Algunos resultados sobre el bordismo de variedades de homología

Por ANTONIO QUINTERO

Recibido: 14 diciembre 1983

Presentado por el Académico correspondiente D. Antonio de Castro

Resumen

En este artículo probamos que las variedades de homología (HML-variedades) definen una teoría de bordismo singular que es la teoría de homología generalizada asociada al Espectro de Martin, ([14]). Usando los números característicos singulares relacionamos el HML-bordismo singular y el DIF-bordismo singular. Finalmente, probamos que el HML-bordismo absoluto es equivalente al bordismo absoluto de las variedades topológicas trianguladas (TRI-manifolds) en dimensión $\geqslant 6$.

SOME RESULTS ON BORDISM OF HOMOLOGY MANIFOLDS.

Abstract

In this paper we prove that homology manifolds (HML-manifolds) define a singular bordism theory which is the generalized homology theory defined by Martin's spectrum ([14]). We use singular characteristic numbers to find some relations between singular HML-bordism and singular DIFF-bordism. Finally we prove that HML-bordism is equivalent to TRI-bordism (TRI $\equiv$ topological triangulated manifolds) in dimensions $\geqslant 6$.

INTRODUCCION

A lo largo de este trabajo, la homología utilizada será la homología singular con coeficientes en el anillo de los números enteros.

Por una variedad de homología (HML-variedad) de dimensión n se entiende un poliedro euclídeo cuya homología local es la del semiespacio $\mathbb{R}^n_+$. Una n-esfera (n-bola) de homología es una HML-variedad cuya homología es la de la esfera (bola) canónica de dimensión n. Para más detalles ver [20].

Una TRI-variedad será un poliedro euclídeo que es variedad topológica.

En todo lo que sigue nos restringiremos a las variedades compactas.

Martin ([14]) encuentra un espectro MH cuyos grupos de homotopía determinan los grupos de HML-bordismo. En el presente trabajo probamos que las HML-variedades dan lugar a una teoría de bordismo singular (HML-bordismo singular) y que es la teoría de homología generalizada asociada al espectro MH. Es interesante resaltar que las HML-variedades no quedan integradas en los modelos con singularidades de Rourke y Sanderson (ver [3]) ya que las HML-variedades no poseen en general PL-collar.

Usando los números característicos, relacionamos el HML-bordismo singular con el DIF-bordismo singular. Por último, probamos que toda n-esfera de homología ($n \geqslant 5$) es H-bordante a una esfera de homología simplemente conexa de forma que los puntos donde el H-bordismo no es TRI-variedad están situados en el borde. Este resultado ha sido probado independientemente y con distinta demostración en [9].

El resultado anterior nos permite demostrar que los grupos de HML-bordismo absoluto son isomorfos a los de TRI-bordismo en dimensiones mayores que 5. En dimensiones menores o iguales que 5, Martin ha probado en [15] que los grupos de HML-bordismo orientado absoluto son isomorfos a los de PL-bordismo en dimensiones $n \leqslant 3$ y $n = 5$ y para $n = 4$ que es isomorfo al grupo de PL-bordismo orientado absoluto suma directa con el grupo θ_3^H de las 3-esferas de homología orientadas bajo la relación de H-bordismo con la operación suma dada por la suma conexa de los representantes.

1. HML-BORDISMO SINGULAR

Si (X, A) es un par topológico, una HML-variedad singular de dimensiones n sobre (X, A) es un par (M, f) donde M es una HML-variedad de dimensión n y f: $(M, \partial M) \to (X, A)$ es una función continua. Dos de tales modelos, (M, f) y (M', f') son HML-bordantes si existe un triple (W, W_0, F) donde W y W_0 son HML-variedades de dimensión $n + 1$ y n, respectivamente, tales que $\partial W = (M + M') \cup W_0$ es un pegamiento a través de $\partial W_0 = \partial M + \partial M'$ ("+" indicará en todo el trabajo reunión disjunta) y F: $(W, W_0) \to (X, A)$ es una extensión continua de f y f'. Es fácil verificar que esta relación es de equivalencia, y que el conjunto cociente $\mathcal{N}_n^{HML}(X, A)$, con la operación suma de clases definida como la clase de la reunión disjunta de los representantes está dotado de estructura de grupo abeliano.

La verificación de los axiomas de [7], excepto el del entorno regular, que prueban que $\mathcal{N}_*^{HML}(-)$ determina una teoría de homología generalizada sobre la categoría de los pares de espacios topológicos es consecuencia inmediata de las propiedades generales de las HML-variedades. La existencia de entorno regula se deducirá del próximo teorema.

Si f: $K \to L$ es una aplicación simplicial, que también lo es entre subdivisiones baricéntricas K' y L', y $\alpha \in L$ se llama célula dual de α respecto a f al complejo simplicial de K' definido por

$$D(\alpha, f) = \{(\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_q) \mid \alpha \leqslant f(\sigma_0),\ \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_q \in K\}$$

y sea

$$\dot{D}(\alpha, f) = \{(\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_q) \mid \alpha \not\leqslant f(\sigma_0),\ \sigma_0 < \ldots < \sigma_q \in K\}$$

Como una generalización de [5.6; 5] tenemos

1.1. Teorema.– En la situación anterior, si el poliedro subyacente a K, $|K|$, es una HML-variedad (no necesariamente compacta) de dimensión n y α es un r-símplice de L, se verifica que $D(\alpha, f)$ es una HML-variedad de dimensión $n-r$ cuyo borde es

$$\partial D(\alpha, f) = \dot{D}(\alpha, f) \cup D(\alpha, f \mid \partial K)$$

Demostración.– Sea $A = (\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_q)$ un q-símplice de $D(\alpha, f)$, y supongamos que $A \cap f^{-1}(b(\alpha)) \neq \phi$. Entonces, $lk(A; D(\alpha; f))$ es PL-isomorfo a

$$f|_{\sigma_0}^{-1}(b(\alpha)) * \dot{D}(\sigma_0, \dot{\sigma}_1) * \ldots * \dot{D}(\sigma_{q-1}, \sigma_q) * \dot{D}(\sigma_q, K)$$

Pero $\dot{D}(\sigma_i, \dot{\sigma}_{i+1})$ y $\dot{D}(\sigma_q, K)$ son PL-isomorfos a $lk(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ y $lk(\sigma_q, K)$ respectivamente, por lo que $\dot{D}(\sigma_q, K)$ es una bola o esfera de homología dependiendo de que σ_q pertenezca o no a ∂K.

Por otra parte, $f \mid \sigma_0 : \sigma_0 \to \alpha$ se puede extender linealmente a

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^{\dim \sigma_0} \to \mathbb{R}^{\dim \alpha}$$

por lo que $\tilde{f}^{-1}(b(\alpha)$ es un plano de dimensión $\dim \sigma_0 - \dim \alpha$ y $f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(b(\alpha)) = \sigma_0 \cap \tilde{f}^{-1}(b(\alpha))$ es una PL-esfera de dimensión $\dim \sigma_0 - \dim \alpha - 1$. De todo lo anterior se deduce que $lk(A; D(\alpha, f))$ es una bola o esfera de homología según que σ_q pertenezca o no a ∂K. En particular, $D(\alpha; f \mid \partial K) \subset D(\alpha, f)$.

Si suponemos que $A \cap f^{-1}(b(\alpha)) = \phi$, entonces $\alpha < f(\sigma_0)$ y

$$lk(A; D(\alpha; f)) \cong D(\alpha; f \mid \dot{\sigma}_0) * \dot{D}(\sigma_0, \sigma_1) * \ldots * \dot{D}(\sigma_{q-1}, \dot{\sigma}_q) * \dot{D}(\sigma_q; K)$$

Como antes, $\dot{D}(\sigma_i, \dot{\sigma}_{i+1})$ es una PL-esfera y $\dot{D}(\sigma_q, K)$ es una bola o esfera de homología. Además, se sigue de [5.6; 5] que $D(\alpha; f \mid \dot{\sigma}_0)$ es una PL-variedad que colapsa a $f|_{\sigma_0}^{-1}(b(x))$. Pero como $\alpha < f(\sigma_0)$ se tiene que

$$f|_{\dot{\sigma}_0}^{-1}(b(\alpha)) = f|_{\sigma_0}^{-1}(b(\alpha)),$$

que como ya se vio es una PL-bola. Entonces $D(\alpha; f \mid \dot{\sigma}_0)$ debe ser una PL-bola, por lo que $lk(A; D(\alpha\colon f))$ es una bola de homología y $\dot{D}(\alpha; f) \subset \subset \partial D(\alpha, f)$. Así pues $D(\alpha, f)$ es una HML-variedad y $\dot{D}(\alpha, f) \cup D(\alpha; f \mid \partial K) \subset \partial D(\alpha; f)$. Es fácil comprobar que la inclusión anterior es una igualdad y con ello queda probado el teorema.

Puesto que los entornos regulares son un caso particular de célula duales (ver [19]) se tiene el siguiente corolario.

1.2. Corolario.– Si K es un complejo simplicial tal que un poliedro sub yacente, $|K|$, es una HML-variedad, dado un subcomplejo $L \subset K$ un entorno regular de L en K es una HML-variedad de la misma dimensión que $|K|$.

Tenemos así que los funtores $\mathcal{N}_n^{HML}$ $(-)$ determinan una teoría de bordismo singular (HML-bordismo singular) sobre los espacios topológicos. El grupo $\mathcal{N}_n^{HML}$ $(\{p\})$ es llamado el n-grupo de HML-bordismo absoluto y se denotará simplemente por $\mathcal{N}_n^{HML}$.

La teoría reducida asociada a $\mathcal{N}_*^{HML}$ $(-)$, $\tilde{\mathcal{N}}_*^{HML}$ $(-)$, definida sobre los espacios punteados verifica:

1.3. Proposición.— $\tilde{\mathcal{N}}_*^{HML}$ $(-)$ cumple el axioma del "wedge" sobre los CW-complejos y el axioma de equivalencia débil de homotopía (ver [21; 17.30, 17.31] para las definiciones).

Demostración.— Sea $h\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una equivalencia débil de homotopía. Debemos probar que $h_*\colon \tilde{\mathcal{N}}_n^{HML}(X) \to \tilde{\mathcal{N}}_n^{HML}(Y)$ es isomorfismo. Dado un elemento

$$[M, f] \in \tilde{\mathcal{N}}_n^{HML}(Y) = \mathcal{N}_n^{HML}(Y, y_0)$$

la aplicación f induce una aplicación $\tilde{f}\colon (M/\partial M, *) \to (Y, y_0)$. Por [21; 6.31] existe una aplicación $\tilde{g}\colon (M/\partial M, *) \to (X, x_0)$ tal que $h\tilde{g} \simeq f$. Entonces si $\pi\colon M \to M/\partial M$ es la proyección natural, la aplicación $g = \tilde{g} \cdot \pi$ verifica que $h_* [M, g] = [M, f]$. Así pues h_* es epiyectiva.

Por otra parte, si $h_* [M, g] = [M, h \circ g] = 0 \in \mathcal{N}_n^{HML}(Y)$ existe (W, W_0, F) con $\partial W = M \cup W_0$, $\partial W_0 = \partial M$ y $F\colon (W, W_0) \to (Y, y_0)$ extensión continua de $h \circ g$. En particular, F se factoriza en una aplicación $\tilde{F}\colon (W/W_0, *) \to (Y, y_0)$ y por [21; 6.31] existe $G\colon (W/W_0, *) \to (X, x_0)$ tal que $hG \simeq \tilde{F}$. Entonces si $\tilde{\pi}$ es la restricción de la proyección natural $\pi\colon W \to W/W_0$ a M se tiene $hG\tilde{\pi} = \tilde{F}\tilde{\pi} = hg$ lo que implica, de nuevo por [21; 6.31], que $g \simeq G\tilde{\pi}$. Por tanto $[M, g] = [M, G\tilde{\pi}] = 0 \in \mathcal{N}_n^{HML}(X)$, y queda probado el axioma de equivalencia de homotopía débil.

Sea $\{(W_\alpha, *_\alpha)\}$ una familia de (CW-complejos punteados). Puesto que cada inclusión $*_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$ es una cofibración, se sigue que $P \hookrightarrow X$ es una cofibración, donde P y X son las reuniones disjuntas de las familias $\{*_\alpha\}$ y $\{X_\alpha\}$ respectivamente. Entonces

$$P_*\colon \mathcal{N}_n^{HML}(X, P) \to \mathcal{N}_n^{HML}(\vee X_\alpha, *) = \mathcal{N}_n^{HML}(\vee X_\alpha)$$

es isomorfismo (ver [21; 7.14]). Por tanto el morfismo de la línea superior del siguiente diagrama es isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
\oplus \tilde{\mathcal{N}}_n^{HML}(X_\alpha) \arrow[r, "\oplus i_{\alpha *}"] \arrow[d, equal] & \tilde{\mathcal{N}}_n^{HML}(\vee X_\alpha) = \mathcal{N}_n^{HML}(\vee X_\alpha, *) \\
\oplus \mathcal{N}_n^{HML}(X_\alpha, *_\alpha) \arrow[r, "\oplus i_\alpha"] & \mathcal{N}_n^{HML}(X, P) \arrow[u, "p_*"']
\end{tikzcd}$$

Ello prueba que se verifica el axioma de "wedge" sobre los CW-complejos.

En [14] se define un espectro MH y se construye un isomorfismo

$$\theta : \mathcal{N}_n^{HML} \longrightarrow \pi_n\,(MH)$$

Brevemente damos una descripción de MH y θ:

Dado un fibrado disco de homología E sobre un complejo celular (o un Δ-conjunto) K, se llama espacio de Thom de E al cociente

$$T\,(E) = E/\bar{E}$$

donde $\bar{E}$ es el fibrado esfera asociado a E. Tomando un r-fibrado disco universal γ_r existe una aplicación natural

$$\phi_r : \; sT\,(\gamma_r) \longrightarrow T\,(\gamma_{r+1})$$

que permite definir un espectro

$$\{T\,(\gamma_r),\, \phi_r\}$$

A $T\,(\gamma_r)$ se le denota por $MH\,(r)$ y al espectro anterior por MH. Para más detalles ver [14] y [16].

El isomorfismo θ es construido siguiendo el método clásico de Thom (ver [21; 12.30]) como sigue:

Si M es una HML-variedad de dimensión n, y k es lo suficientemente grande para que M esté PL-inmersa en S^{n+k} se triangula S^{n+k} de manera que M sea un subcomplejo lleno y se toma el fibrado normal de homología ν de M respecto a dicha triangulación (ver [16]). Asociada a ν existe una aplicación clasificante (única salvo homotopía)

$$h_\nu : \; (\nu \times I,\; \overline{\nu \times I}) \longrightarrow (\gamma_{k+1},\, \bar{\gamma}_{k+1})$$

(ver [12; 6]). Entonces h_ν induce una aplicación

$$\tilde{h}_\nu : \; T\,(\nu \times I) \longrightarrow T\,(\gamma_{k+1}) = MH\,(k+1)$$

Si ahora se identifica S^{n+k} con el ecuador S^{n+k+1}, el fibrado normal ν_1 de M en S^{n+k+1} tiene un espacio total homeomorfo al espacio total de $\nu \times I$. De esta manera, define una aplicación

$$h_M : \; S^{n+k+1} \longrightarrow MH\,(k+1)$$

dada por $\tilde{h}_\nu$ en los puntos de ν_1 y que envía $S^{n+k+1} - \nu_1$ en el punto base de $MH\,(k+1)$. Entonces $\theta\,[M] = [h_M]$.

En esta situación, nos proponemos probar ahora que la teoría de homología generalizada asociada a MH, MH_*, es naturalmente equivalente al

HML-bordismo singular; es decir, el espectro MH es un espectro clasificante en la categoría TOP para $\mathcal{N}_*^{HML}$ $(-)$. Concretamente probamos:

1.4. Teorema.– Si X es un espacio topológico, $\mathcal{N}_n^{HML}$ (X) y π_n $(MH \wedge X^+)$ son naturalmente isomorfos. (Por X^+ se denota el espacio X punteado por un punto exterior).

Demostración.– Se tiene que

$$\mathcal{N}_n^{HML}(X) = \mathcal{N}_n^{HML}(X^+, +) = \tilde{\mathcal{N}}_n^{HML}(X^+),$$

por lo que, de acuerdo con 1.3 y [21; 7.55], bastará construir una transformación natural.

$$T_*(-):\ \tilde{\mathcal{N}}_*^{HML}(-) \longrightarrow MH_*(-)$$

de forma que T_q (S^0) sea isomorfismo para todo q.

Sea

$$[M, f] \in \mathcal{N}_n^{HML}(X) = \mathcal{N}_n^{HML}(X, *)$$

Para k suficientemente grande se puede sumergir M en B^{n+k} de forma que ∂M quede en S^{n+k+1}. Tomamos el fibrado normal de homología, ν, de M en B^{n+k}. Su restricción a S^{n+k-1} será el fibrado normal, ν', de ∂M en S^{n+k-1}. Entonces, según hemos comentado antes existe una aplicación clasificante

$$h_\nu:\ (\nu \times I,\ \overline{\dot{\nu} \times I}) \longrightarrow (\gamma_{k+1}, \overline{\gamma}_{k+1})$$

cuya restricción a $(\nu' \times I,\ \overline{\dot{\nu}' \times I})$ da una aplicación clasificante para ν'. Por tanto h induce una aplicación

$$\tilde{h}_\nu:\ (T(\nu \times I),\ T(\nu' \times I)) \longrightarrow (MH(k+1),\ MH(k+1))$$

Si ahora identificamos B^{n+k} con el ecuador de B^{n+k+1}, el fibrado normal, ν_1, de M en B^{n+k+1} tiene su espacio total homeomorfo a $\nu \times I$. La restricción ν_1' de ν_1 a S^{n+k} es el fibrado normal de ∂M en S^{n+k} y su espacio total es homeomorfo al de $\nu' \times I$. Entonces se define

$$r:\ (B^{n+k+1}, S^{n+k}) \longrightarrow (T(\nu \times I),\ T(\nu' \times I))$$

por $r(x) = x$ si $x \in \nu_1 - \dot{\nu}_1$ y $r(x) = *$ en $B^{n+k+1} - \nu_1$ y consideramos la composición

$$\begin{aligned} &(B^{n+k+1}, S^{n+k}) \xrightarrow{r} (T(\nu \times I),\ T(\nu' \times I)) \xrightarrow{\tilde{p}} \\ &\xrightarrow{\tilde{p}} (M \wedge T(\nu \times I),\ \partial M \wedge T(\nu' \times I)) \xrightarrow{f \wedge \tilde{h}_\nu} (X \wedge MH(k+1), *) \end{aligned} \tag{A}$$

donde M está punteada por un punto exterior, $\tilde{p}$ está inducida por la composición

$$(\nu \times I,\ \nu' \times I) \xrightarrow{p \times id} (M \times \nu \times I,\ M \times \nu' \times I) \xrightarrow{\pi_1}$$

$$\xrightarrow{\pi_1} (M \wedge (\nu \times I),\ M \wedge (\nu' \times I)) \xrightarrow{\pi_2} (M \wedge T(\nu \times I),\ \partial M \wedge T(\nu' \times I))$$

siendo p una proyección asociada al fibrado de homología $\nu \times I$ (ver [2; 1.4.13]), π_1 y π_2 las correspondientes proyecciones naturales.

La composición (A), que denotamos por $h_{(M,f)}$ determina un elemento de $\pi_n\ (MH \wedge X,\ *) = MH_n\ (X)$. Definimos $T\ ([M,\ f])$ como dicho elemento.

Obsérvese que si $(X,\ *) = (S^0,\ +1)$, $T\,(S^0)$ es el isomorfismo θ de Martin.

La comprobación de que $T\,(-)$ está bien definido y es una transformación natural es una adaptación de la prueba de Martin.

1.5. Nota.— Obsérvese que por definición

$$\mathcal{N}_n^{HML}\ (X,\ A) = \tilde{\mathcal{N}}_n^{HML}\ (X^+ \cup cA^+) \cong \pi_n\ (MH \wedge X^+ \cup cA^+,\ *)$$

2. RELACION ENTRE EL HML-BORDISMO SINGULAR Y EL DIF-BORDISMO SINGULAR

Puesto que toda HML-variedad es un espacio de Euler, se pueden definir las clases homológicas de Stiefel-Whitney

$$s_i\,(M) \in H_i\,(M,\ \partial M;\ Z_2)$$

como la suma de los i-símplices de una subdivisión baricéntrica de M (para más detalles ver [1] y [8]). Nótese que $s_0\ (M) = \chi\,(M)$ mod. 2 y $s_n\ (M)$ es la clase de Z_2-orientación μ_M de M. Las clases duales $w_{n-i}\,(M)$ son las clases cohomológicas de Stiefel-Whitney.

Si $f\colon M \to X$ es una aplicación continua de la HML-variedad M en el espacio X, se puede asociar a cada $h \in H^m\ (X; Z_2)$ $(m \leqslant n = \dim M)$ y enteros, $r_1, r_2, \ldots, r_{n-m}$, tales que

$$r_1 + 2r_2 + \ldots + (n-m)\, r_{n-m} = n - m,$$

el producto de Kronecker.

$$\langle w_1^{r_1} w_2^{r_2} \ldots w_{n-m}^{r_{n-m}}\ f^*\,(h),\quad \mu_M \rangle \in Z_2$$

llamado el $(r_1,\ \ldots,\ r_{n-m})$-número singular de Stiefel-Whitney de $(M,\ f)$ asociado a h. Obsérvese que si se toma

$$h = 1 \in H^0\ (X; Z_2)$$

los números singulares de (M, f) son los números característicos de M.

Análogamente al caso clásico de las variedades diferenciables, se puede probar:

2.1. Teorema.– Si (M, f) representa el elemento nulo de $\mathcal{N}_n^{HML}(X)$ entonces todos los números singulares de Stiefel-Whitney de (M, f) son nulos.

El teorema anterior, junto con el hecho de que si M es una variedad diferenciable las clases de Stiefel-Whitney coinciden con las clásicas (ver [10] y [17]), dan lugar al siguiente resultado (ver [17; 6]).

2.2. Corolario.– Si X es un CW-complejo finito y "olv" representa el morfismo olvido natural, entonces

$$\text{olv}: \mathcal{N}_n^{DIF}(X) \longrightarrow \mathcal{N}_n^{HML}(X)$$

es inyectivo. En particular,

$$\text{olv}: \mathcal{N}_n^{DIF} \longrightarrow \mathcal{N}_n^{HML}$$

es inyectivo.

2.3. Nota.– Los números anteriormente definidos no caracterizan el HML-bordismo. En efecto, sea W la 4-variedad cuyo borde es la 3-esfera de Poincaré H^3 (ver [12]). Esta variedad es simplemente conexa, $H_2(W)$ es libre con ocho generadores y $w_2(W) = 0$.

Sea $M = c * H^3 \cup W$, M es una HML-variedad simplemente conexa y es fácil de comprobar que sus clases de Stiefel-Whitney $w_i(M)$ son nulas para $i \leqslant 3$. Por tanto tiene los mismos números característicos que S^4, pero la obstrucción $o(M) \in H^4(M; \theta_3^H)$ para que M sea HML-bordante a una PL-variedad es distinta de cero (ver [15]) por lo que M y S^4 no pueden ser bordantes como HML-variedades.

3. HML-BORDISMO ABSOLUTO

Si $\mathcal{N}_n^{TRI}$ denota el n-ésimo grupo de bordismo absoluto no orientado de las TRI-variedades tenemos los morfismos olvido naturales:

$$\text{olv}: \mathcal{N}_n^{TRI} \longrightarrow \mathcal{N}_n^{HML}$$

Entonces:

3.1. Teorema.– Los morfismos "olv" son monomorfismos si $n \geqslant 5$ y epimorfismos si $n \geqslant 6$.

Para la demostración de 3.1 nos apoyamos en el siguiente resultado.

3.2. Teorema.– Toda n-esfera de homología H^n, $n \geqslant 5$, es H-bordante a una n-esfera de homología simplemente conexa H^n de forma que los puntos donde el H-bordismo no es TRI-variedad están situados en el borde.

Demostración.– Se considera una segunda subdivisión baricéntrica de H^n, y se toma el 3-esqueleto K^3 de la descomposición de células duales. Un entorno regular M_1 de K^3 es una PL-variedad ya que los puntos donde una HML-variedad no es PL-variedad están en el $(n - 4)$-esqueleto de cualquier triangulación.

Se verifica que

$$H_1(M_1) = H_2(M_1) = 0$$

ya que K^3 es retracto de deformación de M_1 y

$$H_1(K^3) = H_1(H^n) = 0 = H_2(H^n) = H_2(K^3)$$

Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ son los generadores de $\pi_1(H^n)$, supuesto que los representantes sean simpliciales, podemos considerar que los α_i son elementos de $\pi_1(K^3)$. En particular

$$i_*: \pi_1(M_1) \longrightarrow \pi_1(H^n)$$

es epiyectivo.

Tomemos ahora un entorno regular abierto M_2 del 2-esqueleto L^2 de una triangulación L_2 de M_1. Por [11] M_2 admite una estructura de variedad diferenciable. Además esta estructura es paralelizable; en efecto, por ser H^n esfera de homología

$$w_1(H^n) = w_2(H^n) = 0, \quad \text{luego} \quad w_1(M_2) = w_2(M_2) = 0.$$

Por ser $w_1(M_2)$ nula el fibrado tantenge τM_2 es orientable, y podemos escoger una orientación. Por otra parte

$$w_2(M_2) = 0$$

implica que existe $n - 1$ campos independientes $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}$ sobre el 2-esqueleto de M_2. Si $V_k^n(\tau M_2)$ indica el fibrado sobre M_2 cuya fibra es la (n, k)-variedad de Stiefel asociada a τM_2 (fibrado de las k-referencias) podemos definir una sección.

$$s: V_{n-1}^n(\tau M_2) \longrightarrow V_n^n(\tau M_2)$$

por

$$s(\langle e_1, ..., e_{n-1}\rangle_x) = \langle e_1, ..., e_{n-1}, e_n\rangle_x$$

donde e_n es el vector ortogonal al conjunto $e_1, ..., e_{n-1}$ que determina la orientación que habíamos fijado en la fibra de x. Entonces

$$s \circ (\gamma_1, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$$

da una sección de $V_n^n\ (\tau M_2)$ sobre el 2-esqueleto de M_2, en particular sobre L_2. Pero L_2 es un retracto de deformación de M_2, luego τM_2 es trivial.

De otro lado,

$$\pi_1\ (M_2) \cong \pi_1\ (L_2) \cong \pi_1\ (M_1)$$

por lo que podemos suponer que los generadores de $\pi_1\ (M_1)$ están en M_2. Entonces, por posición general, se puede considerar disjuntos (obsérvese que $\pi_1\ (M_1)$ tiene un número finito de generadores) y mediante el pegamiento de 2-asas $D^2 \times D^{n-1}$ (ver teorema 2 de [18]) obtenemos una variedad diferenciable $\tilde{M}_2$ que es simplemente conexa y una HML-variedad $\tilde{H}^n$ simplemente conexa tal que

$$H_q\ (\tilde{H}^n) = 0 \quad (3 \leqslant q \leqslant n-3) \qquad \text{y} \qquad H_2\ (H^n) \cong H_{n-2}\ (H^n)$$

es un grupo libre con tantos generadores cono $\pi_1\ (M_1)$.

Puesto que M_2 era un entorno regular del 2-esqueleto de M_1 se sigue que $H_1\ (M_2) = 0$. Entonces, mediante un cálculo con las adecuadas sucesiones de Mayer-Vietoris se deduce que

$$i_*\colon\ H_2\ (\tilde{M}_2) \longrightarrow H_2\ (\tilde{H}^n)$$

es epiyectivo.

Como $\tilde{M}_2$ es simplemente conexo, todo generador de $H_2\ (\tilde{H}^n)$ se puede representar por una aplicación

$$f\colon\ S^2 \longrightarrow \tilde{M}_2 \hookrightarrow H^n$$

Como $\tilde{M}_2$ es también s-paralizable, se puede hacer una segunda cirugía pegando 3-asas $D^3 \times D^{n-2}$ para matar los generadores de $H_2\ (\tilde{H}^n)$; se obtiene así una HML-variedad H^n que es simplemente conexa. Un fácil estudio de las adecuadas sucesiones de Mayer-Vietoris sirve para concluir que $\bar{H}^n$ es una esfera de homología simplemente conexa.

Por último, si $D_i^2 \times D_i^{n-1}$ $(i \leqslant k)$ son las 2-asas utilizadas y $D_i^3 \times$ $\times D_i^{n-2}$ $(i \leqslant k)$ las 3-asas.

$$V_0 = (H^n \times I) \cup \Big(\bigcup_{i \leqslant k} D_i^2 \times D_i^{n-1}\Big)$$

$$V_1 = (\tilde{H}^n \times I) \cup \Big(\bigcup_{i \leqslant k} D_i^3 \times D_i^{n-1}\Big)$$

verifican que $W = V_0 \cup V_1$ es un H-bordismo entre H^n y $\tilde{H}^n$. Por [4 3.6] se sigue que los puntos singulares de W no pueden estar en el interior. Esto concluye la prueba de 3.2.

Demostración de 3.1.— Sean $n \geqslant 5$ y $[M] \in \mathcal{N}_n^{TRI}$ tal que $[M] = 0 \in \in \mathcal{N}_n^{HML}$, entonces existe una HML-variedad W tal que $\partial W = M$. Añadimos un collar exterior y obtenemos una HML-varieda W' cuyos puntos singulares están fuera de un entorno de $\partial W' = \partial W$. Entonces los puntos singulares serán aquellos cuyos "links" no sean simplemente conexos ([4; 3.5]). Puesto que las singularidades son aisladas, podemos suponer que sólo hay un punto singular $p \in \text{int } W'$. Por 3.2 existe una esfera de homología simplemente conexa L que es H-bordante a $lk\ (p;\ W')$. Sea V un H-bordismo como en 3.2 entonces

$$W = E' - \overset{\circ}{st}\ (p; W') \underset{lk\ (p; W')}{\cup} V \underset{L}{\cup} cx * L$$

es una TRI-variedad por [4; 3.5] y $\partial W = M$. Entonces

$$[M] = 0 \in \mathcal{N}_n^{TRI}$$

Sea ahora $n \geqslant 6$ y M una HML-variedad de dimensión n. Como en el caso anterior, podemos suponer que sólo hay un punto singular $p \in M$. Con la notación anterior tenemos que

$$M = M - \overset{\circ}{st}\ (p; M) \cup V \cup c * L$$

es una TRI-variedad que es HML-bordante a M por

$$Z = (M - \overset{\circ}{st}\ (p; M)) \times I \cup p * (lk\ (p; M) \times I \cup V \cup c * L$$

Esto prueba que "olv" es epiyectivo.

3.3. Corolario.— Si $n \geqslant 6$ olv: $\mathcal{N}_n^{TRI} \longrightarrow \mathcal{N}_n^{HML}$ es isomorfismo.

Nota final.— Si en todo lo anterior consideramos HML-variedades orientadas obtenemos una teoría HML-bordismo orientado que representamos por $\Omega_*^{HML}(-)$.

Para estas variedades Martin, [14], también da un espectro que denota por *MSH* y puede ser probado como en 1.4 que $\Omega_*^{HML}(-)$ es la teoría de homología generaliza asociada al espectro *MSH*.

En [17] se definen las clases de Pontrjagin para HML-variedades con coeficientes en $\mathbb{Q}$. El teorema de coeficientes universales nos garantiza que toda HML-variedad orientable M es una variedad de homología con coeficientes en $\mathbb{Q}$ por lo que se puede hablar de las clases de Pontrjagin de M,

$$p_i \in H^{4i}(M, \mathbb{Q})$$

Entonces si μ_M es la clase de $\mathbb{Q}$-orientación de M y $f: M \longrightarrow X$ es una aplicación continua se puede definir el producto de Kronecker

$$< p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \ldots p_k^{ik} \cdot f^*(h), \qquad \mu_M > \in \mathbb{Q}$$

donde

$$h \in H^m (X, \mathbb{Q}) \quad (m \leqslant n) \qquad \text{y} \qquad n - m = 4 (i_1 + 2_{i_2} + \ldots + k_{i_k})$$

El número dado por el producto anterior se llama el $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$-número singular de Pontrjagin de (M, f) asociado a h.

Análogamente al caso clásico de las variedades diferenciables se tiene que si (M, f) representa el elemento nulo de $\Omega_n^{HML} (X)$ entonces todos los números singulares de Stiefel-Whitney y de Pontrjagin son nulos. El resultado anterior junto con el hecho de que si M es una variedad diferenciable, las clases de Stiefel-Whitney y de Pontrjagin coinciden con las clásicas (ver [10] y [17]) da lugar a los siguientes resultados (ver [17; 6]).

El morfismo olvido "olv" envía la parte libre de $\Omega_n^{DIF} (X)$ en la parte libre de $\Omega_n^{HML} (X)$. Además, si el grupo de torsión de $H_* (X; Z)$ tiene todos sus elementos de orden 2 entonces "olv" es inyectivo.

Por último, todos los resultados del tercer apartado son igualmente válidos para el caso orientado debido a que las construcciones realizadas en 3.2 son todas orientables.

BIBLIOGRAFIA

[1] AKIN, E.: *Stiefel-Whitney homology classes and bordism.* Trans. A.M.S. 205 (1975) 341-359.

[2] AYALA, R.: *Una aproximación axiomática a las teorías de cobordismo.* Tesis. Univ. Sevilla (1983).

[3] BUONCRISTIANO, S., ROURKE, C. P., SANDERSON B. J.: *A geometric approach to homology theory.* Cambridge Univ. Press (1976).

[4] CANNON, S. W.: *The recognition problem: What is a topological manifold?* Bull, A. M. S. 84 (1978) 832-866.

[5] COHEN, M. M.: *Simplicial structures and transverse cellularity.* Ann. of Math. 85 (1967) 218-245.

[6] CONNER, P. E.: *Differentiable Periodic Maps.* Lecture Notes 738. Springer-Verlag (1979).

[7] DOMINGUEZ, E.: *An axiomatic approach to bordism theory.* Pendiente de publicación.

[8] ——: *Notas sobre el concepto de clases de Stiefel-Whitney.* Univ. Sevilla (1980).

[9] GALEWSKI, D. E., STERN, R. J.: *Classification of simplicial triangulations of topological manifolds.* Ann. of Math. 111 (1980) 1-34.

[10] HALPERIN, S., TOLEDO, D.: *Stiefel-Whitney homology classes.* Ann. of Math. 96 (1972) 511-525.

[11] HIRSCH M.: *Obstruction theories for smoothing manifolds and maps.* Bull. A.M.S. 69 (1963).

[12] KERVAIRE, M. A.: *Smooth homology Spheres and their fundamental groups.* Trans. A.M.S. 144 (1969) 67-72.

[13] MAUNDER, C. R. F.: *Algebraic Topology.* Van Nostrand (1970).

[13] MARTIN, N.: *Cobordism of homology manifolds.* Proc. Camb. Philos. Soc. 71 (1972) 247-270.

[15] ——: *On the difference between homology and piecewese-linear bundles.* J. London Math. Soc. (2) 6 (1973) 197-204.

[16] MARTIN, N., MAUNDER, C. R. F.: *Homology cobordism bundles.* Topology 10 (1971) 93-110.

[17] MILNOR, J. W., STASHEFF, J.: *Characteristic classes.* Ann. of Math. Studies 76. Princeton Univ. Press (1976).

[18] MILNOR, J. W.: *A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds.* Proc. Symp. Pure Math. Vol 3 (1961) 39-55.

[19] ROURKE, C. P., SANDERSON, B. J.: *Introduction to piecewise linear topology.* Springer-Verlag (1972).

[20] SATO, H.: *Constructing manifolds by homotopy equivalence I. An obstruction to constructing PL manifolds from homology manifolds.* Ann. Inst. Fourier 22 (1972) 271-286.

[21] SWITZER, R. M.: *Algebraic Topology. Homotopy and Homology.* Springer-Verlag (1975).

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
C/ Tarfia, s/n
SEVILLA-41012