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k - E[V_1]\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|V_k - T_m(V_k)\| + \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_m(V_k) - E[T_m(V_1)]\| +$
$+\|E[T_m(V_1)] - E[V_1]\|$
Primer sumando: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|V_k - T_m(V_k)\| < \frac{1}{n}n\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$
Segundo sumando: $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_m(V_k) - E[T_m(V_1)]\| \stackrel{c-s}{\longrightarrow} 0$ si $n \uparrow \infty$ (4), pues los

elementos aleatorios $\{T_(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son independientes e idénticamente distribuidos numerablemente valuados con $E[T_m(V_1)] \leq E[V_1] + \dfrac{1}{m} < \infty$
Tercer sumando: $\|E[T_m(V_1)] - E[V_1]\| \leq E[\|T_m(V_1) - V_1\|] \leq \dfrac{1}{m}$
Por tanto, salvo en el conjunto de medida nula en el que no se verifica (4), se tiene la convergencia del segundo sumando y, por tanto, se verifica que $\|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V_k - E[V_1]\| \xrightarrow{c-s} 0$.

□

Podemos relajar las hipótesis del enunciado anterior si tenemos en cuenta que cada espacio lineal normado es isomorfo a un subconjunto denso de un espacio de Banach. Así, podemos extender el teorema anterior a espacios lineales normados separables si suponemos la existencia de $E[V_1]$.

Corolario 3.1.1. *Sea X un espacio lineal normado separable y $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos en X tal que existe $E[V_1]$ y $E[\|V_1\|] < \infty$. Entonces, $\|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V_k - E[V_1]\| \xrightarrow{c-s} 0$ cuando $n \uparrow \infty$.*

Teorema 3.1.2. Ley débil de los grandes números de Taylor
Sea X un espacio de Banach con base de Schauder $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funcionales coordenada asociada. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en X tal que $E[\|V_1\|] < \infty$. Entonces, la ley débil de los grandes números se tiene para la sucesión de variables aleatorias $\{f_k(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ si, y solamente si, $\|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V_k - E[V_1]\| \xrightarrow{P} 0$ cuando $n \uparrow \infty$.

Demostración. $\boxed{\Longrightarrow}$ Se tiene directamente, ya que la convergencia en la topología de la norma implica la convergencia en la topología lineal débil. Como X es un espacio de Banach, entonces cada funcional coordenada es continuo, por lo que se tiene la convergencia en cada coordenada.

$\boxed{\Longleftarrow}$ En primer lugar, observemos que, por el teorema 1.2.2, se tiene que X es separable (pues posee base de Schauder). Como, además, por hipótesis tenemos que X es completo y que $E[\|V_1\|] < \infty$, sabemos que existe $E[V_1]$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $E[V_1] = 0$ (si no, bastaría considerar la sucesión $\{V_n - E[V_1]\}_{n\in\mathbb{N}}$).

Tenemos que probar entonces que si para $\{f_i(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ se verifica la ley débil de los grandes números, entonces $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\| \xrightarrow{P} 0$, es decir, que dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe $N(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ tal que $P[\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\| > \varepsilon] < \delta$ para todo $n \geq N(\varepsilon, \delta)$.

Sea $m > 0$ la constante base tal que $\|U_t\| \leq m$ para todo $t \in \mathbb{N}$, donde recordamos que $U_t(x) = \sum_{k=1}^{t} f_k(x) b_k$. Definimos ahora $Q_t(x) = x - U_t(x)$ para todo $x \in X$, por lo que:

$\|Q_t(x)\| = \|x - U_t(x)\| \leq \|U_t(x)\| + \|x\| \leq \|U_t\|\|x\| + \|x\| = \|x\|(1 + \|U_t\|) \leq$
$\leq \|x\|(1+m) \implies \|Q_t\| \leq m+1$ para todo $t \in \mathbb{N}$.

Por definición de Q_t, para todo $x \in X$ se tiene $x = Q_t(x) + U_t(x)$, por lo que para cada $n, t \in \mathbb{N}$ podemos escribir:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_t(V_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q_t(V_k)$$

Aplicando la desigualdad de Markov tenemos:

$$P[\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] \leq P[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} E[\|Q_t(V_k)\|]}{n\frac{\varepsilon}{2}} \leq$$
$$\leq \frac{2nE[\|Q_t(V_1)\|]}{n\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon}E[\|Q_t(V_1)\|]$$

Según la definición de los funcionales Q_t, $\|Q_t(V_1)\| \longrightarrow 0$ puntualmente. Además, $\|Q_t(V_1)\| \leq (m+1)\|V_1\|$ con $E\|V_1\| < \infty$. Luego, aplicando el teorema de la convergencia dominada, tenemos que $E\|Q_t(V_1)\| \longrightarrow 0$ cuando

$t \longrightarrow \infty$.
Sea entonces t tal que $P[\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] < \frac{\delta}{2}$.

Por otro lado,
$P[\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] = P[\|\sum_{i=1}^{t} f_i(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k)b_i\| > \frac{\varepsilon}{2}] \leq P[\sum_{i=1}^{t} |f_i(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k)|\|b_i\|] \leq$
$\leq \sum_{i=1}^{t} P[|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_i(V_k)| > \frac{\varepsilon}{2t\|b_i\|}]$.

Puesto que, para cada $i \in \mathbb{N}$, se verifica la ley débil de los grandes números para la sucesión $\{f_i(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y dado que $E[f_i(V_1)] = f_i(E[V_1]) = f_i(0) = 0$, se tiene que, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$P[|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_i(V_k)| > \frac{\varepsilon}{2t\|b_i\|}] \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \uparrow \infty$$

Existe, por tanto, $N(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ tal que $P[\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] < \frac{\delta}{2}$ para todo $n \geq N(\varepsilon, \delta)$.
Así, para todo $n \geq N(\varepsilon, \delta)$ tenemos que:

$$P[\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\| > \varepsilon] \leq P[\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] + P[\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Es decir, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\| \xrightarrow{P} 0$.

□

Corolario 3.1.2. *Sean X un espacio de Banach con base de Schauder y $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en X tal que $E[V_1] < \infty$. Entonces, para cada $f \in X^*$, la ley débil de los grandes números se tiene para la sucesión $\{f(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias si, y solamente si, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k - E[V_1]\| \xrightarrow{P} 0$ cuando $n \uparrow \infty$.*

Demostración. La prueba es inmediata dado que cada funcional coordenada f_k pertenece a X^* y por la equivalencia de la convergencia en probabilidad en la topología fuerte y en la topología débil.

□

Puede obtenerse un resultado similar al del corolario anterior para un espacio lineal normado X (no necesariamente con base de Schauder) haciendo la inmersión de X en $C[0,1]$ (espacio de Banach con base de Schauder). Para ello, se hace uso del hecho de que la completación de X es isométrico a un subespacio de $C[0,1]$ (**Marti** [7]). El resultado es el que se muestra a continuación.

Teorema 3.1.3. *Sea X un espacio lineal normado separable y sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en X de forma que existen $E[V_1]$ y $E[\|V_1\|] < \infty$. Entonces, para cada $f \in X^*$, la ley débil de los grandes números se tiene para $\{f(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ si, y solamente si, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k - E[V_1]\| \xrightarrow{P} 0$ cuando $n \uparrow \infty$.* (**Taylor** [9])

Beck y Wamen [2] pusieron de manifiesto en un ejemplo que no es posible obtener resultados de equivalencia para leyes fuertes similares a los que hemos visto para leyes débiles.

Definición 3.1.1. Sea X un espacio de Banach separable. Una sucesión $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos aleatorios en X se dice **incorrelados coordenada a coordenada** si existe una base de Schauder $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada funcional coordenada f_k se tienen que:
a) $E[f_k(V_n)]^2 < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
b) $E[f_k(V_n)f_k(X_m)] = E[f_k(V_n)]E[f_k(X_m)]$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$.

Obsérvese que si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos aleatorios independientes con varianzas finitas entonces es una sucesión de elementos aleatorios incorrelados coordenada a coordenada. Sin embargo, el recíproco no es cierto, ya que el hecho de que $E[f_k(V_n)f_k(X_m)] = E[f_k(V_n)]E[f_k(X_m)]$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ no implica la independencia.

Corolario 3.1.3. *Sea X un espacio de Banach y sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos e incorrelados coordenada a coordenada con $E[V_1] < \infty$. Entonces, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k - E[V_1]\| \xrightarrow{P} 0$ cuando $n \uparrow \infty$.*

Durante todo este apartado hemos tenido como hipótesis permanente la idéntica distribución de los elementos aleatorios. Esto se debe a que, a diferencia de lo que ocurría para variables aleatorias reales, esta hipótesis no puede ser sustituida por la de acotación de los momentos de $\{\|V_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por eso, algunas leyes de los grandes números que se tenían para variables aleatorias usando sólo la hipótesis de acotación, no se pueden extender directamente a elementos aleatorios en espacios lineales normados separables.

Ejemplo 3.1.1. Sea $X = l^1 = \{x = \{x_n\} \in \mathbb{R}^\infty : \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$. X es un espacio de Banach con base de Schauder $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(0, ..., 0, \underbrace{1}_{n}, 0, ..., 0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y, por tanto, separable.
Definimos en l^1 la siguiente sucesión $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos aleatorios que suponemos independientes:

$$V_n = \begin{cases} (0, ..., 0, \underbrace{1}_{n}, 0, ..., 0) \text{ con probabilidad } 1/2 \\ (0, ..., 0, \underbrace{-1}_{n}, 0, ..., 0) \text{ con probabilidad } 1/2 \end{cases} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Tenemos que $\|V_n\| = 1$ y que $E[V_n] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, existe $E[\|V_n\|^r] = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $r > 0$. Sin embargo,
$\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\| = \|\frac{1}{n}(A_1, ..., A_n, 0, ...)\| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |A_k| = \frac{n}{n} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

siendo $\{A_n\}$ variables aleatorias dadas por

$$A_n = \begin{cases} 1 \text{ con probabilidad } 1/2 \\ -1 \text{ con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

En consecuencia, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \nrightarrow 0$.

3.2. LGN para elementos aleatorios tight

Definición. Sea X en un espacio topológico. Un elemento aleatorio V en X se dice que es **tight** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K_\varepsilon \subset X$ tal que $P[V \in K_\varepsilon] > 1 - \varepsilon$. Una sucesión de elementos aleatorios $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X es tight si para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K_\varepsilon \subset X$ tal que $P[V_n \in K_\varepsilon] > 1 - \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En 1968, Billingsley ([3]) probó que **si X es un espacio métrico completo separable, entonces cada elemento aleatorio en X es tight**. En consecuencia, cualquier sucesión $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en un espacio métrico completo separable es tight, pues el compacto K_ε escogido para V_1 sirve también para todos los demás V_n. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Si tomamos $V_n = \frac{1}{n}$ con probabilidad 1 para todo $n \in \mathbb{N}$. Es obvio que la sucesión $\{V_n\}$ no es idénticamente distribuida, pero es tight si tomamos como K_ε el compacto $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

El siguiente lema (Taylor [10]) nos permitirá considerar que $E[V_n] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ sin que esto suponga pérdida de generalidad alguna.

Lema 3.2.1. *Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios tight en un espacio de Banach separable X. Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[\|V_n\|^p] < \infty$ para algún $p > 1$, entonces $\{V_n - E[V_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tight.*

Teorema 3.2.1. *Sean X un espacio de Banach separable y $K \subset X$ un subconjunto compacto. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes en X, con $E[V_n] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que toman sus valores en K. Entonces, se tiene que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \xrightarrow{c-s} 0$.*

Demostración. Podemos suponer que K es convexo y simétrico y también que $0 \in K$ (Rudin [9]). Además, en el espacio dual X^* existe un conjunto numerable S que separa puntos de K.
Sea τ_S la topología más débil sobre K que hace continuos los elementos de S. Entonces, para $\{x_n\} \subset K$, $x_n \longrightarrow 0$ en τ_S si, y solamente si, $\|x_n\| \longrightarrow 0$.
Como para cada $f \in X^*$ $\{f(V_k)\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes uniformemente acotadas, pues $\|f(V_k)\| \leq \|f\|\|V_k\| \leq M\|f\|$ al tenerse que $V_k(\omega) \in K$ para todo $\omega \in \Omega$, se tiene que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(V_k) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para todo $f \in X^*$.
Dado que K es convexo, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k(\omega) \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\omega \in \Omega$ y, puesto que S es numerable, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \xrightarrow{c-s} 0$ (el conjunto de $\omega \in \Omega$ para el que no se cumple la convergencia es unión numerable de conjuntos nulos, uno para cada $f \in S$).

□

Una vez que hemos probado este resultado para sucesiones que toman valores en un compacto, pasamos al caso general.

Teorema 3.2.2. Ley fuerte para elementos aleatorios tight
Sea X un espacio de Banach separable y sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes y tight en X tal que existe $p > 1 : E[\|V_n\|^p] \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para algún $M > 0$. Entonces, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(V_k - E[V_k]) \xrightarrow{c-s} 0$ cuando $n \uparrow \infty$.

Demostración. Podemos suponer, gracias al lema 3.2.1, que $E[V_n] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = (\frac{1}{M})^{\frac{1}{p-1}} (\frac{\varepsilon}{4})^{\frac{p}{p-1}}$.

Como $\{V_n\}$ es tight, consideremos K compacto y, como en la prueba anterior, simétrico y convexo, tal que $P[V_n \in K] > 1 - \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A continuación, definimos $Y_n = V_n I_{[V_n \in K]}$ y $Z_n = V_n - Y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, $\{Y_n - E[Y_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ toma valores en $K + K$. Por lo tanto, aplicando el teorema anterior tenemos que $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - E[Y_k])\| \xrightarrow{c-s} 0$. (1)

Por otro lado, haciendo uso de la desigualdad de Hölder:

$E[\|Z_n\|] = E[\|V_n\| I_{[V_n \notin \mathbb{N}]}] \leq (E[\|V_n\|^p])^{\frac{1}{p}} (P[V_n \notin K])^{\frac{p}{p-1}} \leq$

$\leq (E[\|V_n\|^p])^{1/p} \delta^{p/p-1} \leq M^{1/p} \frac{1}{M^{1/p}} \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}$.

Por otro lado, y teniendo en cuenta que para $p > 1$ $E[\|Z_n\|] \leq E^{1/p} \|Z_n\|^p$ implica $E^p[\|Z_n\|] \leq E[\|Z_n\|^p]$, se sigue que:

$E[|\|Z_n\| - E[\|Z_n\||^p]] \leq 2^p(E[\|Z_n\|^p + E^p[\|Z_n\|]]) \leq 2^p(2E[\|Z_n\|^p]) \leq 2^{p+1}M$.

Por tanto, la ley fuerte de los grandes números de Chung implica que

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\|Z_k\| - E[\|Z_k\|]) \xrightarrow{c-s} 0$. (2)

Por la propia definición de convergencia casi segura, en (1) y (2) puede ser excluido, a lo más, un número numerable de conjuntos nulos. Así, para casi todo $\omega \in \Omega$, existe un $n_0(\varepsilon, \omega)$ tal que para todo $n \geq n_0(\varepsilon, \omega)$:

$$\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{n}(Y_k(\omega) - E[Y_k])\| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ y } \frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{n}(\|Z_k(\omega)\| - E[\|Z_k\|]| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dado que $\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{n} E[Z_k]\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k_1}^{n} E\|Z_k\| \leq \frac{1}{n} n\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}$, se tiene que:

$\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{n} Z_k(\omega)\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|Z_n\| = \frac{1}{n}[\sum_{k=1}^{n}(\|Z_k(\omega)\| - E[\|Z_k\|]) + \sum_{k=1}^{n} E[\|Z_k\|] <$
$\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$ para $n \geq n_0(\varepsilon, \omega)$.

Análogamente, el hecho de ser $E[Y_n] = -E[Z_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k(\omega) - E[Y_k])$ para todo $n \geq n_0(\varepsilon, \omega)$ implica de manera análoga que $\frac{1}{n}\|\sum_{k_1}^{n} Y_k(\omega)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por consiguiente, para tales ω:
$\frac{1}{n}\|\sum_{k_1}^{n} V_k(\omega)\| = \frac{1}{n}\|\sum_{k_1}^{n}(Y_k(\omega)+Z_k(\omega))\| \leq \frac{1}{n}\|\sum_{k_1}^{n} Y_k(\omega)\|+\frac{1}{n}\|\sum_{k_1}^{n} Z_k(\omega)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, para todo $n \geq n_0(\varepsilon, \omega)$.
Por tanto, $\frac{1}{n}\sum_{k_1}^{n} V_k \xrightarrow{c-s} 0$.

$\square$

Si ahora tenemos en cuenta el teorema 3.2.1 junto con el hecho de que una sucesión convergen en probabilidad si, y solamente si, cada subsucesión tiene, a su vez, una subsucesión que converge en probabilidad 1, se prueba la siguiente ley débil:

Teorema 3.2.3. *Sea K un subconjunto compacto de un espacio de Banach separable X. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios en X con $E[V_n] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ que toman sus valores en K. Entonces, para cada $f \in X^*$, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\| \xrightarrow{P} 0$ si, y solamente si, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(V_k)\| \xrightarrow{P} 0$.*

Con técnicas no muy diferentes a las usadas en el Teorema 3.2.2 para obtener una ley fuerte, podemos conseguir la siguiente ley débil para elementos aleatorios tight.

Teorema 3.2.4. *Sea X un espacio de Banach separable y sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios tight en X con $E[V_n] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de forma que, para algún $p > 1$ se tiene $E[\|V_n\|^p] \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $M > 0$. Entonces, para cada $f \in X^*$, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(V_k)\| \xrightarrow{P} 0$ si, y solamente* *si,* $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\| \xrightarrow{P} 0$.

En el caso en que X sea un espacio de Banach con base de Schauder, es necesario y suficiente obtener la convergencia correspondiente para todos los funcionales coordenada en lugar de para todas las funciones lineales y continuas.

Corolario 3.2.1. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios tight en X tales que $E[V_n] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $E[\|V_n\|^p] \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para algún $p > 1$, con $M > 0$. Entonces, para cada funcional coordenada f_i, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_i(V_k)\| \xrightarrow{P} 0$ si, y solamente si, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\| \xrightarrow{P} 0$.*

3.3. Condiciones geométricas sobre los espacios

En los apartados anteriores nos hemos visto en la necesidad de imponer condiciones cada vez más fuertes sobre las distribuciones de los elementos aleatorios para obtener leyes de los grandes números. Sin embargo, también pueden imponerse condiciones de tipo geométrico sobre los espacios en los que consideramos los elementos aleatorios. Como punto final del trabajo, haremos un resumen de algunas de las más importantes junto con las leyes obtenidas como consecuencia.

La clásica ley fuerte de los grandes números de Kolmogorov para variables aleatorias X_n independientes con $E[X_n] = 0$ y $E[X_n^2] \leq M < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se obtiene como caso particular de la ley fuerte que Chung probó en 1947. Sin embargo, no podemos encontrar leyes equivalentes en cualquier espacio de Banach. La validez de estas leyes depende de algunas propiedades geométricas de la bola unidad del espacio de Banach.

Definición 3.3.1. Un espacio X de Banach se dice que es **convexo de tipo B o B-convexo** si existen $\varepsilon > 0$ y $K > 0$ entero tales que para todo $x_1, ..., x_k \in X$ con $\|x_i\| \leq 1$, $i = 1, 2, ..., k$, entonces se tiene que $\| \pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_k\| < k(1-\varepsilon)$ para alguna combinación de los signos $+$ y $-$.

Observación 3.3.1. La B-convexidad del espacio E equivale a que l_1 no sea finitamente representable en E.

En 1963, Beck ([1]) dio una caracterización de todos aquellos espacios de Banach para los que la ley fuerte de Kolmogorov sigue. Tales espacios son los B-convexos.

Proposición 3.3.1. *Son B-convexos:*
1. Los espacios lineales normados finito-dimensionales.
2. Los espacios de Banach uniformemente convexos, es decir, aquellos espacios de Banach X tales que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x+y\| > 2(1-\delta)$, entonces $\|x-y\| < \varepsilon$ para todo $x, y \in X$.

Un ejemplo de espacios B-convexos son L^p y l^p, $1 < p < \infty$, y de espacios no B-convexos son l^1, l^∞ y c_0.

Aunque la ley de Kolmogorov se tenga para los espacios de Banach B-convexos, no es posible obtener el mismo resultados para la ley fuerte de Chung, tal y como puso de manifiesto Woyczynski ([11]) en 1973 a la vez que demostraba que un resultado análogo a la ley fuerte de Chung es válido para espacios de Banach que verifican la condicion G_α.

Definición 3.3.2. Un espacio de Banach X satisface la **condición G_α** para algún $\alpha \in (0, 1]$ si existe una aplicación $G : X \longrightarrow X^*$ tal que:
1. $\|G(x)\| = \|x\|^\alpha$

2. $G(x)x = \|x\|^{1+\alpha}$
3. $\|G(x) - G(y)\| \leq A\|x - y\|^{\alpha}$ para todo $x, y \in X$ y para alguna constante A.

La importancia de la condición G_α proviene de la siguiente desigualdad: $E[\|X_1+...+X_n\|^{1+\alpha}] \leq A\sum_{i=1}^{n} E[\|X_i\|^{1+\alpha}]$, que se tiene para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada n-tupla de elementos aleatorios independientes $X_1, ..., X_n$ en $X \in G_\alpha$, con $E[X_i] = 0$ y $E[\|X_i\|^{1+\alpha}] < \infty$.

Los espacios L^p y l^p con $p \geq 2$ son G_α para todo $0 < \alpha \leq 1$ y los espacios $L^{1+\alpha}$ y $l^{1+\alpha}$ son G_β para todo $\beta > \alpha$. Además, los espacios de Hilbert son G_1 con constante $A = 1$ y G la aplicación identidad.

Teorema 3.3.1. *Sea X un espacio de Banach separable, $X \in G_\alpha$ para algún $\alpha \in (0,1]$. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes en X tal que $E[V_n] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{i=1}^{\infty} E[\varphi_0(\|V_i\|)] < \infty$, para $\varphi_0(t) = \mathrm{mín}\{t, t^{1+\alpha}\}$ y $t \geq 0$, entonces $\|\sum_{i=1}^{\infty} V_i\| \xrightarrow{c-s} 0$, por lo que se $\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{n} kV_k\| \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.*

Consecuencia de este teorema probado en 1973 por Woyczynski ([11]) es el siguiente resultado, que nos proporciona una ley fuerte análoga a la de Chung.

Teorema 3.3.2. *Sea X un espacio de Banach separable, $X \in G_\alpha$ para algún $\alpha \in (0,1]$. Sea $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continua y tal que $\frac{\varphi(t)}{t}$ y $\frac{t^{1+\alpha}}{\varphi(t)}$ son no decrecientes. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes en X tales que $E[V_n] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} E[\varphi(\|V_n\|)] < \infty$, se tiene que $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\| \xrightarrow{c-s} 0$.*

Obtenemos, a partir de este teorema, el siguiente corolario, que nos permite caracterizar algunos espacios l^p a través de la ley fuerte de los grandes números.

Corolario 3.3.1. *En l^p, $1 < p < \infty$, la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[\|V_n\|^{1+\alpha}]}{n^{1+\alpha}}$, $\alpha \in (0,1]$, implica la ley fuerte de los grandes números para elementos aleatorios independientes $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $E[V_n] = 0$ si, y solamente si, l^p es g_α, es decir, si, y solamente si, $p \geq 1 + \alpha$.*

Definición 3.3.3. Una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias se dice que es de Rademacher si son independientes y, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P[\varepsilon_n = 1] = P[\varepsilon_n = -1] = \frac{1}{2}$

A partir de ahora, consideraremos que $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Rademacher, notamos $X^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} X$ y definimos :
$C(X) = \{\{x_n\} \in X^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge en probabilidad $\}$.

Definición 3.3.4. Un espacio X de Banach separable se dice que es de tipo p, $1 \leq p \leq 2$, si existe una constante $A > 0$ tal que, para todo $\{x_n\} \in C(X)$, $E[\|\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n\|^p] \leq A \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p$.

Los dos siguientes resultados que enunciamos son debidos a Hoffman-Jorgensen y Pisier ([6]):

Teorema 3.3.3. *Sea $1 \leq p \leq 2$. Son equivalentes:*
1. El espacio de Banach X es de tipo p.
2. Existe una constante $A > 0$ tal que E‘$[\|\sum_{k=1}^{n} V_k\|^p] \leq A \sum_{k=1}^{n} E[\|V_k\|^p]$ para todo $V_1, ..., V_n \in X$ elementos aleatorios independientes con media nula y momentos de orden p finitos.
3. La ley fuerte de los grandes números, $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\| \xrightarrow{c-s} 0$, sigue para toda sucesión $\{V_n\}$ de elementos aleatorios independientes en X con $E[V_n] = 0$ para

todo $n \in \mathbb{N}$ *y que verifica la condición de Chung (es decir,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[\|V_n\|^p]}{n^p} < \infty$*)*

4. Si $\{X_n\} \in X^\infty$ *con* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n\|^p}{n^p} < \infty$ *y* $\{\varepsilon_n\}$ *es una sucesión de Rademacher, entonces* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \xrightarrow{P} 0$.

Teorema 3.3.4. *Sean* X *un espacio de Banach separable y* $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de elementos aleatorios independientes en* X *con* $E[V_n] = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y de forma que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un compacto* $K \subset X$ *tal que* $E[\|V_n\| I_{[V_n \notin K]}] \leq \varepsilon$ *para todo* $n \in N$*. Entonces* $\lim_{n\to\infty} E[\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{n} V_k\|] = 0$.

Puesto que la convergencia en media implica la convergencia en probabilidad, este teorema nos lleva a una ley débil de los grandes números en la que la condición impuesta sobre el compacto K nos recuerda a la condición tightness de $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del capítulo anterior.

Apéndice A

Análisis Funcional

En esta sección veremos algunos de los resultados más importantes del análisis funcional y definiremos de forma precisa los conceptos propios de esta rama que utilizamos a lo largo de las notas.

Definición. Un conjunto X no vacío se dice que es un **espacio lineal (real)** si en él se puede definir una operación de adición que convierte a X en un grupo conmutativo y una operación de multiplicación por escalares (números reales) que verifica la propiedad distributiva y las leyes de identidad, es decir:

1. Para cada par de elementos $(x, y) \in (X, X)$ existe un elemento $z \in X$ tal que $z = x + y$.

2. Para cada $x \in X$ y para cada $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $tx \in \mathbb{R}$.

3. Para cada $x, y, z \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$, las operaciones definidas anteriormente verifican:

i) $x + y = y + x$

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii) Si $x + y = x + z,$ entonces $y = z$.

iv) $1x = x$.

v) $s(tx) = s(tx)$.

vi) $(s + t)x = sx + tx$

vii)$s(x + y) = sx + sy$.

Definición. Una función $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama **semimétrica o semidistancia en** M si:
$i)$ $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $(x, y) \in M \times M$
$ii)$ $d(x, x) = 0$ para todo $x \in M$
$iii)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in M$
$iv)$ $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in M$
Cuando además tenemos que:
$v)$ $d(x, y) = 0$ si, y solamente si, $x = y$, entonces se dice que s es una **métrica o distancia** en M.

Definición. Un conjunto M no vacío se dice que es un **espacio métrico** (análogamente, semimétrico) si tiene definida una métrica (semimétrica) en él.

Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico M se dice que es una **sucesión de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definición. Un espacio métrico M se dice que es **completo** si toda sucesión de Cauchy en M converge en M.

Definición. Dado un espacio lineal X, una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una **seminorma** en X si para cada $x, y, \in X$ y para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que:
$i)$ $p(x) \geq 0$
$ii)$ $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
$iii)$ $p(tx) = |t|p(x)$
Cuando también se tiene que:
$iv)$ $p(x) = 0$ si, y solamente si, $x = 0$, entonces se dice que la función p es una **norma** en X.

Definición. Un espacio lineal X se dice que es un **espacio lineal normado** si en él se puede definir una función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que $\|\cdot\|$ es una norma.

Definición. Sea X un espacio lineal. Una aplicación $<\cdot,\cdot>: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es un **producto escalar** en X si:
i) $<x,x> \ \ > 0$ si, y solamente si, $x \neq 0$.
ii) $<tx,y> = t<x,y>$.
iii) $\overline{<x,y>} = <y,x>$

Definición. Un espacio X con producto escalar $<\cdot,\cdot>$ que es completo para la norma $\|x\| = <x,x>^{1/2}$, se dice que es un **espacio de Hilbert**.

Definición. Sea X un espacio topológico.Un subconjunto $D \subset X$ se dice **denso** en X si $\overline{D} = X$, es decir, si su clausura es el espacio total.
Se dice que X es **separable** cuando contiene un subconjunto denso y numerable.

Definición. El espacio de aplicaciones lineales y continuas entre dos espacios normados X e Y se denota por $\mathcal{L}(X;Y)$

Definición. Sea X un espacio normado. Se define el **espacio dual de X**, denotado por X^*, como el conjunto de aplicaciones lineales y continuas de X en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\mathcal{L}(X;\mathbb{R}) = X^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ lineal y continua } \}$$

Proposición. *Si Y es de Banach, entonces $\mathcal{L}(X;Y)$ es un espacio de Banach.*

Si tenemos en cuenta que $X^* = \mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ y que $\mathbb{R}$ espacio de Banach, la proposición anterior nos conduce de inmediato al siguiente resultado de gran utilidad:

Corolario. *X^* siempre es un espacio de Banach.*

Teorema. Teorema de Hahn-Banach

Sea S un subespacio de un espacio lineal X, y sea p una seminorma definida sobre S. Sea g un funcional lineal definido sobre S de forma que $\|g(x)\| \leq p(x)$ para todo $x \in S$. Entonces, existe un funcional lineal f en X tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in S$ y $\|f(x)\| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Corolario. *Sea X un espacio lineal normado y sea $x \in X, x \neq 0$. Entonces, existe una función $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$.*

Apéndice B
Variables Aleatorias

En este apartado mencionamos los conceptos esenciales para conocer qué es un espacio probabilístico y a qué llamamos probabilidad. Asimismo, recordamos la definición de variable aleatoria y algunas de sus propiedades más destacadas. Por último, exponemos los tres tipos de convergencia que usamos en las notas y establecemos las relaciones entre ellas.

Definición. Sea $\Omega \neq \emptyset$ un espacio muestral y sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω. Se dirá que $\mathcal{A}$ es un **σ-álgebra** si verifica:
a) $\Omega \subset \mathcal{A}$.
b) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^C \in \mathcal{A}$.
c) Si $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{A}$, entonces $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Definición. Sea $\Omega \neq \emptyset$ un espacio muestral y sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de Ω. Se dirá que $\sigma(\mathcal{C})$ es la **mínima σ-álgebra** construida sobre $\mathcal{C}$ si se verifica:
a) $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
b) Para todo $\mathcal{A}$ σ-álgebra con $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$, entonces $\sigma(\mathcal{C}) \in \mathcal{A}$.

Proposición. *Sea $\Omega \neq \emptyset$ un espacio muestral y sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de Ω. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de σ-álgebras construidas sobre $\mathcal{C}$.*

Entonces $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ *es otro* σ*-álgebra.*

Corolario. *Sea* $\Omega \neq \emptyset$ *un espacio muestral y sea* $\mathcal{C}$ *una familia de subconjuntos de* Ω*. Siempre es posible encontrar la menor* σ*-álgebra sobre* $\mathcal{C}$*.*

Definición. Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y consideramos $\mathcal{C} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$. Llamamos **$\sigma$-álgebra de Borel** a $\sigma(\mathcal{C})$, es decir, a la mínima σ-álgebra construida sobre $\mathcal{C}$. Se representa como $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición. Una función $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sobre el espacio medible o probabilizable $(\Omega, \mathcal{A})$ se dice que es una **medida de probabilidad** si verifica la axiomática de Kolmogorov, es decir, si cumple que:
b) $P[\Omega] = 1$.
a) Si $A_1, ..., A_n, ... \subset \mathcal{A}$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces $P[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n]$.
En el caso de que P sea una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$, se dice que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un **espacio probabilístico**.

Una vez conocemos qué es un espacio probabilístico, podemos pasar a dar la definición de variable aleatoria.

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico. Una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una **variable aleatoria real** si es una función medible-Borel, es decir:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(w) \in B\} \in \mathcal{A} \text{ para todo } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra de los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$.
Cuando en lugar de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tenemos a $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ como espacio de llegada, decimos que X es un **vector aleatorio**.

Tenemos el siguiente resultado de caracterización de variables aleatorias.

Proposición. *Sean* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible.* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una v.a. real si, y solamente si,* $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Propiedades de las variables aleatorias

Sean X e Y dos variables aleatorias definidas sobre Ω, f una función real continua y $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $f \circ X$ es una variable aleatoria real.

2. $X + Y$ es una variable aleatoria real.

3. XY es una variable aleatoria real.

4.Toda variable aleatoria X tiene asociada una función de probabilidad, llamada **probabilidad inducida** (por la variable X). Viene dada por:

$P_X[B] = P[X^{-1}(B)] = P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}] = P[X \in B]$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición. Sea X una variable aleatoria definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Se define la **esperanza matemática** de X como $E[X] = \displaystyle\int_\Omega X dP$.

Definición. Sea X una variable aleatoria definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Definimos la **varianza** de X como $var[X] = E[X - E[X]]$.

Definición. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias. Llamamos **suma parcial n-ésima** de las variables a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Definición. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria. Se tienen los siguientes conceptos de convergencia:

1. Convergencia Casi Segura

Se dice que $\{X_n\}$ converge con probabilidad 1 o de forma casi segura a X si $P[\lim\limits_{n\to\infty} |X_n - X| = 0] = 1$. Se representa: $X_n \xrightarrow{c-s} X$.

2. Convergencia en Probabilidad

Se dice que $\{X_n\}$ converge en probabilidad a X si para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} P[|X_n - X| \leq \varepsilon] = 1$. Se representa: $X_n \xrightarrow{P} X$.

3. Convergencia en r-media

Se dice que $\{X_n\}$ converge en r-media (para $r > 0$) a X si $\lim\limits_{n\to\infty} E|X_n - X|^r =$

0, supuesto que existe $E[|X_n - X|^r]$. Se representa: $X_n \xrightarrow{r} X$.

Estas definiciones son totalmente análogas para vectores y elementos aleatorios y las siguientes relaciones entre los distintos tipos de convergencia que vamos a enunciar ahora se siguen manteniendo para estos casos más generales.

$X_n \xrightarrow{c-s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ pero $X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{c-s} X$

$X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ pero $X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{r} X$

$X_n \xrightarrow{r} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{a-s} X$ y $X_n \xrightarrow{a-s} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{r} X$

Bibliografía

[1] Beck, A., *On the strong law of large numbers.* Ergodic Theory. Academic Press, New York (1963), 21-53.

[2] Beck, A. and Warren, P., *Strong laws of large numbers for weakly orthogonal sequences of Banach space-valued random variables.* Annals of Probability **2** (1974), 918-925.

[3] Billingsley, P., Convergence of Probability Measures. Wiley, New York (1968) .

[4] Grenander, U., Probabilities on Algebraic Structures. Wiley, New York (1963).

[5] Halmos, P.R., Measure Theory. Springer-Verlag, New York (1974).

[6] Hoffman-Jorgensen, J. and Pisier, P., *The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces.* Annals of Probability **4** (1976), 587-599.

[7] Marti, J.T., Introduction to the Theory of Bases. Springer-Verlag, New York (1969).

[8] Rudin, W., Functional Analysis. McGraw-Hill, New York (1973).

[9] Taylor, R.L., *Weak laws of large numbers in normed linear spaces.* Ann. Math. Statist. **43** (1972), 1267-1274.

[10] Taylor, R.L., Stochastic Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Linear Spaces. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 672, Springer-Verlag, Berlin (1978).

[11] Woyczynski, W.A., *Random series and law of large numbers in some Banach spaces.* Theory of Probability and Appl. **18** (1973), 350-355.