

Estudio del comportamiento asintótico de un modelo en epidemiología



María José Minuesa Abril

TRABAJO FIN DE GRADO
GRADO EN MATEMÁTICAS

Estudio del comportamiento asintótico de un modelo en epidemiología

Proyecto presentado por
María José Minuesa Abril
como Trabajo Fin de Grado
del Grado en Matemáticas
de la Universidad de Sevilla

Fdo. Tomás Caraballo Garrido

Catedrático de la Universidad de Sevilla

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Universidad de Sevilla

Sevilla, Junio 2017

Índice general

Abstract	1
Introducción	3
1. Propiedades básicas sobre sistemas diferenciales ordinarios	7
1.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio	9
1.2. Estabilidad para sistemas lineales	11
1.3. Estabilidad para sistemas no lineales	12
1.4. Método de estabilidad de Liapunov	14
1.5. Órbitas de sistemas autónomos	16
2. Sistemas diferenciales autónomos	19
2.1. Resultados previos para sistemas autónomos	19
2.1.1. Sistemas dinámicos	19
2.1.2. Atractor global	23
2.2. Modelo SIR autónomo	41
2.2.1. Comportamiento asintótico local de las soluciones	44
2.2.2. Comportamiento asintótico global de las soluciones	51
3. Sistemas diferenciales no autónomos	55
3.1. Resultados previos para sistemas no autónomos	56
3.1.1. Motivación	56
3.1.2. Atractor pullback	65
3.2. Modelo SIR no autónomo	77
Bibliografía	87

Abstract

Nowadays, mathematical models are one of the most popular tools to study epidemics due to the fact that they enable to analyze and simulate the incidence, spread, persistence or control of infectious diseases.

Within an epidemiological framework, the aim of the present work is to study deterministic SIR models. These models are suitable for the description of infectious diseases with relatively short periods of infection and immune response. Instead of analyzing the behaviour of each single individual, these models are based on the classification of the individuals of the population into three classes (*Susceptible*, *Infectious* and *Recovered*) and they describe the dynamics among these three classes through a system with three differential equations. In particular, in this work we consider two situations: the first and simplest case, in which the population size is constant and is modelled by an autonomous differential system, and the second and more complex one, in which the total number of individuals in the population may change throughout the time and the dynamics among the different classes is modelled by a non-autonomous differential system. In both cases, we study the asymptotic behaviour of the resulting model.

For the aforementioned study, it is necessary to review the scientific literature on autonomous and non-autonomous dynamical systems, with the aim to apply the aforesaid results to the considered the SIR models. To that end, we present some results on autonomous dynamical systems and in particular, on the *global attractor*, which are of interest for their application to the SIR model defined by an autonomous system. Then, we present some of the main results of interest on non-autonomous dynamical systems and more specifically on the *pullback attractor*, which will be applied to the second SIR model considered, which is defined by a non-autonomous system.

Introducción

La modelización en epidemiología tiene como objetivo fundamental tratar de describir la prevalencia y distribución de especies junto con factores que determinan la incidencia, expansión y persistencia de la enfermedad de interés.

El origen de los modelos matemáticos en epidemiología se remonta al siglo XVIII (Bernoulli, 1760). Sin embargo, no fue hasta principios de 1900 cuando los enfoques basados en sistemas dinámicos comenzaron a ser cada vez más populares y se aplicaron a la epidemiología. Desde entonces, la epidemiología teórica ha sido testigo de numerosos avances conceptuales y técnicos muy significativos, algunos de ellos pueden encontrarse en [1], [4], [5] y [8].

En este trabajo abordaremos el modelo epidemiológico más simple. En el cual se asume que, o bien los individuos son susceptibles a la infección, o bien son infecciosos, o bien se han recuperado de la infección (es decir, han estado infectados previamente y se encuentran actualmente inmunizados) o han sido eliminados (es decir, han sido aislados de la población para evitar contagios). Para describir la dinámica entre estas tres clases presentamos y estudiamos una formulación matemática para describirla.

Con el fin de desarrollar dicho modelo matemático, precisaremos en primer lugar la terminología. Así, podemos establecer una clasificación de las enfermedades infecciosas en agudas o crónicas. Diremos que una enfermedad infecciosa es aguda si el periodo de infección es rápido, la respuesta inmune también es relativamente rápida y la eliminación de los patógenos se produce después de un corto periodo de tiempo (días o semanas). Algunas infecciones agudas son la gripe, la rabia, la varicela o la rubeola. El periodo de duración de las infecciones crónicas, por el contrario, es mucho más largo (meses o años), siendo ejemplos de las mismas el herpes o la clamidia.

Para el propósito de este trabajo, nos centraremos en un modelo para infecciones agudas, el *modelo SIR*, en el que se asume que el patógeno causa la enfermedad

durante un periodo de tiempo y a continuación se produce la inmunidad del individuo. Este modelo matemático fue introducido por Kermack y Mckendrick, 1927, y estudiado posteriormente por Dietz, 1967. En la formulación matemática inicial de este modelo, Kermack y Mckendrick que clasificaron los individuos de la población de interés en las tres clases anteriormente mencionadas y que dan nombre al modelo: *Susceptible* (Susceptibles), si los individuos no han estado previamente expuestos al patógeno; *Infected* (Infecciosos), si están infectados por el patógeno; y *Removed/Recovered* (Eliminados/Recuperados), si, o bien han sido aislados del resto de la población, o bien tras sufrir la infección la han eliminado completamente.

El modelo SIR en su forma más simple puede formularse como un conjunto de tres ecuaciones diferenciales y dependiendo de la naturaleza del sistema diferencial resultante hablaremos de modelo SIR autónomo o modelo SIR no autónomo. La formulación matemática de dichos sistemas y la descripción de la dinámica entre las distintas clases se realizará en los Capítulos 2 y 3, respectivamente.

Dentro del marco general de Ecuaciones Diferenciales, los objetivos perseguidos en el presente trabajo son:

1. Hacer una revisión de la literatura científica especializada en sistemas dinámicos autónomos.
2. Estudiar el concepto de atractor global, su estructura y propiedades.
3. Estudiar el comportamiento asintótico del modelo SIR autónomo haciendo uso de los resultados del atractor global.
4. Realizar una revisión exhaustiva de la literatura científica especializada en sistemas dinámicos no autónomos.
5. Estudiar la teoría basada en el atractor pullback.
6. Hacer uso de la teoría basada en el atractor pullback para el estudio del comportamiento asintótico global del modelo SIR no autónomo.

Este trabajo está estructurado en tres capítulos. En el Capítulo 1 realizamos un resumen de algunos conceptos y resultados sobre el comportamiento asintótico de las soluciones que han sido estudiados en las asignaturas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Ampliación de Ecuaciones Diferenciales. En el Capítulo 2, nos centraremos en los sistemas dinámicos autónomos, abordando la teoría relativa a los

mismos y al atractor global. Esto nos permitirá analizar en la última sección de este capítulo el comportamiento asintótico global del modelo SIR autónomo; además, estudiaremos el comportamiento asintótico local de las soluciones del modelo SIR utilizando resultados del Capítulo 1. De forma análoga al Capítulo 2, en el Capítulo 3 trataremos los sistemas dinámicos dinámicos no autónomos, exponiendo los principales resultados de interés junto como la teoría basada en el atractor pullback. Por último, aplicaremos estos resultados en el análisis del comportamiento asintótico global del modelo SIR no autónomo.

Propiedades básicas sobre sistemas diferenciales ordinarios

Nuestro objetivo fundamental es estudiar el comportamiento asintótico global de las soluciones de un sistema diferencial que en la práctica permite modelar ciertos fenómenos epidemiológicos. Esto motiva la realización de una revisión de la literatura científica especializada en sistemas de ecuaciones diferenciales. En el presente capítulo, realizaremos un resumen de resultados conocidos de las asignaturas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Ampliación de Ecuaciones Diferenciales, por este motivo las demostraciones de los mismos serán omitidos.

En dichas asignaturas se analiza el comportamiento asintótico de manera local de las soluciones del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = F(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

donde $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una función continua, definida sobre $\Omega = (\tau, \infty) \times B(0, \rho)$, para algún $\rho > 0$ y $\tau \in [-\infty, \infty)$, F es localmente lipschitziana respecto de y y satisface $F(t, 0) = 0$ para todo $t \in (\tau, \infty)$.

También se inicia el estudio del comportamiento global de sistemas autónomos

con resultados como el teorema de LaSalle y el teorema de Poincaré-Bendixson. El teorema de LaSalle es un teorema para sistemas autónomos aunque también existe una versión para el caso de sistemas no autónomos, mientras que el teorema de Poincaré - Bendixson sólo se aplica en sistemas autónomos con dimensión 2. Para nuestro propósito, será necesario analizar el comportamiento global de sistemas autónomos con dimensión $d \geq 3$ lo cual hace necesario introducir la teoría de sistema dinámicos, que engloba la teoría de sistemas diferenciales ordinarios. Por otra parte, en relación al estudio del comportamiento global de sistemas no autónomos, necesitamos examinar la teoría de sistemas dinámicos no autónomos, debido a que este estudio no ha sido abordado en las asignaturas mencionadas.

Recordemos que las soluciones de sistemas autónomos tienen la propiedad de ser invariantes por traslaciones en el tiempo. Por tanto, si $\varphi(t; t_0, y_0)$ denota la solución maximal de cierto sistema autónomo que en t_0 pasa por y_0 e $I(t_0, y_0)$ es el dominio de definición de dicha solución maximal, estudiar la estabilidad o inestabilidad de $\varphi(t; t_0, y_0)$ en $I(t_0, y_0)$ equivale a estudiar la estabilidad o inestabilidad de la solución $\varphi(t - t_0; 0, y_0)$ en $I(0, y_0) = I(y_0)$. Además, observemos que estudiar el comportamiento de $\varphi(t; 0, y_0)$ cuando $t \rightarrow \infty$ equivale a estudiar el comportamiento de una familia de operadores $\{S(t) : t \geq 0\}$ definida de la siguiente forma:

$$S(t)y_0 = \varphi(t; 0, y_0),$$

donde $\{S(t) : t \geq 0\}$ cumple la propiedad de semigrupo, es decir,

$$S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2), \quad \text{para cualesquiera } t_1, t_2 \geq 0.$$

Este concepto de semigrupo se puede extender de manera abstracta para tratar otro tipo de problemas que veremos más adelante y estudiaremos cómo se comporta la familia de operadores $\{S(t) : t \geq 0\}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

La notación que emplearemos en este capítulo es la usada habitualmente en las asignaturas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Ampliación de Ecuaciones Diferenciales, y por tanto, no será especificada en su totalidad.

1.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio

A lo largo de esta sección, $C^0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ y $C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ denotarán el conjunto de funciones definidas sobre Ω y con valores en \mathbb{R}^d que son continuas y de clase 1, respectivamente, donde Ω es un subconjunto de \mathbb{R}^{d+1} . Además, si $F : (t, y) \in \Omega \rightarrow F(t, y) \in \mathbb{R}^d$ es localmente lipschitziana respecto de la variable y escribiremos $F \in Lip_{loc}(y, \Omega)$.

En primer lugar, consideramos el siguiente sistema no autónomo

$$\begin{cases} y' = F(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^d) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$, $\Omega = I \times B_\rho$, $I = (\tau, \infty)$, con $\tau \in [-\infty, \infty)$, $B_\rho = B(0, \rho)$ denota la bola abierta de centro 0 y radio $\rho > 0$ en \mathbb{R}^d , y F satisface $F(t, 0) = 0$ para todo $t \in I$.

Nota 1.1. Para sistemas autónomos, la condición $F \in Lip_{loc}(\Omega)$ implica $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ ya que función F no depende de la variable t .

De ahora en adelante, $\varphi(t; t_0, y_0)$ denotará la solución maximal del problema del valor inicial definido en (1.1), e $I(t_0, y_0)$ denotará su intervalo de definición. Además escribiremos $\varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ para referirnos a la función idénticamente nula. Así, podemos considerar la solución maximal del sistema (1.1) definida como $\varphi(t; t_0, 0) = \varphi_0(t)$, para cada $t \in I$, donde $I \subseteq I(t_0, 0)$, y en tal caso se dice que φ_0 es *punto de equilibrio* o *punto crítico* del sistema (1.1).

Comencemos recordando algunas definiciones de estabilidad de puntos de equilibrio de un sistema.

Definición 1.1. Se dice que la solución φ_0 de (1.1) es un equilibrio estable si para cualesquiera $t_0 \in I$ y $\varepsilon \in (0, \rho)$, existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) \in (0, \rho)$ tal que, si $|y_0| \leq \delta$, entonces:

(i) $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$.

(ii) $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon$, para cualquier $t \in [t_0, \infty)$.

Definición 1.2. Se dice que la solución φ_0 de (1.1) es equilibrio inestable si no es estable.

Nota 1.2.

(a) La Definición 1.1 puede ser reescrita de la siguiente manera:

Se dice que la solución φ_0 de (1.1) es un equilibrio estable si para cualesquiera $t_0 \in I$ y $\varepsilon \in (0, \rho)$, existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) \in (0, \rho)$ tal que, si $|y_0| \leq \delta$ entonces:

$$|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in I(t_0, y_0) \cap [t_0, \infty).$$

(b) El concepto de inestabilidad puede reescribirse de la siguiente manera:

Se dice que la solución φ_0 de (1.1) es un equilibrio inestable si existen $t_0 \in I$ y $\varepsilon \in (0, \rho)$ tales que, para cualquier $\delta \in (0, \rho)$, existe y_0 , con $|y_0| \leq \delta$, verificando:

$$|\varphi(t; t_0, y_0)| > \varepsilon, \quad \text{para cierto } t \in I(t_0, y_0) \cap [t_0, \infty)$$

Definición 1.3. Se dice que la solución φ_0 de (1.1) es un equilibrio uniformemente estable si para cualquier $\varepsilon \in (0, \rho)$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \rho)$ tal que, si $t_0 \in I$ e $|y_0| \leq \delta$, entonces:

(i) $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$.

(ii) $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon$, para cualquier $t \in [t_0, \infty)$.

Definición 1.4. Se dice que la solución φ_0 de (1.1) es un equilibrio atractivo si para cualquier $t_0 \in I$, existe $\mu = \mu(t_0) \in (0, \rho)$ tal que, si $|y_0| \leq \mu$, entonces:

(i) $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} |\varphi(t; t_0, y_0)| = 0$.

Definición 1.5. Se dice que la solución φ_0 de (1.1) es un equilibrio uniformemente atractivo si existe $\mu \in (0, \rho)$ tal que si $|y_0| \leq \mu$, entonces:

(i) $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$, para cualquier $t_0 \in I$.

(ii) Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $T_\varepsilon > 0$ verificando $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon$ para $t_0 \in I$ y $t \geq t_0 + T_\varepsilon$.

Definición 1.6. Sea φ_0 solución de (1.1).

(i) Se dice que la solución φ_0 es un equilibrio asintóticamente estable si es un equilibrio estable y atractivo.

(ii) Se dice que la solución φ_0 es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable si es equilibrio uniformemente estable y uniformemente atractivo.

Definición 1.7. Se dice que la solución φ_0 de (1.1) es un equilibrio exponencialmente asintóticamente estable si existen constantes $C > 0, \gamma \in (0, \rho)$ y $\alpha > 0$ tales que:

(i) $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$, para cualesquiera $t_0 \in I$, e $|y_0| \leq \gamma$.

(ii) $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq C|y_0|e^{-\alpha(t-t_0)}$, para cualesquiera $t_0 \in I$, $|y_0| \leq \gamma$, y $t \geq t_0$.

Una vez revisadas las definiciones de puntos de equilibrio, vamos a enunciar algunos métodos para analizar la estabilidad de dichos puntos de equilibrio.

1.2. Estabilidad para sistemas lineales

A lo largo de esta sección, consideraremos el siguiente sistema diferencial ordinario (s.d.o.) lineal homogéneo:

$$y' = A(t)y, \quad (1.2)$$

y el s.d.o. lineal no homogéneo:

$$y' = A(t)y + b(t), \quad (1.3)$$

donde $A \in C^0(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ denota el conjunto de matrices cuadradas de orden d , $b \in C(I, \mathbb{R}^d)$, y $I = (\tau, +\infty)$, con $\tau \in [-\infty, \infty)$.

En primer lugar, observemos que la función idénticamente nula es un punto de equilibrio del sistema (1.2), por tanto, es de interés estudiar la estabilidad de dicha solución. Como anteriormente habíamos mencionado, estudiar la estabilidad o inestabilidad de $\varphi(t; t_0, y_0)$ en $I(t_0, y_0)$ equivale a estudiar la estabilidad o inestabilidad de la solución $\varphi(t - t_0; 0, y_0)$ en $I(0)$, y por tanto, se habla de estabilidad de sistema diferencial.

Para el propósito de este trabajo, nos centraremos en el s.d.o. definido en (1.2) en el que $A(t)$ es una matriz de coeficientes constantes, es decir, $A(t) \equiv A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ para cualquier $t \in I$. Para dicho sistema, estudiamos la estabilidad de sus puntos de equilibrio en el siguiente resultado; la estabilidad en el caso general (1.2) puede consultarse en [7].

Teorema 1.1. *Consideremos el sistema lineal:*

$$y' = Ay, \quad (1.4)$$

donde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ es conocida. Sea $\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{C}$ el conjunto de autovalores distintos de la matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Se verifica:

- (i) La solución φ_0 de (1.4) es uniformemente asintóticamente estable si y sólo si $Re(\lambda_i) < 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.
- (ii) La solución φ_0 de (1.4) es uniformemente estable si y sólo si $Re(\lambda_i) \leq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ y las cajas de Jordan asociadas a λ_j donde $1 \leq j \leq n$ y $Re(\lambda_j) = 0$ tienen dimensión 1.
- (iii) La solución φ_0 de (1.4) es inestable si y sólo si existe λ_j , con $1 \leq j \leq n$, tal que, o bien $Re(\lambda_j) > 0$, o bien $Re(\lambda_j) = 0$ y λ_j tiene asociada una caja de Jordan asociada de dimensión mayor o igual que dos.

Recordemos que estudiar la estabilidad de cualquier solución $\varphi_1 \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$ de (1.3) en I se reduce a estudiar la estabilidad en un s.d.o. lineal homogéneo. Para ello basta hacer el cambio de $z = y - \varphi_1(t)$ y estudiar la estabilidad de la solución nula φ_0 del nuevo sistema puesto que el sistema resultante es un sistema homogéneo.

1.3. Estabilidad para sistemas no lineales

En esta sección analizamos la estabilidad de s.d.o. más generales, los s.d.o. no lineales. En primer lugar, nos centraremos en s.d.o. no lineales que se escriben como suma de una parte lineal más una perturbación no lineal, así consideramos s.d.o no lineal definido como

$$y' = A(t)y + g(t, y), \quad (1.5)$$

donde $A \in C^0(\tilde{I}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$, $g \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^d) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$ para un intervalo \tilde{I} y un abierto conexo no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ tales que $I \times B_\rho \subset \Omega \subset \tilde{I} \times \mathbb{R}^d$, para $I = (\tau, \infty)$,

con $\tau \in [-\infty, \infty)$ y $\rho \in (0, \infty]$. Además asumamos que $g(t, 0) = 0$ para cualquier $t \in I$.

La condición anterior garantiza que la función idénticamente nula $\varphi_0(t) = 0$ es solución del sistema (1.5) en I , y en consecuencia, φ_0 es también solución en \tilde{I} del sistema lineal homogéneo asociado (1.2).

Teorema 1.2 (Teorema de estabilidad en primera aproximación). *Bajo las condiciones anteriores se verifica:*

(i) Si

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{|g(t, y)|}{|y|} = 0,$$

uniformemente en I (es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\mu \in (0, \rho)$ tal que si $|y| \leq \mu$ se tiene $g(t, y) \leq \varepsilon|y|$, para todo $t \in I$), entonces si φ_0 es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema lineal (1.2), se tiene que φ_0 es un equilibrio exponencialmente asintóticamente estable del sistema no lineal (1.5).

(ii) Supongamos que $g(t, y) \leq \alpha(t)|y|$, para cualesquiera $(t, y) \in I \times B_\rho$, con $\alpha \in C^0(I)$ satisfaciendo

$$\int_\tau^\infty \alpha(t) dx \leq \infty.$$

Entonces si φ_0 es un equilibrio uniformemente estable del sistema lineal (1.2), se tiene que φ_0 es un equilibrio uniformemente estable del sistema no lineal (1.5).

En segundo lugar nos centramos en el caso más general, sistemas diferenciales no lineales definidos como

$$y' = F(y), \tag{1.6}$$

donde F es una función no lineal de la variable y , $F \in C^1(D)$ y $D \subset \mathbb{R}^d$. Un método para estudiar la estabilidad de puntos de equilibrio de sistemas no lineales como el definido en (1.6) es la linealización.

Definición 1.8. *Sea $x_0 \in D$ un punto de equilibrio del sistema no lineal (1.6), diremos que*

$$A = DF(x_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}$$

es la matriz del sistema linealizado del sistema (1.6) en el punto x_0 .

Teorema 1.3. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ la matriz del sistema linealizado de un sistema no lineal (1.6) en un punto de equilibrio x_0 . Sea $\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{C}$ el conjunto de autovalores distintos de la matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Entonces:*

- (i) *Si existe λ_j , con $1 \leq j \leq n$, tal que $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$, el punto de equilibrio x_0 es inestable.*
- (ii) *Si $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, el punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable.*
- (iii) *En otros casos, la linealización no decide la estabilidad.*

La demostración de este resultado puede consultarse en [12].

1.4. Método de estabilidad de Liapunov

En esta sección consideramos el sistema s.d.o. autónomo definido por

$$y' = F(y), \tag{1.7}$$

con $F : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto conexo no vacío y $F \in C^0(D; \mathbb{R}^d) \cap \operatorname{Lip}_{loc}(D)$. Asumamos también que existe $\rho \in (0, \infty)$ tal que $B_\rho \subseteq D$ y $F(0) = 0$.

Los resultados que exponemos a continuación establecen condiciones suficientes para la estabilidad e inestabilidad de las soluciones del s.d.o. considerado, haciendo uso de las funciones de Liapunov cuya definición recordamos a continuación.

Definición 1.9. *Sean $\rho \in (0, \infty)$ y $V \in C^0(\overline{B}_\rho)$ una función real.*

- (i) *Se dice que la función V es definida positiva en B_ρ si $V(0) = 0$ y $V(y) > 0$, para todo $y \in \overline{B}_\rho \setminus \{0\}$.*
- (ii) *Se dice que la función V es semi-definida positiva en B_ρ si $V(0) = 0$ y $V(y) \geq 0$, para todo $y \in \overline{B}_\rho \setminus \{0\}$.*
- (iii) *Se dice que la función V es definida negativa o semi-definida negativa si $-V$ es definida positiva o semi-definida positiva, respectivamente.*

Definición 1.10. Sea $V : B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $V \in C^1(B_\rho)$, donde $\rho > 0$.

(i) Se denomina derivada de V respecto del sistema autónomo (1.7) a la función $\dot{V} : B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\dot{V}(y) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial V}{\partial y_i}(y) F_i(y), \quad \text{para cada } y \in B_\rho.$$

(ii) Se dice que $V \in C^1(B_\rho) \cap C^0(\overline{B}_\rho)$ es una función de Liapunov de B_ρ para el sistema autónomo (1.7) si V es definida positiva en B_ρ y $\dot{V}(y) \leq 0$, para todo $y \in B_\rho$.

Teorema 1.4 (Condiciones suficientes de estabilidad de Liapunov). Sean $\rho > 0$, tal que $B_\rho \subset D$ y $V \in C^1(\overline{B}_\rho)$ una función de Liapunov en B_ρ para el sistema (1.7). Entonces, se tiene:

- (i) La solución φ_0 de (1.7) en \mathbb{R} es uniformemente estable.
- (ii) Si además \dot{V} es definida negativa en B_ρ , entonces la solución φ_0 de (1.7) en \mathbb{R} es uniformemente asintóticamente estable.
- (iii) Si existen constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ tales que

$$c_1|y|^2 \leq V(y) \leq c_2|y|^2, \quad y \dot{V}(y) \leq -c_3|y|^2, \quad \forall y \in B_\rho, \quad (1.8)$$

entonces la solución φ_0 de (1.7) en \mathbb{R} es exponencialmente asintóticamente estable.

Teorema 1.5 (Teorema de Tchetaev. Condición suficiente de inestabilidad). Supongamos que existen $\rho > 0$ y $V \in C^1(\overline{B}_\rho)$ tales que $B_\rho \subset D$ y se verifica

- (i) $V(0) = 0$.
- (ii) \dot{V} es definida positiva en B_ρ .
- (iii) Para cualquier $\sigma \in (0, \rho)$ existe $y_\sigma \in B_\sigma$ tal que $V(y_\sigma) > 0$.

Entonces la solución nula φ_0 de (1.7) es inestable.

1.5. Órbitas de sistemas autónomos

En esta sección consideramos el sistema s.d.o. autónomo

$$y' = F(y), \quad (1.9)$$

con $F : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto conexo no vacío y $F \in Lip_{loc}(D)$.

Comenzaremos recordando algunos resultados y definiciones sobre órbitas de sistemas autónomos.

Proposición 1.1. *Consideramos el sistema autónomo (1.9) con $F \in Lip_{loc}(D)$. Para $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in D$, sea $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ la solución maximal del problema de Cauchy asociado a (1.9). Entonces,*

$$(i) \quad I(t_0, y_0) = t_0 + I(0, y_0) \equiv t_0 + I(y_0).$$

$$(ii) \quad \varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t - t_0; 0, y_0), \text{ para cualquier } t \in I(t_0, y_0).$$

A diferencia del resultado anterior, la siguiente proposición establece un resultado que es válido para cualquier sistema diferencial ordinario, sea autónomo o no.

Proposición 1.2. *Consideremos el sistema autónomo (1.9) con $F \in Lip_{loc}(D)$. Sean $t \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in D$. Entonces, si $t_1 \in I(t_0, y_0)$ e $y_1 = \varphi(t; t_1, y_1)$, se tiene $I(t_0, y_0) = I(t_1, y_1)$ y*

$$\varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t; t_1, y_1), \quad \text{para todo } t \in I(t_0, y_0).$$

Corolario 1.1. *En las condiciones de la Proposición 1.1, sea $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in D$, $t_1 \in I(y_0)$ e $y_1 = \varphi(t_1; 0, y_0)$. Entonces, $I(y_0) = t_1 + I(y_1)$ y*

$$\varphi(t; 0, y_1) = \varphi(t + t_1; 0, y_0), \quad \text{para todo } t \in I(y_1);$$

(equivalentemente, $\varphi(t; 0, y_0) = \varphi(t - t_1; 0, y_1)$ para cualquier $t \in I(y_0)$).

Definición 1.11. *Sea $y_0 \in D$ y denotemos $I(y_0) = I(0, y_0)$. Se llama órbita del sistema autónomo (1.9) asociada a y_0 al conjunto $\gamma(y_0)$ dado por*

$$\gamma(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0)\} \subset D.$$

Definición 1.12. Sea $y_0 \in D$.

(i) Definimos la semiórbita positiva del sistema (1.9) asociada a y_0 como el conjunto:

$$\gamma^+(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0), t \geq 0\},$$

(ii) Definimos la semiórbita negativa del sistema (1.9) asociada a y_0 como el conjunto:

$$\gamma^-(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0), t \leq 0\},$$

Definición 1.13. Sea $\Gamma \subseteq D$.

(i) Se dice que Γ es un conjunto invariante para el sistema autónomo (1.9) si para cualquier $y_0 \in \Gamma$ se satisface $\gamma(y_0) \subseteq \Gamma$.

(ii) Se dice que Γ es un conjunto positivamente invariante (resp., negativamente invariante) para el sistema autónomo (1.9) si se tiene $\gamma^+(y_0) \subseteq \Gamma$ (resp., $\gamma^-(y_0) \subseteq \Gamma$), para cualquier $y_0 \in \Gamma$.

Definición 1.14.

(i) Se dice que $p \in \mathbb{R}^d$ es un punto límite positivo (resp., punto límite negativo) asociado al sistema (1.9) y al punto $y_0 \in D$ si existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I(t_0)$ tal que

(a) $\lim t_n = \sup I(y_0)$ y $t_n \rightarrow \infty$ (resp., $\lim t_n = \inf I(y_0)$ y $t_n \rightarrow -\infty$).

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n; 0, y_0) = p$.

(ii) Dado $y_0 \in D$, se denomina conjunto límite positivo asociado al sistema (1.9) y al punto y_0 al conjunto

$$\Lambda^+(y_0) = \{p \in \mathbb{R}^d : p \text{ es un punto límite positivo asociado a (1.9) y a } y_0\},$$

y conjunto límite negativo asociado al sistema (1.9) y al punto y_0 al conjunto

$$\Lambda^-(y_0) = \{p \in \mathbb{R}^d : p \text{ es un punto límite negativo asociado a (1.9) y a } y_0\},$$

A continuación, enunciamos el principio de invarianza de LaSalle, que establece condiciones suficientes para la existencia de conjuntos invariantes respecto del sistema autónomo considerado que atraen las órbitas del sistema.

Teorema 1.6 (Principio de Invariancia de LaSalle). Sean $K \subset D$ un conjunto compacto y positivamente invariante con respecto a (1.7), $V : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V} \leq 0$ en K , E el conjunto de todos los puntos de K donde $\dot{V}(y) = 0$, y M el mayor conjunto invariante contenido en E . Entonces toda solución que comienza en K tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 1.7 (Teorema de Poincaré-Bendixson). Consideremos el sistema autónomo (1.9) con $F \in C^1(D)$ y $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto conexo no vacío. Sea $y_0 \in K \subset D$ con K un compacto tal que $\gamma^+(y_0) \subset K$ (resp., $\gamma^-(y_0) \subset K$). Supongamos que $\Lambda^+(y_0)$ (resp., $\Lambda^-(y_0)$) no contiene puntos críticos de (1.9). Entonces,

- (i) $\Lambda^+(y_0)$ (resp., $\Lambda^-(y_0)$) es una órbita cíclica no degenerada.
- (ii) O bien $\gamma(y_0)$ es una órbita cíclica (y en el caso $\gamma(y_0) = \Lambda^+(y_0)$) (resp., $\gamma(y_0) = \Lambda^-(y_0)$), o bien $\gamma^+(y_0)$ (resp., $\gamma^-(y_0)$) se acerca en espiral hacia $\Lambda^+(y_0)$ (resp., $\Lambda^-(y_0)$), en cuyo caso se dice que $\Lambda^+(y_0)$ (resp., $\Lambda^-(y_0)$) es un ciclo-límite.

Para la demostración de este resultado, referimos al lector a [11].

Sistemas diferenciales autónomos

En este capítulo nos centraremos en los objetivos 1, 2 y 3 establecidos en la Introducción. En concreto, en la Sección 2.1 presentamos un resumen de propiedades y resultados de interés sobre sistemas dinámicos autónomos y el atractor global. En la Sección 2.2 aplicamos dichos resultados, así como resultados del Capítulo 1, al estudio del comportamiento asintótico del modelo SIR autónomo.

2.1. Resultados previos para sistemas autónomos

En esta sección consideramos el sistema s.d.o. autónomo

$$y' = F(y), \tag{2.1}$$

donde $F : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $F \in Lip_{loc}(D)$ y $D \subseteq \mathbb{R}^d$ es un abierto conexo no vacío.

Recordemos que en este caso los conceptos de estabilidad y estabilidad uniforme y de atractividad y atractividad uniforme son equivalentes.

2.1.1. Sistemas dinámicos

Definición 2.1. *Sea X un espacio métrico. Un sistema dinámico continuo es una familia de aplicaciones $\{S(t) : t \in \mathbb{R}\}$ definidas como:*

$$\begin{aligned} S(t) : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto S(t)x \end{aligned}$$

y que verifican:

(i) $S(0)x = Id_X(x)$.

(ii) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$, para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

(iii) $S(t) : X \rightarrow X$ es una aplicación continua para todo $t \in \mathbb{R}$.

(iv) La aplicación $t \in \mathbb{R} \mapsto S(t)x$ es una aplicación continua para cada $x \in X$.

El conjunto X se conoce como espacio de fases o espacio de estados, ya que sus elementos representan los posibles estados del sistema.

Definición 2.2. Sea X un espacio métrico. Un sistema semi-dinámico continuo o semigrupo es una familia de aplicaciones $\{S(t) : t \geq 0\}$ definidas como:

$$\begin{aligned} S(t) : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto S(t)x \end{aligned}$$

y que verifican:

(i) $S(0)x = Id_X(x)$.

(ii) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$, para cada $t_1, t_2 \geq 0$.

(iii) $S(t) : X \rightarrow X$ es una aplicación continua para todo $t \geq 0$.

(iv) La aplicación $t \in [0, \infty) \mapsto S(t)x$ es una aplicación continua para cada $x \in X$.

La propiedad (ii) de la Definición 2.1 se conoce como la propiedad de grupo, ya que la familia de aplicaciones $\{S(t) : t \in \mathbb{R}\}$ forma un grupo con la composición. De manera análoga, la propiedad (ii) de la Definición 2.2 se conoce como propiedad de semigrupo. Además, observemos que todo sistema dinámico verifica las condiciones del sistema semi-dinámico y por tanto, define un sistema semi-dinámico.

Dado un sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$ tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3. Sean X un espacio métrico y $D \subset X$.

- (i) Se dice que D es positivamente invariante si $S(t)D \subseteq D$, para todo $t \geq 0$.
- (ii) Se dice que D es negativamente invariante si $S(t)D \supseteq D$, para todo $t \geq 0$.
- (iii) Se dice que D es invariante si $S(t)D = D$, para todo $t \geq 0$.

Notemos que si $S(t)$ tiene inversa para todo $t \geq 0$, y extendemos el sistema semi-dinámico a todo $t \in \mathbb{R}$, identificando $S(-t)$ con $S(t)^{-1}$ para $t > 0$, y D es un conjunto invariante entonces

$$D = (S(t)^{-1} \circ S(t))D = S(t)^{-1}D = S(-t)D, \quad t \geq 0.$$

Por tanto, la Definición 2.3 (iii) equivale en este caso a decir que $S(t)D = D$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Puesto que en este trabajo nos vamos a centrar en los sistemas semi-dinámicos continuos, a partir de ahora omitiremos la palabra continuos.

Algunas definiciones del capítulo anterior pueden reescribirse en términos del sistema semi-dinámico como veremos a continuación.

Para el propósito de este trabajo consideraremos $X = \mathbb{R}^d$, es decir, nos centraremos en sistemas de dimensión finita. De ahora en adelante, consideraremos el sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$ definido como:

$$S(t)y_0 = \varphi(t; 0, y_0),$$

donde $\varphi(t; 0, y_0)$ denota la solución maximal del sistema (2.1) tal que $\varphi(0; 0, y_0) = y_0$. Observemos en primer lugar que el sistema así definido (para aquellos valores de t del intervalo de definición de la solución maximal) es, en efecto, un sistema semi-dinámico ya que:

- (i) $S(0)y_0 = \varphi(0; 0, y_0) = y_0$.
- (ii) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$ se obtiene aplicando el Corolario 1.1 del Capítulo 1 ya que

$$S(t_1 + t_2)y_0 = \varphi(t_1 + t_2; 0, y_0) = \varphi(t_1; 0, \varphi(t_2; 0, y_0)) = (S(t_1) \circ S(t_2))y_0.$$

(iii) Para cada $t \geq 0$, $S(t)(\cdot) = \varphi(t; 0, \cdot)$ es una aplicación continua ya que a condiciones iniciales próximas le corresponden soluciones próximas, (véase [10]). Esta propiedad fue estudiada en la asignatura de Ampliación de Ecuaciones Diferenciales.

(iv) $S(\cdot)y_0 = \varphi(\cdot; 0, y_0)$ es una aplicación continua para cada y_0 por ser derivable.

En este caso, como $\varphi(\cdot; 0, y_0)$ está definida en todo \mathbb{R} , tiene sentido considerar la función $S(-t)$, con $t > 0$ y dicha función es exactamente $S(-t) = S(t)^{-1}$, $t > 0$ por el Corolario 1.1 del Capítulo 1. De hecho, se tiene que si escribimos $S(-t)y_0 = \varphi(-t; 0, y_0)$, entonces

$$(S(-t) \circ S(t))y_0 = \varphi(-t; 0, \varphi(t; 0, y_0)) = \varphi(-t + t; 0, y_0) = \varphi(0; 0, y_0) = y_0.$$

Definición 2.4. *Dados un espacio métrico X y $u \in X$, llamamos semiórbita positiva que pasa por u (o empieza en u) al conjunto:*

$$\gamma^+(u) = \{S(t)u : t \geq 0\}.$$

Definición 2.5. *Dados un espacio métrico X y $u \in X$, llamamos semiórbita negativa que pasa por u (o termina en u) al conjunto:*

$$\gamma^-(u) = \{S(-t)u : t > 0\}.$$

Definición 2.6. *Dados un espacio métrico X y $u \in X$, se llama órbita que pasa por u al conjunto $\gamma(u)$ dado por:*

$$\gamma(u) = \gamma^+(u) \cup \gamma^-(u).$$

Definición 2.7. *Sea $y_0 \in X$. Se dice que y_0 es un punto crítico o punto estacionario para el sistema (2.1) si se verifica $S(t)y_0 = y_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Nota 2.1. *Observemos que $y_0 \in X$ es un punto crítico para el sistema (2.1) si y solo si*

$$\gamma(y_0) = \{y_0\}.$$

Definición 2.8. Sean X un espacio métrico, $u_0 \in X$ y $D \subset X$.

(i) Llamamos conjunto ω - límite asociado a $u_0 \in X$ y denotado por $\omega(u_0)$ al conjunto:

$$\omega(u_0) = \{u \in X : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow \infty, S(t_n)u_0 \rightarrow u\}.$$

(ii) Llamamos conjunto ω - límite asociado a $D \subset X$ y denotado por $\omega(D)$ al conjunto:

$$\omega(D) = \{u \in X : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow \infty, \exists \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D, S(t_n)d_n \rightarrow u\}.$$

Lema 2.1. Sean X un espacio métrico, $u_0 \in X$, y $D \subset X$. Se verifica:

$$(i) \omega(u_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} S(s)u_0} = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\gamma_T^+(u_0)}, \text{ donde } \gamma_T^+(u_0) = \{S(t)u_0 : t \geq T\}.$$

$$(ii) \omega(D) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} S(s)D} = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\gamma_T^+(D)}, \text{ donde } \gamma_T^+(D) = \bigcup_{u \in D} \gamma_T^+(u).$$

La demostración de este resultado puede encontrarse en [9].

Nota 2.2. Si $\{S(t) : t \geq 0\}$ es un sistema semi-dinámico definido como:

$$S(t)y_0 = \varphi(t; 0, y_0),$$

donde $\varphi(t; 0, y_0)$ denota la solución maximal del sistema (2.1), entonces los conceptos límite positivo (definido en el Capítulo 1) y ω -límite coinciden.

2.1.2. Atractor global

Definición 2.9. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es absorbente respecto del sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$ si para todo $B \subset X$ acotado existe $T(B) \geq 0$ tal que:

$$S(t)B \subset A, \quad \text{para todo } t \geq T(B).$$

Definición 2.10. Sean A y B subconjuntos de X . Diremos que A atrae a B si

$$\text{dist}(S(t)B, A) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un tiempo $T = T(\varepsilon)$ tal que para todo $t \geq T$ y para todo $u \in B$ se tiene

$$\text{dist}(S(t)u, A) < \varepsilon.$$

Definición 2.11. Diremos que A es atractor puntual si atrae a cada punto de X .

Nota 2.3.

(i) La distancia que aparece en la definición anterior es en realidad la semi-distancia de Hausdorff, definida como:

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |a - b|.$$

(ii) Algunas propiedades de esta semi-distancia son:

(a) $\text{dist}(\emptyset, Y) = 0$.

(b) $\text{dist}(X, \emptyset)$ no está definida.

(c) $\text{dist}(X, Y) = \text{dist}(Y, X)$.

(d) Esta distancia no define una métrica debido a que $\text{dist}(X, Y) = 0$ sólo implica que $X \subset \bar{Y}$.

(e) Si $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow \text{dist}(X, Y_1) \geq \text{dist}(X, Y_2)$.

(f) Si $X_1 \subset X_2 \Rightarrow \text{dist}(Y, X_1) \leq \text{dist}(Y, X_2)$.

Definición 2.12. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{S(t) : t \geq 0\}$ un sistema semi-dinámico. Se dice que $\mathcal{A} \subset X$ es un atractor global para $\{S(t) : t \geq 0\}$ si verifica:

(i) \mathcal{A} es compacto.

(ii) \mathcal{A} es invariante.

(iii) \mathcal{A} atrae a todos los subconjuntos acotados de X .

Existencia de atractor global

A continuación vamos a establecer una condición suficiente de existencia de atractor global. Para ello haremos uso del siguiente lema.

Lema 2.2. *Sea $B \subset X$. Si para algún $T > 0$ el conjunto*

$$\overline{\gamma_T^+(B)} = \overline{\bigcup_{t \geq T} S(t)B}$$

es compacto, entonces $\omega(B)$ es no vacío, compacto e invariante.

Demostración.

Veamos en primer lugar que $\omega(B)$ es no vacío. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ una sucesión arbitraria y consideremos una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a infinito. Puesto que esta sucesión converge a infinito existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq T$ para todo $n \geq n_0$, y por tanto, $S(t_n)x_n \in \overline{\gamma_T^+(B)}$, para todo $n \geq n_0$. Por hipótesis, $\overline{\gamma_T^+(B)}$ es compacto luego existen dos subsucesiones $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $S(t_{n_k})x_{n_k} \rightarrow x \in \omega(B)$, cuando $k \rightarrow \infty$, y en consecuencia, el conjunto $\omega(B)$ es no vacío.

Para probar la compacidad de $\omega(B)$ observemos que $\omega(B) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\gamma_T^+(B)}$, y por tanto, $\omega(B)$ es un cerrado. Ahora teniendo en cuenta que $\omega(B) \subseteq \overline{\gamma_T^+(B)}$ y $\overline{\gamma_T^+(B)}$ es un conjunto compacto se deduce que $\omega(B)$ es compacto.

Para probar la invarianza probaremos la doble contención. Fijemos $t \geq 0$, y comencemos probando que se verifica $S(t)\omega(B) \subset \omega(B)$. Sea $x \in \omega(B)$, existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$, y existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a infinito tal que $S(t_n)x_n \rightarrow x$. Entonces, por las propiedades del sistema semi-dinámico se tiene,

$$S(t)x = S(t) \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t + t_n)x_n,$$

donde $t + t_n \rightarrow \infty$, y en consecuencia, $S(t)x \in \omega(B)$.

Finalmente probemos que se verifica $\omega(B) \subset S(t)\omega(B)$. Sea $y \in \omega(B)$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ y una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tendiendo a infinito tal que $S(t_n)x_n \rightarrow y$. Por tanto,

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t + (t_n - t))x_n = S(t) \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n - t)x_n.$$

De la compacidad de $\omega(B)$, se deduce que existe $z \in X$ y una subsucesión

$\{S(t_{n_k} - t)x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ verificando

$$S(t_{n_k} - t)x_{n_k} \rightarrow z, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Así, por la Definición 2.8 se tiene que $z \in \omega(B)$. Usando la continuidad del sistema semi-dinámico y que toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y converge al mismo límite, obtenemos

$$y = S(t) \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n - t)x_n = S(t)z,$$

es decir, $y \in S(t)\omega(B)$.

□

Teorema 2.1 (Condición suficiente de existencia de atractor global). *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Supongamos que $\{S(t) : t \geq 0\}$ es un sistema semi-dinámico en dicho espacio y que existe $B \subset X$ absorbente y compacto. Entonces existe un atractor global \mathcal{A} definido por $\mathcal{A} = \omega(B)$. Además, si X es conexo, entonces \mathcal{A} es conexo.*

Demostración.

Probemos en primer lugar que el conjunto $\mathcal{A} = \omega(B)$ está bien definido, es decir, es un conjunto no vacío, y que es compacto e invariante. Como B es un conjunto absorbente y compacto, existe $T(B) = T > 0$ tal que $S(t)B \subset B$ para $t \geq T$ y entonces $\overline{\gamma_T^+(B)} \subset B$. Puesto que B compacto y $\gamma_T^+(B) \subset B$ se tiene $\overline{\gamma_T^+(B)} \subset B$, luego $\overline{\gamma_T^+(B)}$ es compacto. Ahora, aplicando el Lema 2.2 se tiene que el conjunto \mathcal{A} es no vacío, compacto e invariante.

Probemos en segundo lugar que atrae acotados por reducción al absurdo. Supongamos que no atrae a acotados, es decir, existe $D \subset X$ acotado tal que dado $\delta > 0$ podemos construir una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a infinito verificando

$$\text{dist}(S(t_n)u_n, \mathcal{A}) \geq \delta > 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Además, podemos elegir una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\text{dist}(S(t_n)u_n, \mathcal{A}) \geq \frac{\delta}{2}. \tag{2.2}$$

Como B es absorbente, existe un $T(D)$ tal que $S(t_n)u_n \subset B$ y $S(t_n)D \subset B$, para todo n que verifique $t_n \geq T(D)$. Por otra parte, por ser B compacto, existen subsucesiones $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $S(t_{n_k})u_{n_k} \rightarrow x$, cuando $k \rightarrow \infty$, es decir,

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} S(t_{n_k})u_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} S(t_{n_k} - t^*)S(t^*)u_{n_k}$$

donde t^* es tal que $S(t^*)D \subset B$, luego $x \in \omega(u_0)$ y esto contradice a (2.2).

Demostremos la última afirmación del teorema por reducción al absurdo. Supongamos que X es conexo y que $\omega(B)$ no es conexo, es decir, existen dos abiertos F_1, F_2 tales que:

$$\omega(B) \subset F_1 \cup F_2, \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset, \quad \omega(B) \cap F_i \neq \emptyset, \quad i = 1, 2.$$

Por ser B acotado, podemos tomar una bola cerrada conexa U tal que $B \subset U$. Es fácil comprobar que $\omega(B) \subset \omega(U)$ y que U es un conjunto absorbente. De hecho, por ser B absorbente, para cualquier conjunto acotado $D \subset X$ existe $T(D) \geq 0$ tal que

$$S(t)D \subset B \subset U, \quad \forall t \geq T(D).$$

Así razonando como en la primera parte del teorema se obtiene que $\omega(U)$ es no vacío, compacto e invariante; ahora, como $\omega(B) \subset \omega(U)$ y $\omega(B)$ es el mayor conjunto invariante se obtiene $\omega(B) = \omega(U)$. Observemos que por ser U conexo y por continuidad de $S(t)$ para todo $t \geq 0$ se tiene que $S(t)U$ es conexo para todo $t \geq 0$. Además, como B es absorbente y U acotado, existe $T(U)$ tal que $S(t)U \subseteq B \subset U$, para todo $t \geq T(U)$.

Por otra parte, $S(t)U$ es conexo y $S(t)U \cap F_i \neq \emptyset$, para $i = 1, 2$ y todo $t \geq 0$, entonces $S(t)U \not\subset F_1 \cap F_2$, para todo $t \geq 0$, así podemos elegir $u_n \in U$ de forma que

$$x_n = S(n)u_n \in S(n)U, \quad \text{y} \quad x_n \notin F_1 \cup F_2.$$

Notemos que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, ya que $x_n \in S(n)U \subset B$, para todo $n \geq T(U)$, luego tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \notin F_1 \cup F_2$ (ya que por ser $F_1^c \cap F_2^c$ cerrado contiene a todos los límites de sus sucesiones). Ahora bien, como $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada, $\omega(B)$ atractor y $x_{n_k} \in S(n_k)U$, para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\text{dist}(x_{n_k}, \omega(B)) \leq \text{dist}(S(n_k)U, \omega(B)) \rightarrow 0,$$

cuando $k \rightarrow \infty$, y en consecuencia, $x \in \omega(B) \subset F_1 \cup F_2$, con lo que obtenemos una contradicción. □

Lema 2.3. *Si existe un atractor global, este es único.*

Demostración.

Supongamos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son dos atractores globales y veamos que necesariamente $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. Por ser \mathcal{A}_1 atractor global, se tiene que \mathcal{A}_1 es invariante. Por lo tanto,

$$\text{dist}(S(t)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \text{dist}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

de donde se deduce que $\mathcal{A}_1 \subset \overline{\mathcal{A}_2} = \mathcal{A}_2$. La contención $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ se obtiene de manera análoga. □

Existen otras condiciones suficientes de existencia del atractor global, algunas de ellas pueden consultarse en [3] y [6].

Nota 2.4. *Estamos abordando solamente casos de dimensión finita, donde demostrar la existencia de atractor global se reduce a demostrar la existencia de un conjunto acotado absorbente. Esto se debe a la caracterización que se da en estos casos de que un conjunto es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado. Dicha caracterización en dimensión infinita no es cierta en general.*

Veamos un ejemplo de existencia de atractor global para un sistema autónomo aplicando el Teorema 2.1.

Ejemplo 2.1 (Las ecuaciones de Minea). *Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en \mathbb{R}^3 .*

$$\begin{cases} u_1' + u_1 + \delta(u_2^2 + u_3^2) = 1, \\ u_2' + u_2 - \delta u_1 u_2 = 0, \\ u_3' + u_3 - \delta u_1 u_3 = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde $\delta > 0$.

Sea $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ la solución maximal de dicho sistema que en $t = 0$ pasa por $u_0 = (u_1(0), u_2(0), u_3(0))$. Probemos que dicha solución permanece acotada cuando $t \rightarrow \infty$ (por tanto, está definida para todo $t \geq 0$) y que existe un conjunto acotado y absorbente.

Comencemos probando que $u(t)$ es una solución acotada. En primer lugar, multiplicamos la ecuación j del sistema (2.3) por u_j para $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} u_1' u_1 + u_1^2 + \delta(u_2^2 + u_3^2)u_1 = u_1, \\ u_2' u_2 + u_2^2 + \delta u_1 u_2^2 = 0, \\ u_3' u_3 + u_3^2 + \delta u_1 u_3^2 = 0, \end{cases}$$

sumamos estas tres ecuaciones del sistema y obtenemos:

$$u_1' u_1 + u_2' u_2 + u_3' u_3 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \delta u_1 u_2^2 + \delta u_1 u_3^2 - \delta u_1 u_2^2 - \delta u_1 u_3^2 = u_1.$$

Simplificando términos

$$u_1' u_1 + u_2' u_2 + u_3' u_3 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u_1;$$

y en consecuencia,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|u\|^2 = u_1.$$

Por una parte $u_1 = \sqrt{u_1^2} \leq \|u\|$. Por otra parte sabemos que $\|u\| \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2}$ ya que

$$\|u\| \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \|u\|^2 + 1 - 2\|u\| \geq 0 \Leftrightarrow (\|u\| - 1)^2 \geq 0.$$

De todo lo anterior se deduce

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|u\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2},$$

y, por tanto,

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|u\|^2 \leq 1.$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $v = \|u\|^2$, la desigualdad anterior equivale a:

$$v' + v \leq 1. \quad (2.4)$$

La igualdad en (2.4) se corresponde con una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea. Multiplicando ambos miembros en (2.4) por e^t

$$e^t v' + e^t v \leq e^t,$$

es decir,

$$(e^t v)' \leq e^t.$$

Integramos entre 0 y t

$$e^t v(t) - v(0) \leq e^t - 1,$$

y reordenando términos $v(t) \leq v(0)e^{-t} + 1 - e^{-t}$, de donde se deduce que $\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-t} + 1 - e^{-t}$ y, por tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| \leq 1$ de donde se deduce que $u(t)$ es solución acotada.

Veamos ahora que toda bola cerrada de centro $(0, 0, 0)$ y radio $\varepsilon > 1$, $B[(0, 0, 0), \varepsilon]$, es un conjunto absorbente (la compacidad es inmediata por ser una bola cerrada en \mathbb{R}^3).

Sea D un conjunto acotado en \mathbb{R}^3 , entonces existe $R > 0$ tal que $D \subseteq B((0, 0, 0), R)$. Probemos que $S(t)D \subseteq B[(0, 0, 0), \varepsilon]$ para todo $t \geq t(D) = \log\left(\frac{R^2}{\varepsilon^2 - 1}\right)$. Sea $u(t)$ solución del sistema (2.3) tal que $u_0 = (u_1(0), u_2(0), u_3(0)) \in D$, entonces para $t \geq t(D)$ se tiene

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq \|u(0)\|^2 e^{-t} + 1 - e^{-t} \\ &\leq R^2 e^{-t} + 1 - e^{-t} \\ &\leq R^2 e^{-t} \\ &\leq R^2 \frac{\varepsilon^2 - 1}{R^2} \\ &= \varepsilon^2 - 1 < \varepsilon^2, \end{aligned}$$

es decir, $S(t)u_0 = u(t) \in B[(0, 0, 0), \varepsilon]$.

Aplicando el Teorema 2.1, como existe un conjunto compacto absorbente, $B[(0, 0, 0), \varepsilon]$, con $\varepsilon > 1$, existe un atractor global y está definido por $\omega(B[(0, 0, 0), \varepsilon])$.

Estructura y características del atractor global

El estudio de la estructura y las propiedades del atractor global de un sistema dinámico son de gran importancia desde el punto de vista de las aplicaciones, ya que determinan en gran medida el comportamiento asintótico de un sistema semi-dinámico.

En este apartado examinaremos la relación del atractor global con las variedades estables e inestables de los puntos de equilibrio del sistema semi-dinámico. Además, proporcionaremos resultados para el caso de sistemas gradientes, ya que en estos sistemas se puede analizar en más profundidad la estructura de sus atractores.

Como paso previo, exponemos algunas propiedades generales de los atractores globales.

Teorema 2.2. *Sea $\{S(t) : t \geq 0\}$ un sistema semi-dinámico y \mathcal{A} su atractor global. Se verifica:*

- (i) *Toda órbita acotada y completa está incluida en el atractor.*
- (ii) *El atractor \mathcal{A} es la unión de órbitas completas y acotadas.*
- (iii) *Si $\{S(t) : t \geq 0\}$ es inyectivo, entonces por cada punto del atractor pasa una única órbita completa.*

Demostración.

(i) Sea $\gamma \subset X$ una órbita completa y acotada. Por ser \mathcal{A} atractor y γ acotada, se tiene que \mathcal{A} atrae a γ , es decir, $\text{dist}(S(t)\gamma, \mathcal{A}) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Por otro lado, toda órbita es un conjunto invariante, por tanto, $S(t)\gamma = \gamma$, para todo $t \geq 0$. Ahora bien, cuando $t \rightarrow \infty$,

$$\text{dist}(S(t)\gamma, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{dist}(\gamma, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{dist}(\gamma, \mathcal{A}) = 0,$$

luego, $\gamma \subset \mathcal{A}$.

(ii) Veamos ahora que el atractor \mathcal{A} es la unión de órbitas completas y acotadas.

Veamos en primer lugar $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \subset \mathcal{A}$, donde Γ denota el conjunto de todas las órbitas acotadas y completas. Por (i) sabemos que si $\gamma \in \Gamma$ entonces $\gamma \subseteq \mathcal{A}$, luego $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \subset \mathcal{A}$.

Veamos ahora que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$. Sea $x \in \mathcal{A}$, por ser \mathcal{A} atractor es invariante, luego para $t \geq 0$ $S(t)x \in \mathcal{A}$ y existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $S(t)y = x$. Por tanto, existe

la órbita completa que pasa por x , $\gamma(x)$, y es acotada, ya que \mathcal{A} es compacto, y en consecuencia,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \gamma(x) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma,$$

se deduce que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$.

(iii) Sea $u_0 \in \mathcal{A}$, por el apartado (ii) existe una órbita completa y acotada que pasa por u_0 , $\gamma(u_0) = \{S(t)u_0 : t \in \mathbb{R}\}$. Supongamos que existe otra órbita completa y acotada que pasa por u_0 , $\gamma(u_1) = \{S(t)u_1 : t \in \mathbb{R}\}$ y veamos que $\gamma(u_0) = \gamma(u_1)$. Como $u_0 \in \gamma(u_1)$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $S(t_0)u_1 = u_0$. Por una parte, si $u \in \gamma(u_0)$ entonces $u = S(t)u_0$ para algún $t \in \mathbb{R}$ y en consecuencia

$$u = S(t)u_0 = S(t)S(t_0)u_1 = S(t + t_0)u_1,$$

es decir, $u \in \gamma(u_1)$. Por otra parte, si $u \in \gamma(u_1)$, existe $t' \in \mathbb{R}$, tal que, $u = S(t')u_1$, y entonces

$$u = S(t')S(-t_0)u_0 = S(t' - t_0)u_0,$$

es decir, $u \in \gamma(u_0)$. □

Teorema 2.3. *Sea $\{S(t) : t \geq 0\}$ un sistema semi-dinámico y \mathcal{A} su atractor global. Se verifica:*

- (i) \mathcal{A} es el menor compacto que atrae a los acotados de X .
- (ii) \mathcal{A} es el mayor conjunto acotado e invariante de X .

Demostración.

(i) Veamos que \mathcal{A} es el menor compacto que atrae a los acotados de X . Sea B un compacto que atrae a los acotados de X , veamos que $\mathcal{A} \subseteq B$. Por ser \mathcal{A} atractor global, \mathcal{A} es compacto, por lo que será atraído por B , es decir, $\text{dist}(S(t)\mathcal{A}, B) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Por otra parte \mathcal{A} es atractor global, luego es un conjunto invariante, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$. Combinando esta afirmación con la anterior,

$$\text{dist}(\mathcal{A}, B) = \text{dist}(S(t)\mathcal{A}, B) \rightarrow 0,$$

cuando $t \rightarrow \infty$, de donde se deduce $\text{dist}(\mathcal{A}, B) = 0$ y por tanto, $\mathcal{A} \subset \overline{B} = B$.

(ii) Esta afirmación se probó en el Teorema 2.1.

□

A continuación, definimos las variedades estables e inestables de un punto de equilibrio y de un subconjunto invariante y examinaremos su relación con el atractor global.

Definición 2.13. Sea $u_0 \in X$ un punto de equilibrio. Se definen la variedad estable de u_0 y variedad inestable de u_0 como los conjuntos $\mathcal{W}^e(u_0)$ y $\mathcal{W}^u(u_0)$ definidos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^e(u_0) &= \{z \in X : S(t)z \text{ está definida para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)z = u_0\}. \\ \mathcal{W}^u(u_0) &= \{z \in X : S(t)z \text{ está definida para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t)z = u_0\}.\end{aligned}$$

Definición 2.14. Sea \mathcal{U} es un conjunto invariante. Se definen la variedad estable de \mathcal{U} y la variedad inestable de \mathcal{U} como los conjuntos $\mathcal{W}^e(\mathcal{U})$ y $\mathcal{W}^u(\mathcal{U})$ definidos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^e(\mathcal{U}) &= \{z \in X : S(t)z \text{ está definida para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t)z, \mathcal{U}) = 0\}. \\ \mathcal{W}^u(\mathcal{U}) &= \{z \in X : S(t)z \text{ está definida para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t)z, \mathcal{U}) = 0\}.\end{aligned}$$

Teorema 2.4. Si $\mathcal{U} \subset X$ es un conjunto compacto invariante, entonces $\mathcal{W}^u(\mathcal{U}) \subset \mathcal{A}$.

Demostración.

Sea $u \in \mathcal{W}^u(\mathcal{U})$. Por definición de $\mathcal{W}^u(\mathcal{U})$, existe una órbita completa $\gamma(u)$ que pasa por u y además verifica

$$\text{dist}(S(t)u, \mathcal{U}) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty.$$

Por otro lado, por ser \mathcal{A} atractor, atrae al punto u , es decir,

$$\text{dist}(S(t)u, \mathcal{A}) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Así, para t suficientemente pequeño, $S(t)u \in \mathcal{U}$ y para t suficientemente grande, $S(t)u \in \mathcal{A}$ y por tanto, γ es una órbita acotada. Finalmente, como $\gamma(u)$ es órbita

acotada y completa concluimos que $\gamma(u) \subset \mathcal{A}$ por el Teorema 2.2, luego $u \in \mathcal{A}$. □

Fijémonos ahora en el caso particular de los sistemas gradientes, que son aquellos sistemas para los que existe una función de Liapunov, cuya definición proporcionamos a continuación. Las funciones de Liapunov desempeñan un papel importante en la simplicación de la estructura del atractor.

Definición 2.15. *Sea $B \subset X$ un conjunto positivamente invariante para el sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$, llamamos función de Liapunov sobre B a cualquier función continua $\Phi : B \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:*

(i) *Para cada $x \in B$, la siguiente función es no creciente:*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \Phi(S(t)x). \end{aligned}$$

(ii) *Si para algún $x \in B$ se satisface la ecuación*

$$\Phi(S(t)x) = \Phi(x), \text{ para cada } t > 0,$$

entonces x es un punto de equilibrio.

Definición 2.16. *Sea $\{S(t) : t \geq 0\}$ un sistema semi-dinámico en X . Se dice que $\{S(t) : t \geq 0\}$ es un sistema gradiente si existe alguna función de Liapunov en X . Dicha función se conoce usualmente como función global.*

Teorema 2.5. *Supongamos que $\{S(t) : t \geq 0\}$ es un sistema semi-dinámico que posee atractor global y que existe una función de Liapunov Φ sobre B , siendo $B \subset X$ un conjunto compacto, absorbente y positivamente invariante, entonces se verifica*

$$\omega(u_0) \subset \mathcal{E}, \text{ para todo } u_0 \in B,$$

donde \mathcal{E} es el conjunto de puntos de equilibrio del sistema $\{S(t) : t \geq 0\}$. En particular, si X es conexo y \mathcal{E} es discreto, entonces para todo $u_0 \in B$, $\omega(u_0)$ es un conjunto unitario con un único punto crítico.

Demostración.

Para cada $u_0 \in B$, existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $S(t)u_0 \in B$ para todo $t \geq t_0$, y en particular $u_1 = S(t_0)u_0 \in B$. Probemos en primer lugar que $\omega(u_0) = \omega(u_1)$. Sea $u \in \omega(u_0)$ y veamos que $u \in \omega(u_1)$. Como $u \in \omega(u_0)$, existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ y $S(t_n)u_0 \rightarrow u$. Por otra parte, como $u_1 = S(t_0)u_0$, tenemos

$$S(-t_0)u_1 = S(t_0)^{-1}S(t_0)u_0 = u_0,$$

luego

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)S(-t_0)u_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n - t_0)u_1$$

y, por tanto, $u \in \omega(u_1)$ ya que $\{t_n - t_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a infinito.

Supongamos ahora que $u \in \omega(u_1)$, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $t_n \rightarrow \infty$ y $S(t_n)u_1 \rightarrow u$, entonces

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)u_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)S(t_0)u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n + t_0)u_0$$

luego $u \in \omega(u_0)$ por ser $\{t_n + t_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a infinito.

Probemos ahora que todo punto de $\omega(u_0)$ es punto de equilibrio del sistema semi-dinámico. Consideramos una órbita que empieza en u_0 , es decir, $\gamma^+(u_0) = \{S(t)u_0 : t \geq 0\}$. Por el Lema 2.1 tenemos

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s>0} \overline{\gamma_s^+(u_0)},$$

que es un cerrado tal que $\omega(u_0) \subset \overline{\gamma_1^+(u_0)}$, luego $\omega(u_0)$ es no vacío, compacto e invariante por el Lema 2.2.

Veamos que Φ es constante en $\omega(u_0)$. Si $u \in \omega(u_0)$, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ teniendo a infinito cuando $n \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)u_0 = u$. Como Φ es continua

$$\Phi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)u_0 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(S(t_n)u_0) = \Phi(u),$$

y por monotonía de la función de Liapunov $\Phi(u) = \Phi(S(0)u) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \Phi(S(t)u_0)$ que es un valor que no depende de la sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ni del punto u considerado, luego Φ es constante en $\omega(u_0)$.

Veamos ahora que, en efecto, si $u \in \omega(u_0)$, $u \in \mathcal{E}$. Como $\omega(u_0)$ es invariante, (es

decir, $S(t)\omega(u_0) = \omega(u_0)$ para $t \geq 0$ y $u \in \omega(u_0)$ tenemos que $S(t)u \in \omega(u_0)$, $t \geq 0$, y como Φ es constante en $\omega(u_0)$, $\Phi(S(t)u) = \Phi(u)$ para todo $t \geq 0$, luego por ser Φ función de Liapunov sobre B , se tiene que u es punto crítico.

Veamos la última afirmación del teorema. Supongamos que X es conexo, probemos que $\omega(u_0)$ es conexo por reducción al absurdo. Supongamos que no es conexo, entonces existen A y B cerrados, no vacíos tales que $\omega(u_0) = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$; además podemos tomar $\delta = \frac{1}{2}\text{dist}(A, B) > 0$. Sean $a \in A$ y $b \in B$, como $A \subset \omega(u_0)$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)u_0$, donde $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a infinito; de manera análoga, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t'_n)u_0$, con $\{t'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a infinito. Además podemos asumir que $t_n < t'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\text{dist}(\{S(t_n)u_0\}_{n \in \mathbb{N}}, A) < \delta \quad \text{y} \quad \text{dist}(\{S(t'_n)u_0\}_{n \in \mathbb{N}}, A) > \delta.$$

Teniendo en cuenta que $\Psi(t) = \text{dist}(S(t)u_0, A)$ es una función continua, podemos tomar $\tau_n \in [t_n, t'_n]$ tal que $\text{dist}(\{S(\tau_n)u_0\}_{n \in \mathbb{N}}, A) = \delta$. Además, $\{S(\tau_n)u_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, (por ser B absorbente) luego tiene una subsucesión $\{S(\tau_{n_k})u_0\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $z \in \omega(u_0)$. Así, hemos llegado a una contradicción con $\text{dist}(z, A) = \delta$.

Dado que \mathcal{E} es discreto y $\omega(u_0)$ es conexo, $\omega(u_0)$ sólo puede ser un punto, por tanto, $\omega(u_0)$ es un conjunto unitario cuyo único elemento es punto crítico. □

Teorema 2.6. *Sea $\{S(t) : t \geq 0\}$ un sistema semi-dinámico con un atractor global \mathcal{A} . Supongamos que el sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$ tiene una función de Liapunov en \mathcal{A} . Entonces,*

$$\mathcal{A} = \mathcal{W}^u(\mathcal{E}).$$

Si además \mathcal{E} es discreto y X conexo, entonces

$$\mathcal{A} = \bigcup_{u_0 \in \mathcal{E}} \mathcal{W}^u(u_0).$$

Demostración.

Veamos que $\mathcal{W}^u(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$. Sea $u \in \mathcal{W}^u(\mathcal{E})$, entonces existe una órbita completa $\gamma(u) = \{S(t)u : t \in \mathbb{R}\}$ tal que $\text{dist}(S(t)u, \mathcal{E}) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow -\infty$. Por otra parte, como la órbita de todo punto crítico es el propio punto crítico, se tiene que dicha órbita es acotada y completa, luego $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ ya que por el Teorema 2.2 toda órbita

completa y acotada está contenida en el atractor global \mathcal{A} . Puesto que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ se tiene que $u \in \mathcal{W}^u(\mathcal{A})$.

Además se verifica $\mathcal{W}^u(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. En efecto, por ser \mathcal{A} compacto e invariante, por el Teorema 2.4 tenemos $\mathcal{W}^u(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Veamos ahora que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}^u(\mathcal{A})$. Sea $u_0 \in \mathcal{A}$; entonces por el Teorema 2.2 podemos definir una órbita completa $\gamma = \{S(t)u_0 : t \in \mathbb{R}\}$ que está contenida en su totalidad en el atractor \mathcal{A} de donde se tiene de manera obvia que

$$\text{dist}(S(t)u_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty.$$

Por tanto, $u_0 \in \mathcal{W}^u(\mathcal{A})$.

Veamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}^u(\mathcal{E})$. Sea $u_0 \in \mathcal{A}$, para demostrar esta inclusión consideramos el conjunto

$$\alpha(u_0) = \bigcap_{s < 0} \overline{\gamma_s^-(u_0)}; \quad \gamma_s^-(u_0) = \{S(t)u_0 : t < s\}.$$

De manera análoga como se hizo para el conjunto $\omega(u_0)$, podemos escribir

$$\alpha(u_0) = \{u \in X : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow -\infty, S(t_n)u_0 \rightarrow u\}.$$

En primer lugar, observemos que $\alpha(u_0)$ es un conjunto no vacío; ya que dada cualquier sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_n \rightarrow -\infty$, $\{S(t_n)u_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada (pues la órbita γ definida anteriormente es acotada y completa) y además $\{S(t_n)u_0\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, que es compacto, luego existe una subsucesión $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ de $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_{n_k} \rightarrow -\infty$, y $S(t_{n_k})u_0 \rightarrow u$ para algún u , cuando $k \rightarrow \infty$, luego $u \in \alpha(u_0)$.

Además, $\alpha(u_0)$ es compacto ya que es un cerrado (por ser intersección de cerrados) y además

$$\alpha(u_0) \subset \overline{\{S(t)u_0 : t < -1\}} \subset \{S(t)u_0 : t \in \mathbb{R}\} = \gamma \subset \mathcal{A}.$$

Así, la compacidad de $\alpha(u_0)$ se obtiene de que \mathcal{A} es un compacto.

Probemos ahora la invarianza. Sea $x \in \alpha(u_0)$, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ tal que $t_n \rightarrow -\infty$, $S(t_n)u_0 \rightarrow x$ luego

$$S(t)x = S(t) \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t + t_n)u_0 = x,$$

ya que $\{t + t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es tal que $t + t_n \rightarrow -\infty$ para todo $t \geq 0$.

A continuación probamos que Φ es constante en $\alpha(u_0)$. Si $u \in \alpha(u_0)$, entonces

existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_n \rightarrow -\infty$ y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)u_0 = u,$$

y en consecuencia, por propiedades de la función Φ ,

$$\Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)u_0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(S(t_n)u_0) = \Phi(u). \quad (2.5)$$

Por otro lado, por la monotonía de Φ , se tiene

$$\Phi(u) = \Phi(S(0)u_0) = \sup_{\tau < 0} \Phi(S(\tau)u_0),$$

que es un valor que no depende de la sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ni de u , luego Φ es constante $\alpha(u_0)$.

Como $\alpha(u_0)$ es invariante, es decir, $S(t)\alpha(u_0) = \alpha(u_0)$ para todo $t \geq 0$ y $u \in \alpha(u_0)$, se tiene $S(t)u \in \alpha(u_0)$ con $t \geq 0$ luego, por ser Φ constante en $\alpha(u_0)$ tenemos

$$\Phi(S(t)u) = \Phi(u), \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

luego u es punto crítico (ya que Φ es función de Liapunov en \mathcal{A}), y en consecuencia $\alpha(u_0) \subset \mathcal{E}$. Acabamos de demostrar que para $u_0 \in \mathcal{A}$, $S(t_n)u_0 \rightarrow u \in \mathcal{E}$, cuando $t_n \rightarrow -\infty$, es decir, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}^u(\mathcal{E})$.

Probemos ahora la última afirmación del teorema. Dado que X es conexo, con argumentos análogos a los de la demostración de la conexión de $\omega(u_0)$ en el Teorema 2.5 se prueba que $\alpha(u_0)$ es conexo. Como $\alpha(u_0) \subset \mathcal{E}$, \mathcal{E} es discreto y $\alpha(u_0)$ es conexo, $\alpha(u_0)$ sólo puede ser un punto. Por tanto, como $\mathcal{W}^u(u_0) \subset \alpha(u_0)$, $\mathcal{W}^u(u_0)$ tendrá a lo sumo un punto y

$$\mathcal{A} = \mathcal{W}^u(\mathcal{E}) = \bigcup_{u_0 \in \mathcal{E}} \mathcal{W}^u(u_0).$$

□

Veamos un ejemplo de la función de Liapunov y de aplicación de los teoremas anteriores.

Ejemplo 2.2. Consideremos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y - y^3, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

y definamos la siguiente función:

$$\Phi(y) = \begin{cases} -y^2, & \text{si } |y| \leq 1; \\ 1, & \text{si } |y| > 1. \end{cases}$$

Comencemos calculando los puntos de equilibrio de la ecuación (2.6). Puesto que las únicas soluciones de la ecuación $y - y^3 = 0$ son 1, -1, y 0, se tiene $\mathcal{E} = \{-1, 0, 1\}$.

Supongamos que hemos demostrado que existe el atractor global, veamos cómo sería la estructura del mismo. Para ello, veamos que la función definida es una función de Liapunov en la bola cerrada de centro 0 y radio 1, es decir, en dicha bola Φ es continua, $t \mapsto \Phi(S(t)y_0)$ es no creciente, y si $\Phi(S(t)y_0) = \Phi(y_0)$ para todo $t > 0$, entonces y_0 es punto de equilibrio.

(i) La continuidad es inmediata.

(ii) La segunda propiedad se obtiene de que si $y(t) = S(t)y_0$, con $|y(t)| \leq 1$ entonces

$$[\Phi(y(t))]' = \Phi'(y(t))y'(t) = -2y(t)^2[1 - y(t)^2] \leq 0.$$

(iii) Para la tercera propiedad, supongamos $y(t) = S(t)y_0$ con $|y(t)| \leq 1$ satisfice $\Phi(y(t)) = \Phi(y_0)$ para todo $t > 0$. Entonces $\Phi(y(t)) = -y(t)^2 = -y_0^2 = \Phi(y_0)$, es decir, $y(t) = y_0$ para todo $t > 0$, o bien, $y(t) = -y_0$, para todo $t > 0$. Teniendo en cuenta la Nota 2.1 concluimos que y_0 es punto crítico o de equilibrio.

Debido a que el sistema (2.6) es de tipo gradiente, estamos en las condiciones de aplicar Teorema 2.6, y por tanto,

$$\mathcal{A} = \mathcal{W}^u(\mathcal{E}) = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} \mathcal{W}^u(z).$$

Calculamos las variedades inestables de los puntos de equilibrio de la ecuación (2.6):

$$\mathcal{W}^u(0) = \{y_0 \in \mathbb{R} : S(t)y_0 \text{ está definida para todo } t \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t)y_0 = 0\} = (-1, 1),$$

$$\mathcal{W}^u(1) = \{y_0 \in \mathbb{R} : S(t)y_0 \text{ está definida para todo } t \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t)y_0 = 1\} = \{1\},$$

$$\mathcal{W}^u(-1) = \{y_0 \in \mathbb{R} : S(t)y_0 \text{ está definida para todo } t \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t)y_0 = -1\} = \{-1\}.$$

Para determinar dichas variedades, hemos tenido en cuenta las siguientes propiedades de las soluciones que se ilustran en la Figura 2.1:

- Si $|y(t)| > 1$ e $y(t) > 0$, entonces $y'(t) < 0$ y se tiene que $y(t)$ es decreciente y acotada inferiormente por 1, luego $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$.
- La solución constante $y(t) \equiv 1$ satisface $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$.
- Si $|y(t)| < 1$ e $y(t) > 0$, entonces $y'(t) > 0$ y se tiene que $y(t)$ es creciente y acotada superiormente por 1 e inferiormente por 0, luego $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$.
- La solución constante $y(t) \equiv 0$ satisface $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.
- Si $|y(t)| < 1$ e $y(t) < 0$, entonces $y'(t) < 0$ y se tiene que $y(t)$ es decreciente y acotada superiormente por 0 e inferiormente por -1, luego $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -1$.
- La solución constante $y(t) \equiv -1$ satisface $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -1$.
- Si $|y(t)| > 1$ e $y(t) < 0$, entonces $y'(t) > 0$ y se tiene que $y(t)$ es creciente y acotada superiormente por -1, luego $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -1$.

Por tanto, $\mathcal{A} = [-1, 1]$. Observemos que \mathcal{A} es compacto, es invariante (pues hemos visto que cualquier solución que comienza en \mathcal{A} , permanece en \mathcal{A}) y atrae acotados (por el razonamiento anterior), y en consecuencia es atractor de \mathbb{R} para el sistema dinámico definido por (2.6).

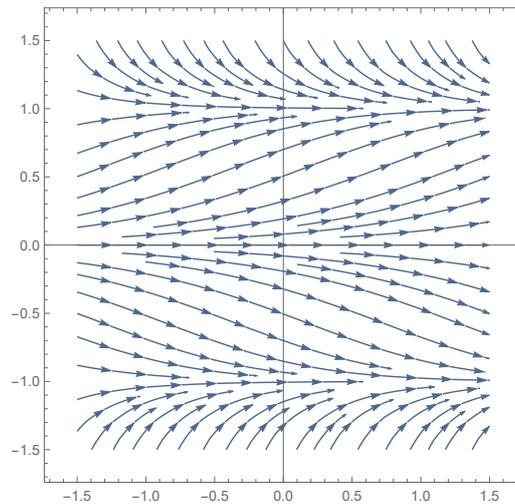


Figura 2.1: Espacio de fases de la ecuación definida en (2.6).

2.2. Modelo SIR autónomo

Como se indicó en la Introducción, uno de los objetivos de este trabajo es estudiar el comportamiento asintótico del modelo SIR autónomo. Recordemos que el modelo SIR es un modelo apropiado para la descripción de la dinámica de poblaciones en la que se desarrolla una infección aguda. Para ello se asume que existen tres tipos de individuos: Susceptibles (*Susceptible*), si los individuos no han estado expuestos al patógeno; Infecciosos (*Infectious*), si están infectados por el agente patógeno; y Recuperados/Eliminados (*Recovered/Removed*) si, o bien han eliminado por completo la infección tras sufrirla, o bien han sido aislados del resto de la población para prevenir nuevos contagios.

Para describir la dinámica entre los tres grupos mencionados a lo largo del tiempo, fijemos previamente la notación y denotemos $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ el número de individuos susceptibles, infecciosos y eliminados, respectivamente, en el tiempo t , para cada $t \geq 0$. Observemos que dada la naturaleza de la población sólo tiene sentido considerar soluciones no negativas $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, y $R(t) \geq 0$ e instantes de tiempo no negativos. Además, en este capítulo nos centraremos en la situación en la que el número de individuos de la población permanece constante, de tal manera que si N denota el tamaño poblacional en cualquier instante de tiempo t , entonces $N = S(t) + I(t) + R(t)$.

Para establecer las ecuaciones que representan dicha población, denotaremos la tasa de natalidad y mortalidad de la población con la letra $\nu > 0$, $\beta > 0$ será la tasa

de contacto entre susceptibles e infectados y $\gamma > 0$ representará la proporción de individuos que se recuperan por unidad de tiempo. Es importante señalar que como nos centramos en el caso en el que la población permanece constante el número de nacimientos coincide con el número de muertes naturales, de ahí que ν represente tanto la tasa de natalidad como la de mortalidad.

Consideraremos las siguientes hipótesis sobre la población:

- (i) La única forma de que un nuevo individuo pase a formar parte del grupo de los susceptibles es por nacimiento.
- (ii) Existen dos formas de que un individuo abandone el grupo de los susceptibles: por muerte natural o por convertirse en individuo infeccioso.
- (iii) Asumiremos que la velocidad de cambio de $S(t)$ debida a la transformación de susceptibles en infecciosos depende del número de individuos susceptibles, del número de infecciosos y de la cantidad de contactos entre susceptibles e infecciosos. En particular, supondremos que cada individuo infectado tiene un número fijo β de contactos por día y que son suficientes para contagiarse de la enfermedad, de los cuales no todos se producen con individuos susceptibles. Si asumimos una distribución homogénea de los individuos en la población, la proporción de esos contactos que se producen con los individuos susceptibles es $S(t)/N$. Así, por término medio, cada individuo infectado genera $\beta S(t)/N$ nuevos individuos infectados por día¹.
- (iv) Existen dos formas de que un individuo abandone el grupo de los infecciosos: por muerte natural y por recuperación de la enfermedad o aislamiento.
- (v) Asumimos que proporción de individuos infectados que se recuperan durante un día, γ , es fija. Por ejemplo, si la duración media de la infección es tres días, entonces, por término medio, un tercio de los individuos del grupo de los infectados se recupera durante un día.
- (vi) Un individuo pasa a formar parte del grupo de los eliminados si, o bien ha sido detectado como individuo infeccioso y ha sido aislado para prevenir nuevos contagios, o bien, ha superado la enfermedad.

¹Si el número de individuos susceptibles es muy grande y la proporción de individuos infecciosos en la población es muy pequeña, podemos omitir situaciones en las que un individuo susceptible puede tener contacto con más de un individuo infeccioso durante un día.

(vii) Un individuo únicamente abandona el grupo de los eliminados por muerte natural.

Una representación esquemática de la dinámica entre los distintos grupos se ilustra en la Figura 2.2.

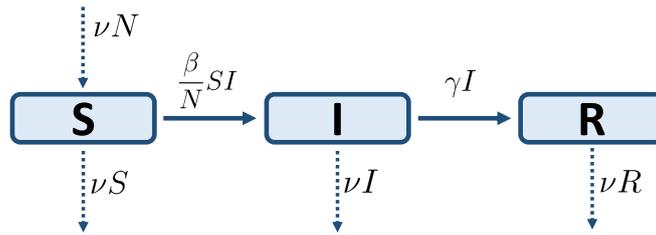


Figura 2.2: Esquema de la dinámica entre los distintos grupos.

Así, el sistema resultante viene definido por el siguiente sistema diferencial autónomo:

$$\begin{cases} S' = \nu N - \nu S - \frac{\beta}{N}SI, \\ I' = \frac{\beta}{N}SI - \nu I - \gamma I, \\ R' = \gamma I - \nu R. \end{cases} \quad (2.7)$$

La primera ecuación del modelo resulta de las hipótesis (i)-(iii); en concreto, el primer sumando viene explicado por (i), el segundo por (ii) y el tercer término por la combinación de (ii) e (iii). La ecuación para I' resulta de las hipótesis (iii)-(v); en particular, el primer sumando viene dado por (iii), el segundo por (iv) y el tercer término por (iv) y (v). Por último, el primer sumando de la ecuación para R' está determinado por (vi) y el último término por (vii).

Notemos que debido a que hemos asumido que la población permanece constante, (es decir, $N = S(t) + I(t) + R(t)$), el sistema diferencial (2.7) se puede reducir al siguiente sistema de dimensión 2:

$$\begin{cases} S' = \nu N - \frac{\beta}{N}SI - \nu S, \\ I' = \frac{\beta}{N}SI - \nu I - \gamma I, \end{cases} \quad (2.8)$$

de tal forma que estudiar el comportamiento asintótico del modelo (2.7) equivale a estudiarlo en el modelo (2.8) y en consecuencia, trabajaremos con este último sistema.

2.2.1. Comportamiento asintótico local de las soluciones

En primer lugar vamos a estudiar el comportamiento asintótico local de las soluciones del sistema (2.8). Para ello, calcularemos los puntos de equilibrio y estudiaremos la estabilidad de dichos puntos de equilibrio empleando resultados del Capítulo 1.

Cálculo de los puntos de equilibrio

Comencemos calculando los puntos de equilibrio del sistema (2.8), es decir, calculemos las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \nu N - \frac{\beta}{N}SI - \nu S = 0, \\ \frac{\beta}{N}SI - \nu I - \gamma I = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

De la segunda ecuación se obtiene $\left(\frac{\beta}{N}S - \nu - \gamma\right)I = 0$, por tanto,

$$I = 0, \quad \text{o bien,} \quad S = \frac{N(\nu + \gamma)}{\beta}.$$

Cada una de estas soluciones da lugar a un punto de equilibrio.

- Si $I = 0$, entonces sustituyendo este valor en la primera ecuación del sistema (2.8), tenemos

$$\nu(N - S) = 0,$$

y dado que $\nu > 0$, se tiene $N = S$. Así, el punto de equilibrio obtenido es:

$$(S^*, I^*) = (N, 0). \quad (2.10)$$

- Si $S = \frac{N(\nu + \gamma)}{\beta}$, de nuevo sustituyendo este valor en la primera ecuación,

$$\nu N - (\nu + \gamma)I - \frac{\nu N}{\beta}(\nu + \gamma) = 0,$$

despejamos I obteniendo

$$I = \frac{1}{\nu + \gamma} \left(\nu N - \frac{\nu N}{\beta} (\nu + \gamma) \right),$$

y reordenando términos se obtiene finalmente

$$I = \nu N \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right).$$

Así, en este caso, el punto de equilibrio obtenido es:

$$(S^*, I^*) = \left(\frac{N(\nu + \gamma)}{\beta}, \nu N \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) \right). \quad (2.11)$$

Recordemos que debido a la naturaleza del contexto en el que se plantea este sistema autónomo sólo tiene sentido considerar soluciones positivas. Observemos que si $\nu + \gamma \geq \beta$ el punto (2.11) no tiene sentido puesto que su segunda coordenada sería negativa, y en consecuencia, en esta situación sólo tendremos un punto de equilibrio. Por el contrario, si $\nu + \gamma < \beta$ tendremos los puntos de equilibrios definidos en (2.10) y (2.11).

A partir de los puntos de equilibrio del sistema (2.8) podemos determinar los correspondientes puntos del sistema (2.7), donde recordemos que $N = S(t) + I(t) + R(t)$. Así, el punto correspondiente al punto (2.10) es

$$(S^*, I^*, R^*) = (N, 0, 0),$$

y el punto correspondiente al punto (2.11) es

$$(S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{N(\nu + \gamma)}{\beta}, \nu N \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right), \gamma N \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) \right).$$

Estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio

Puesto que el sistema autónomo considerado es no lineal, para el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio utilizaremos los resultados de la Secciones 1.2 y 1.3. Observemos en primer lugar que el sistema (2.8) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} S' \\ I' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & -\nu\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu N - \frac{\beta}{N}SI \\ \frac{\beta}{N}SI \end{pmatrix}$$

pero en este caso, la función

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, S, I) &\longmapsto g(t, S, I) = \left(\nu N - \frac{\beta}{N}SI, \frac{\beta}{N}SI \right) \end{aligned}$$

verifica que $g(t, 0, 0) = (\nu N, 0)$ y por tanto, no estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.2, por lo que analizaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (2.8) basándonos en la linealización del mismo.

Comencemos calculando la matriz jacobiana del modelo SIR autónomo, que viene dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(S, I) &= \nu N - \frac{\beta}{N}SI - \nu S, \\ f_2(S, I) &= \frac{\beta}{N}SI - \nu I - \gamma I, \end{aligned}$$

es decir,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{-\beta I}{N} - \nu & \frac{-\beta S}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & \frac{-\beta S}{N} - \nu - \gamma \end{pmatrix}.$$

Como hemos mencionado anteriormente, distinguiremos dos casos, y para determinar la estabilidad aplicaremos el Teorema 1.1.

- **Caso 1:** Supongamos $\nu + \gamma \geq \beta$. En tal caso el único punto de equilibrio es $(S^*, I^*) = (N, 0)$; analicemos su estabilidad.

La matriz jacobiana del sistema (2.8) asociada al punto $(S^*, I^*) = (N, 0)$ es

$$J_{(S^*, I^*)} = \begin{pmatrix} -\nu & -\beta \\ 0 & \beta - \nu - \gamma \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus autovalores determinando las soluciones de la ecuación definida por el determinante

$$\begin{vmatrix} -\nu - \lambda & -\beta \\ 0 & \beta - \nu - \gamma - \lambda \end{vmatrix} = (-\nu - \lambda)(\beta - \nu - \gamma - \lambda),$$

es decir, las soluciones de la ecuación

$$(-\nu - \lambda)(\beta - \nu - \gamma - \lambda) = 0,$$

que son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\nu, \\ \lambda_2 &= \beta - (\nu + \gamma). \end{aligned}$$

Observemos que $\lambda_1 < 0$ pues $\nu > 0$, y $\lambda_2 < 0$, ya que estamos suponiendo que $\nu + \gamma > \beta$.

Por tanto, aplicando el Teorema 1.1 se tiene que el punto $(S^*, I^*) = (N, 0)$ es un *equilibrio uniformemente asintóticamente estable* para el sistema (2.8) (véase Figura 2.3). Este tipo de estabilidad en este contexto se interpreta de la siguiente forma: si el número inicial de individuos susceptibles e infecciosos están próximos a N y 0 , entonces el número de individuos susceptibles en la población tiende a estabilizarse en el tamaño de la población y el número de

individuos infecciosos tiende a 0 tras un largo periodo de tiempo, es decir, la enfermedad se extinguirá por completo en la población.

Ejemplo 2.3. Consideremos el sistema (2.8) donde $N = 100$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ y $\nu = 5$. Observemos que estamos ante el caso que acabamos de analizar puesto que $\nu + \gamma \geq \beta$. En este caso tenemos un único punto de equilibrio $(100, 0)$, que es uniformemente asintóticamente estable. La dinámica de este sistema se representa en la Figura 2.3.

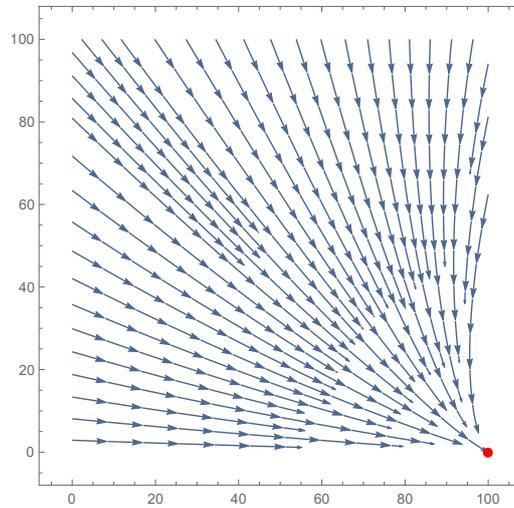


Figura 2.3: Campo de pendientes y punto de equilibrio del sistema (2.8) con $N = 100$, $\nu = 5$, $\beta = 1$ y $\gamma = 1$.

- **Caso 2:** Supongamos $\nu + \gamma < \beta$. En tal caso, el sistema (2.8) presenta 2 puntos de equilibrios:

$$(S_1^*, I_1^*) = (N, 0) \quad \text{y} \quad (S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{N(\nu + \gamma)}{\beta}, \nu N \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) \right).$$

- Analizaremos la estabilidad del punto de equilibrio $(S_1^*, I_1^*) = (N, 0)$. Con los mismos argumentos que en el caso anterior:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\nu, \\ \lambda_2 &= \beta - (\nu + \gamma). \end{aligned}$$

En este caso, $\lambda_1 < 0$, pues $\nu > 0$, y $\lambda_2 > 0$, debido a $\nu + \gamma < \beta$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 1.1 se tiene que $(S_1^*, I_1^*) = (N, 0)$

es un *equilibrio inestable* para el sistema (2.8) (véase Figura 2.4). En el contexto del modelo SIR, este tipo de estabilidad significa que si el número inicial de individuos susceptibles está próximo al total poblacional y el número inicial de infecciosos está próximo a cero, puede ocurrir que dicha población nunca vuelva a tener un número de individuos susceptibles e infecciosos cercanos a los valores iniciales tras un largo periodo de tiempo. En este caso, que la proporción de individuos infecciosos esté próxima a cero no implica que la enfermedad se extinga en la población.

- Examinaremos la estabilidad del punto de equilibrio

$$(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{N(\nu + \gamma)}{\beta}, \nu N \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) \right).$$

La matriz jacobiana asociada a este punto es:

$$J_{(S_2^*, I_2^*)} = \begin{pmatrix} -\beta\nu \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) - \nu & -(\nu + \gamma) \\ \beta\nu \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus autovalores como es usual; comencemos calculando el determinante

$$\begin{vmatrix} -\beta\nu \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) - \nu - \lambda & -(\nu + \gamma) \\ \beta\nu \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) & -\lambda \end{vmatrix} = \\ = \left[\beta\nu \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) + \nu + \lambda \right] \lambda + \beta\nu(\nu + \gamma) \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right).$$

A continuación, resolvemos la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 + \left(\beta\nu \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) + \nu \right) \lambda + \beta\nu(\nu + \gamma) \left(\frac{1}{\nu + \gamma} - \frac{1}{\beta} \right) = 0,$$

cuyas soluciones son

$$-\left(\beta\nu\left(\frac{1}{\nu+\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)+\nu\right)\pm\sqrt{\left(\beta\nu\left(\frac{1}{\nu+\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)+\nu\right)^2-4C},$$

donde $C = \beta\nu(\nu+\gamma)\left(\frac{1}{\nu+\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)$, y ambas tienen la parte real negativa.

En efecto, ya que $\beta\nu(\nu+\gamma) > 0$ y $\left(\frac{1}{\nu+\gamma}-\frac{1}{\beta}\right) > 0$ se tiene

$$\sqrt{\left(\beta\nu\left(\frac{1}{\nu+\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)+\nu\right)^2-4\beta\nu(\nu-\gamma)\left(\frac{1}{\nu+\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)} < \left(\beta\nu\left(\frac{1}{\nu+\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)+\nu\right).$$

Por tanto, aplicando el Teorema 1.1, el punto (S_2^*, I_2^*) es un *equilibrio exponencialmente asintóticamente estable* (véase Figura 2.4). Intuitivamente, este tipo de estabilidad significa que el número de individuos susceptibles en la población tiende a estabilizarse en S_2^* y el número de individuos infecciosos tiende a I_2^* tras un largo periodo de tiempo. Es decir, en esta situación, la enfermedad no desaparece de la población, sino que persiste de tal manera que el número de individuos susceptibles e infecciosos se estabiliza en la población en los valores S_2^* y I_2^* , respectivamente, independiente de si la población en el instante inicial contaba con un número de individuos infecciosos muy grande o con un número de infecciosos muy pequeño.

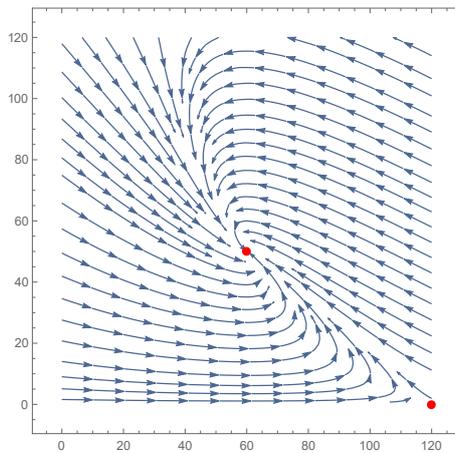


Figura 2.4: Campo de pendientes y puntos de equilibrio del sistema (2.8) con $N = 120$, $\nu = 5$, $\beta = 12$ y $\gamma = 1$.

Ejemplo 2.4. *Consideremos el sistema (2.8) donde $N = 120$, $\beta = 12$, $\gamma = 1$ y $\nu = 5$, observemos que estamos en el caso 2 puesto que $\nu + \gamma < \beta$. En este caso tenemos dos puntos críticos $(120, 0)$ y $(60, 50)$. El primer punto de equilibrio es un equilibrio inestable y el segundo es un equilibrio exponencialmente asintóticamente estable. La dinámica de este sistema se representa en la Figura 2.4.*

2.2.2. Comportamiento asintótico global de las soluciones

A continuación estudiaremos el comportamiento asintótico global del modelo SIR haciendo uso de la teoría de atractor global. Como anteriormente hemos dicho, en este contexto sólo tiene sentido considerar soluciones cuyas componentes son positivas y definidas para instantes de tiempo positivos.

Veamos en primer lugar que existe atractor global. Para ello, comenzaremos probando que cualquier solución $V(t) = (S(t), I(t))$ del sistema (2.8) es una solución acotada. Sumando las ecuaciones del sistema (2.8) obtenemos

$$S' + I' = \nu N - \nu(S + I) - \gamma I,$$

y puesto que $\gamma > 0$, se obtiene

$$S' + I' \leq \nu N - \nu(S + I).$$

Hagamos el cambio de variable $S + I = W$; la desigualdad anterior es entonces equivalente a

$$W' \leq \nu N - \nu W$$

en la que la igualdad se corresponde a una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea. Multiplicando ambos miembros por $e^{\nu t}$ y reordenando se obtiene

$$W'e^{\nu t} + \nu e^{\nu t}W = (We^{\nu t})' \leq \nu Ne^{\nu t};$$

integrando entre 0 y t llegamos a

$$W(t) \leq W(0)e^{-\nu t} + N - Ne^{-\nu t},$$

es decir,

$$S(t) + I(t) \leq (S(0) + I(0))e^{-\nu t} + N - Ne^{-\nu t},$$

y por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) + I(t)) \leq N.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $S(t) \leq S(t) + I(t)$ e $I(t) \leq S(t) + I(t)$ se tiene que cualquier solución $V(t)$ de (2.8) está acotada.

Veamos ahora que todo conjunto B^ε es un conjunto absorbente, donde $\varepsilon > 0$ y

$$B^\varepsilon = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq N + \varepsilon\}.$$

Sea D un conjunto acotado en \mathbb{R}^2 , entonces existe $R > 0$ tal que $D \subseteq B^R$. Probemos que $S(t)D \subseteq B^\varepsilon$ para todo $t \geq t(D) = \frac{\log((R+N)/\varepsilon)}{\nu}$. Sea $V(t)$ solución del sistema (2.8) tal que $V(0) = (S(0), I(0)) \in D$, entonces para $t \geq t(D)$ se tiene

$$\begin{aligned} S(t) + I(t) &\leq (S(0) + I(0))e^{-\nu t} + N - Ne^{-\nu t} \\ &\leq (N + R)e^{-\nu t} + N \\ &\leq (N + R)\frac{\varepsilon}{N + R} + N \\ &= \varepsilon + N, \end{aligned}$$

es decir, $V(t) = S(t)V(0) \in B^\varepsilon$.

Observemos que como el conjunto B^ε es compacto y absorbente, por el Teorema 2.1 tenemos garantizada la existencia de atractor global.

Por último, veamos cuál es la estructura del atractor global. Debido a las propiedades de los puntos de equilibrios y en virtud del Teorema 2.1, dicha estructura puede ser descrita de la siguiente forma:

- Si $\nu + \gamma \geq \beta$, entonces como el punto $(N, 0)$ es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable, se tiene

$$\mathcal{A} = \{(N, 0)\}.$$

- Si $\nu + \gamma < \beta$, puesto que el punto (S_1^*, I_1^*) es un equilibrio inestable y el punto

(S_2^*, I_2^*) es un equilibrio exponencialmente asintóticamente estable, se obtiene

$$\mathcal{A} = \{(S_1^*, I_1^*), (S_2^*, I_2^*)\} \cup \Gamma.$$

donde Γ denota el conjunto de las soluciones heteroclínicas entre los puntos (S_1^*, I_1^*) y (S_2^*, I_2^*) , es decir, el conjunto de todas las trayectorias de las soluciones que unen a ambos puntos de equilibrios.

Observemos que el comportamiento asintótico de una enfermedad en una población con una dinámica como la descrita en esta sección depende del valor del parámetro $R_0 = \beta(\nu + \gamma)^{-1}$. Del análisis realizado se deduce que si para dicha enfermedad se tiene que $R_0 \leq 1$, entonces la enfermedad se extinguirá, mientras que si $R_0 > 1$, la enfermedad persistirá en la población y además el número de individuos susceptibles e infecciosos se estabilizará.

Por último, es importante señalar que el modelo considerado en esta sección constituye una primera aproximación a la modelización del contexto epidemiológico considerado. Una situación más realista es asumir que alguno de los coeficientes dependa del tiempo, lo que motiva la necesidad de un modelo más rico y a la vez más complejo. Dicho modelo será examinado en el próximo capítulo.

Sistemas diferenciales no autónomos

Los sistemas autónomos son sistemas que sólo permiten modelizar situaciones simples ya que hacen uso de coeficientes que no dependen del tiempo. Esto motiva la necesidad de modelos más complejos pero más realistas, con coeficientes que dependan del tiempo, pudiendo modelizar así la presencia de ruidos, perturbaciones aleatorias u otros efectos ambientales. Para la modelización de dichos fenómenos se hace uso de los sistemas diferenciales no autónomos, en los cuales nos centramos en el presente capítulo.

Recordemos que un problema de valores iniciales para un sistema diferencial no autónomo viene definido por:

$$\begin{cases} y' = F(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $F : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es una aplicación continua, $D \subset \mathbb{R}^d$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}^d$.

Este capítulo está dividido en dos secciones; en la primera sección se presentan resultados sobre el análisis del comportamiento de sistemas dinámicos para sistemas diferenciales no autónomos haciendo uso de la teoría del atractor pullback. Por último, en la segunda sección aplicaremos dichos resultados al análisis del compor-

tamiento de un modelo SIR más general que el considerado en el Capítulo 2 y que está definido por un sistema no autónomo.

3.1. Resultados previos para sistemas no autónomos

3.1.1. Motivación

Una de las diferencias entre los sistemas autónomos y los no autónomos se encuentra en que los sistemas autónomos sólo dependen del tiempo transcurrido desde el instante inicial mientras que para determinar la evolución de los sistemas no autónomos no sólo es importante el valor de la solución en el instante presente sino también en el instante inicial. Ilustremos esta propiedad mediante un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3.1. *Consideremos el siguiente problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} y' = -ty, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

cuya solución es $\varphi(t; t_0, y_0) = y_0 e^{-\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)}$.

Observamos que resulta imposible expresar $t^2 - t_0^2$ como función que dependa únicamente del tiempo transcurrido $t - t_0$ debido a que $t^2 - t_0^2 = (t - t_0)(t + t_0)$.

Así, la evolución de dicho problema de valores iniciales no sólo viene determinada por el tiempo transcurrido, $t - t_0$, como ocurría en el caso de sistemas autónomos.

Por tanto, puesto que las soluciones no dependen sólo del tiempo transcurrido, la propiedad $\varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t - t_0; 0, y_0)$, donde $S(t)y_0 = \varphi(t; 0, y_0)$, que se tenía para sistemas dinámicos autónomos no se verificará para sus análogos en el caso no autónomo, ya que en este caso necesitamos conocer el valor de la solución en el instante presente, t , y también en el instante inicial, t_0 . En consecuencia, los procesos que definiremos en el caso no autónomo, y que denotaremos como U , dependerán de dos parámetros, es decir, la solución puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\varphi(t; t_0, y_0) = U(t, t_0)y_0,$$

donde $\{U(t, s) : (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$ es una familia biparamétrica. Así, estudiar cómo se comporta el sistema cuando $t \rightarrow \infty$ equivale a estudiar cómo se comporta $U(t, t_0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Comencemos con la definición formal de dicha familia.

Definición 3.1. *Un proceso U sobre un espacio métrico X es una familia de aplicaciones $\{U(t, t_0) : (t, t_0) \in \mathbb{R}_*^2\}$ donde $\mathbb{R}_*^2 = \{(t, s) : t \geq s\}$ y $U(t, t_0) : X \rightarrow X$ verifica:*

- (i) $U(t, t)y_0 = y_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) $U(t, \tau)U(\tau, s)y_0 = U(t, s)y_0$, para todos $t, \tau, s \in \mathbb{R}$ tales que $t \geq \tau \geq s$, e $y_0 \in X$.
- (iii) *La siguiente aplicación es continua*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_*^2 \times X &\longrightarrow X \\ (t, s, y_0) &\longmapsto U(t, s)y_0. \end{aligned}$$

El proceso introducido en la Definición 3.1 se conoce también como semi-grupo biparamétrico, puesto que depende del instante de tiempo inicial, t_0 , y del actual, t .

De manera análoga al Capítulo 2, de ahora en adelante consideraremos el proceso definido como

$$U(t, t_0)y_0 = \varphi(t; t_0, y_0), \tag{3.2}$$

donde φ es la solución maximal del problema de valores iniciales (3.1). Además nos centraremos en el caso $X = \mathbb{R}^d$, es decir, en los sistemas de dimensión finita.

Recordemos que todo sistema no autónomo se reduce a uno autónomo añadiendo una variable. Así, el problema de valores iniciales (3.1) es equivalente al siguiente problema de valores iniciales definido por el sistema autónomo:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = F(x, y), \\ x' = 1, \\ y(t_0) = y_0, \\ x(t_0) = t_0, \end{array} \right.$$

o equivalente, al problema de valores iniciales siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x', y') = \tilde{F}(x, y), \\ (x(t_0), y(t_0)) = (t_0, y_0), \end{array} \right. \quad (3.3)$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R} \times D \mapsto \tilde{F}(x, y) = (1, F(x, y)) \in \mathbb{R} \times X$.

Veamos que dado un proceso U para el sistema no autónomo (3.1) podemos definir un sistema dinámico para el sistema autónomo (3.3). Consideremos el punto inicial (t_0, y_0) para el problema (3.3) y definamos el sistema dinámico de la siguiente forma:

$$S(t)(t_0, y_0) = (t + t_0, U(t + t_0, t_0)y_0). \quad (3.4)$$

Definamos la función

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \tilde{X} &\longrightarrow \tilde{X} \\ (t, (t_0, y_0)) &\longmapsto \tilde{U}(t)(t_0, y_0) = (t + t_0, U(t + t_0, t_0)y_0), \end{aligned}$$

donde $\tilde{X} = \mathbb{R} \times X$. Entonces, podemos escribir el sistema dinámico (3.4) como la familia de aplicaciones $\{\tilde{U}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, donde las aplicaciones

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t) : \tilde{X} &\longrightarrow \tilde{X} \\ (t_0, y_0) &\longmapsto \tilde{U}(t)(t_0, y_0) = (t + t_0, U(t + t_0, t_0)y_0), \end{aligned}$$

verifican:

(i) $\tilde{U}(0) = Id_{\tilde{X}}$ ya que

$$\tilde{U}(0)(t_0, y_0) = (t_0, U(t_0, t_0)y_0) = (t_0, y_0).$$

(ii) $\tilde{U}(t+s)(t_0, y_0) = (\tilde{U}(s) \circ \tilde{U}(t))(t_0, y_0)$ para todos $t, s \in \mathbb{R}$ puesto que

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t+s)(t_0, y_0) &= (t_0 + t + s, U(t_0 + t + s, t_0)y_0) \\ &= (t_0 + t + s, U(t_0 + t + s, t_0 + t)U(t_0 + t, t_0)y_0) \\ &= \tilde{U}(s)(t + t_0, U(t_0 + t, t_0)y_0) \\ &= (\tilde{U}(s) \circ \tilde{U}(t))(t_0, y_0). \end{aligned}$$

(iii) $\tilde{U}(t)$ es continua para todo $t \in \mathbb{R}$ por la continuidad del proceso.

(iv) La aplicación $t \in \mathbb{R} \mapsto \tilde{U}(t)$ también es continua por la continuidad de proceso.

Por tanto, $\{\tilde{U}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es un sistema dinámico autónomo sobre \tilde{X} definido a partir del sistema (3.3).

Nota 3.1. *El sistema dinámico $\{\tilde{U}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ posee algunas propiedades no muy convenientes.*

(i) *No existen compactos en \tilde{X} que sean invariantes para $\{\tilde{U}(t) : t \in \mathbb{R}\}$. En efecto, sea $\tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{X}$, con $\tilde{\mathcal{A}}$ compacto, entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t)\tilde{\mathcal{A}} &= \bigcup_{(t_0, y_0) \in \tilde{\mathcal{A}}} \{\tilde{U}(t)(t_0, y_0)\} \\ &= \bigcup_{(t_0, y_0) \in \tilde{\mathcal{A}}} \{(t + t_0, U(t + t_0, t_0)y_0)\}. \end{aligned}$$

Observemos que $\{t + t_0 : t \in \mathbb{R}\}$ es un conjunto no acotado y por tanto, es imposible encontrar un compacto que contenga a $\tilde{U}(t)\tilde{\mathcal{A}}$ y en consecuencia no existe atractor para dicho sistema autónomo.

Sin embargo, nótese que todo conjunto de \tilde{X} será de la forma

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} (\{t_0\} \times \mathcal{A}(t_0)), \quad \text{con } \mathcal{A}(t_0) \subset X;$$

además, si dicho conjunto es invariante por el sistema $\{\tilde{U}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, es decir, $\tilde{U}(t)\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces debe verificar

$$\bigcup_{t'_0 \in \mathbb{R}} (\{t'_0\} \times \mathcal{A}(t'_0)) = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} (\{t_0 + t\} \times U(t_0 + t, t_0)\mathcal{A}(t_0)), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

y por tanto, dado $t'_0 \in \mathbb{R}$, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$t'_0 = t_0 + t \quad \text{y} \quad U(t_0 + t, t_0)\mathcal{A}(t_0) = \mathcal{A}(t_0 + t).$$

- (ii) Los conjuntos ω -límite pueden no ser conjuntos invariantes. En concreto, el concepto de ω -límite para un proceso U asociado al punto (t_0, y_0) se define como:

$$\omega(t_0, y_0) = \{z \in X : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow \infty, U(t_n, t_0)y_0 \rightarrow z\}.$$

Veamos con un ejemplo que estos conjuntos pueden ser no invariantes.

Ejemplo 3.2. Consideramos el siguiente sistema,

$$\begin{cases} y' = -y + e^{-t}, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

cuya solución es

$$\varphi(t; t_0, y_0) = y_0 e^{-(t-t_0)} + (t - t_0)e^{-t}.$$

Observemos que cualquier solución $\varphi(t; t_0, y_0)$ de la forma anterior verifica $\varphi(t; t_0, y_0) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, para todos $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\omega(t_0, y_0) = \{0\}, \quad \text{para todo } (t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

Sin embargo, $U(t, t_0)0 = \varphi(t; t_0, 0) = (t - t_0)e^{-t} \neq 0$, para todo $t \neq t_0$, luego, $\omega(t_0, y_0)$ no es un conjunto positivamente invariante pues $U(t, t_0)\omega(t_0, y_0) \not\subseteq \omega(t_0, y_0)$ si $t \neq t_0$, y en consecuencia, el conjunto $\omega(t_0, y_0)$ no es invariante.

A la vista de estas observaciones, parece complicado plantear una teoría general sobre atractores globales para sistemas dinámicos autónomos generados por procesos. Sin embargo, es posible llevar a cabo este objetivo haciendo uso de la *teoría pullback* que introducimos ahora haciendo uso del siguiente ejemplo.

Consideramos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' &= -y + t, \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

En primer lugar vamos a calcular la solución del sistema (3.5). Observemos que la ecuación (3.5) es una ecuación diferencial lineal no homogénea; multiplicamos ambos miembros por e^t y observamos que

$$(ye^t)' = y'e^t + ye^t = e^t t;$$

integrando ambos lados de la ecuación obteniendo

$$ye^t = \int e^t t dt + C.$$

Integrando por partes el término de la derecha se tiene que $\int e^t t dt = (t-1)e^t$, luego

$$ye^t = (t-1)e^t + C, \quad (3.6)$$

donde $C = y_0 e^{t_0} - (t_0 - 1)e^{t_0}$. Como es usual, dicha constante se obtiene imponiendo la condición inicial $y(t_0) = y_0$ en la ecuación (3.6); así, por todo lo anterior, se tiene que la solución del sistema (3.5) es

$$\varphi(t; t_0, y_0) = t - 1 + (y_0 + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)}. \quad (3.7)$$

Una vez obtenida la solución del sistema (3.5) podemos definir un proceso U como:

$$U(t, t_0)y_0 = \varphi(t; t_0, y_0).$$

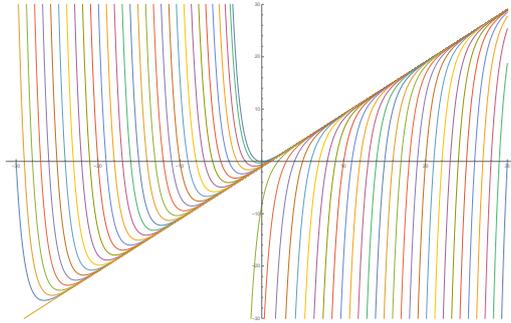


Figura 3.1: Soluciones para el problema de valor inicial definido en (3.5) con $y_0 = 0$, y para distintos valores de t_0 , en particular, $t_0 \in \{-30, -29, \dots, 29, 30\}$.

A continuación, analizaremos la importancia del sistema en el instante inicial en el comportamiento asintótico del problema. Es fácil de ver que todas las soluciones existen globalmente, es decir, están definidas en todo \mathbb{R} .

También podemos observar que la solución $\varphi(t; t_0, y_0) \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$. Si efectuamos la diferencia entre dos soluciones cualesquiera $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ correspondientes a los datos iniciales u_0 y v_0 , respectivamente, obtenemos

$$(u(t) - v(t))' = -(u(t) - v(t)),$$

luego

$$u(t) - v(t) = (u_0 - v_0)e^{-(t-t_0)}.$$

Dicha diferencia de soluciones tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, de donde se deduce que aunque cada solución se va a infinito cuando $t \rightarrow \infty$, todas las soluciones siguen el mismo patrón cuando el tiempo se incrementa (véase Figura 3.1).

Notemos también que fijado $t \in \mathbb{R}$ y haciendo tender $t_0 \rightarrow -\infty$, la diferencia de soluciones cualesquiera tiende a 0. Por lo que, en este caso las soluciones también siguen el mismo patrón cuando se acercan a un instante t si estas soluciones hubieran empezado hace mucho tiempo.

Por tanto, tiene sentido preguntarse si existe una solución particular o especial tal que la órbita de esta solución describa el camino que otra solución debe seguir.

El ejemplo considerado es un caso sencillo en el que podemos conocer las soluciones explícitamente, y no es necesario un análisis más profundo. En el caso que no supiéramos resolver el problema pero si pudiéramos encontrar una solución particular, ya sea a ojo, por simulaciones o por algún método, sabríamos que cualquier otra solución se comporta igual que esa. Por ejemplo, volviendo al sistema (3.5),

$\varphi(t; t_0, y_0) = t - 1$ es una solución particular de dicho sistema pues verifica para $y' = -y + t$, y, por tanto, cualquier otra solución se comporta de manera igual.

Es interesante observar también que teniendo la solución explícita, fijando t y haciendo tender t_0 a menos infinito obtenemos soluciones particulares. Así, la solución del sistema (3.5) calculada satisface

$$\varphi(t; t_0, y_0) = t - 1 + (y_0 + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)} \rightarrow t - 1, \text{ cuando } t_0 \rightarrow -\infty,$$

donde $t - 1$ es una solución particular del sistema (3.5) y no depende del tiempo inicial (véase Figura 3.1).

Este tipo de límite se conoce como *límite en sentido pullback*. Intuitivamente, lo que hacemos al calcular dicho límite es tirar hacia atrás del instante inicial y dejar evolucionar el sistema en el tiempo para examinar qué ocurre en el instante t . Así, para el sistema (3.5) hemos obtenido la función $t - 1$ como hemos visto anteriormente y dicha función representa donde están o hacia donde se acercan las soluciones en el instante t si éstas hubieran comenzado hace mucho tiempo.

Además, se verifica que la unión de todas las posiciones en cada instante t nos da información de que le ocurrirá a la solución en un futuro. Notemos que no podemos hablar de compacto al que se acercan las órbitas ya que las soluciones no están acotadas, pero si sabremos donde estarán las órbitas en cada instante t si éstas hubieran empezado hace mucho tiempo, lo cual es de utilidad ya que normalmente consideramos sistemas dinámicos para modelizar fenómenos que comenzaron hace millones de años.

El ejemplo anterior ilustra la necesidad del estudio de la teoría de los atractores en sentido pullback. En vista del ejemplo anterior, parece sensato hablar de atractor como una familia dependiente del tiempo, es decir,

$$\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\},$$

que describirá donde se acercan las soluciones para cada instante t si el sistema hubiese empezado hace mucho tiempo. Por ejemplo, en el caso del sistema (3.5) el atractor es $\{t - 1 : t \in \mathbb{R}\}$.

Además si la familia $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es un atractor debe ser invariante como

familia, es decir, si una solución empieza en un elemento de la familia en el instante t_0 , en el instante t dicha solución estará en el elemento de la familia correspondiente al instante t .

Si queremos definir un atractor de manera análoga a como lo hicimos en el Capítulo 2, entonces cada elemento de la familia debe atraer a conjuntos acotados en el sentido que precisaremos a continuación. Por ejemplo, en el caso del sistema (3.5) se tienen las siguientes propiedades:

- $\mathcal{A}(t) = \{\varphi(t; t_0, \mathcal{A}(t_0))\}$ para cada $t, t_0 \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\varphi(t; t_0, \mathcal{A}(t_0)) = t - 1 + (t_0 - 1 + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)} = t - 1.$$

- Si $D \subset X$ es acotado, entonces $\text{dist}(U(t, t_0)D, \mathcal{A}(t)) \rightarrow 0$, cuando $t_0 \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \text{dist}(U(t, t_0)D, \mathcal{A}(t)) &= \sup_{b \in D} \inf_{a \in \mathcal{A}(t)} |U(t, t_0)b - a| \\ &= \sup_{b \in D} |U(t, t_0)b - (t - 1)| \\ &= \sup_{b \in D} |(b + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)}| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $t_0 \rightarrow -\infty$.

Observemos que en el sistema (3.5), las soluciones no sólo convergen a $t - 1$ cuando $t_0 \rightarrow -\infty$ sino que también se aproximan a $t - 1$ para t suficientemente grande ya que

$$\varphi(t; t_0, y_0) - (t - 1) = (y_0 + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)} \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

Por tanto, $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es tanto atractor forward como atractor pullback para el sistema (3.5) (véase Figura 3.1).

Nota 3.2.

- (i) *Sólo en el caso de que los conceptos de estabilidad y estabilidad uniforme, sean equivalentes así como atractividad y atractividad uniforme, los conceptos forward y pullback son equivalentes. Un ejemplo de esta situación son los sistemas autónomos.*
- (ii) *Los conceptos de atracción pullback y forward son, en general, independientes, (para más detalle véase [2]).*

3.1.2. Atractor pullback

Comenzaremos exponiendo algunas nociones básicas de la teoría de atractores pullback, para después proporcionar algunos resultados sobre los mismos.

Definición 3.2. *Sea U un proceso.*

- (i) *Fijemos $t \in \mathbb{R}$. Se dice que un conjunto $B \subset X$ atrae en sentido pullback a los acotados de X en el instante t si para todo $D \subset X$ acotado*

$$\text{dist}(U(t, s)D, B) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } s \rightarrow -\infty.$$

- (ii) *La familia $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ se dice que es pullback atrayente para los acotados de X si $B(t)$ atrae en el sentido pullback a todos los acotados de X para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Definición 3.3.

- (i) *Sea $t \in \mathbb{R}$. Se dice que un conjunto $B \subset X$ absorbe en sentido pullback a los acotados de X en el instante t , si para cada conjunto acotado $D \subset X$ existe $T(D, t) \leq t$ tal que*

$$U(t, s)D \subset B, \quad \text{para todo } s \leq T(D, t).$$

- (ii) *La familia $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ se dice que es absorbente pullback para los conjuntos acotados de X si $B(t)$ absorbe en sentido pullback a todos los acotados de X para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Definición 3.4. *Se dice que el proceso U es pullback disipativo para conjuntos acotados si existe una familia $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$, tal que $B(t) \subset X$ es acotado y absorbente pullback para acotados.*

Definición 3.5. *Dada una familia de subconjuntos de X , $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$, se dice que es invariante para el proceso U si*

$$U(t, s)B(s) = B(t), \quad \text{para todo } (t, s) \in \mathbb{R}_*^2.$$

Definición 3.6. *Se llama atractor pullback para el proceso U a una familia $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que verifica:*

- (i) $\mathcal{A}(t)$ es compacto para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante.
- (iii) $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrae en el sentido pullback a los acotados de X .

A continuación examinaremos la relación entre el atractor pullback y el atractor global estudiado en el Capítulo 2.

Teorema 3.1. *El sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$ posee un atractor global \mathcal{A} si, y sólo si, el proceso U definido como $\{U(t, s) = S(t - s) : (t, s) \in \mathbb{R}_*^2\}$ posee atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Además, se verifica que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración.

Supongamos en primer lugar que el sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$ posee un atractor global \mathcal{A} y demostremos que la familia $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ definida como $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, es atractor pullback para el proceso U .

La compacidad de $\mathcal{A}(t)$ se deduce de que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y \mathcal{A} es compacto.

Veamos que $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es invariante, es decir, $U(t, s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t)$ para todo $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$. Como $U(t, s) = S(t - s)$ para $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$ y $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y \mathcal{A} es invariante por ser atractor global, se tiene

$$U(t, s)\mathcal{A}(s) = S(t - s)\mathcal{A}(s) = S(t - s)\mathcal{A} = \mathcal{A} = \mathcal{A}(t), \quad \text{para todo } (t, s) \in \mathbb{R}_*^2.$$

Probemos que $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrae a conjuntos acotados de X en sentido pullback. Sea B un conjunto acotado de X , entonces como $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para cada $t \in \mathbb{R}$, y \mathcal{A} es atractor

$$\text{dist}(U(t, s)B, \mathcal{A}(t)) = \text{dist}(S(t - s)B, \mathcal{A}) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } s \rightarrow -\infty,$$

deduciéndose así que $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrae a conjuntos acotados de X en sentido pullback.

Por tanto, de todo lo anterior se deduce que $\{U(t, s) = S(t - s) : (t, s) \in \mathbb{R}_*^2\}$ posee atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Supongamos ahora que $\{U(t, s) = S(t - s) : (t, s) \in \mathbb{R}_*^2\}$ posee un atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ con $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Tenemos que probar que \mathcal{A} es atractor global para el sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$.

La compacidad de \mathcal{A} se obtiene de que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{A}(t)$ es compacto.

Comprobemos que \mathcal{A} es invariante, es decir, $S(\tau)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, para todo $\tau \geq 0$. Dado que $U(t, s) = S(t - s)$, para $t \geq s$, y $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$, para todo $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$, se verifica $U(t, s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t)$, es decir, $S(t - s)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, o equivalentemente,

$$S(\tau)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad \text{para todo } \tau \geq 0.$$

Por último, demostremos que \mathcal{A} atrae a acotados de X . Sea B un conjunto acotado de X , como $\mathcal{A}(t)$ atrae en sentido pullback a B , se tiene

$$\text{dist}(U(t, t - s)B, \mathcal{A}(t)) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty;$$

ahora, teniendo en cuenta que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ y $U(t, t - s) = S(s)$, con $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$,

$$\text{dist}(S(s)B, \mathcal{A}) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty,$$

luego \mathcal{A} atrae a conjuntos acotados de X .

Por todo lo anterior, el sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$ posee atractor global \mathcal{A} . □

Este resultado indica en parte que la noción de proceso es una extensión natural del concepto de sistema semi-dinámico definido anteriormente.

Existencia de atractor pullback

En este apartado vamos a exponer algunas condiciones suficientes para la existencia de atractor pullback; para ello previamente proporcionaremos algunas definiciones y resultados necesarios.

Consideramos un proceso U en un espacio métrico X .

Definición 3.7. Sea U un proceso y sea $B \subset X$. Se define el conjunto pullback ω -límite de B en el instante t como

$$\omega(B, t) = \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} U(t, s)B},$$

o equivalentemente,

$$\omega(B, t) = \{y \in X : \exists \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (-\infty, t], \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B, s_n \rightarrow -\infty, y = \lim_{n \rightarrow \infty} U(t, s_n)x_n\}.$$

Nota 3.3. Si $\{S(t) : t \geq 0\}$ es un sistema semi-dinámico y U es el proceso definido como $\{U(t, s) = S(t - s) : (t, s) \in \mathbb{R}_*^2\}$, entonces los conceptos de ω -límite y pullback ω -límite coinciden. En efecto,

$$\begin{aligned} \omega(B, t) &= \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} U(t, s)B} = \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t - s)B} = \bigcap_{0 \leq t - \sigma} \overline{\bigcup_{0 \leq \sigma - s} S(t - s)B} \\ &= \bigcap_{0 \leq t - \sigma} \overline{\bigcup_{r \geq t - \sigma} S(r)B} = \bigcap_{0 \leq s \leq r} \overline{\bigcup_{r \geq s} S(r)B} = \omega(B). \end{aligned}$$

Lema 3.1. Sea $K \subset X$ un subconjunto compacto de X . Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de X tal que $\text{dist}(x_n, K) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente cuyo límite está en K .

Demostración.

Puesto que $\text{dist}(x_n, K) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, existe $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ verificando:

$$\text{dist}(x_{n_k}, K) < \frac{1}{k}, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N},$$

y por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $y_k \in K$ tal que $\text{dist}(x_{n_k}, y_k) < \frac{1}{k}$.

Por ser K compacto, podemos extraer una subsucesión de $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, que por simplicidad denotaremos igual y que verifica $y_k \rightarrow y_0$, cuando $k \rightarrow \infty$.

Ahora, de la propiedad triangular de distancia tenemos,

$$\text{dist}(x_{n_k}, y_0) \leq \text{dist}(x_{n_k}, y_k) + \text{dist}(y_k, y_0),$$

y tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos $\text{dist}(x_{n_k}, y_0) \rightarrow 0$, es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y_0 \in K$.

□

Lema 3.2. *Sea U un proceso en un espacio métrico X .*

(i) *Dado $B \subset X$, el conjunto $\omega(B, s)$ es positivamente invariante, es decir,*

$$U(t, s)\omega(B, s) \subset \omega(B, t), \quad \text{para todo } (t, s) \in \mathbb{R}_*^2.$$

(ii) *Si $B \subset X$ es tal que $\omega(B, s)$ es compacto y atrae a B en sentido pullback en el instante s , entonces para todo $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$ se verifica*

$$U(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t).$$

(iii) *Si $\omega(B, t)$ es compacto y atrae en sentido pullback al conjunto \mathcal{C} en el instante t , y \mathcal{C} es un conjunto conexo tal que $B \subseteq \mathcal{C}$, entonces $\omega(B, t)$ es también conexo.*

Demostración.

(i) Veamos que $\omega(B, s)$ es positivamente invariante. Sea $x \in \omega(B, s)$, entonces existe $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, s]$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tales que $\sigma_n \rightarrow -\infty$ y $U(s, \sigma_n)x_n \rightarrow x$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por la continuidad del proceso U obtenemos

$$U(t, s)x = U(t, s) \lim_{n \rightarrow \infty} U(s, \sigma_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U(t, \sigma_n)x_n,$$

donde $\sigma_n \leq s \leq t$, por tanto, $U(t, s)x \in \omega(B, t)$, lo cual implica que $U(t, s)\omega(B, s) \subset \omega(B, t)$, con $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$.

(ii) Probemos que $U(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t)$, para todos $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$. Fijemos $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$ y sea $x \in \omega(B, t)$; entonces existen dos sucesiones $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tales que $\sigma_n \rightarrow -\infty$ y $U(t, \sigma_n)x_n \rightarrow x$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por una parte, como $\sigma_n \rightarrow -\infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_n \leq s$ para todo $n \geq n_0$. Por otra parte aplicando la propiedad (ii) de la Definición 3.1 y teniendo en cuenta que $\sigma_n \leq s$, para todo $n \geq n_0$,

$$U(t, s)U(s, \sigma_n)x_n = U(t, \sigma_n)x_n, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Por todo lo anterior se deduce

$$U(t, s) \lim_{n \rightarrow \infty} U(s, \sigma_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U(t, \sigma_n)x_n = x. \quad (3.8)$$

Además, como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ y $\omega(B, s)$ atrae en sentido pullback a B en el instante s se tiene

$$\text{dist}(U(s, \sigma_n)x_n, \omega(B, s)) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Es fácil ver que $\{U(s, \sigma_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \omega(B, s)$. En efecto, de la compacidad de $\omega(B, s)$ y del Lema 3.1 se deduce que existen subsucesiones $\{\sigma_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, respectivamente tales que

$$U(s, \sigma_{n_k})x_{n_k} \rightarrow y \in \omega(B, s), \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

y con (3.8) y la continuidad del proceso U se obtiene

$$U(t, s)y = x,$$

es decir, $U(t, s)\omega(B, s) \supseteq \omega(B, t)$, con $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$.

De manera análoga, si $x \in \omega(B, s)$ entonces existe $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, s]$, con $\sigma_n \rightarrow -\infty$, y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tales que $U(s, \sigma_n)x_n \rightarrow x$, cuando $n \rightarrow \infty$; entonces

$$U(t, s)x = U(t, s) \lim_{n \rightarrow \infty} U(s, \sigma_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U(t, \sigma_n)x_n,$$

es decir, $U(t, s)x \in \omega(B, t)$.

(iii) Demostremos por último por reducción al absurdo que si $\omega(B, t)$ es compacto, atrae a \mathcal{C} en sentido pullback en el instante t y \mathcal{C} es conexo tal que $B \subseteq \mathcal{C}$, entonces $\omega(B, t)$ es conexo. Supongamos que $\omega(B, t)$ no es conexo, entonces $\omega(B, t)$ es unión de dos compactos no vacíos y disjuntos y que, por tanto, están separados una distancia 2δ para algún $\delta > 0$, es decir,

$$\omega(B, t) = \bigcup_{i=1}^2 \omega_i, \quad \text{donde } \bigcap_{i=1}^2 \omega_i = \emptyset, \omega_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \quad \text{y} \quad \text{dist}(\omega_1, \omega_2) = 2\delta.$$

Como $\omega(B, t)$ atrae a \mathcal{C} en sentido pullback y $B \subseteq \mathcal{C}$, se tiene $\omega(B, t) = \omega(\mathcal{C}, t)$; en efecto, dado que $B \subseteq \mathcal{C}$, $\omega(B, t) \subset \omega(\mathcal{C}, t)$. Por otra parte, como $\omega(B, t)$ atrae a \mathcal{C} en sentido pullback en el instante t , se tiene que $\text{dist}(U(t, s)\mathcal{C}, \omega(B, t)) \rightarrow 0$, cuando $s \rightarrow -\infty$, y por tanto, $\omega(\mathcal{C}, t) \subset \omega(B, t)$. Ahora bien, puesto que $\omega(B, t) = \omega(\mathcal{C}, t)$ y $\text{dist}(U(t, s)\mathcal{C}, \omega(B, t)) \rightarrow 0$, cuando $s \rightarrow -\infty$, existe $s_0 < 0$ tal que

$$U(t, s)\mathcal{C} \subset \mathcal{B}_\delta(\omega(\mathcal{C}, t)), \quad \text{para todo } s \leq s_0,$$

donde $\mathcal{B}_\delta(\omega(B, t)) = \{x \in X : \text{dist}(x, \omega(\mathcal{C}, t)) < \delta\}$. Por hipótesis, \mathcal{C} es conexo y en consecuencia, $U(t, s)\mathcal{C}$ es conexo, (por la continuidad de proceso), por tanto, existe $i \in \{1, 2\}$ tal que

$$U(t, s)\mathcal{C} \cap \mathcal{B}_\delta(\omega_i) = \emptyset, \quad \text{para todo } s \leq s_0,$$

con $\mathcal{B}_\delta(\omega_i) = \{x \in X : \text{dist}(x, \omega_i) < \delta\}$. De ello se deduce que $\omega(\mathcal{C}, t) \cap \mathcal{B}_\delta(\omega_i) = \emptyset$ para dicho i , pero $\omega(\mathcal{C}, t) \cap \mathcal{B}_\delta(\omega_i) = \omega_i$, luego o bien $\omega_1 = \emptyset$, o bien $\omega_2 = \emptyset$ lo cual contradice el hecho de que ω_1 y ω_2 son ambos sean no vacíos. Por tanto, $\omega(B, t)$ es conexo. □

Lema 3.3. *Sea U un proceso en un espacio métrico X . Si B es un subconjunto no vacío, acotado y que es atraído por algún compacto K en el instante t , entonces $\omega(B, t)$ es no vacío, compacto, atrae pullback al conjunto B en el instante t y es invariante.*

Demostración.

Veamos que $\omega(B, t)$ es no vacío. Como K atrae a B en sentido pullback en el instante t ,

$$\text{dist}(U(t, s)B, K) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } s \rightarrow -\infty,$$

en particular, existen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ y $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ dos sucesiones con $s_n \rightarrow -\infty$ tales que

$$\text{dist}(U(t, s_n)x_n, K) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Por tanto, por (3.9) y por ser K un compacto, aplicando el Lema 3.1, obtenemos que $\{U(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, que denotaremos nuevamente $\{U(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que converge a un punto de conjunto K , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(t, s_n)x_n = x \in K,$$

luego $x \in \omega(B, t)$.

La compacidad se deduce de que $\omega(B, t) \subset K$, $\omega(B, t)$ es cerrado por la propia definición de ω -límite y K es compacto.

Veamos que $\omega(B, t)$ atrae en sentido pullback a B en el instante t por reducción al absurdo. Supongamos que $\omega(B, t)$ no atrae en sentido pullback a B , es decir, existen sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ y $\varepsilon > 0$ tales que, $s_n \rightarrow -\infty$ y

$$\text{dist}(U(t, s_n)x_n, \omega(B, t)) > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

Sin embargo, en la primera parte de la demostración hemos probado que una sucesión del tipo $\{U(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto de $\omega(B, t)$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(U(t, s_n)x_n, \omega(B, t)) = 0.$$

Por tanto, si tomamos límite cuando $n \rightarrow \infty$ en (3.10) llegamos a una contradicción luego $\omega(B, t)$ atrae en sentido pullback a B en el instante t .

La invarianza de $\omega(B, t)$ se obtiene del Lema 3.2 (iii) ya que $\omega(B, t)$ es compacto y atrae pullback a B en el instante t .

□

Una vez establecidos estos resultados y definiciones enunciemos y demostremos los resultados que aseguran la existencia de atractor global.

Teorema 3.2 (Existencia de atractor pullback). *Sea U un proceso en el espacio métrico X . Son equivalentes:*

- (i) U posee un atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (ii) Existe una familia $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos compactos que atrae en sentido pullback a los acotados de X .

En tal caso, el atractor pullback viene dado por:

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{F}} \omega(B, t)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $\mathcal{F} = \{B \subset X : B \text{ acotado}\}$. Además, $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es minimal en el sentido que, si existe otra familia de conjuntos compactos $\{\hat{\mathcal{A}}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que atrae en sentido pullback a los acotados de X , se verifica $\mathcal{A}(t) \subset \hat{\mathcal{A}}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Es inmediato probar que (i) implica (ii) tomando $K(t) = \mathcal{A}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Veamos que (ii) implica (i). Supongamos que existe una familia de conjuntos compactos $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que atrae en sentido pullback a los acotados de X . Para demostrar que $\mathcal{A}(t)$ es atractor pullback tenemos que ver que se verifica que $\mathcal{A}(t)$ es compacto, $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrae en sentido pullback a los acotados de X y es invariante.

En primer lugar, probemos que $\mathcal{A}(t)$ es compacto y atrae en sentido pullback a los acotados de X . Observemos que puesto que $K(t)$ atrae pullback a acotados de X , de la definición de ω -límite se tiene que para todo $B \subset X$ acotado y para todo $t \in \mathbb{R}$, $\omega(B, t) \subseteq K(t)$. Por el Lema 3.3 se tiene que $\omega(B, t)$ es no vacío, compacto, atrae en sentido pullback a B en el instante t y es invariante.

Definamos ahora, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{F}} \omega(B, t)},$$

donde \mathcal{F} denota la familia de subconjuntos de X que son acotados. Como $\mathcal{A}(t)$ es cerrado, $\mathcal{A}(t) \subseteq K(t)$ y $K(t)$ es compacto se tiene que $\mathcal{A}(t)$ es compacto para cada $t \in \mathbb{R}$. Además, como para cada $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(t) \subseteq K(t)$, para cualquier $B \subset X$ acotado se tiene que

$$\text{dist}(U(t, s)B, \mathcal{A}(t)) \leq \text{dist}(U(t, s)B, K(t)) + \text{dist}(\mathcal{A}(t), K(t)) \rightarrow 0,$$

cuando $s \rightarrow -\infty$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, luego $\mathcal{A}(t)$ atrae en sentido pullback a los acotados de X en el instante t .

La invarianza de $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ se sigue de la invarianza de cada uno de los conjuntos $\omega(B, t)$. En efecto, demostremos en primer lugar que $U(t, s)\mathcal{A}(s) \subseteq \mathcal{A}(t)$ para todo $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$. Sea $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, podemos tomar una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \omega(B_n, s)$, $B_n \in \mathcal{F}$ y $x_n \rightarrow x_0$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por invarianza de $\omega(B_n, s)$, $y_n = U(t, s)x_n \in \omega(B_n, t)$, y por continuidad del proceso U se tiene que $y_n = U(t, s)x_n \rightarrow U(t, s)x_0 \in \mathcal{A}(t)$. Por tanto, $U(t, s)\mathcal{A}(s) \subseteq \mathcal{A}(t)$, con $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$. Veamos ahora que $\mathcal{A}(t) \subseteq U(t, s)\mathcal{A}(s)$ para todo $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$. Sea $y_0 \in \mathcal{A}(t)$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $y_n \in \omega(B_n, t)$, $B_n \in \mathcal{F}$, e $y_n \rightarrow y_0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

De nuevo, por invarianza de $\omega(B_n, t)$, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$ tal que $U(t, s)x_n = y_n$, con $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$. Teniendo en cuenta que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} \omega(B_n, s) \subseteq \mathcal{A}(s)$ y $\mathcal{A}(s)$ es compacto, por el Lema 3.1 existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que denotaremos de nuevo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por simplicidad, que converge a algún punto $x_0 \in \mathcal{A}(s)$. Por la continuidad del proceso U , $y_n = U(t, s)x_n \rightarrow y_0 = U(t, s)x_0$, luego $\mathcal{A}(t) \subseteq U(t, s)\mathcal{A}(s)$.

Veamos por último que $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es minimal. Si $\{\tilde{\mathcal{A}}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es otra familia de cerrados y acotados que atrae a los acotados de X en sentido pullback en el instante t , se verifica $\omega(B, t) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}(t)$, para todo $B \subset X$ acotado. Así, como $\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{F}} \omega(B, t)}$, se verifica que $\mathcal{A}(t) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}(t)$, luego $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es minimal. \square

El siguiente corolario para sistemas semi-dinámicos es consecuencia inmediata del Teorema 3.2 y permite una caracterización simple del atractor global.

Corolario 3.1. *Sea $\{S(t) : t \geq 0\}$ un sistema semi-dinámico de un espacio métrico X . Se verifica que $\{S(t) : t \geq 0\}$ tiene un atractor global \mathcal{A} si, y solo si, existe un conjunto compacto K que atrae a acotados de X , y en tal caso $\mathcal{A} = \omega(K)$.*

Demostración.

Por el Teorema 3.1 sabemos que $\{S(t) : t \geq 0\}$ tiene atractor global si el proceso U definido como $U(t, s) = S(t - s)$, con $(t, s) \in \mathbb{R}_*^2$ posee un atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, y en tal caso $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, $t \in \mathbb{R}$. Junto al Teorema 3.2 se obtiene que el hecho de que U tenga atractor pullback es equivalente a que exista un K compacto que atrae en sentido pullback a los acotados de X y en tal caso, se tiene

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{F}} \omega(B)},$$

donde \mathcal{F} es la familia de conjuntos acotados en X .

Probemos que $\mathcal{A} = \omega(K)$. Como $\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{F}} \omega(B)}$ y K es compacto, (en particular, es acotado), se tiene $\omega(K) \subseteq \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{F}} \omega(B)} = \mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{A} \subseteq \omega(K)$; como K es compacto y atrae a conjuntos acotados de X , para todo $B \subset X$ acotado se tiene

$$\text{dist}(S(t)B, K) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

y entonces existen $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a infinito, una sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset$

B y una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, tales que

$$\text{dist}(S(t_n)b_n, y_n) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

y como $S(t)$ es continua para todo $t \geq 0$,

$$\text{dist}(S(t)S(t_n)b_n, S(t)y_n) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \text{ para todo } t \geq 0,$$

es decir, $\text{dist}(S(t)\omega(B), S(t)K) = 0$, para todo $t \geq 0$. Ahora, de la invarianza de $\omega(B)$ se tiene

$$\text{dist}(\omega(B), S(t)K) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

de donde se deduce que $\omega(B) \subseteq \overline{\omega(K)} = \omega(K)$, para todo $B \subset X$ acotado; por tanto, $\mathcal{A} \subseteq \omega(K)$.

□

A continuación consideraremos otro concepto útil en las aplicaciones para obtener la atracción pullback para los conjuntos ω -límite, y por tanto la existencia de atractores pullback, sin necesidad de encontrar un familia $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ pullback atrayente de compactos explícitamente.

Definición 3.8. *Sea X un espacio métrico. Se dice que un proceso U sobre X es pullback asintóticamente compacto si para cada $t \in \mathbb{R}$, cada $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$, con $s_n \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, y cada sucesión acotada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, la sucesión $\{U(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.*

Para dichos procesos se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.4. *Si un proceso U tiene una familia de compactos atrayentes pullback $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$, entonces el proceso U es pullback asintóticamente compacto.*

Demostración.

Supongamos que $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es una familia de compactos pullback atrayentes para U . Sea $t \in \mathbb{R}$, y consideramos las sucesiones $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$, con $s_n \rightarrow -\infty$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión acotada y veamos que $\{U(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.

Como $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es una familia de compactos atrayentes pullback se tiene

$$\text{dist}(U(t, s)B, K(t)) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } s \rightarrow -\infty,$$

donde que $B = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, en particular,

$$\text{dist}(U(t, s_n)x_n, K(t)) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Como $K(t)$ es compacto para cada $t \in \mathbb{R}$ y se verifica (3.11), aplicando el Lema 3.1 se tiene que existe una subsucesión de $\{U(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K(t)$ que es convergente a un punto de $K(t)$. En consecuencia, U es pullback asintóticamente compacto. \square

Lema 3.5. *Sea U un proceso pullback asintóticamente compacto y sea $B \subset X$ acotado y no vacío. Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$ se verifica:*

- (i) $\omega(B, t)$ es no vacío.
- (ii) $\omega(B, t)$ atrae a B en sentido pullback en el instante t .
- (iii) $\omega(B, t)$ es compacto.
- (iv) $\omega(B, t)$ es invariante, es decir,

$$U(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t), \quad \text{para todo } (t, s) \in \mathbb{R}_*^2.$$

Demostración.

(i) Veamos que $\omega(B, t)$ es no vacío. Puesto que U es un proceso pullback asintóticamente compacto y B es acotado, dado $t \in \mathbb{R}$ podemos tomar $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ tendiendo a menos infinito y una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ tales que la sucesión $\{U(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a algún $y \in X$. Ahora, por definición de $\omega(B, t)$, se tiene que $y \in \omega(B, t)$, luego $\omega(B, t)$ es no vacío.

(ii) Veamos que $\omega(B, t)$ atrae en sentido pullback a B en el instante t por reducción al absurdo. Supongamos que $\omega(B, t)$ no atrae en sentido pullback a B , entonces existen sucesiones $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$, con $s_n \rightarrow -\infty$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\text{dist}(U(t, s_n)x_n, \omega(B, t)) > \varepsilon, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Razonando como en el apartado (i) se tiene que $\{U(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{U(t, s_{n_k})x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un elemento $y \in \omega(B, t)$, con lo cual

$$\text{dist}(U(t, s_{n_k})x_{n_k}, \omega(B, t)) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

obteniendo así a una contradicción. Por tanto, $\omega(B, t)$ atrae en sentido pullback a B en un instante t .

(iii) Para probar que $\omega(B, t)$ es compacto haremos uso de la equivalencia entre compacidad y compacidad secuencial y probaremos que si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \omega(B, t)$ entonces tiene una subsucesión convergente. Como $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \omega(B, t)$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ y una sucesión $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ tales que $s_n \rightarrow -\infty$ y

$$\text{dist}(U(t, s_n)x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3.12)$$

Como $\{U(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge a un elemento $y \in \omega(B, t)$ y se verifica (3.12), se deduce que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge a $y \in \omega(B, t)$.

(iv) Por último, por el Lema 3.2 como $\omega(B, t)$ es compacto y atrae a B en sentido pullback en el instante t se tiene que $\omega(B, t)$ es invariante. □

3.2. Modelo SIR no autónomo

En esta última sección, abordaremos el estudio del modelo SIR desde una perspectiva mucho más general, haciendo uso de un sistema diferencial no autónomo. En concreto, asumiremos que la población puede variar a lo largo del tiempo, es decir, $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ para cada $t \geq 0$, a diferencia de lo que sucedía en el modelo SIR planteado en el Capítulo 2. Dicha variación puede ser tanto de forma determinística como de forma aleatoria, aunque en este trabajo consideraremos la primera situación que es más sencilla con el objetivo de simplificar el análisis del modelo.

Para ello, asumimos que la incorporación de nuevos individuos a la población puede ser modelada por una función continua y con valores positivos que depende del tiempo $\Lambda(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir $\Lambda(t) \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$ para todo $t \geq 0$, donde $0 < \Lambda_1 \leq \Lambda_2$. Además, seguiremos denotando $\beta > 0$ y $\gamma > 0$ la tasa de contacto entre susceptibles

e infectados y la proporción de individuos que se recuperan por unidad de tiempo, respectivamente. En este caso, $\nu > 0$ será la tasa de mortalidad pero puede no coincidir con la tasa de nacimiento, como ocurría en el modelo SIR introducido en el Capítulo 2.

Formulemos a continuación las asunciones que realizaremos en la población y que representaremos de forma esquemática en la Figura 3.2:

- (i) El tamaño poblacional, que en el instante $t \geq 0$ denotamos $N(t)$, no permanece constante a lo largo del tiempo.
- (ii) La única forma de que un nuevo individuo pase a formar parte del grupo de los susceptibles es por nacimiento o inmigración y dicha incorporación de individuos a la población dependerá del instante de tiempo.
- (iii) Existen dos formas de que un individuo abandone el grupo de los susceptibles: por muerte natural o por convertirse en individuo infeccioso.
- (iv) Supondremos que la velocidad de cambio de $S(t)$ por transformación de susceptibles en infecciosos depende del número de individuos susceptibles, del número de infecciosos y de la cantidad de contactos entre susceptibles e infecciosos. En concreto, asumiremos que cada individuo infectado tiene un número fijo β de contactos por unidad de tiempo y que son suficientes para contagiarse de la enfermedad, de los cuales no todos se producen con individuos susceptibles. Si asumimos una distribución homogénea de los individuos en la población, por término medio, cada individuo infectado genera $\beta S(t)/N(t)$ nuevos individuos infectados por unidad de tiempo.
- (v) Un individuo abandona el grupo de los infecciosos por dos posibles causas: muerte natural y recuperación de la enfermedad o por aislamiento.
- (vi) Asumimos que proporción de individuos infectados que se recuperan durante unidad de tiempo, γ , es fija.
- (vii) Un individuo se incorpora al grupo de los eliminados/recuperados si, o bien, ha superado la enfermedad, o bien ha sido detectado como individuo infeccioso y ha sido aislado para prevenir nuevos contagios.
- (viii) Un individuo solamente abandona el grupo de los eliminados por muerte natural.

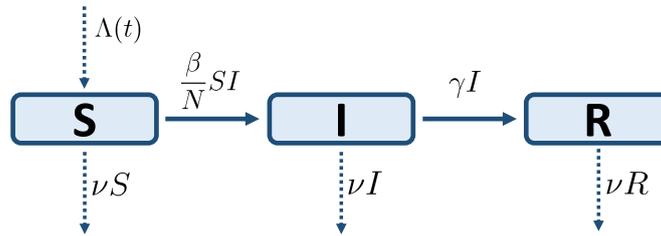


Figura 3.2: Esquema de la dinámica entre los distintos grupos.

Así, el sistema resultante viene definido por el siguiente sistema diferencial no autónomo:

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda(t) - \frac{\beta}{N(t)}S(t)I(t) - \nu S(t), \\ I'(t) = \frac{\beta}{N(t)}S(t)I(t) - \nu I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) = -\nu R(t) + \gamma I(t). \end{cases} \quad (3.13)$$

Para el estudio del comportamiento asintótico del modelo SIR en el caso no autónomo, sólo nos centraremos en el estudio global ya que al haber un término dependiente de t no podremos calcular los puntos de equilibrio y en consecuencia no podremos estudiar el comportamiento asintótico local de dicho modelo. Comenzaremos con un resultado que garantiza la existencia de soluciones globales positivas $V(t) = (S(t), I(t), R(t))$ para el valor inicial $V(t_0) = (S(t_0), I(t_0), R(t_0))$. Por simplificación denotaremos $V_0 = (S_0, I_0, R_0) = V(t_0)$, con $t_0 \geq 0$, y $\mathbb{R}_+^3 = \{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}$. Recordemos que en el contexto epidemiológico considerado sólo tiene sentido considerar soluciones no negativas.

Lema 3.6. *Supongamos que $V_0 = (S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^3$, entonces la solución para el sistema (3.13) con valor inicial V_0 está definida globalmente en el tiempo y es no negativa para todo $t \geq t_0$.*

Demostración.

Veamos en primer lugar que, por continuidad, los datos iniciales no negativos dan lugar a soluciones no negativas. Supongamos que en el instante de tiempo t , $S(t) = 0$,

entonces la ecuación diferencial ordinaria para $S(t)$ se reduce a

$$S'(t) = \Lambda(t) > 0,$$

de donde se deduce que $S(t)$ es estrictamente creciente en dicho instante de tiempo. Supongamos ahora que en el instante t , $I(t) = 0$, entonces la ecuación diferencial ordinaria para $I(t)$ viene dada por

$$I'(t) = 0,$$

luego $I(t)$ es constante, en particular, no decreciente en dicho t . De manera análoga, se obtiene que

$$R'(t) = \gamma I(t) \geq 0,$$

cuando $R(t) = 0$, de donde se deduce que $R(t)$ es no decreciente en dicho instante de tiempo. Por tanto, $(S(t), I(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^3$ para todo $t \geq t_0$.

Veamos ahora que toda solución está acotada en \mathbb{R}_+^3 . Sumamos las ecuaciones del sistema (3.13) obteniendo

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = \Lambda(t) - \nu S(t) - \nu I(t) - \nu R(t).$$

Puesto que $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$, la igualdad anterior equivale a

$$N'(t) = \Lambda(t) - \nu N(t),$$

y reordenando términos obtenemos

$$N'(t) + \nu N(t) = \Lambda(t),$$

que es una ecuación diferencial lineal no homogénea. Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $e^{\nu t}$ e integrando entre t_0 y t se tiene

$$N(t)e^{\nu t} - N(t_0)e^{\nu t_0} = \int_{t_0}^t \Lambda(s)e^{\nu s} ds,$$

y de nuevo, reordenando términos

$$N(t) = N(t_0)e^{-\nu(t-t_0)} + e^{-\nu t} \int_{t_0}^t \Lambda(s)e^{\nu s} ds.$$

Puesto que $\Lambda(t) \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y $\int_{t_0}^t e^{\nu s} ds = \frac{e^{\nu t} - e^{\nu t_0}}{\nu}$, obtenemos

$$N(t) \leq N(t_0)e^{-\nu(t-t_0)} + \Lambda_2 \frac{e^{\nu t} - e^{\nu t_0}}{\nu e^{\nu t}},$$

o equivalentemente,

$$N(t) \leq N(t_0)e^{-\nu(t-t_0)} + \frac{\Lambda_2}{\nu}(1 - e^{-\nu(t-t_0)}).$$

Por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\Lambda_2}{\nu}.$$

Ahora, teniendo en cuenta nuevamente que $S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$, se tiene que $\max\{S(t), I(t), R(t)\} \leq N(t)$, de donde se deduce que cualquier solución $V(t) = (S(t), I(t), R(t))$ del sistema (3.13) está acotada.

□

El lema anterior garantiza que cualquier problema de valores iniciales asociado al sistema (3.13) con valores iniciales positivos tiene soluciones globales positivas en \mathbb{R}_+^3 y para todo $t \geq t_0$. Por tanto, podemos definir un proceso U con $t \geq t_0$ en \mathbb{R}_+^3 dado por:

$$U(t, t_0)V_0 = V(t; t_0, V_0), \quad \text{para todo } V_0 \in \mathbb{R}_+^3 \text{ y } t \geq t_0,$$

donde $V(t; t_0, V_0)$ es la solución del sistema (3.13) correspondiente al valor inicial $V_0 = (S_0, I_0, R_0)$. Una vez definido el proceso U , probamos que dicho proceso posee un atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Lema 3.7. *Supongamos que $k = \min\{2\nu - 1 - \beta, 2\nu + \gamma - \beta, 2\nu - \gamma\} > 0$. Para cualquier valor inicial $V_0 = (S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^3$ correspondiente al sistema (3.13) se verifica:*

$$\|V(t; t_0, V_0)\|^2 \leq e^{-k(t-t_0)}\|V_0\|^2 + e^{-kt} \int_{-\infty}^t e^{ks} \Lambda^2(s) ds, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Además, la familia $\mathcal{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$, donde para cada $t \in \mathbb{R}$, $D_0(t) =$

$B[(0, 0, 0), \rho_k(t)] \subset \mathbb{R}_+^3$ y $\rho_k(t)$ es una constante no negativa definida por

$$\rho_k(t)^2 = 1 + e^{-kt} \int_{-\infty}^t e^{ks} \Lambda^2(s) ds,$$

es una familia de compactos absorbente en sentido pullback para el proceso U .

Demostración.

Consideramos el sistema de ecuaciones (3.13) y multiplicamos la ecuación de $S'(t)$ por $S(t)$, la ecuación $I'(t)$ por $I(t)$ y $R'(t)$ por $R(t)$ obteniendo

$$\begin{cases} S'(t)S(t) &= S(t)\Lambda(t) - \frac{\beta}{N(t)}S^2(t)I(t) - \nu S^2(t), \\ I'(t)I(t) &= \frac{\beta}{N(t)}S(t)I^2(t) - \nu I^2(t) - \gamma I^2(t), \\ R'(t)R(t) &= -\nu R^2(t) + \gamma I(t)R(t). \end{cases}$$

A continuación sumamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} S'(t)S(t) + I'(t)I(t) + R'(t)R(t) &= S(t)\Lambda(t) - \nu(S^2(t) + I^2(t) + R^2(t)) - \gamma I^2(t) \\ &\quad + \gamma I(t)R(t) - \beta \left(\frac{S^2(t)I(t)}{N(t)} - \frac{S(t)I^2(t)}{N(t)} \right). \end{aligned}$$

Por simplicidad, escribamos $W(t) = \|V(t; t_0, V_0)\|^2$; como $S'(t)S(t) + I'(t)I(t) + R'(t)R(t) = \frac{1}{2}W'(t)$ se deduce

$$W'(t) = 2S(t)\Lambda(t) - 2\nu W(t) - 2\gamma I^2(t) + 2\gamma I(t)R(t) - 2\beta \left(\frac{S^2(t)I(t)}{N(t)} - \frac{S(t)I^2(t)}{N(t)} \right).$$

Puesto que $0 \leq (\Lambda(t) - S(t))^2$ y $0 \leq (I(t) - R(t))^2$ se tiene $2\Lambda(t)S(t) \leq \Lambda^2(t) + S^2(t)$ y $2\gamma I(t)R(t) \leq \gamma I^2(t) + \gamma R^2(t)$. Por otra parte, tenemos que $0 \leq \frac{S(t)}{N(t)}, \frac{I(t)}{N(t)} \leq 1$, luego

$$-2\beta \left(\frac{S^2(t)I(t)}{N(t)} - \frac{S(t)I^2(t)}{N(t)} \right) \leq 2\beta \frac{S(t)I^2(t)}{N(t)}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\beta S(t)I(t) \\ &\leq \beta(S^2(t) + I^2(t)). \end{aligned}$$

Reuniendo todo lo anterior

$$\begin{aligned} W'(t) &\leq \Lambda^2(t) + S^2(t) - 2\nu W(t) - \gamma I^2(t) + \gamma R^2(t) + \beta S^2(t) + \beta I^2(t) \\ &\leq \Lambda^2(t) + (\beta + 1 - 2\nu)S^2(t) + (\beta - \gamma - 2\nu)I^2(t) + (\gamma - 2\nu)R^2(t) \\ &\leq \Lambda^2(t) - kW(t), \end{aligned}$$

con $k = \min\{2\nu - 1 - \beta, 2\nu + \gamma - \beta, 2\nu - \gamma\} > 0$, es decir,

$$W'(t) + kW(t) \leq \Lambda^2(t),$$

donde la igualdad se corresponde con una ecuación diferencial lineal no homogénea. Multiplicando ambos miembros de la igualdad por e^{tk} e integrando entre t_0 y t se tiene

$$e^{tk}W(t) - e^{t_0k}W(t_0) \leq \int_{t_0}^t e^{ks}\Lambda^2(s)ds,$$

y reordenando términos

$$e^{tk}W(t) \leq e^{t_0k}W(t_0) + \int_{t_0}^t e^{ks}\Lambda^2(s)ds,$$

es decir,

$$W(t) \leq e^{-k(t-t_0)}W(t_0) + e^{-kt} \int_{t_0}^t e^{ks}\Lambda^2(s)ds,$$

de donde se deduce, deshaciendo el cambio $\|V(t)\|^2 = W(t)$, que

$$\|V(t; t_0, V_0)\|^2 \leq e^{-k(t-t_0)}\|V_0\|^2 + e^{-kt} \int_{-\infty}^t e^{ks}\Lambda^2(s)ds,$$

para todo $t \geq t_0$.

Veamos ahora la segunda afirmación del teorema. Comencemos demostrando que $B[(0, 0, 0), \rho_k(t)]$ es un conjunto absorbente en sentido pullback, donde $\rho_k(t)$ viene dado por $\rho_k(t)^2 = 1 + e^{-kt} \int_{-\infty}^t e^{ks}\Lambda^2(s)ds$, con $t \in \mathbb{R}$. Sea $D \subset \mathbb{R}_+^3$ un conjunto acotado, entonces existe $M > 1$ tal que $\|V_0\| \leq M$, para todo $V_0 \in D$. Por la

desigualdad anterior tenemos que para todo $t \geq t_0$ y $V_0 \in D$,

$$\begin{aligned} \|V(t; t_0, V_0)\|^2 = \|U(t, t_0)V_0\|^2 &\leq e^{-k(t-t_0)}\|V_0\|^2 + e^{-kt} \int_{-\infty}^t e^{ks} \Lambda^2(s) ds, \\ &\leq e^{-k(t-t_0)}M^2 + e^{-kt} \int_{-\infty}^t e^{ks} \Lambda^2(s) ds. \end{aligned}$$

Tomando $T(t, D) = \frac{\log(e^{kt}/M^2)}{k}$ se tiene que para todo $t_0 \leq T(t, D)$ y para todo $V_0 \in D$ la siguiente desigualdad

$$\|V(t; t_0, V_0)\|^2 \leq 1 + e^{-kt} \int_{-\infty}^t e^{ks} \Lambda^2(s) ds,$$

es decir, $U(t, t_0)V_0 = V(t; t_0, V_0) \in B[(0, 0, 0), \rho_k(t)]$. La compacidad se obtiene de forma inmediata por ser $B[(0, 0, 0), \rho_k(t)]$ una bola cerrada en \mathbb{R}_+^3 . Por tanto, $\mathcal{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es una familia absorbente en sentido pullback para el proceso U que hemos definido anteriormente. □

Ejemplo 3.3. Consideramos una población que comienza con 20 individuos susceptibles, 80 individuos infecciosos y ningún individuo recuperado. La evolución temporal de dicha población, cuya dinámica puede ser descrita por el sistema (3.13), donde $\nu = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\delta = 20$, $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\Lambda(t) = 2000/(1 + e^{-t})$ se representa en la Figura 3.3.

Observemos que en este caso $k = \frac{1}{2}$ es el valor definido en el Lema 3.7. La función $\rho_{\frac{1}{2}}(\cdot)$ dada en el mencionado lema, así como la evolución temporal de la norma euclídea de las soluciones se representan en la Figura 3.4.

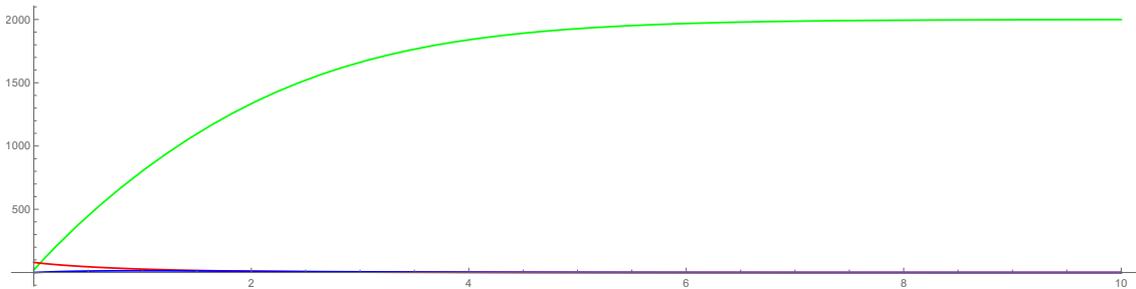


Figura 3.3: Evolución temporal del número de individuos susceptibles (línea verde), infecciosos (línea roja) y recuperados/eliminados (línea azul).

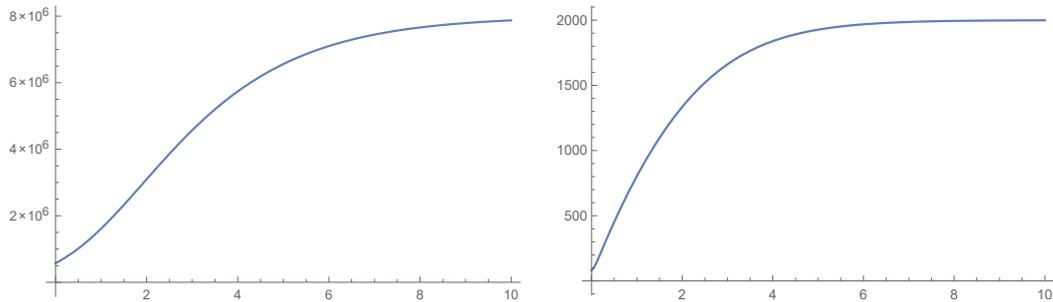


Figura 3.4: Izquierda: evolución temporal de la función $\rho_{\frac{1}{2}}(\cdot)$. Derecha: evolución temporal de la norma euclídea de las soluciones para el problema de valores iniciales definido en el ejemplo.

Estos resultados nos permiten concluir que existe un atractor pullback para el proceso U .

Teorema 3.3. *Bajo las hipótesis del Lema 3.7, el proceso U definido en \mathbb{R}_+^3 , posee un atractor pullback.*

Demostración.

Como la familia \mathcal{D}_0 definida en dicho lema es una familia de compactos absorbentes en sentido pullback, en particular es atrayente en sentido pullback para los conjuntos acotados de \mathbb{R}_+^3 . Por tanto, aplicando el Teorema 3.2, el sistema (3.13) posee atractor pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ y está definido por

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{D \subset \mathcal{F}} \omega(D, t)},$$

donde \mathcal{F} denota la familia de subconjuntos acotados de X .

□

Notemos que dada la complejidad del modelo en este caso, nos limitamos simplemente a probar la existencia del atractor pullback pero no proporcionamos una expresión funcional que defina los conjuntos $\mathcal{A}(t)$. Recordemos que dicho conjunto nos indica dónde están o hacia dónde se acercan las soluciones en el instante t si éstas hubiesen comenzado hace un largo periodo de tiempo.

Bibliografía

- [1] N.T.J. Bailey. *The mathematical theory of infectious diseases and its applications*. Charles Griffin and Company, 1975.
- [2] T. Caraballo and X. Han. *Applied Nonautonomous and Random Dynamical Systems*. Springer, 2016.
- [3] I. Chueshov. *Introduction to the Theory of Infinite-dimensional Dissipative Systems*. Electronic library of mathematics. ACTA, 2002.
- [4] D.J. Daley and J. Gani. *Epidemic Modelling: An Introduction*. Cambridge University Press, 1999.
- [5] O. Diekmann and J.A.P. Heesterbeek. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*. Wiley Series in Mathematical & Computational Biology. Wiley, 2000.
- [6] J.K. Hale, L.T. Magalhaes, and W. Oliva. *Dynamics in Infinite Dimensions*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2006.
- [7] C.J. Harris and J.F. Miler. *Stability of Linear Systems: Some Aspects of Kinematic Similarity*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science, 1980.
- [8] M.J. Keeling and P. Rohani. *Modeling infectious diseases in human and animals*. Princeton University Press, 2008.
- [9] O. Ladyzhenskaya. *Attractors for Semi-groups and Evolution Equations*. Lezioni Lincee. Cambridge University Press, 1991.

- [10] C. Martínez and M.A. Sanz. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Reverté, Barcelona, 1991.
- [11] R.K. Miller and A.N. Michel. *Ordinary Differential Equations*. Academic Press, 1982.
- [12] S.S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. Springer, 2013.