CAPÍTULO 4

El concepto de desigualdad en Vilfredo Pareto (1848-1923)

Jesús Basulto Santos
J. Javier Busto Guerrero
Rocío Sánchez Lissen
Universidad de Sevilla

Introducción

Vilfredo Pareto desarrolló su concepción de desigualdad de las rentas en el Tomo II del *Cours d'Économie Politique*, en el *Manuale di Economia politica* y en la traducción al francés de este manual.

En el *Cours,* Pareto propone un criterio general para medir la desigualdad de las rentas, y habla de "disminución de la desigualdad de las rentas" al comparar, según su criterio, dos distribuciones de rentas. Esta expresión creó tanta ambigüedad y confusión entre sus coetáneos que le conduce a cambiarla por "disminución de la desigualdad de la proporción de las rentas" (Pareto, 1909).

Es L. Von Bortkiewicz (1868-1931) quien, desde la estadística matemática, formaliza el criterio general de Pareto comparando dos funciones de distribución, donde una de ellas no es superior a la otra. Esta formalización es la que en nuestros días se denomina "dominancia estocástica de grado uno".

Al comparar dos distribuciones de renta, Pareto observó, en algunos casos, que las curvas que representaban esas distribuciones se cortaban en un punto de renta, de forma que desde la renta mínima hasta ese punto la desigualdad disminuía y desde el punto de corte hasta la renta máxima la desigualdad aumentaba. Pero ese punto de corte era una renta muy alta y, además, la proporción de individuos que detentaban una renta menor que la renta de corte superaba el 90% de la población considerada. De ahí concluía que su criterio de desigualdad seguía siendo válido para casi todo el rango de las rentas.

Así mismo, estudia las consecuencias derivadas de la aplicación de su criterio de desigualdad a la ley de rentas de tipo II, donde analiza como influye la variación de la desigualdad en la variación de las rentas mínima y media, y recíprocamente.

Se organiza este trabajo comenzando con un pérfil biográfico de V. Pareto. En la sección 3) se estudia el concepto de desigualdad. Para una mejor comprensión de las secciones posteriores se describe la ley de las rentas. En la sección 5) se analizan las consecuencias económicas derivadas de la aplicación del criterio de desigualdad a la ley de tipo II. Las consecuencias generales de la aplicación del criterio de desigualdad se exponen en la sección 6) y son ilustradas con los ejemplos de la última sección.

Perfil biográfico de V. Pareto

En la biografía sobre Pareto realizada por el alemán Franz Borkenau (1941, p.1)[1], este autor señalaba que en la vida de Pareto "no hubo acontecimientos

[1] La relación de trabajos sobre Pareto en forma de biografía es muy amplia. Por orden cronológico cabe señalar los siguientes:
1923. M. Pantaleoni: "Vilfredo Pareto". *Economic Journal,* 33.
1924. M. Pantaleoni: "In occasione della morte di Pareto reflessioni. *Giornale degli economisti*, 34.
1928. G.H. Bousquet: *The work of Vilfredo Pareto*. Minneapolis.
1928. G.H. Bousquet: *Vilfredo Pareto, sa vie et son oeuvre*. París.
1936. F. Borkenau: *Pareto.* London. Edición en castellano del Fondo de Cultura Económica, 1941.
1938. L. Amoroso: "Vilfredo Pareto". *Econometrica*, 6.
1949. J.A. Schumpeter: "Vilfredo Pareto (1848-1923)". *Quarterly Journal of Economics*, 63.
1949. J.A. Schumpeter: Vilfredo Pareto. En *Ten great economists. From Marx to Keynes*. Edición en castellano de Bosch, traducida por Fabián Estapé, 1955.
1951. J.M. Zumalacárregui: *Vilfredo Pareto. 1848-1923*. Consejo Superior de Investigaciones científicas.
1963. G. Busino: "Pareto e le autorità di Losanna". *Giornale degli economisti*, 22.
1968. M. Allais: *Pareto, Vilfredo: contributions to economics*. En *Encyclopedia of the social sciences*, New York.
1987. G. Busino: *Pareto, Vilfredo (1848-1923)*. The New Palgrave. Macmillan.
1998. A.L. Feldman: *Pareto optimality*. The New Palgrave. Dictionary of economics and the law Macmillan.

extraordinarios"; sin embargo, difícilmente pueda encontrarse un economista tan polifacético en sus conocimientos y tan bien formado como Vilfredo Pareto, de ahí que en conjunto pueda calificársele de economista extraordinario.

Pareto nació en París aunque toda su familia era genovesa. El motivo de ello fue que su padre, el marqués Raffaele Pareto, ingeniero agrónomo de profesión, era seguidor de Mazzini[2], - por tanto de ideas liberales y republicanas-, y se exilió de manera voluntaria a Francia por motivos políticos en 1835, donde posteriormente contrajo matrimonio con la francesa María Mettenier. Trece años después, el 15 de julio de 1848 nacía Pareto, recibiendo los nombres de Vilfredo Federico Dámaso. Como más adelante se verá, estas circunstancias políticas relacionadas con su padre, empezarían a influir notablemente tanto en su trayectoria personal como académica, mostrándose desde el principio contrario a los ideales del movimiento mazzinista, y provocando en él luchas interiores de forma continua.

Como ha señalado G. Busino (1987, p. 799), en 1852 Raffaele Pareto, acogido a un indulto, regresó a Italia con su familia donde ejerció como profesor de francés, impartiendo también clases de economía agrícola y de contabilidad. Vilfredo Pareto completó en Italia su formación, logrando graduarse en ciencias físicas y matemáticas en 1867, además de estudiar italiano, latín y griego. En 1869, con 21 años, finalizó la carrera de ingeniero en el Politécnico de Turín, doctorándose con un trabajo sobre el equilibrio de los cuerpos sólidos, mostrando así un temprano interés por las cuestiones de equilibrio[3]. Inmediatamente comenzó a trabajar en una Compañía de Ferrocarriles en Florencia, empleo que ocupó entre 1870 y 1873, donde adquirió una amplia experiencia profesional, administrativa y económica, permitiéndole conocer más de cerca las condiciones de vida de la clase obrera que allí trabajaba, lo que justificaría además su preocupación por el concepto de "desigualdad"como más adelante se verá. En 1873 fue nombrado director de una gran empresa siderúrgica en Vald'Arno, donde permaneció hasta 1880. En estos años colabora, entre otras publicaciones, en L'Economista (Florencia), así como en el Journal des Economistes (París) y en el Giornale degli Economisti.

En Florencia, que era por entonces la capital italiana, Pareto asistía a diversas tertulias, donde coincidía con políticos, artistas y escritores[4], lo que le animó a

---

2 Giuseppe Mazzini (1805-1872), fue un político revolucionario genovés defensor del carbonarismo, una ideología nacida en Italia a principios del siglo XIX, que posteriormente se extendió a Francia, y cuyas principales ideas se centraban en combatir el absolutismo e implantar los principios de la revolución francesa. Mazzini fue el fundador de La Joven Italia en 1831 y de La Joven Europa en 1834, que puede considerarse un antecedente de la unidad europea.

3 El trabajo llevaba por título *Principi fondamentale della teoria dell'elasticitá dei corpi solidi e ricerche sull'integrazione delle equazioni differenziale che ne definiscono l'equilibrio.*

4 Según señala Busino (1987, p. 800), fue a través de las tertulias organizadas por la esposa del alcalde de Florencia Ubaldino Peruzzi, como Pareto se incorporó a esos debates, poniendo como modelos a seguir a Cobden, Gladstone y Molinari, claros defensores de la doctrina librecambista en aquellos momentos.

publicar artículos y folletos y a polemizar en conferencias y mítines sobre el debate entre librecambio y proteccionismo vigente entonces, en los que se mostraba partidario de la libertad económica, convencido de su importancia para la prosperidad de un país, y criticando con dureza las medidas proteccionistas aplicadas por el gobierno italiano. Buena muestra de ello fue su participación en la fundación de la *Adam Smith Society*. Esa fuerte oposición al gobierno[5] y a sus medidas, llevó a Pareto a vaticinar la decadencia económica de Italia, una situación que finalmente no llegaría a producirse, lo que motivó en él una violenta reacción, llevándole a una severa autocrítica que le condujo a indagar en las ideas marxistas, con la publicación en 1893 de una introducción a *El Capital* (resumido por Deville, y acompañado de un apéndice realizado por Paul Lafargue)[6], -edición posterior a otra aparecida en 1883 con motivo de la muerte de Marx-, y más adelante con la publicación en dos volúmenes, en 1903, de *Les Systèmes Socialistes*. Posteriormente, otra de las consecuencias de esa autocrítica de Pareto, fue el análisis que realizó de las luchas sociales, a través de la llamada circulación cíclica de las elites, un término que se puede identificar con el de minoría dominante en una sociedad. Estas aportaciones de Pareto desembocarían en la publicación, en 1916, de su conocido *Tratado de Sociología*, que incluye la llamada “teoría de la circulación de la elites” la cual, según señaló Mariano Sebastián (1949, p. 471), es “una especie de mecánica social de sentido fatalista que va eliminando los elementos superiores de la vida social a un ritmo más o menos rápido”. El estudio de la sociología ha de entenderse en Pareto como indispensable para conocer el comportamiento humano y proporcionar a la Economía una base de estudio más sólida (Busino, 1987, p. 802).

A finales de la década de los 70 del siglo XIX, se puede decir que Pareto había completado con excelente aprovechamiento una formación de carácter multidisciplinar, enriquecida con su trabajo profesional como ingeniero, que le había permitido viajar y conocer ampliamente la realidad económica de varios países europeos, por lo que había abonado el terreno para comenzar su labor como teórico de la economía. Se trataba por tanto, de un proceso que iba desde la economía aplicada a la teoría económica, o como también señaló Zumalacárregui (1951, p. 21), “de abajo arriba”. Ese interés que empezaba a mostrar por la ciencia

[5] Fue durante la segunda mitad de los años 70, cuando el líder del partido de izquierda, Depretis, Primer Ministro italiano, aglutinó a los grupos políticos del “Risorgimento” a través de una táctica parlamentaria denominada “transformismo”, que consistía en concederles subvenciones estatales y empleos lucrativos, entre otras medidas, cuyas consecuencias podrían ser la incompetencia y la corrupción.

[6] Esta obra fue traducida al español en 1932 con el título de *El Capital, resumido por Gabriel Deville. Nueva traducción española precedida de un estudio crítico por Vilfredo Pareto. Seguida de un apéndice por Pablo Lafargue*. Madrid, Francisco Beltrán. Por su parte Paul Lafargue, como es sabido yerno de K. Marx, huyó de París ante la represión que estaba sufriendo la Comuna de esa ciudad y se instaló en Madrid.

económica, se intensificó aún más al conocer a Maffeo Pantaleoni en 1890[7], quien le aconsejó que estudiara a fondo la obra de Walras, *Elementos de Economía política pura*. Además, fue Pantaleoni quien intercedió para que Pareto ocupara en 1894, la cátedra que Walras había dejado vacante por su jubilación en la Universidad de Lausana. A partir de ese momento, comienza Pareto su labor de publicación como teórico de la economía. Su obra científica más relevante, se concentra en un periodo relativamente corto de tiempo (unos 23 años), comprendido entre 1896, cuando publica en Lausana *La courbe des revenus*, y 1919, año de la publicación en francés de su conocido *Traité de sociologie générale*. En el ámbito de la teoría económica, Pareto ha destacado por la publicación de su *Cours d'economie politique* en 1896 (tomo I) y en 1897 (tomo II). Asimismo cabe señalar la aparición en italiano unos años después de su *Manuale d'economia politica* en 1906, que fue traducido al francés y publicado en 1909 en versión revisada y ampliada, con un apéndice matemático.

Para valorar en conjunto la obra de Pareto, podemos acudir a la síntesis que hizo Schumpeter en su *Historia del análisis económico* (2004, <1954>, p. 819), al señalar que el ámbito de influencia internacional de Pareto se concretaba en cuatro principales aspectos, los cuales pueden resumirse en tres: la sociología, la llamada "ley de Pareto" sobre la distribución de la renta y sus aportaciones como teórico puro, con especial referencia a su teoría del valor, la cual perfeccionó respecto a la de los marginalistas Jevons y Walras. En cuanto a esto último cabe destacar la sustitución del concepto de "utilidad" por el más amplio de "ofelimidad", derivado del griego, con el que se refería a la propiedad que tiene un bien para favorecer el desarrollo y la prosperidad de un individuo. Asimismo, desarrolló la teoría del equilibrio estático en el mercado de bienes, con la determinación simultánea de las cantidades y precios de todos los bienes intercambiados en el mercado. Tampoco podemos olvidar la contribución de Pareto a la "Nueva Economía del Bienestar", campo en el que destacó por su conocido concepto de "óptimo de Pareto", que abordaba el problema de la máxima satisfacción colectiva.

Centrándonos ahora en la denominada "ley de Pareto", cabe señalar que tuvo su origen en un artículo publicado por su autor en 1895 en el *Gionarle degli Economisti*, al que siguió el ensayo *La courbe des revenus*, aparecido en 1896 y fue analizado más a fondo en el volumen II de su *Cours* (apartados 957-65), así como en el capítulo VII del *Manuel* (apartados 2-31), dedicado a la población. Como señalaba el propio Pareto en el prólogo de su *Cours,* para explicar el sentido de esa

[7] Poco antes de conocer a Pantaleoni, Pareto se había casado a finales de 1889 con la condesa de origen ruso Alessandrina Bakounine, aunque su matrimonio no fue afortunado y terminó en 1901. Un año después conoció a la francesa Jane Regis, con la que vivió el resto de sus días en la villa de Celigny, cerca de Lausana, y con la que se casó dos meses antes del fallecimiento de Pareto ocurrido en 1923. El motivo de este retraso fue que por ser italiano Vilfredo no podía divorciarse, por lo que decidió nacionalizarse en el Estado Libre del Fiume, y conseguir así el divorcio de la condesa rusa (Cabrillo, 2006, p. 113).

ley: "el examen de los datos proporcionados por la estadística nos ha revelado que la curva que representa la distribución de la riqueza toma una forma cuya expresión matemática es muy sencilla y que es aproximadamente la misma para los distintos países de los que tenemos informes. No es más que una ley empírica, pero es importante y hemos hecho de ella la base de nuestra teoría de la distribución" (Pareto, 1896, p. IV).

Como es sabido esta "ley" no ha estado exenta de polémica y la primera de ellas no se hizo esperar, cuando Edgeworth, al publicar en 1896 una recensión de ese primer artículo de Pareto en el *Journal of the Royal Statistical Society*, señalaba que Pearson se había adelantado a Pareto y había estimado una función de distribución de las rentas similar a la paretiana. Por su parte, Schumpeter (1955, p. 155) se refirió a las dos clases de problemas que planteaba esa "ley": primero la cuestión de la aplicabilidad y segundo la interpretación, al admitir que la distribución de la renta había sido bastante estable a lo largo del tiempo. Posteriormente aparecieron algunas otras polémicas, pero la que más nos interesa destacar aquí es la que mantuvo con G. Sorel, la cual trasciende de los campos económico y estadístico, para abordar aspectos sociales y políticos.

El concepto de desigualdad en Vilfredo Pareto

El estudio de la desigualdad, tomando como base los datos estadísticos de las rentas y de los patrimonios, ha oscilado en apoyo de dos tesis diametralmente opuestas: la primera tesis, sostenida por autores de la escuela liberal, deseaba mostrar la tendencia hacia una menor desigualdad de las condiciones económicas de los individuos; la segunda tesis, sostenida por autores de la escuela socialista y opuesta a la anterior, deseaba mostrar que en la sociedad capitalista las desigualdades económicas se agudizaban en el transcurso del tiempo.

La referencia tomada por Pareto, como punto de partida de su concepción de la desigualdad, es la crítica que Leroy-Beaulieu hace en la introducción de su libro, *Essai sur la repartition des richesses*, a las posiciones mantenidas por el socialista alemán Ferdinand Lasalle en su carta al Comité Central para la convocatoria de un Congreso General de los trabajadores alemanes en Leipzig. El texto de Leroy-Beaulieu es el siguiente:

"Los hechos que hemos reunido rápidamente en esta introducción demuestran con una irresistible evidencia que todas las clases de la nación han participado del progreso general, que, en particular, la clase obrera se ha beneficiado en una triple forma de un crecimiento de su bienestar material, de un crecimiento de la seguridad y de una mejora de su tiempo libre. Se examinará, en el curso de esta obra, si es verdad que los ricos se hacen más ricos; pero desde este momento se puede afirmar que es falso que los pobres se hagan cada día más pobres. Sin embargo, las mejoras parciales y graduales que acabamos de describir no conmueven a los apóstoles de las reivindicaciones populares. Éstos hablan desde la tribuna de la soberbia cuando califican estos progresos de mezquinos e insignificantes. Para ellos, la palabra pobreza no tiene sentido absoluto; indica simplemente una relación entre los medios de disfrute que tiene un individuo y los medios de disfrute que tienen otros miembros de la sociedad. La pobreza, no es la falta de recursos para luchar contra el hambre, contra el frío, contra la enfermedad; la pobreza, es el estado de todo hombre que no puede procurarse todos los disfrutes que cualquiera de sus semejantes se da. Así un obrero bien alimentado, bien vestido, bien alojado, confortablemente amueblado, que tiene algún depósito importante en la caja de ahorros y valores mobiliarios en su cartera, que va el domingo o el lunes en tranvía a pasar el día en el campo y vuelve a la noche para asistir desde lo alto de las plantas superiores a las representaciones de un teatro popular, este obrero se declara pobre porque no tiene ni palacete, ni servicio doméstico, ni coche, ni caballos, ni palco en los grandes teatros."(Leroy-Beaulieu, 1881, pp. 43-44).

Del texto que se acaba de citar se desprende que Leroy-Beaulieu sostiene un concepto de pobreza en sentido absoluto, es decir, habrá una mejora de las condiciones de la clase obrera si su situación actual ha mejorado respecto a tiempos pasados. Por el contrario, la posición sostenida por F. Lasalle es que la desigualdad debe ser medida relacionando sus condiciones actuales con las condiciones en las que viven el resto de las clases, cuyo nivel de renta está por encima de una renta que permita vivir según las necesidades habituales de ese momento. En este sentido, Leroy-Beaulieu, cita, traduciendo del alemán al francés, el texto de Lasalle al que está aludiendo, que dice así:

"Fíjense bien en mis palabras, señores. Puede ocurrir por las razones indicadas que el mínimo necesario de existencia y, por consiguiente, la situación de la clase obrera si se compara la de una generación con la anterior, haya mejorado. Si esto ha ocurrido efectivamente, si realmente el conjunto de la situación de la clase obrera ha mejorado en el curso del tiempo, señores, es una cuestión muy difícil, muy complicada, que implica demasiada ciencia para que hubiesen sido capaces de resolverla, incluso aproximadamente, quienes pretenden distraerles al contarles cuál era el precio del algodón en el último siglo y cuanto tejido de algodón usan ustedes hoy en día, y recorriendo otros lugares comunes análogos que se pueden leer en el primer manual que se tenga a mano……

Cuando ustedes hablen de la situación de la clase trabajadora y de la mejora de su suerte, deben hablar de su situación comparada con la de sus conciudadanos en el presente, comparada en consecuencia con la medida media de las costumbres en los tiempos actuales. Y si quieren distraerles mediante pretendidas comparaciones de su situación con la situación de los trabajadores en siglos pasados……

Cada satisfacción humana depende siempre y solamente de la relación de los medios con las necesidades que se han convertido en habituales en un momento dado, o lo que es lo mismo, de lo superfluo de los medios por encima del límite más bajo de las necesidades que se han convertido en habituales en ese momento. Cada aumento del mínimo de las necesidades habituales aporta con él sufrimientos y privaciones que los tiempos pasados no habían conocido. ¿Qué privación experimenta el Botokoudo si no puede comprar jabón?, ¿el salvaje antropófago si no tiene vestimenta adecuada? ¿Qué privación experimentaría el obrero que antes del descubrimiento de América no tuviera tabaco para fumar? ¿Qué privación sentiría el obrero antes del descubrimiento de la imprenta si no pudiera procurarse un libro útil?......

Todo sufrimiento y toda privación humana, del mismo modo que toda satisfacción humana, y como consecuencia también la situación de cada parte de la humanidad, no pueden medirse más que por comparación con la situación en la que se encuentran otros hombres del mismo tiempo en relación a la media habitual de las necesidades. La situación de cada clase tiene siempre como única medida la situación de las otras clases en el mismo tiempo.

Cuando se compruebe que el nivel de las condiciones necesarias de la existencia se han elevado a lo largo del tiempo, que satisfacciones antes desconocidas se han convertido en necesidades habituales y que con ellas han sobrevenido privaciones y sufrimientos antes desconocidos, vuestra situación humana en tiempos diferentes sigue siendo más o menos la misma, a saber: consiste en la oscilación alrededor del límite extremo de las necesidades habituales de la vida en cada tiempo, tanto si se elevan un poco por encima de este límite, como si permanecen un poco por debajo….

Su situación como hombres pues sigue siendo la misma, ya que su situación como hombres no se mide comparativamente con la situación del animal en la selva virgen, o con la del negro africano, ni con la del siervo de hace doscientos años o incluso del de hace ochenta años; tiene que ser medida con sus compañeros de humanidad, con la situación de otras clases del tiempo que les ha tocado vivir[8]."

Es necesario subrayar que Lasalle, en este texto, no solo propugna una medida relativa de la desigualdad, sino, además, sostiene que la renta mínima ("mínimo de subsistencia digna", lo que el denomina necesidades habituales en cada época) es una cantidad variable en el curso del tiempo.

Pareto, después de establecer su ley de las rentas, en el tomo II del *Cours d'Économie Politique*, trata de fundamentar su definición y concepción de la desigualdad, argumentando como sigue:

"Para estudiar el reparto de las rentas, es necesario considerar el fenómeno en su conjunto. El aumento de las grandes fortunas no indica un aumento general de la

8 *Offenes Antworlschreiben an das Central-Comite zur Berufung eines Allegemeinen Deutschen Arbeiter Congress zu Leipzig. Págs. 15-18.* Traducción del aleman al francés de Leroy-Beaulieu. Nosotros hemos traducido al español el texto en francés.

riqueza, como el aumento del número de centenarios no significa un aumento de la vida media. Del mismo modo, el aumento del número de personas absolutamente miserables no indica un empobrecimiento general del país.

Se confunden a menudo dos cosas completamente diferentes: la disminución de la desigualdad de las fortunas y la disminución del pauperismo. Mientras que la desigualdad de las rentas depende de la parte descendente de la curva de las rentas, el pauperismo depende de la distancia entre la vertical ascendente de la curva de las rentas y el eje de ordenadas[9]. Una población sin pauperismo corresponde a una curva de las rentas con la parte ascendente alejada del eje de ordenadas y la parte descendente con una pequeña pendiente indica una gran desigualdad de las rentas. Cuando la curva de las rentas tiene su parte ascendente muy cerca del eje de ordenadas y la parte descendente tiene una gran pendiente, estamos en el caso de una población con poca desigualdad de las rentas y un gran pauperismo.

Una población con poca desigualdad en las rentas y un pauperismo intenso es puramente hipotética. No encontramos ejemplos de dicha población en la realidad.

¿Pero, cuál es el verdadero significado de los términos: menor desigualdad de las rentas, o de los que se emplean más o menos en el mismo sentido: menor desigualdad de las fortunas, menor desigualdad de las condiciones?

Si se tratara de una igualdad completa de las fortunas o de las condiciones, no habría equívoco posible. Pero uno se puede acercar a este estado de dos maneras esencialmente diferentes: uno se aproxima a ello, tanto si los ricos se convierten en pobres como si los pobres se convierten en ricos[10]. Son dos fenómenos diferentes y, si se tratara de una ciencia positiva, donde los hechos lo son todo y las palabras nada, no dudaría en designar mediante términos diferentes cosas tan diferentes. Pero la economía política no es todavía, a menudo, más que un género literario. En ella se da, en detrimento de los hechos, una gran importancia a las palabras. Se discute pues para saber a cuál de los dos fenómenos indicados debe ser adjudicada la denominación de menor desigualdad de las fortunas" (Pareto, 1897, § 964, p. 318).

Después de un examen minucioso de la cuestión, Pareto llega a la conclusión siguiente:

---

9 Nosotros representamos la curva de las rentas sobre el eje de abscisas, mientras que Pareto lo hace sobre el eje de ordenadas.

10 Sobre esta idea vuelve a insistir en la edición italiana del "Manuale", y dice: "…la renta puede tender a la igualdad de dos modos diferentes, sea porque las rentas mayores disminuyen, sea porque las rentas menores crecen…" (Pareto, 1906, § 24, p. 371).

"En general, cuando el número de personas que tienen una renta inferior a x aumenta[11] en relación al número de personas que tienen una renta superior a x, diremos que la desigualdad disminuye" (Pareto, 1897, p. 320).

Tal parece ser lo que resulta de la más clara de las disertaciones de los escritores más notables; pero Pareto no se hace mucha ilusión sobre el valor de esta definición y en una carta dirigida a Sorel, a propósito de la controversia mantenida con éste, escribe:

"El término *menor desigualdad de las condiciones* no me parece, al igual que a usted, indicar más que lo que se ha visto. De buena gana lo habría sustituido por otro término; pero ya se me ha reprochado bastante la desdichada ofemilidad y he querido evitar nuevas logomaquias a mis críticos. Al menos, he tenido a bien explicar qué era lo que quería decir con ese término". (Sorel, 1987, p.586).

La ambigüedad y confusión de la expresión "disminución de la desigualdad de las rentas" es, también, abiertamente reconocida por Pareto en su *Manuel d'Économie Politique* (1909, p.389). Una síntesis de las posiciones mantenidas por los distintos autores de esa época aparece en (Bresciani-Turroni, 1907, sec. 4), citado por Pareto a pié de página. Por ello Pareto propone:

"Emplearemos pues una terminología todavía bastante imperfecta, y designaremos por *disminución de la proporción de las rentas* un cierto fenómeno que vamos a definir". (Pareto, 1909, p. 389).

Para ilustrar el nuevo término introduce el siguiente supuesto empírico:

"Sea una colectividad A formada por un individuo que tiene 10.000 francos de renta y por nueve individuos que tienen 1.000 francos de renta cada uno de ellos; sea otra colectividad B formada por nueve individuos que tienen cada uno 10.000 francos de renta y de un individuo que tiene solamente 1.000 francos de renta. De momento llamamos "ricos" a los individuos que tienen 10.000 francos de renta, y "pobres" a los individuos que tienen 1.000 francos de renta. La colectividad A contiene un rico y nueve pobres; la colectividad B contiene nueve ricos y un pobre.

El lenguaje vulgar expresa la diferencia entre A y B, diciendo que la desigualdad de las rentas es más grande en A, donde hay un único rico sobre diez individuos, que en B donde por el contrario hay nueve ricos sobre diez individuos. Para evitar todo equívoco, diremos que al pasar de A a B hay una disminución de la proporción de la desigualdad de las rentas". (Pareto, 1909, pp. 389-390)

A continuación, Pareto introduce una definición más precisa del concepto, advirtiendo sobre la errata de imprenta contenida en el "Cours…", y dice así:

[11] Famosa errata, debe de decir disminuye. Véase edición francesa del "Manuel…" y el párrafo anterior de la misma edición francesa.

"En general, cuando el número de personas que tienen una renta inferior a x disminuye[12] en relación al número de personas que tienen una renta superior a x, diremos que la desigualdad *de la proporción* de las rentas disminuye". (Pareto, § 1909, p. 389).

Pareto es, hasta donde llega nuestro conocimiento, el primer autor que formaliza matemáticamente la idea de desigualdad de las rentas. La formalización matemática de este concepto, pensamos, puede aclarar dudas y eliminar confusiones, puesto que el lenguaje matemático ayuda a eliminar las ambigüedades del lenguaje verbal. Sea N_x el número de individuos que poseen una renta mayor o igual x, y N_h el número de individuos que poseen una renta mayor o igual que $h, h > 0,$ la renta mínima. Se define

$$(1) \qquad u_x = \frac{N_x}{N_h}, \qquad para\ todo\ x\ con\ \ x > h\ .$$

"Siguiendo la definición que hemos dado, la desigualdad *de la proporción* de las rentas irá disminuyendo cuando u_x crezca". (Pareto, 1897, § 965, p. 320, nota pié de página).

En efecto, si u_x crece N_x debe crecer (N_h es constante, el número total de individuos considerados, la población). En consecuencia, el número de individuos con una renta inferior a x, $N_h - N_x$, debe disminuir y por ello disminuye la desigualdad *de la proporción* de las rentas. El razonamiento recíproco se deja al lector.

Dos observaciones importantes deben ser hechas por lo que se refiere a la definición de la desigualdad *de la proporción* de las rentas y su correspondiente fórmula matemática (1):

i) *Se trata de un concepto general que se puede aplicar cualquiera que sea la distribución estadística que sigan los datos. Si $F(x)$ es la función de distribución estadística que siguen los datos entonces $u_x = 1 - F(x)$ es la función de supervivencia de la distribución*[13].

ii) *Otra cuestión completamente diferente son las consecuencias y problemas planteados por la concreción de la fórmula* (1) *cuando se supone que los datos siguen la ley de las rentas de Pareto*. Este es el asunto que desarrollamos en las secciones que siguen.

---

12 En el *Cours*, § 964, se lee: aumenta. Es una errata de imprenta, que hemos corregido inmediatamente después de la publicación del *Cours*. Nota de pié de página de Pareto.

13 La idea de considerar la ley de Pareto como una ley aleatoria aparece en (Bortkiewicz, 1931).

La ley del reparto de las rentas de V. Pareto

Para elaborar su ley, Pareto, toma como punto de partida el análisis de los datos de las declaraciones de los contribuyentes para el impuesto de la renta, y argumenta, que a pesar de la incertidumbre de esas declaraciones, es la base más segura de la que se dispone, después de discutir en los parágrafos precedentes (950-956) sobre la fiabilidad y adecuación de otros datos relativos a la renta. Esta labor de recogida de los datos se inicia en 1893, una vez que sucede a Leon Walras en la cátedra de Economía Política de la Universidad de Lausanne, y recopila datos de Francia, Inglaterra, Irlanda, Bélgica, Suiza, los Estados Unidos de América, Prusia... Tomando, en un principio, los datos de las declaraciones de la renta de dos países diferentes socialmente, como lo eran en aquella época Inglaterra e Irlanda (1893-94), razona, como se indica a continuación, con el objetivo de indagar si esas cifras se distribuyen al azar, o se agrupan siguiendo alguna ley[14].

Adoptando las notaciones de Pareto se indicará mediante x una cierta renta, medida en las correspondientes unidades monetarias del país de que se trate; se indicará mediante N_x el número de contribuyentes que tienen una renta igual o superior a x. En el plano cartesiano toma sobre el eje de abscisas los logaritmos de x y sobre el eje de ordenadas los logaritmos de N. Observa que los puntos así determinados , $(\log x, \log N_x)$, tienen una tendencia muy marcada a disponerse en línea recta, e incluso un hecho que Pareto considera más notable: que esas rectas son todas ellas casi paralelas. La ecuación de esta recta puede ser representada por:

$$\log N_x = \log A - \alpha \log x \ , \tag{2}$$

lo que da origen a su primera ley de reparto

$$N_x = \frac{A}{x^\alpha}\ , \qquad A > 0, \qquad x \geq h, \qquad \alpha > 1, \qquad h > 0\,. \tag{3}$$

Cuando nos refiramos a la fórmula anterior (3), hablaremos de ley de Pareto tipo I.

Para estimar los parámetros A y α utiliza una interpolación de Cauchy en (2), que dice ser suficiente en una primera aproximación, o incluso un método gráfico mediante papel milimetrado. Añade que la ecuación general de la curva quizás debería ser

---

14 Una crítica a la calidad y al uso que hace Pareto de los datos estadísticos se puede ver en (Sorel, 1897, pp. 593-596). La respuesta de Pareto a esta crítica se puede ver en (Pareto, 1965, pp. 42-47).

$$\log N_x = \log A - \alpha \log(a + x) - \beta x \ , \tag{4}$$

pero es solamente para el caso del ducado de Oldenburg para el que encuentra un valor de β que no es despreciable y, en general, se tiene simplemente

$$\log N_x = \log A - \alpha \log(a + x) \ , \tag{5}$$

que define su segunda ley de reparto

$$N_x = \frac{A}{(x + a)^{\alpha}} \ , \qquad h + a > 0 \ . \tag{6}$$

Cuando se trata de la renta total, a es también, en general, despreciable, muy pequeño, en la mayor parte de los casos, del orden de los errores de observación, lo que conduce a la ecuación (3). Cuando se trata de rentas mobiliarias el parámetro a no debe ser despreciado, incluso puede adquirir valores bastante considerables.

Cuando nos refiramos a la fórmula anterior (6), hablaremos de ley de Pareto tipo II.

Una vez establecidas las fórmulas anteriores, Pareto se dedica a contrastar las fórmulas con otros datos y llega a las siguientes conclusiones:

a) Para los casos examinados de Prusia (1876, 1881, 1886, 1893-94, 1894-95), Sajonia (1880, 1886)…, además de los ya citados de Inglaterra e Irlanda, la recta logarítmica se ajusta muy bien, en el sentido de que las desviaciones entre los logaritmos de N_x teóricos y los correspondientes logaritmos empíricos son muy pequeñas.

b) Las rectas de los logaritmos empíricos y las rectas ajustadas son casi paralelas. De hecho, observa Pareto, los valores calculados de α mediante interpolación (la pendiente de las rectas) varían poco, entre 1,13 (Augsburg ,1526) y 1,89 (Prusia, 1852)

c) De las consideraciones a) y b), concluye Pareto: "Es absolutamente imposible admitir que sean debidos solamente al azar. Hay ciertamente una *causa* que produce la tendencia de las rentas a disponerse siguiendo una cierta curva. La forma de esta curva parece depender de una forma bastante débil de las diferentes condiciones económicas de los países considerados, puesto que los efectos son mas o menos los mismos para países cuyas condiciones económicas son tan diferentes como las de Inglaterra, Irlanda, Alemania, ciudades italianas, e incluso Perú" (Pareto, 1897, § 960, p. 312).

d) No obstante, el carácter general de la afirmación anterior queda matizada y valorada en su justo término con la siguiente consideración: "…cuando se trata de leyes puramente empíricas, se debe de ser extraordinariamente prudente. En cualquier caso, las consecuencias que vamos a extraer de esta ley serán siempre válidas, al menos, para los pueblos para los cuales hemos visto que se verifican". (Pareto, 1897, § 960, p. 312).

El enfoque de la ley de reparto de las rentas de Pareto, como se puede observar, se caracteriza por la elección de la variable renta como variable continua, frente a otros autores que toman esta variable como discreta (tramos de renta) y fija su atención en la distribución socioeconómica en su conjunto, frente a la búsqueda de un estadístico numérico que resuma la distribución.

Reproducimos en lo que sigue los razonamientos que hace Pareto en el "Cours"(1897, § 958 y § 961, notas pié de página) para obtener las curvas de frecuencia, el número total de los individuos de la población considerada, la renta total, y la renta media para las leyes de tipo I y II.

El numero de rentas comprendidas entre x y $x + dx$, es

$$ydx = -\frac{dN_x}{dx}dx,$$

es decir, en el caso de la ecuación (3),

$$ydx = \frac{\alpha A}{x^{\alpha+1}}dx \, ,$$

y en el caso de la ecuación (6),

$$ydx = \frac{\alpha A}{(x+a)^{\alpha+1}}dx \, .$$

En los dos casos la función y, como se puede observar en las dos ecuaciones que anteceden, es decreciente respecto a x y tiene por asíntota la dirección positiva del eje de abscisas.

La población es para la ley de tipo I (3),

$$N_h = \frac{A}{h^\alpha} \, . \tag{7}$$

La población es para la ley de tipo II (6),

$$N_h = \frac{A}{(h+a)^\alpha} \, . \tag{8}$$

La suma de las rentas entre h $(renta\ mínima)$ y k $(renta\ máxima)$ está dada por la ecuación (ley tipo II)

$$R = \int_h^k \frac{\alpha A x}{(x+a)^{\alpha+1}} dx .$$

Efectuando esta integral, se obtiene

$$(9) \qquad R = A \frac{\alpha h + a}{(\alpha - 1)(h+a)^{\alpha}} \quad A \frac{\alpha k + a}{(\alpha - 1)(k+a)^{\alpha}} ,$$

Teniendo en cuenta (8), la fórmula anterior se puede escribir:

$$R = \frac{\alpha h + a}{(\alpha - 1)} N_h - A \frac{\alpha k + a}{(\alpha - 1)(k+a)^{\alpha}} N_k ,$$

Cuando $\alpha > 1$ y k es suficientemente grande $(k \to \infty)$, el segundo sumando del miembro de la derecha de la fórmula (9) tiende a cero, por lo que se tiene

$$R = \int_h^k \frac{\alpha A x}{(x+a)^{\alpha+1}} dx = \frac{\alpha h + a}{(\alpha - 1)} N_h .$$

Haciendo $a = 0$ en la fórmula anterior se obtiene el montante de las rentas para la ley de tipo I,

$$(10) \qquad R = \frac{\alpha h}{(\alpha - 1)} N_h .$$

El montante de las rentas para la ley de tipo II es,

$$(11) \qquad R = \frac{\alpha h + a}{(\alpha - 1)} N_h .$$

La renta media[15] para la ley de tipo I es,

$$(12) \qquad z = \frac{R}{N_h} = \frac{\alpha h}{(\alpha - 1)} ,$$

15 Para designar la renta media seguimos la notación empleada por Pareto, z. Más adelante utilizaremos la letra griega μ.

La renta media para la ley de tipo II es,

$$z = \frac{R}{N_h} = \frac{\alpha h + a}{(\alpha - 1)}. \tag{13}$$

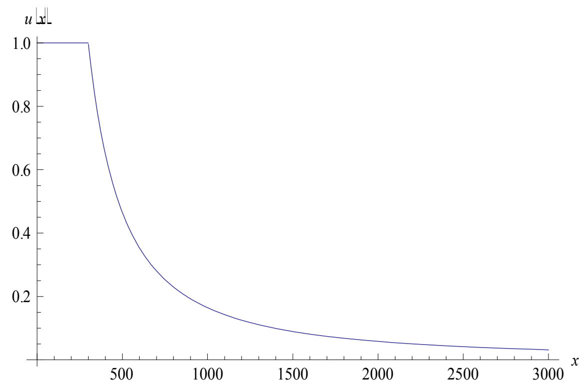
Si suponemos que los datos siguen la ley de las rentas de Pareto, la fórmula de la proporción de la desigualdad (1) se expresará, si tenemos en cuenta (7), para la ley de tipo I por

$$u_x = \left(\frac{h}{x}\right)^{\alpha}, \tag{14}$$

y para la ley de tipo II, teniendo en cuenta (8), por

$$u_x = \left(\frac{h + a}{x + a}\right)^{\alpha}. \tag{15}$$

A continuación se muestra la grafica de la ecuación (15) para $\alpha = 1{,}5$, $h = 300$, $a = 0$. Hemos tomado $u_x = 1$, para $0 \leq x < 300$, renta máxima $k = 3000$.



En el apartado c) de esta sección, hemos aludido al hecho de que Pareto consideraba su ley como determinista y no aleatoria. En Bortkiewicz (1931, pp. 222-224) aparece un buen estudio del concepto desigualdad de Pareto y el tratamiento de la ley como aleatoria. En este sentido, u_x es la función de supervivencia de la ley de Pareto, considerada ésta como aleatoria.

Las funciones de supervivencia y distribución de la ley de tipo I son

$$u_x = 1 - F(x) = \begin{cases} \left(\frac{h}{x}\right)^{\alpha}, & x \geq h > 0 \\ 1, & 0 \leq x < h \end{cases} \tag{16}$$

y

$$(17) \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{h}{x}\right)^{\alpha}, & x \geq h > 0 \\ 0, & 0 \leq x < h \end{cases},$$

respectivamente.

Las funciones de supervivencia y de distribución de la ley de tipo II son

$$(17) \qquad u_x = 1 - F(x) = \begin{cases} \left(\frac{h+a}{x+a}\right)^{\alpha}, & x \geq h > 0 \\ 1, & 0 \leq x < h \end{cases}$$

y

$$(18) \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{h+a}{x+a}\right)^{\alpha}, & x \geq h > 0 \\ 0, & 0 \leq x < h \end{cases},$$

respectivamente, donde el parámetro a es un número real que verifica que $h + a > 0$.

Otra versión de ley de Pareto de tipo II, resulta del cambio de parámetro $b = h + a$. Con ello conseguimos un nuevo parámetro positivo, que permite una mejor manipulación de la ley en las secciones que siguen. Entonces la fórmula (18) se expresaría:

$$(19) \qquad u_x = 1 - F(x) = \begin{cases} \left(\frac{b}{b+(x-h)}\right)^{\alpha}, & x \geq h > 0 \\ 1, & 0 \leq x < h \end{cases}.$$

Cuando $b = h$, se obtiene la ley de tipo I.

La función cuantil es la función inversa de la función de distribución (en el caso continuo), que denominamos

$Q: u \in [0,1) \longrightarrow Q(u) \in [0,\infty), \; F(Q(u)) = u$.

Por tanto, la función cuantil para la ley de tipo II es, con el nuevo parámetro,

$$(20) \qquad Q(u) = h - b + b(1-u)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Consecuencias económicas de la ley de Pareto

Estudiamos en esta sección, siguiendo a Pareto (1897, § 965, pp. 320-326), las consecuencias económicas de la aplicación de la ley de las rentas de tipo II a su definición de la desigualdad de la *proporción* de las rentas.

En el "Cours" (obra citada), Pareto estudia las relaciones que se pueden dar entre las variaciones de la renta mínima, las variaciones de la desigualdad de las rentas y las variaciones de la renta media, al comparar dos distribuciones de renta: distribución de renta 1 de parámetros α_1, h_1, a_1, b_1, función de supervivencia u_{1x} y función de distribución F_1; distribución de renta 2 de parámetros α_2, h_2, a_2, b_2, función de supervivencia u_{2x} y función de distribución F_2.

Comienza, pues, enunciando la siguiente proposición que demuestra, recurriendo a las matemáticas, en las notas a pié de página:

"Los efectos siguientes: 1º un aumento de la renta mínima, 2º una disminución de la desigualdad de las rentas, no se pueden producir, sea aisladamente, sea acumulativamente, más que si el total de las rentas crece más deprisa que la población". (Pareto, 1897, § 965, p. 320).

Son tres las proposiciones implicadas en este texto, que enunciamos separadamente, a saber:

1) *Si permanece constante la desigualdad de las rentas y la renta mínima aumenta, entonces la renta media aumenta.*
2) *Si disminuye la desigualdad de las rentas y la renta mínima permanece constante, entonces la renta media aumenta.*
3) *Si disminuye la desigualdad de las rentas y aumenta la renta mínima, entonces aumenta la renta media.*

Para la justificación de estas afirmaciones, Pareto calcula la diferencial de $\log u_x$. Considerando u_x como función de los parámetros h, a, α, se obtiene

$$(21) \qquad \frac{du_x}{u_x} = \log\frac{h+a}{x+a}d\alpha + \alpha\left[\frac{1}{h+a} - \frac{1}{x+a}\right]da + \alpha\frac{1}{h+a}dh.$$

Ahora bien, Pareto calcula la diferencial considerando u_x como función de los parámetros a y α, es decir, toma h, la renta mínima, constante. Por tanto, obtiene para (21) la expresión

$$(22) \qquad \frac{du_x}{u_x} = \log\frac{h+a}{x+a}d\alpha + \alpha\left[\frac{1}{h+a} - \frac{1}{x+a}\right]da.$$

Por lo que se refiere a la proposición 1), la hipótesis de que permanece constante la desigualdad de las rentas, significa, que las funciones de supervivencia que está comparando son iguales, $u_{1x} = u_{2x}$, y, por tanto, sus funciones de distribución son iguales. En consecuencia, la renta mínima debe ser la misma y no tiene sentido la hipótesis de que la renta mínima aumente. Por otra parte, para justificar esta proposición Pareto utiliza la fórmula (22), que supone h constante, lo que contradice su hipótesis de que la renta mínima aumenta. Todo ello nos conduce a afirmar que la proposición 1) no es válida[16].

En cuanto a las proposiciones 2) y 3), la hipótesis de la disminución de la desigualdad significa que las funciones de supervivencia verifican que $u_{2x} \geq u_{1x}$ y las funciones de distribución $F_2(x) \leq F_1(x)$, para todo $x > 0$ y en algún x la desigualdad es estricta. Aplicando una integración por partes en la fórmula de la media de las distribuciones, se obtiene $z_2 \geq z_1$, es decir la renta media aumenta. Este es un razonamiento general, independiente de la ley que siga la distribución[17].

En el supuesto de que la renta mínima permanezca constante, es correcta la fórmula (22), y Pareto afirma:

"Si se hace variar a la vez α y a, la desigualdad de las rentas disminuirá cuando α decrezca y a crezca. Pero si α crece a la vez que a, no se puede decir, en general, si la desigualdad de las rentas crece o decrece. Esta desigualdad aumentaría para ciertas rentas y disminuiría para otras." (Pareto, 1897, p. 321, nota (2)).

Es decir, se trata de dos distribuciones de rentas cuyas funciones de supervivencia se cortan en un punto y no serían comparables.

En el ejemplo siguiente:

	α	h, Renta mínima	a
1	1.3	100	0
2	1.4	100	10

La función de supervivencia 2 está por encima de la 1 hasta la renta 172 para pasar a situarse por debajo, de la renta 172 en adelante. Así entre la renta mínima, 100, y la renta 172 la desigualdad disminuye; y a partir de la renta 172 la desigualdad aumenta.

A continuación, Pareto trata de probar las proposiciones recíprocas de las anteriores que expresa así:

16 Para una discusión de la validez de esta proposición véase (D'Addario, 1933, p. 182).

17 Este resultado se estudia con detalle en la sección siguiente.

> "*Siempre que el total de las rentas aumente más rápidamente que la población, es decir cuando la media de las rentas aumenta para cada individuo, se puede constatar, separadamente o conjuntamente, los efectos siguientes: 1º un aumento de la renta mínima; 2º una disminución de la desigualdad de la proporción de las rentas*". (Pareto, 1909, § 29, p.392).

Es en el "Cours" donde recurre a las matemáticas para probar estas proposiciones. Para ello considera la renta media (13), a la que esta vez expresa como función de los tres parámetros. Calcula la diferencial de la renta media,

$$dz = \frac{\alpha}{\alpha - 1} dh + \frac{1}{\alpha - 1} da - \frac{h + a}{(\alpha - 1)^2} d\alpha \tag{23}$$

y enuncia la primera proposición,

"1º Si la desigualdad de las rentas no cambia, es decir si da y $d\alpha$ son nulos, dz no puede aumentar más que si dh crece y viceversa. El aumento total de las rentas, en relación a la población, produce pues necesariamente el aumento de la renta mínima y viceversa." (Pareto, 1897, p. 322, nota (4)).

En la prueba de esta proposición, Pareto vuelve a considerar, pensamos erróneamente, que u_x es función de los parámetros a y α y que la renta mínima no varía. De ahí que al considerar $da = d\alpha = 0$, deduzca

$$dz = \frac{\alpha}{\alpha - 1} dh \tag{24}$$

y entonces si la renta mínima aumenta, la renta media debe aumentar. Es necesario resaltar que en este razonamiento considera, implícitamente, que la renta mínima no varía y, explícitamente, que varía. Por otra parte, de (24) se deduce que si la renta media aumenta, entonces debe aumentar la renta mínima.

La segunda proposición la enuncia así:

"2º Si la renta mínima h permanece constante, es decir si dh es nulo, la disminución general de la desigualdad de las rentas se produce cuando a crece o α decrece y, entonces, dz crece. La disminución general de la desigualdad de las rentas no puede ser obtenida más que si el total de las rentas aumenta en relación a la población". (Pareto, 1897, p. 322, nota (4)).

Se puede observar que esta proposición es un caso particular de las primeras proposiciones. La razón por la que Pareto reitera la misma idea, se debe a que va plantear la inversa de esta proposición:

"La inversa no es cierta, porque el aumento de dz puede producirse cuando da y $d\alpha$ son positivos, lo que aumenta la desigualdad de ciertas rentas y disminuye la de otras". (Pareto, 1897, p. 322, nota (4)).

Es decir, que un aumento de la renta media no implica, en general, una disminución de la desigualdad. De hecho, en algunos casos, se puede producir un aumento de la desigualdad de algunas rentas y una disminución de la desigualdad para otras, como se muestra en el siguiente ejemplo:

	α	h, *Renta mínima*	a	z, *Renta media*
1	1,3	100	0	433,3
2	1,4	100	40	450

Puesto que esta proposición inversa, con carácter general, no es cierta, Pareto recurre a otro tipo de argumentos con el fin de demostrar la proposición 2º, y continúa diciendo:

"Pero la ecuación (23) hace ver que es necesario, para ello, admitir que a varíe poco, lo que excluye, al menos en general, las rentas totales, para las cuales, como se ha visto, a es nulo o muy pequeño."

Para ilustrar esta afirmación, Pareto toma como distribución de referencia la del reino de Saxe de 1886 (distribución 1), cuyos valores de los parámetros son:

$$\alpha_1 = 1{,}5, \qquad h = 100, \qquad a_1 = 0, \qquad z_1 = 900 .$$

Después hace variar el parámetro alfa,

$$\alpha_2 = 1{,}6\,, \alpha_3 = 2,$$

manteniendo la renta mínima constante, con una renta media, en ambos casos, que crece 1,2 veces: $z_2 = z_3 = 1.080$.

Para el cálculo del parámetro a de las distribuciones 2 y 3, utiliza la fórmula (13) obteniendo:

$$a_2 = 168, \qquad a_3 = 480 .$$

Para comparar las distribuciones 1 y 2, calcula la renta x correspondiente al punto donde las funciones de supervivencia se cortan, mediante la fórmula

(25)
$$\frac{u_{2x}}{u_{1x}} = \left(\frac{x}{h}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{h+a_2}{x+a_2}\right)^{\alpha_2}.$$

La renta de corte es la x donde (25) es igual a la unidad, $x = 367.000$ marcos. Cuando (25) es mayor que la unidad entonces la desigualdad de las rentas disminuye y cuando es menor que la unidad aumenta. Sobre un total de un millón de individuos, calcula que hay 941.000 individuos con una renta por debajo de 2.000 marcos.

Por lo que se refiere a la comparación de las distribuciones 1) y 3), siguiendo el mismo procedimiento, obtiene para la renta de corte $x = 11.650$ marcos. Sobre un total de un millón de individuos, calcula que hay 901.000 individuos con una renta por debajo de 11.650 marcos. (Pareto, 1897, § **965**, pp. 323-324).

Pareto concluye, resumiendo estos razonamientos teóricos y empíricos, y dice así:

"La restricción que hemos debido hacer desde el punto de vista teórico, no ha lugar, en la práctica, sea porque la ley que supone para la distribución de las rentas totales, no es la que revela la experiencia, sea porque, incluso apartándonos considerablemente de esta ley, la restricción en cuestión no tendría valor más que para rentas bastante elevadas. Podemos pues decir que el aumento de la riqueza en relación a la población produce sea el aumento de la renta mínima, sea la disminución de la desigualdad de las rentes, sea los dos efectos acumulativamente. Actualmente, en nuestras sociedades, parece que es este último caso el que se verifica, y un gran número de observaciones nos hacen ver que el bienestar del pueblo, en general, ha crecido en los países civilizados." (Pareto, 1897, § 965, pp. 324-325).

En suma, Pareto, en su estudio comparativo de las distribuciones de las rentas, descarta el caso en que las distribuciones se cortan (no serían comparables globalmente) aduciendo argumentos empíricos. En el caso de las distribuciones anteriores el punto de corte se da para rentas muy altas y el número de individuos con renta menor que la renta de corte es, en términos relativos y absoluto, muy alto.

Considera que la renta mínima h es constante, en razón de su indeterminación a partir de las estadísticas del impuesto sobre la renta disponibles.

Toma el parámetro $a = 0$, porque para los datos de las rentas de varios países los valores del parámetro a son muy pequeños.

En definitiva, en su estudio comparativo de las distribuciones de las rentas, reduce la ley de tipo II a la de tipo I. Por todo ello la fórmula (23) se reduce a,

$$dz = -\frac{h+a}{(\alpha-1)^2}d\alpha ,$$

y si la renta media aumenta, α debe disminuir, es decir, disminuye la desigualdad de las rentas.

Consecuencias del criterio de desigualdad propuesto por Pareto

El objetivo de esta sección es desarrollar criterios generales que nos faciliten la comparación de dos distribuciones de renta. Dadas dos distribuciones de renta 1 y 2, de acuerdo con (1), la desigualdad de la distribución 2 disminuye respecto a la distribución 1 siempre y cuando las correspondientes funciones de supervivencia verifiquen

$$u_{2x} \geq u_{1x} ,$$

para todo $x \geq 0$, y la desigualdad es estricta para algún x. Por tanto, las correspondientes funciones de distribución verifican

$$F_2(x) \leq F_1(x) ,$$

para todo $x \geq 0$, y la desigualdad es estricta para algún x. En esta situación, se dice que *la función de distribución F_2 domina estocásticamente en primer grado (dominancia de grado I) a la función de distribución F_1.*

En el caso de que las funciones de distribución sean discretas, las funciones cuantil de las distribuciónes 1 y 2 se escriben,

$$Q_1(p) = \min\{x|F_1(x) \geq p\}$$

y

$$Q_2(p) = \min\{x\,|F_2(x) \geq p\} ,$$

respectivamente. Si la distribución 2 domina a la 1, $F_2(x) \leq F_1(x)$, entonces $\{x|F_2(x) \geq p\} \subset \{x|F_1(x) \geq p\}$ y

$$Q_2(p) = \min\{x|F_2(x) \geq p\} \geq \min\{x|F_1(x) \geq p\} = Q_1(p).$$

Es decir, la distribución 2 exhibe dominancia estocástica de grado I sobre la distribución 1 siempre y cuando las correspondientes funciones cuantil verifiquen

$$Q_2(p) \geq Q_1(p),$$

para todo $p \in [0,1]$, y la desigualdad es estricta para algún p.

Se puede interpretar la función cuantil como una función que ordena o gradúa las rentas de una distribución, de menor a mayor, perdiendo cada renta la conexión con el individuo que la posee. Si para cada rango p la función cuantil 2 no está por debajo de la función cuantil 1, se dirá que la distribución 2 domina por rangos a la distribución 1. La dominancia por rangos entre distribuciones de rentas, es consecuencia de la aplicación del criterio de dominancia de Pareto a rentas ordenadas de menor a mayor (Sen, 1973).

Como consecuencia de la dominancia de grado I, se deduce que la media de la distribución 2, μ_2, es mayor o igual que la media de la distribución 1, μ_1. En efecto, efectuando una integración por partes en la fórmula de la media teórica se obtiene

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx.$$

De la dominancia de grado I se deduce

$$\mu_2 = \int_0^\infty [1 - F_2(x)] dx \geq \int_0^\infty [1 - F_1(x)] dx = \mu_1.$$

Es decir, *si disminuye la desigualdad ha de aumentar la renta media.*

Otra consecuencia de la dominancia de grado I está relacionada con la razón de concentración de Gini, R, y la media de las diferencias con repetición de Gini, Δ.

La razón de concentración de Gini es un índice de medida de la concentración de la riqueza definido, en principio, para rentas discretas ordenadas de menor a mayor, que varía de 0 a 1: el valor 0 corresponde a la menor concentración o máxima igualdad y el valor 1 corresponde a la mayor concentración o máxima desigualdad. Nosotros utilizaremos la generalización de R al caso de rentas continuas, que geométricamente es igual a dos veces el área de Lorenz (área comprendida entre la curva de Lorenz y la línea de equidistribución) y su expresión analítica es

$$R = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp\,,$$

donde $L(p)$ es la función de Lorenz, $L: [0,1] \longrightarrow [0,1], L(0^+) = 0, L(1^-) = 1,$ no decreciente, convexa respecto al eje de abscisas y definida por

$$L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^p Q(u)du,$$

siendo Q la función cuantil (20). La función de Lorenz absoluta es

$$G(p) = \int_0^p Q(u)du\,.$$

Haciendo el cambio de variable $p = F(x)$ se obtiene

$$G(1) = \int_0^1 Q(p)dp = \int_0^\infty xdF(x) = \mu\,.$$

La razón de concentración en términos de la función de Lorenz absoluta es

$$R = 1 - \frac{1}{\mu}\int_0^1 G(p)dp$$

Haciendo una integración por partes se obtiene la razón de concentración en términos de la función cuantil

$$R = \frac{1}{\mu}\int_0^1 (2p-1)Q(p)dp\,. \tag{27}$$

La media de las diferencias con repetición de Gini, Δ, es una medida de la dispersión de los valores de la renta definida, en principio, para rentas discretas, ordenadas de menor a mayor, y se define como la media de las diferencias absolutas de los valores de la renta, tomados éstos dos a dos. La extensión a una distribución de rentas continuas, con función de distribución F y función de densidad f es

$$\Delta = \int_0^\infty \int_0^\infty |x-y| f(x)f(y)dxdy\,.$$

Teniendo en cuenta que $|x-y| = x + y - 2\min\{x,y\}$, la integral doble anterior se puede expresar

$$\Delta = 2\int_0^\infty [1 - F(x)]F(x)\,dx\,.$$

Otra forma de obtener la integral doble es tomar límites continuos en la fórmula,

$$\Delta_R = \frac{4}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{h}{n} - \frac{n+1}{2n}\right)x_h\,,$$

de la media de las diferencias con repetición para el caso discreto y se obtiene:

$$\Delta = 4\int_0^\infty \left(F(x) - \frac{1}{2}\right)xf(x)\,dx$$

Haciendo el cambio de variable $p = F(x)$, se obtiene la media de las diferencias en términos de la función cuantil:

$$\Delta = 2\int_0^1 (2p-1)Q(p)\,dp\,. \tag{28}$$

De (27) y (28) se deduce

$$\frac{\Delta}{2\mu} = R\,.$$

Si la distribución 2 domina a la distribución 1, $Q_2(p) \geq Q_1(p)$, teniendo en cuenta (27) y (28) se puede escribir:

$$\mu(1-R) = 2\int_0^1 (1-p)Q(p)\,dp = \mu - \frac{\Delta}{2}.$$

En consecuencia,

$$\mu_2(1-R_2) \geq \mu_1(1-R_1)\,, \qquad \mu_2 - \frac{\Delta_2}{2} \geq \mu_1 - \frac{\Delta_1}{2}.$$

Este criterio mide crecimiento y desigualdad. Es decir, el criterio expresa que una parte de la renta media es debido a una contribución del aumento o disminución de la concentración de la riqueza.

Utilizando las fórmulas (11), (20), (27) y (28), se deducen las fórmulas de la renta media, razón de concentración de Gini, mitad de la media de las diferencias, criterio $\mu(1-R)$, para el caso en que la distribución de la renta sigue la ley de Pareto tipo II, con parámetro $b = \alpha + h$:

Renta media,

$$\mu = h + \frac{b}{\alpha - 1}. \tag{29}$$

La media es compatible con el criterio de dominancia.

Razón de concentración de Gini *(RCG)*,

$$R = \frac{\alpha b}{[h(\alpha - 1) + b]} \frac{1}{(2\alpha - 1)}. \tag{30}$$

Esta razón no es compatible con el criterio de dominancia.

Mitad de la media de las diferencias de Gini *(MDG)*,

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{\alpha b}{(\alpha - 1)} \frac{1}{(2\alpha - 1)}. \tag{31}$$

La media de las diferencias es compatible con el criterio de dominancia. Además, si el parámetro α aumenta, la media de las diferencias disminuye.

Criterio $\mu(1-R)$,

$$\mu(1 - R) = \mu - \frac{\Delta}{2} = h + \frac{b}{2\alpha - 1}. \tag{32}$$

Así mismo, $\mu(1-R)$ es compatible con el criterio de dominancia.

Si en las expresiones anteriores hacemos $b = h$, se obtienen las fórmulas correspondientes para la ley de Pareto de tipo I.

Ejemplos ilustrativos de la ley de Pareto tipo II

En esta sección mostramos algunos supuestos empíricos que ilustran la riqueza y los problemas que se pueden presentar en la aplicación de la ley de Pareto tipo II. Para los cálculos utilizamos las fórmulas (29), (30), (31) y (32).

Ejemplo I

Distr.	*α*	*h, Renta mínima*	*b*	*μ, Renta media*	*Δ, MDG*	*R, RCG*	*μ (1-R)*
Distr. 1	1,8	24	7	32,75	12,12	0,185	26,692
Distr. 2	1,6	34	15	59	36,6	0,308	40,818

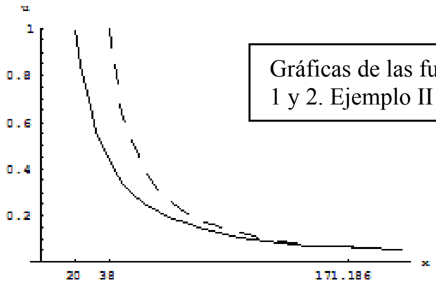
Se trata de un supuesto que ilustra la dominancia estocástica de grado I, de la distribución 2 sobre la 1, donde $\alpha_2 < \alpha_1, h_2 > h_1, b_2 > b_1$. En consecuencia, aumenta la renta media y el criterio $\mu(1-R)$. Además, al ser $\alpha_2 < \alpha_1$ y $b_2 > b_1$, la media de las diferencias de Gini (31) debe aumentar.

En cuanto a la razón de concentración de Gini, un aumento pequeño (10 u.m.) de la renta mínima, hace aumentar R de 0,185 a 0,308. Pero si en la distribución 2 aumentamos la renta mínima hasta 80 u.m., un aumento grande de 56 u.m., manteniendo los valores de los parámetros α_2 y b_2, entonces la razón de concentración disminuye, $R_2 = 0{,}173$.

Ejemplo II

Distr.	*α*	*h, Renta mínima*	*b*	*μ, Renta media*	*Δ, MDG*	*R, RCG*	*μ (1-R)*
Distr. 1	1,3	20	20	86,67	108,3	0,625	32,500
Distr. 2	1,4	38	21	90,50	81,67	0,451	49,667

En este supuesto, $\alpha_2 > \alpha_1, h_2 > h_1, b_2 > b_1$. Las funciones de supervivencia se cortan en el punto $x = 171{,}186$. Para $20 < x < 171{,}186$ se observa que la función de supervivencia 2 (curva de puntos) está por encima de la función de supervivencia 1 (curva de trazo continuo), pero $u_{2x} < u_{1x}$ para $x > 171{,}186$, y solamente el 6,13% de los individuos supera esa renta, en ambas distribuciones. En consecuencia, no se verifica el criterio de dominancia estocástica de grado I, y, no obstante, aumenta la renta media y el criterio $\mu(1-R)$.



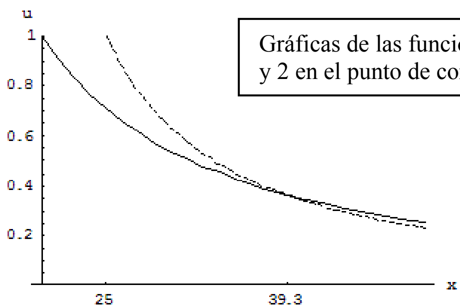
Gráficas de las funciones de supervivencia 1 y 2. Ejemplo II

Ejemplo III

Distr.	*α*	*h, Renta mínima*	*b*	*μ, Renta media*	*Δ, MDG*	*R, RCG*	*μ (1-R)*
Distr. 1	1,4	20	18	65	70	0,538	30
Distr. 2	1,3	25	12	65	65	0,500	32

En este ejemplo, $\alpha_2 < \alpha_1$, $h_2 > h_1$, $b_2 < b_1$. Se observa que la renta media permanece constante, la media de las diferencias de Gini y la razón de concentración disminuyen. Es decir, aunque la riqueza permanece constante, se puede interpretar que ha habido una redistribución de la riqueza.

No se verifica la dominancia estocástica de grado I. En efecto, las funciones de supervivencia se cortan en dos puntos de renta $x = 39{,}3$ y $x = 3358{,}8$. Para $25 < x < 39{,}3$ la función de supervivencia 2 está por encima de la 1, $u_{2x} > u_{1x}$, y un 36% de los individuos supera la renta 39,3, en ambas distribuciones. Para $39.3 < x < 3358.8$ la función de supervivencia 2 está por debajo de la 1, $u_{2x} < u_{1x}$. Para $x > 3358{,}8$ la función de supervivencia 2 está por encima de la 1, $u_{2x} > u_{1x}$, y un 0,06% de los individuos supera la renta 3358,8, en ambas distribuciones.



Gráficas de las funciones de supervivencia 1 y 2 en el punto de corte 39,3. Ejemplo III

Bibliografía

BORKENAU, F. (1941): *Pareto.* Versión española de Nicolás Dorantes. Fondo de Cultura Económica. Méjico.

BORTKIEWICZ, L. V. (1931): *Die Disparitätsmasse der Einkommensstatistik (Los índices de desigualdad de las rentas).* XIX Session de L'Institut International de Statistique, Tokio, 189-298.

BRESCIANI-TURRONI, C. (1907): Sull'interpretazione e comparazione di seriazioni di reddtiti o di patrimonio. *Giornali degli Economisti*, 17(24),13-47.

BUSINO, G. (1987): *Pareto, Vilfredo (1848-1923).* The New Palgrave Dictionary of Economics, 799-804.

CABRILLO, F. (2006): *Economistas extravagantes*. Hoja perenne. Madrid.

D'ADDARIO, R. (1933): Intorno alla validità dei due teoremi paretiani sulla dinámica distributiva. *Atti dell'istituto nazionale delle assicuriazioni*. Vol. VI. Conferenze di cultura assicurativa dell'anno 1933.

LEROY-BEAULIEU, PAUL. (1881). *Essai sur la repartition des richesses et sur la tendance a une moindre inégalité des conditions.* Guillaumin et Cia. Libraires. Paris.

PARETO, V. (1896): *Cours d'Économie Politique. Tome I*, F. Rouge Libraire-Éditeur, Lausanne. Obras completas publicadas bajo la dirección de G. Busino, Librairie Droz, Genève, 1964.

- (1897): *Cours d'Économie Politique. Tome II*, F. Rouge Libraire-Éditeur, Lausanne. Obras completas publicadas bajo la dirección de G. Busino, Librairie Droz, Genève, 1964.

- (1906): *Manuale di economía política con una introduzione alla scienza sociale,* Società Editrice Libraria. Nosotros utilizamos la edición italiana de 1919 que se puede encontrar en http://www.archive.org.

- (1909): *Manuel d'Économie Politique.* Traduit sur l'edition italienne par Alfred Bonnet (Revue par l'auteur). V. Giard & E. Briére, Libraires editeurs. Paris.

- (1965): *Écrits sur la courbe de la répartition de la richesse. Chapitre 6: La repartition des revenus,* publicado por primera vez en "Le monde économique", 28 août 1897, 259-261. Obras completas publicadas bajo la dirección de G. Busino, Tomo III, Librairie Droz, Genève.

SCHUMPETER, J. A. (1951): *Diez grandes economistas. De Marx a Keynes.* Versión española de Fabián Estapé. Editorial Bosch, Barcelona, 1955.

- (1951): *Historia del análisis económico.* Versión española de Manuel Sacristán y prólogo de Fabián Estapé. Editorial Bosch, Barcelona, 1955.

SEBASTIÁN, M. (1949): El tratado de sociología de Pareto. *Anales de Economía*, vol. IX, oct-dic, 461-472.

SEN, A. (1973): *On economic inequality.* Clarendon Press. Oxford.

SOREL, G. (1897) : La lois des revenus. *Le Devenir Social*. 3éme. Année, nº 7. Jouillet.

ZUMALACÁRREGI, J. M. (1951): *Vilfredo Pareto. 1848-1923.* Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid.