Desigualdades de Lyapunov para edos con diferentes condiciones de contorno.

Trabajo Fin de Grado

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico.

Vanesa Cayetano Alfaro

Dirigido por: Antonio Suárez Fernández.

Universidad de Sevilla.
Facultad de Matemáticas.

Índice general

Abstract

The objective of this work is to study the definition and main properties of L_p Lyapunov constants, $1 \leq p \leq \infty$, for scalar ordinary differential equations with different boundary conditions, although we deal with more details Neumann boundary conditions.

We will focus on the study of the characterization of such constant as a minimum of some special minimization problem.

It includes linear resonant problems, but at the end of this work, we use the linear results to study nonlinear resonant problems, specific with Neumann boundary conditions.

To study all these problems, we have used differents techniques of Functional Analysis.

Capítulo 1

Introducción

Las desigualdades de Lyapunov que estudiamos en esta memoria tienen diversas aplicaciones. Comentaremos solo algunas de ellas.
Considérese la ecuación de Hill:

$$u''(t) + a(t)u(t) = 0,\ t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

donde la función $a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, es decir, el conjunto de funciones T-periódicas $a(\cdot)$ tal que

$$a_{|_{(0,T)}} \in L^1(0, T).$$

Dos problemas importantes en el estudio de la ecuación (1.1) son:

(P1) Estabilidad de (1.1); Cada vez que la solución de (1.1) esté acotada diremos que (1.1) es estable; en otro caso diremos que es inestable.

(P2) El estudio de la existencia de soluciones no triviales del problema de valor en la frontera de Neumann:

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)u(t) = 0,\ t \in [t_1, t_2] \\ u'(t_1) = u'(t_2) = 0 \end{cases}$$

los cuales están fuertemente conectados.

Exponemos a continuación resultados conocidos para **(P1)** y **(P2)**.

Si $a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica:

$$\frac{n^2\pi^2}{T^2} \prec a \prec \frac{(n+1)^2\pi^2}{T^2}, \tag{1.2}$$

entonces (1.1) es estable.
Sea $c, d \in L^1(0, T)$, escribiremos $c \prec d$ si $c(t) \leq d(t)$ c.p.d en $(0, T)$ y $c(t) < d(t)$ en un conjunto de medida positiva.

A principios del siglo XX, Lyapunov probó que si:

$$0 \prec a, \int_0^T a(t)\, dt \leq \frac{4}{T}, \tag{1.3}$$

entonces (1.1) es estable (ver [3],[4]).

Claramente, (1.2) y (1.3) no están relacionadas en general, en el sentido que ninguna de ellas implica la otra.
Más tarde, Borg (ver [5]) dio un resultado más general: si

$$\begin{gathered} a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})\backslash\{0\}, \text{ tal que:} \\ \int_0^T a(t) \geq 0; \quad \int_0^T |a(t)|\, dt \leq \frac{4}{T}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

entonces (1.1) es estable.

El resultado de Lyapunov es óptimo en el sentido siguiente (ver [3],[4]):
Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existen ecuaciones diferenciales intestables (1.1) para las cuales:

$$\begin{gathered} a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})\backslash 0; \int_0^T a(t)\, dt \geq -\varepsilon; \int_0^T |a(t)|\, dt \leq \frac{4}{T}, \\ \text{ó } a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})\backslash 0; \int_0^T a(t)\, dt \geq 0; \int_0^T |a(t)|\, dt \leq \frac{4}{T} + \varepsilon. \end{gathered}$$

Las hipótesis (1.2) y (1.3) pueden ser vistas como un caso particular de un resultado más general. Para ver esto, introducimos la ecuación paramétrica:

$$u''(t) + (\mu + a(t))u(t) = 0; \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Entonces si

$$\lambda_n(a) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y } \widetilde{\lambda}_n(a) : n \in \mathbb{N}$$

denotan, respectivamente, los autovalores de (1.5) para las condiciones de frontera

- periódicas $(u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0)$ y
- antiperiódicas $(u(0) + u(T) = u'(0) + u'(T) = 0)$.

Lyapunov y Haupt prueban (ver [1],[2],[4]) que:

$$\lambda_0(a) < \widetilde{\lambda}_1(a) \leq \widetilde{\lambda}_2(a) < \lambda_1(a) \leq \lambda_2(a) < \widetilde{\lambda}_3(a) \leq \widetilde{\lambda}_4(a) < \lambda_3(a) \leq \dots \tag{1.6}$$

Y que la ecuación (1.5) es estable si:

$$\mu \in \left(\lambda_{2n}(a), \widetilde{\lambda}_{2n+1}(a)\right) \cup \left(\widetilde{\lambda}_{2n+2}(a), \lambda_{2n+1}(a)\right). \tag{1.7}$$

Para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Como consecuencia, si para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se verifica:

$$\lambda_{2n}(a) < 0 < \widetilde{\lambda}_{2n+1}(a) \tag{1.8}$$

o

$$\widetilde{\lambda}_{2n+2}(a) < 0 < \lambda_{2n+1}(a), \tag{1.9}$$

entonces (1.1) es estable. En este caso, decimos que $\mu = 0$ pertenece a la n-ésima zona de estabilidad de (1.5).
En particular, (1.2) implica (1.8) o (1.9) y la condición de Lyapunov (1.3) implica $\lambda_0(a) < 0 < \widetilde{\lambda}_1(a)$.
Excepto en casos muy especiales, no es fácil obtener información del signo de los autovalores anteriores, y es en este punto donde la llamada desigualdad de Lyapunov puede jugar un papel importante (ver [6]).

En este trabajo nos dedicamos principalmente al estudio del segundo problema. Estudiamos la definición y principales propiedades de la constante L_p de Lyapunov, $1 \leq p \leq \infty$, para ecuaciones diferenciales ordinarias escalares, con diferentes condiciones de frontera, en un intervalo dado $(0, L)$.
Incluye problemas resonantes lineales y también problemas resonantes no lineales, centrándonos principalmente en las condiciones de frontera de Neumann.

Un punto principal es la caracterización variacional de una constante como mínimo de algún problema especial de minimización, definidas en subconjuntos apropiados X_p del espacio de Sobolev $H^1(0, L)$. Esta caracterización variacional es un hecho fundamental, ya que permite obtener una expresión explícita para la constante L_p de Lyapunov, en función de p y L.

En el Capítulo 2 estudiaremos la existencia de soluciones no triviales de un problema lineal resonante con condiciones de frontera de tipo Neumann.

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(x) + a(x)u(x) = 0, \; x \in (0, L), \\ u'(0) = u'(L) = 0. \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Si $a(\cdot)$ es una función constante $\lambda \in \mathbb{R}$, (2.1) tiene soluciones no triviales si y sólo si λ pertenece al conjunto $\left\{\lambda_n = n^2\pi^2/L^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$, es decir, el conjunto de autovalores del problema de autovalor:

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(x) + \lambda u(x) = 0, \; x \in (0, L), \\ u'(0) = u'(L) = 0. \end{array} \right. \tag{1.11}$$

Por tanto, suponemos que $a(\cdot)$ es una función no constante y además pertenece al conjunto

$$\Lambda = \left\{ a \in L^1(0,L) \backslash \{0\} : \int_0^L a(x)\,dx \geq 0 \text{ y (1.10) tiene soluciones no triviales} \right\}.$$

Para la definición de la mejor constante L_p de Lyapunov, con $1 \leq p \leq \infty$, se define previamente el funcional $I_p : \Lambda \cap L^p(0,L) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$I_p(a) = ||a^+||_p = \left(\int_0^L |a^+(x)|^p dx \right)^{1/p}, \ \forall\, a \in \Lambda \cap L^p(0,L),\ 1 \leq p < \infty,$$

$$I_\infty(a) = ||a^+||_\infty = \sup\, ess\, a^+,\ \forall\, a \in \Lambda \cap L^\infty(0,L).$$

Y por tanto, definimos la mejor constante L_p de Lyapunov como:

$$\beta_p \equiv \inf_{a \in \Lambda \cap L^p(0,L)} I_p(a),\ 1 \leq p \leq \infty. \tag{1.12}$$

Comenzamos nuestro estudio por el caso más simple: el caso $p = \infty$. Donde la constante β_∞ viene dada por el primer autovalor positivo del problema de autovalor (1.11). Además, la constante β_∞ se caracteriza por ser solución del siguiente problema de mínimo *(Teorema 2.4)*

$$\beta_\infty = \min_{v \in X_\infty \backslash \{0\}} \frac{\displaystyle\int_0^L (v')^2}{\displaystyle\int_0^L (v)^2}, \tag{1.13}$$

donde

$$X_\infty = \left\{ v \in H^1(0,L) : \int_0^L v = 0 \right\}.$$

Y se alcanza en una función

$$\beta_\infty = \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Seguidamente, en este mismo capítulo, estudiamos el caso $p = 1$, único caso donde el ínfimo β_p, definido en (1.2) no es alcanzado. Pero cuya caracterización variacional viene dada por *(Teorema 2.6)*

$$\beta_1 = \min_{u \in X_1 \backslash \{0\}} \frac{\displaystyle\int_0^L u'^2}{||u||_\infty^2}, \tag{1.14}$$

donde

$$X_1 = \left\{ u \in H^1(0,L) : \max_{x \in [0,L]} u(x) + \min_{x \in [0,L]} u(x) = 0 \right\}.$$

Y además,

$$\beta_1 = \frac{4}{L}.$$

En cuya prueba hemos usado la inyección compacta de $H^1(0,L) \subset C[0,L]$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Como último caso, tratamos la caracterización variacional de β_p para $1 < p < \infty$ *(Teorema 2.11)*, la cual viene dada por:

$$\beta_p = \min_{X_p \setminus \{0\}} J_p(u) = \min_{X_p \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_0^L u'^2}{\left(\displaystyle\int_0^L |u|^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}, \tag{1.15}$$

donde

$$X_p = \left\{ u \in H^1(0,L) : \int_0^L |u|^{\frac{2}{p-1}} u = 0 \right\}.$$

Y se alcanza en la función

$$\beta_p = \frac{4(p-1)^{1+\frac{1}{p}}}{L^{2-\frac{1}{p}} p(2p-1)^{1/p}} \left(\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{-1/p} dx \right)^2.$$

En cuya prueba, juega un papel importante el Teorema de Multiplicadores de Lagrange y la constante

$$m_p \equiv \inf_{X_p \setminus \{0\}} J_p,$$

que probaremos que es igual a β_p, $1 < p < \infty$.

Además para dicha prueba usamos dos resultados importantes:

1. El conjunto de problemas frontera

$$\begin{cases} v''(x) + B|v(x)|^{\frac{2}{p-1}} v(x) = 0, \ x \in (0,L), \ B \in \mathbb{R}^+ \\ v'(0) = v'(L) = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

proporciona

$$\beta_p = \inf_{B \in \mathbb{R}^+} \inf_{v \in S_B} J_p(v), \tag{1.17}$$

donde

$$J_p(v) = \frac{\displaystyle\int_0^L v'^2}{\left(\displaystyle\int_0^L |v|^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}$$

y para $B \in \mathbb{R}^+$ dado, S_B denota el conjunto de todas las soluciones no triviales de (1.16).

2. Si v es una solución no trivial de (1.16) para algún $B \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$J_p(v) = \frac{4n^2 I^2 p}{L^{2-\frac{1}{p}}(p-1)^{1-\frac{1}{p}}(2p-1)^{1/p}}, \tag{1.18}$$

donde

$$I = \frac{p-1}{p}\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{-1/p} dx \tag{1.19}$$

y n es el único número natural (dependiendo de v) satisfaciendo las propiedades:

$$\begin{array}{c} x_0 \text{ es el primer cero de } v \text{ en } (0,L),\ L = 2nx_0 \\ v'(0) = v'(2x_0) = \cdots = v'(2nx_0) = 0, \\ v(x_0) = \cdots = v((2n-1)x_0) = 0, \\ v(x) \neq 0, v'(x) \neq 0,\ \forall\, x \in (jx_0, (j+1)x_0),\ 0 \leq j \leq 2n-1. \end{array} \tag{1.20}$$

Resumimos los resultados obtenidos en el Capítulo 2 en el siguiente Teorema:

Teorema 1.1 *1. La constante β_p viene dada por:*

$$\beta_p = \begin{cases} \dfrac{4}{L}, & si\ p = 1, \\ \dfrac{4(p-1)^{1+\frac{1}{p}}}{L^{2-\frac{1}{p}}p(2p-1)^{1/p}}\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{-1/p}dx\right)^2, & si\ 1 < p < \infty, \\ \dfrac{\pi^2}{L^2}, & si\ p = \infty \end{cases}$$

2. β_p es alcanzado si y solo si $1 < p \leq \infty$. En este caso, β_p es alcanzado en un único elemento $a_p \in \Lambda$, que no es constante si $1 < p < \infty$.

3. β_p es una función continua como función de $p \in [1, +\infty]$.

4. Si L es un número positivo arbitrario, la aplicación $(1,\infty) \to \mathbb{R}, p \to L^{-1/p}\beta_p$ es estrictamente creciente.

Y por último, tratamos un resultado de unicidad del problema

$$\begin{cases} u''(x) + a(x)u(x) = f(x),\ x \in (0,L), \\ u'(0) = u'(L) = 0, \end{cases} \tag{1.21}$$

que viene dada por el siguiente corolario, el cual establece una relación natural de la constante β_p para los casos $p = 1$ y $p = \infty$.

Corolario 1.2 *Sea* $a \in L^\infty \backslash \{0\}$, $0 \leq \int_0^L a(x)$, *satisfaciendo una de las siguientes condiciones:*

1. $||a^+||_1 \leq \beta_1$.
2. *Existe algún* $p \in (1, \infty)$ *tal que* $||a^+||_p < \beta_p$.
3. $||a^+||_\infty < \beta_\infty$ *o* $||a^+||_\infty = \beta_\infty$ *y* $a^+ \neq a_\infty$.

Entonces para cada $f \in L^\infty(0, L)$, *el problema de frontera (1.21) tiene una única solución.*

En el Capítulo 3, estudiamos el problema lineal con condiciones de frontera de tipo Dirichlet, dado por

$$\begin{cases} u''(x) + a(x)u(x) = 0, \ x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Usando las mismas ideas que para el problema de Neumann obtenemos

$$\beta_p^D = \beta_p^N, \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{1.23}$$

con β_p^N la constante β_p obtenida en el Capítulo 2 y donde debemos sustituir los espacios X_p anteriores por el espacio de Sobolev $H_0^1(0, L)$, si necesidad de imponer ninguna restricción adicional.
También, en este capítulo, estudiamos de forma breve el caso periódico, dado por el problema

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)u(t) = 0, \ t \in (0, T), \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

y el caso antiperódico, dado por el problema

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)u(t) = 0, \ t \in (0, T), \\ u(0) + u(T) = u'(0) + u'(T) = 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

En el Capítulo 4, nos centramos en el uso de las desigualdades de Lyapunov para el estudio de problemas resonantes no lineales. Para conseguir ésto, los resultados lineales son combinados con el Teorema del punto fijo de Schauder.

Estudiamos un problema resonante no lineal con condiciones de frontera de tipo Neumann, dado por

$$\begin{cases} u''(x) + f(x, u(x)) = 0, \ x \in (0, L), \\ u'(0) = u'(L) = 0, \end{cases} \tag{1.26}$$

donde $f : [0, L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, u) \to f(x, u)$ es continua.
El problema lineal asociado

$$\begin{cases} u''(x) = 0, \; x \in (0, L), \\ u'(0) = u'(L) = 0, \end{cases} \tag{1.27}$$

tiene soluciones no triviales (cualquier función constante) y ésta es la razón porque llamamos a (1.26) un problema resonante.
A lo largo del capítulo estudiamos algunas hipótesis que implican la existencia de soluciones del problema (1.26).
Por último, tratamos un resultado de unicidad de solución del problema (1.26), en el cual damos condiciones suplementarias en términos de $||\beta||_p, 1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 1.3 *Consideramos (1.26) donde se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *f y f_u son continuas en $[0, L] \times \mathbb{R}$.*
2. *$0 \leq f_u(x, u)$ en $[0, L] \times \mathbb{R}$. Además, para cada $u \in C[0, L]$ se tiene $f_u(x, u(x)) \neq 0$, c.p.t en $[0, L]$ y*
$$\int_0^L f(x, 0)dx = 0.$$
3. *Para alguna función $\beta \in L^\infty(0, L)$, tenemos $f_u(x, u) \leq \beta(x)$ en $[0, L] \times \mathbb{R}$ y β verifica alguna de las condiciones dadas en el Corolario 2.15.*

Entonces, el problema (1.26) tiene una única solución.

La prueba consta de dos parte: existencia y unicidad de solución de (1.26):

- Para la unicidad de solución usamos el Teorema del valor medio y el Corolario 1.2.
- Para la existencia de soluciones, reescribimos el problema (1.26) de una forma equivalente, tal que las soluciones de (1.26) sean los puntos fijos de un cierto operador completamente continuo, y entonces, aplicamos el Teorema de Punto fijo de Schauder.

Por último, hemos incluido un Anexo, Capítulo 5, donde introducimos algunos resultados utilizados a lo largo de la memoria.

Capítulo 2

Condiciones de frontera de Neumann, como un ejemplo de problemas lineales resonantes.

Este capítulo se ocupará de la existencia de soluciones no triviales del problema lineal homogéneo con condiciones de frontera de tipo Neumann:

$$\begin{cases} u''(x) + a(x)u(x) = 0,\ x \in (0, L), \\ u'(0) = u'(L) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Aquí $u \in H^1(0, L)$, el usual espacio de Sobolev (ver anexo), y la solución es entendida en sentido débil, es decir,

$$-\int_0^L u'v' + \int_0^L a(x)uv = 0, \quad \forall\, v \in H^1(0, L).$$

Si $a(\cdot)$ es una función constante $\lambda \in \mathbb{R}$, (2.1) tiene soluciones no triviales si y sólo si λ pertenece al conjunto $\left\{\lambda_n = n^2\pi^2/L^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$, es decir, el conjunto de autovalores del problema de autovalor:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0,\ x \in (0, L) \\ u'(0) = u'(L) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

En efecto, calculamos los autovalores del problema (2.2): su polinomio característico es

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}$$

y por tanto, la solución general de la ecuación será diferente según el signo de λ.

- Si $\lambda < 0$, la solución general es

$$u(x) = C_1 e^{px} + C_2 e^{-px},$$

con $p = \sqrt{-\lambda} > 0$ y $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Imponiendo condiciones tenemos:

$$u'(0) = p(C_1 - C_2) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2,$$

$$u'(L) = C_1 p e^{pL} - C_2 p e^{-pL} = C_1 p(e^{pL} + e^{-pL}) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow u \equiv 0.$$

Por tanto, ningún $\lambda < 0$ es autovalor del problema (2.2).

- Si $\lambda = 0$, la solución general es

$$u(x) = C_1 + C_2 x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$\begin{cases} u'(0) = C_2 = 0 \\ u'(L) = C_2 = 0 \end{cases}$$

Entonces $\lambda = 0$ es autovalor con autofunción $u_0 = C_1$.

- Si $\lambda > 0$, la solución general es

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x,$$

con $\beta = \sqrt{\lambda} > 0$ y $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aplicamos las condiciones y tenemos:

$$u'(0) = C_2 \beta = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$u'(L) = -C_1 \beta \operatorname{sen} \beta L = 0.$$

Para tener solución no trivial debe ser $C_1 \neq 0$. Por tanto, para ello

$$\beta L = n\pi$$

y obtenemos

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \text{ con } n = 1, 2, \ldots$$

Lema 2.1 *Los primeros autovalores del problema (2.2) vienen dados por el cociente de Rayleigh:*

$$\lambda_0 = \min_{u \in H^1 \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_0^L (u')^2}{\displaystyle\int_0^L u^2} = 0,$$

$$\lambda_1 = \min_{V_1} \frac{\displaystyle\int_0^L (u')^2}{\displaystyle\int_0^L u^2} = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \textit{con } V_1 = \left\{ u \in H^1(0, L); \int_0^L u = 0 \right\}.$$

Por supuesto, el problema (2.1) es más complicado si $a(\cdot)$ no es una función constante.

Para continuar con la definición de la constante de Lyapunov, suponemos a lo largo del capítulo que $a \in \Lambda$, donde el conjunto Λ está definido como:

$$\Lambda = \left\{ a \in L^1(0,L)\backslash\{0\} : \int_0^L a(x)\,dx \geq 0 \text{ y (2.1) tiene soluciones no triviales} \right\}. \quad (2.3)$$

Por otro lado, para cada p con $1 \leq p \leq \infty$, podemos definir el funcional $I_p : \Lambda \cap L^p(0,L) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$I_p(a) = ||a^+||_p = \left(\int_0^L |a^+(x)|^p dx \right)^{1/p}, \forall\, a \in \Lambda \cap L^p(0,L),\ 1 \leq p < \infty.$$

Y para $p = \infty$, definimos

$$I_\infty(a) = ||a^+||_\infty = \sup\, ess\, a^+,\ \forall\, a \in \Lambda \cap L^\infty(0,L), \quad (2.4)$$

donde a^+ es la parte positiva de la función a (es decir, $a^+(x) = \text{máx}\{0, a(x)\}$), y $\sup\, ess\, a^+$ es el supremo esencial de la función a^+ (ver anexo).
Dado que los autovalores positivos del problema de autovalor (2.2), pertenecen al conjunto $\Lambda \cap L^p(0,L)$, la constante no negativa:

$$\beta_p \equiv \inf_{a \in \Lambda \cap L^p(0,L)} I_p(a),\ 1 \leq p \leq \infty \quad (2.5)$$

está bien definida. Debido al trabajo de Lyapunov para condiciones de frontera de Dirichlet y $p = 1$ (ver [7],[3],[4]), llamaremos a la constante β_p, definida en (2.5), la mejor constante L_p de Lyapunov.

Observación 2.2 Necesitamos la positividad de

$$\int_0^L a(x)dx$$

para probar que la constante β_p es estrictamente positiva. De hecho, si el conjunto Λ en (2.3) es sustituido por

$$\Upsilon = \{a \in L^1(0,L)\backslash\{0\} : \text{ (2.1) tiene soluciones no triviales}\},$$

entonces la constante

$$\gamma_p \equiv \inf_{a \in \Upsilon \cap L^p(0,L)} I_p(a);\ 1 \leq p \leq \infty$$

es cero, para cada p, $1 \leq p \leq \infty$. Recordar que 0 es el primer autovalor de (2.2) (Lema 2.1).

Observación 2.3 El estudio de la constante β_p puede ser visto como un problema de control óptimo: el conjunto de control admisible es $\Lambda \cap L^p(0,L)$ y el funcional que queremos minimizar es I_p. De manera que, advertimos que la condición

$$\text{(2.1) tiene soluciones no triviales,} \tag{2.6}$$

es difícil de manejar desde un punto de vista matemático y ésta es la principal dificultad del problema. Debido a esto, uno de los principales propósitos es conseguir una caracterización variacional de la mejor constante de Lyapunov β_p.

2.1. Caso $p = \infty$.

Comenzamos con el caso más simple: $p = \infty$. En este caso, la constante β_∞ no es nada más que el primer autovalor positivo de (2.2). La prueba usa dos ideas básicas:

1. La desigualdad de Hölder (ver anexo).
2. La caracterización variacional de los autovalores de (2.2) (Lema 2.1).

Teorema 2.4

$$\beta_\infty = \min_{v \in X_\infty \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_0^L (v')^2}{\displaystyle\int_0^L v^2} = \frac{\pi^2}{L^2} \tag{2.7}$$

donde

$$X_\infty = \left\{ v \in H^1(0,L) : \int_0^L v = 0 \right\}.$$

Demostración: Sea $a \in \Lambda$ y $u \in H^1(0,L)$ una solución no trivial de (2.1). Multiplicando (2.1) por $v \in H^1(0,L)$ obtenemos:

$$-u''(x)v(x) = a(x)u(x)v(x) \quad \forall\, v \in H^1(0,L).$$

Integrando:

$$-\int_0^L u''v = \int_0^L auv \quad \forall\, v \in H^1(0,L),$$

de donde aplicando integración por partes obtenemos:

$$-\int_0^L u''v = -\int_0^L (u')'v = -\left(u'(L)v(L) - u'(0)v(0) - \int_0^L u'v' \right) = \int_0^L u'v',$$

ya que $u'(0) = u'(L) = 0$.

Por tanto, tenemos:

$$\int_0^L u'v' = \int_0^L auv \quad \forall\, v \in H^1(0,L). \tag{2.8}$$

Por otro lado, integrando en (2.1):

$$-\int_0^L u''(x)dx = \int_0^L a(x)u(x),$$

donde volvemos a integrar por partes:

$$\int_0^L u''(x)dx = -\int_0^L u''(x)\cdot 1dx = -\int_0^L (u')'\cdot 1dx =$$

$$= -\left(u'(L)\cdot 1 - u'(0)\cdot 1 - \int_0^L u'\cdot 1'dx\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^L au = 0.$$

En particular, tomando $v = u$ en (2.8) tenemos:

$$\int_0^L u'^2 = \int_0^L au^2; \quad \int_0^L au = 0. \tag{2.9}$$

Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$\int_0^L (u+k)'^2 = \int_0^L u'^2 = \int_0^L au^2 \leq \int_0^L au^2 + k^2\int_0^L a =$$

$$= \int_0^L au^2 + k^2\int_0^L a + 2k\int_0^L au = \int_0^L a(u+k)^2 \leq \int_0^L a^+(u+k)^2.$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder:

$$\int_0^L a^+(u+k)^2 \leq ||a^+||_\infty \int_0^L (u+k)^2$$

y por tanto:

$$\int_0^L (u+k)'^2 \leq ||a^+||_\infty \int_0^L (u+k)^2.$$

También, como la función a pertenece a Λ, u es una solución no constante de (2.1). Por consiguiente:

$$||a^+||_\infty \geq \frac{\displaystyle\int_0^L (u+k)'^2}{\displaystyle\int_0^L (u+k)^2}.$$

Ahora elegimos $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_0^L (u + k_0) = 0. \tag{2.10}$$

Entonces,

$$||a^+||_\infty \geq \frac{\displaystyle\int_0^L (u+k_0)'^2}{\displaystyle\int_0^L (u+k_0)^2} \geq \inf_{v \in X_\infty \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_0^L (v')^2}{\displaystyle\int_0^L v^2} = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \forall\, a \in \Lambda,$$

primer autovalor de (2.2), dado por el cociente de Rayleich (Lema 2.1). Además, sabemos que el anterior ínfimo es, de hecho, un mínimo y que el valor de ese mínimo es $\frac{\pi^2}{L^2}$ (Ver [9]). La desigualdad anterior implica

$$\beta_\infty \geq \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Ya que la función constante

$$a(x) = \frac{\pi^2}{L^2}$$

es un elemento de Λ, entonces por definición de β_p tenemos

$$\beta_\infty \leq \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Y por tanto, deducimos que

$$\beta_\infty = \frac{\pi^2}{L^2}.$$

$\square$

Observación 2.5 La constante β_∞ fue definida en (2.5) como un ínfimo, pero podemos observar que este ínfimo es alcanzado en un único elemento $a_\infty \in \Lambda$, dado por $a_\infty \equiv \dfrac{\pi^2}{L^2}$.

2.2. Caso $p = 1$.

Ahora estudiamos el caso $p = 1$. Éste es sólo el caso donde el ínfimo β_p, definido en (2.5) no es alcanzado. La prueba es inspirada por Borg (Ver [5]), pero el siguiente teorema además aporta una caracterización variacional de β_1.

Teorema 2.6

$$\beta_1 = \min_{u \in X_1 \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_0^L u'^2}{||u||_\infty^2} = \frac{4}{L} \tag{2.11}$$

donde

$$X_1 = \left\{ u \in H^1(0,L) : \max_{x\in[0,L]} u(x) + \min_{x\in[0,L]} u(x) = 0 \right\}.$$

Demostración: Primero observar que la existencia de $\min_{[0,L]} u$ y $\max_{[0,L]} u$ se debe a la inyección compacta de $H^1(0,L) \subset C[0,L]$. Por tanto, cualquier función de $H^1(0,L)$ tiene un representante en $C[0,L]$, teniendo por tanto máximo y mínimo (Teorema 5.8).
Probamos en primer lugar que

$$\min_{u\in X_1\backslash\{0\}} \frac{\int_0^L u'^2}{||u||_\infty^2} = \frac{4}{L}. \tag{2.12}$$

Para hacer esto, si $u \in X_1\backslash\{0\}$ y $x_1, x_2 \in [0,L]$ son tal que $u(x_1) = \max_{[0,L]} u$, $u(x_2) = \min_{[0,L]} u$, entonces $||u||_\infty = \max_{[0,L]} u = -\min_{[0,L]} u$.
Claramente, no es restrictivo asumir $x_1 < x_2$.

Denotemos $I = [x_1, x_2]$. Por lo tanto, tenemos:

$$\int_0^L u'^2 \geq \int_I u'^2.$$

Entonces, si aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_I |u'|\right)^2 = \left(\int_I 1\cdot|u'|\right)^2 \leq \left(\int_I u'^2\right)\left(\int_I 1^2\right) = \left(\int_I u'^2\right)\cdot(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \int_I u'^2 \geq \frac{\left(\int_I |u'|\right)^2}{x_2 - x_1}.$$

Por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^L u'^2 \geq \int_I u'^2 \geq \frac{\left(\int_I |u'|\right)^2}{x_2 - x_1} \geq \frac{\left(\int_I u'\right)^2}{x_2 - x_1} = \frac{(u(x_2) - u(x_1))^2}{x_2 - x_1} = \\ \frac{\left(\min_{[0,L]} u - \max_{[0,L]} u\right)^2}{x_2 - x_1} = \frac{(2\max_{[0,L]} u)^2}{x_2 - x_1} = \frac{4||u||_\infty^2}{x_2 - x_1} \geq \frac{4}{L}||u||_\infty^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por lo tanto,

$$\inf_{u\in X_1\backslash\{0\}} \frac{\int_0^L u'^2}{||u||_\infty^2} \geq \frac{4}{L}.$$

Por otra parte, si
$$v(x) = x - \frac{L}{2}, \forall\, v \in X_1 \backslash \{0\}.$$
Donde $v'(x) = 1$, $||v||_\infty = \max\limits_{[0,L]} v(x) = L/2$ y $\min\limits_{[0,L]} v(x) = -L/2$.
Por tanto,
$$\frac{\displaystyle\int_0^L v'^2}{||v||_\infty^2} = \frac{L}{(\frac{L}{2})^2} = \frac{4}{L}.$$
Esto prueba (2.12).
Ahora, veamos que
$$\beta_1 = \frac{4}{L}.$$
Para ver esto, si $a \in \Lambda$ y $u \in H^1(0, L)$ es una solución no trivial de (2.1), entonces usando la desigualdad de Hölder, obtenemos para cada $k \in \mathbb{R}$
$$\int_0^L (u+k)'^2 \leq \int_0^L a(u+k)^2 \leq \int_0^L a^+(u+k)^2 \leq$$
$$\leq ||a^+||_1 ||(u+k)||_\infty^2.$$
Y entonces:
$$||a^+||_1 \geq \frac{\displaystyle\int_0^L (u+k)'^2}{||(u+k)||_\infty^2}.$$
Veamos que podemos elegir $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u + k_0 \in X_1$. En efecto, tomando
$$k_0 = \frac{\max\limits_{x\in[0,L]} u(x) + \min\limits_{x\in[0,L]} u(x)}{2},$$
tenemos
$$\max_{x\in[0,L]} (u+k_0) + \min_{x\in[0,L]} (u+k_0) = \max_{x\in[0,L]} u + \min_{x\in[0,L]} u + 2k_0 = 0.$$
Y por tanto $u + k_0 \in X_1$.

Por tanto, si elegimos $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u + k_0 \in X_1$, entonces:
$$||a^+||_1 \geq \frac{\displaystyle\int_0^L (u+k_0)'^2}{||(u+k_0)||_\infty^2} \geq \frac{4}{L}, \forall\, a \in \Lambda. \tag{2.14}$$
Por lo tanto,
$$\beta_1 \geq \frac{4}{L}.$$

También, podemos definir una sucesión minimizante de la siguiente forma. Sea $\{u_n\} \subset C^2[0,L]$ una sucesión tal que

$$u_n(x) = \left(x - \frac{L}{2}\right), \forall\, x \in \left(\frac{1}{n}, L - \frac{1}{n}\right); \quad u_n'(0) = u_n'(L) = 0;$$

$$u_n''(x) > 0, \forall\, x \in [0, 1/n)\,; \quad u_n''(x) < 0, \forall\, x \in \left(L - \frac{1}{n}, L\right].$$

Luego, si definimos la sucesión de funciones continuas $a_n : [0,L] \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{cases} a_n(x) = 0, \,\forall\, x \in [1/n, L - 1/n] \\ a_n(x) = \dfrac{-u_n''(x)}{u_n(x)}, \,\forall\, x \in [0, 1/n] \cup [L - 1/n, L] \end{cases}$$

tenemos que $a_n \in L^\infty(0,L)$, $a_n \geq 0$ c.p.d en $(0,L)$, a_n es no trivial y además u_n y a_n verifican

$$\begin{cases} u_n''(x) + a_n(x)u_n(x) = 0, \text{ en } (0,L) \\ u_n'(0) = u_n'(L) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $a_n \in \Lambda$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Además:

$$\int_0^L a_n^+ = \int_0^{1/n} -\frac{u_n''(x)}{u_n(x)} + \int_{L-1/n}^L -\frac{u_n''(x)}{u_n(x)} \leq \int_0^{1/n} \frac{u_n''(x)}{\min\limits_{[0,1/n]}(-u_n)} + \int_{L-1/n}^L -\frac{u_n''(x)}{\min\limits_{[L-1/n,L]}(u_n)} =$$

$$\frac{1}{\frac{L}{2} - \frac{1}{n}} \int_0^{1/n} u_n''(x) + \frac{1}{\frac{L}{2} - \frac{1}{n}} \int_{L-1/n}^L -u_n''(x) = \frac{u_n'(1/n)}{\frac{L}{2} - \frac{1}{n}} + \frac{u_n'(L - 1/n)}{\frac{L}{2} - \frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{L}{2} - \frac{1}{n}} + \frac{1}{\frac{L}{2} - \frac{1}{n}}.$$

Donde hemos usado

$$\min_{[0,1/n]}(-u_n) = \frac{L}{2} - \frac{1}{n}; \quad \min_{[L-1/n,L]}(u_n) = \frac{L}{2} - \frac{1}{n}.$$

Tomando límite con $n \to \infty$, tenemos $||a^+||_1 = 4/L$ y por tanto $\beta_1 = 4/L$.

$\square$

Observación 2.7 El ínfimo β_1, definido en (2.5), no se alcanza, es decir,

$$||a^+||_1 > \frac{4}{L}, \forall\, a \in \Lambda \tag{2.15}$$

Para demostrarlo, sea $a \in \Lambda$ tal que $||a^+||_1 = \frac{4}{L}$.
Sea u una solución no trivial de (2.1) y $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u + k_0 \in X_1$, obtenemos:

$$\int_0^L (u + k_0)'^2 \leq \frac{4}{L} ||(u + k_0)||_\infty^2.$$

Por otra parte, dado que $u+k_0 \in X_1$, deducimos de (2.12)

$$\int_0^L (u+k_0)'^2 \geq \frac{4}{L}||(u+k_0)||_\infty^2.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^L (u+k_0)'^2 = \frac{4}{L}||(u+k_0)||_\infty^2.$$

Entonces, para cada función $u+k_0$, todas las desigualdades de (2.13) se tranforman en igualdades.
En particular, $x_2 = L, x_1 = 0$ y

$$\left(\int_0^L (u+k_0)'\right)^2 = L\int_0^L (u+k_0)'^2.$$

De nuevo, la desigualdad de Cauchy-Schwarz (en este caso igualdad) implica que la función $(u+k_0)'$ es constante en $[0,L]$. Teniendo en cuenta que $u+k_0 \in X_1\backslash\{0\}$, entonces

$$\max_{[0,L]}(u(x)+k_0) + \min_{[0,L]}(u(x)+k_0) = 0.$$

Además, sea $K \in \mathbb{R}$ una constante no trivial, tenemos

$$(u+k_0)' = K \text{ y } u(x)+k_0 = Kx + C.$$

Por tanto:

$$KL + C + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{KL}{2}.$$

Entonces, $u(x)+k_0 = K\,(x - L/2)\,, \forall\, x \in [0,L]$, y para alguna constante K no trivial. Entonces de (2.1), deducimos que $a \equiv 0$, lo cual es una contradicción.

Como una aplicación de los Teoremas 2.4 y 2.6 para el problema lineal

$$\begin{cases} u''(x) + a(x)u(x) = f(x),\, x \in (0,L), \\ u'(0) = u'(L) = 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.8 *Sea $a \in L^\infty\backslash\{0\}$, $0 \leq \displaystyle\int_0^L a(x)$, satisfaciendo una de las siguientes condiciones:*

1. $||a^+||_1 \leq \beta_1 = \dfrac{4}{L}$.
2. $||a^+||_\infty \leq \beta_\infty = \dfrac{\pi^2}{L^2}$ *y a^+ no es idéntica a la constante β_∞.*

Entonces para cada $f \in L^{\infty}(0,L)$, el problema de frontera (2.16) tiene una única solución.

Demostración: Para la prueba usamos el siguiente corolario.

Corolario.[Consecuencia del Teorema de alternativa de Fredholm]
Consideramos el problema

$$(NH)\left\{\begin{array}{l} u''(x)+a(x)u(x)=f(x), \\ u'(0)=u'(L)=0. \end{array}\right.$$

Si el problema homogéneo

$$(H)\left\{\begin{array}{l} u''(x)+a(x)u(x)=0, \\ u'(0)=u'(L)=0, \end{array}\right.$$

tiene como solución única la solución trivial, entonces existe una única solución del problema (NH).

Por tanto, el corolario es probado si el problema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x)+a(x)u(x)=0,\ x\in(0,L), \\ u'(0)=u'(L)=0, \end{array}\right. \tag{2.17}$$

tiene sólo la solución trivial. En efecto, supongamos que se verifica

$$||a^{+}||_1 \leq \beta_1 = \frac{4}{L},$$

lo cual es una contradición con el Teorema 2.6 y Observación 2.7, ya que se debe cumplir

$$||a^{+}||_1 > \frac{4}{L}\,\forall\, a\in\Lambda.$$

Por otro lado, si se verifica

$$||a^{+}||_{\infty} \leq \beta_{\infty} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

y a^{+} no es idéntica a la constante β_{∞}. Entonces tenemos una contradicción con el Teorema 2.4 y Observación 2.5.
Por tanto, el problema homogéneo anterior tiene sólo la solución trivial y en consecuencia, el problema de frontera (2.16) tiene una única solución.

□

Observación 2.9 En el corolario anterior, las condiciones en la función $a(\cdot)$:

$$\begin{array}{c} ||a^{+}||_1 \leq \beta_1 \\ ||a^{+}||_{\infty} \leq \beta_{\infty} = \frac{\pi^2}{L^2} \text{ y } a^{+} \text{ no es idéntica a la constante } \beta_{\infty} \end{array} \tag{2.18}$$

son dadas, respectivamente, en términos de la norma en L^1, $||a^+||_1$ y la norma en L^∞, $||a^+||_\infty$. Recordar que

$$||a^+||_{L^1(0,L)} = \int_0^L |a^+| \leq L||a^+||_{L^\infty(0,L)}.$$

Claramente, no están relacionadas en general, en el sentido que ninguna de ellas implica la otra.

En el siguiente teorema consideramos el caso $1 < p < \infty$, y establecemos otras condiciones diferentes dadas en términos de la norma de L^p, $||a^+||_p$, $1 < p < \infty$. Mostraremos una relación entre los casos $p = 1$ y $p = \infty$ en (2.18) y estudiamos qué ocurre para $p \to 1^+$ y $p \to \infty$.

2.3. Caso $1 < p < \infty$.

Con el fin de motivar la caracterización variacional de la constate β_p, $1 < p < \infty$, que se discute en el siguiente teorema, teniendo en cuenta que si $a \in \Lambda \cap L^p(0, L)$ y $u \in H^1(0, L)$ es una solución no trivial de (2.1) entonces:

$$\int_0^L u'v' = \int_0^L auv, \quad \forall\, v \in H^1(0, L).$$

En particular, tomando $v \equiv u$ y $v \equiv 1$, tenemos respectivamente

$$\int_0^L u'^2 = \int_0^L au^2, \quad \int_0^L au = 0. \tag{2.19}$$

Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{R}$, tenemos $\left(\text{recordamos que } \int_0^L a \geq 0\right)$

$$\int_0^L (u+k)'^2 = \int_0^L u'^2 = \int_0^L au^2 \leq \int_0^L au^2 + k^2 \int_0^L a =$$
$$= \int_0^L au^2 + \int_0^L k^2 a + 2k \int_0^L au = \int_0^L a(u+k)^2 \leq \int_0^L a^+(u+k)^2.$$

Por la desigualdad de Hölder se deduce que:

$$\int_0^L (u+k)'^2 \leq ||a^+||_p ||(u+k)^2||_{\frac{p}{p-1}}.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad anterior, ya que u es una solución no constante de (2.1), $u + k$ no es idénticamente la función cero, tenemos el siguiente lema:

Lema 2.10 *Se verifica la siguiente desigualdad*

$$||a^+||_p \geq \frac{\displaystyle\int_0^L (u+k)'^2}{||(u+k)^2||_{\frac{p}{p-1}}} \qquad \forall\, a \in \Lambda. \tag{2.20}$$

Este razonamiento sugiere la minimización de un funcional como el anterior sobre algunos subconjuntos apropiados de $H^1(0,L)$. Motivado por el caso $p=\infty$ (Teorema 2.4), este subconjunto apropiado podría ser del tipo:

$$\left\{ u \in H^1(0,L) : \int_0^L |u|^{\lambda(p)} u = 0 \right\},$$

donde $\lambda(\infty)=0$. Aquí elegimos $\lambda(p)=\dfrac{2}{p-1}$. Para entender porqué esta elección es adecuada, debemos ver en detalle la prueba del siguiente teorema, especialmente la parte donde el Teorema de Multiplicadores de Lagrange es aplicado (ver anexo).

Teorema 2.11 *Si* $1<p<\infty$

$$\begin{aligned} \beta_p = \min_{X_p \setminus \{0\}} J_p(u) = \min_{X_p \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_0^L u'^2}{\left(\displaystyle\int_0^L |u|^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}} = \\ = \frac{4(p-1)^{1+\frac{1}{p}}}{L^{2-\frac{1}{p}} p(2p-1)^{1/p}} \left(\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{-1/p} dx\right)^2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde

$$X_p = \left\{ u \in H^1(0,L) : \int_0^L |u|^{\frac{2}{p-1}} u = 0 \right\}.$$

Demostración: La prueba se llevará a cabo en tres etapas:

1. **El problema de minimización en (2.21) tiene solución.**

   La prueba de este hecho es estándar: primero demostramos que cualquier sucesión minimizante es acotada en el espacio de Hilbert $H^1(0,L)$. Luego usaremos que el funcional considerado es débilmente semicontinuo inferiormente para concluir que el ínfimo es alcanzado.

Denotemos:

$$m_p \equiv \inf_{X_p \backslash \{0\}} J_p. \tag{2.22}$$

Si $\{u_n\} \subset X_p \backslash \{0\}$ es una sucesión minimizante, entonces $\{k_n u_n\}$ donde $\{k_n\}$ es una sucesión arbitraria de números reales no nulos, es también una sucesión minimizante, ya que

$$J_p(u_n) = J_p(k_n u_n).$$

Por tanto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$$\int_0^L |u_n|^{\frac{2p}{p-1}} = 1.$$

Debido a la inyección compacta de $H^1(0,L)$ en $C[0,L]$(Teorema 5.8), tenemos que $J_p(u_n)$ es acotada, y por tanto

$$\left\{ \int_0^L |u_n'|^2 \right\}$$

es también acotada. Además, ya que $u_n \in X_p \backslash \{0\}$ se tiene que

$$\int_0^L |u_n|^{\frac{2}{p-1}} u_n = 0,$$

y por tanto para cada u_n existe $x_n \in (0,L)$ tal que $u_n(x_n) = 0$. Ahora,

$$u_n(x) = \int_{x_n}^x u'(s) ds, \quad \forall\, x \in (0,L)$$

y la desigualdad de Hölder implica que $\{u_n\}$ es acotada en $H^1(0,L)$. Así, podemos deducir, que para una subsucesión, $u_n \rightharpoonup u_0$ en $H^1(0,L)$ (convergencia débil) y $u_n \to u_0$ en $C[0,L]$, con la norma uniforme. La convergencia en $C[0,L]$ nos da

$$\int_0^L |u_0|^{\frac{2p}{p-1}} = 1, \int_0^L |u_0|^{\frac{2}{p-1}} u_0 = 0,$$

y entonces $u_0 \in X_p \backslash \{0\}$. Como el funcional J_p es débilmente semicontinuo inferiormente (Ver [10]), la convergencia débil en $H^1(0,L)$ implica

$$J_p(u_0) \leq \liminf J_p(u_n) = m_p.$$

Entonces u_0 es un mínimo. Definimos,

$$X_p = \{u \in H^1(0,L) : \varphi(u) = 0\}, \, \varphi(u) = \int_0^L |u|^{\frac{2p}{p-1}} u,$$

y por otro lado, definimos $H : H^1(0,L) \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$H(u) = \int_0^L u'^2 - m_p \left(\int_0^L |u|^{\frac{2p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Entonces si $u_0 \in X_p \backslash \{0\}$ es cualquier mínimo de J_p, veamos que podemos aplicar el Teorema de multiplicadores de Lagrange (ver anexo). A continuación vamos a usar la derivada de cierto funcional en espacio de Banach. No describiremos formalmente la forma de calcular dicha derivada (ver [16]), pero si usamos su expresión. En efecto,

$$\varphi'(u_0)v = \frac{p+1}{p-1} \int_0^L |u_0|^{\frac{2}{p-1}} v.$$

Y por tanto,

$$\varphi'(u_0)u_0^2 = \frac{p+1}{p-1} \int_0^L |u_0|^{\frac{2}{p-1}+2} = \frac{p+1}{p-1} \int_0^L |u_0|^{\frac{2p}{p-1}} = \frac{p+1}{p-1} \neq 0.$$

Y deducimos $\varphi'(u_0) \neq 0$. Por tanto, el Teorema de Multiplicadores de Lagrange implica que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$H'(u_0) + \lambda \varphi'(u_0) = 0 \Leftrightarrow H'(u_0)v + \lambda \varphi'(u_0)v = 0, \, \forall \, v \in H^1(0,L).$$

Por otro lado, veamos que se verifica:

a) $H'(u_0)(1) = 0$.

b) $H'(u_0)(v) = 0, \forall \, v \in H^1(0,L)$ tal que $\varphi'(u_0)(v) = 0$.

c) Existe $v \in H^1(0,L)$ que podemos escribir de la forma $v = \alpha + w, \alpha \in \mathbb{R}$ y w satisfaciendo $\varphi'(u_0)(w) = 0$. Y por tanto, $H'(u_0)v = 0$.

En efecto,

a) Tenemos

$$H'(u)(v) = 2\int_0^L (u')(v') - m_p \frac{p-1}{p} \left(\int_0^L |u|^{\frac{2p}{p-1}} \right)^{-1/p} \frac{2p}{p-1} \int_0^L |u|^{\frac{2}{p-1}} uv.$$

Entonces,

$$H'(u_0)(1) = 2\int_0^L (u_0')(1') - m_p \frac{p-1}{p} \left(\int_0^L |u_0|^{\frac{2p}{p-1}} \right)^{-1/p} \frac{2p}{p-1} \int_0^L |u_0|^{\frac{2}{p-1}} u_0 1 = 0,$$

ya que

$$\int_0^L |u_0|^{\frac{2}{p-1}} u_0 = 0.$$

b) Sea $v \in H^1(0,L)$ tal que $\varphi'(u_0)(v) = 0$, entonces, ya que

$$H'(u_0)v + \lambda\varphi'(u_0)v = 0$$

tenemos $H'(u_0)(v) = 0$.

c) Sea $v \in H^1(0,L)$, suponemos que $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ y $\exists\, w$ tal que $\varphi'(u_0)w = 0$, entonces podemos escribir v como $v = \alpha + w$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ a elegir, tomamos $w = v - \alpha$ e imponemos $\varphi'(u_0)w = 0$, por tanto, tenemos

$$\varphi'(u_0)w = \varphi'(u_0)(v) - \alpha\varphi'(u_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\varphi'(u_0)(v)}{\varphi'(u_0)}.$$

Por tanto, concluimos que

$$H'(u_0)(v) = H'(u_0)(\alpha + w) = H'(u_0)(\alpha) + H'(u_0)(w) =$$

$$= \alpha H'(u_0)(1) + H'(u_0)(w) = 0.$$

Lo cual implica que u_0 satisface el problema

$$v''(x) + m_p \left(\int_0^L |v|^{\frac{2p}{p-1}} \right)^{-1/p} |v(x)|^{\frac{2}{p-1}} v(x) = 0;\; v'(0) = v'(L) = 0. \tag{2.23}$$

2. **La constante β_p es igual a la constante m_p.**

Previamente al teorema, hemos probado que si $a \in \Lambda \cap L^p(0,L)$ y $u \in H^1(0,L)$ es una solución no trivial de (2.1), entonces (2.20) es válida para cualquier $k \in \mathbb{R}$. Luego, si para cada $a \in \Lambda \cap L^p(0,L)$ y cada u, solución no trivial de (2.1), podemos elegir $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u + k_0 \in X_p$, deducimos

$$\beta_p \geq m_p.$$

Recíprocamente, si $u_p \in X_p \backslash \{0\}$ es un mínimo de J_p, entonces u_p satisface (2.23). Por lo tanto, si denotamos

$$A_p(v) = m_p \left(\int_0^L |v|^{\frac{2p}{p-1}} \right)^{-1/p}, \tag{2.24}$$

tenemos que $A_p(u_p)|u_p|^{\frac{2}{p-1}} \in \Lambda \cap L^p(0,L)$ y

$$||A_p(u_p)|u_p|^{\frac{2}{p-1}}||_p = \left(\int_0^L A_p(u_p)^p |u_p|^{\frac{2p}{p-1}} \right)^{1/p} = m_p.$$

Luego

$$\beta_p \leq m_p.$$

Y por tanto $\beta_p = m_p$.

3. **Integración de la ecuación de Euler (2.23) para obtener m_p.**

El cálculo explícito de m_p es un asunto muy delicado y técnico, pero las mismas ideas pueden ser usadas en muchas otras situaciones. De hecho, el método que usaremos a continuación puede ser usado cuando tenemos un detallado conocimiento sobre el número y distribución de ceros de soluciones no triviales v de la ecuación (2.25) siguiente y su primera derivada v'.

Comenzamos con el método: si $u_p \in X_p \backslash \{0\}$ es un mínimo de J_p, hemos probado que u_p satisface un problema del tipo:

$$\begin{cases} v''(x) + B|v(x)|^{\frac{2}{p-1}} v(x) = 0, \; x \in (0, L), \\ v'(0) = v'(L) = 0, \end{cases} \tag{2.25}$$

donde B es una constante real positiva. Además, podemos observar que si v es una solución no trivial de (2.25), entonces integrando en (2.25)

$$\int_0^L v''(x)\, dx + B \int_0^L |v(x)|^{\frac{2}{p-1}} v(x) = 0,$$

$$\Rightarrow v'(L) - v'(0) + B \int_0^L |v(x)|^{\frac{2}{p-1}} v(x) = 0.$$

Por tanto, ya que $v'(L) = v'(0) = 0$, se sigue que

$$\int_0^L |v(x)|^{\frac{2}{p-1}} v(x) = 0.$$

Por lo tanto, v pertenece a $X_p \backslash \{0\}$ y entonces si para cada $B \in \mathbb{R}^+$ dada, denotamos S_B el conjunto de todas las soluciones no triviales de (2.25), se verifican:

- Si $m_p = J_p(u_p)$, entonces $u_p \in S_B$ y por tanto

$$m_p = J_p(u_p) \geq \inf_{S_B} J_p(v) \geq \inf_{B} \inf_{v \in S_B} J_p(v).$$

- Si $v \in S_B$, entonces $v \in X_p$ y $S_B \subset X_p$, por tanto

$$\inf_{X_p \backslash \{0\}} J_p \leq \inf_{S_B} J_p \Rightarrow \inf_{X_p \backslash \{0\}} J_p \leq \inf_{B} \inf_{v \in S_B} J_p(v).$$

Por lo tanto, tenemos

$$\inf_{B \in \mathbb{R}^+} \inf_{v \in S_B} J_p(v) = m_p.$$

Ahora, sea $B \in \mathbb{R}^+$ un número fijo y v solución no trivial de (2.25). Primero, nuestro principal objetivo es calcular v en el intervalo $[0, L]$ y luego, calcular $J_p(v)$. Está claro que podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$v(0) > 0$. Observar que si $v(0) = 0$ entonces $v \equiv 0$. Además, ya que $v \in X_p \backslash \{0\}$, v debe cambiar de signo en $(0, L)$. Sea x_0 el primer cero de v en $(0, L)$.

a. La función v en $[0, x_0]$.

La función v satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} w''(x) + B|w(x)|^{\frac{2}{p-1}} w(x) = 0, \\ w(0) = v(0); w'(0) = 0, \end{cases} \tag{2.26}$$

y este problema tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$ *(resultado de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias).*

Si $x \in (0, x_0)$ es fijo, multiplicando ambos términos de (2.25) por v' e integrando en el intervalo $[0, x]$, obtenemos:

$$\begin{aligned} v''(x)v'(x) + B|v(x)|^{\frac{2}{p-1}} v(x)v'(x) = 0 \\ \Rightarrow \int_0^x B|v(x)|^{\frac{2}{p-1}} v(x)v'(x)dx = -\int_0^x v''(x)v'(x)dx. \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} B\int_0^x |v(x)|^{\frac{2}{p-1}} v(x)v'(x)dx = B\int_0^x |v(x)|^{\frac{1+p}{p-1}} v'(x)dx = \\ = \frac{B(p-1)}{2p}\left(|v(x)|^{\frac{2p}{p-1}} - |v(0)|^{\frac{2p}{p-1}}\right). \end{aligned}$$

Y por otro lado,

$$-\int_0^x v''(x)v'(x)dx = -\frac{(v'(x))^2}{2}.$$

Por tanto, tenemos

$$-\frac{(v'(x))^2}{2} = \frac{B(p-1)}{2p}\left(|v(x)|^{\frac{2p}{p-1}} - |v(0)|^{\frac{2p}{p-1}}\right). \tag{2.27}$$

En el intervalo $(0, x_0)$ la función v satisface $v(x) > 0$ y $v'(x) \leq 0$ (ver (2.25)) y entonces:

$$v'(x) = -\left[\frac{B(p-1)}{p}\right]^{1/2} \left[|v(0)|^{\frac{2p}{p-1}} - |v(x)|^{\frac{2p}{p-1}}\right]^{1/2}. \tag{2.28}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^x \frac{v'(t)}{\left[|v(0)|^{\frac{2p}{p-1}} - |v(x)|^{\frac{2p}{p-1}}\right]^{1/2}} dt = -\left[\frac{B(p-1)}{p}\right]^{1/2} x,$$

para cualquier $x \in (0, x_0)$. Haciendo el cambio de variables $s = \dfrac{v(t)}{v(0)}$ obtenemos

$$\int_0^x \frac{v'(t)}{\left[|v(0)|^{\frac{2p}{p-1}} - |v(x)|^{\frac{2p}{p-1}}\right]^{1/2}}\,dt = \int_0^x \frac{v'(t)}{|v(0)|^{\frac{p}{p-1}}\left[1 - \frac{|v(x)|^{\frac{2p}{p-1}}}{|v(0)|^{\frac{2p}{p-1}}}\right]^{1/2}}\,dt =$$

$$= \int_1^t \frac{ds}{|v(0)|^{\frac{1}{p-1}}\left[1 - s^{\frac{2p}{p-1}}\right]^{1/2}} =$$

$$= -\int_0^1 \frac{ds}{|v(0)|^{\frac{1}{p-1}}\left[1 - s^{\frac{2p}{p-1}}\right]^{1/2}} + \int_0^t \frac{ds}{|v(0)|^{\frac{1}{p-1}}\left[1 - s^{\frac{2p}{p-1}}\right]^{1/2}}.$$

Y podemos escribir la relación anterior como:

$$-\varphi(1) + \varphi\left(\frac{v(x)}{v(0)}\right) = -v(0)^{\frac{1}{p-1}}\left[\frac{B(p-1)}{p}\right]^{1/2} x,\ \forall\, x \in (0, x_0),$$

donde $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente definida por:

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{ds}{\left(1 - s^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{1/2}}.$$

Si $\varphi[0,1] = [0, I]$, entonces ($\varphi(1) = I$):

$$\frac{v(x)}{v(0)} = \varphi^{-1}\left[I - v(0)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{B(p-1)}{p}\right)^{1/2} x\right],\ \forall\, x \in (0, x_0). \tag{2.29}$$

Además, como $v(x_0) = 0$, obtenemos:

$$I - v(0)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{B(p-1)}{p}\right)^{1/2} x_0 = 0.$$

Por tanto,

$$v(0) = \left(\frac{I}{x_0}\left(\frac{p}{B(p-1)}\right)^{1/2}\right)^{p-1}. \tag{2.30}$$

Finalmente,

$$v(x) = \left(\frac{I}{x_0}\left(\frac{p}{B(p-1)}\right)^{1/2}\right)^{p-1} \varphi^{-1}\left(I - \frac{I}{x_0}x\right),\ \forall\, x \in [0, x_0]. \tag{2.31}$$

b. Ahora, podemos calcular v en $[x_0, 2x_0], [2x_0, 3x_0], \ldots$.

Para hacer esto, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} w''(x) + B|w(x)|^{\frac{2}{p-1}} w(x) = 0, \\ w(x_0) = v(x_0) = 0, w'(x_0) = v'(x_0). \end{cases} \tag{2.32}$$

tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$.

Sea $z(x) = -v(2x_0 - x)$, $x \in (x_0, 2x_0)$, la cual verifica

$$z'(x) = v'(2x_0 - x)$$

y por tanto,

$$z(x_0) = -v(x_0) = 0 \text{ y } z'(x_0) = v'(x_0).$$

Además,

$$z''(x) + B|z(x)|^{\frac{2}{p-1}} z(x) = -v''(2x_0 - x) + B|v|^{\frac{2}{p-1}} v = 0.$$

Por lo tanto, $z(x) = -v(2x_0 - x), x \in (x_0, 2x_0)$ es una solución de (2.32) y nos proporciona $v(x) = -v(2x_0 - x)$, $\forall\, x \in (x_0, 2x_0)$.

De una forma análoga, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} w''(x) + B|w(x)|^{\frac{2}{p-1}} w(x) = 0, \\ w(2x_0) = v(2x_0), w'(2x_0) = v'(2x_0) = 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$. Ya que la función $v(4x_0 - x), x \in (2x_0, 3x_0)$, es una solución de (2.33), nos proporciona $v(x) = v(4x_0 - x)$, $\forall x \in (2x_0, 3x_0)$.

Ahora, podemos repetir este procedimiento en los intervalos $[nx_0, (n+1)x_0]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, obteniendo:

$$\begin{array}{l} v(x) = -v(2x_0 - x),\ \forall x \in [x_0, 2x_0] \\ v(x) = v(4x_0 - x),\ \forall x \in [2x_0, 3x_0] \\ v(x) = -v(6x_0 - x),\ \forall x \in [3x_0, 4x_0] \\ \ldots \end{array} \tag{2.34}$$

La conclusión es que si v es una solución no trivial de (2.25) para algún $B \in \mathbb{R}^+$ y x_0 es el primer cero de v en $(0, L)$, entonces $L = 2nx_0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

A continuación calculamos $J_p(v)$.

Se deduce de los razonamientos anteriores que

$$J_p(v) = \frac{\displaystyle\int_0^L v'^2}{\left(\displaystyle\int_0^L |v|^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}} = \frac{2n\displaystyle\int_0^{x_0} v'^2}{\left(2n\displaystyle\int_0^{x_0} |v|^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}. \tag{2.35}$$

De (2.27) obtenemos

$$\int_0^{x_0} |v'(x)|^2 dx = \frac{B(p-1)}{p}\left[-\int_0^{x_0} |v(x)|^{\frac{2p}{p-1}} dx + x_0 |v(0)|^{\frac{2p}{p-1}}\right] \tag{2.36}$$

y de (2.31) obtenemos:

$$\int_0^{x_0} |v(x)|^{\frac{2p}{p-1}} = \int_0^{x_0} \left(\frac{I}{x_0}\left(\frac{p}{B(p-1)}\right)^{1/2}\right)^{2p} \left[\varphi^{-1}\left(I - \frac{I}{x_0}x\right)\right]^{\frac{2p}{p-1}} dx. \tag{2.37}$$

Haciendo el cambio de variables $s = \varphi^{-1}\left(I\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)\right)$, tenemos

$$\int_0^{x_0} |v(x)|^{\frac{2p}{p-1}} = \left(\frac{I}{x_0}\left(\frac{p}{B(p-1)}\right)^{1/2}\right)^{2p} \frac{x_0}{I}\int_0^1 s^{\frac{2p}{p-1}}\left(1 - s^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{-1/2} ds. \tag{2.38}$$

Integrando por partes la expresión anterior con

$$f(s) = s, g'(s) = s^{\frac{p+1}{p-1}}\left(1 - s^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{-1/2},$$

deducimos:

$$\int_0^{x_0} |v(x)|^{\frac{2p}{p-1}} = \left(\frac{I}{x_0}\left(\frac{p}{B(p-1)}\right)^{1/2}\right)^{2p} \frac{x_0}{I}\frac{p-1}{2p-1}I. \tag{2.39}$$

Si sustituimos esta expresión en (2.36) y, además, tenemos en cuenta (2.30), obtenemos (recordar que $L = 2nx_0$)

$$\int_0^{x_0} |v'(x)|^2 dx = \frac{B(p-1)}{p}x_0\left(\frac{I}{x_0}\left(\frac{p}{B(p-1)}\right)^{1/2}\right)^{2p}\frac{p}{2p-1}. \tag{2.40}$$

Ahora podemos sustituir (2.39) y (2.40) en (2.35). Y tenemos

$$J_p(v) = \frac{2n\frac{B(p-1)}{p}x_0\left(\frac{I}{x_0}\left(\frac{p}{B(p-1)}\right)^{1/2}\right)^{2p}\frac{p}{2p-1}}{\left(2n\left(\frac{I}{x_0}\left(\frac{p}{B(p-1)}\right)^{1/2}\right)^{2p}\frac{x_0}{I}\frac{p-1}{2p-1}I\right)^{\frac{p-1}{p}}} =$$

$$= \frac{2n\frac{B(p-1)}{p}x_0\left(\frac{I}{x_0}\left(\frac{p}{B(p-1)}\right)^{1/2}\right)^{2p}\frac{p}{2p-1}}{(2n)^{\frac{p-1}{p}}\left(\left(\frac{I}{x_0}\left(\frac{p}{B(p-1)}\right)^{1/2}\right)^{2p}\right)^{\frac{p}{2p-1}} x_0^{\frac{p}{2p-1}}\frac{(p-1)^{\frac{p}{2p-1}}}{(2p-1)^{\frac{p}{2p-1}}}} =$$

$$= \frac{(2n)^{1/p} x_0^{1/p} \frac{I^2}{x_0^2} p}{(2p-1)^{1/p}(p-1)^{\frac{p-1}{p}}} = \frac{L^{1/p} I^2 p}{x_0^2 (2p-1)^{1/p}(p-1)^{1-\frac{1}{p}}}.$$

Y por tanto, tenemos

$$J_p(v) = \frac{4n^2 I^2 p}{L^{2-1/p}(p-1)^{1-1/p}(2p-1)^{1/p}}. \tag{2.41}$$

En este punto, debemos observar dos cosas:

a) $J_p(v)$ no depende de B.

b) Todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ son posibles en (2.41).

De hecho si $x_0 = L/2n$, la fórmula (2.31) define una solución no trivial de (2.25). Por lo tanto, el ínfimo m_p es alcanzado si $n = 1$. Finalmente, haciendo el cambio de variables $s^{\frac{p}{p-1}} = \operatorname{sen} t$, obtenemos:

$$I = \int_0^1 \frac{ds}{\left(1 - s^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{1/2}} = \frac{p-1}{p} K, \text{ donde } K = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^{-1/p} dt.$$

Esto da:

$$m_p = \frac{4(p-1)^{1+\frac{1}{p}}}{L^{2-1/p} p (2p-1)^{1/p}} \left(\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{-1/p} dx \right)^2. \tag{2.42}$$

□

Observación 2.12 Para estudiar otra condición de frontera, parece esencial destacar los hechos básicos del procedimiento anterior.
Enfatizamos que si v es una solución no trivial de (2.25) y x_0 es el primer cero de v en $(0, L)$, entonces $L = 2nx_0$ para algún número natural $n \geq 1$ y, en adición,

$$\begin{aligned} v'(0) = v'(2x_0) = \cdots = v'(2nx_0) = 0, \\ v(x_0) = \cdots = v\left((2n-1)x_0\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.43}$$

y $v(x) \neq 0$, $v'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (jx_0, (j+1)x_0)$, $0 \leq j \leq 2n-1$. Estas propiedades permiten calcular, en una forma explícita, las funciones v y v' en $[0, L]$ y por consiguiente, encontrar el valor de J_p dado en (2.41).

Lema 2.13 *β_p es una función continua como función de $p \in [1, +\infty]$. Donde*

$$\beta_p = \begin{cases} \dfrac{4}{L}, & si\ p = 1, \\ \dfrac{4(p-1)^{1+\frac{1}{p}}}{L^{2-\frac{1}{p}}p(2p-1)^{1/p}}\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{-1/p}dx\right)^2, & si\ 1 < p < \infty, \\ \dfrac{\pi^2}{L^2}, & si\ p = \infty. \end{cases}$$

Demostración: Primero tenemos que probar

$$\lim_{p\to\infty} \beta_p = \beta_\infty.$$

Donde

$$\beta_p = \frac{4(p-1)^{1+1/p}}{L^{2-1/p}p(2p-1)^{1/p}}\left(\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{-1/p}dx\right)^2.$$

Es trivial, que

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{-1/p}dx\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

y

$$\lim_{p\to\infty}\frac{4}{L^{2-1/p}} = \frac{4}{L^2}.$$

Por otro lado,

$$\lim_{p\to\infty}\frac{(p-1)^{1+1/p}}{p(2p-1)^{1/p}} = \lim_{p\to\infty}\frac{p-1}{p}\left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{1/p} = 1.$$

Por tanto, tenemos $\lim\limits_{p\to\infty}\beta_p = \beta_\infty$.

Para terminar la demostración tenemos que probar que

$$\lim_{p\to 1^+}\beta_p = \beta_1.$$

En efecto, ya que

$$\beta_p = \frac{4(p-1)^{1+\frac{1}{p}}}{L^{2-\frac{1}{p}}p(2p-1)^{1/p}}\left(\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{-1/p}dx\right)^2 =$$

$$= \frac{4(p-1)^{-1+\frac{1}{p}}(p-1)^2}{L^{2-\frac{1}{p}}p(2p-1)^{1/p}}\left(\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{-1/p}dx\right)^2$$

y además,

$$\lim_{p\to 1^+}\frac{4}{L^{2-\frac{1}{p}}p(2p-1)^{1/p}} = \frac{4}{L}, \quad \lim_{p\to 1^+}(p-1)^{-1+\frac{1}{p}} = 1.$$

Basta con probar

$$\lim_{p\to 1^+}(p-1)\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{-1/p}dt = 1. \tag{2.44}$$

Para ver esto, ya que
$$\operatorname{sen} t \leq t, \quad \forall\, t \in (0, \pi/2),$$
tenemos que
$$(\operatorname{sen} t)^{-1/p} \geq (t)^{-1/p}, \quad \forall\, t \in (0, \pi/2).$$
Por lo tanto:
$$(p-1)\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^{-1/p} dt \geq (p-1)\int_0^{\pi/2} (t)^{-1/p} dt = (p-1)\frac{(t)^{-\frac{1}{p}+1}}{-\frac{1}{p}+1} =$$
$$= (p-1)\frac{(\pi/2)^{-\frac{1}{p}+1}}{\frac{p-1}{p}} = p\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{p}+1}.$$
Así que,
$$\lim_{p\to 1^+} \inf (p-1)\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^{-1/p} dt \geq 1. \tag{2.45}$$
Por otro lado, como
$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1,$$
tenemos para cada $\varepsilon \in (0,1)$, existe $t_0 \in (0, \pi/2)$ tal que
$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \geq 1-\varepsilon,\, \forall\, t \in (0, t_0).$$
Por lo tanto,
$$(p-1)\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^{-1/p} dt = (p-1)\int_0^{t_0} (\operatorname{sen} t)^{-1/p} dt + (p-1)\int_{t_0}^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^{-1/p} dt$$
$$\leq (p-1)\int_0^{t_0} (1-\varepsilon)^{-1/p} t^{-1/p} dt + (p-1)\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t_0)^{-1/p} dt$$
$$= (1-\varepsilon)p(t_0)^{1-\frac{1}{p}} + (p-1)(\operatorname{sen} t_0)^{-1/p}\left(\frac{\pi}{2} - t_0\right).$$
Por tanto:
$$\lim_{p\to 1^+} \sup (p-1)\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^{-1/p} dt \leq \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \forall\, \varepsilon \in (0,1).$$
Y consecuentemente
$$\lim_{p\to 1^+} \sup (p-1)\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^{-1/p} dt \leq 1. \tag{2.46}$$
Finalmente, con (2.44) y (2.45) hemos probado
$$\lim_{p\to 1^+} \beta_p = \beta_1.$$

□

Lema 2.14 *Si* $L = 1$ *y* $1 \leq p < q < \infty$*, entonces* $\beta_p < \beta_q$*. Como una consecuencia trivial, si* L *es un número positivo arbitrario, la aplicación* $(1, \infty) \to \mathbb{R}$*,* $p \to L^{-1/p}\beta_p$ *es estrictamente creciente.*

Demostración: Ya que β_p es una función continua de p, es suficiente probar que $\beta_p < \beta_q$ cuando $1 < p < q < \infty$. Ahora, si a_p, a_q son elementos de Λ tal que

$$\beta_p = ||a_p||_p, \beta_q = ||a_q||_q,$$

entonces, usando la desigualdad de Hölder (ver anexo), tenemos

$$\int_0^L (a_q)^p \cdot 1 \leq \left(\int_0^L (a_q^p)^{q/p}\right)^{p/q} \left(\int_0^L 1^p\right)^{1/p} = \left(\int_0^L (a_q)^q\right)^{p/q}.$$

Por tanto,

$$||a_q||_p = \left(\int_0^L (a_q)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^L (a_q)^q\right)^{1/q} = ||a_q||_q,$$

y obtenemos

$$\beta_p \leq \beta_q.$$

Si $\beta_p = \beta_q$, entonces

$$\beta_p \leq ||a_q||_p \leq ||a_q||_q = ||a_p||_p = \beta_p.$$

Por tanto $||a_q||_p = ||a_q||_q$. Ya que $p < q$, deducimos que $|a_q|$ debe ser una constante positiva. Pero se deduce fácilmente que $|a_q|$ no puede ser constante.
Ahora si L es un número positivo arbitrario, entonces es trivial de la expresión explícita de β_p que la aplicación $L^{-1/p}\beta_p$ es también estrictamente creciente.

□

El siguiente resultado establece una relación natural de la constante β_p para los casos $p = 1$ y $p = \infty$, y completa el Corolario 2.8.

Corolario 2.15 *Sea* $a \in L^\infty \backslash \{0\}$*,* $0 \leq \int_0^L a(x)$*, satisfaciendo una de las siguientes condiciones:*

1. $||a^+||_1 \leq \beta_1$.
2. *Existe algún* $p \in (1, \infty)$ *tal que* $||a^+||_p < \beta_p$.
3. $||a^+||_\infty < \beta_\infty$ *o* $||a^+||_\infty = \beta_\infty$ *y* $a^+ \neq a_\infty$.

Entonces para cada $f \in L^\infty(0, L)$*, el problema de frontera (2.16) tiene una única solución.*

Capítulo 3

Otras condiciones de frontera: Caso Dirichlet.

El método variacional que hemos usado en el Capítulo 2 (Teorema 2.11), para obtener el valor explícito de la constante β_p, $1 < p < \infty$, es válido para otras condiciones de frontera.
Recordamos los dos puntos claves del problema de Neumann (2.1).

1. El conjunto de problemas frontera

$$\begin{cases} v''(x) + B|v(x)|^{\frac{2}{p-1}} v(x) = 0,\ x \in (0, L),\ B \in \mathbb{R}^+ \\ v'(0) = v'(L) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

   proporciona

$$\beta_p = \inf_{B \in \mathbb{R}^+} \inf_{v \in S_B} J_p(v), \tag{3.2}$$

   donde

$$J_p(v) = \frac{\displaystyle\int_0^L v'^2}{\left(\displaystyle\int_0^L |v|^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}$$

   y para $B \in \mathbb{R}^+$ dado, S_B denota el conjunto de todas las soluciones no triviales de (3.1).

2. Si v es una solución no trivial de (3.1) para algún $B \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$J_p(v) = \frac{4n^2 I^2 p}{L^{2-\frac{1}{p}} (p-1)^{1-\frac{1}{p}} (2p-1)^{1/p}}, \tag{3.3}$$

   donde

$$I = \frac{p-1}{p} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{-1/p} dx \tag{3.4}$$

y n es el único número natural (dependiendo de v) satisfaciendo las propiedades:

$$\begin{array}{c} x_0 \text{ es el primer cero de } v \text{ en } (0, L),\ L = 2nx_0 \\ v'(0) = v'(2x_0) = \cdots = v'(2nx_0) = 0, \\ v(x_0) = \cdots = v((2n-1)x_0) = 0, \\ v(x) \neq 0, v'(x) \neq 0,\ \forall\, x \in (jx_0, (j+1)x_0),\ 0 \leq j \leq 2n-1. \end{array} \tag{3.5}$$

Enfatizamos que el valor de $J_p(v)$ en (3.3) no depende, explícitamente, de la constante positiva B y que para obtener β_p debemos encontrar el mínimo valor de n en la expresión (3.3). Por ejemplo, para las condiciones de frontera de Neumann este valor mínimo es $n = 1$ (ver la última parte del Teorema 2.11).

Nota 3.1 *En el resto del capítulo denotaremos como β_p^N la constante β_p obtenida en el capítulo anterior para las condiciones de frontera de Neumann.*

Nos centraremos en estudiar las condiciones de frontera de tipo Dirichlet, este caso es muy similar al de Neumann. Si consideramos el problema lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(x) + a(x)u(x) = 0,\ x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0, \end{array} \right. \tag{3.6}$$

donde $a \in \Lambda^D$ y Λ^D está definido por:

$$\Lambda^D = \{a \in L^1(0, L) \text{ tal que (3.6) tiene soluciones no triviales}\}, \tag{3.7}$$

entonces, para cada p con $1 \leq p \leq \infty$, podemos definir el funcional

$$I_p : \Lambda^D \cap L^p(0, L) \to \mathbb{R}$$

dado por

$$I_p(a) = ||a^+||_p \ \text{ (misma expresión que (2.4))}\ .$$

Y de una forma similar, podemos definir la constante

$$\beta_p^D \equiv \inf_{a \in \Lambda^D \cap L^p(0,L)} I_p(a); \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{3.8}$$

Teniendo en cuenta las mismas ideas que para el problema de Neumann, puede ser fácilmente probado que

$$\beta_p^D = \beta_p^N; \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{3.9}$$

En la prueba, debemos sustituir los espacios X_p de los Teoremas 2.4, 2.6 y 2.11 por el espacio de Sobolev $H_0^1(0, L)$ y (3.5) por

$$\begin{array}{c} v(0) = v(2x_0) = \cdots = v(2nx_0) = 0, \\ v'(x_0) = \cdots = v'((2n-1)x_0) = 0, \\ v(x) \neq 0,\ v'(x) \neq 0,\ \forall\, x \in (jx_0, (j+1)x_0),\ 0 \leq j \leq 2n-1. \end{array} \tag{3.10}$$

Observación 3.2 Observamos que, al contrario que ocurre para problemas de Neumann, en los problemas de minimización asociados con condiciones de frontera de tipo Dirichlet, no necesitamos imponer ninguna restricción adicional en el espacio $H_0^1(0, L)$ (ver [14]).
Ésto es debido a que la parte lineal homogénea de (3.6)

$$u''(x) = 0,\ x \in (0, L),\ u(0) = u(L) = 0 \tag{3.11}$$

tiene sólo la solución trivial $u \equiv 0$.

Nota 3.3 *Está probado en [8] el valor de β_p con otras condiciones de frontera:*

1. ***Condiciones de frontera periódicas.*** *En este caso, tenemos el siguiente problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(t) + a(t)u(t) = 0,\ t \in (0, T), \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0, \end{array} \right. \tag{3.12}$$

donde $a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, el conjunto de funciones T-periódicas $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $a_{|[0,T]} \in L^1(0, T)$. Si definimos el conjunto

$$\Lambda^{per} = \{a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})\backslash\{0\} : \int_0^T a(t)dt \geq 0 \text{ y (3.12) tiene soluciones no triviales}\}, \tag{3.13}$$

los autovalores positivos del problema de autovalor

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(t) + \lambda u(t) = 0,\ t \in (0, T) \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{array} \right. \tag{3.14}$$

pertenecen a Λ^{per}. Por lo tanto, para cada p con $1 \leq p \leq \infty$, podemos definir la constante L_p de Lyapunov para el problema periódico, β_p^{per}, como el número real

$$\beta_p^{per} \equiv \inf_{a \in \Lambda^{per} \cap L^p(0,T)} ||a^+||_p. \tag{3.15}$$

Como en el caso de Neumann, podemos obtener una caracterización de β_p^{per} como un mínimo de un problema de minimización conveniente, donde sólo algunos subconjuntos apropiados de minimización de $H^1(0, T)$ son usados (ver [15]).

Ya que (3.14) es como, (2.1), un problema resonante, para obtener una caracterización variacional de β_p^{per} sólo necesitamos una restricción adicional del espacio $H^1(0, T)$. Esto se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.4 *Si $1 \leq p \leq \infty$ es un número dado, definimos los conjuntos X_p^{per} y los funcionales $I_p^{per} : X_p^{per} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ como*

$$X_1^{per} = \{v \in H^1(0,T) : v(0) - v(T) = 0, \max_{t\in[0,T]} v(t) + \min_{t\in[0,T]} v(t) = 0\},$$

$$X_p^{per} = \{v \in H^1(0,T) : v(0) - v(T) = 0, \int_0^T |v|^{\frac{2}{p-1}} v = 0\}, \quad si\ 1 < p < \infty,$$

$$X_\infty^{per} = \{v \in H^1(0,T) : v(0) - v(T) = 0, \int_0^T v = 0\},$$

$$I_1^{per}(v) = \frac{\int_0^T v'^2}{||v||_\infty^2}, \quad I_p^{per}(v) = \frac{\int_0^T v'^2}{\left(\int_0^T |v|^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}, \quad si\ 1 < p < \infty, \quad I_\infty^{per}(v) = \frac{\int_0^T v'^2}{\int_0^T v^2}.$$

Entonces, la constante L_p de Lyapunov β_p^{per} definida en (3.15) satisface

$$\beta_p^{per} \equiv \min_{X_p^{per}\backslash\{0\}} I_p^{per}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{3.16}$$

Y por tanto, se define la mejor constante de Lyapunov $\beta_p^{per}, 1 \leq p \leq \infty$ como:

$$\beta_p^{per} = \begin{cases} \dfrac{16}{T} & si\ p = 1, \\ \dfrac{16 I^2 p}{T^{2-1/p}(p-1)^{1-1/p}(2p-1)^{1/p}} & si\ 1 < p < \infty, \\ \dfrac{4\pi^2}{T^2} & si\ p = \infty. \end{cases}$$

2. ***Condiciones de frontera antiperiódicas.*** *En este caso, tenemos el siguiente problema*

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)u(t) = 0,\ t \in (0,T), \\ u(0) + u(T) = u'(0) + u'(T) = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

donde $a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si definimos el conjunto

$$\Lambda^{ant} = \{a \in L_T(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \ \text{(3.17) tiene soluciones no triviales}\}, \tag{3.18}$$

los autovalores positivo del problema de autovalor

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0,\ t \in (0,T), \\ u(0) + u(T) = u'(0) + u'(T) = 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

pertenecen a Λ^{ant}*. Por lo tanto, para cada* p *con* $1 \leq p \leq \infty$*, podemos definir la constante* L_p *de Lyapunov para el problema antiperiódico,* β_p^{ant}*, como el número real*

$$\beta_p^{ant} \equiv \inf_{a \in \Lambda^{ant} \cap L^p(0,T)} ||a^+||_p. \tag{3.20}$$

Una expresión explícita para la constante β_p^{ant} *depende de la función Beta de Euler (ver [17]). Como en el caso de Neumann, Dirichlet o condiciones de frontera periódicas, es posible probar una caracterización de* β_p^{ant} *como un mínimo de un problema de minimización conveniente, donde sólo algunos subconjuntos apropiados de* $H^1(0,T)$ *son usados. Ya que (3.17) es, como (3.6), un problema no resonante, es decir, la parte lineal*

$$\begin{cases} u''(t) = 0,\ t \in (0,T), \\ u(0) + u(T) = u'(0) + u'(T) = 0, \end{cases} \tag{3.21}$$

tiene sólo la solución trivial, para obtener una caracterización de β_p^{ant} *no necesitamos ninguna restricción adicional del espacio* $H^1(0,T)$*, excepto*

$$u(0) + u(T) = 0.$$

Esto se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 3.5 *Si* $1 \leq p \leq \infty$ *es un número dado, definimos los conjuntos* X_p^{ant} *y el funcional* $I_p^{ant} : X_p^{ant} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$*, como*

$$X_p^{ant} = \{v \in H^1(0,T) : v(0) + v(T) = 0\},\ 1 \leq p \leq \infty.$$

$$I_p^{ant} = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int_0^T v'^2}{||v||_\infty^2} & si\ p = 1, \\[2ex] \dfrac{\displaystyle\int_0^T v'^2}{\left(\displaystyle\int_0^T |v|^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}} & si\ 1 < p < \infty, \\[2ex] \dfrac{\displaystyle\int_0^T v'^2}{\displaystyle\int_0^T v^2} & si\ p = \infty. \end{cases}$$

Entonces, la constante L_p *de Lyapunov,* β_p^{ant} *definida en (3.20) satisface*

$$\beta_p^{ant} = \min_{X_p^{ant} \backslash \{0\}} I_p^{ant}; \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Capítulo 4

Problemas de Neumann no lineales.

Las desigualdades de Lyapunov pueden ser usadas en el estudio de problemas resonantes no lineales. Para conseguir esto, los resultados lineales son combinados con el Teorema de punto fijo de Schauder.
Nos centraremos en un problema resonante no lineal con condiciones de frontera de tipo Neumann, pero las mismas ideas y métodos pueden ser usados en otras situaciones.
Más precisamente, consideramos el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(x) + f(x, u(x)) = 0, \; x \in (0, L), \\ u'(0) = u'(L) = 0, \end{array} \right. \tag{4.1}$$

donde $f : [0, L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, u) \to f(x, u)$ es continua.
El problema lineal asociado

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(x) = 0, \; x \in (0, L), \\ u'(0) = u'(L) = 0, \end{array} \right. \tag{4.2}$$

tiene soluciones no triviales (cualquier función constante) y ésta es la razón porque llamamos a (4.1) un problema resonante.
Si (4.1) es lineal, es decir, es del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(x) + a(x)u(x) = 0, \; x \in (0, L), \\ u'(0) = u'(L) = 0 \end{array} \right. \tag{4.3}$$

y para algún entero $n \geq 0$ existe un número positivo δ tal que

$$\lambda_n + \delta \leq a(x) \leq \lambda_{n+1} - \delta \text{ en } [0, L], \tag{4.4}$$

donde λ_n es un autovalor del problema de autovalores (2.2), entonces (4.3) tiene sólo la solución trivial $u \equiv 0$ (Ver [11]). En particular, para el primer autovalor $\lambda_0 = 0$, (4.4) se convierte en:

$$\delta \leq a(x) \leq \frac{\pi^2}{L^2} - \delta, \text{ en } [0, L]. \tag{4.5}$$

Debemos observar que (4.4) no permite que la función $a(\cdot)$ alcance ningún autovalor de (2.2). Usando las desigualdades de Lyapunov, es posible que $f_u(x,u)$ en (4.1) alcance los autovalores λ_n (f_u es la derivada parcial de la función $f(x,u)$ respecto de la variable u) y es posible aportar alguna extensión del Corolario 2.15 para situaciones no lineales.
A este respecto, asumiremos a lo largo de este capítulo que se cumple la siguiente hipótesis

(H) f, f_u son continuas en $[0,L] \times \mathbb{R}$ y $0 \leq f_u(x,u)$ en $[0,L] \times \mathbb{R}$.

Entonces, la existencia de una solución de u de (4.1) implica

$$\int_0^L f(x,u(x))dx = 0. \tag{4.6}$$

Ahora, la hipótesis anterior **(H)** implica que $f(x,u)$ es creciente con respecto u.
Por lo tanto,

$$\int_0^L f(x,m)dx \leq \int_0^L f(x,u(x))dx \leq \int_0^L f(x,M)dx,$$

donde $m = \min_{[0,L]} u$ y $M = \max_{[0,L]} u$ y entonces teniendo en cuenta (4.6) tenemos

$$\int_0^L f(x,z)dx = 0, \tag{4.7}$$

para algún $z \in \mathbb{R}$. Sin embargo, condiciones **(H)** y (4.7) no son sufuciente para la existencia de soluciones de (4.1). En efecto, si $n \in \mathbb{N}$ es cualquier número natural, consideramos el problema

$$\begin{cases} u''(x) + n^2\pi^2 u(x) + \cos(n\pi x) = 0, \; x \in (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

La función $f(x,u) = n^2\pi^2 u(x) + \cos(n\pi x)$, con $f_u(x,u) = n^2\pi^2 \geq 0$, satisface **(H)** y (4.7), es decir, $\exists\, z \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^1 (n^2\pi^2 z + \cos(n\pi x))dx = 0,$$

en efecto,

$$\int_0^1 (n^2\pi^2 z + \cos(n\pi x))dx = 0 \Leftrightarrow n^2\pi^2 z + \int_0^1 \cos(n\pi x)\, dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2\pi^2 z = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Entonces aplicamos el Teorema de la alternativa de Fredholm para el problema

$$(NH) \begin{cases} u''(x) + n^2\pi^2 u(x) = -\cos(n\pi x), \; x \in (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Cuyo problema homogeneo asociado es

$$(NH)\begin{cases} u''(x) + n^2\pi^2 u(x) = 0,\ x \in (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

cuya solución viene dada por *(ver Capítulo 2)*

$$u_n = \cos(n\pi x).$$

Por tanto el problema (NH) tendrá solución si y sólo si

$$\int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(n\pi x)\,dx = 0,$$

es decir, si

$$\int_0^1 \cos^2(n\pi x)\,dx = 0,$$

lo cual no es posible, ya que $\cos^2(n\pi x) > 0$.
Por tanto, por el Teorema de la alternativa de Fredholm no hay solución de (4.8).

Si **(H)** y (4.7) son supuestas, y por ejemplo, $L = 1$ por simplicidad, se pueden dar diferentes supuestos complementarios que implican la existencia de una solución de (4.1). Por ejemplo,

(h1) $f_u(x,u) \leq \beta(x)$ en $[0,1] \times \mathbb{R}$ con $\beta \in L^\infty(0,1)$, $\beta(x) \leq \pi^2$ en $[0,1]$ y $\beta(x) < \pi^2$ en un subconjunto de $(0,1)$ de medida positiva.

Condiciones de este tipo se denominan condiciones no resonantes no uniformes con respecto al primer autovalor positivo del problema homogeneo lineal asociado. Usando métodos variacionales, está probado en [12] que **(H)**, (4.7) y **(h1)** implica la existencia de soluciones de (4.1). La restricción **(h1)** está relacionada con las desigualdades de tipo Lyapunov: el número π^2 es la mejor constante de Lyapunov, β_∞, para $L = 1$ (Teorema 2.4).

Por otra parte, en [13] se supone:

(h2) $f_u(x,u) \leq \beta(x)$ en $[0,1] \times \mathbb{R}$ con $\beta \in L^1(0,L)$ y

$$\int_0^1 \beta(x)dx \leq 4.$$

Los autores usan métodos de la teoría de Control Óptimo para probar que **(H)**, (4.7) y **(h2)** implican la existencia y unicidad de soluciones de (4.1). La restricción **(h2)** está también relacionada con las desigualdades de tipo Lyapunov: el número 4 es la mejor constante de Lyapunov, β_1, para $L = 1$ (Teorema 2.6).

Observamos que las condiciones suplementarias **(h1)** y **(h2)** se dan respectivamente en términos de $||\beta||_\infty$ y $||\beta||_1$, la norma usual en los espacios $L^\infty(0,1)$ y $L^1(0,1)$. También, es trivial que bajo las hipótesis **(H)** y (4.7), **(h1)** y **(h2)** no están relacionadas (es decir, ninguna de estas hipótesis implica la otra).

En el siguiente teorema damos condiciones suplementarias en términos de $||\beta||_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Como consecuencia, una relación natural entre **(h1)** y **(h2)** surge si se tiene en cuenta el Lema 2.13 y estudios del límite de $||\beta||_p$ para $p \to 1^+$ y $p \to \infty$.

Teorema 4.1 *Consideramos (4.1) donde se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *f y f_u son continuas en $[0, L] \times \mathbb{R}$.*
2. *$0 \leq f_u(x, u)$ en $[0, L] \times \mathbb{R}$. Además, para cada $u \in C[0, L]$ se tiene $f_u(x, u(x)) \neq 0$, c.p.t en $[0, L]$ y*
$$\int_0^L f(x, 0)dx = 0.$$
3. *Para alguna función $\beta \in L^\infty(0, L)$, tenemos $f_u(x, u) \leq \beta(x)$ en $[0, L] \times \mathbb{R}$ y β verifica alguna de las condiciones dadas en el Corolario 2.15.*

Entonces, el problema (4.1) tiene una única solución.

Demostración: La prueba consta de dos partes: existencia y unicidad de solución de (4.1). Comenzamos con la segunda parte.

Unicidad de solución: Suponemos que (4.1) tiene dos soluciones. Entonces el Teorema del valor medio y el Corolario 2.15 son usados para probar que son la misma. Sean u_1 y u_2 dos soluciones de (4.1). Entonces,

$$-(u_1 - u_2)''(x) = f(x, u_1(x)) - f(x, u_2(x)) =$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} [f(x, u_2(x) + \theta(u_1(x) - u_2(x))] \, d\theta =$$
$$\left[\int_0^1 f_u(x, u_2(x) + \theta(u_1(x) - u_2(x))d\theta\right] (u_1(x) - u_2(x)), \; x \in [0, L]. \tag{4.9}$$

Por lo tanto, la función $u = u_1 - u_2$ es una solución de un problema homogeneo de tipo (2.16)

$$\begin{cases} u''(x) + a(x)u(x) = 0, \\ u'(0) = u'(L) = 0, \end{cases}$$

donde

$$a(x) = \int_0^1 f_u(x, u_2(x) + \theta u(x))d\theta.$$

Ahora teniendo en cuenta que $a^+(x) = a(x)$ y aplicando las hipótesis del teorema tenemos:

$$\int_0^1 a(x) \, dx = \int_0^1 f_u(x, u_2(x) + \theta u(x)) \, dx \leq \int_0^1 \beta(x) \, dx \leq \beta_1.$$

Por tanto, se verifica la primera condición del Corolario 2.15 y obtenemos $u \equiv 0$.

Existencia de soluciones: La principal idea es reescribir (4.1) de una forma equivalente, tal que las soluciones de (4.1) sean los puntos fijos de un cierto operador completamente continuo, y entonces, aplicamos el Teorema de punto fijo de Schauder. Para ver esto, usamos la misma idea que en (4.8), reescribimos (4.1) como:

$$\begin{aligned} 0 = u''(x) + f(x, u(x)) &= u''(x) + f(x, u(x)) - f(x, 0) + f(x, 0) = \\ &= u''(x) + \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \left[f(x, \theta u(x)) \right] d\theta + f(x, 0) = \\ &= u''(x) + \left[\int_0^1 f_u(x, \theta u(x)) d\theta \right] u(x) + f(x, 0). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Por lo tanto, u es solución de (4.1) si y sólo si u satisface

$$\begin{cases} u''(x) + b(x, u(x))u(x) = -f(x, 0),\ x \in [0, L], \\ u'(0) = u'(L) = 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

donde la función continua $b : [0, L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida por:

$$b(x, z) = \int_0^1 f_u(x, \theta z) d\theta.$$

Por las hipótesis del teorema, se deduce que para cada función $y \in C^1([0, L], \mathbb{R})$, la ecuación lineal

$$\begin{cases} u''(x) + b(x, y(x))u(x) = -f(x, 0),\ x \in [0, L], \\ u'(0) = u'(L) = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

satisface todas las hipótesis del Corolario 2.15 y consecuentemente, (4.12) tiene una única u_y. Entonces, si $X = C^1([0, L], \mathbb{R})$ con la norma usual, es decir,

$$||y||_X = \max_{x \in [0,L]} |y(x)| + \max_{x \in [0,L]} |y'(x)|,\ \forall\, y \in X.$$

Podemos definir el operador $T : X \to X$, por

$$Ty = u_y.$$

Claramente, u es solución de (4.1) si y sólo si y es un punto fijo de T.

Por tanto, veamos que se verifica:

- T es completamente continuo (T es continuo y si $B \subset X$ es acotado, entonces $T(B)$ es relativamente compacto).
- $T(X)$ es acotado.

Entonces, el Teorema del punto fijo de Schauder asegura que T tiene un punto fijo que proporciona una solución de (4.1).

1. Veamos que $T(X)$ es acotado.

   Si $T(X)$ no es acotado, existiría una sucesión $\{y_n\} \subset X$ tal que $||u_{y_n}||_X \to \infty$.

   Además, de las hipótesis del teorema, se tiene

$$\int_0^L b^2(x, y_n(x))\, dx = \int_0^L \left(\int_0^1 f_u(x, \theta y_n)\, d\theta \right)^2 dx \leq \int_0^L \left(\int_0^1 \beta(x)\, d\theta \right)^2 dx =$$

$$= \int_0^L \beta^2(x)\, dx \leq L||\beta||^2_{L^\infty(0,L)} < C.$$

   Por tanto, por el Teorema 5.15 se verifica que para una subsucesión:

$$\int_0^L b(x, y_n(x))\varphi\, dx \longrightarrow \int_0^L \beta_0(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in L^2(0, L),$$

   es decir, $\{b(\cdot, y_n(\cdot))\}$ converge débilmente en $L^2(0, L)$ a la función β_0 satisfaciendo

$$0 \leq \beta_0(x) \leq \beta(x), \text{c.p.d en } [0, L].$$

   Además, cada u_{y_n} satisface

$$\begin{cases} u''_{y_n}(x) + b(x, y_n(x))u_{y_n}(x) = -f(x, 0),\ x \in [0, L], \\ u'_{y_n}(0) = u'_{y_n}(L) = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

   Ya que la inyección $H^1(0, L) \subset C[0, L]$ es compacta (en $C[0, L]$ tomamos la norma uniforme), si

$$z_n = \frac{u_{y_n}}{||u_{y_n}||_X},$$

   tenemos $||z_n||_X = 1$, y por tanto, z_n acotada en $C^1[0, L]$. Y debido a la inyección compacta de $C^1[0, L] \subset C[0, L]$ tenemos que $z_n \to z_0$ uniformemente en $C[0, L]$, donde z_0 satisface $||z_0||_X = 1$.

   Por otro lado, usando (4.13), $\forall\, \varphi \in H^1(0, L)$ se verifica

$$-\int_0^L u'_{y_n}\varphi' + \int_0^L b(x, y_n(x))u_{y_n}\varphi = -\int_0^L f(x, 0)\varphi.$$

   Y por tanto:

$$-\int_0^L z'_n\varphi' + \int_0^L b(x, y_n(x))z_n\varphi = -\int_0^L \frac{f(x, 0)}{||u_{y_n}||_X}\varphi.$$

Y si tomamos límite tenemos:

$$-\int_0^L z_0'\varphi' + \int_0^L \beta_0 z_0 \varphi = 0,$$

es decir, z_0 satisface

$$\begin{cases} z_0'' + \beta_0(x) z_0(x) = 0, \; x \in [0, L], \\ z_0'(0) = z_0'(L) = 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Y tenemos $z \equiv 0$, lo cual es una contradicción ya que $||z_0||_X = 1$.

2. Veamos que T es completamente continuo.

   Para ello, veamos primero que T es continuo. Tenemos que probar que si $y_n \to y_0$ entonces $T(y_n) \to T(y_0)$. Para ver esto, si $\{y_n\} \to y_0$ en el espacio X y u_{y_n} no converge a u_{y_0}, pasando a una subsucesión si es necesario, existe una constante $\delta > 0$ tal que $u_{y_n} \notin B_X(u_{y_0}; \delta)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $B_X(u_{y_0}; \delta)$ denota la bola abierta en X de centro u_{y_0} y radio δ.

   Además, teniendo en cuenta (4.12) tenemos que u_{y_n} es acotada en $C^2[0, L]$. Y debido a la inyección compacta de $C^2[0, L] \subset C^1[0, L] \subset C^0[0, L]$, tenemos que $u_{y_n} \to u_0$ en $C[0, L]$.

   Pero por el problema (4.12) tenemos:

$$-\int_0^L u_n'\varphi' + \int_0^L b(x, y_n(x))\varphi = -\int_0^L f(x, 0)\varphi,$$

   donde tomando límite tenemos

$$-\int_0^L u_0'\varphi' + \int_0^L b(x, y_0(x))\varphi = -\int_0^L f(x, 0)\varphi.$$

   Y por tanto, se verifica

$$u_0'' + b(x, y_0(x)) u_0 = -f(x, 0).$$

   Y tendríamos, por unicidad del problema (4.12)

$$u_0 = u_{y_0},$$

   lo cual es una contradicción.

   Finalmente, veamos que si $B \subset X$ es acotado, entonces $T(B)$ es relativamente compacto en X. Tenemos que probar que si $\{y_n\}$ acotado entonces $T(y_n)$ es relativamente compacto. Pero si $T(X)$ es acotado, entonces y_n es acotado y por tanto, $T(y_n) = u_{y_n}$ también es acotado.

Por otro lado, teniendo en cuenta (4.13), tenemos que u''_{y_n} es acotado. Y por tanto, debido a la inyección compacta de $C^2[0,L] \subset C^1[0,L]$, tenemos que $\{u_{y_n}\}$ es relativamente compacto en X.

$\square$

Observación 4.2 Si $f(x,u) = a(x)u$, la segunda hipótesis en el teorema anterior llega a ser $0 \leq a(x)$ y $a(x) \neq 0,$ c.p.d en $[0,L]$.

Observación 4.3 Ya que el cambio de variables $u(x) = v(x) + z$, $z \in \mathbb{R}$, transforma (4.1) en el problema

$$\begin{cases} v''(x) + f(x, v(x) + z) = 0, \; x \in (0,L), \\ v'(0) = v'(L) = 0, \end{cases}$$

la condición

$$\int_0^1 f(x,0)dx = 0$$

en el teorema anterior puede ser sustituida por

$$\int_0^L f(x,z)dx = 0, \;\text{ para algún } z \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 5

Anexo

5.1. Espacios L^p.

Sea Ω un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$.

Definición 5.1 *Para $1 \leq p < \infty$, se define*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}.$$

Este espacio es de Banach con la norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Definición 5.2 *Se define*

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \exists\, C \geq 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ e.c.t } \Omega \}.$$

Y su norma asociada

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \text{mín}\{ C \geq 0 : |u(x)| \leq C \text{ e.c.t } \Omega \}.$$

Observación 5.3 En realidad los elementos de $L^p(\Omega)$ no son funciones sino clases de funciones, ya que funciones que son iguales salvo en un conjunto de medida nula se consideran la misma.

Definición 5.4 (Desigualdad de Hölder) *Sean f, g funciones integrables en $[a, b]$, se verifica*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q},$$

Donde p y q son dos números reales positivos que verifican

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Proposición 5.5 *Supongamos* Ω *de medida finita. Si* $f \in L^p(\Omega)$*, entonces* $f \in L^q(\Omega)$ *para todo* $q \leq p$ *y se cumple*

$$||f||_{L^q(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Definición 5.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Sean* f, g *funciones integrables en* $[a, b]$*. La desigualdad establece que*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right).$$

5.2. Espacio de Sobolev $W^{1,p}$.

Definición 5.7 *Sea* $I = (a, b)$ *un intervalo acotado o no y sea* $p \in \mathbb{R}$ *con* $1 \leq p \leq \infty$*.*
El espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ *está definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I);\ \exists\, g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall\, \varphi \in C^1(I) \right\}.$$

Denotamos $H^1(I) = W^{1,2}(I)$*.*

Teorema 5.8 *Existe una constante* C*(dependiendo sólo de* $|I| \leq \infty$*) tal que*

$$||u||_{L^\infty(I)} \leq C||u||_{W^{1,p}(I)} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(I),\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty.$$

Dicho de otro modo $W^{1,p} \subset L^\infty(I)$ *con inyección continua para todo* $1 \leq p \leq \infty$*.*
Además cuando I *está acotado:*

1. *La inyección* $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ *es compacta para* $1 < p \leq \infty$*.*

2. *La inyección* $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ *es compacta para* $1 \leq q < \infty$*.*

Definición 5.9 *Dado* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto, se define el espacio de Sobolev* $H^1(\Omega)$ *por*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \partial_i u \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq N \right\},$$

donde las derivadas parciales de u *están tomadas en el sentido de las distribuciones. El espacio* $H^1(\Omega)$ *se dota del producto escalar*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uvdx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_i u \partial_i v dx = \int_\Omega uvdx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx,\ \forall\, u, v \in H^1(\Omega),$$

y por tanto de la norma correspondiente

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx| \right)^{1/2} = \sqrt{||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)^N}}.$$

5.3. Resultados de Análisis Funcional.

Definición 5.10 (Integración por partes) *Sea Ω un abierto acotado de clase C^1 y $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Se tiene:*

$$\int_{\Omega} \partial_i uv dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i ds(x) - \int_{\Omega} u\partial_i v \, dx,$$

donde ν_i denota la componente i-ésima de ν.

Definición 5.11 *Sea Ω un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ con medida positiva. Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{K}$ está esencialmente acotada cuando existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para casi todo $t \in \Omega$.*

$$||f||_{\infty} = ess \sup |f| = \min\{M \geq 0 : |f| \leq M \;\; cpd \;\}.$$

Definición 5.12 *Una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice semicontinua inferiormente si $\forall\, x \in \Omega$, se tiene:*

$$\liminf_{y \to x} \varphi(y) \geq \varphi(x).$$

Definición 5.13 *Sea X e.n, una sucesión $\{x_n\} \subset X$ se dice que converge débilmente a un punto $x \in X$ y se escribe $x_n \rightharpoonup x$ si y sólo si*

$$\langle x', x_n \rangle \to \langle x', x \rangle, \; \forall\, x' \in X'.$$

Definición 5.14 *Sea $I : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice débilmente inferior semicontinua en Ω si*

$$\liminf_{v \to \infty} I(u_v) \geq I(u) \;\; cuando \;\; u_v \rightharpoonup u \;\; en \;\; \Omega$$

Teorema 5.15 *Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea (x_n) una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge débilmente.*

Teorema 5.16 (Multiplicadores de Lagrange) *Sean X espacio de Banach, $J, F \in C^1(X, \mathbb{R})$ y $x_0 \in X$ un extremo relativo de J restringido al conjunto:*

$$M = \{x \in X : F(x) = F(x_0)\}.$$

Entonces si $F'(x_0) \neq 0$, $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(x_0)v + \lambda F'(x_0)v = 0, \; \forall\, v \in X.$$

λ es llamado multiplicador de Lagrange.

Teorema 5.17 (Punto fijo de Schauder) *Sea X espacio de Banach y $T : X \to X$ un operador completamente continuo y acotado, entonces existe un único punto fijo del operador T.*

Bibliografía

[1] Coddington, E.A. Levinson, N.: *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill, New York (1955).

[2] Hale, J.K.: *Ordinary Differential Equations.* Wiley-Interscience (Wiley), New York (1969).

[3] Lyapunov, M.A.: *Problème général de la stabilité du mouvement.* Ann. Fac. Sci. Univ. Tolouse Sci. Math. Sci. Phys. 9, 203-474 (1907).

[4] Magnus, W. Winkler, S.: *Hill's Equation.* Dover, New York (1979).

[5] Borg, G.: *On a Lyapunov criterion of stability.* Am. J. Math. 71, 67-70 (1949).

[6] Pinasco, J.P.: *Lyapunov-Type Inequalities. With Applications to Eigenvalue Problems.* Springer Briefs in Mathematics. Springer, New York (2013).

[7] Hartman, P.: *Ordinary Differential Equations.* Wiley, New York (1964).

[8] Cañada, A., Montero, J.A. Villegas, S.: *Lyapunov type inequalities and Neumann boundary value problems at resonance.* Math. Inequal. Appl. 8, 459-475 (2005).

[9] Courant, R., Hilbert, D.: *Methods of Mathematical Physics.* Wiley Interscience, New York (1962).

[10] Brezis, H,: *Analyse Fonctionnelle.* Masson, Paris (1983).

[11] Landesman, E.M. Lazer, A.C.: *Linear eigenvalues and a nonlinear boundary value problem.* Pac. J. Math. 33, 311-328 (1970).

[12] Mawhin, J. Ward, J.R. Willem, M.: *Variational methods and semilinear elliptic equations.* Arch. Ration. Mech. Anal. 95, 269-277 (1986).

[13] Huaizhong, W. Yong, L.: *Neumann boundary value problems for second-order ordinary differential equations across resonance.* SIAM J. Control Optim. 33, 1312-1325 (1995).

[14] Talenti, G.: *Best constant in Sobolev inequality.* Ann. Mat. Pura Appl. 110, 353-372 (1976).

[15] Cañada, A. Villegas, S.: *Stability, resonance and Lyapunov inequalities for periodic conservative systems.* Nonlinear Anal. 74, 1913-1925 (2011).

[16] Cañada, A. Villegas, S.: *A Variational Approach to Lyapunov Type Inequalities From ODEs to PDEs.* Springe, Briefs in Mathematics, (2015).

[17] Zhang, M.: *Certain classes of potentials for p-Laplacian to be non-degenerate.* Math. Nachr. 279, 1823-1836 (2005).

[18] Cañada, A. Villegas, S.: *An applied mathematical excursion through Lyapunov inequalities, classical analysis and differential equations.* Sema Journal. n^{o}57, 69-106, (2012).