



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

# GEOMETRÍA GLOBAL DE CURVAS PLANAS

Memoria realizada por Daniel García Cano

---

Dirigido por:  
VºBº

Dr. Alfonso Carriazo Rubio



# Abstract

In this work we can clearly distinguish two parts. Firstly, we study and prove some classical theorems about the Global Theory of plane curves, namely the Isoperimetric Inequality, the Four-Vertex Theorem and the Cauchy-Crofton Formula. Secondly, we focus on Bézier plane curves. We establish some global properties for them and we introduce a new method, inspired by the Isoperimetric Inequality, to produce the approximation of a circular arc by a Bézier curve. We include several interesting examples.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Teoremas clásicos</b>	<b>11</b>
1.1. Preliminares sobre curvas planas . . . . .	11
1.2. Desigualdad Isoperimétrica . . . . .	17
1.3. El Teorema de los Cuatro Vértices . . . . .	25
1.4. La Fórmula de Cauchy-Crofton . . . . .	38
<b>2. Geometría Global de Curvas de Bézier</b>	<b>41</b>
2.1. Preliminares sobre curvas de Bézier . . . . .	41
2.2. Curvas de Bézier cerradas . . . . .	44
2.3. Aproximación de arcos circulares . . . . .	51
<b>Apéndice Digital</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>



# Introducción

El primer acercamiento que tenemos los estudiantes del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla al área de la Geometría Diferencial se produce mediante la asignatura *Geometría Local de Curvas y Superficies*, de tercer curso. Tal y como su nombre indica, en ella el estudio de las curvas (que es lo que nos interesa para este trabajo) se lleva a cabo de manera local, es decir, en un entorno de cada punto. Sin embargo, también hay resultados destacados que cumplen las curvas en su totalidad, y que conforman lo que se conoce como la *Geometría Global de Curvas*. En ese marco podemos encuadrar nuestro estudio, que centraremos en las curvas planas.

Realmente, tal y como resulta evidente sin más que ojear el índice, este trabajo consta de dos bloques bien diferenciados. En el primero de ellos, se presentan algunos de los resultados globales más clásicos sobre curvas planas. A cada uno de ellos dedicamos su propia sección.

El primero de estos resultados es la conocida *Desigualdad Isoperimétrica*, que establece que la longitud  $l$  de una curva regular, cerrada y simple y el área que encierra  $A$ , satisfacen la desigualdad

$$l^2 - 4\pi A \geq 0,$$

dándose el caso de la igualdad si y sólo si la curva es una circunferencia. Esto quiere decir que, de todas las curvas de longitud fijada, la que mayor área encierra es la circunferencia. La primera demostración rigurosa de este hecho se debió a K. Weierstrass, aunque la que nosotros detallaremos fue realizada por E. Schmidt en 1939. No obstante, esta propiedad de la circunferencia era ya conocida por los matemáticos de la Grecia clásica.

Es más, podemos relatar una curiosa historia, protagonizada por la reina Dido, fundadora mítica de Cartago. Según las fuentes griegas y romanas, nuestra protagonista, llamada realmente Elisa de Tiro, huyó de esa ciudad fenicia, buscando refugio en las costas del norte de África, donde vivían los

gétulos, una tribu de libios cuyo rey se llamaba Jarbas. Elisa le pidió hospitalidad y un terreno en el que poder instalarse con su séquito y fundar una nueva ciudad (la futura Cartago). Jarbas le concedió el territorio que pudiera cubrir con una piel de buey. Elisa y sus seguidores decidieron recortar esa piel en tiras muy finas, que ataron entre sí formando una larga cuerda de piel. Entonces, para encerrar la mayor superficie posible, la dispusieron en forma de arco de circunferencia, con principio y final en puntos de la costa. De ahí que se afirme que Dido, nombre que recibiría Elisa al ser nombrada reina, ya conocía la Desigualdad Isoperimétrica. Una curiosidad más al respecto: según relata Virgilio en la Eneida, el héroe romano Eneas llegó a la costa de Cartago y Dido se enamoró perdidamente de él, siendo correspondida. Pero Eneas recibió el encargo de Júpiter de fundar una nueva ciudad en el Lacio (la futura Roma) y la abandonó tras un tiempo juntos. Dido decidió suicidarse por amor, clavándose en el pecho la espada de Eneas. Precisamente por ello, aparecerá siglos más tarde en otra obra cumbre de la literatura universal: la Divina Comedia de Dante Alighieri. Cuando éste visita el infierno (descrito como una serie de círculos concéntricos), acompañado precisamente de Virgilio, encuentra a Dido en el segundo círculo, el de los lujuriosos. Resulta curioso que fuera ubicada allí, al haber muerto por amor, cuando también podría haber acabado en el séptimo círculo, donde se encontraban los suicidas.

El siguiente resultado clásico de este capítulo es el llamado *Teorema de los Cuatro Vértices*, que viene a decir que una curva regular, simple, cerrada y convexa tiene al menos cuatro puntos en los que se anula la derivada de su curvatura (estos puntos se llamarán *vértices*). Para enunciarlo y demostrarlo correctamente, tendremos que estudiar y caracterizar las curvas convexas. Este teorema fue demostrado por S. Mukhopadhyaya en 1909 y A. Kneser en 1912. La prueba que nosotros incluimos aparece en una carta de G. Herglotz a W. Blaschke en 1930.

El último de estos resultados clásicos que presentaremos será la *Fórmula de Cauchy-Crofton*, que relaciona la longitud de una curva plana con el valor esperado del número de cortes con una recta cualquiera. Se trata de un teorema del área conocida como *Geometría Integral*. Podemos señalar que uno de los pioneros en ese campo de estudio fue el español Luis A. Santaló, que tuvo que exiliarse a Argentina en 1939 por sus ideas republicanas. Trabajó en distintas universidades argentinas, llegando a ser Profesor Emérito de la Universidad de Buenos Aires, y publicó más de cien artículos de investigación y trabajos de divulgación, así como varios libros.

Para la realización de este primer capítulo hemos consultado fundamentalmente los libros [2] y [6].

El segundo capítulo tiene una naturaleza muy distinta y mucho más práctica, puesto que se centra en el estudio de las llamadas *curvas de Bézier*, definidas por el matemático (e ingeniero de la empresa Renault) Pierre Bézier como una herramienta para el diseño de las carrocerías de los coches. Nosotros hemos tenido ya un contacto con ellas gracias a la asignatura *Geometría Aplicada*, de cuarto curso del Grado en Matemáticas. En este segundo bloque, concretaremos algunos aspectos de la geometría global para este tipo de curvas (planas), con resultados de elaboración propia.

También nos inspiraremos precisamente en la Desigualdad Isoperimétrica para establecer un nuevo método que nos permita aproximar arcos de circunferencia mediante curvas de Bézier. Previamente, detallaremos un método reciente, llamado *aproximación normal*, que ha sido creado por dos profesores del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Sevilla, Alfonso Carriazo (tutor de este trabajo) y M. Carmen Márquez, junto con Hassan Ugail de la Universidad de Bradford, en el artículo [3]. No sólo explicamos el método, sino que también elaboramos ejemplos distintos a los de dicho artículo. Nuestro método será una variación de éste, con resultados muy similares.

Dada que en los dos bloques de este trabajo se manejan herramientas distintas, hemos optado por no incluir un primer capítulo de preliminares, sino que hemos repartido éstos en sendas secciones al principio de cada uno de los capítulos, de manera que el lector tenga más a mano los resultados que se aplican en cada uno de ellos.

Incluimos también en esta memoria un Apéndice Digital, en el que se encuentran dos ficheros de Maple VI, de elaboración propia, con el detalle de los cálculos (así como imágenes y animaciones) del segundo capítulo. Y la finalizamos con una lista de las referencias que hemos utilizado para su redacción.

No quisiera acabar esta introducción sin expresar mi agradecimiento a D. Alfonso Carriazo Rubio por su paciencia, atención e innumerables ayudas prestadas.



# Capítulo 1

## Teoremas clásicos

En este capítulo vamos a presentar y demostrar los principales teoremas clásicos sobre la geometría global de curvas planas, como son la Desigualdad Isoperimétrica, el Teorema de los Cuatro Vértices o la Fórmula de Cauchy-Crofton. Dedicaremos una sección a cada uno de estos resultados. Previamente, incluiremos también algunos preliminares sobre curvas planas.

### 1.1. Preliminares sobre curvas planas

En la primera parte de esta sección se recoge una serie de conceptos y resultados sobre curvas, esenciales para el trabajo, comenzando por las definiciones más básicas, como la formalización del concepto de curva paramétrica. Dada la especificidad del trabajo con respecto a la dimensión del espacio ambiente, se formulará todo el contenido concretamente para el caso de  $\mathbb{R}^2$ . Para más información al respecto, recomendamos los libros [2] y [6].

En la segunda parte se enuncia una serie de resultados, que en principio no parecen muy relacionados con la teoría de curvas, pero que resultarán muy necesarios.

Cabe decir que no se incluye ninguna demostración en esta sección.

**Definición 1.1.1** Sea una aplicación  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Se dice que  $\alpha$  es una *curva paramétrica regular*, o simplemente c.p.r., si cumple que:

1.  $\alpha$  es diferenciable y continua para cualquier orden.
2.  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in (a, b)$ .

**Definición 1.1.2** Sea una aplicación  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Se dice que  $\beta$  es una *curva paramétrica regular sobre un intervalo cerrado* o *segmento de c.p.r.* si se cumple lo siguiente: existe un intervalo  $(c, d)$  con  $[a, b] \subset (c, d)$  tal que  $\alpha : (c, d) \rightarrow \mathbf{R}^2$  es una c.p.r. en el sentido de la Definición 1.1.1 con  $\beta = \alpha$  en  $[a, b]$ .

Utilizaremos la abreviatura c.p.r. tanto para curvas con dominio abierto como para las que lo tienen cerrado.

**Definición 1.1.3** Una c.p.r  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  se dice *cerrada de clase  $k$*  si  $\alpha^{(r)}(a) = \alpha^{(r)}(b)$ , para todo  $r = 0, \dots, k$ . Si  $k = \infty$ , diremos que la curva es *cerrada*.

**Definición 1.1.4** Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  una c.p.r. cerrada. Se dice *simple* si para todos  $t_1, t_2 \in (a, b)$  tales que  $t_1 \neq t_2$ , se cumple que  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ .

Con esto evitamos que la curva tenga autointersecciones y delimitará una región plana.

**Definición 1.1.5** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^2$  una c.p.r. Una *reparametrización regular* de  $\alpha$  es una función  $f : (c, d) \subset \mathbf{R} \rightarrow (a, b)$  biyectiva, diferenciable y que cumple que:

$$\frac{df}{dr} = \frac{dt}{dr} \neq 0$$

en todo  $(c, d)$ . Es fácil comprobar que  $\alpha \circ f$  es una c.p.r. con  $\alpha((a, b)) = \alpha \circ f((c, d))$ .

**Definición 1.1.6** Una *curva regular* en  $\mathbf{R}^2$  es una c.p.r. y todas sus posibles reparametrizaciones.

De todas las posibles parametrizaciones que posee una curva nos interesa en concreto la natural. Veámoslo en detalle.

**Definición 1.1.7** La *longitud* del arco  $\alpha$  se define como:

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

**Proposición 1.1.8** La longitud de un segmento de c.p.r. es independiente de la parametrización regular considerada.

Se puede usar la longitud para reparametrizar cualquier curva. Veámoslo.

**Definición 1.1.9** Sean una c.p.r.  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $t_0 \in (a, b)$ . Se define la función *longitud de arco* como:

$$s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr. \quad (1.1.1)$$

**Teorema 1.1.10** *Cualquier c.p.r. puede ser reparametrizada por su longitud de arco, y a dicha reparametrización se le conoce como parametrización natural.*

Se utilizan las siglas c.r.p.n para referirse a una curva regular parametrizada por su longitud de arco.

**Proposición 1.1.11** *Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.r.p.n. Entonces, para todo  $s \in (a, b)$  se tiene  $|\alpha'(s)| = 1$ .*

**Nota:** En vez de utilizar la notación habitual para la derivada de una curva parametrizada naturalmente, es decir  $\dot{\alpha}$ , nosotros vamos a utilizar la notación más habitual  $\alpha'$  e indicaremos si está parametrizada por su longitud o no.

Hasta aquí lo más básico sobre curvas planas. A continuación pasamos a hablar sobre términos más complejos como la curvatura.

**Definición 1.1.12** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.p.r. Se llama *vector velocidad* de  $\alpha$  en un punto  $t_0 \in (a, b)$  a  $\alpha'(t_0)$ . Podemos definir un campo vectorial o, lo que es lo mismo, una aplicación que a un punto le asocia un vector. A dicho campo se le llama *campo vectorial velocidad* y consiste en aplicarle a cada punto de  $(a, b)$  su *vector velocidad*.

Ahora se define como *campo vectorial tangente* de  $\alpha$  la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} : (a, b) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}. \end{aligned}$$

Cuando este campo es una c.p.r. se le llama *indicatriz tangente*.

Al vector  $\mathbf{t}(t_0)$  se le llama *vector tangente* en  $t_0$ . En caso de que la curva esté parametrizada naturalmente el vector tangente coincide con el vector velocidad. Esto es trivial por la Proposición 1.1.11.

**Definición 1.1.13** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.p.r. Se llama *recta tangente* a  $\alpha$  en un punto  $t_0$  a la recta que pasa por  $\alpha(t_0)$  y tiene como dirección el vector tangente en ese punto.

Pasamos ahora a definir la curvatura. Conceptualmente se trata de medir cómo se dobla una curva regular en cualquier punto.

El concepto de curvatura puede ser definido tanto para curvas planas como para curvas en espacios euclídeos de mayor dimensión, pero como ya hemos dicho vamos a centrarnos en las planas.

**Definición 1.1.14** Sean  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  c.r.p.n. y  $s_0 \in (a, b)$ . Se define la *curvatura de  $\alpha$  en  $\alpha(s_0)$*  como

$$k(s_0) = \theta'(s_0) = \left( \frac{d\theta}{ds} \right)_{s=s_0},$$

donde  $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua que determina el ángulo entre el eje  $OX$  y el vector tangente.

A partir de ahora, cuando hablemos de *curvatura* nos estaremos refiriendo a la función que a cada punto  $s \in (a, b)$  le hace corresponder  $k(s)$ .

**Nota:** Se puede probar que  $|k(s)| = |\alpha''(s)|$ .

**Nota:** La elección del eje  $OX$  para la curvatura no es esencial. La definición sería la misma considerando cualquier otra dirección fija.

**Proposición 1.1.15** *Se verifican los siguientes apartados:*

1. *Una c.r.p.n es una recta si y sólo si su curvatura es idénticamente nula.*
2. *Una c.r.p.n es una circunferencia si y sólo si su curvatura es constante.*

**Definición 1.1.16** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.r.p.n. Se llama *vector normal* en un punto  $\alpha(s_0)$  al único vector  $\mathbf{n}(s_0)$  unitario y ortogonal a  $\mathbf{t}(s_0)$ , tal que el par  $(\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0))$  está positivamente orientado. A dicho par se le conoce como *Referencia o diedro de Frenet* de  $\alpha$  en  $\alpha(s_0)$  y consiste en un sistema de referencias ortonormal móvil. Se llama *campo vectorial normal* a la aplicación que a cada punto  $s \in (a, b)$  le asocia su vector normal. Si dicho campo resulta ser una c.p.r. se le llama *indicatriz normal*.

Ahora daremos un resultado que nos relaciona vectores tangentes con vectores normales.

**Teorema 1.1.17 (Ecuaciones de Frenet)** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.r.p.n. Se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s). \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Se obtiene rápidamente de lo anterior que:

$$k(s) = \mathbf{t}'(s)\mathbf{n}(s) = -\mathbf{t}(s)\mathbf{n}'(s).$$

Pero como  $\alpha(s)$  está parametrizada naturalmente, se tiene que

$$k(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s),$$

donde  $x(s)$  e  $y(s)$  son las componentes de  $\alpha(s)$ .

**Teorema 1.1.18** Sean  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.r.p.n. y  $\alpha(s_0)$  uno de sus puntos, cumpliendo que  $k(s_0) \neq 0$ . Además, tengamos en cuenta que el plano se encuentra dividido por la recta tangente a  $\alpha$  en  $\alpha(s_0)$ . Dicho esto, se tiene que:

1. Si  $k(s_0) > 0$ ,  $\alpha''(s_0)$  y  $\mathbf{n}(s_0)$  tienen el mismo sentido. Además, en un entorno de  $\alpha(s_0)$ , se tendrá que  $\alpha$  está contenida en el semiplano que contiene a  $\mathbf{n}(s_0)$ .
2. Si  $k(s_0) < 0$ ,  $\alpha''(s_0)$  y  $\mathbf{n}(s_0)$  tienen sentidos opuestos. Además, en un entorno de  $\alpha(s_0)$ , se tendrá que  $\alpha$  está contenida en el semiplano que no contiene a  $\mathbf{n}(s_0)$ .

**Corolario 1.1.19** En las condiciones anteriores,  $\alpha''$  está contenida en el mismo semiplano que esté  $\alpha$ .

El resultado que se obtiene tras el Teorema 1.1.17 puede generalizarse a una c.p.r. sin que tenga que estar parametrizada por su longitud de arco.

**Proposición 1.1.20** Sea  $\alpha$  una c.p.r. Entonces:

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2})^3}. \quad (1.1.3)$$

Pasamos a formular el Teorema Fundamental de Curvas Planas. Lo magnífico de este teorema radica en que dada la curvatura se tiene la curva en cuestión o, dicho de otra forma, la curvatura caracteriza a la curva.

**Teorema 1.1.21 (Teorema Fundamental de Curvas Planas)** Sea  $k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : s \rightarrow k(s)$  una función continua. Entonces, existe una c.p.r.  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  que tiene como parámetro natural  $s$  y curvatura  $k(s)$ . Además, dicha curva es única salvo movimientos rígidos.

Nuestro siguiente objetivo es definir un producto escalar sobre el plano. Puede parecer que no tiene relación alguna con el contenido de este trabajo ni con los resultados que hemos definido hasta ahora, pero nos resultará totalmente esencial para las demostraciones de las siguientes secciones.

**Definición 1.1.22** Sea el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^2$ . Un *producto escalar* es una función  $\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todos  $u, v, w \in \mathbb{R}^2$  y  $c, d \in \mathbb{R}$  :

1.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  (simétrica),
2.  $\langle u, cv + dw \rangle = c\langle u, v \rangle + d\langle u, w \rangle$  (bilineal),
3.  $\langle u, u \rangle \geq 0$ , y se cumple la igualdad si y sólo si  $u=0$  (definida positiva).

**Definición 1.1.23** Sean el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^2$ , un producto escalar  $\langle, \rangle$  y  $u \in \mathbb{R}^2$  cualquiera. Entonces, se define la *norma* de  $u$  como:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

**Lema 1.1.24 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)** Sean  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Entonces:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|. \quad (1.1.4)$$

La igualdad se tiene si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

Vamos a tomar como producto escalar en  $\mathbb{R}^2$  a:

$$\langle u, v \rangle = u^t v = u_1 v_1 + u_2 v_2, \quad (1.1.5)$$

donde  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Con este resultado hemos terminado los preliminares de este capítulo.

## 1.2. Desigualdad Isoperimétrica

En este apartado trabajaremos el primer, y más simple, resultado global en la teoría de curvas planas: la Desigualdad Isoperimétrica.

Para comenzar, vamos a exponer el teorema de Green. Este resultado, que en principio no parecería tener sentido en este trabajo, es esencial para la demostración de la desigualdad que da nombre al capítulo.

**Definición 1.2.1** Un *campo vectorial* sobre un subconjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  es una aplicación que a puntos de  $X$  le asocia vectores, o lo que es lo mismo:

$$F : X \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

**Definición 1.2.2** Sea  $C$  una curva cerrada y simple. Se llama interior de  $C$  al área delimitada por dicha curva, y se denota como  $intC$ .

Sean  $C$  una curva cerrada y simple, y una parametrización de la misma. Se dice que  $C$  está orientada positivamente si el sentido de recorrido deja a  $intC$  a la izquierda. En caso contrario, reparametrizaremos para orientarla positivamente.

**Teorema 1.2.3 (Teorema de Green)** Sean  $C$  una curva cerrada en  $\mathbb{R}^2$  y  $F = (P, Q)$  un campo vectorial 1-diferenciable. Supongamos que  $C$  está orientada positivamente. Entonces:

$$\iint_{intC} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C (Pdx + Qdy). \quad (1.2.1)$$

Centrémonos ahora en calcular el área de  $intC$ , para  $C$  una curva cerrada simple.

**Proposición 1.2.4** Sean  $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  una c.p.r. cerrada y simple, y  $A$  el área que encierra dicha curva. Si  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , entonces:

$$A = - \int_a^b x'(t)y(t) dt = \int_a^b x(t)y'(t) dt. \quad (1.2.2)$$

*Demostración:* Para la demostración vamos a usar el Teorema 1.2.3. Denotamos por  $C$  a la curva regular que tiene como parametrización a  $\alpha$ .

Comenzamos la demostración recordando que el área de un recinto plano cualquiera  $R$  viene dado por

$$A = \iint_R dA, \quad (1.2.3)$$

donde  $dA = dx dy$ .

Aplicando el *Teorema de Green* a  $\text{int}C$  y a un campo vectorial  $F = (P(x, y), Q(x, y))$  nos quedaría:

$$\iint_{\text{int}C} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C (P dx + Q dy). \quad (1.2.4)$$

Si tomamos  $F$  de modo que cumpla la ecuación diferencial

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad (1.2.5)$$

tendremos una integral equivalente a la del área encerrada por la curva  $C$ . Nos quedaría lo siguiente:

$$\iint_{\text{int}C} dA = \int_C (P dx + Q dy). \quad (1.2.6)$$

Como podemos comprobar fácilmente, las dos siguientes funciones son solución de (1.2.5)

$$F = (0, x) \text{ y } F = (-y, 0).$$

Si tomamos la primera, nos quedaría lo siguiente:

$$\iint_{\text{int}C} dA = \int_C (0 dx + x dy). \quad (1.2.7)$$

Por otro lado, sea  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  la parametrización regular de  $C$  con dominio en  $[a, b]$  que estamos considerando. Podemos definir la integral sobre la curva para un campo vectorial de dimensión 2 cualquiera  $F$  como:

$$\int_a^b F(x(t), y(t))(x'(t), y'(t))^t dt. \quad (1.2.8)$$

Vamos a utilizar lo anterior en (1.2.7):

$$\int_C (0 dx + x dy) = \int_a^b (0, x(t))(x'(t), y'(t))^t dt = \int_a^b x(t)y'(t) dt.$$

Análogamente, si consideramos la segunda de las soluciones anteriores, resulta:

$$\iint_C (-ydx + 0dy) = \int_a^b (-y(t), 0)(x'(t), y'(t))^t dt = - \int_a^b x'(t)y(t)dt.$$

Queda así demostrada la proposición.  $\square$

Pasamos a probar la desigualdad que da título a esta sección. Cabe decir que nos basaremos en la demostración del libro [6].

**Teorema 1.2.5 (Desigualdad Isoperimétrica)** *Sean  $C$  una curva cerrada y simple de longitud  $l$ , y  $A$  el área de  $\text{int}C$ . Entonces:*

$$l^2 - 4\pi A \geq 0. \tag{1.2.9}$$

*La igualdad se da si y sólo si  $C$  es una circunferencia.*

*Demostración:*

Primero vamos a tomar como parametrización natural de  $C$  a  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forma  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ .

Para dar comienzo a la demostración, tomamos el mínimo y máximo de  $x(s)$ , que sabemos que existen por continuidad en un compacto. Supongamos que se encuentran en  $A = \alpha(0)$  y  $B = \alpha(s_1)$  respectivamente. En caso contrario, simplemente reparametrizamos la curva para que  $A$  coincida con  $\alpha(0)$ . Entonces, la curva  $C$  está delimitada por las rectas tangentes que pasan por  $A$  y  $B$ , denotadas por  $L_1$  y  $L_2$ .

Consideramos la circunferencia de radio  $r$ , tangente a  $L_1$  y  $L_2$ , y que no se corta con  $C$ . Tomaremos  $\beta$  como parametrización de la circunferencia y posteriormente daremos esta parametrización de manera explícita. Obviamente, esta circunferencia no es única. Por tanto, vamos a tomar la que está sobre el eje  $OX$ . No sólo eso: vamos a suponer que está centrada en el origen. Si no fuera así, sólo tendríamos que aplicarle un movimiento rígido a  $\alpha$ . Véase la Figura 1.1.

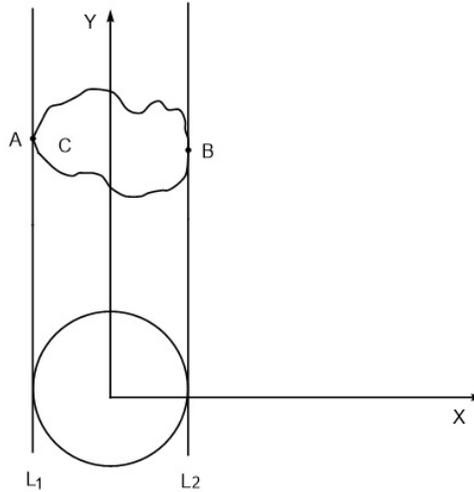


Figura 1.1: Ejemplo gráfico del desarrollo teórico.

El siguiente paso será dar una parametrización explícita de  $\beta$ . Teniendo en cuenta lo que hemos dicho de la circunferencia anteriormente, tendríamos lo siguiente.

Supongamos que  $\beta(s) = (z(s), w(s))$ . Entonces  $z(s) = x(s)$ . Esto es trivial a causa de lo que hemos asumido respecto a la posición de la circunferencia con respecto al origen de coordenadas.

Por otro lado:

$$w(s) = \begin{cases} -\sqrt{r^2 - x(s)^2} & \text{si } 0 \leq s \leq s_1, \\ \sqrt{r^2 - x(s)^2} & \text{si } s_1 \leq s \leq l. \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Sabemos por la Proposición 1.2.4 que el área encerrada por  $\alpha$ , A, coincide con la siguiente integral:

$$A = - \int_0^l yx' ds = \int_0^l xy' ds. \quad (1.2.11)$$

Aplicando el mismo resultado al área de la circunferencia  $\beta$ , tenemos que

$$\pi r^2 = - \int_0^l wz' ds.$$

Dado que  $x = z$  quedaría

$$\pi r^2 = - \int_0^l wx' ds. \quad (1.2.12)$$

Por tanto, sumando (1.2.11) y (1.2.12), resulta:

$$A + \pi r^2 = \int_0^l (xy' - wx') ds \leq \int_0^l |xy' - wx'| ds. \quad (1.2.13)$$

Podemos, gracias a la definición de producto escalar dada en los preliminares, escribir  $xy' - wx'$  como  $\langle (x', y'), (-w, x) \rangle$ . Aplicando esto a (1.2.13) tenemos que:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l |\langle (x', y'), (-w, x) \rangle| ds.$$

Nuestro siguiente paso será aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz (1.1.4) a  $\langle (x', y'), (-w, x) \rangle$ .

Tenemos entonces que  $|\langle (x', y'), (-w, x) \rangle| \leq \|(x', y')\| \|(-w, x)\|$ . Y por tanto:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l |\langle (x', y'), (-w, x) \rangle| ds \leq \int_0^l \|(x', y')\| \|(-w, x)\| ds. \quad (1.2.14)$$

Por otro lado, sabemos que  $\|(x', y')\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ . Pero como  $\alpha$  está parametrizada por  $s$ , su parámetro natural, la ecuación anterior es igual a 1.

Para  $\|(-w, x)\|$  nos quedaría  $\sqrt{w^2 + x^2}$ . Como  $s$  no es el parámetro natural de  $\beta$ , no podemos decir que valga 1 como en el caso anterior. Pero sabemos que  $w$  y  $x$  parametrizan una circunferencia de radio  $r$  centrada en el origen de coordenadas, y por tanto la distancia de cualquier punto de la circunferencia al origen es  $r$ , o lo que es lo mismo  $\sqrt{w(s)^2 + x(s)^2} = r$ , para todo  $s$ . Esto se aprecia también claramente a partir de la expresión de  $w(s)$  dada en (1.2.10).

Aplicando lo anterior a (1.2.14), obtenemos que:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l r ds = rl. \quad (1.2.15)$$

Sabemos que para cualquier par de escalares  $a$  y  $b$ , se cumple que  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , dado que  $(a - b)^2 \geq 0$ . Lo que vamos a hacer es tomar  $a = \sqrt{A/2}$  y  $b = \sqrt{\pi r^2/2}$ .

Aplicando esta desigualdad a la obtenida en (1.2.15), resulta:

$$\frac{rl}{2} \geq \frac{A + \pi r^2}{2} \geq \sqrt{A\pi r^2}. \quad (1.2.16)$$

Tomamos los miembros que están en los extremos de la inecuación y los elevamos al cuadrado. Nos queda:

$$\frac{r^2 l^2}{4} \geq A\pi r^2.$$

Despejando  $l^2$  y simplificando el término  $r^2$ , obtenemos la desigualdad que hemos estado buscando:

$$l^2 \geq 4\pi A. \quad (1.2.17)$$

Pasemos a probar la segunda parte del teorema.

Para el caso de la circunferencia, la igualdad es trivial, pues

$$l = 2\pi r \text{ y } A = \pi r^2.$$

De esto obtenemos que:

$$l^2 = 4\pi^2 r^2 \text{ y } 4\pi A = 4\pi^2 r^2.$$

Por tanto,  $l^2 = 4\pi A$ .

Supongamos ahora que se da la igualdad en (1.2.17). Vamos a demostrar que  $C$  es una circunferencia. En dicho caso también se deberá de dar tanto en (1.2.16) como en (1.2.14). De la igualdad entre las integrales de (1.2.14) tenemos que

$$|\langle (x', y'), (-w, x) \rangle| = \|(x', y')\| \|(-w, x)\|.$$

Esto tiene una justificación muy simple: si tomamos ambos miembros de la igualdad como dos funciones, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz la función de la izquierda es siempre menor o igual que la otra. Por otro lado sabemos que el área que encierran ambas son iguales. Pero la única opción

para que dos funciones tengan la misma área y una sea menor o igual que otra es que sean iguales.

Pero sabemos por el Lema 1.1.24 que la igualdad, en el caso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se cumple si y sólo si los vectores son linealmente dependientes. Esto quiere decir que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que:

$$c(x', y') = (-w, x). \quad (1.2.18)$$

Como bien sabemos,  $w$  y  $x$  parametrizaban a una circunferencia de radio  $r$ . Por tanto:

$$r = \sqrt{w^2 + x^2} = |c|\sqrt{x'^2 + y'^2} = |c|.$$

Y por tanto  $c = \pm r$ . No se puede dar el caso  $c$  negativo ya que si esto fuera así el producto escalar entre  $(x', y')$  y  $(-w, x)$  sería negativo. Para ver esto basta despejar  $c$  de (1.2.18) aplicando:

$$\langle (x', y'), (-w, x) \rangle = c \langle (x', y'), (x', y') \rangle = c.$$

Por tanto, tendríamos que  $\langle (x', y'), (-w, x) \rangle$  sería también negativa. Si aplicamos esto a (1.2.13), tendríamos que  $A + \pi r^2$  sería negativo lo cual es imposible dado que todos los términos son positivos. Tenemos pues que  $c$  es igual a  $r$ . A partir de lo anterior y de la ecuación (1.2.18) se tiene que  $x = ry'$ .

Dado que  $A = \pi r^2$ , deducimos que  $r$  no depende de las líneas tangentes  $L_1$  y  $L_2$ . Por tanto, si tomamos  $L_3$  y  $L_4$  dos líneas paralelas entre sí y tangentes a  $\alpha$ , obtendremos los mismos resultados.

Vamos a aplicarle a la componente  $y$  de  $\alpha$  el mismo razonamiento que para la componente  $x$ , obteniendo  $L_3$  y  $L_4$  paralelas entre sí, tangentes a  $\alpha$  y perpendiculares al eje  $OY$ . Y análogamente al caso anterior tomamos una circunferencia de radio  $r$  (como hemos visto, debe tener el mismo radio que  $\beta$ ) tangente a  $L_3$  y  $L_4$ , y que no se corta con  $\alpha$ . Vamos a suponer que el centro de la circunferencia se encuentra en el punto  $(c, d)$ . Tomamos ahora un sistema de referencia en  $(c, d)$  como se muestra en el dibujo. Véase la Figura 1.2.

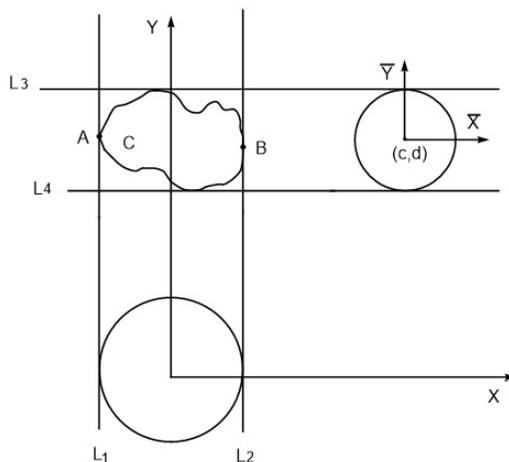


Figura 1.2: Ejemplo gráfico del desarrollo teórico.

Por un lado tendremos un eje  $O\bar{Y}$  paralelo a  $L_3$ , lo que implica que es paralelo al eje  $OX$ . Por tanto,  $\bar{y} = c - x$ . Análogamente, tendremos lo mismo para  $\bar{x}$ , es decir:  $\bar{x} = y - d$ .

Como hemos dicho anteriormente, si desarrollamos toda la demostración en este nuevo sistema de referencia llegaríamos a las mismas conclusiones, y por tanto:

$$\bar{x} = r\bar{y}'.$$

De aquí se deduce lo siguiente:

$$y - d = \bar{x} = r\bar{y}' = -rx'.$$

Y por tanto:

$$x^2 + (y - d)^2 = (ry')^2 + (-rx')^2 = r^2((x')^2 + (y')^2) = r^2.$$

Esto demuestra que  $\alpha$  es una circunferencia en caso de que se dé la igualdad.  $\square$

### 1.3. El Teorema de los Cuatro Vértices

Para comenzar esta sección vamos a definir una serie de conceptos esenciales, destinados a profundizar más en las características de las curvas. Un ejemplo de ello es la convexidad, la cual será nuestra primera definición.

**Definición 1.3.1** Sea la c.p.r.  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Si para todo  $t_0 \in [a, b]$  se cumple que la traza de  $\alpha$  está contenida totalmente en uno de los semiplanos delimitados por la recta tangente en  $\alpha(t_0)$ , se dice que  $\alpha$  es *convexa*.

**Ejemplo 1.3.2** En la Figura 1.3 se muestran una curva convexa (la circunferencia) y otra que no lo es (la gráfica del seno).

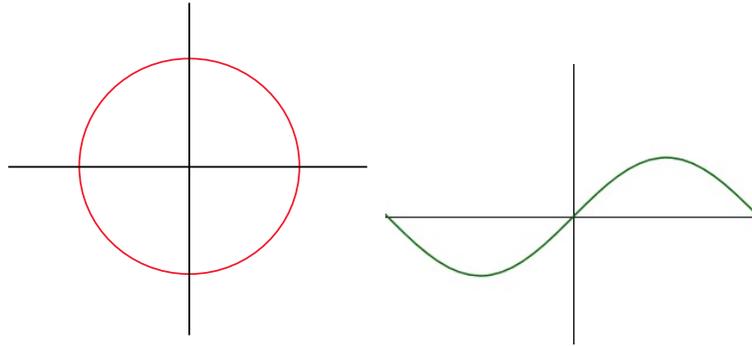


Figura 1.3: La circunferencia es una curva convexa y el seno no.

**Definición 1.3.3** Sea  $C$  una curva regular, cerrada y simple. Si para alguna parametrización de  $C$  la curvatura es  $k > 0$  en todo punto del dominio, se dice que es un *óvalo*.

**Ejemplo 1.3.4** Veamos dos ejemplos de óvalos.

Por un lado, la elipse dada por  $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$  (Véase la Figura 1.4) tiene la siguiente curvatura:

$$k = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}} > 0.$$

Para el caso de la esfera de radio  $r$ , su curvatura es  $k = 1/r^2 > 0$  (véase la figura 1.4).

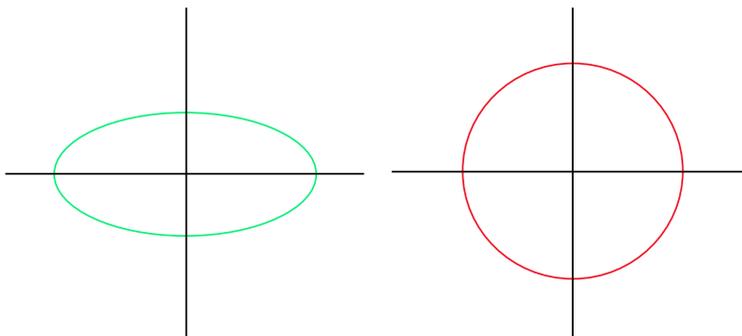


Figura 1.4: Tanto la elipse como la circunferencia son óvalos.

Antes de seguir hablando de curvas convexas y óvalos necesitamos introducir primero el concepto de índice de rotación y algunos resultados relacionados.

**Lema 1.3.5** *Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.p.r. Entonces,  $\alpha$  es cerrada si y sólo si existe una constante  $a > 0$  tal que  $\alpha(t) = \alpha(t+a)$  para todo  $t \in [a, b]$ . Esta constante  $a$  no es única. A la más pequeña de todas las posibles constantes se le conoce como periodo de  $\alpha$ .*

*Demostración:* Evidente por el Lema 1.1.3.

**Lema 1.3.6** *Sean  $\beta(t)$  una c.p.r. cerrada con periodo  $a$  y  $\alpha(s)$  la misma curva  $\beta$  parametrizada naturalmente. Entonces, el periodo de  $\alpha$  es  $l = \int_0^a \left| \frac{d\beta}{dt} \right| dt$ .*

*Demostración:* Calculamos el valor de la longitud de arco en  $t+a$ .

$$\begin{aligned}
 s(t+a) &= \int_0^{t+a} \left| \frac{d\beta}{dt} \right| dt \\
 &= \int_0^a \left| \frac{d\beta}{dt} \right| dt + \int_0^{t+a} \left| \frac{d\beta}{dt} \right| dt \\
 &= l + \int_0^t \left| \frac{d\beta}{dt} \right| dt \\
 &= l + s(t).
 \end{aligned}$$

Así,  $s(t+a) = l + s(t)$  y

$$\alpha(s+l) = \alpha(s(t)+l) = \alpha(s(t+a)) = \beta(t+a) = \beta(t) = \alpha(s(t)) = \alpha(s).$$

Dado que  $a$  es el número positivo más pequeño que cumple  $\beta(t+a) = \beta(a)$  para todo  $t$ ,  $l$  debe ser el número positivo más pequeño que cumple  $\alpha(s+l) = \alpha(s)$  para todo  $s$ .  $\square$

**Definición 1.3.7** Sea  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.r.p.n. cerrada. Se define el índice de rotación como  $i_\alpha = (\theta(l) - \theta(0))/2\pi = \theta(l)/2\pi$ .

**Teorema 1.3.8 (Teorema de rotación del índice)** Sea  $C$  una curva regular, cerrada y simple. Entonces, el índice de rotación de  $C$  es  $\pm 1$ .

*Demostración:* Sea  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización natural de  $C$ . Sabemos por el Lema 1.3.6 que  $l$  es su periodo.

A continuación, definimos como  $a(u, v)$  al vector que va de  $\alpha(u)$  a  $\alpha(v)$  para todo  $u, v \in [0, l]$ . Si  $u = v$ ,  $a(u, u) = \mathbf{t}(u)$ . Para el caso  $u = 0$  y  $v = l$ ,  $a(0, l) = -\mathbf{t}(0) = -\mathbf{t}(l)$ .

Por construcción,  $a$  es una función continua en su 1ª y 2ª segunda derivada en la región  $\Delta$  (véase la Figura 1.5).

Como en el caso de  $\theta$ , podemos construir una función  $\phi(u, v)$  que determine el ángulo entre  $a(u, v)$  y el eje  $OX$ .  $\phi$  es continua en su 1ª y 2ª segunda derivada en la misma región que  $a$ . Nótese que  $\phi(u, u) = \theta(u)$ .

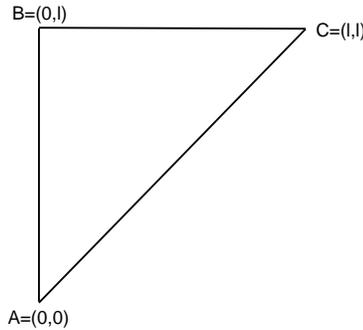


Figura 1.5: Aquí vemos la región  $\Delta$ .

Por otro lado,

$$2\pi i_\alpha = \theta(l) - \theta(0) = \int_0^l \frac{d\theta}{ds} = \int_\alpha d\theta.$$

Si le aplicamos que  $\phi(u, u) = \theta(u)$ , tendremos que:

$$\int_\alpha d\theta = \int_{\overline{AC}} d\phi.$$

Sabemos que:

$$d\phi = \frac{d\phi}{du} du + \frac{d\phi}{dv} dv$$

y

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u}.$$

Aplicando lo anterior a la ecuación (1.2.1):  $\int_{\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA}} d\phi = 0$ .

Y por tanto,

$$\int_{\overline{AC}} d\phi = \int_{\overline{AB}} d\phi + \int_{\overline{BC}} d\phi.$$

Veamos  $\int_{\overline{AB}} d\phi$ . Para el caso del vector  $\overline{AB}$ ,  $\phi$  está fija en su 1ª coordenada. En este caso, el valor es 0. Por tanto,  $\int_{\overline{AB}} d\phi$  es el ángulo que forma el segmento  $\overrightarrow{OP}$  al desplazarse  $P$  por toda la imagen de  $\alpha$  en la dirección creciente de  $s$  (véase la Figura). Dado que  $\alpha$  está en el semieje superior,  $\overrightarrow{OP}$  nunca apunta hacia abajo y la integral debe valer  $\pm\pi$ .

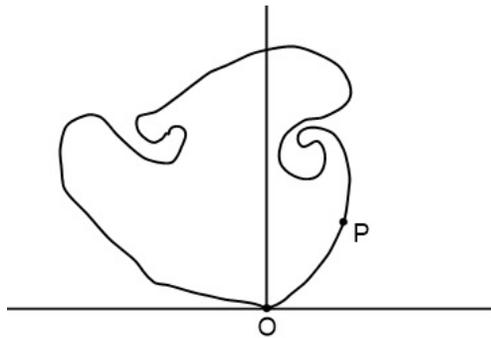


Figura 1.6: Ejemplo gráfico del desarrollo teórico.

El caso  $\int_{\overline{BC}} d\phi$  es análogo, sólo cambia que tenemos el vector  $\overrightarrow{PO}$  y que apunta constantemente hacia abajo. Pero, el valor de la integral es el mismo.

Por tanto,  $2\pi i_\alpha = \pm\pi \pm \pi = \pm 2\pi$ . Lo que implica  $i_\alpha = \pm 1$ .  $\square$

**Corolario 1.3.9** *Sea  $\alpha$  una c.p.r. cerrada y simple. Entonces, la aplicación  $\mathbf{t} : [0, l] \rightarrow \mathbb{S}^1$  es sobreyectiva. Donde  $\mathbf{t}$  es el vector tangente de  $\alpha$  y  $l$  la longitud de esta.*

Estamos en condiciones de demostrar un resultado esencial que nos será de gran ayuda en el futuro. El teorema que vamos a enunciar es de vital importancia ya que nos da una condición equivalente para la convexidad, mucho más versátil que la dada en la definición.

**Teorema 1.3.10** *Una curva  $C$  regular, cerrada y simple regular es convexa si y sólo si la curvatura  $k$  tiene signo constante.*

*Demostración:* Para empezar tomamos  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  como una parametrización natural de  $C$ . Dado que  $k(s) = d\theta/ds$ , el signo constante de  $k$  es equivalente a que  $\theta$  es monótona. Por tanto, el enunciado del teorema es equivalente a: una curva  $C$  regular, cerrada y simple es convexa si y sólo si  $\theta$  es monótona.

Supongamos que  $\theta$  es monótona. Si  $\alpha$  no es convexa, existe un punto  $A$  cuya recta tangente  $L$  divide en dos arcos a la curva. Dado que  $\alpha$  es cerrada podemos tomar los puntos  $B$  y  $D$ , los cuales se encuentran en arcos diferentes y son los más alejados de la recta  $L$ . Cuando decimos más alejados es en el siguiente sentido: si calculamos todas las rectas perpendiculares a  $L$  y que se cortan con uno de los arcos de  $\alpha$ , podemos asociarle a cada punto de  $\alpha$  una distancia con respecto a  $L$ , es decir, la longitud del segmento que pasa por el punto y se corta perpendicularmente con  $L$ . El más alejado será el que posea el segmento de mayor longitud. Véase la Figura 1.7.

Vamos a suponer que las rectas tangentes en  $B$  y  $D$ , son diferentes de  $L$  y así evitamos casos problemáticos.

Las rectas tangentes en cuestión son paralelas a  $L$ . Tengamos en cuenta que si no fueran paralelas, supongamos que en  $B$ , podríamos crear una línea paralela que pasara por  $B$ . Esta nueva recta no sería tangente luego se cortaría con  $\alpha$  en otro punto distinto a  $E$ . Pero, esto es imposible ya que implica que existen puntos entre  $B$  y  $E$  más alejados de  $L$ , lo cual es imposible por hipótesis.

Dicho esto, vamos a denotar como  $L_1$  y  $L_2$  a las rectas tangentes que pasan por  $B$  y  $D$  respectivamente. Véase la Figura 1.8.

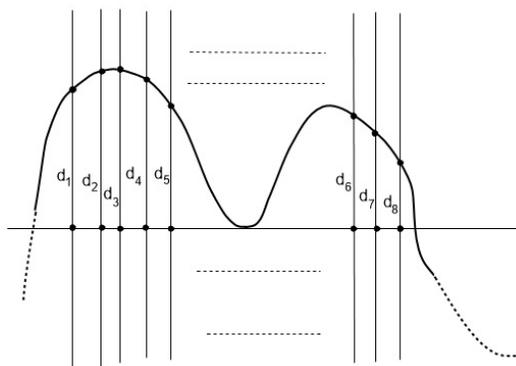


Figura 1.7: La longitud del segmento viene denotada por  $d_i$ .

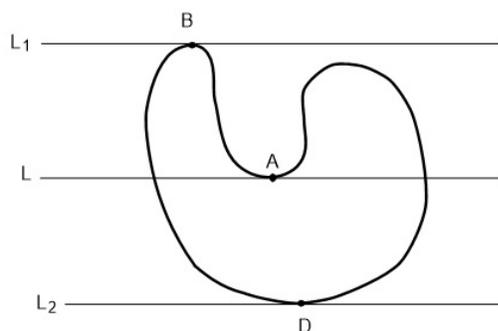


Figura 1.8: Observamos  $L_1$  y  $L_2$ .

Dos de los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $D$  deben tener la tangente  $\mathbf{t}$  apuntando en la misma dirección. Por tanto, existen  $s_1 < s_2$  con  $\mathbf{t}(s_1) = \mathbf{t}(s_2)$  y  $\theta(s_2) = 2\pi n + \theta(s_1)$ .

Esto último es fácil de explicar. Dado que las tangentes en  $\alpha(s_1)$  y  $\alpha(s_2)$  son paralelas, el ángulo que forman con respecto al eje  $OX$ , o sea  $\theta$ , debe de ser el mismo para ambos casos salvo por una constante  $2\pi n$ .

Siguiendo con la demostración, por el Teorema 1.3.8 el valor de  $n$  varía entre 0, 1 y -1. En caso de que  $n = 0$ ,  $\theta$  sería constante en  $[s_1, s_2]$  por monotonía. En otro caso,  $\theta$ , también por monotonía, sería constante en  $[0, s_1] \cup [s_2, l]$ .

Ambos casos implican que uno de los arcos entre  $\alpha(s_1)$  y  $\alpha(s_2)$  es una recta y, por tanto, las rectas tangentes son iguales. Pero esto último es una contradicción puesto que habíamos tomado  $L$ ,  $L_1$  y  $L_2$  diferentes entre si. Por tanto,  $\alpha$  es convexa.

Supongamos ahora que  $\alpha$  convexa y probemos la monotonía de  $\theta$ . Si  $\theta$  no es monótona, existen  $s_0$ ,  $s_1$  y  $s_2 \in [0, l]$  tales que:

$$\theta(s_0) = \theta(s_2) \neq \theta(s_1), \text{ con } s_0 < s_1 < s_2.$$

La idea de la demostración consiste en probar que si  $\theta(s_0) = \theta(s_2)$ , entonces  $\theta(s) = \theta(s_0)$  para todo  $s \in (s_0, s_2)$ .

Si  $\theta(s_0) = \theta(s_2)$ , entonces

$$\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{t}(s_2). \tag{1.3.1}$$

Por el Corolario 1.3.9, la aplicación  $\mathbf{t} : [0, l] \rightarrow \mathbb{S}^1$  es sobreyectiva. Por tanto, existe  $s_3$  tal que  $\mathbf{t}(s_3) = -\mathbf{t}(s_0)$ . Si las rectas tangentes en  $s_0$ ,  $s_2$  y  $s_3$  son distintas, entonces son paralelas entre ellas. Esto último es imposible dado que  $\alpha$  es convexa. Es decir, de las tres rectas, la que quede entre las otra dos estará dividiendo a la curva en dos partes, esto es incompatible con la definición de convexidad. Véase la Figura 1.9.

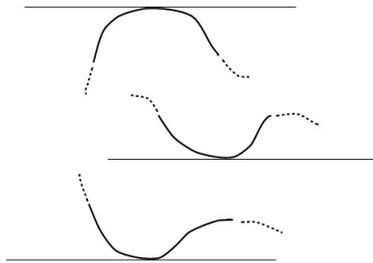


Figura 1.9: Si existen tres rectas tangentes alineadas, la curva queda dividida en dos.

Por tanto, hay al menos dos rectas que coinciden. Vamos a denotar como  $A$ ,  $B$  los puntos de  $\alpha$  en los que las rectas tangentes anteriores coinciden. Estos puntos pueden ser  $\alpha(s_0)$  y  $\alpha(s_3)$  o  $\alpha(s_2)$  y  $\alpha(s_3)$ , dependen de cuáles sean las dos rectas tangentes que coincidan. Para entenderlo mejor véase la Figura 1.10.

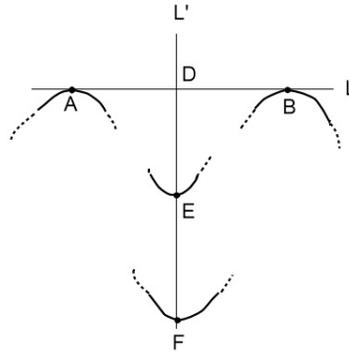


Figura 1.10: Ejemplo gráfico del desarrollo teórico.

Por otro lado, denotamos como  $\overline{AB}$  al segmento que une  $A$  y  $B$ . Tomamos  $D$  un punto de  $\overline{AB}$  que no esté en  $\alpha$ . El siguiente paso consiste en trazar la recta perpendicular a  $\overline{AB}$  que pasa por  $D$ . La denotamos como  $L'$ . Obviamente  $L'$  no es tangente a  $\alpha$  dado que es convexa. Por tanto, existen al menos dos puntos  $E$  y  $F$  que pertenecen a la intersección de  $\alpha$  y  $L'$ , y que se encuentran en el mismo lado de  $L$ . Supongamos que  $E$  es de los dos puntos el más cercano a  $D$ . Entonces, la recta tangente en  $E$  deja a los puntos  $A$ ,  $B$  y  $F$  en lados diferentes (Véase 1.10). Esto supone una contradicción con la hipótesis de convexidad de la que partimos. Así, la única opción es que tanto  $D$  como el segmento  $\overline{AB}$  pertenezcan a  $\alpha$ . Lo anterior implica que la dirección del vector tangente en cada punto es la misma. Por tanto, usando (1.3.1),  $A$  y  $B$  coinciden con  $\alpha(s_0)$  y  $\alpha(s_2)$ .

Hemos demostrado que  $\alpha$  es una recta en  $[s_0, s_2]$  lo que implica que  $\theta$  es constante en dicho intervalo y monótona en  $[0, l]$ .  $\square$

Daremos ahora un corolario del teorema que nos relacionan curvas convexas con óvalos.

**Corolario 1.3.11** *Sea  $C$  una curva regular, cerrada y simple con  $k \neq 0$ . Entonces,  $C$  es un óvalo si y sólo si es convexa.*

*Demostración:*

Supongamos que  $C$  es un óvalo. Tenemos que  $k > 0$  y, por tanto, tiene signo constante. Así, aplicando el Teorema 1.3.10 la curva es convexa.

Supongamos que  $C$  es convexa. Entonces, hay dos opciones: la curvatura de  $C$  es positiva o la curvatura de  $C$  es negativa.

En el primer caso, por la Definición 1.3.3,  $C$  es un óvalo.

Supongamos ahora que la curvatura de  $C$  es negativa. Tomemos una parametrización  $\alpha(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $k(t) < 0$  para todo  $t \in (a, b)$ .

Por otro lado, sea la reparametrización  $r : (-b, -a) \rightarrow (a, b)$  dada por  $t \mapsto r(t) = -t$ . Aplicando la reparametrización a  $k$  obtenemos que:

$$k(r) = \frac{d\theta}{dr} = \frac{dt}{dr} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} = -k(t).$$

Por tanto,  $k(r) > 0$ . Aplicando la Definición 1.3.3,  $C$  es un óvalo.  $\square$

Vamos a dar un último corolario sobre curvas convexas antes de pasar a un nuevo lema.

**Corolario 1.3.12** *Sean  $C$  una curva regular, cerrada y convexa, y  $L$  una recta no tangente a  $C$  y que se corta con esta. Entonces, o  $L$  se corta con  $C$  en exactamente 2 puntos o existe un arco en  $C$  que está contenido en  $L$ .*

*Demostración:* Dado que  $L$  no es tangente, se debe de cortar con  $C$  en al menos dos puntos.

Vamos a suponer que se corta en tres. Denotemos a dichos puntos como  $A$ ,  $B$  y  $D$ . En esta situación, debe ocurrir que la recta tangente del punto que está en medio, supongamos que  $B$ , coincida con  $L$ . En caso contrario, cualquiera recta que pase por  $B$  separa en semiplanos diferentes a  $A$  y  $D$ . Véase la Figura 1.11

Centrémonos en el segmento que une  $A$  y  $B$ . Denotamos como  $L'$  la recta que se corta con dicho segmento en un punto aleatorio y es perpendicular a  $L$ . Dicha recta no puede ser tangente ya que dejaría en distintos semiplanos a  $A$  y  $B$ . Por tanto, se corta con  $C$  al menos en 2 puntos que llamaremos  $E$  y  $F$ . Dado que  $L$  es tangente,  $E$  y  $F$  deben estar en el mismo semiplano que delimita  $L$ . Véase la Figura 1.11

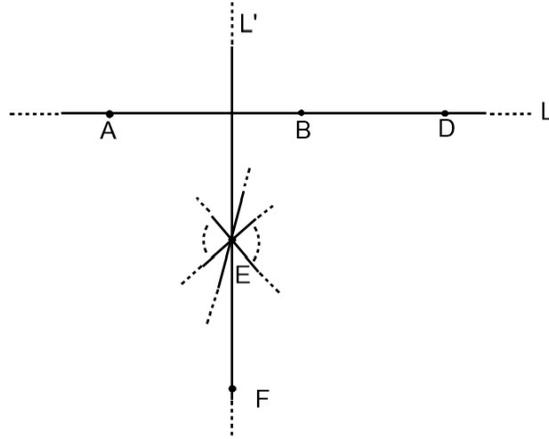


Figura 1.11: Cualquier recta que pase por  $E$  separa  $F$  del resto.

Supongamos que el punto que está más cercano a  $L$  es  $E$ . Entonces, cualquiera recta que pase por  $E$ , incluida la tangente, deja en diferentes semiplanos a  $F$  con respecto a  $A$ ,  $B$  o  $D$  (véase la Figura 1.11). Esto es una contradicción dado que  $C$  es convexa. Por tanto, las únicas opciones son o que  $L$  se corte con  $C$  en dos puntos o que uno de los arcos que delimitan los puntos  $A$  y  $B$  esté contenido en el segmento  $\overline{BA}$ .  $\square$

Una vez que hemos hablado sobre curvas convexas pasamos a hablar sobre otro concepto esencial: vértices de una curva.

**Definición 1.3.13** Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.p.r. Se dice que  $\alpha$  posee un *vértice* en el punto  $\alpha(t_0)$  con  $t_0 \in [a, b]$  si  $k'(t_0) = 0$ , donde  $k'$  es la derivada de la curvatura.

**Proposición 1.3.14** Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una c.p.r. Entonces,  $\alpha$  posee al menos 2 vértices.

*Demostración:* Dado que  $k$  es una función continua sobre un compacto (en este caso  $[a, b]$ ), existe un mínimo y un máximo; supongamos que en los puntos  $t_0$  y  $t_1 \in [a, b]$ . Por tanto,

$$k'(t_0) = k'(t_1) = 0.$$

Por lo que  $\alpha$  posee vértices en  $t_0$  y  $t_1$ .  $\square$

De hecho, en el caso de que  $\alpha$  sea cerrada, simple y convexa, tiene 4 vértices. Pero, ante de demostrarlo debemos ver un lema más.

**Lema 1.3.15** *Sea  $l$  una recta en el plano. Entonces, existen  $a = (a_1, a_2)$  y  $c = (c_1, c_2)$ , con  $c \neq 0$ , tales que un punto  $z$  pertenece a  $l$  si y sólo si  $\langle z - a, c \rangle = 0$ .*

*Demostración:* Para la prueba basta con tomar a una parametrización  $\alpha(t)$  de  $l$ . Al ser una recta será de la forma:  $\alpha(t) = A + tB$ , con  $B \neq 0$ , donde  $B$  es el vector director de la recta y  $A$  un punto cualquiera de ésta. Si tomamos como  $a$  a  $A$  y como  $c$  al vector normal a  $B$ , ya tenemos el resultado que estábamos buscando.  $\square$

Para la prueba del Teorema de los Cuatro Vértices nos basaremos en la demostración del libro [6].

**Teorema 1.3.16 (Teorema de los Cuatro Vértices)** *Una curva  $C$  cerrada, simple y convexa tiene al menos cuatro vértices.*

*Demostración:* Para comenzar la demostración sabemos, gracias a la Proposición 1.3.14, que existen  $A$  y  $B$  vértices de  $\alpha$ . Recordemos que estos vértices coinciden con el mínimo y el máximo de  $k$ . Vamos a tomar  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización natural de  $C$ . Suponemos que  $A = \alpha(0)$ . Si no fuera así simplemente tendríamos que reparametrizar  $\alpha$ .

Vamos a suponer también que la curvatura es diferente de 0 en toda la curva. Es decir, no hay segmentos rectos dentro de  $\alpha$ , dado que de ser cierto habría infinitos puntos donde se anularía  $k'$ .

Nuestro objetivo será llegar a la conclusión de que deben existir más vértices; para ello vamos a suponer que sólo existen  $A$  y  $B$ .

Denotamos por  $L$  a la recta que une  $A$  con  $B$ . Dado que hemos asumido que sólo existen dos vértices,  $k'$  deberá tener signo positivo en un segmento de  $\alpha$  y negativo en el otro. Por el Corolario 1.3.12,  $L$  se corta con  $\alpha$  exactamente en dos puntos.

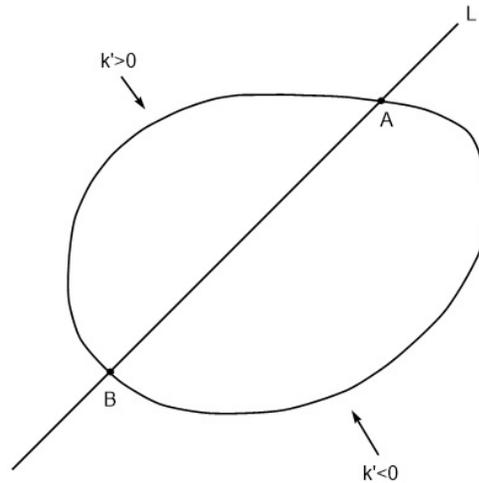


Figura 1.12: Aquí se observa un ejemplo del caso anterior.

Por el Lema 1.3.15 existen  $a$  y  $c \neq 0$  tales que  $z \in L$  si y sólo si  $\langle z - a, c \rangle = 0$ . Por tanto,  $\langle \alpha(s) - a, c \rangle$  es positivo en un segmento y negativo en otro. Antes de seguir es conveniente decir que  $\langle \alpha(s) - a, c \rangle$  es una función continua. Esto es trivial dado que si  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , el resultado del producto escalar es

$$(x(s) - a_1)c_1 + (y(s) - a_2)c_2,$$

lo que se trata de una combinación de funciones continuas y, por tanto, continua.

Si estudiamos caso por caso, llegamos a la conclusión de que

$$k'(s)\langle \alpha(s) - a, c \rangle$$

no cambia de signo a lo largo de  $\alpha$ . De esto concluimos que:

$$\int_0^l k'(s)\langle \alpha(s) - a, c \rangle ds \neq 0.$$

Vamos a derivar por partes para llegar a una contradicción.

$$\int_0^l k'(s)\langle\alpha(s) - a, c\rangle ds = k(L)\langle\alpha(L) - a, c\rangle - k(0)\langle\alpha(0) - a, c\rangle \\ - \int_0^l k(s)\langle\alpha'(s), c\rangle ds.$$

Por un lado, los primeros términos se anulan dado que  $\alpha$  es una curva cerrada. Por otro, como la curva está parametrizada naturalmente podemos aplicar el Teorema 1.1.17 obteniendo que:

$$- \int_0^l k(s)\langle\alpha'(s), c\rangle ds = \int_0^l \langle -k(s)\mathbf{t}(s), c\rangle \\ = \int_0^l \langle \mathbf{n}'(s), c\rangle ds \\ = \langle \mathbf{n}(l), c\rangle - \langle \mathbf{n}(0), c\rangle = 0.$$

Hemos llegado a una contradicción y, por tanto, concluimos que hay más de dos vértices. Dado que  $k'$  cambia de signo en cada vértices, el número de vértices debe ser par.  $\square$

## 1.4. La Fórmula de Cauchy-Crofton

Pasamos a la última sección de este capítulo. Nuestro objetivo, al igual que en secciones anteriores, será dar una nueva propiedad global pero en esta ocasión vamos a cambiar nuestro modo de procedimiento e interpretación. Para entender esto mejor planteemos el problema con el que nos encontramos: tenemos una curva  $C$  en el plano y consideramos el conjunto de rectas que se cortan con  $C$ . No solo eso, sino que asignamos a cada recta una multiplicidad que coincide con el número de veces que se corta con la curva. El objetivo es darle una medida al conjunto de rectas en cuestión.

Para esto vamos a reinterpretar el concepto de recta.

Sea  $L$  una recta cualquiera del plano. Entonces, se puede identificar  $L$  con un solo punto de  $\mathbb{R}^2$ .

Por un lado, se tiene el vector  $v$  unitario, perpendicular a  $L$  y que parte del origen. Si el ángulo entre  $L$  y  $v$  es  $\theta$ , se puede definir  $v$  como  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . Por tanto, la primera componente del punto con el que se puede determinar  $L$  es  $\theta$ .

Se define como  $L_v$  a la recta con dirección  $v$  y que pasa por el origen de coordenadas. Se denota como  $(x_0, y_0)$  al punto de intersección de la recta  $L$  y la recta  $L_v$ .

Entonces, la distancia entre  $(x_0, y_0)$  y el origen de coordenadas es igual a  $x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$ . Se denota a dicha distancia como  $\rho$ .

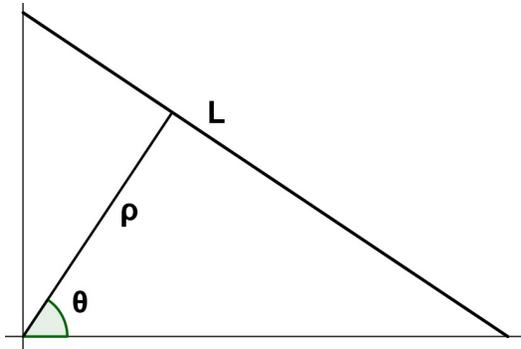


Figura 1.13: En esta gráfica se ven representados el ángulo  $\theta$  y la distancia  $\rho$ .

Por tanto, con  $\theta$  y  $\rho$  tenemos totalmente determinada la recta  $L$ . Se puede entonces considerar a las rectas como puntos de la forma  $(\rho, \theta)$  en lugar de curvas paramétricas regulares. Cabe decir lo siguiente:  $\rho \geq 0$  siempre;  $(\rho, \theta) \sim (\rho, \theta + 2k\pi)$ , para todo  $k$  entero. Los dominios de las variables son:

$$\rho \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi).$$

Se denota como  $n_{(\rho, \theta)}$  a la multiplicidad de la recta  $(\rho, \theta)$ , es decir, el número de veces que se corta dicha recta con la curva  $C$ .

Ya estamos en condiciones de calcular el área del conjunto de rectas que cortan a  $C$ . Vamos a seguir la demostración del libro [2].

**Teorema 1.4.1 (Fórmula de Cauchy-Crofton)** *Sean  $C$  una c.p.r. y  $l$  su longitud. Entonces, la medida del conjunto de rectas que cortan a  $C$  es  $2l$ .*

*Demostración:* Sea  $\Gamma_C$  el conjunto de rectas que cortan a la curva  $C$ . Nuestro objetivo será encontrar una expresión explícita de

$$\iint_{\Gamma_C} n_{(\rho, \theta)} d\rho d\theta, \quad (1.4.1)$$

para cualquier  $C$ .

En primer lugar vamos a suponer que  $C$  es un segmento de longitud  $l$ . Se puede suponer que el segmento está en el eje  $OX$  y dividido en dos partes iguales, en caso contrario bastaría con realizar un movimiento rígido. No hay problema con este movimiento puesto que la integral es invariante frente a un movimiento. Además, dado que dos rectas sólo se pueden cortar en un punto,  $n_{(\rho, \theta)} = 1$  para todo  $\rho$  y toda  $\theta$ .

Es fácil de comprobar que para todo valor de  $\theta$  existe una recta que corta a  $C$ . Por tanto, la integral (1.4.1) es igual a:

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b d\rho d\theta. \quad (1.4.2)$$

Los valores por lo que se mueve  $d\rho$ ,  $a$  y  $b$ , están aún por determinar. Se puede comprobar que el límite inferior de la integral es 0, es decir, para  $\rho = 0$  existe una recta que corta a  $C$ . Veamos el límite superior.

Denotamos como  $L_0 \sim (\rho_0, \theta_0)$  a la recta que corta a  $C$  y cuyo  $\rho$  es el más grande posible, es decir, para  $\rho' > \rho_0$  la recta  $(\rho', \theta_0)$  no se corta con  $C$ .

Recordemos que si  $v_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ , hemos denotado como  $L_{v_0}$  a la recta con dirección  $v_0$  y que pasa por el origen. Por construcción,  $L_{v_0}$  es perpendicular a  $L_0$ .

Por tanto, se forma un triángulo rectángulo entre  $L_0$ ,  $L_{v_0}$  y el trozo de  $C$  con longitud  $l/2$  de ese lado del eje  $OX$

De esto obtenemos que  $\rho_0 = l/2 \cos \theta_0$ . Como  $\rho \geq 0$ ,  $\rho_0 = l/2 |\cos \theta_0|$ .

Por tanto, la integral de (1.4.2) es igual a:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{l/2 |\cos \theta_0|} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} l/2 |\cos \theta_0| d\theta = 2l. \quad (1.4.3)$$

Hemos obtenido el área del conjunto  $\Gamma_C$  para el caso de que  $C$  sea una recta.

El siguiente paso es suponer que  $C$  es una curva poligonal de longitud otra vez  $l$ . Se denota como  $S_i$  cada segmento de  $C$ , y como  $l_i$  a sus respectivas longitudes. Se recuerda que  $l = \sum_{i=0}^m l_i$ .

En este caso, podemos calcular el área en cada segmento, por lo que:

$$\iint n_{(\rho,\theta)} d\rho d\theta = \sum_{i=0}^m \iint_{S_i} d\rho d\theta. \quad (1.4.4)$$

Aplicando (1.4.3) se tiene que (1.4.4) es igual a:

$$\sum_{i=0}^m 2l_i = 2 \sum_{i=0}^m l_i = 2l. \quad (1.4.5)$$

Solo queda demostrarlo para  $C$  una c.p.r. cualquiera. Para esto nos vamos a ayudar del caso anterior. Suponemos que efectivamente  $C$  es una c.p.r. Entonces, mediante un proceso de paso al límite se tiene que:

$$\iint_{\Gamma_C} n_{(\rho,\theta)} d\rho d\theta = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \iint_{S_i} d\rho d\theta.$$

Si a esto se le aplica (1.4.5) se obtiene lo buscado:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \iint_{S_i} d\rho d\theta = \lim_{m \rightarrow \infty} 2 \sum_{i=0}^m l_i = \lim_{m \rightarrow \infty} 2l = 2l. \quad (1.4.6)$$

Es decir

$$\iint_{\Gamma_C} n_{(\rho,\theta)} d\rho d\theta = 2l, \quad (1.4.7)$$

para todo c.p.r.  $C$ , con lo que queda demostrado el teorema.  $\square$

# Capítulo 2

## Geometría Global de Curvas de Bézier

En este último capítulo del trabajo vamos a centrarnos en hablar sobre curvas de Bézier. Estas curvas se caracterizan por estar definidas como una combinación lineal de puntos del plano y unas funciones llamadas polinomios de Bernstein.

El capítulo lo estructuraremos con una primera parte donde veremos una serie de conceptos y resultados fundamentales sobre dichas curvas, conceptos tan básicos como es la propia definición de curva de Bézier. Lo siguiente será hablar de las curvas de Bézier cerradas. En la última sección estudiaremos la aproximación de arcos circulares utilizando resultados vistos en el capítulo anterior.

### 2.1. Preliminares sobre curvas de Bézier

Comenzaremos recordando algunos conceptos sobre las curvas de Bézier, así como sus principales propiedades. Aunque estas curvas se pueden definir en cualquier dimensión, nos limitaremos a las curvas planas. Para más detalles, se recomienda consultar el libro [4].

**Definición 2.1.1** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Se definen los *polinomios de Bernstein* de grado  $n$  como:

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Por tanto, existen  $n + 1$  *polinomios de Bernstein* de grado  $n$  con  $t \in [0, 1]$ . Poseen las siguientes propiedades:

- $B_k^n(t) \geq 0$ , para todo  $t, n, k$ .
- $B_k^n(t)$  alcanza exactamente un máximo en  $t = \frac{k}{n}$ .
- Partición de la Unidad:  $\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1$ , para todo  $t$ .
- Recurrencia:  $B_k^n(t) = (1 - t)B_{k-1}^{n-1}(t) + tB_k^{n-1}(t)$ , para todo  $n \geq 2$ ,  $1 \leq k \leq n$ .
- Derivada:  $\frac{d}{dt}B_k^n(t) = n(B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t))$ .

**Definición 2.1.2** Se llama *curva de Bézier* a la c.p.r donde cada coordenada es expresada como combinación lineal de la base de Bernstein:

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

con  $P_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ .

Los coeficientes  $P_k$  se denominan puntos de control de la curva de Bézier. Un ejemplo de curva de Bézier generada por 5 puntos de control puede verse en la Figura 2.1.

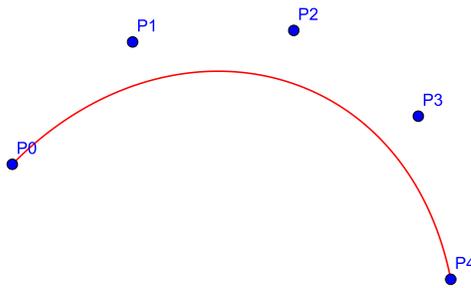


Figura 2.1: Curva de Bézier generada por 5 puntos

Estas curvas poseen las siguientes propiedades:

- Interpolan sólo los puntos extremos:  $B(0) = P_0$ ,  $B(1) = P_n$ .
- Tangencia al polígono de control en los extremos:

$$B'(0) = n(P_1 - P_0), \quad B'(1) = n(P_n - P_{n-1}). \quad (2.1.1)$$

- Derivadas:

$$B'(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} (P_{k+1} - P_k) B_k^{n-1}(t).$$

Si denotamos

$$\Delta P_j = P_{j+1} - P_j,$$

entonces

$$B'(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k B_k^{n-1}(t), \quad (2.1.2)$$

es decir,  $B'(t)$  es a su vez una curva de Bézier de grado  $n-1$  con puntos de control  $n\Delta P_k$ .

Es fácil calcular las derivadas sucesivas, obteniendo

$$B^{(r)}(t) = n(n-1) \cdots (n-r+1) \sum_{k=0}^{n-r} \Delta^r P_k B_k^{n-r}(t), \quad (2.1.3)$$

donde

$$\Delta^r P_k = \Delta^{r-1} P_{k+1} - \Delta^{r-1} P_k. \quad (2.1.4)$$

En particular, las derivadas en los puntos extremos son:

$$\begin{aligned} B^{(r)}(0) &= n(n-1) \cdots (n-r+1) \Delta^r P_0, \\ B^{(r)}(1) &= n(n-1) \cdots (n-r+1) \Delta^r P_{n-r}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

- Restricción al cierre convexo: Una curva de Bézier con puntos de control  $P_0, P_1, \dots, P_n$  se siempre interior al cierre convexo de dichos puntos, entendido éste como la intersección de todos los conjuntos convexos que los contienen.
- Invarianza afín: Si  $f$  es una afinidad, la curva imagen por la afinidad  $f(B(t))$  coincide con la curva de Bézier generada por los puntos  $f(P_k)$ , imagen por la afinidad de los puntos de control de  $B(t)$ .

## 2.2. Curvas de Bézier cerradas

En esta sección incluiremos algunos comentarios sobre curvas de Bézier cerradas y les aplicaremos algunos de los resultados clásicos sobre Geometría Global que hemos obtenido en el Capítulo 1.

En realidad, para obtener una curva de Bézier cerrada, bastará tomar iguales los puntos de control extremos:

$$P_0 = P_n. \quad (2.2.1)$$

Sin embargo, de esta manera se obtiene una curva que será continua, pero no tendrá ni siquiera continuidad geométrica de clase 1, tal y como puede apreciarse en el ejemplo de la Figura 2.2 (curva de Bézier con puntos de control  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$  tales que  $P_0 = P_4$ ).

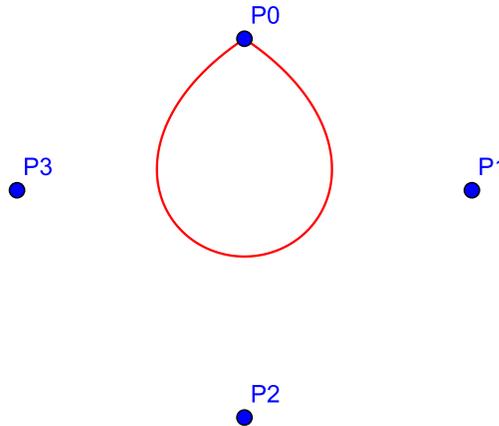


Figura 2.2: Curva de Bézier cerrada sin continuidad geométrica

Para solucionar esto, bastaría imponer que las tangentes en los puntos extremos tuvieran la misma dirección. En nuestro caso, a la vista de la Definición 1.1.3, imponemos una condición más fuerte:  $B'(0) = B'(1)$ . De acuerdo con (2.1.1) y (2.2.1), esto implicará que

$$P_1 - P_0 = P_0 - P_{n-1},$$

de donde deducimos inmediatamente que

$$P_0 = \frac{P_1 + P_{n-1}}{2}, \quad (2.2.2)$$

es decir,  $P_0$  ha de ser el punto medio entre  $P_1$  y  $P_{n-1}$ . Con esta condición, la curva de la Figura 2.2 se modifica en la de la Figura 2.3, en la que puede apreciarse la continuidad geométrica en los extremos.

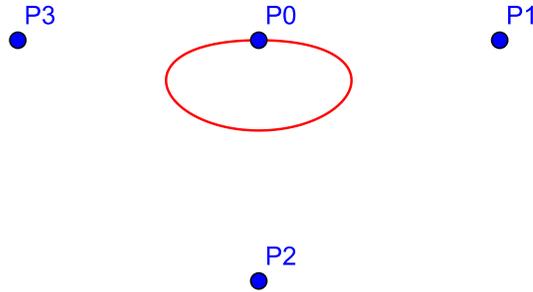


Figura 2.3: Curva de Bézier cerrada con continuidad geométrica

Además, la condición (2.2.2) nos permite demostrar el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.1** *No existen curvas de Bézier cuadráticas, cerradas y no constantes.*

*Demostración:* Consideremos una curva de Bézier cuadrática y cerrada,  $B(t)$ , con puntos de control  $P_0, P_1, P_2$ . Aplicando las condiciones (2.2.1) y (2.2.2), obtenemos que

$$P_0 = P_2, \quad P_0 = \frac{P_1 + P_1}{2} = P_1,$$

de donde  $P_0 = P_1 = P_2$ . Entonces, de la tercera propiedad de los polinomios de Bernstein (partición de la unidad) se deduce que

$$B(t) = P_0(B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t)) = P_0,$$

por lo que la curva sería constante.  $\square$

Si, de acuerdo con la Definición 1.1.3, imponemos una mayor regularidad en los extremos de una curva de Bézier cerrada, podemos enunciar la siguiente caracterización:

**Proposición 2.2.2** *Una curva de Bézier será cerrada de clase  $k$  si y solo si*

$$\Delta^r P_0 = \Delta^r P_{n-r}, \quad (2.2.3)$$

para todo  $r = 0, \dots, k$ .

*Demostración:* Se sigue de manera inmediata de (2.1.5).  $\square$

Como consecuencia, podemos obtener la no existencia de curvas de Bézier de grados pequeños, con suficiente regularidad en los extremos. Por ejemplo:

**Corolario 2.2.3** *No existen curvas de Bézier cúbicas, cerradas de clase 2 y no constantes.*

*Demostración:* Consideremos una curva de Bézier cúbica y cerrada,  $B(t)$ , con puntos de control  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . Dado que, de acuerdo con (2.1.4),

$$\begin{aligned} \Delta^2 P_0 &= \Delta P_1 - \Delta P_0 = P_2 - P_1 - (P_1 - P_0) = P_2 - 2P_1 + P_0, \\ \Delta^2 P_{n-2} &= \Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2} = P_n - P_{n-1} - (P_{n-1} - P_{n-2}) \\ &= P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}, \end{aligned}$$

si escribimos (2.2.3) para  $r = 2$  junto con (2.2.1) y (2.2.2), obtenemos las ecuaciones

$$P_0 = P_3, \quad P_0 = \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad P_1 = P_2,$$

lo que implica que todos los puntos de control coinciden y, usando el mismo argumento que en la demostración de la Proposición 2.2.1, deducimos que la curva ha de ser constante.  $\square$

Otra aplicación interesante para las curvas de Bézier será el cálculo del área que encierra una curva de Bézier cerrada y simple. Si escribimos

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t) = (x(t), y(t)),$$

entonces

$$x(t) = \sum_{k=0}^n P_k^x B_k^n(t), \quad y(t) = \sum_{k=0}^n P_k^y B_k^n(t), \quad (2.2.4)$$

donde denotamos  $P_k = (P_k^x, P_k^y)$ . Derivando en (2.2.4), resulta

$$x'(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k^x B_k^{n-1}(t), \quad y'(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k^y B_k^{n-1}(t), \quad (2.2.5)$$

sin más que reescribir las dos componentes de (2.1.2). Podemos entonces obtener una fórmula para el área encerrada por una curva de Bézier cerrada y simple:

**Proposición 2.2.4** *Sea  $B(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , una curva de Bézier cerrada y simple, y sea  $A$  el área que encierra dicha curva. Entonces:*

$$\begin{aligned} A &= -n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^n (\Delta P_k^x) P_l^y \int_0^1 B_k^{n-1}(t) B_l^n(t) dt \\ &= n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-1} P_k^x (\Delta P_l^y) \int_0^1 B_k^n(t) B_l^{n-1}(t) dt. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

*Demostración:* Basta escribir las expresiones de (2.2.4) y (2.2.5) en la fórmula (1.2.2) de la Proposición 1.2.4.  $\square$

Observemos que, a pesar de su apariencia, el cálculo de la fórmula (2.2.6) no reviste ninguna dificultad, pues se limita a combinaciones lineales de integrales polinómicas (de hecho, de productos de polinomios de Bernstein).

Por supuesto, la Desigualdad Isoperimétrica

$$l^2 - 4\pi A \geq 0$$

es aplicable a las curvas de Bézier cerradas y simples. El área encerrada vendría dada por la fórmula (2.2.6), mientras que la longitud se puede calcular directamente como:

$$l = \int_0^1 |B'(t)| dt.$$

De hecho, dado que la circunferencia es la única curva que verifica el caso de la igualdad, tiene sentido plantearnos la siguiente pregunta: si definimos una función

$$Isop(P_0, P_1, \dots, P_n) = l(P_0, P_1, \dots, P_n)^2 - 4\pi A(P_0, P_1, \dots, P_n),$$

dependiendo de los puntos de control de una curva de Bézier, ¿se obtendría una circunferencia al minimizar  $I_{\text{isop}}$ ? Dar una respuesta completa a esta pregunta queda fuera del propósito de este trabajo, pero sí que podemos ofrecer un par de ejemplos:

**Ejemplo 2.2.5** Podemos utilizar la idea anterior para intentar redondear la curva de la Figura 2.3. Para ello, fijamos los puntos  $P_0 = P_4$ ,  $P_1$  y  $P_3$  (de modo que  $P_0$  sea el punto medio entre  $P_1$  y  $P_3$ ), y dejamos que el punto  $P_2$  se mueva en la vertical, dependiendo de un parámetro  $\lambda$ . Definimos entonces la curva de Bézier  $B(\lambda, t)$ , con puntos de control  $P_0, P_1, P_2(\lambda), P_3, P_4$  y consideramos la función  $I_{\text{isop}}(\lambda)$ . Al minimizarla, obtenemos la Figura 2.4. Desde luego, no

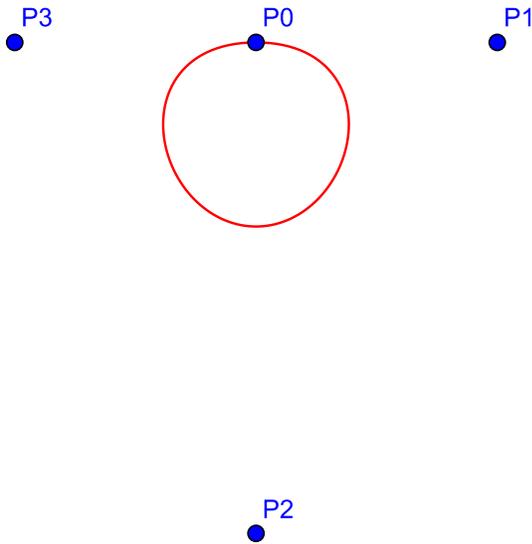


Figura 2.4: Curva de Bézier redondeada

resulta una circunferencia perfecta, pero es lo más que podemos conseguir al mover el punto  $P_2$ . Se puede comprobar gráficamente que, si lo alejamos o lo acercamos, la curva de Bézier se diferencia más de una circunferencia. Todos los cálculos se detallan en el correspondiente fichero del Apéndice Digital.

**Ejemplo 2.2.6** Podemos intentar mejorar el dibujo anterior, eligiendo con más libertad los puntos  $P_1, P_2, P_3$ . Para ello, fijamos  $P_0 = P_4 = (0, 0)$  y tomamos  $P_1 = (\lambda_1^1, \lambda_1^2)$ ,  $P_2 = (\lambda_2^1, \lambda_2^2)$  y  $P_3 = (-\lambda_1^1, -\lambda_1^2)$  (por lo que  $P_0$  seguirá siendo el punto medio entre  $P_1$  y  $P_3$ ). En este caso, consideramos la curva de Bézier  $B(\lambda_i^j, t)$ , que dependerá de todos los parámetros anteriores, y la función  $I_{sop}(\lambda_i^j)$ . Al minimizarla, obtenemos la Figura 2.5. De nuevo, todos los cálculos se detallan en el correspondiente fichero del Apéndice Digital.

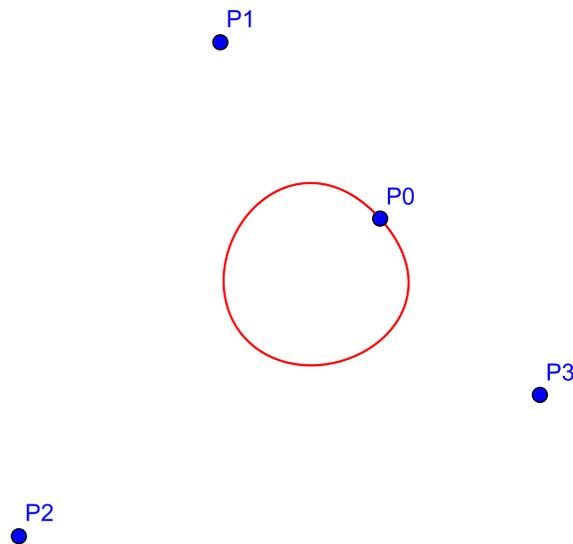


Figura 2.5: Curva de Bézier redondeada con más grados de libertad

Inspirados por la desigualdad isoperimétrica, en la siguiente sección abordaremos con más detalle un par de métodos para la aproximación de arcos circulares mediante curvas de Bézier.

Por lo que respecta a la convexidad de una curva de Bézier, ésta se encuentra muy relacionada, obviamente, con la posición de sus puntos de control. De hecho, parece intuirse gráficamente que la curva será convexa cuando todos los puntos de control se encuentren a un mismo lado de la curva, mientras que no lo será cuando haya puntos a ambos lados. Podemos ver un par de ejemplos en la Figura 2.6.

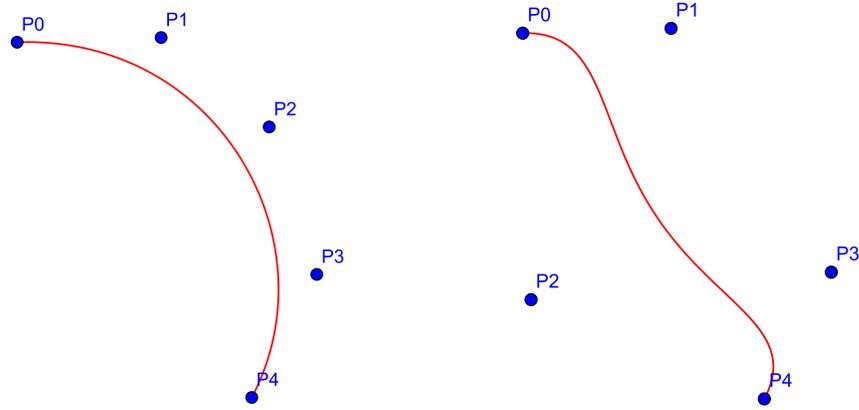


Figura 2.6: Curvas de Bézier convexa y no convexa

Para aplicar los resultados obtenidos en el Capítulo 1 sobre convexidad, necesitaríamos conocer la curvatura de una curva de Bézier. Ésta puede obtenerse fácilmente, tal y como mostramos a continuación:

**Proposición 2.2.7** Sean  $B(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , una curva de Bézier regular y  $k(t)$  su curvatura. Entonces:

$$k(t) = \frac{n^2(n-1) \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-2} (\Delta P_k^x \Delta^2 P_l^y - \Delta^2 P_l^x \Delta P_k^y) B_k^{n-1}(t) B_l^{n-2}(t) \right)}{n^3 \left( \sqrt{\left( \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k^x B_k^{n-1}(t) \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k^y B_k^{n-1}(t) \right)^2} \right)^3}. \quad (2.2.7)$$

*Demostración:* Vamos a usar la expresión de la curvatura (1.1.3). Las componentes de la curva  $B(t)$  y sus primeras derivadas vienen dadas por (2.2.4) y (2.2.5). Podemos obtener las segundas derivadas sin más que escribir (2.1.3)

con  $r = 2$ :

$$\begin{aligned} x''(t) &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 P_k^x B_k^{n-2}(t), \\ y''(t) &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 P_k^y B_k^{n-2}(t). \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Sustituyendo (2.2.5) y (2.2.8) en (1.1.3), obtenemos (2.2.7).  $\square$

A pesar de su apariencia, el cálculo de la fórmula (2.2.7) no reviste dificultad, al igual que dijimos de (2.2.6). Podemos deducir la siguiente consecuencia, intuitivamente clara:

**Corolario 2.2.8** *La curvatura de cualquier curva de Bézier regular cuadrática tiene signo constante.*

*Demostración:* Sea  $B(t) = P_0 B_0^2(t) + P_1 B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t)$  una curva de Bézier regular cuadrática. Al ser regular, el denominador de (2.2.7) es siempre positivo. Por lo tanto, sólo tenemos que comprobar que el signo del numerador es constante para  $n = 2$ . Un simple cálculo muestra que dicho numerador puede escribirse de la forma

$$4(P_0^x P_1^y - P_0^x P_2^y - P_1^x P_0^y + P_1^x P_2^y + P_2^x P_0^y - P_2^x P_1^y), \tag{2.2.9}$$

que es constante.  $\square$

Un caso particularmente fácil de ver es el de la recta, que aparece cuando todos los puntos de control están alineados. En el caso del corolario anterior, si  $P_1$  está alineado con  $P_0$  y  $P_2$ , podemos escribir  $P_1 = (1 - \mu)P_0 + \mu P_2$ , para un cierto  $\mu \in \mathbb{R}$ . Es inmediato comprobar que, entonces, (2.2.9) se anula y, por tanto, la curvatura vale cero (como debía ocurrir, al ser una recta).

## 2.3. Aproximación de arcos circulares

El problema de la aproximación de arcos circulares mediante curvas de Bézier es de gran interés y presenta importantes aplicaciones prácticas. Existen diversos métodos para llevarla a cabo, como el ofrecido por Y. J. Ahn, Y.

S. Kim y Y. Shin en [1], recientemente desarrollado con abundantes ejemplos en [5].

En este último trabajo, se hace mención también al método introducido por A. Carriazo, M. C. Márquez y H. Ugail en [3] para aproximar curvas regulares mediante curvas de Bézier, denominado por los autores *método de aproximación normal*, que presenta dos ventajas: su marcado carácter geométrico y su versatilidad, al poder aplicarse a cualquier curva regular. A continuación vamos a describirlo, presentando como ejemplo la aproximación de un arco de circunferencia. Posteriormente, ofreceremos una variante del método, inspirada por la Desigualdad Isoperimétrica.

El problema con el que nos encontramos es el siguiente: dada una c.p.r  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , nuestro objetivo es aproximar dicha c.p.r. por una curva de Bézier, la cual será determinada por  $n + 1$  puntos de control  $P_0, P_1, \dots, P_n$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Pasamos a describir el método de elección de dichos puntos:

- **Paso 1:** Se divide el intervalo  $[0, 1]$  en  $n$  subintervalos. Los puntos de división serán  $t_0, \dots, t_n$  de la forma  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ . A continuación, se impone la condición  $P_0 = \alpha(0)$ ,  $P_n = \alpha(1)$ . Para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ , se considera el punto

$$P_i(\lambda_i) = \alpha(t_i) + \lambda_i \mathbf{n}(t_i), \quad (2.3.1)$$

donde  $\lambda_i$  es un parámetro y  $\mathbf{n}(t_i)$  es el vector normal a  $\alpha$  en  $\alpha(t_i)$ . Esto significa que  $P_i(\lambda_i)$  pertenece a la recta con dirección  $\mathbf{n}(t_i)$  en  $\alpha(t_i)$  (véase la Figura 2.7).

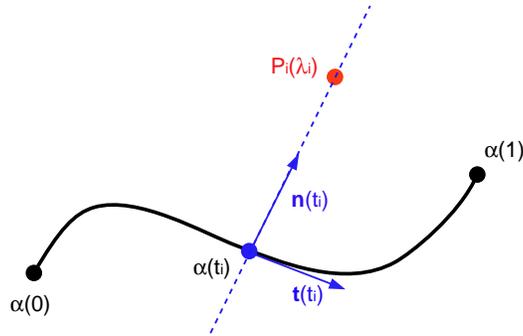


Figura 2.7: Punto  $P_i(\lambda_i)$  en la recta normal a  $\alpha$  en  $\alpha(t_i)$ .

- **Paso 2:** El siguiente paso es construir la curva de Bézier en función de  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ . Queda de la siguiente forma:

$$B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) = B_0^n(t)P_0 + \sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t)P_i(\lambda_i) + B_n^n(t)P_n. \quad (2.3.2)$$

Se observa que B es una curva de Bézier según la Definición 2.1.2.

- **Paso 3:** Definimos la siguiente función:

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)|^2 dt. \quad (2.3.3)$$

Esta función es la semimétrica (al cuadrado) de  $L^2([0, 1])$  y representa el área (al cuadrado) que hay entre  $\alpha(t)$  y  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$ . Se puede considerar como una medida del error de la aproximación.

- **Paso 4:** Es lógico pensar que cuanto menor sea el error, mejor es la aproximación  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$  de  $\alpha(t)$ . Por tanto, el objetivo es encontrar unos valores  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0$  que minimicen  $F$ . Hecho esto, nuestra curva de Bézier será  $B(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0, t)$  con los puntos de control  $P_0, P_1(\lambda_1^0), \dots, P_{n-1}(\lambda_{n-1}^0), P_n$ .

El problema anterior se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales dado por  $\partial F / \partial \lambda_j = 0$ , para cada  $j = 1, \dots, n-1$ . Para comenzar, se aplica el criterio de derivabilidad bajo signo integral a (2.3.3), dando como resultado

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \lambda_j} dt,$$

donde

$$\begin{aligned} G(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) &= |\alpha(t) - B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)|^2 \\ &= \sum_{k=1}^2 (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t))^2, \end{aligned}$$

siendo  $\alpha^k(t)$  (resp.  $B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$ ) la  $k$ -ésima componente de  $\alpha(t)$  (resp.  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$ ). En nuestro caso sólo hay 2 componentes, dado que se trabaja con curvas planas. Aplicando la derivada a la anterior definición de  $G$ , se tiene:

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda_j} = 2 \sum_{k=1}^2 (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)) \frac{\partial (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t))}{\partial \lambda_j}.$$

De (2.3.1) y (2.3.2) se sigue que

$$\frac{\partial (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t))}{\partial \lambda_j} = -B_j^n(t) \mathbf{n}^k(t_j),$$

donde  $\mathbf{n}^k(t_j)$  es la  $k$ -ésima componente de  $\mathbf{n}(t_j)$ . Por lo tanto, usando

otra vez (2.3.1) y (2.3.2) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} &= -2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}^k(t_j) \int_0^1 (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)) B_j^n(t) dt \\
&= -2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}^k(t_j) \left( \int_0^1 \alpha^k(t) B_j^n(t) dt - P_0^k \int_0^1 B_0^n(t) B_j^n(t) dt \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^k(t_i) \int_0^1 B_i^n(t) B_j^n(t) dt - P_n^k \int_0^1 B_n^n(t) B_j^n(t) dt \right) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}^k(t_i) \mathbf{n}^k(t_j) \int_0^1 B_i^n(t) B_j^n(t) dt \right) \lambda_i.
\end{aligned}$$

A partir de esta expresión, está claro que el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0,$$

para todo  $j = 1, \dots, n-1$ , es lineal en  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ .

Vamos a calcular la aproximación por curvas de Bézier de un arco de circunferencia.

**Ejemplo 2.3.1 Método de la aproximación normal.** Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  el arco de circunferencia dado por

$$\alpha(t) = \left( \cos \frac{\pi}{2}(t-1), 1 + \sin \frac{\pi}{2}(t-1) \right).$$

Como hemos visto en el apartado anterior, el primer paso para aproximar  $\alpha$  es dividir el intervalo. En este caso lo dividiremos en dos trozos y, por tanto, tomaremos  $n = 2$  y  $t_0 = 0, t_1 = 1/2, t_2 = 1$ .

Pasamos a imponer las condiciones  $P_0 = \alpha(0) = (0, 0)$  y  $P_2 = \alpha(1) = (1, 1)$ . Construimos el punto intermedio en función del parámetro  $\lambda$ :

$$P_1(\lambda) = \alpha(1/2) + \lambda \mathbf{n}(1/2) = \left( \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lambda \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right), 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lambda \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \right).$$

Por tanto, la curva de Bézier dependiente del parámetro  $\lambda$  es:

$$\begin{aligned}
B(\lambda, t) &= B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1(\lambda) + B_2^2(t)P_2 \\
&= \left( 2(1-t)t\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \lambda \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right) + t^2, 2(1-t)t\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lambda \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right) + t^2 \right).
\end{aligned}$$

El siguiente paso es el cálculo de  $F$ :

$$F(\lambda) = \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda, t)|^2 dt$$

Por el Paso 4 sabemos que para minimizar  $F$  debemos imponer la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0.$$

Obtenemos la ecuación lineal

$$-\frac{1}{15} \frac{-960\sqrt{2} + 240\sqrt{2}\pi + 4\pi^3 - 4\lambda\pi^3 + 3\sqrt{2}\pi^3}{\pi^3} = 0,$$

cuya solución es

$$\lambda_0 = \frac{1}{4} \frac{240\sqrt{2}\pi - 960\sqrt{2} + 4\pi^3 + 3\sqrt{2}\pi^3}{\pi^3}.$$

Entonces, el punto de control es  $P_1(\lambda_0)$  y el error producido por este método es  $F(\lambda_0) = 0,0004608086983$ . En la Figura 2.8 se pueden apreciar la curva original  $\alpha(t)$  (en azul) y su aproximación  $B(\lambda_1^0, t)$  (en rojo). Representamos en verde los puntos de control  $P_0, P_1(\lambda_1^0), P_2$ .

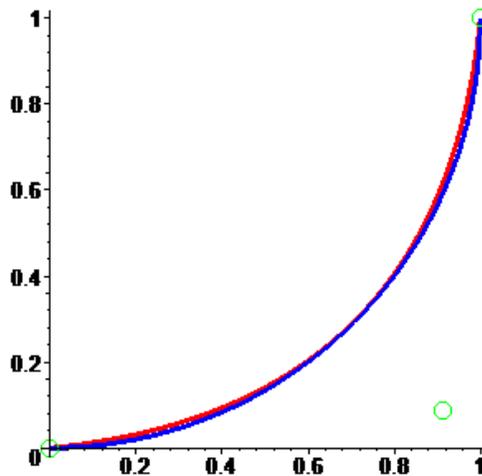


Figura 2.8: Arco de circunferencia y su aproximación.

Todos los cálculos, tanto de este ejemplo como de los posteriores, se encuentran detallados en el correspondiente fichero del Apéndice Digital.

Se puede mejorar el método normal si tenemos en cuenta la tangencia al polígono de control en los extremos, expresada por (2.1.1).

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} B'(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) &= n(\alpha(t_1) + \lambda_1 \mathbf{n}(t_1) - \alpha(0)), \\ B'(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) &= n(\alpha(1) - \alpha(t_{n-1}) - \lambda_{n-1} \mathbf{n}(t_{n-1})). \end{aligned}$$

Si imponemos que la dirección de la tangente de la curva de Bézier  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$  en los puntos  $P_0$  y  $P_n$  sea igual a la de la curva  $\alpha(t)$ , i.e.,

$$B'(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) \cdot \mathbf{n}(0) = 0, \quad B'(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \cdot \mathbf{n}(1) = 0, \quad (2.3.4)$$

entonces obtenemos dos ecuaciones lineales cuyas soluciones son muy fáciles de obtener. Supongamos que dichas soluciones son  $\lambda_1^0, \lambda_{n-1}^0$ . Para obtener el resto de parámetros  $\lambda_2^0, \dots, \lambda_{n-2}^0$ , aplicamos el método anterior. Se dice que la curva de Bézier  $B(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0, t)$  está *clavada* en los puntos  $P_0, P_n$ .

Vamos a aplicar el procedimiento que acabamos de describir a un arco de circunferencia.

**Ejemplo 2.3.2 Método de la aproximación normal clavada.** Para este ejemplo vamos a tomar 5 puntos de control es decir, tomamos  $n = 4$ . El motivo es que necesitaremos dos puntos que estarán en los extremos y serán identificados con el valor de  $\alpha$  en 0 y 1, otros dos que serán clavados, y un quinto punto intermedio al resto que será al que le apliquemos el método de aproximación usado en el Ejemplo 2.3.1.

Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  el arco de circunferencia dado por

$$\alpha(t) = \left( \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right), \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) \right).$$

Imponemos que

$$P_{10} = \alpha(0) = (1, 0) \text{ y } P_{14} = \alpha(1) = (0, 1).$$

Lo siguiente es calcular el punto  $P_{11}$ , que definimos como:

$$P_{11}(\lambda_{11}) = \alpha(1/4) + \lambda_{11} \mathbf{n}(1/4).$$

Si imponemos que

$$B'(0) = 4(P_{11}(\lambda_{11}) - P_{10})$$

tenga la misma dirección que  $\alpha'(0)$  o, lo que es lo mismo,

$$4(P_{11}(\lambda_{11}) - P_{10})\mathbf{n}(0) = 0,$$

obtenemos como parámetro

$$\lambda_{11}^0 = -0,08239$$

y el punto de control  $P_{11}(\lambda_{11}^0) = (0,99, 0,41)$ .

Aplicamos el mismo procedimiento a  $P_{13}$  para obtener como parámetro  $\lambda_{13}^0 = -0,082$  y, por tanto, como punto de control  $P_{13}(\lambda_{13}^0) = (0,41, 0,99)$ .

Sólo nos queda determinar  $P_{12}$  mediante el método usual normal. Se obtiene la siguiente curva de Bézier dependiente del parámetro  $\lambda_{12}$ :

$$B(\lambda_{12}, t) = ((1-t)^4 + 3,99(1-t)^3t + 6(1-t)^2t^2(0,7 - 0,7\lambda_{12}) + 1,65(1-t)t^3 + 1,65(1-t)^3t + 6(1-t)^2t^2(0,7 - 0,7\lambda_{12}) + 3,99(1-t)t^3 + t^4).$$

Aplicando (2.3.3), calculamos  $F$ . En este caso:

$$F(\lambda_{12}) = 0,00051 + 0,0571\lambda_{12}^2 + 0,01057\lambda_{12}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_{12}} = 0,1142857143\lambda_{12} + 0,01057,$$

y despejando esta simple ecuación lineal obtenemos como resultado:

$$\lambda_{12}^0 = -0,092.$$

El punto  $P_{12}$  queda determinado como  $P_{12}(\lambda_{12}^0) = (0,772, 0,772)$ .

Finalmente, la curva de Bézier que buscábamos es:

$$B(t) = ((1-t)^4 + 3,99(1-t)^3t + 4,63(1-t)^2t^2 + 1,65(1-t)t^3, 1,65(1-t)^3t + 4,63(1-t)^2t^2 + 3,99(1-t)t^3 + t^4),$$

con un error de 0,000026. Como podemos ver en la gráfica de la Figura 2.9, la aproximación (en rojo) resulta prácticamente indistinguible de la curva original (en azul).

Este método, ya de por sí mejor que el normal, se suele usar para conservar la continuidad geométrica de una curva partida a trozos. Dicho de otra manera, en lugar de aplicar un método de aproximación a toda la curva, se

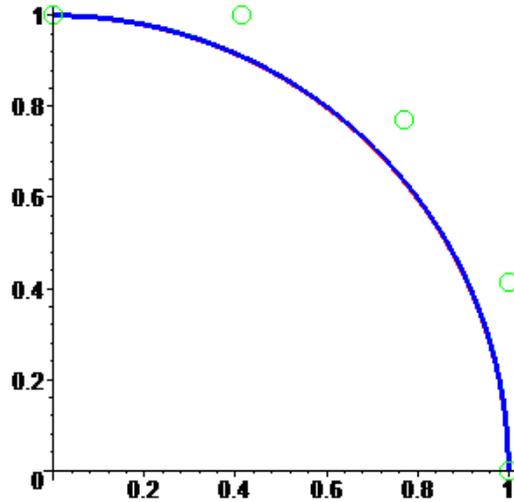


Figura 2.9: Arco de circunferencia y su aproximación clavada.

divide en un número de trozos a elegir, cuantos más trozos mejor aproximación, y se le aplica el método de aproximación normal clavada a cada trozo. Al aplicar este método a trozos nos aseguramos de que haya continuidad geométrica, es decir, en los puntos de control que conectan diferentes trozos de la curva tenemos continuidad en la primera derivada.

Como ejemplo de lo anterior, vamos a calcular la aproximación de una circunferencia completa. Para ello vamos a dividir la circunferencia en cuatro arcos y aplicarle a cada uno el método de aproximación normal clavada. El primer arco sería el que acabamos de calcular; pasamos a calcular los tres siguientes.

Sea el **segundo arco de circunferencia**  $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$\alpha_2(t) = \left( -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t\right), \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right) \right).$$

Gráficamente se corresponde con el cuarto de la circunferencia unidad que se encuentra en el segundo cuadrante.

Imponemos la condición en los puntos extremos, es decir:

$$P_{20} = \alpha_2(0) = (0, 1), \quad P_{24} = \alpha_2(1) = (-1, 0).$$

Como ya sabemos, lo primero es la obtención de los puntos clavados  $P_{21}$  y  $P_{23}$ . Por el método normal,  $P_{21}$  en función de  $\lambda_{21}$  queda como:

$$P_{21}(\lambda_{21}) = \alpha_2(1/4) + \lambda_{21}\mathbf{n}(1/4) = (-0,38 + 0,38\lambda_{21}, 0,92 - 0,92\lambda_{21}).$$

El siguiente paso es encontrar  $\lambda_{21}$  que cumpla:

$$4(P_{21}(\lambda_{21}) - P_{20})\mathbf{n}(0) = 0.$$

En este caso el resultado es  $\lambda_{21}^0 = -0,082$ .

Al sustituir  $\lambda_{21}^0$  en  $P_{21}(\lambda_{21})$  obtenemos el punto de control

$$P_{21}(\lambda_{21}^0) = (-0,41, 1).$$

Aplicamos el mismo desarrollo a  $P_{23}(\lambda_{23})$  para obtener como punto de control

$$P_{23}(\lambda_{23}^0) = \alpha_2(3/4) + \lambda_{23}^0\mathbf{n}(3/4) = (-1, 0,41).$$

Por tanto, queda determinar el último punto de control por el método normal:

$$P_{22}(\lambda_{22}) = \left( -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \lambda_{22}\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right), \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lambda_{22}\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right).$$

Denotemos como  $B(\lambda_{22}, t)$  la curva de Bézier dependiente del parámetro  $\lambda_{22}$ . Dado que la forma explícita de  $B(\lambda_{22}, t)$  es larga y no aporta realmente nada, optamos por no escribirla y por remitir al Apéndice Digital para los detalles.

Resolvemos la ecuación lineal

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_{22}} = 0,$$

obteniendo como resultado:

$$\lambda_{22}^0 = -0,092.$$

Por tanto:

$$P_{22}^0 = \left( -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0,092\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right), \frac{1}{2}\sqrt{2} + 0,092\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right).$$

En definitiva, nuestra aproximación de  $\alpha_2$  por una curva de Bézier es:

$$B_2(t) = \left( -1,65(1-t)^3t + 6(1-t)^2t^2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0,092 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right) - 4(1-t)t^3 - t^4 \right. \\ \left. (1-t)^4 + 4(1-t)^3t + 6(1-t)^2t^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 0,092 \operatorname{cos}\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right) + 1,65(1-t)t^3 \right).$$

Vamos a representar las dos aproximaciones que hemos hecho hasta ahora junto a los dos arcos originales en la Figura 2.10. Como se observa, son indistinguibles, lo cual tiene sentido dado que el error es el mismo que para el primer arco, 0,000026, de nuevo muy pequeño:

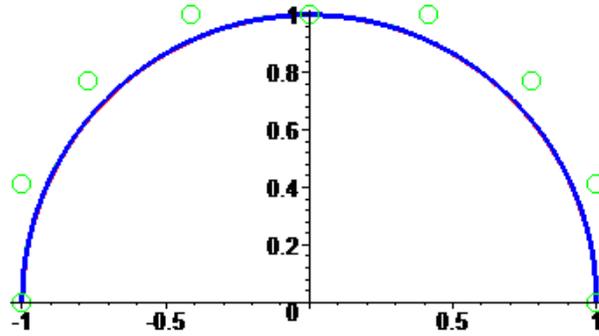


Figura 2.10: Las dos aproximaciones(en rojo) hechas hasta ahora junto a los arcos originales(en azul).

Pasemos al cálculo del **tercer arco**, correspondiente al tercer cuadrante. Sea el arco de circunferencia  $\alpha_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$\alpha_3(t) = \left( -\operatorname{cos}\left(\frac{1}{2}\pi t\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t\right) \right).$$

Los pasos son análogos al del arco anterior. Imponemos la condición en los puntos extremos:

$$P_{30} = \alpha_3(0) = (-1, 0), \quad P_{34} = \alpha_3(1) = (0, -1).$$

Calculamos  $P_{31}$  en función del parámetro  $\lambda_{31}$  para luego imponer que:

$$4(P_{31}(\lambda_{31}))\mathbf{n}(0) = 0.$$

Se obtiene como resultado  $\lambda_{31}^0 = -0,082$  y por tanto:

$$P_{31}(\lambda_{31}^0) = (-0,99, -0,41).$$

Aplicamos el mismo procedimiento a  $P_{33}$  en función de  $\lambda_{33}$ , obteniendo  $\lambda_{33}^0 = -0,082$  y

$$P_{33}(\lambda_{33}^0) = (-0,41, -0,99).$$

Pasamos a calcular el punto restante:

$$P_{32}(\lambda_{32}) = \left( -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \lambda_{32} \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right), -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \lambda_{32} \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right).$$

Aplicando el método normal obtenemos:

$$P_{32}(\lambda_{32}^0) = \left( -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0,097 \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right), -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0,097 \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right).$$

El error en este caso es de nuevo 0,000026. Vemos en la Figura 2.11 que, al igual que en los casos anteriores, la aproximación (en rojo) es prácticamente indistinguible del arco original (en azul).

Sea el **cuarto y último arco** dado por

$$\alpha_4(t) = \left( \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right), -\cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right) \right).$$

Imponemos que  $P_{40} = \alpha_4(0) = (0, -1)$ ,  $P_{44} = \alpha_4(1) = (1, 0)$  y obtenemos  $P_{41}$  y  $P_{43}$  por el método de aproximación normal clavada, resultando:

$$P_{41} = (0,41, -1) \text{ y } P_{43} = (1, -0,41).$$

Calculamos el último punto de control por el método normal:

$$P_{42} = \left( \frac{1}{2}\sqrt{2} + 0,097 \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right), -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0,097 \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right).$$

La curva de Bézier resultante, con un error de 0,000026, puede apreciarse en la Figura 2.12.

Por tanto, ya tenemos aproximada por trozos la circunferencia completa. Como se ha podido ver mientras hemos ido calculando las aproximaciones de cada arco, éstas han sido muy buenas, en concreto con un error de 0,000026 en cada arco, y por tanto son prácticamente iguales.

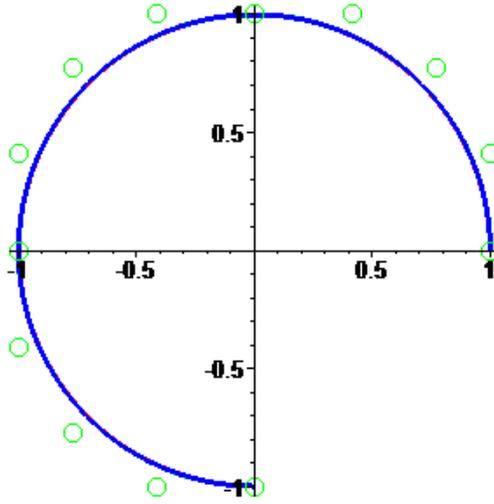


Figura 2.11: Arcos originales (en azul) y sus aproximaciones (en rojo).

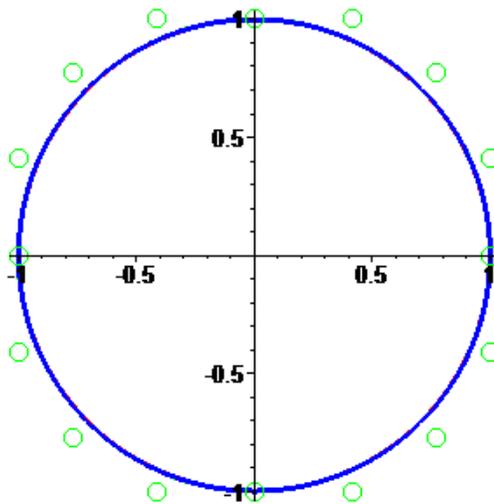


Figura 2.12: Arcos originales (en azul) y sus aproximaciones (en rojo).

Un hecho curioso que se va repitiendo a lo largo de todo el desarrollo del Ejemplo 2.3.2 es la repetición de datos. Como ejemplo de lo anterior podríamos dar el error, que en todos los arcos es exactamente el mismo: 0,000026. Otra muestra de esto es que  $\lambda_{11}^0$  es igual a  $\lambda_{12}^0$ ,  $\lambda_{13}^0$  y a  $\lambda_{14}^0$ . Para comprobar el caso de esta última véase el Apéndice Digital dado que hemos prescindido de ella como se ha explicado anteriormente. La respuesta a este hecho está en la simetría de la circunferencia. Esto quiere decir que podemos aplicar un movimiento rígido al primer arco de circunferencia, correspondiente al primer cuadrante, y llevar un punto de dicho arco a otro punto de cualquiera de los otros arcos.

Podemos entonces aplicar la propiedad de invarianza afín de las curvas de Bézier. Esto se traduce en que basta calcular la aproximación de uno de los arcos; el resto es determinado gracias a esta propiedad.

Veámoslo en el ejemplo anterior.

**Ejemplo 2.3.3 Método de la Invarianza Afín.** Supongamos que partimos del primer arco, es decir, el arco que está en el primer cuadrante. Ya hemos calculado la aproximación y, por tanto, poseemos todos los puntos de control de la curva de Bézier. En concreto:

$$\{P_{10} = (1, 0), P_{11} = (0,99, 0,41), P_{12} = (0,77, 0,77), \\ P_{13} = (0,41, 0,99), P_{14} = (0, 1)\}.$$

Lo que nos dice el principio de invarianza afín en este caso es lo siguiente: sea  $A$  la matriz del movimiento rígido, en este caso un giro de  $\pi/2$  centrado en el origen, que lleva puntos del primer arco en el segundo (seguimos el mismo orden que en el ejemplo anterior). Al aplicarle el movimiento a los puntos de control se obtienen los puntos de control que determinan la aproximación del segundo arco.

Para este caso la matriz del movimiento rígido es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la circunferencia está centrada en el origen la primera columna y la primera fila no influyen en nada. Por tanto, podemos prescindir de dicha fila y dicha columna. Entonces, tenemos como matriz del movimiento rígido a:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación calculamos lo que llamaremos puntos de control proyectados por  $M_1$ , es decir:

$$\begin{cases} P_{20} = P_{10}M_1 = (0, 1), \\ P_{21} = P_{11}M_1 = (-0,41, 0,99), \\ P_{22} = P_{12}M_1 = (-0,77, 0,77), \\ P_{23} = P_{13}M_1 = (-0,99, 0,41), \\ P_{24} = P_{14}M_1 = (-1, 0). \end{cases}$$

Se puede comprobar fácilmente con el Ejemplo 2.3.2 que efectivamente son los puntos de control correspondientes. Hagámoslo para el resto de arcos.

Para el tercer arco, es decir, el que está en el tercer cuadrante. Podemos aplicar el mismo argumento que en el caso anterior. Por tanto, la matriz del movimiento rígido es:

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces los puntos de control del tercer arco son:

$$\begin{cases} P_{30} = P_{10}M_2 = (-1, 0), \\ P_{31} = P_{11}M_2 = (-0,99, -0,41), \\ P_{32} = P_{12}M_2 = (-0,77, -0,77), \\ P_{33} = P_{13}M_2 = (-0,41, -0,99), \\ P_{34} = P_{14}M_2 = (0, -1). \end{cases}$$

Pasamos a calcular el último trozo. Para este caso, la matriz del movimiento es

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto:

$$\begin{cases} P_{40} = P_{10}M_3 = (0, -1), \\ P_{41} = P_{11}M_3 = (0,41, -0,99), \\ P_{42} = P_{12}M_3 = (0,77, -0,77), \\ P_{43} = P_{13}M_3 = (0,99, -0,41), \\ P_{44} = P_{14}M_3 = (1, 0). \end{cases}$$

Finalmente, tenemos todos los puntos de control necesarios para aproximar la circunferencia mediante curvas de Bézier. Este método es mucho más rápido que el anterior y simplifica enormemente los cálculos. Pero, sólo es aplicable a curvas para las que, divididas a trozos, existan afinidades entre diferentes trozos y, obviamente, esto no se cumple siempre.

Lo siguiente que haremos será dar otro método de aproximación de la circunferencia basándonos en el resultado dado en el Teorema 1.2.5, es decir, la Desigualdad Isoperimétrica. Lo denominaremos *Método de la Longitud*.

Para comenzar, recordemos la desigualdad en cuestión:

$$l^2 \geq 4\pi A.$$

Por el mismo teorema sabemos que sólo se da la igualdad si la curva con la que estamos trabajando es una circunferencia.

Ahora vayamos al ejemplo en concreto de una circunferencia centrada en el origen, de radio 1 y dividida en cuatro trozos iguales.

En dicho caso,  $A = 4A_0$  donde  $A_0$  es el área que encierran los arcos que en todos los casos es la misma:  $A_0 = \pi/4$ . El mismo razonamiento podemos aplicar a la longitud,  $l = 4l_0$ , siendo  $l_0 = \pi/2$ , y por tanto:

$$l_0^2 = \frac{\pi^2}{4}. \quad (2.3.5)$$

Obviamente

$$l_0^2 = \pi A_0. \quad (2.3.6)$$

Ahora, dejando lo anterior de lado durante un momento, pensemos que hemos aproximado uno de los arcos de circunferencia por una curva de Bézier dependiendo de un parámetro  $\lambda$ . Denotemos a dicha curva de Bézier por  $B(\lambda, t)$ . Podemos sin problema calcular la longitud de la curva, la cual quedará en función del parámetro  $\lambda$ . Denotémosla por  $l(\lambda)$ .

Podemos aplicar la desigualdad isoperimétrica a  $B(\lambda, t)$ , obteniendo:

$$l(\lambda)^2 \geq 4\pi A(\lambda),$$

donde  $A(\lambda)$  es el área que encierra  $B(\lambda, t)$ .

Aplicando (2.3.6), si encontramos un  $\lambda^0$  tal que  $l(\lambda^0)^2 = 4\pi A(\lambda^0)$ , habremos encontrado la mejor aproximación posible para un arco de circunferencia.

Esto es equivalente, usando (2.3.5), a resolver la ecuación:

$$l(\lambda)^2 = \frac{\pi^2}{4},$$

o lo que es lo mismo:

$$l(\lambda) = \frac{\pi}{2}.$$

Dado que la longitud y el área es igual para todos los arcos, el  $\lambda$  obtenido se puede usar para el resto de trozos.

Vamos entonces a aplicar esto procedimiento al ejemplo anterior.

**Ejemplo 2.3.4 Método de la Longitud.** Vamos a volver a usar el caso del arco de circunferencia ya calculado en el Ejemplo 2.3.2. En concreto el arco dado por la aplicación

$$\alpha_1(t) = \left( \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right), \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t\right) \right).$$

Supongamos que ya hemos calculado los dos primeros puntos por el método de la aproximación normal clavada, es decir, poseemos cuatro puntos de control:

$$P_{10} = (1, 0), P_{11} = (0,99, 0,41), P_{13} = (0,41, 0,99) \text{ y } P_{14} = (0, 1).$$

Construimos el último punto en función del parámetro  $\lambda_{12}$  y, posteriormente, la curva de Bézier dependiente del mismo parámetro. Explícitamente:

$$B(\lambda_{12}, t) = ((1-t)^4 + 3,99(1-t)^3t + 6(1-t)^2t^2(0,7 - 0,7\lambda_{12}) + 1,65(1-t)t^3, \\ 1,65(1-t)^3t + 6(1-t)^2t^2(0,7 - 0,7\lambda_{12}) + 3,99(1-t)t^3 + t^4).$$

El siguiente paso es calcular la longitud de  $B(\lambda_{12}, t)$ . Recordemos que la longitud de la curva está definida por:

$$l(\lambda_{12}) = \int_0^1 \left| \frac{\partial B(\lambda_{12}, t)}{\partial t} \right| dt.$$

Vamos a prescindir de dar la forma explícita de  $l(\lambda_{12})$ , que puede consultarse en el Apéndice Digital.

El siguiente paso es resolver la ecuación  $l(\lambda_{12}) = \pi/2$ . Usando el programa Maple VI obtenemos el siguiente resultado:

$$l(\lambda_{12}^0) = -0,0969.$$

Y por tanto:

$$P_{12}(\lambda_{12}^0) = (0,77, 0,77).$$

El resultado es igual al obtenido en el Ejemplo 2.3.2; tenemos que tomar más decimales para poder ver ciertas diferencias. Tendríamos 0,7756167729 de este método en comparación con 0,7725020048 del método normal. Recordemos que todos estos cálculos están explícitos en el Apéndice Digital.

Vamos a calcular el error de este caso y compararlo con el del otro método. El error que se tiene para este método es de 0,0000271767798. Si lo comparamos con el error del método de la aproximación normal clavada, vemos que el nuevo método es algo menos efectivo. En concreto, el error del Ejemplo 2.3.2 era 0,0000260680049. Esto tiene sentido dado que el proceso en ambos métodos es idéntico excepto en el punto final, donde en el Ejemplo 2.3.2 se minimiza el error. Por tanto, es lógico que ése sea el método que obtenga el menor error. De todas formas, observamos en la Figura 2.13 cómo la curva original, la aproximación por el método de la aproximación normal clavada y la aproximación por el método de la longitud son prácticamente indistinguibles, dado lo pequeño de los errores.

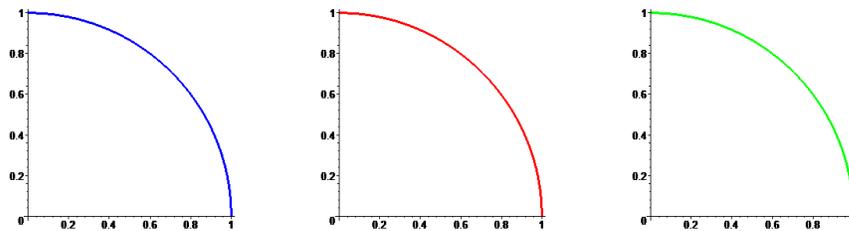


Figura 2.13: El arco original (en azul), la aproximación normal clavada (en rojo) y la aproximación por longitud (en verde).

Podemos seguir aplicando este Método de la Longitud para aproximar los restantes arcos de la circunferencia, obteniendo resultados muy similares a los anteriores.

# Apéndice Digital

Esta memoria se acompaña de un CD, que incluye los siguientes archivos, a modo de Apéndice Digital:

- **curvas\_bezier\_cerradas.mws** En este archivo de Maple VI se encuentran todos los cálculos, imágenes y animaciones correspondientes a los Ejemplos 2.2.5 y 2.2.6.
- **aproximacion\_arcos\_circulares.mws** En este archivo de Maple VI se encuentran todos los cálculos, imágenes y animaciones correspondientes a la Sección 2.3.



# Bibliografía

- [1] Young Joon Ahn, Yeon Soo Kim, Youngsuk Shin. Approximation of circular arcs and offset curves by Bézier curves of high degree. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **167** (2004), 405-416.
- [2] Manfredo P. do Carmo. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Prentice-Hall, Inc. 1976.
- [3] Alfonso Carriazo, M. Carmen Márquez, Hassan Ugail. Normal Approximations of Regular Curves and Surfaces. *Filomat* **29:3** (2015), 457-464.
- [4] Juan M. Cordero, José Cortés Parejo. *Curvas y superficies para modelado geométrico*. Ra-Ma, Madrid, 2002.
- [5] Concepción García Vidal. *Aproximación de arcos circulares mediante curvas de Bézier*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Sevilla, 2016.
- [6] Richard S. Millmam, George D. Parker. *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, Inc. 1977.