FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

TRABAJO FIN DE GRADO

Las ecuaciones de Pfaff

Realizado por:
Andrea Antón Díaz

Dirigido por:
María Ángeles Rodríguez Bellido

Sevilla, Junio 2017

Índice general

Abstract

Pfaff equations are a type of differential equations that appear in some Physical and Geometric problems.

In the present project a detailed study of the Pfaff equations is carried out with the aim of describing and solving these equations whenever possible. Therefore, the conditions both necessary and sufficient, for the existence of solution are obtained, as well as the explanation of different resolution methods. On the other hand, it shows some of its applications and analyzes the relation that it keeps with the differential 1-forms.

Moreover, in order to provide a better understanding of the content several specific examples are also provided.

Introducción

En 1909 Constantin Carathéodory, un hábil matemático de origen griego, publicó un trascendental trabajo en el que daba un enfoque axiomático de la Termodinámica y que prácticamente sustentaba dicho campo sobre una nueva base. Su método permitió una rigurosa formulación matemática de las consecuencias de la segunda ley (o postulado) de la termodinámica. Para Carathéodory, la termodinámica se construye como una especie de extensión de las matemáticas. De hecho, los argumentos en la axiomatización de Carathéodory derivan del comportamiento geométrico de una cierta ecuación diferencial, conocida como Pfaffiana, y sus soluciones. Estas ecuaciones fueron estudiadas por primera vez por el matemático alemán J.F. Pfaff (1765-1825) quien expuso el primer método general para integrar ecuaciones en derivadas parciales de primer orden entre los años 1814 y 1815.

Las relaciones entre las variables termodinámicas suelen presentarse como formas diferenciales lineales del tipo

$$df = \sum_{i=1}^{n} F_i dx_i,$$

llamadas 1-formas, donde el subíndice i va desde 1 hasta n, y las F_i son funciones de las variables independientes x_i. Cuando $df = 0$ tenemos las llamadas ecuaciones diferenciales de Pfaff.

El objetivo del presente trabajo es llevar a cabo un estudio exhaustivo de las ecuaciones de Pfaff.

0.1. Estructura de la memoria

La finalidad de los Capítulos 1 y 2 es describir y resolver las ecuaciones de Pfaff, siempre que sea posible. En el Capítulo 1 veremos que dichas ecuaciones se dividen en dos casos:

1. Ecuaciones de Pfaff en dos variables, siempre son integrables.

2. Ecuaciones de Pfaff en tres o más variables.

Para el último caso se obtendrá la condición tanto necesaria como suficiente de integrabilidad y se expondrán sus diversos métodos de resolución en el Capítulo 2.

Posteriormente, hemos considerado conveniente dedicar el Capítulo 3 a analizar la relación que existe entre las formas diferenciales Pfaffianas y las 1-formas diferenciales, dado que una gran parte de la bibliografía consultada para el desarrollo de este trabajo hace referencia a dichas expresiones.

En el Capítulo 4 nos centraremos en la axiomatización de Carathéodory. El objetivo de este capítulo es, sin entrar en muchos detalles, mostrar la importancia de las ecuaciones de Pfaff en dicho tema, así como la repercusión que tuvo en el mundo de la termodinámica.

Por otro lado, las ecuaciones de Pfaff también aparecen en varios problemas de la Geometría, por ello, en el Capítulo 5, estudiaremos algunas de sus aplicaciones geométricas.

Finalmente, en el Capítulo 6, se explicará el método de Lagrange-Charpit para la resolución de una Ecuación en Derivadas Parciales de Primer Orden. Aunque nuestro trabajo no se basa en dichas ecuaciones hemos considerado necesario introducir este resultado debido al papel fundamental que desempeñan las ecuaciones de Pfaff en dicho método.

Todo el estudio irá acompañado de varios ejemplos específicos para facilitar una mejor compresión del contenido.

Capítulo 1

Ecuaciones de Pfaff

Se denomina ecuación de Pfaff (o ecuación en diferenciales totales), a la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_i = 0, \tag{1.1}$$

siendo F_i, para $1 \leq i \leq n$ entero, n funciones dadas, definidas en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con valores en $\mathbb{R}$. Estas funciones dependen de algunas o de todas las variables independientes $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Existe una gran diferencia entre las ecuaciones de Pfaff en dos variables y las de un mayor número de variables, así pues debemos considerarlas como dos tipos de ecuaciones diferentes y realizar su estudio por separado.

1.1. Ecuación de Pfaff en dos variables

Antes de comenzar con la explicación de la ecuación de Pfaff en dos variables es necesario recordar dos tipos de ecuaciones estudiadas en la asignatura *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* que se imparte en el segundo cuatrimestre del segundo curso del Grado en Matemáticas. Puede verse en [3].

Nota 1.1.1 *En algunos casos, usaremos la expresión EDO como sinónimo de Ecuación Diferencial Ordinaria.*

1.1.1. Ecuación Diferencial Ordinaria exacta

Consideremos una Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden en la forma explícita de la forma

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

con M y N funciones continuas definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y $N(x,y) \neq 0$, para todo $(x,y) \subset \Omega$.

Dicha ecuación pueder ser escrita de manera equivalente, como

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0. \tag{1.2}$$

Se dice que la EDO (1.2) es exacta si existe una función $\Phi \in C^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi_x(x,y) = M(x,y), \quad \text{y} \quad \Phi_y(x,y) = N(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{1.3}$$

Si (1.2) es exacta, e $y(x)$ es una solución de esta ecuación en un intervalo I, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Phi(x,y(x)) &= \Phi_x(x,y(x)) + \Phi_y(x,y(x))y'(x)\\ &= M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0, \quad \forall x \in I,\end{aligned}$$

y por tanto la expresión $\Phi(x,y(x))$ se mantiene constante en todo I. Es decir, la expresión

$$\Phi(x,y(x)) = C, \quad \forall x \in I,$$

con C constante, es la **integral general** de (1.2).

Las dos cuestiones que se plantean son, en primer lugar, cómo reconocer si (1.2) es exacta, y en segundo lugar, en el supuesto de que (1.2) lo sea, cómo hallar $\Phi(x,y) = 0$ satisfaciendo (1.3).

Supongamos que M y N son funciones en $C^1(\Omega)$. El teorema de Schwarz (Teorema A.1.1 del Apéndice A.1) establece que si las derivadas parciales cruzadas existen y son continuas, entonces son iguales, de modo que $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$. Así pues, se deduce que una condición necesaria para la existencia de Φ es que se sastifaga la relación

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{1.4}$$

De hecho, y con la condición de regularidad de M y N antes supuesta, si además Ω es un abierto simplemente conexo, entonces la condición (1.4) es también suficiente para la exitencia de $\Phi(x,y)$ satisfaciendo (1.3). Nosotros nos vamos a contentar con comprobar esta última afirmación en el caso en que Ω es un "rectángulo"de la forma

$$\Omega = (a,b) \times (c,d), \quad -\infty \le a < b \le +\infty, \quad -\infty \le c < d \le +\infty, \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{1.5}$$

En tal caso, la existencia de Φ puede ser demostrada mediante integración por caminos paralelos a los ejes de coordenadas. En concreto, supongamos Ω definido por (1.5), M y N en $C^1(\Omega)$ satisfaciendo (1.4). Fijemos un punto $(x_0,y_0) \in \Omega$, y definamos

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} N(x,s)ds, \quad \forall (x,y) \in \Omega, \tag{1.6}$$

considerando como primer camino a

$$\begin{cases} x = s, \; s \in [x_0, x] \\ y = y_0, \end{cases}$$

y como segundo

$$\begin{cases} x = x \\ y = s, \ s \in [y_0, y]. \end{cases}$$

Es inmediato que Φ está bien definida y pertenece a $C^2(\Omega)$. Además, es inmediato que $\Phi_y(x, y) = N(x, y)$ en todo punto $(x, y) \in \Omega$. Finalmente, derivando respecto de x en (1.6), y teniendo en cuenta (1.4),

$$\begin{aligned} \Phi_x(x, y) &= M(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} N_x(x, s)ds = M(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} M_s(x, s)ds \\ &= M(x, y_0) + M(x, y) - M(x, y_0) = M(x, y), \end{aligned}$$

en todo punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. En consecuencia, la función definida por (1.6) satisface (1.3).

En la práctica, para hallar Φ, supuesta satisfecha la condición (1.4), se puede proceder como sigue. En primer lugar, como queremos que se satisfaga $\Phi_x(x, y) = M(x, y)$, tomaremos

$$\Phi(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y),$$

con $\varphi(y)$ función de la variable y por determinar. Para hallar dicha función, imponemos la condición $\Phi_y(x, y) = N(x, y)$, obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + \varphi'(y) = N(x, y),$$

ecuación de la que hallar $\varphi(y)$.

Naturalmente, para hallar Φ, también se puede proceder como precedentemente, pero intercambiando los papeles de x e y, es decir imponiendo primero la condición $\Phi_y(x, y) = N(x, y)$, y después la condición $\Phi_x(x, y) = M(x, y)$.

Ejemplo 1.1.1 *Resolver*

$$3y + e^x + (3x + cos\, y)y' = 0. \tag{1.7}$$

Resolución:

Si ponemos la ecuación en la forma $Pdx + Qdy = 0$ con $P(x, y) = 3y + e^x$ y $Q(x, y) = 3x + cos\, y$, es claro que $P_y(x, y) = 3 = Q_x(x, y)$, luego la EDO (1.7) es exacta.

Para hallar $\Phi(x, y)$ imponemos $\Phi_x(x, y) = 3y + e^x$, lo que nos lleva a

$$\Phi(x, y) = \int (3y + e^x)dx + \varphi(y) = 3yx + e^x + \varphi(y).$$

Ahora, para determinar $\varphi(y)$, imponemos $\Phi_y(x, y) = 3x + cos\, y$, y obtenemos

$$3x + \varphi'(y) = 3x + cos\, y,$$

es decir, $\varphi'(y) = cos\, y$, con lo que

$$\varphi(y) = sen\, y + c_1.$$

En consecuencia, la integral general de (1.7) viene dada por

$$\Phi(x, y) = 3xy + e^x + sen\, y = C,$$

con C constante arbitraria. ■

1.1.2. Ecuación Diferencial Ordinaria reducible a exacta

Consideremos, ahora, que la ecuación

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \tag{1.8}$$

no es exacta.

Definición 1.1.1 (Factor Integrante) *Se dice que $\mu = \mu(x, y)$ es un factor integrante en Ω de (1.8), si $\mu \in C^1, \mu(x, y) \neq 0$ en todo punto $(x, y) \in \Omega$, y la EDO*

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)y' = 0, \tag{1.9}$$

es exacta.

Obsérvese que, gracias a la condición $\mu(x, y) \neq 0$, (1.8) y (1.9) poseen las mismas soluciones. En consecuencia, si conocemos un factor integrante $\mu(x, y)$, y hallamos $\Phi(x, y)$ tal que

$$\Phi_x(x, y) = \mu(x, y)M(x, y), \quad \text{y} \quad \Phi_y(x, y) = \mu(x, y)N(x, y),$$

entonces $\Phi(x, y) = C$ es la integral general de (1.8). Por ello, si existe un factor integrante para (1.8), diremos que ésta es una EDO reducible a exacta.

De las consideraciones del caso de una EDO exacta, sabemos que la condición necesaria y suficiente para que exista un factor integrante $\mu(x, y)$, es que se sastifaga

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)N(x, y)), \quad \forall(x, y) \in \Omega, \tag{1.10}$$

es decir,

$$N(x, y)\mu_x(x, y) - M(x, y)\mu_y(x, y) + [N_x(x, y) - M_y(x, y)]\mu(x, y) = 0,$$

para todo $(x, y) \in \Omega$, que es una ecuación en Derivadas Parciales de Primer Orden en la incógnita $\mu(x, y)$.

Así pues, para la búsqueda de un factor integrante, hay que encontrar $\mu \in C^1(\Omega)$ satisfaciendo (1.10). Este problema, en determinados casos particulares, puede ser llevado a resolver una EDO.

Ejemplo 1.1.2 *Resolver la EDO*

$$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0. \tag{1.11}$$

Resolución:

En este caso, $P(x, y) = 2x^2 + y$ y $Q(x, y) = x^2y - x$. Esta ecuación no es exacta ya que $P_y(x, y) = 1$ y $Q_x(x, y) = 2xy - 1$.

(a) Búsqueda del factor integrante.

Supongamos que nos planteamos encontrar un factor integrante que dependa sólamente de x, es decir, $\mu = \mu(x)$, de tal manera que se satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)(2x^2 + y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)(x^2y - x)), \tag{1.12}$$

para a continuación resolver (1.11).

Si denotamos por $\mu'(x)$ a la derivada de $\mu(x)$ respecto de x, de (1.12) obtenemos

$$\mu(x) = \mu'(x)(x^2y - x) + \mu(x)(2xy - 1),$$

es decir,

$$\mu(x)(2 - 2xy) = \mu'(x)(x^2y - x).$$

Simplificando, obtenemos

$$x\mu'(x) = -2\mu(x),$$

que es una EDO que ha de satisfacer $\mu(x)$. Evidentemente, como solución a esta última EDO se tiene $\mu(x) = x^{-2}$, y por consiguiente , dicha solución es un factor integrante para (1.11).

(b) Resolución de la EDO con factor integrante.

Ahora para resolver (1.11), hemos de hallar una función $\Phi(x, y)$ tal que

$$\Phi_x(x, y) = x^{-2}(2x^2 + y) = 2 + \frac{y}{x^2}, \quad y \quad \Phi_y(x, y) = x^{-2}(2x^2y - x) = 2y - \frac{1}{x}.$$

Integrando la primera de las ecuaciones, obtenemos

$$\Phi(x, y) = 2x - \frac{y}{x} + \varphi(y),$$

con lo que de la segunda igualdad se tiene

$$2y - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y),$$

ecuación que simplificada nos lleva a

$$\varphi'(y) = 2y.$$

Por consiguiente, podemos tomar $\varphi(y) = y^2 + c_1$, y escribir

$$\Phi(x, y) = 2x - \frac{y}{x} + y^2 = C,$$

con C constante arbitraria, como integral general de (1.11). ■

Observación 1.1.1 *De manera análoga se pueden buscar factores integrantes de la forma*

$$\mu(y),\ \mu(x \pm y),\ \mu(x^2 \pm y^2),\ \mu(xy),\ \mu\left(\frac{y}{x}\right) \text{ etc.}$$

1.1.3. Ecuación de Pfaff 2-dimensional

Llamamos ecuación de Pfaff en dos variables a la ecuación

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

la cual puede ser escrita como una EDO en forma explícita

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.13}$$

si tomamos $f(x, y) = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$. Ahora $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones conocidas de x e y, y así $f(x, y)$ se definida únicamente en cada punto del plano XY, en el cual las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ están definidas.

Supongamos que P y Q son funciones en $C^1(\Omega)$, y $Q(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$, verificando la condición (1.4) para $M = P$, $N = Q$. Entonces, en tal caso (1.13) puede ser interpretada como una Ecuación Diferencial Ordinaria exacta con solución

$$\Phi(x, y) = C,$$

donde C es una constante arbitraria.

Por otro lado, si (1.13) no es exacta, siempre es posible derivar su solución reduciendo ésta a una EDO exacta :

Teorema 1.1.1 *Una ecuación de Pfaff en dos variables posee siempre un factor integrante.*

Demostración. Se trata de probar que siempre es posible econtrar un factor escalar $\mu(x, y, z)$ tal que se satisfaga la relación

$$Q(x, y)\mu_x(x, y) - P(x, y)\mu_y(x, y) = \mu(x, y)[P_y(x, y) - Q_x(x, y)]. \tag{1.14}$$

Para ello, haremos uso del Teorema de existencia y unicidad del Problema de Cauchy para EDPs de primer orden (ver Teorema A.2.1 del Apéndice A.2). Nuestro objetivo es demostrar que las hipótesis de dicho teorema se satisfacen para el caso donde

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ u(x_1, x_2) = \mu(x, y) \\ f_1(x_1, x_2, u) = Q(x, y) \\ f_2(x_1, x_2, u) = -P(x, y) \\ f(x_1, x_2, u) = \mu(x, y)[P_y(x, y) - Q_x(x, y)], \end{cases}$$

En primer lugar, observamos que es necesario que $P, Q \in C^2(\Omega)$ y además, consideramos $f \in C^1$. Por otro lado, es evidente que $|P| + |Q| > 0$ para cada $(x, y) \in \Omega$, pues en caso contrario la ecuación (1.14) no existiría. Luego, las hipótesis ***(I)*** del Teorema A.2.1 se satisfacen.

Con respecto a las hipótesis sobre la curva dato, como en un principio la existencia del factor integrante no es única, buscaríamos una curva en C^1 no idénticamente nula que verificase las hipótesis ***(II)*** del Teorema A.2.1. De este modo, quedaría probado que la ecuación (1.14) tiene única solución local μ, y con ello se concluye la prueba. ■

1.2. Ecuación de Pfaff en tres variables

En el caso de tres variables, la ecuación (1.1) adquiere la forma

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0. \tag{1.15}$$

Observación 1.2.1 *Si consideramos los vectores* $\boldsymbol{X} = (P, Q, R)$ *y* $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$*, la ecuación (1.15) puede ser escrita en notación vectorial como*

$$\boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

Observación 1.2.2 *La ecuación (1.15) admite una interpretación geométrica sencilla. Dado un campo vectorial* $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ *y* $\boldsymbol{t} = (dx, dy, dz)$ *una dirección del plano tangente a la superficie* $z = z(x, y)$ *en un punto cualquiera, la ecuación de Pfaff* $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t} = 0$ *establece que el campo tiene la dirección del vector normal a la superficie en dicho punto, por tanto la solución de la ecuación serán superficies ortogonales al campo vectorial dado.*

La siguiente cuestión que trataremos será la integrabilidad de la ecuación (1.15). No es cierto que todas las ecuaciones de esta forma poseen primitivas. Sin embargo, al igual que en el caso de la ecuación de Pfaff en dos variables, si existe una función $\mu(x, y, z)$ de manera que $\mu(Pdx + Qdy + Rdz)$ es una diferencial exacta $d\phi$, entonces se dice que $\mu(x, y, z)$ es un factor integrante de (1.15) y, por tanto, (1.15) es integrable con primitiva ϕ. No obstante, daremos un criterio que nos permita determinar si dicha ecuación es o no integrable. Previamente, hemos de introducir los siguientes resultados:

Teorema 1.2.1 *Una condición necesaria y suficiente para que entre dos funciones, $u(x,y)$ y $v(x,y)$, exista una relación $F(u,v)=0$, no involucrando ni a x ni a y explícitamente, es que*

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

Demostración. La hacemos en dos etapas.

(a) Condición necesaria.

Dado que la relación

$$F(u,v)=0 \tag{1.16}$$

es una identidad en x e y, pues $u=u(x,y)$ y $v=v(x,y)$, podemos considerar

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

como resultado de diferenciar con respecto x, y

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

como resultado de diferenciar con respecto y.

Eliminando $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ de estas ecuaciones, obtenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,$$

es decir,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)=0.$$

Puesto que la relación (1.16) depende tanto de u como v, se deduce que $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ no es idénticamente nula, y por tanto

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0. \tag{1.17}$$

(b) Condición suficiente.

Podemos eliminar la variable y de la ecuaciones

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y) \tag{1.18}$$

para obtener la relación

$$F(u,v,x)=0.$$

De esta relación se sigue:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

y

$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Eliminando $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ de estas ecuaciones, llegamos a que

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Si la condición (1.17) se satisface, observamos que la ecuación anterior queda

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Como la función v es una función de x e y, entonces $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ no es idénticamente nula. Por consiguiente,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

lo cual demuestra que la función F no contiene a la variable x explícitamente.

Naturalmente, para demostrar este resultado, también se puede proceder como el razonamiento anterior, pero ahora eliminando la variable x de las ecuaciones (1.18). En tal caso, se obtiene que $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$, es decir, la función F no contiene a la variable y explícitamente. ■

Teorema 1.2.2 *Si $\boldsymbol{X}$ es un vector tal que $\boldsymbol{X} \cdot rot\, \boldsymbol{X} = 0$, y μ una función arbitraria de x, y, z, entonces*

$$\mu \boldsymbol{X} \cdot rot\,(\mu \boldsymbol{X}) = 0.$$

Demostración. Consideremos el vector $\mathbf{X} = (P, Q, R)$ y μ una función arbitraria de x, y, z. Por definición de rotacional

$$\begin{aligned}\mu\mathbf{X} \cdot rot\,(\mu\mathbf{X}) = (\mu P)\left(\frac{\partial(\mu R)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z}\right) + (\mu Q)\left(\frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial x}\right)\\ + (\mu R)\left(\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}\right),\end{aligned}$$

donde la parte derecha de la igualdad puede ser escrita en la forma

$$\begin{aligned}(\mu P)\left[\mu\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + R\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z}\right] + (\mu Q)\left[\mu\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + P\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial x}\right]\\ + (\mu R)\left[\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}\right]\\ = \mu^2(P,Q,R)\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mu\mathbf{X} \cdot rot\,(\mu\mathbf{X}) = \mu^2(\mathbf{X} \cdot rot\,\mathbf{X}).$$

Finalmente, teniendo en cuenta la hipótesis $\mathbf{X} \cdot rot\,\mathbf{X} = 0$, se concluye

$$\mu\mathbf{X} \cdot rot\,(\mu\mathbf{X}) = 0.$$

■

Observación 1.2.3 *La implicación contraria de este teorema es también cierta. Basta aplicar el factor* $1/\mu$ *al vector* $\mu\boldsymbol{X}$.

Podemos ya enunciar la condición de integración de la ecuación de Pfaff $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Se tiene:

Teorema 1.2.3 *Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación de Pfaff* $\boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ *sea integrable es que*

$$\boldsymbol{X} \cdot rot\,\boldsymbol{X} = 0. \tag{1.19}$$

Demostración.

(a) Condición necesaria.

Si la ecuación

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \tag{1.20}$$

es integrable, entonces existe una relación entre las variables x, y, z del tipo

$$F(x,y,z) = C,$$

donde C es una constante. Escribiendo esto en la forma diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0,$$

observamos que debe existir una función $\mu(x,y,z)$ de tal manera que

$$\mu P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial F}{\partial y},$$

es decir, tal que

$$\mu\mathbf{X} = grad\,F,$$

siendo $\mathbf{X} = (P, Q, R)$. Evidentemente,

$$rot(\mu\mathbf{X}) = 0,$$

así pues

$$\mu\mathbf{X} \cdot rot(\mu\mathbf{X}) = 0.$$

Como consecuencia del Teorema 1.2.2 podemos concluir que

$$\mathbf{X} \cdot rot\,\mathbf{X} = 0.$$

(b) Condición suficiente.

Consideramos a la variable z como una constante. En tal caso, la ecuación (1.20) resulta

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = 0,$$

la cual, por el Teorema 1.1.1, posee una solución de la forma

$$U(x, y, z) = c_1,$$

donde la "constante" c_1 puede involucrar a z. También debe existir una función μ de manera que

$$\mu P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{1.21}$$

Llevando estas últimas igualdades a la ecuación (1.20), deducimos que ésta puede ser escrita como

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \left(\mu R - \frac{\partial U}{\partial z}\right) dz = 0,$$

la cual es equivalente a

$$dU + Kdz = 0, \tag{1.22}$$

con

$$K = \mu R - \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1.23}$$

A contiuación, tomemos que $\mathbf{X} \cdot rot\, \mathbf{X} = 0$, y del Teorema 1.2.2 se sigue que

$$\mu \mathbf{X} \cdot rot\, \mu \mathbf{X} = 0.$$

Ahora bien,

$$\mu \mathbf{X} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} + K\right) = grad\, U + (0, 0, K),$$

entonces,

$$\mu \mathbf{X} \cdot rot\, \mu \mathbf{X} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} + K\right) \cdot \left(\frac{\partial K}{\partial y}, -\frac{\partial K}{\partial x}, 0\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial x}.$$

De este modo la condición $\mathbf{X} \cdot rot\, \mathbf{X} = 0$ es equivalente a la relación

$$\frac{\partial(U, K)}{\partial(x, y)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} \end{pmatrix} = 0,$$

y, de acuerdo al Teorema 1.2.1, podemos afirmar que existe una relación entre U y K, independiente de x e y, pero no necesariamente de z. En otras palabras, K puede ser expresado como una función sólo de U y z, es decir, $K = K(U, z)$. Así pues, la ecuación (1.22) es de la forma

$$\frac{dU}{dz} + K(U, z) = 0,$$

que, por el Teorema 1.1.1, sabemos que tiene como solución

$$\Phi(U, z) = c$$

donde c es una constante arbitraria. Al sustituir U por su expresión en términos de x, y y z, la solución queda

$$F(x, y, z) = c,$$

demostrando que la ecuación original (1.20) es integrable. ■

Una vez que se ha establecido que la ecuación es integrable, sólo queda determinar un factor integrante apropiado $\mu(x, y, z)$. Antes de pasar a la discusión de los métodos de soluciones de la ecuación de Pfaff en tres variables (se estudiará en el capítulo siguiente), primero debemos demostrar un teorema sobre el factor de integración de las ecuaciones diferenciales pfaffianas, que es de cierta importancia en la termodinámica. Ya que la prueba es elemental, se indicará el resultado para una ecuación en n variables.

Teorema 1.2.4 *Dado un factor integrante de la ecuación de Pfaff*

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n = 0, \tag{1.24}$$

podemos encontrar una infinidad de ellos .

Demostración. Si $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es un factor integrante de la ecuación dada, entonces existe una función $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ satisfaciendo la propiedad

$$\mu X_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.25}$$

Por otro lado, si $\Phi(\phi)$ es una función arbitraria de ϕ, encontramos que la ecuación (1.24) puede ser escrita en la forma

$$\mu \frac{d\Phi}{d\phi}(X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n) = 0,$$

la cual, en virtud de las relaciones (1.25), es equivalente a

$$\frac{d\Phi}{d\phi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_n\right) = 0,$$

es decir, a

$$\frac{d\Phi}{d\phi} d\phi = d\Phi = 0,$$

con solución

$$\Phi(\phi) = c,$$

c constante arbitraria.

Por consiguiente, si μ es un factor integrante que genera una solución $\phi = C$ y Φ una función arbitraria de ϕ, entonces $\mu(d\Phi/d\phi)$ es también un factor integrante de la ecuación (1.24). Dado que Φ es una función arbitraria, hay infinitos factores de integración de este tipo. ■

A continuación, vamos a mostrar como el resultado teórico de la prueba del Teorema 1.2.3 puede ser utilizado para obtener la solución de una ecuación de Pfaff:

Ejemplo 1.2.1 *Verificar que la ecuación diferencial*

$$(y^2 + yz)dx + (xz + z^2)dy + (y^2 - xy)dz = 0 \tag{1.26}$$

es integrable y encontrar su primitiva.

Resolución:

En primer lugar, para verificar la integrabilidad de la ecuación dada, notemos que en este caso

$$\mathbf{X} = (y^2 + yz, xz + z^2, y^2 - xy)$$
$$rot\,\mathbf{X} = 2(-x + y - z, y, -y),$$

y fácilmente se comprueba que $\mathbf{X} \cdot rot\,\mathbf{X} = 0$. Así pues, podemos pasar al cálculo de la primitiva de (1.26).

Si tratamos a z como una constante y dividimos por $(y^2 + yz)(xz + z^2)$, la ecuación considerada se reduce a

$$\frac{dx}{z(x+z)} + \frac{dy}{y(y+z)} = 0.$$

Ahora, multiplicando por z, la diferencial anterior se simplifica a

$$\frac{dx}{x+z} + \frac{dy}{y} - \frac{dy}{y+z} = 0.$$

la cual tiene solución

$$U(x, y, z) = \frac{y(x+z)}{y+z} = c_1.$$

Por tanto, podemos considerar la existencia de una función μ, tal que $\mu P = U_x$. En tal caso,

$$\mu = \frac{1}{P}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y(y+z)}\frac{y}{y+z} = \frac{1}{(y+z)^2},$$

y, en la notación de la ecuación (1.23),

$$K = \frac{1}{(y+z)^2}y(y-x) - \frac{y}{(y+z)} + \frac{y(x+z)}{(y+z)^2} = 0.$$

Dado que $K = 0$, la ecuación (1.22) se reduce a la forma simple $dU = 0$ con solución $U = c$; es decir la solución general de (1.26) es

$$y(x+z) = c(y+z),$$

con c constante arbitraria. ■

Finalizaremos esta sección mostrando el significado geométrico de la integrabilidad, que es considerado de gran interés.

1.2.1. Interpretación geométrica de la integrabilidad

Las funciones $y = y(x), z = z(x)$ constituyen una solución de la ecuación

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1.27}$$

si éstas reducen la ecuación a una identidad en x. Geométricamente tal solución es una curva cuya dirección tangencial τ en un punto $X(x, y, z)$ es perpendicular a la recta λ, cuyo vector director es proporcional a (P, Q, R), y por lo tanto la tangente a una curva integral se encuentra en el disco σ que es perpendicular a λ y cuyo centro es (x, y, z). En otras palabras, una curva a través del punto X es una curva integral de la ecuación si su tangente en X reside en σ.

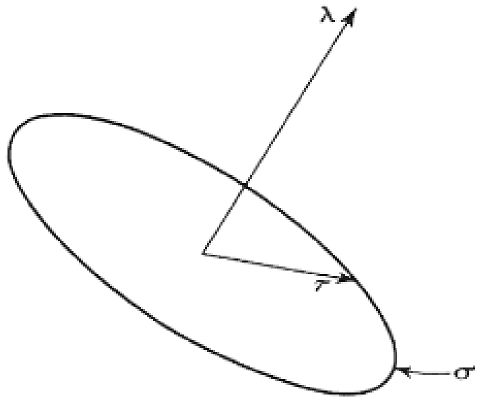

Figura 1.1: Este dibujo está tomado del libro de Ian N. Sneddon, [13].

Cuando la ecuación es integrable, las curvas integrales se encuentran en la familia uniparamétrica de superficies

$$\phi(x, y, z) = C.$$

Cualquier curva en una de estas superficies será automaticamente una curva integral de la ecuación (1.27). Por lo tanto, la condición de integrabilidad puede considerarse como la condición que el disco σ debe encajar para formar una familia uniparamétrica de superficies.

Cuando la ecuación no es integrable, podemos decir que tiene solución en el siguiente sentido. Tal caso determina un sistema de curvas uniparamétricas en una superficie S dada con ecuación

$$U(x, y, z) = C. \tag{1.28}$$

Si tomamos las ecuaciones (1.27) y (1.28) y eliminamos las variable z de éstas, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} P(x, y, \phi(x, y))dx + Q(x, y, \phi(x, y))dy + R(x, y, \phi(x, y)) \left[\dfrac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} dy \right] = 0 \\ z = \phi(x, y) \end{cases}$$

dando lugar a una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden cuya solución

$$\psi(x, y, c) = 0$$

es un sistema uniparamétrico de cilindros $C_1, C_2, \cdots$ con generadores paralelos a $0z$, cortando a la superficie S en curvas integrales $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$. Es decir, dicha solución es la proyección en XY.

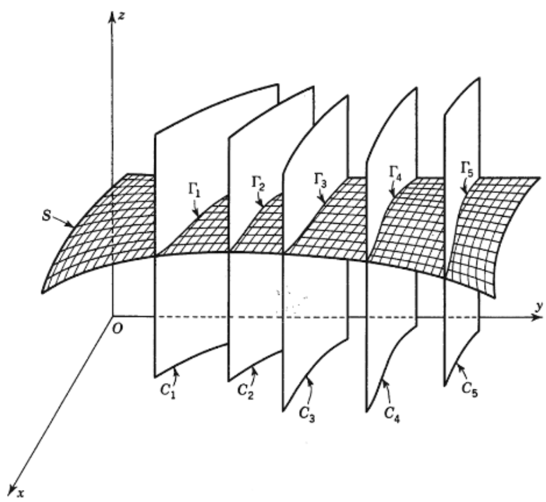

Figura 1.2: Este dibujo está tomado del libro de Ian N. Sneddon, [13].

1.3. Comentarios bibliográficos

En la redacción de este capítulo hemos seguido principalmente la referencia [13], pero también, como dijimos anteriormente, los resultados enunciados en la Sección 1.1.1 y en la Sección 1.1.2 pueden ser consultados en [3].

Por otro lado, para la prueba del Teorema 1.1.1 hemos introducido el Teorema de existencia y unicidad de Problema de Cauchy para EDPs de primer orden que cuyo enunciado, como precedentemente comentamos, se puede encontrar en el Teorema A.2.1 del Apéndice A.2. Pero además, para el lector interesado, puede verse con más detalles en [12], o bien en [7].

Capítulo 2

Métodos de resolución de las ecuaciones de Pfaff en tres variables

En el capítulo anterior hemos considerado que si la ecuación diferencial Pfaffiana

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0. \tag{2.1}$$

cumple la condición de integrabilidad $\mathbf{X} \cdot rot\, \mathbf{X} = 0$, entonces dicha ecuación admite como solución general una familia uniparamétrica de superficies de la forma $F(x, y, z) = c$, donce c es un parámetro. Además, mostramos como dicho resultado nos daba un método de resolución basado, en parte, en la búsqueda de un factor integrante, $\mu(x, y, z)$. Sin embargo, también es posible derivar dicha solución sin la necesidad de encontrar el factor escalar $\mu(x, y, z)$.

Dedicaremos esta sección a exponer los diversos métodos mediante los cuales podemos resolver la ecuación de Pfaff (2.1).

En este capitulo hemos vuelto a seguir el libro de Ian N. Sneddon [13].

2.1. Por inspección

En ocasiones, es posible obtener la solución por una simple inspección de la ecuación.

Ejemplo 2.1.1 *Resolver la ecuación*

$$(x^2z - y^3)dx + 3xy^2dy + x^3dz = 0 \tag{2.2}$$

demostrando primero que es integrable.

Resolución:

La condición de integrabilidad, $\mathbf{X} \cdot rot\, \mathbf{X} = 0$, donde

$$\mathbf{X} = (x^2z - y^3, 3xy^2, x^3)$$
$$rot\, \mathbf{X} = (0, -2x^2, 6y^2),$$

se cumple; por consiguiente, la ecuación considerada es integrable.

Observamos, que (2.2) puede ser escrita en la forma

$$x^2(zdx + xdz) - y^3dx + 3xy^2dy = 0,$$

es decir,

$$zdx + xdz - \frac{y^3}{x^2}dx + \frac{3y^2}{x}dy = 0,$$

la cual es equivalente a

$$d(xz) + d\left(\frac{y^3}{x}\right) = 0$$

y en consecuencia, la integral general de la ecuación (2.3) viene dada por

$$x^2z + y^3 = cx$$

donde c es una constante arbitraria. ■

En particular, si la ecuación es tal que $rot\ \mathbf{X} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{X}$ debe ser el gradiente de una función escalar v, $\mathbf{X} = \nabla v$, y la ecuación $\mathbf{X} \cdot d\mathbf{r} = 0$ es equivalente a

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0,$$

con primitiva

$$v(x, y, z) = C.$$

Ejemplo 2.1.2 *Resolver la ecuación*

$$yzdx + xzdy + xydz = 0 \tag{2.3}$$

demostrando primero que es integrable.

Resolución:

Para probar la integrabilidad observamos que $\mathbf{X} = (yz, xz, xy)$, de modo que $rot\,\mathbf{X} = \mathbf{0}$, y entonces $\mathbf{X} \cdot rot\,\mathbf{X} = 0$.

Ahora bien, como $rot\,\mathbf{X} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{X} = grad\,v$. Es decir,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = yz \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = xz \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = xy \tag{2.6}$$

Integrando respecto a x la primera igualdad (2.4), resulta

$$v(x, y, z) = xyz + g(y, z). \tag{2.7}$$

Derivamos este resultado respecto a y y lo igualamos con (2.5)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = xz = xz + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 0.$$

Esto implica que $\partial_y g(y,z) = 0$; por tanto, g sólo depende de z, $g(y,z) = h(z)$. Sustituyendo esta expresión en (2.7) y derivando con respecto a z, obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial z} = xy + h'(z).$$

Al igualar este resultado con (2.6), se deduce que $h'(z) = 0$, por tanto $h(z) = C$.

En definitiva

$$v(x,y,z) = xyz + C,$$

la cual es la solución buscada. ■

2.2. Variables Separables

Éste es el caso en que la ecuación de Pfaff puede se escrita en la forma

$$P(x)dx + Q(y)dy + R(z)dz = 0.$$

De esta forma, las superficies integrales de la ecuación son dadas por

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy + \int R(z)dz = C,$$

donde C es una constante.

Ejemplo 2.2.1 *Resolver la ecuación*

$$a^2y^2z^2dx + b^2z^2x^2dy + c^2x^2y^2dz = 0.$$

Resolución:

Si dividimos ambas partes de la ecuación por $x^2y^2z^2$, obtenemos

$$\frac{a^2}{x^2}dx + \frac{b^2}{y^2}dy + \frac{c^2}{z^2}dz = 0.$$

Luego, las superficies integrales son

$$\int \frac{a^2}{x^2}dx + \int \frac{b^2}{y^2}dy + \int \frac{c^2}{z^2}dz = -\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}\right) = k,$$

siendo k una constante. ■

2.3. Una variable separable

En ocasiones, puede suceder que una de las tres variables sea separable. Supongamos, por ejemplo, que z lo es, entonces la ecuación es de la forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(z)dz = 0. \tag{2.8}$$

Para esta ecuación

$$\mathbf{X} = (P(x,y), Q(x,y), R(z))$$

y un simple cálculo demuestra que

$$rot\,\mathbf{X} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Así, la condición de integrabilidad, $\mathbf{X} \cdot rot\,\mathbf{X} = 0$, implica que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

En otras palabras, si $Pdx + Qdy$ es una diferencial exacta, du, la ecuación (2.8) se reduce a

$$du + R(z)dz = 0$$

con primitiva

$$u(x,y) + \int R(z)dz = 0.$$

Ejemplo 2.3.1 *Verificar que la ecuación*

$$x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0 \tag{2.9}$$

es integrable y resolverla.

Resolución:

Si dividimos (2.9) por $(y^2 - a^2)(x^2 - z^2)$, ésta resulta

$$\frac{x}{x^2 - z^2}dx + \frac{y}{y^2 - a^2}dy - \frac{z}{x^2 - z^2}dz = 0, \tag{2.10}$$

donde la variable y queda separable. En este caso,

$$rot\,\mathbf{X} = \left(0, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, 0\right),$$

y por el argumento explicado anteriormente, la ecuación considerada es integrable si

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Comprobemos si dicha condición se verifica:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2xz}{(x^2 - z^2)^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{2zx}{(x^2 - z^2)^2}.$$

Ambas parciales coinciden, por tanto, queda demostrado que la ecuación (2.10), y en consecuencia (2.9), es integrable.

A continuación, pasemos a determinar la solución. Para ello, tomemos la ecuación (2.10) de la forma

$$\frac{xdx - zdz}{x^2 - z^2} + \frac{y}{y^2 - a^2} = 0,$$

la cual es equivalente a

$$\frac{1}{2}d\left(\log(x^2 - z^2)\right) + \frac{1}{2}d\left(\log(y^2 - a^2)\right) = 0,$$

y por tanto, integrando, obtenemos

$$(x^2 - z^2)(y^2 - a^2) = c$$

con c constante arbitraria. ∎

2.4. Ecuaciones homogéneas

Definición 2.4.1 (Función Homogénea) *Se dice que una función $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado n si verifica*

$$f(\lambda\, x, \lambda\, y, \lambda\, z) = \lambda^n f(x, y, z), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, (x, y, z) \in D.$$

La ecuación

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \tag{2.11}$$

se dice homogéna si P, Q, R son funciones homogéneas del mismo grado n.

Si una ecuación es homogenéa, podemos hacer el cambio

$$y = ux, \quad z = vx. \tag{2.12}$$

Sustituyendo (2.12) en (2.11), vemos que (2.11) se convierte en

$$P(x, ux, vx)dx + Q(x, ux, vx)(udx + xdu) + R(x, ux, vx)(xdv + vdx) = 0$$

es decir,

$$P(1, u, v)dx + Q(1, u, v)(udx + xdu) + R(1, u, v)(xdv + vdx) = 0, \tag{2.13}$$

o lo que es lo mismo:

$$(P(1, u, v) + uQ(1, u, v) + vR(1, u, v))dx + xQ(1, u, v)du + xR(1, u, v)dv = 0.$$

Si ahora escribimos

$$A(u,v) = \frac{Q(1,u,v)}{P(1,u,v) + uQ(1,u,v) + vR(1,u,v)}$$

$$B(u,v) = \frac{R(1,u,v)}{P(1,u,v) + uQ(1,u,v) + vR(1,u,v)},$$

deducimos que la ecuación (2.13) se reduce a

$$\frac{dx}{x} + A(u,v)du + B(u,v) = 0,$$

la cual puede ser resuelta por el método de una variable separable.

Ejemplo 2.4.1 *Verificar que la ecuación*

$$yz(y+z)dx + xz(x+z)dy + xy(x+y)dz = 0 \tag{2.14}$$

es integrable y encontrar su solución.

Resolución:

En primer lugar, comprobemos que se satisface la condición de integrabilidad.

$$\mathbf{X} \cdot rot\, \mathbf{X} = (yz(y+z), xz(x+z), xy(x+y)) \cdot (xy - zx, zy - xy, xz - yz) = 0,$$

luego la ecuación dada es integrable.

Es inmediato comprobar que (2.14) es homogénea. Haciendo el cambio $y = ux$, $z = vx$, obtenemos

$$uv(u+v)dx + v(1+v)(udx + xdu) + u(1+u)(vdx + xdv) = 0. \tag{2.15}$$

Si ahora tomamos,

$$A(u,v) = \frac{v(1+v)}{uv(u+v) + uv(1+v) + vu(1+u)}$$

$$B(u,v) = \frac{u(1+u)}{uv(u+v) + uv(1+v) + vu(1+u)},$$

la ecuación (2.15) se reduce a

$$\frac{dx}{x} + \frac{v(1+v)du + u(1+u)dv}{uv(u+v) + uv(1+v) + vu(1+u)} = 0,$$

es decir,

$$\frac{dx}{x} + \frac{v(1+v)du + u(1+u)dv}{2uv(1+u+v)} = 0, \tag{2.16}$$

y observamos que dicha ecuación está escrita en una variable separable. Descomponiendo los factores de du y dv en fracciones simples , vemos que (2.16) es equivalente a

$$2\frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u+v}\right) du + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{1+u+v}\right) dv = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$2\frac{dx}{x} + \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} - \frac{d(1+u+v)}{1+u+v} = 0.$$

Ahora bien, integrando, se obtiene fácilmente que

$$x^2uv = c(1+u+v),$$

con c constante arbitraria.

Finalmente, deshaciendo el cambio inicial, la solución general de (2.14) viene dada por

$$xyz = c(x+y+z). \qquad \blacksquare$$

2.5. Método de Natani

Consideremos la ecuación de Pfaff

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0. \tag{2.17}$$

En primer lugar, suponemos que una de las tres variable es constante, por ejemplo suponemos que z lo es, entonces $dz = 0$ y la ecuación anterior queda

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = 0,$$

Resolvemos esta ecuación como ecuación diferencial de primer orden y encontramos una solución de la forma

$$\phi(x,y,z) = \psi(z),$$

donde $\psi(z)$ es una función que sólo depende de z, ya que dicha variable al suponerla constante la hemos arrastrado en todo el proceso de integración y la constante indefinida de integración deberá depender de ella.

Para determinar la función $\psi(z)$ observamos que si le damos a x un valor fijo, $x = \alpha$, entonces

$$\phi(\alpha,y,z) = \psi(z). \tag{2.18}$$

Si sustituimos ahora $x = \alpha$ en (2.17), obtenemos

$$Q(\alpha,y,z)dy + R(\alpha,y,z)dz = 0, \tag{2.19}$$

y utilizando los métodos de la teoría de ecuaciones diferenciales de primer orden (métodos estudiados en la asignatura de EDO), encontramos una solución de (2.19) en la forma

$$k(y,z) = c. \tag{2.20}$$

Elimimando la variable y entre las ecuaciones (2.18) y (2.20), obtenemos una expresión para la función $\psi(z)$. Sustituyendo esta expresión en (2.18) obtenemos la solución general de la ecuación de Pfaff (2.17).

Observación 2.5.1 *A menudo, una buena elección del valor α, como 0 ó 1, hace que la solución sea obtenida de manera mas fácil, simplificando así el método.*

Ejemplo 2.5.1 *Demostrar que la ecuación*

$$z(z+y^2)dx + z(z+x^2)dy - xy(x+y)dz = 0 \tag{2.21}$$

es integrable y encontrar su primitiva.

Resolución:

La integrabilidad de esta ecuación de Pfaff es clara pues $\mathbf{X} \cdot rot\, \mathbf{X} = 0$, donde

$$\mathbf{X} = (z(z+y^2), z(z+x^2), xy(x+y))$$
$$rot\, \mathbf{X} = 2(-x^2 - xy - z, y^2 + xy + z, zx - zy).$$

Para la obtención de la solución, consideremos $y = cte$ y resolvamos la ecuación

$$z(z+y^2)dx - xy(x+y)dz = 0. \tag{2.22}$$

Para ello, dividimos (2.22) por $xz(z+y^2)(x+y)$ quedando

$$\frac{dx}{x(x+y)} - \frac{ydz}{z(z+y^2)} = 0.$$

Entonces, descomponiendo en fracciones simples y multiplicando por la constante y, obtenemos

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}\right) dx - \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+y^2}\right) dz = 0,$$

mostrando que tiene la solución

$$\frac{x(y^2+z)}{z(x+y)} = f(y). \tag{2.23}$$

Ahora consideramos $x = 1$ en (2.21) y resolvamos la ecuación

$$z(z+1)dy - y(1+y)dz = 0.$$

Divididiendo por $yz(z+1)(1+y)$ y descomponiendo en fracciones simples, la ecuación anterior se convierte en

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy - \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz = 0,$$

la cual tiene solución

$$\frac{y(z+1)}{z(y+1)} = c, \tag{2.24}$$

donde donde c es una constante arbitraria. Esta solución debe ser equivalente a (2.23) para el caso $x = 1$, es decir

$$\frac{(y^2+z)}{z(1+y)} = f(y). \tag{2.25}$$

Despejando z de (2.24) y sustituyendo esta en (2.25) se obtiene que

$$f(y) = 1 + y(c-1),$$

y en consecuencia, la solución general de (2.21) es

$$\frac{x(y^2+z)}{z(x+y)} = 1 + y(c-1). \qquad \blacksquare$$

2.6. Reducción a una Ecuación Diferencial Ordinaria

En este método, reducimos el problema de encontrar la solución de la ecuación de Pfaff (2.17), a integrar una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden en dos variables.

Si la ecuación (2.17) es integrable, entonces tiene una solución de la forma

$$f(x,y,z) = c, \tag{2.26}$$

la cual representa una familia uniparamétrica de superficies en el espacio. Estas superficies serán intersectadas en una infinidad de curvas por el plano

$$z = x + ky, \tag{2.27}$$

donde k es una constante. Las curvas formadas serán las soluciones de la EDO

$$p(x,y,k)dx + q(x,y,k)dy = 0, \tag{2.28}$$

ecuación resultante de la eliminación de z entre las ecuaciones (2.17) y (2.27).

Por tanto, si encontramos la solución de la ecuación diferencial (2.28), podemos obtener fácilmente la familia de superficies (2.26), ya que conocemos sus curvas de intersección con el plano (2.27).

Supongamos que la solución general de la ecuación (2.28) es

$$\phi(x,y,k) = a, \tag{2.29}$$

con a constante arbitraria. Entonces, dado que un punto sobre el eje del plano (2.27) está determinado por $y = 0, x = c$ (c constante), debemos tener

$$\phi(x,y,k) = \phi(c,0,k) \tag{2.30}$$

para que las curvas (2.29) pasen por dicho punto. Cuando k varía, (2.30) representa la familia de curvas a través del punto $y = 0, x = c$. Si c también varía, obtenemos, sucesivamente, la familia de curvas sobre cada punto del eje de (2.27). Es decir, si eliminamos k entre las ecuaciones (2.30) y (2.27), obtenemos las superficies integrales buscadas en la forma

$$\phi\left(x, y, \frac{z-x}{y}\right) = \phi\left(c, 0, \frac{z-x}{y}\right).$$

En definitiva, la solución de la ecuación de Pfaff (2.17) se determina una vez que conocemos la solución de la solución de la ecuación diferencial de primer orden (2.28).

Observación 2.6.1 *Si sucede que la constante k es un factor de la ecuación (2.28), entonces debemos utilizar otra familia de planos en lugar de (2.27).*

Observación 2.6.2 *Teóricamente, este método es superior al método de Natani, ya que implica la solución de una única diferencial ordinaria en lugar de dos. Sin embargo, esta ecuación es a menudo mas díficil de integrar que cualquiera de las dos ecuaciones del método de Natani.*

Ejemplo 2.6.1 *Integrar la equación*

$$(y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0. \tag{2.31}$$

Resolución:

Si tomamos $z = x + yk$, con k constante, la ecuación (2.31) es escrita de la forma

$$(2x + 2y + ky)dx + (2x + 2ky + kx)dy = 0, \tag{2.32}$$

y diviendo por $dx(2x + 2ky + kx)$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x + y(2+k)}{2ky + x(2+k)} = 0, \tag{2.33}$$

resultando ser una Ecuación Diferencial Ordinaria homogénea de primer orden en x y y. Haciendo el cambio $y = vx$, (2.33) queda

$$2\frac{dx}{x} + \frac{(2kv + (k+2))dv}{kv^2 + 1 + v(k+2)} = 0,$$

con lo que integrando, se tiene

$$x^2(1 + kv^2 + v(2+k)) = a,$$

con a constante. Por lo tanto, deshaciendo el cambio, la solución de (2.32) viene dada por la expresión

$$\phi(x, y, k) = x^2 + ky^2 + xy(2+k).$$

Inmediatamente, se sigue que

$$\phi\left(x, y, \frac{z-x}{y}\right) = xy + yz + zx$$

y

$$\phi\left(c, 0, \frac{z-x}{y}\right) = c^2.$$

Y en consecuencia, la solución general de (2.31) es

$$xy + yz + zx = C,$$

con C constante arbitraria. ■

Capítulo 3

Relación con las 1-formas

En geometría diferencial, una ***forma diferencial*** de grado 1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un campo de formas lineales, es decir, una aplicación $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales $\mathrm{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si el espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se considera la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, formada por las proyecciones $dx_j : (x_1, x_2, \cdots x_n) \to x_j$, entonces la forma diferencial ω se escribe en la forma canónica

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x}) dx_j \tag{3.1}$$

donde F_j son las funciones, definidas en Ω, que dan las coordendadas de $\omega(\mathbf{x})$ respecto a esta base. Si F_j son funciones continuas en Ω se dice que ω es continua. Esta definición es intrínseca, es decir, no depende de la base considerada en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Cuando $\omega(\mathbf{x}) = 0$ observamos que la 1-forma diferencial (3.1) es formalmente una ecuación de Pfaff en n variables. No vamos a entrar en muchos detalles, pero sí vamos a ver en este capítulo que ambos conceptos están relacionados.

Los siguientes resultados no se demostrarán, ya que se prueban en la asignatura *Integración de Funciones de Varias Variables* impartida en el segundo cuatrimestre del segundo curso del Grado en Matemáticas.

3.1. Integral curvilínea. Independencia del camino

Definición 3.1.1 (Forma diferencial exacta) *Si ω es una forma diferencial en un abierto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ y existe una función diferenciable $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que $\omega = df$ se dice que la forma diferencial ω es **exacta** y que f es una **primitiva** de ω. Si para cada $\boldsymbol{a} \in \Omega$ existe una bola abierta $B(\boldsymbol{a}, r)$ tal que $\omega|_{B(\boldsymbol{a},r)}$ es exacta se dice que ω es una forma diferencial **cerrada**.*

Por las aplicaciones físicas conviene introducir también la terminología alternativa que corresponde al lenguaje de los campos de vectores: Si la forma diferencial ω asociada a campo de vectores $\mathbf{F}$ es exacta y $\omega = df$ entonces el campo es un gradiente, $\mathbf{F} = \nabla f$, y se dice que f es una **función potencial** del campo $\mathbf{F}$. Cuando Ω es conexo, la función potencial de un campo de vectores, si existe, no es única, pero dos funciones potenciales del mismo campo difieren en una constante, de modo que una función potencial concreta se determina especificando su valor en un punto.

Observación 3.1.1 *En relación con las ecuaciones de Pfaff, cuando una 1-forma es exacta estamos diciendo que podemos hallar su solución como en el segundo caso explicado en el método de inspección (ver en Sección 2.1).*

La integral curvilínea que se estudia a continuación es la herramienta que permite obtener primitivas de formas diferenciales y caracterizar las formas diferenciales exactas.

Definición 3.1.2 (Integral curvilínea) *Sea $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x})dx_j$ una forma diferencial de grado 1 definida y continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \Omega$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n)$, es un camino regular a trozos, la integral curvilínea de ω a lo largo de $\boldsymbol{\gamma}$ se define como la integral curvilínea del campo de vectores asociados:*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \int_a^b \omega(\boldsymbol{\gamma}(t))\boldsymbol{\gamma}'(t)dt = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} F_j(\boldsymbol{\gamma}(t))\boldsymbol{\gamma}_j'(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b F_j(\boldsymbol{\gamma}(t))\gamma_j'(t)dt$$

donde $\gamma_j, 1 \leq j \leq n$, son las componentes de $\boldsymbol{\gamma}$.

Desde el punto de vista físico, la integral curvilínea de un campo de vectores $\mathbf{F}$ a lo largo de un camino regular a trozos $\boldsymbol{\gamma}$ se puede interpretar como la integral respecto al arco de las componentes de $\mathbf{F}$ según la dirección de la tangente al camino. Por ello importantes conceptos físicos, como el trabajo realizado por una fuerza al mover una partícula material a lo largo de una curva o la circulación de un campo de velocidades a lo largo de una trayectoria se expresan mediante integrales curvilíneas de campo de vectores. Esta interpretacón física es la que motiva el nombre de *trabajo elemental* del campo $\mathbf{F}$ que se suele utilizar para designar la forma diferencial $\sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x})dx_j$, o lo que es lo mismo, a una ecuación de Pfaff en n variables.

Definición 3.1.3 (Independencia del camino) *Si ω es una forma diferencial de grado 1 definida y continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se dice que la integral curvilínea $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$ no depende del camino en Ω si para cada par de caminos regulares a trozos $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$ en Ω, con el mismo origen y el mismo extremo, se verifica*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Proposición 3.1.1 *Si ω es una forma diferencial de grado 1 definida continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ son equivalentes*

(a) La integral curvilínea $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$ no depende del camino Ω.

(b) $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = 0$ para cada camino $\boldsymbol{\gamma}$ en Ω, cerrado y regular a trozos.

La siguiente proposición, que da una condición suficiente para que la integral de línea $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$ sea independiente de camino en Ω, proporciona el procedimiento estándar para conseguir una primitiva de una forma diferencial exacta.

Proposición 3.1.2 *Sea ω una forma diferencial de grado 1 definida continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si ω es exacta y f es una primitiva de ω entonces para todo camino regular a trozos $\boldsymbol{\gamma}$ en Ω de origen $\mathbf{x}$ y extremo $\mathbf{y}$, se verifica*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}).$$

Esta útima proposición pone de manifiesto que cuando se sabe que una forma diferencial ω es exacta, $\omega = df$, la integral curvilínea es la herramienta adecuada para determinar (salvo una constante) la primitiva f: Si Ω es conexo, se obtiene una primitiva f de ω fijando un punto $\boldsymbol{a} \in \Omega$ y definiendo $f(\mathbf{x}) = \int_{\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}} \omega$ donde $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}$ es cualquier camino en Ω, regular a trozos, con origen fijo en $\boldsymbol{a}$ y extremo variable $\mathbf{x} \in \Omega$. (Si Ω no es conexo se obtiene la primitiva procediendo como se acaba de indicar en cada una de las componentes conexas).

En el lenguaje de los campos de vectores, e interpretando la integral curvilínea como ***trabajo***, la proposición anterior es el principio físico que dice si un campo de fuerzas $\mathbf{F}$ admite función potencial f, entonces el trabajo realizado cuando una partícula recorre la trayectorial $\boldsymbol{\gamma}$ sometida al campo de fuerzas $\mathbf{F}$ es igual a la diferencia de potencial del campo entre los extremos de la trayectoria. En este caso el trabajo realizado no depende de la trayectoria que ha seguido la partícula; sólo depende de la posición final y posición inicial de la misma. Por esta razón se llaman ***conservativos*** a los campo de fuerzas cuya integral curvilínea no depende del camino, dependiendo sólo de los extremos del camino. En particular, no se realiza trabajo cuando la partícula recorre una trayectoria cerrada.

Con los siguientes resultados quedan caracterizados los campos conservativos como aquellos que tienen función potencial.

Teorema 3.1.1 *Si ω es una forma diferencial, de grado 1, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ son equivalentes*

(a) ω es cerrada.

(b) $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = 0$ para cada camino cerrado y regular a trozos $\boldsymbol{\gamma}$ en Ω.

Si $\omega(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j$ es una forma diferencial exacta de clase C^1, sus funciones coordenadas $F_j(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ son de clase C^1, lo que significa que f es de clase C^2 y aplicando el teorema de Young (Teorema A.3.1 del Apéndice A.3) se obtiene que para todo $i, j \in \{1, 2 \cdots n\}$ y todo $\mathbf{x} \in \Omega$ se cumple

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}.$$

Se deduce, por tanto, que una condición necesaria, (3.2), para que una forma ω de clase C^1 sea exacta es que ω sea una forma cerrada. El recíproco se cumple cuando el abierto Ω es estrellado :

Definición 3.1.4 (Abierto estrellado) *Un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ se dice que es estrellado si hay un punto $\boldsymbol{a} \in \Omega$ tal que para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ el segmento $[\boldsymbol{a}, \mathbf{x}]$ está contenido en Ω.*

Teorema 3.1.2 *Si $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x})dx_j$ es una forma diferencial de clase C^1 definida en un abierto estrellado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, son equivalentes:*

(a) ω es exacta.

(b) Para cada $i, j \in \{1, 2 \cdots n\}$ y cada $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}. \tag{3.2}$$

Como las bolas son conjuntos estrellados, aplicando el teorema anterior sobre cada bola $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ se caracterizan las formas diferenciales cerradas de clase C^1:

Corolario 3.1.1 *Si $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x})dx_j$ es una forma diferencial de clase C^1 definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, son equivalentes:*

(a) ω es cerrada.

(b) Para cada $i, j \in \{1, 2 \cdots n\}$ y cada $\mathbf{x} \in \Omega$ se cumple (3.2).

De este úlimo resultado, observamos que para el caso 2-dimensional, la condición obtenida (3.2) es la misma condición de integrabilidad que (1.4).

En el caso 3-dimensional, la condición (3.2) es equivalente a $rot\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Dicha condición es un caso particular de la condición necesaria y suficiente de integrabilidad (1.19).

En el caso en que el campo $\mathbf{F}$ sea conservativo, es decir, $\mathbf{F}$ es un gradiente, $\mathbf{F} = \nabla f$ con f una función potencial, se cumple que

$$rot\,\mathbf{F} = rot\,(\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Por tanto, el Corolario 3.1.1 nos dice que en este caso ω es una 1-forma diferencial cerrada, y por tanto integrable. Es decir, la condición (3.2) caracteriza las 1-formas que provienen de campos conservativos.

3.2. Teorema de Stokes. Teorema de Green

Los teoremas de Stokes y Green permiten calcular integrales curvilíneas de un campo $\mathbf{F}$, con

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \quad \text{en 3D}$$

ó

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad \text{en 2D},$$

indirectamente a través de una integral de superficie (que definiremos más adelante). Observemos que la integral curvilínea se puede definir como

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \mathbf{F}\, d\mathbf{S}$$

donde ω es una 1-forma diferencial ó ecuación de Pfaff.

Definición 3.2.1 (Integral de Superficie) *Se define la integral de superficie de dicho campo a la integral de superficie de la función escalar que se obtiene al multiplicar el campo $\boldsymbol{F}$ por el vector unitario normal exterior a la superficie.*

Una redacción de dichos teoremas sería la siguiente:

Teorema 3.2.1 (Stokes) *Dado un campo $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, una superficie S y su frontera γ orientadas en sentido positivo. Entonces,*

$$\iint_S rot(\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_\gamma \omega.$$

Observación 3.2.1 *La igualdad del Teorema de Stokes puede escribirse como*

$$\int_\gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint_S \left(\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}\right) dzdx.$$

Si ω es una 1-forma exacta, entonces $\int_\gamma \omega = 0$, y el Teorema 3.1.1 implica que $rot\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, entonces $\iint_S rot(\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$, comprobándose el teorema de Stokes.

Como caso particular del Teorema de Stokes se obtiene el Teorema de Green-Riemann:

Teorema 3.2.2 (Green-Riemann) *Si S es una superficie plana, de frontera γ y γ descrita siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces,*

$$\iint_S (Q_x - P_y)dxdy = \int_\gamma (Pdx + Qdy) = \int_\gamma \omega.$$

Observación 3.2.2 *Al integrar la segunda parte de la igualdad a lo largo de la curva cerrada γ, en realidad estamos calculando la ecuación de Pfaff 2-dimensional*

$$Pdx + Qdy = 0.$$

Si dicha ecuación es integrable, entonces

$$Q_x - P_y = 0, \quad \text{es decir} \quad Q_x = P_y,$$

y, por tanto, la integral $\displaystyle\iint_S (Q_x - P_y)dxdy = 0$. Y según el Teorema 3.1.1 si ω es cerrada, entonces su integral a través de una curva cerrada γ es cero, $\int_\gamma \omega = 0$. Luego se comprueba el teorema de Green-Riemann.

Si ω es una forma diferencial exacta en un abierto estrellado, los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2 son ciertos. El primero implicaría $\int_\gamma \omega = 0$ al ser γ una curva cerrada, y el segundo implicaría $rot\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Por tanto, en el caso en que $\mathbf{F}$ fuese un campo conservativo, se verificaría Teorema de Stokes y Teorema de Green.

3.3. Comentarios bibliográficos

El contenido del Capítulo 3 está basado en la referencias [14] y [10], aunque una visión más amplia y completa se puede obtener consultando la bibliografía [9].

Capítulo 4

Aplicación a la Termodinámica: El Teorema de Carathéodory

4.1. Introducción

El análisis de los Capítulos 1 y 2 muestra que, en general, no podemos encontrar factores integrantes para las formas diferenciales Pfaffianas de más de dos variables independentes. Además, en el Capítulo 1 hemos visto que las formas diferenciales Pfaffianas se dividen en dos casos, las que son integrables y las que no lo son. Esta diferencia es demasiado abstracta para ser de uso inmediato en la teoría de la termodinámica, por lo que es necesario buscar una caracterización más geométrica de la diferencia entre las dos clases de formas Pfaffianas.

Antes de considerar el caso de tres variables, consideremos el caso de una forma diferencial Pfaffiana en dos variables. Como un primer ejemplo, tomemos la ecuación de Pfaff

$$dx - dy = 0 \tag{4.1}$$

que obviamente tiene la solución

$$x - y = c, \tag{4.2}$$

donde c es una constante. Geométricamente, esta solución representa una familia de líneas rectas que forman un ángulo $\pi/4$ con la dirección positiva de eje OX. Ahora consideremos el punto $(0,0)$. La única recta de la familia (4.2) que pasa por el punto $(0,0)$ es $x = y$. Esta recta intersecta a la circuferencia $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ en dos puntos

$$A\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{y} \quad B\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$$

Ahora bien, no es posible ir de A a ningún otro punto de la circuferencia, aparte de B, si el movimiento se restringe a pasar siempre por las rectas de la familia (4.2). Por tanto, dado que ε puede hacerse tan pequeño como queramos, se deduce que arbitrariamnete cerca del punto $(0,0)$ hay una infinidad de puntos que no pueden ser alcanzados a través de las rectas que sean soluciones de la ecuación diferencial Pfaffiana dada por (4.1).

Este mismo resultado ocurre para cualquier ecuación diferencial general Pfaffiana en dos variables. Por el Teorema 1.1.1, existe una función $\phi(x,y)$ y una función $\mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = d\phi(x,y).$$

De este modo, la ecuación

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

debe poseer una integral de la forma

$$\phi(x,y) = c, \tag{4.3}$$

siendo c una constante. Por lo tanto, a través de cada punto del plano OXY pasa una sola curva del sistema uniparamétrico (4.3). Luego, dado un punto cualquiera en el plano $0XY$, no es posible acceder desde él a cualquier otro punto "vecino"por medio de curvas que satisfagan a la ecuación diferencial dada.

Un resultado similar se aplica para las ecuaciones diferenciales Pfaffianas en tres variables independientes. Si la ecuación posee un factor integrante, la situación es exactamente la misma que en el caso bidimensional. Todas las soluciones se encuentran en alguna de las superficies pertenecientes al sistema uniparamétrico

$$\phi(x,y,z) = c,$$

por lo que no podemos alcanzar a todos los puntos del entorno de un punto dado, sino sólamente aquellos puntos que se encuentran en la superficie de la familia que pasa por el punto que estamos considerando.

Extendiendo la idea de puntos inaccesibles al espacio n-dimensional, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.1.1 *Si la ecuación diferencial Pfaffiana*

$$\Delta X = X_1dx_1 + X_2dx_2 + \cdots + X_ndx_n = 0$$

es integrable, entonces en cualquier entorno, por pequeño que sea, de un punto G_0 dado, existen puntos que no son accesibles desde G_0 a lo largo de cualquier camino que satisfaga $\Delta X = 0$.

Lo que interesa en la termodinámica no es el teorema directo, sino el inverso. Es decir, consideramos si la inaccesibilidad de puntos en el entorno de un punto dado nos proporciona un criterio para la integrabilidad. Si conocemos que en un entorno de un punto dado hay puntos que son arbitrariamente cercanos pero inaccesibles por medio de las curvas para las cuales $\Delta X = 0$, ¿podemos, entonces, afirmar que la ecuación diferencial Pfaffiana $\Delta X = 0$ posee un factor integrante? Carathéodory demostró que la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

4.2. Teorema de Carathéodory

Teorema 4.2.1 (Carathéodory) *Si una forma diferencial Pfaffiana*

$$\Delta X = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n$$

tiene la propiedad de que en cada entorno, abitrariamente cercano de un punto dado G_0, existen puntos que son inaccesibles desde G_0 por medio de las curvas para las cuales $\Delta X = 0$, entonces la correspondiente ecuación diferencial Pfaffiana es integrable.

Demostración. Consideremos la prueba de este teorema para el caso $n = 3$.

En primer lugar, notemos que por medio de las transformaciones (1.21) y (1.23) de la Sección 1.2, la ecuación

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{4.4}$$

puede ser escrita en la forma equivalente

$$\frac{dU}{dz} + K(U, y, z) = 0. \tag{4.5}$$

En esta ecuación se observa que la función K puede ser expresada como una función de tres variables, U, y y z. Si tomamos y fija, podemos escribir (4.5) como

$$dU + K(U, y, z)dz = 0,$$

que por el Teorema 1.1.1 tiene una solución de la forma

$$U = \phi(z, y). \tag{4.6}$$

En la Sección 1.2 demostramos que la ecuación (4.4) era integrable si ésta se podía poner como

$$\frac{dU}{dz} + K(U, z) = 0, \tag{4.7}$$

es decir, si y solo si

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \tag{4.8}$$

en una cierta región del plano OYZ.

Supongamos que el punto $G_0(x_0, y_0, z_0)$ está contenido en un dominio D del espacio xyz. Entonces, si P, Q, R y μ son tales que Y y K son funciones continuas de x, y y z con valor único y finito, existe una correspondencia de uno a uno entre los puntos de D y los de un dominio D' del espacio Uyz. Sea $H_0(U_0, y_0, z_0)$ el punto de D' correspondiente al punto G_0 de D. Ahora consideremos como en realidad se puede efectuar el paso desde H_0 a un punto cercano H, a lo largo de una curva solución de la ecuación (4.7):

(a) Primero pasamos del punto H_0 al punto H_1 en el plano $y = y_0$; entonces en virtud a (4.6), las coordenadas de H_1 será $\{\phi(z_0 + \zeta', y_0), y_0, z_0 + \zeta'\}$, donde ζ' denota el desplazamiento en la coordenada z. Además, dado que H_0 se encuentra en la misma curva integral que H_1, se deduce que

$$U_0 = \phi(z_0, y_0).$$

(b) El siguiente paso es de H_1 al punto H_2 en el plano $U_0 = \phi(z_0 + \zeta', y_0)$. Dado que z es constante, se sigue que las coordenadas de H_2 son $\{\phi(z_0 + \zeta', y_0), y_0 + \eta - \eta', z_0 + \zeta'\}$, donde $\eta - \eta'$ denota al desplazamiento H_1H_2.

(c) El siguiente paso es en el plano $y = y_0 + \eta - \eta'$ al punto H_3; por tanto dicho punto tiene las coordenadas $\{\phi(z_0 + \zeta, y_0 + \eta - \eta'), y_0 + \eta - \eta', z_0 + \zeta\}$, denotando con $\zeta - \zeta'$ al cambio en la coordenada z.

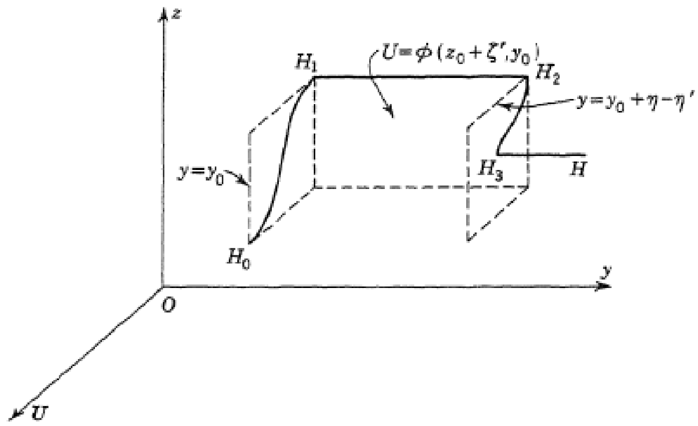

Figura 4.1: Este dibujo está tomado del libro de Ian N. Sneddon, [13]

(d) Finalmente llegamos al punto H pasando por el plano $U = \phi(z_0 + \zeta, y_0 + \eta - \eta')$ y a través de un desplazamiento η', luego H tiene como coordenadas $\{\phi(z_0 + \zeta, y_0 + \eta - \eta'), y_0 + \eta, z_0 + \zeta\}$.

Si el punto $(U_0 + \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_2, z_0 + \varepsilon_3)$, el cual es arbitrariamente cercano a $H_0(U_0, y_0, z_0)$, es accesible desde H_0 mediante soluciones de la ecuación (4.5), entonces es posible elegir los desplazamientos η, η', ζ de tal modo que

$$\phi(z_0 + \zeta, y_0 + \eta - \eta') - \phi(z_0, y_0) = \varepsilon_1, \quad \eta = \varepsilon_2, \quad \zeta = \varepsilon_3. \tag{4.9}$$

Ahora si todos los puntos en el entorno de H_0 son accesible desde H_0, se deduce que los puntos $(U_0 + \varepsilon, y_0, z_0)$ que se encuentran en la recta, $z = z_0, y = y_0$ son accesibles desde H_0. Por tanto, debería ser posible elegir un desplazamiento η' tal que

$$\phi(z_0, y_0 - \eta') - \phi(z_0, y_0) = \varepsilon, \tag{4.10}$$

y esto es sólo si $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ no es idénticamente cero, en cuyo caso, como anteriormente comentamos, la ecuación no es integrable.

Por otro lado, si hay puntos que son inaccesibles desde H_0, se concluye que existe valores de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3, para los cuales las ecuaciones (4.9), o lo que es lo mismo, la ecuación (4.10), no tiene solución. Para un desarrollo de primer orden, podemos escribir la ecuación (4.9) en la forma

$$(\varepsilon_2 - \eta')\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=y_0} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=z_0}.$$

Si esto no da un valor para η', sólo puede ser porque

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=y_0} = 0,$$

es decir, sólo si la ecuación es integrable.

Una prueba más geométrica del Teorema de Carathéodory fue dada por Born (ver referencia [4]). En esta prueba consideramos las soluciones de la ecuación diferencial Pfaffiana (4.4) que se encuentran en una superficie S dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Estas curvas satisfacen la ecuación diferencial Pfaffiana bidimensional

$$F du + J dv = 0, \tag{4.11}$$

donde

$$F = P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial y}{\partial u} + R\frac{\partial z}{\partial u}, \quad J = P\frac{\partial x}{\partial v} + Q\frac{\partial y}{\partial v} + R\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Por el Teorema 1.1.1, la ecuación (4.11) tiene una solución de la forma

$$\phi(u, v) = C,$$

representando un sistema uniparamétrico de curvas que cubre la superficie S. Supongamos ahora que arbitrariamente cerca del punto G_0 dado, existen puntos inaccesibles, y, además, supongamos que G es uno de esos puntos. A través de G_0 se dibuja una recta λ que no es solución de la ecuación (4.4) y que no pasa por G. Sea π el plano definido por la línea λ y el punto G.

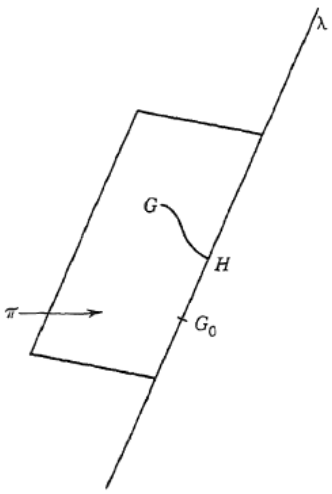

Figura 4.2: Este dibujo está tomado del libro de Ian N. Sneddon, [13]

Si tomamos el plano π como la superficie S, la cual hemos introducido anteriormente, vemos que sólo hay una curva que se encuentra en el plano π, pasa por el punto G y es solución de la ecuación (4.4). Supongamos que esta curva intersecta a la recta λ en el punto H; entonces dado que G es inaccesible desde G_0, se concluye que H es también inaccesible desde G_0. Además, como podemos elegir un punto G arbitrariamente cercano a G_0, el punto H puede ser arbitrariamente cercano a G_0.

Supongamos ahora que la recta λ se mueve paralelamente sobre si misma, generando un cilindro cerrado σ. Entonces sobre la superficie σ existe una curva c que es solución de (4.4) y pasa por G_0. Si la recta λ corta a la curva c en un punto I, entonces desformando continuamente el cilindro σ, podemos hacer que el punto I se mueva a lo largo de un segmento de la recta λ que a rodee G_0. De esta manera, es posible construir una franja de puntos accesibles en los alrededores de G_0. Sin embargo, esto contradice a la suposición de que, arbitrariamente cerca a G_0, existen puntos en la recta λ (como H) que son inaccesibles desde G_0; por consiguiente, concluimos que para cada forma de σ, el punto I coincide con G_0.

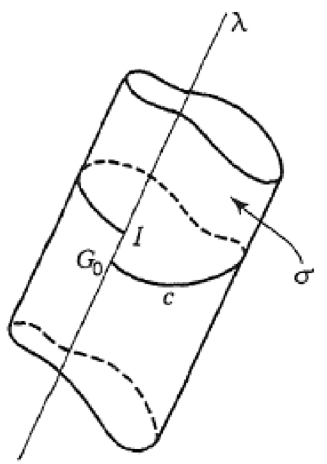

Figura 4.3: Este dibujo está tomado del libro de Ian N. Sneddon, [13]

A medida que el cilindro σ es continuamente deformado, la curva cerrada c traza una superficie conteniendo a todas las soluciones de la ecuación (4.4) que pasan por el punto G_0. Dado que esta superficie tendrá una ecuación de la forma

$$\phi(x, y, z) = \phi(x_0, y_0, z_0)$$

se deduce que existen funciones μ y ϕ tales que

$$\mu(Pdx + Qdy + Rdz) = d\phi,$$

y con ello finaliza la prueba del Teorema. ■

4.3. Aplicación a la Termodinámica

La mayoría de los libros de textos elementales sobre termodinámica se rigen bajo el desarrollo histórico de la materia y, por tanto, discuten los principios básicos en términos del comportamiento de varios tipos de motores térmicos “perfectos”. Esto es sin duda ventajoso en la formación de ingenieros, pero matemáticos y físicos sentían la necesidad de un enfoque más formal. Una formulación más elegante, y al mismo tiempo más racional, de los fundamentos de la termodinámica fue desarrollada por Carathéodory en base al Teorema 4.2.1.

La ***primera ley de la termodinámica*** es esencialmente una generalización de ley experimental de Joule de que siempre que el calor es generado por fuerzas mecánicas, dicho calor desarrollado está siempre en constante relación con la cantidad de trabajo realizado por las fuerzas. A tal generalización, Carathéodory favoreció:

Con el fin de llevar un sistema termodinámico desde un prescrito estado inicial a otro estado final prescrito adiabáticamente, es necesario realizar una cantidad de trabajo mecánico que sea independiente a la manera en la que se realiza el cambio, y que dependa sólamente del estado inicial y final prescritos del sistema.

Matemáticamente, esta primera ley es equivalente a decir que en tal proceso adiabático el trabajo realizado W es una función de la variables termodinámicas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$, definiendo el estado final e inicial del sistema y no de los valores intermedios de estas variables. Por tanto, podemos escribir

$$W = W(x_1, x_2, \cdots, x_n; x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}),$$

y si consideramos el simple experimento en el que las sustancias van desde el estado inicial $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ a un estado intermedio $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})$ y luego al estado final $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, obtenemos la ecuación funcional

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, \cdots, x_n; x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}) + W(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}; x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \\ = W(x_1, x_2, \cdots, x_n; x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \end{aligned}$$

para la determinación de la función W. Esto demuestra que existe una función $U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, llamada *energía interna* del sistema, con la propiedad

$$W(x_1, x_2, \cdots, x_n; x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) = U(x_1, x_2, \cdots, x_n) - U(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}). \quad (4.12)$$

Si ahora consideramos el caso en el que el estado del sistema es cambiado de $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ a $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ aplicando una cantidad de trabajo W, pero no asegurando que el estado sea adiabáticamente cerrado, encontramos que el cambio de energía interna $U(x_1, x_2, \cdots, x_n) - U(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$, que puede ser determinado experimentalmente midiendo la cantidad de trabajo necesario para conseguir esto cuando el sistema es adiabáticamente cerrado, no será igual al trabajo mecánico W. La diferencia entre las dos cantidades se define como la *cantidad de calor* Q absorbida por el sistema en el transcurso del proceso no adiabático. Así, la ***primera ley de la termodinámica*** está contenida en la ecuación

$$Q = U - U_0 - W. \quad (4.13)$$

En la teoría de Carathéodory, la idea de la cantidad de calor es una derivada que no tiene otro significado aparte de la primera ley de la termodinámica.

Un gas definido por su presión p y su volumen específico v, es un tipo simple del sistema termodinámico que hemos considerado. Fácilmente se demuestra que si el gas se expande por una cantidad infinitesimal dv, el trabajo realizado por ella es $-p$, y esto no es una ecuación diferencial exacta. Por tanto, deberiamos denotar por ΔW al trabajo realizado en un cambio infinitesimal del sistema. Por otra parte, de la definición de U, es obvio que el cambio en la enegía interna en un cambio infinitesimal del sistema es una diferencial exacta, que denotamos por dU. Por consiguiente, podemos escribir (4.13) en la forma infinitesimal

$$\Delta Q = dU - \Delta W. \tag{4.14}$$

Si tomamos p y v como variables termodinámicas y ponemos $\Delta W = -p\,dv$, entonces para un gas

$$\Delta Q = Pdp + Vdv, \tag{4.15}$$

donde

$$P = \frac{\partial U}{\partial p}, \quad V = \frac{\partial U}{\partial v} + p.$$

Ahora por el Teorema 1.1.1 tenemos inmediatamente que, cualesquiera que sean las formas de las funciones P y V, existen funciones $\mu(p, v)$ y $\phi(p, v)$ tales que

$$\mu \Delta Q = d\phi, \tag{4.16}$$

mostrando que, aunque ΔQ no es en sí una diferencial exacta, siempre es posible encontrar una función μ de las variables termodinámicas tal que $\mu\Delta Q$ sea una diferencial exacta. Este resultado es una consecuencia puramente matemática del hecho de que dos variables termodinámicas son suficientes para la especificación única del sistema.

Es lógico preguntarse si este resultado es válido para el caso en el que el sistema requiere más de dos variables termodinámicas para su completa especificación. Si el sistema es descrito por las n variables termodinámicas $x_1, x_2, \cdots, x_n$, entonces la ecuación (4.15) es reemplazada por una forma Pfaffiana del tipo

$$\Delta Q = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i, \tag{4.17}$$

donde X_i son funciones de $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Sabemos que para este caso, en general, las funciones μ y ϕ con la propiedad $\mu\Delta Q$ no existen. Si queremos establecer que todo sistema termodinámico que ocurre en la naturaleza tiene esta propiedad, entonces debe agregarse un nuevo axioma de carácter físico. Esta nueva suposición física es la ***segunda ley de la termodinámica***.

En la teoría clásica, la base física de la segunda ley de la termodinámica es la compresión de que ciertos cambios de estados no son físicamente realizables; por ejemplo, obtenemos declaraciones del tipo “que el calor no puede fluir de un cuerpo frío a otro más caliente sin un control externo”. En la formulación de la segunda ley, Carathéodory generaliza tales afirmaciones y hace uso del Teorema 4.2.1 para darle un carácter matemático. El ***axioma de Carathéodory*** es :

Arbitrariamente cerca de cualquier estado incial prescrito, existen estados que no pueden ser alcanzados desde el estado inicial como resultado del proceso adiabático.

Si la primera ley de la termodinámica conduce a una ecuación del tipo (4.17), entonces la segunda ley en la base de Carathéodory afirma que cerca del punto $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ existen puntos que no son accesibles desde el punto inicial por medio de los caminos para los cuales $\Delta Q = 0$. Del Teorema 4.2.1, se deduce inmediatamente que existen funciones $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ con la propiedad

$$\mu \Delta Q = d\phi. \tag{4.18}$$

La función ϕ que aparece en esta expresión es llamada la ***entropía del sistema termodinámico***. Se puede demostrar que la función μ, aparte de una constante multiplicatica, es una función que depende sólo de la temperantura empírica del sistema. Se podría escribir $\mu = 1/T$, donde T es la *temperatura total* del sistema. Además, se puede demostrar que la escala de un termómetro de gas basado en la ecuación de estado de un gas perfecto define una temperatura que es directamente proporcional a T. Con esta notación, podemos escribir la ecuación (4.18) en la forma

$$\frac{\Delta Q}{T} = d\phi.$$

El Teorema 4.2.1 muestra que tal ecuación es válida sólo si introducimos la conjetura física que aparece en la segunda ley de la termodinámica.

4.4. Comentarios bibliográficos

En la redacción de este capítulo hemos consultado la referencia [13], aunque se puede encontrar información más detallada en [4].

Capítulo 5

Aplicaciones geométricas

Las ecuaciones de Pfaff aparecen para resolver diversos problemas geométricos que señalaremos a continuación, planteados en el plano 2-dimensional o en el espacio 3-dimensional.

5.1. Trayectorias ortogonales de un sistema de curvas en el plano

Suponemos que

$$f(x,y,c)=0, \quad g(x,y,k)=0,$$

son las ecuaciones de dos familias de curvas cada una dependiendo de un solo parámetro. Cuando cada miembro de la k-familia corta a cada miembro de la c-familia, cualquier curva de cualquiera de las dos familias se dice que es una *trayectoria* de la otra familia.

Cuando una curva interseca a todos los miembros de una familia en ángulos rectos, se dice que es una *trayectoria ortogonal* de esa familia. Por consiguiente, cualquier circunferencia con centro en el origen es la trayectoria ortogonal de la familia de líneas rectas que irradian desde el origen, e inversamente cualquier línea a través del origen es la trayectoria ortogonal de todos las circuferencias con centro $(0,0)$. En otras palabras, las familias

$$x^2+y^2=c^2, \quad y=kx$$

son mutuamente ortogonales.

Suponemos que, en coordenadas cartesianas, la ecuación diferencial lineal

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0 \tag{5.1}$$

describe una familia de curvas. Cuando se escribe en la forma

$$y'=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

estas ecuaciones expresan el hecho de que si una integral de curva pasa a través del punto (x,y), su tangente en ese punto tendrá gradiente $-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. El gradiente de la curva ortogonal a través de ese punto será el recíproco negativo, es decir, la tangente en (x, y) a la curva ortogonal tendrá gradiente

$$y' = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

En otras palabras, una trayectoria ortogonal del sistema de curvas descrito por la ecuación (5.1) será la curva integral de la ecuación diferencial lineal

$$P(x,y)y' - Q(x,y) = 0 \tag{5.2}$$

que escrita en la forma

$$P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0$$

observamos que se trata de una ecuación de Pfaff en dos variables.

De manera inversa, siempre que una curva integral de la ecuación diferencial (5.2) corte a una curva integral de la ecuación diferencial (5.1) (la cual es también una ecuación de Pfaff 2-dimensional), la cortará en ángulos rectos.

De este modo la ecuación diferencial de una familia es obtenida a partir de la otra, reemplazando y' por $-1/y'$ y concluimos el siguiente resultado:

Corolario 5.1.1 *Si la ecuación diferencial de la familia uniparamétrica de curvas $f(x, y) = c$ es $F(x, y, y') = 0$, entonces la ecuación diferencial que describe la familia de trayectorias ortogonales es $F(x, y, -1/y') = 0$, y su integral general $g(x, y, k) = 0$ será la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales.*

Ejemplo 5.1.1 *La ecuación $x^2 + y^2 = 2cx$ representa el sistema de circuferencias que tocan al eje OY en el origen, siendo $(c, 0)$ el centro de cualquiera de las circuferencias. La ecuación diferencial de la familia es*

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0. \tag{5.3}$$

Encontrar sus trayectorias ortogonales.

Resolución:

Para encontrar la ecuación de las trayectorias ortogonales reemplazamos y' por $-1/y'$ para obtener

$$(x^2 - y^2)y' - 2xy = 0.$$

Se trata de una ecuación homogénea que podría resolverse por el cambio de variable independiente $v = y/x$; sin embargo, si escribimos la ecuación en la forma

$$y^2 - x^2 + 2xy\frac{dx}{dy} = 0,$$

observamos que es equivalente a la original ecuación diferencial (5.3) con las variables x e y intercambiadas. Por tanto, su integral general es

$$x^2 + y^2 = 2ky,$$

así que las trayectorias ortogonales son todas las circuferencias que tocan al eje OX en el origen. ■

5.2. Trayectorias ortogonales de un sistema de curvas en una superficie

Dada una superficie

$$F(x,y,z)=0 \tag{5.4}$$

y una familia de curvas sobre ella, nos planteamos el problema de encontrar un sistema de curvas de tal manera que cada una de ellas estén en la superficie (5.4) y corte a todas las curvas del sistema dado en ángulos rectos. Este nuevo sistema de curvas se denomina sitema de *trayectorias ortogonales* sobre el sistema de curvas dado.

Consideramos como sistema original de curvas a las intersecciones de la superficie (5.4) con una familia uniparamétrica de superficies de la forma

$$G(x,y,z)=c_1, \tag{5.5}$$

donde c_1 es un parámetro. Por tanto, la dirección tangencial (dx,dy,dz) a la curva dada a través del punto (x,y,z) en (5.4) satisface las ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

y

$$\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial z}dz=0.$$

Entonces, la triada (dx,dy,dz) debe ser tal que

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}, \tag{5.6}$$

donde

$$P=\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y},\quad Q=\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial z},\quad R=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}.$$

En otras palabras, el vector $\mathbf{t}=(P,Q,R)$ es el resultado del producto vectorial de los vectores normales a cada superficie dada, es decir, $\mathbf{t}=\mathbf{N}_F\times\mathbf{N}_G$, siendo $\mathbf{N}_F=(F_x,F_y,F_z)$ y $\mathbf{N}_G=(G_x,G_y,G_z)$.

Por otro lado, la curva que pasa por el punto (x,y,z) del sistema ortogonal que buscamos, tiene dirección tangencial (dx',dy',dz'), la cual está en la superficie (5.4), así pues

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx'+\frac{\partial F}{\partial y}dy'+\frac{\partial F}{\partial z}dz'=0 \tag{5.7}$$

y es perpendicular al original sistema de curvas dado.

Por lo tanto, de la ecuación (5.6) tenemos

$$Pdx'+Qdy'+Rdz'=0, \tag{5.8}$$

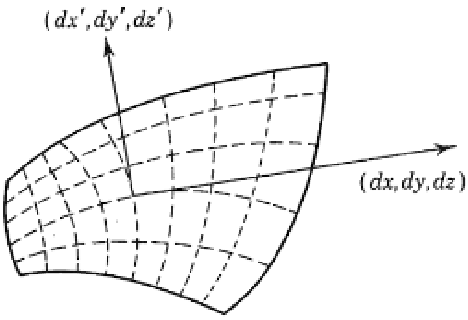

Figura 5.1: Este dibujo está tomado del libro de Ian N. Sneddon, [13].

Las ecuaciones (5.7) y (5.8) ceden el paso a las ecuaciones

$$\frac{dx'}{P'} = \frac{dy'}{Q'} = \frac{dz'}{R'}, \tag{5.9}$$

donde

$$P' = R\frac{\partial F}{\partial y} - Q\frac{\partial F}{\partial z}, \quad Q' = P\frac{\partial F}{\partial z} - R\frac{\partial F}{\partial x}, \quad R' = Q\frac{\partial F}{\partial x} - P\frac{\partial F}{\partial y},$$

es decir, (P', Q', R') es el vector tangente de la intersección de las ecuaciones (5.7) y (5.8).

Finalmente, la solución de las ecuaciones (5.9) con la relación (5.4) da el sistema de trayectorias ortoganles que buscamos.

Para ilustrar el método que acabamos de explicar, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.2.1 *Encontrar las trayectorias ortogonales en el cono $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ de su intersección con la familia de planos paralelos a $z = 0$.*

Resolución:

La intersección del cono considerado con la familia de planos paralelos a $z = 0$ forma un sistema de círculos sobre dicho cono (mostrado por líneas completas en la Figura 5.2). Es evidente, que este sistema está caracterizado por el par de ecuaciones

$$xdx + ydy = z\tan^2 \alpha dz, \quad dz = 0,$$

y, por tanto, son equivalentes a

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0},$$

con (dx, dy, dz) las tangentes al sistema de círculos en el cono y $(y, -x, 0)$ el producto vectorial de los vectores normales de las dos superficies consideradas.

Sea, ahora, (dx', dy', dz') las tangentes al sistema ortogonal que queremos encontrar. Siguiendo el procedimiento dado tenemos que

$$(x, y, -z\tan^2 \alpha) \cdot (dx', dy', dz') = 0$$

y

$$(y, -x, 0) \cdot (dx', dy', dz') = 0.$$

Por consiguiente, el sistema de trayectorias ortogonales que buscamos está determinado por las ecuaciones

$$xdx' + ydy' - z\tan^2\alpha = 0, \quad ydx' - xdy' = 0,$$

las cuales tienen soluciones

$$x^2 + y^2 = z^2\tan^2\alpha, \quad x = c_1 y,$$

donde c_1 es un parámetro. Por lo tanto, las trayectorias ortogonales son los generadores de el cono formado por la intersección de su superficie con la familia de planos $x = c_1 y$ pasando a través del eje z (mostrado por líneas discontinuas en Figura 5.2).

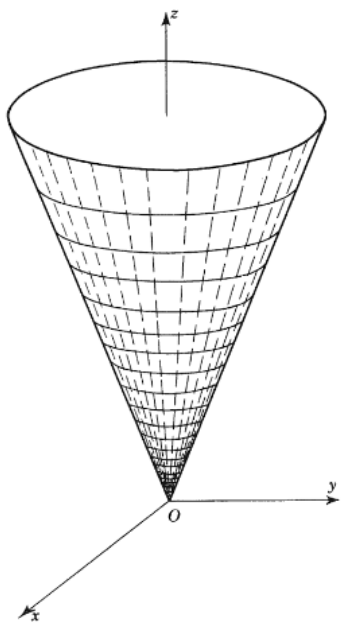

Figura 5.2: Este dibujo está tomado del libro de Ian N. Sneddon, [13] ■

5.3. Superficies ortogonales a una familia de curvas en el espacio

Dada una familia de curvas

$$F(x, y, z) = \alpha, \quad G(x, y, z) = \beta,$$

se pueden pedir las superficies ortogonales a dicha familia.

Las superficies ortogonales a una familia de curvas son evidentemente ortogonales a los vectores tangentes de las mismas por lo que hallar dichas superficies es lo mismo que resolver una ecuación de Pfaff, la que tiene como vector de coeficientes el tangente a las curvas. Es decir, la ecuación de Pfaff que se plantea es

$$\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{t}_s = 0,$$

siendo $\mathbf{t}_c$ el vector tangente a la familia de curvas dada que se obtiene mediante el producto vectorial de los vectores normales a cada superficie dada, es decir, $\mathbf{t}_c = \mathbf{N}_F \times \mathbf{N}_G$, siendo $\mathbf{N}_F = (F_x, F_y, F_z)$ y $\mathbf{N}_G = (G_x, G_y, G_z)$, y el vector $\mathbf{t}_s = (dx, dy, dz)$.

Obviamente las superficies pedidas no siempre existirán: el campo tangente tiene que ser integrable.

Ejemplo 5.3.1 *Calcular las superficies ortogonales a la familia de curvas de ecuaciones*

$$x^2 + y^2 = \alpha, \quad 3x^2 + z^2 = \beta.$$

Resolución:

En primer lugar calculemos el vector tangente a la familia de curvas dada:

1. El vector normal de la superficie $x^2 + y^2 = \alpha$ es $(2x, 2y, 0)$.
2. El vector normal de la superficie $3x^2 + z^2 = \beta$ es $(6x, 0, 2z)$.
3. El producto vectorial de los dos vectores anteriores vale $(4yz, -4xz, -12xy)$ que es paralelo al vector $(yz, -xz, -3xy)$.

Esto quiere decir que la ecuación de Pfaff que dará las superficies ortogonales pedidas es

$$yzdx - xzdy - 3xydz = 0. \tag{5.10}$$

Comprobemos que la ecuación (5.10) es integrable. El campo asociado $\mathbf{F} = (yz, -xz, -3xy)$ cumple

$$rot\,\mathbf{F} = (-2x, 4y, -2z),$$

y por lo tanto

$$\mathbf{F} \cdot rot\,\mathbf{F} = (yz, -xz, -3xy) \cdot (-2x, 4y, -2z) = 0$$

y la ecuación de Pfaff es integrable.

Pasemos ahora a calcular su solución general. Para ello vamos a utilizar el método de Natani:

(a) En primer lugar hacemos $z = \alpha$ y como entonces $dz = 0$ la ecuación se convierte en

$$yzdx - xzdy = 0,$$

que es equivalente a

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

y cuya solución viene dada por

$$\frac{y}{x} = h(z). \tag{5.11}$$

De acuerdo con esto la solución de la ecuación de Pfaff tiene la forma de (5.11).

(b) Para determinar la función $h(z)$, tomamos $y = 1$ en (5.10) y obtenemos

$$zdx - 3xdz = 0,$$

la cual tiene como solución

$$x = cz^3,$$

siendo c una constante arbitraria. Sustituyendo esta última expresión en (5.11), considerando $y = 1$, se tiene que $h(z) = \frac{1}{c}z^{-3}$.

Las superficies ortogonales buscadas tienen, resumiendo todo lo anterior, la ecuación

$$\frac{yz^3}{x} = C,$$

donce C es una constante arbitraria. ■

5.4. Superficies ortogonales a las líneas vectoriales

La resolución de las ecuaciones de Pfaff permite determinar la familia de superficies $S(x, y, z) = c$, ortogonales a las líneas vectoriales del campo vectorial continuo

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}. \tag{5.12}$$

Recordemos que las *líneas vectoriales* (ó líneas de campo) del campo $\mathbf{F}$ son las curvas que en cada punto son tangentes al valor del campo en dicho punto. Así pues, la ecuación de las superficies S tiene la forma $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} = 0$, siendo $\mathbf{t}$ un vector contenido en el plano tangente a las superficies buscadas:

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz,$$

o, en forma desarrollada,

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Si el campo (5.12) es potencial:

$$\mathbf{F} = grad\, S, \text{ es decir, } P = \frac{\partial S}{\partial x},\ Q = \frac{\partial S}{\partial y},\ R = \frac{\partial S}{\partial z},$$

las superficies buscadas son superficies de nivel $S(x, y, z) = c$ de la función potencial S. En este caso, la determinación de éstas no representa dificultad, puesto que

$$S = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz,$$

donde la integral curvilínea se toma por cualquier camino entre el punto fijo escogido (x_0, y_0, z_0) y el punto con coordenadas variables (x, y, z), por ejemplo, por la línea quebrada compuesta por segmentos de rectas paralelos a los ejes de coordenadas.

Ejemplo 5.4.1 *Sea dada la ecuación de Pfaff*

$$(6x + yz)dx + (xz - 2y)dy + (xy + 2z)dz = 0.$$

Determinar la familia de superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo asociado.

Resolución:

El campo vectorial asociado es

$$\mathbf{F} = (6x + yz)\mathbf{i} + (xz - 2y)\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k},$$

luego $rot\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y, por tanto, la condición de integrabilidad (1.19) es satisfecha. En tal caso, $\mathbf{F} = grad\,S$ siendo

$$S = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (6x + yz)dx + (xz - 2y)dy + (xy + 2z)dz.$$

Tomemos como camino de integración una línea quebrada con segmentos paralelos a los ejes de coordenadas. Integrando obtenemos

$$S = 3x^2 - y^2 + z^2 + xyz.$$

Por tanto la integral buscada será $S = c$, es decir

$$3x^2 - y^2 + z^2 + xyz = c. \qquad \blacksquare$$

Si, en cambio, el campo $\mathbf{F}$ no es potencial, en ciertos casos se puede escoger un factor escalar $\mu(x, y, z)$, tal que $\mu\mathbf{F} = grad\,S$ sea potencial.

Ejemplo 5.4.2 *Sea dada la ecuación de Pfaff*

$$dx + e^{-x}dy = 0$$

Determinar la familia de superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo asociado.

El campo vectorial asociado es

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j} = (1, e^{-x}, 0).$$

Calculando su rotacional se tiene

$$rot\,\mathbf{F} = (0, 0, e^{-x}),$$

luego la condición de integrabilidad $\mathbf{F} \cdot rot\,\mathbf{F} = 0$ se cumple.

Dado que $rot\,\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, el campo $\mathbf{F}$ no deriva de un potencial. Sin embargo, si multiplicamos el campo por la función escalar $\mu(x, y, z) = e^x$ se tiene el campo

$$\mathbf{G} = \mu\mathbf{F} = e^x\mathbf{i} + \mathbf{j} = (e^x, 1, 0)$$

con $rot\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$, luego

$$\mathbf{G} = \mu\mathbf{F} = grad\,S$$

es potencial, siendo

$$S = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} e^x dx + dy.$$

Integrando se obtiene

$$S = e^x + y.$$

Por tanto la integral buscada será $S = c$, es decir

$$e^x + y = c.$$

■

Observación 5.4.1 *Observamos que la líneas vectoriales del campo* $\boldsymbol{F} = (1, e^{-x}, 0)$ *son exactamentes iguales a las líneas vectoriales del campo* $\boldsymbol{G} = (e^x, 1, 0)$ *puesto que verifican la misma ecuación característica:*

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{e^{-x}}.$$

5.5. Comentarios bibliográficos

Para el contenido de la primera Sección 5.1 hemos consultado la referencia [11]. En cambio la Sección 5.2 está basada, de nuevo, en la referencia [13].

Por otro lado, hemos seguido la referencia [1] en lo concerniente a la sección 5.3.

Finalmente, en la redacción de la sección 5.4 nos hemos centrado en la referencia [8], pero también de manera importante hemos consultado la referencia [5].

Capítulo 6

Aplicación a la resolución de una EDP: Método de Lagrange-Charpit

En este capítulo explicaremos el método de Lagrange-Charpit para la resolución de la Ecuación en Derivadas Parciales de Primer Orden

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \tag{6.1}$$

donde $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, con el objetivo de mostrar que las ecuaciones de Pfaff son herramientas necesarias para el desarrollo de dicho método.

La idea fundamental en el método de Lagrange-Charpit es la introducción de una segunda Ecuación en Derivadas Parciales

$$g(x, y, z, p, q, a) = 0, \tag{6.2}$$

que contenga una contante arbitraria a y sea tal que:

(a) las ecuaciones (6.1) y (6.2) pueden ser resueltas para dar

$$p = p(x, y, z, a), \quad q = q(x, y, z, a).$$

(b) la ecuación

$$dz = p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, a)dy \tag{6.3}$$

sea integrable.

Cuando tal función g ha sido encontrada, la solución de la ecuación (6.3)

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0, \tag{6.4}$$

que contiene a dos constantes arbitrarias a y b, será una solución de la ecuación (6.1).

En el análisis de dicho método usaremos algunos conceptos y resultados previos que exponemos a continuación.

Definición 6.0.1 (Integral Completa) *Una integral completa es una familia biparamétrica* $\Phi(x, y, z, a, b)$ *con* $\Phi \in C^2(U \times \Lambda)$*,* $U \subset \mathbb{R}^3$*,* $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ *ambos abiertos tal que*

$$rg \begin{pmatrix} \Phi_a & \Phi_{xa} & \Phi_{ya} & \Phi_{za} \\ \Phi_b & \Phi_{xb} & \Phi_{yb} & \Phi_{zb} \end{pmatrix} = 2 \tag{6.5}$$

y tal que para todo $(a, b) \in \Lambda$ *la expresión*

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0$$

determina una o varias superficies integrales $z = \varphi(x, y)$ *de (6.1).*

De acuerdo a la Definición 6.0.1, la ecuación (6.4) es una integral completa de la ecuación (6.1), siempre y cuando (6.5) se satisfaga.

Ahora bien, el principal problema del método de Lagrange-Charpit es la determinación de la segunda ecuación (6.2) compatible con la ecuación dada (6.1). La condición que debe cumplirse para que ambas ecuaciones sean ***compatibles*** es

$$[f, g] \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, p)} + p\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, p)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, q)} + q\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, q)} = 0 \tag{6.6}$$

con

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(p, q)} \neq 0.$$

Luego, expandiendo la ecuación (6.6), observamos que es equivalente a la Ecuación Lineal en Derivadas Parciales

$$f_p\frac{\partial g}{\partial x} + f_q\frac{\partial g}{\partial y} + (pf_p + qf_q)\frac{\partial g}{\partial z} - (f_x + pf_z)\frac{\partial g}{\partial p} - (f_y + qf_z)\frac{\partial g}{\partial q} = 0 \tag{6.7}$$

que se usará para la determinación de g. Entonces, nuestro problema ahora es encontrar una solución de esta ecuación, la más sencilla posible, que involucre a una constante arbitraria a. De acuerdo con el Teorema A.4.1 del Apéndice A.4, la solución requerida se consigue hallando una integral del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{-(f_x + pf_z)} = \frac{dq}{-(f_y + qf_z)}. \tag{6.8}$$

Estas ecuaciones son conocidas como las ***ecuaciones de Charpit***.

Una vez que una integral del tipo $g(x, y, z, p, q, a)$ ha sido encontrada, el problema se reduce a buscar las expresiones de p y q y que nos permitan construir una ecuación de Pfaff integrable del tipo (6.3). Para ello usaremos el siguiente teorema:

Teorema 6.0.1 *Sea* $(x_0, y_0, z_0) \in U$*,* $(p_0, q_0) \in V$*,* $a_0 \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ *abierto tal que* $f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$*, y sea* $g : U \times V \times \Lambda \to \mathbb{R}$ *una función* C^2*. Supongamos que*

$$\exists P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, a_0) \in U \times V \times \Lambda \quad \textit{tal que} \quad \frac{\partial(f, g)}{\partial(p, q)}(P_0) \neq 0. \tag{6.9}$$

Entonces existe un entorno abierto Δ *de* $(x_0, y_0, z_0, a_0) \in \mathbb{R}^4$ *y dos únicas funciones* $p, q : \Delta \in \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *definidas en* Δ *que satisfacen*

(a)

$$\begin{cases} f(x,y,z,p(x,y,z,a),q(x,y,z,a)) = 0 \\ g(x,y,z,p(x,y,z,a),q(x,y,z,a),a) = 0 \end{cases} \quad \forall (x,y,z,a) \in \Delta \tag{6.10}$$

(b) $\forall (x,y,z,a) \in \Delta$,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(f,g)}{\partial(p,q)}\left[q\frac{\partial p}{\partial z} - p\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right] \\ &\quad - f_p\frac{\partial g}{\partial x} - f_q\frac{\partial g}{\partial y} - (pf_p + qf_q)\frac{\partial g}{\partial z} + (f_x + pf_z)\frac{\partial g}{\partial p} + (f_y + qf_z)\frac{\partial g}{\partial q} = 0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

En resumen, el método de Lagrange-Charpit consiste en:

(i) Encontrar una integral de primer orden de (6.8) que satisfaga (6.9)

$$g(x,y,z,p,q,a) = 0$$

(ii) Obtener p y q del sistema

$$\begin{cases} f(x,y,z,p,q) = 0 \\ g(x,y,z,p,q,a) = 0 \end{cases}$$

(iii) Resolver la ecuación de Pfaff

$$p(x,y,z,a)dx + q(x,y,z,a)dy - dz = 0, \tag{6.12}$$

utilizando los métodos descritos en el Capítulo 2. Previamente tenemos que asegurar que (6.12) es integrable. Gracias a (6.9) sabemos que $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(p,q)}(P_0) \neq 0$ y (6.11) es cierto. Combinando ambas condiciones con (6.7), obtenemos que

$$q\frac{\partial p}{\partial z} - p\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

es decir,

$$rot\,(p,q,-1)\cdot(p,q,-1) = 0$$

luego la ecuación (6.12) es integrable.

(iv) La expresión $\Phi(x,y,z,a) = b$, solución de (6.12), es una integral completa de (6.1). Justifiquemos este resultado:

La definición de integrabilidad implica que existe $\mu : \Delta \to \mathbb{R}$, C^1 tal que $\mu(\mathbf{x}) \neq 0$ $\forall \mathbf{x} \in \Delta$ y una función $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y,z,a) = \mu(x,y,z,a)p(x,y,z,a), \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y,z,a) = \mu(x,y,z,a)q(x,y,z,a), \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}(x,y,z,a) = -\mu(x,y,z,a). \end{cases}$$

Como sabemos, la solución general de (6.12) es la expresión

$$\Phi(x, y, z, a) = b.$$

Y dado que $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z, a) \neq 0$, el teorema de la función implícita (ver Teorema A.5.1 del Apéndice A.5) nos permite definir una función $\varphi : B_1((x_0, y_0, a_0, b_0), \delta_1) \to B_2(z_0, \delta_2)$, $z = \varphi(x, y, a, b)$ tal que

$$\Phi(x, y, \varphi(x, y, a, b), a) = b \quad \forall (x, y, a, b) \in B_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\
&\Rightarrow \mu(x, y, \varphi(x, y, a, b), a)p(x, y, \varphi(x, y, a, b), a) - \mu(x, y, \varphi(x, y, a, b), a)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, a, b) = p(x, y, \varphi(x, y, a, b), a).
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, a, b) = q(x, y, \varphi(x, y, a, b), a).$$

Y así de (6.10) se sigue que

$$f\left(x, y, \varphi(x, y, a, b), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, a, b), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, a, b)\right) = 0 \quad \forall (x, y, a, b) \in B_1,$$

luego $z = \varphi(x, y, a, b)$ es solución de (6.1).

Por otro lado, la condición (6.5) es

$$rg\begin{pmatrix} \Phi_a & \Phi_{xa} & \Phi_{ya} & \Phi_{za} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

y es claramente verdadera (pues en caso contrario Φ no determinaría una familia biparamétrica). ∎

Observación 6.0.1 *Debe tenerse en cuenta que para la obtención de la función g no es necesario utilizar todas las ecuaciones de Charpit (6.8), pero p ó q debe ocurrir en la solución obtenida.*

Finalizaremos el capítulo con un ejemplo:

Ejemplo 6.0.1 *Encontrar una integral completa de la ecuación*

$$p^2 x + q^2 y = z \tag{6.13}$$

Resolución:

Las ecuaciones auxiliares son

$$\frac{dx}{2px} = \frac{dy}{2qy} = \frac{dz}{2(p^2x + q^2y)} = \frac{dp}{p - p^2} = \frac{dq}{q - q^2}.$$

De estas ecuaciones se sigue que

$$\frac{p^2dx + 2px\,dp}{p^2x} = \frac{q^2dy + 2qy\,dq}{q^2y},$$

y por consiguiente

$$p^2x = aq^2y, \tag{6.14}$$

donde a es una constante. Resolviendo las ecuaciones (6.13) y (6.14) para p y q, obtenemos

$$p = \left(\frac{az}{(1+a)x}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad q = \left(\frac{z}{(1+a)y}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Luego, en este caso, la ecuación de Pfaff (6.3) se convierte en

$$\left(\frac{1+a}{z}\right)^{\frac{1}{2}} dz = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx + \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} dy$$

con solución

$$\{(1+a)z\}^{\frac{1}{2}} = (ax)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + b,$$

y la cual es, por tanto, la integral completa de (6.13). ■

6.1. Comentarios bibliográficos

Nos hemos basado en el libro de Ian N. Sneddon [13] y en la bibliografía [6] para el desarrollo de este capítulo.

Nótese que este método es también conocido como el método de Charpit.

Apéndice A

Resultados básicos

En esta sección se expondrá resultados auxiliares que hemos utilizado a lo largo del trabajo.

A.1. Teorema de Schwarz

Teorema A.1.1 (Schwarz) *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *con* A *abierto, y sea* $a \in A$. *Si* f *en* A *existen las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i},$$

y la derivada $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ *es continua en* a, *entonces existe la derivada* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, *y se verifica que*

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Nota A.1.1 *Para el lector interesado, más detalles se pueden encontrar en la referencia [2].*

A.2. Teorema de existencia y unicidad del Problema de Cauchy para EDPs de primer orden

Teorema A.2.1 *Consideremos el problema de Cauchy*

$$(P) \begin{cases} f_1(x_1, x_2, u)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2, u)u_{x_2} = f(x_1, x_2, u) \\ u(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = \beta(s) \end{cases} \tag{A.1}$$

donde

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s))$$

es la curva dato y cuyo problema verifica las siguientes hipótesis:

(I) ***Hipótesis sobre la ecuación:***

(1) $f_1, f_2, f \in C^1(\Omega)$ *siendo* $\Omega \in \mathbb{R}^3$ *un dominio abierto, es decir, subconjunto abierto y conexo de* $\mathbb{R}^3$.

(2) $|f_1| + |f_2| > 0$ *para cada* $(x_1, x_2, u) \in \Omega$.

La condición (1) da la condición suficiente de regularidad, y la condición (2) asegura la existencia de una ecuación en derivadas parciales en todo Ω *(no degenerada).*

(II) ***Hipótesis sobre la curva dato:***

(1) $\gamma \in C^1(I)$ *donde* $I \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo y* $\gamma(s) \in \Omega$ *para cada* $s \in I$*, es decir,* γ *es una aplicación definida de la forma:*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

(2) $|\alpha_1'(s)| + |\alpha_2'(s)| > 0$ *sobre el intervalo* I*. Esta condición establece que en ningún punto la curva tiene tangente paralela al eje* Ou*. (Entendemos que nuestra solución se podrá representar en los ejes de coordenados (x,y,u)).*

(3) La condición de transversalidad se postula sobre las dos primeras coordenadas, o sea,

$$J = \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \alpha_2'(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

para cada $s \in I$

Entonces, el problema (A.1) tiene única solución local u*, con derivadas primeras continuas.*

Nota A.2.1 *El enunciado de este teorema se ha tomado del libro de I. Peral, [12].*

A.3. Teorema de Young

Teorema A.3.1 (Young) *Sea* $f : \Omega \to F$ *definida en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*. Se supone que* $\boldsymbol{a}$ *posee un entorno* $V_{\boldsymbol{a}} \subset \Omega$ *donde existen las derivadas parciales* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ $(i \neq j)$ *y ambas son diferenciables en* $\boldsymbol{a}$*. Entonces se verifica*

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}.$$

En particular , si f *es diferenciable dos veces en* $\boldsymbol{a}$*, para cada par de índices* $1 \leq i < j \leq n$*, se cumple* $\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}$.

Nota A.3.1 *Este teorema puede ser consultado en la referencia [14], o bien en [2].*

A.4. Solución general de una Ecuación Lineal en Derivadas Parciales

En esta sección se ha introducido un resultado necesario en la explicación de la resolución de una Ecuación Lineal en Derivadas Parciales de Primer Orden por el Método de Charpit, el cual ha sido descrito en el Capítulo 6.

Teorema A.4.1 *Si* $u_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, z) = c_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ *son soluciones independientes de las ecuaciones*

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R},$$

entonces la relación $\Phi(u_1, u_2, \cdots, u_n) = 0$*, en la cual la función* Φ *es arbitraria, es una solución general de la Ecuación Lineal en Derivadas Parciales de Primer Orden*

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + P_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = R.$$

Demostración. Consideremos la prueba de este teorema para el caso $n = 2$. Sean

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ u_1 = u \\ u_2 = v \\ P_1 = P \\ P_2 = Q \end{cases}$$

Si las ecuaciones

$$u(x, y, z) = c_1, \quad v(x, y, z) = c_2$$

satisfacen las ecuaciones

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{A.2}$$

entonces las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0$$

y (A.2) deben ser compatibles. En otras palabras, debemos tener

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

De manera similar debemos tener

$$P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones para P, Q, y R encontramos que

$$\frac{P}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}} = \frac{Q}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)}} = \frac{R}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} \tag{A.3}$$

donde $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ denota el Jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Consideramos ahora la relación

$$\Phi(u,v) = 0. \tag{A.4}$$

Diferenciándola con respecto a x e y, obtenemos las ecuaciones

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

y si ahora eliminamos $\partial\Phi/\partial u$ y $\partial\Phi/\partial v$ de estas ecuaciones, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \tag{A.5}$$

la cual es una Ecuación en Derivadas Parciales de Primer Orden. Sustituyendo las ecuaciones (A.3) en la ecuación (A.5), observamos que (A.4) es una solución de la ecuación

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R$$

como deseamos mostrar. ■

Nota A.4.1 *Consultar referencia [13] para más información. En dicha referencia se puede encontrar la prueba para el caso general.*

A.5. Teorema de la función implícita

Teorema A.5.1 (de la función implícita) *Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supongamos que:*

(1) $F(x,y) := F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) \in C^p(A)$, $p \geq 1$,

(2) $F(x_0,y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}, y_0) = 0$,

(3) $F_y(x_0,y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0.$

Entonces existe un abierto $I = I_x \times I_y = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k)$ alrededor del punto (x_0, y_0), $I \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \to I_y \subset \mathbb{R}$ tal que:

(1) $F(x,y) = 0$ *en* I *si y sólo si* $f(x) = y$,

(2) $f(x) \in C^p(I_x)$.

(3) Para todo $x \in I_x$*, las derivadas parciales de* $f(x)$ *se calculan por la fórmula*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_i} = -[F_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F_x(x, f(x))], \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Nota A.5.1 *El enunciado de este teorema se ha tomado de la referencia [2].*

Bibliografía

[1] A. Alcaraz. Apuntes de la asignatura *Matemáticas II* de la titulación Arquitecto-P98.

[2] R. Álvarez Nordase. Apuntes de la asignatura *Diferenciación de Funciones de Varias Variables*. Dpto. Análisis Matemático. Facultad de Mattemáticas, Universidad de Sevilla. Curso 2013/2014.
http://euler.us.es/˜renato/

[3] Apuntes de la asignatura *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico. Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla. Curso 2013/2014

[4] M. Born, *Natural Philosophy of Cause and Chance*, Appendix 7, p.144. Oxford, London, 1949.

[5] C. Conde (UPM), E. Schiavi (URJC), A.I. Muñoz (URJC), *Introducción a las EDP*. Apuntes de la asignatura *Métodos Matemáticos de la Ingenieria Química*. Curso 2006 /2007.

[6] M. Delgado, *The Lagrange-Charpit Method*. SIAM Rev. 39 (1997), nº. 2, 298-304. http://www.siam.org/journals/sirev/39-2/29353.html

[7] C. M. Díaz Sánchez, *El problema de Cauchy para EDP de primer orden*. Trabajo Fin de Grado. Universidad de Sevilla. Facultad de Matemáticas. Sevilla, 2015.

[8] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Editorial Mir, Moscú, 1969.

[9] J. A. Facenda y F. J. Freniche, *Integración de funciones de varias variables*. Ed. Pirámide.

[10] F. J. Freniche Ibáñez. Apuntes de la asignatura *Integración de Funciones de Varias Variables*. Dpto. Análisis Matemático. Facultad de Mattemáticas, Universidad de Sevilla. Curso 2013/2014.
https://personal.us.es/freniche/

[11] E. L. Ince y I. N. Sneddon, *The solution of ordinary differential equations*. New York, 1987.

[12] I. Peral, *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Addison-Wesley/ Universidad Autónoma de Madrid, Wilmington, 1995.

[13] Ian N. Sneddon, *Elements of Partial Differential Equations*. NY, Toronto, Londres 1957.

[14] G. Vera, *Lecciones de Análisis Matemático II*, 2008.