# Métodos de Continuación:

## de licenciado a doctor

**Dr. David Ariza-Ruiz**

Universidad de Sevilla
Departamento de Análisis Matemático

IX Encuentro Red Análisis Funcional y Aplicaciones

11 de abril de 2013

# ¿Qué es la Teoría del Punto Fijo?

## El problema

Dados dos conjuntos $A$ y $B$, con $A \cap B \neq \emptyset$, y una aplicación $T : A \to B$, encontrar condiciones sobre $A$, $B$ y $T$ para

- asegurar la existencia de soluciones de la ecuación $Tx = x$. Estas soluciones, si existen, son llamadas **puntos fijos de $T$**.
- construir una sucesión de puntos que se aproximen a un punto fijo de $T$.

# ¿Qué es la Teoría del Punto Fijo?

## El problema

Dados dos conjuntos $A$ y $B$, con $A \cap B \neq \emptyset$, y una aplicación $T : A \to B$, encontrar condiciones sobre $A$, $B$ y $T$ para

- asegurar la existencia de soluciones de la ecuación $Tx = x$. Estas soluciones, si existen, son llamadas **puntos fijos de $T$**.
- construir una sucesión de puntos que se aproximen a un punto fijo de $T$.

$$\text{Teoría del Punto Fijo} \begin{cases} \text{Teoría } \underline{\text{Métrica}} \text{ del Punto Fijo} \\ \\ \text{Teoría } \underline{\text{Topológica}} \text{ del Punto Fijo} \end{cases}$$

# Principio de Contracción de Banach (1922)

Sea $D$ un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo $(X,d)$ y sea $T: D \to D$ una **contracción**, es decir,

**CONTRACCIÓN**

existe una constante (de contraction) $\alpha \in [0,1)$ tal que

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha\, d(x,y), \qquad \text{for all } x,y \in D. \tag{C}$$

Entonces,

1. $T$ tiene un único punto fijo $p$ en $X$;
2. Para cualquier $x_0 \in X$, la **iterada de Picard** asociada a $T$ con punto inicial $x_0$, es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por
$$x_{n+1} := Tx_n = T^{n+1}x_0, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$
converge a $p$;
3. Las siguientes estimaciones de error a priori y a posteriori son ciertas:
$$d(x_n,p) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_0,x_1) \qquad \text{y} \qquad d(x_{n+1},p) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\, d(x_{n+1},x_n) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N};$$
4. El ratio de convergencia está dado por
$$d(x_{n+1},p) \leq \alpha^{n+1}\, d(x_0,x_1) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

# Antes de la tesis

# Antes de la tesis

- [2003–2008] Licenciatura en Matemáticas

# Antes de la tesis

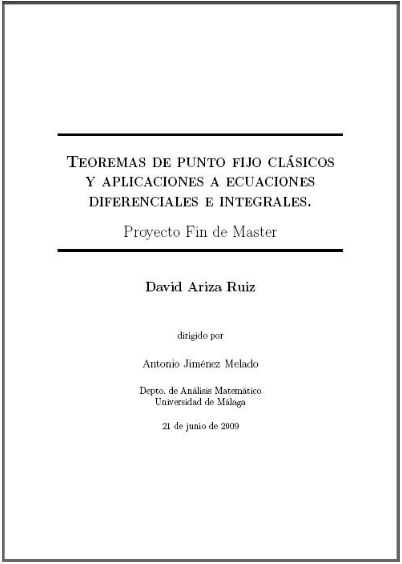
- [2003–2008] Licenciatura en Matemáticas
- [2008–2009] Máster Interuniversitario en Matemáticas

# Antes de la tesis

- [2003–2008] Licenciatura en Matemáticas
- [2008–2009] Máster Interuniversitario en Matemáticas


Prof. Antonio Jiménez Melado

# Proyecto de Fin de Máster



TEOREMAS DE PUNTO FIJO CLÁSICOS Y APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES E INTEGRALES.

Proyecto Fin de Master

David Ariza Ruiz

dirigido por

Antonio Jiménez Melado

Depto. de Análisis Matemático
Universidad de Málaga

21 de junio de 2009

Durante su elaboración obtuvimos dos *artículos*

- *A Continuation Method for Weakly Contractive Mappings under the Interior Condition*,
  D.A-R. y Antonio Jiménez-Melado,
  Fixed Point Theory and Applications,
  Volume 2009 (2009), 8 pages.

- *A Continuation Method for Weakly Kannan Maps*,
  D.A-R. y Antonio Jiménez-Melado,
  Fixed Point Theory and Applications,
  Volume 2010 (2010), 12 pages.

# La estructura de un método de continuación

# La estructura de un método de continuación

### La estructura general

Sean $T$ y $S$ dos aplicaciones de un subconjunto $U$ en $X$. Supongamos que existe una homotopía $H : \overline{U} \times [0,1] \to X$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

(a) $H(\cdot,0) = S$ y $H(\cdot,1) = T$;

(b) $H$ es continua en $\overline{U} \times [0,1]$;

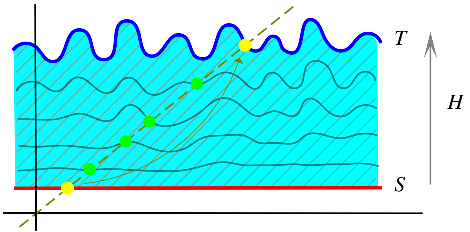
(c) Para todo $\lambda \in [0,1]$, $H(\cdot,\lambda)$ es algún tipo de aplicación contractiva;

(d) $H$ verifica la condición de Leray-Schauder o la condición interior.

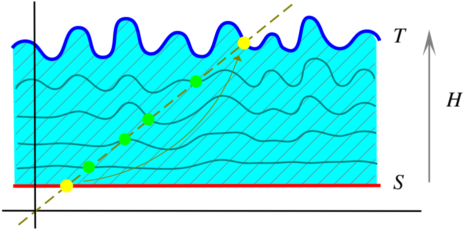
Entonces,

$T$ tiene un punto fijo si, y sólo si, $S$ tiene un punto fijo.

# Algunos métodos de continuación



# Algunos métodos de continuación




- Granas (1994) para las contracciones.
- Frigon (1995) para las contracciones débiles.
- Hemos obtenidos métodos de continuación para
  - las contracciones débiles con la condición interior,
  - las aplicaciones débil Kannan con la condición de Leray-Schauder.

# Aplicaciones Kannan

*Remark 1.*

Toda contracción es continua.

# Aplicaciones Kannan

*Remark 1.*

Toda contracción es continua.

**PREGUNTA:** ¿Podemos obtener un teorema de punto fijo reemplazando la condición de contracción por otra condición de tipo métrica que no implique la continuidad de la aplicación?

# Aplicaciones Kannan

*Remark 1.*

Toda contracción es continua.

**PREGUNTA:** ¿Podemos obtener un teorema de punto fijo reemplazando la condición de contracción por otra condición de tipo métrica que no implique la continuidad de la aplicación?

**APLICACIÓN TIPO KANNAN (1968)**

Existe una constante $\kappa \in [0,1)$ tal que

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{\kappa}{2}\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right] \quad \text{para todo } x,y \in D. \tag{K}$$

# Llegada a Sevilla

El 1 de septiembre de 2009 me incorporé al grupo de investigación *Análisis No Lineal* con una beca de 4 años.

# Llegada a Sevilla

El 1 de septiembre de 2009 me incorporé al grupo de investigación *Análisis No Lineal* con una beca de 4 años.

Prof. Genaro López Acedo

# Llegada a Sevilla

El 1 de septiembre de 2009 me incorporé al grupo de investigación *Análisis No Lineal* con una beca de 4 años.

Prof. Genaro López Acedo

- Trabajos de TPF con condiciones fronteras y TPF topológicos.

# Llegada a Sevilla

El 1 de septiembre de 2009 me incorporé al grupo de investigación *Análisis No Lineal* con una beca de 4 años.

Prof. Genaro López Acedo

- Trabajos de TPF con condiciones fronteras y TPF topológicos.
- Generalización de los resultados de las aplicaciones débilmente Kannan a las aplicaciones débil Zamfirescu

# Llegada a Sevilla

El 1 de septiembre de 2009 me incorporé al grupo de investigación *Análisis No Lineal* con una beca de 4 años.

Prof. Genaro López Acedo

- Trabajos de TPF con condiciones fronteras y TPF topológicos.
- Generalización de los resultados de las aplicaciones débilmente Kannan a las aplicaciones débil Zamfirescu
  - *A fixed point theorem for weakly Zamfirescu mappings*, D.A-R., Antonio Jiménez-Melado, y Genaro López-Acedo, Nonlinear Analysis 74 (2011) 1628-1640.

# Aplicaciones Zamfirescu

En 1972 Zamfirescu introdujo y estudió una nueva clases de aplicaciones que generalizaban a las contracciones y a las aplicaciones del tipo Kannan.

**APLICACIONES DEL TIPO ZAMFIRESCU (1972)**

Existe una constante $\zeta \in [0,1)$ tal que

$$d(Tx,Ty) \leq \zeta \text{ máx}\left\{d(x,y), \frac{1}{2}\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right], \frac{1}{2}\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]\right\} \tag{Z}$$

para todo $x, y \in D$

# Aplicaciones Zamfirescu

En 1972 Zamfirescu introdujo y estudió una nueva clases de aplicaciones que generalizaban a las contracciones y a las aplicaciones del tipo Kannan.

**APLICACIONES DEL TIPO ZAMFIRESCU (1972)**

Existe una constante $\zeta \in [0,1)$ tal que

$$d(Tx,Ty) \leq \zeta \max\left\{d(x,y), \frac{1}{2}\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right], \frac{1}{2}\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]\right\} \qquad \text{(Z)}$$

para todo $x, y \in D$

Obtuvimos resultados de

- Existencia y unicidad de puntos fijos.
- Convergencia de las iteradas de Picard.
- Método de Continuación.

para las aplicaciones débilmente Zamfirescu.

# Aplicaciones débilmente Zamfirescu

**IDEA:** Reemplazar la constante $\zeta$ por una función $\zeta : D \times D \to [0,1]$ que satisface una cierta propiedad:

### FUNCIONES COMPACTAMENTE MENOR QUE 1

Una función $\zeta : D \times D \to [0,1]$ es **compactamente menor que 1** si

$$\mathfrak{S}_\alpha(a,b) := \sup_{x,y\in D} \left\{ \alpha(x,y) : a \leq d(x,y) \leq b \right\} < 1 \tag{1}$$

para todo $b \geq a > 0$

# Aplicaciones débilmente Zamfirescu

**IDEA:** Reemplazar la constante $\zeta$ por una función $\zeta : D \times D \to [0,1]$ que satisface una cierta propiedad:

### FUNCIONES COMPACTAMENTE MENOR QUE 1

Una función $\zeta : D \times D \to [0,1]$ es **compactamente menor que 1** si

$$\mathfrak{S}_{\alpha}(a,b) := \sup_{x,y\in D} \left\{ \alpha(x,y) : a \leq d(x,y) \leq b \right\} < 1 \tag{1}$$

para todo $b \geq a > 0$

**ANTECEDENTES HISTÓRICOS:** Krasnosel'skii [1964], Dugundji y Granas [1975] para las contracciones.

# Terminando mi primer año en la US

En junio del 2010 conocí al profesor Laurenţiu

# Terminando mi primer año en la US

En junio del 2010 conocí al profesor Laurenţiu

Prof. Laurenţiu Leuştean

# Terminando mi primer año en la US

En junio del 2010 conocí al profesor Laurenţiu

Prof. Laurenţiu Leuştean

- Estudio de los espacios geodésicos y los espacios $W$-hiperbólicos.

# Terminando mi primer año en la US

En junio del 2010 conocí al profesor Laurenţiu

Prof. Laurenţiu Leuştean

- Estudio de los espacios geodésicos y los espacios $W$-hiperbólicos.

  **OBJETIVO:** Extender los resultados conocidos en espacios de Hilbert y espacios de Banach a espacios métricos sin ninguna estructura lineal.

# Geodésicas en un espacio métrico general

*Definition 2.*

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Una **geodésica** que une $x \in X$ con $y \in X$ es una aplicación $\gamma : [0, d(x,y)] \to X$ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x,y)) = y$, y

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|, \qquad \text{for any } t, s \in [0, d(x,y)].$$

# Geodésicas en un espacio métrico general

*Definition 2.*

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Una **geodésica** que une $x \in X$ con $y \in X$ es una aplicación $\gamma : [0,d(x,y)] \to X$ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x,y)) = y$, y

$$d(\gamma(t),\gamma(s)) = |t-s|, \qquad \text{for any } t,s \in [0,d(x,y)].$$

*Definition 3.*

Un espacio métrico $(X,d)$ se dice que es (**únicamente**) **geodésico** si todo par de puntos distintos pueden ser unidos por una (única) geodésica.

# Geodésicas en un espacio métrico general

*Definition 2.*

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Una **geodésica** que une $x \in X$ con $y \in X$ es una aplicación $\gamma : [0, d(x,y)] \to X$ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x,y)) = y$, y

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|, \qquad \text{for any } t, s \in [0, d(x,y)].$$

*Definition 3.*

Un espacio métrico $(X,d)$ se dice que es (**únicamente**) **geodésico** si todo par de puntos distintos pueden ser unidos por una (única) geodésica.

Un importante ejemplo de espacios geodésicos es la clase de los espacios $W$-hiperbólicos.

# Espacios $W$-hiperbólicos

*Definition 4 (Kohlenbach, 2005).*

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Decimos que $(X,d,\oplus)$ es un **espacio $W$-hiperbólico** si existe una **aplicación de convexidad** $\oplus : X \times X \times [0,1] \to X$ (no necesariamente única) satisfaciendo las siguiente propiedades:

$(W_1)$ $\quad d(z,(1-\lambda)x \oplus \lambda y) \leq (1-\lambda)\, d(z,x) + \lambda\, d(z,y)$;

$(W_2)$ $\quad d((1-\lambda)x \oplus \lambda y, (1-\tilde{\lambda})x \oplus \tilde{\lambda} y) = |\lambda - \tilde{\lambda}|\, d(x,y)$;

$(W_3)$ $\quad (1-\lambda)x \oplus \lambda y = \lambda y \oplus (1-\lambda)x$;

$(W_4)$ $\quad d((1-\lambda)x \oplus \lambda y, (1-\lambda)z \oplus \lambda w) \leq (1-\lambda)\, d(x,z) + \lambda\, d(y,w)$;

para todo $x,y,z,w \in X$, $\lambda, \tilde{\lambda} \in [0,1]$.

# Ejemplos de espacios $W$-hiperbólicos

*Example 5.*

1. Cualquier subconjunto convexo de un espacio normado.

# Ejemplos de espacios $W$-hiperbólicos

*Example 5.*

1. Cualquier subconjunto convexo de un espacio normado.
2. La bola de Hilbert $(\mathbb{B}, \rho)$.

# Ejemplos de espacios $W$-hiperbólicos

## Example 5.

1. Cualquier subconjunto convexo de un espacio normado.
2. La bola de Hilbert $(\mathbb{B}, \rho)$.
3. Los espacios CAT(0).

# Ejemplos de espacios $W$-hiperbólicos

*Example 5.*

1. Cualquier subconjunto convexo de un espacio normado.
2. La bola de Hilbert $(\mathbb{B}, \rho)$.
3. Los espacios CAT(0).
4. Variedades de Hadamard. En particular, cualquier variedad riemanniana, completa, simplemente conectada con curvatura seccional no positiva.

# Ejemplos de espacios $W$-hiperbólicos

*Example 5.*

1. Cualquier subconjunto convexo de un espacio normado.
2. La bola de Hilbert $(\mathbb{B}, \rho)$.
3. Los espacios CAT(0).
4. Variedades de Hadamard. En particular, cualquier variedad riemanniana, completa, simplemente conectada con curvatura seccional no positiva.
5. $\mathbb{R}$-árboles.

# Ejemplos de espacios $W$-hiperbólicos

*Example 5.*

1. Cualquier subconjunto convexo de un espacio normado.
2. La bola de Hilbert $(\mathbb{B}, \rho)$.
3. Los espacios CAT(0).
4. Variedades de Hadamard. En particular, cualquier variedad riemanniana, completa, simplemente conectada con curvatura seccional no positiva.
5. $\mathbb{R}$-árboles.
6. Espacios de Busemann.

# Mi primera estancia

Desde el 20 de febrero hasta el 20 de mayo de 2011, realicé una estancia en el *Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy* para trabajar con el profesor Laurentţui.

Instituto IMAR, Rumanía

# Mi primera estancia

Desde el 20 de febrero hasta el 20 de mayo de 2011, realicé una estancia en el *Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy* para trabajar con el profesor Laurentţui.

Instituto IMAR, Rumanía

- *Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces*, D.A-R., Laurenţiu Leuştean, y Genaro López-Acedo, Transactions of the American Mathematical Society (Aceptado).

# Mi tercer año

En enero de 2012 conocí al profesor Eyvind.

Prof. Eyvind Martol Briseid

# Mi tercer año

En enero de 2012 conocí al profesor Eyvind.

Prof. Eyvind Martol Briseid

- *Rate of convergence under weak contractiveness conditions*, D.A-R., Eyvind Martol Briseid, Antonio Jiménez-Melado, y Genaro López-Acedo
  Fixed Point Theory Ro (in press).

  Resultados sobre
  - existencia y unidad de puntos fijos.
  - convergencia de las iteradas de Picard.
  - una explícita expresión del módulo de unicidad

# Un módulo de unicidad

*Theorem 6.*

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Supongamos que $T:X\to X$ satisface la siguiente condición: existe una constante $\mu\geq 1$ y una función $\alpha : X\times X\to[0,1]$ compactamente menor que 1 tales que

$$d(x,Ty)\leq \alpha(x,y)\,d(x,y)+\mu\,d(x,Tx)\qquad \text{for all } x,y\in X.$$

Definimos $\psi(\mathfrak{S},\mu,\cdot,\cdot):(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ por

$$\psi(\mathfrak{S},\mu,b,t):=\frac{t\,(1-\mathfrak{S}(t,b))}{\mu+1}\,,$$

donde $\mathfrak{S}$ está dada por (1). Entonces, para todo $\varepsilon>0$ y $x,y\in X$ con $d(x,y)\leq b$ tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} d(x,Tx)\leq\psi(\mathfrak{S},\mu,b,\varepsilon)\\[2ex] d(y,Ty)\leq\psi(\mathfrak{S},\mu,b,\varepsilon)\end{array}\right\}\Rightarrow d(x,y)\leq\varepsilon.$$

# Mi segunda estancia

Desde el 20 de febrero hasta el 20 de mayo de 2012, realicé una estancia en la *Universidad de Newcastle* (Australia) para trabajar con el profesor Brailey Sims.

Prof. Brailey Sims

# Mi segunda estancia

Desde el 20 de febrero hasta el 20 de mayo de 2012, realicé una estancia en la *Universidad de Newcastle* (Australia) para trabajar con el profesor Brailey Sims.

Prof. Brailey Sims

Estudio más exhaustivo de los espacios geodésicos.

Ejemplos de espacios CAT(0): el plano de Poincaré $\mathbb{H}$.

Simulaciones con el programa *Cindirella.*

Publicación del *artículo*

- *Convergence and Stability of some iterative processes for a class of quasinonexpansive type mappings*,
  D.A-R.,
  Journal of Nonlinear Sciences & its Applications (2012), Vol 5 Issue 2, p93.

# Último año: la tesis

En el verano del 2012 comienzo a escribir la tesis.

# Último año: la tesis

En el verano del 2012 comienzo a escribir la tesis.

Mientras,

- *A generalized Suzuki's condition in the sense of Rakotch*,
  D.A-R., Antonio Jiménez-Melado, y Genaro López-Acedo,
  Journal of Nonlinear and Convex Analysis (Accepted).
- *Schauder Fixed Point Theorem in geodesic spaces*,
  D.A-R., Genaro López-Acedo y Chong Li, (In progress).
- *A exhaustive study about the most relevant classical contractive type conditions*,
  (In progress).

# Un ratio de convergencia para las iteradas de Picard

*Theorem 7.*

Sea $(X,d)$ un espacio métrico completo. Supongamos que $T : X \to X$ satisface

$$d(x,Tx) \leq d(x,y) \quad \text{implies} \quad d(Tx,Ty) \leq r(d(x,y))\, d(x,y) \tag{2}$$

para todo $x,y \in X$, donde $r : [0,\infty) \to [0,1]$ es decreciente y $r(t) < t$ para todo $t > 0$. Dado $x_0 \in X$, consideramos $x_{n+1} := Tx_n$. Sea $b > 0$ verificando que $d(x_0,x_1) \leq b$. Definimos $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ por

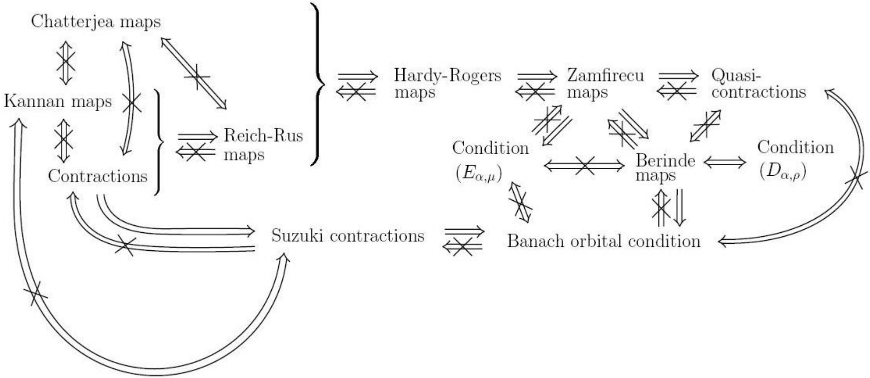
$$h(\varepsilon) := \min\left\{ \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - r(\tfrac{\varepsilon}{2})\right), b \right\}.$$

Entonces, la iterada de Picard convergen a un punto $z$ y, además, la función $\gamma : (0,\infty) \to \mathbb{N}$ dada por

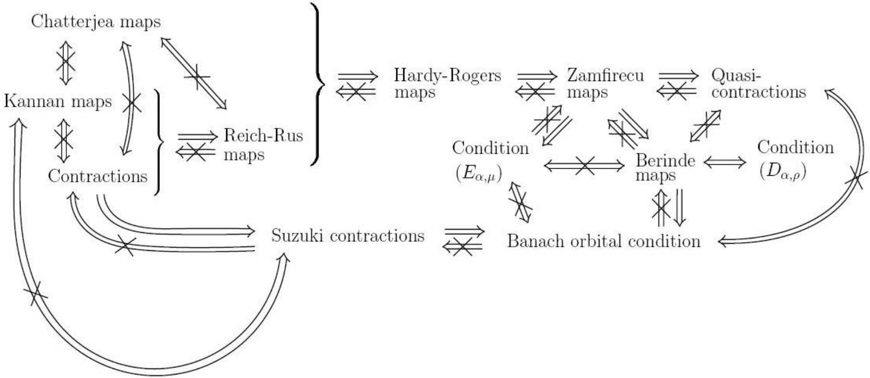
$$\gamma(\varepsilon) := \begin{cases} \left\lceil \frac{\log h(\varepsilon) - \log b}{\log r(h(\varepsilon))} \right\rceil + 1, & \text{if } h(\varepsilon) < b \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

es un ratio de dicha convergencia, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que $d(z,x_n) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq \gamma(\varepsilon)$.

# Un simple diagrama



# Un simple diagrama



# Una completa tabla

| | (C) | (K) | (Ch) | (R) | (HR) | (Z) | (QC) | (AC) | (S) | $(E_{\alpha,\mu})$ | $(D_{\alpha,\rho})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (C) | — | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.8 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.8 | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ |
| (K) | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.9 | — | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.9 | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\not\Longrightarrow$ [155, Ex.2] | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ |
| (Ch) | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.7 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.7 | — | $\not\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | ??? | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ |
| (R) | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.11 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.11 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.12 | — | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | ??? | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ |
| (HR) | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.11 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.11 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.12 | $\not\Longrightarrow$ | — | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | ??? | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ |
| (Z) | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.16 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.17 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.18 | $\not\Longrightarrow$ | ??? | — | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | ??? | $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ |
| (QC) | $\not\Longrightarrow$ [35, Ex.4.4] | $\not\Longrightarrow$ [35, Ex.4.4] | $\not\Longrightarrow$ [35, Ex.4.4] | $\not\Longrightarrow$ [35, Ex.4.4] | $\not\Longrightarrow$ [35, Ex.4.4] | $\not\Longrightarrow$ [35, Ex.4.4] | — | $\not\Longrightarrow$ [35, Ex.4.4] | $\not\Longrightarrow$ [35, Ex.4.4] | $\not\Longrightarrow$ Remark 2.37 | $\not\Longrightarrow$ [35, Ex.4.4] |
| (AC) | $\not\Longrightarrow$ [11, Ex.1] | $\not\Longrightarrow$ [11, Ex.1] | $\not\Longrightarrow$ [11, Ex.1] | $\not\Longrightarrow$ [11, Ex.1] | $\not\Longrightarrow$ [11, Ex.1] | $\not\Longrightarrow$ [11, Ex.1] | $\not\Longrightarrow$ [11, Ex.1] | — | ??? | $\not\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ Prop. 2.42 |
| (S) | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.31 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.31 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.31 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.31 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.31 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.31 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.31 | ??? | — | ??? | ??? |
| $(E_{\alpha,\mu})$ | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.35 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.35 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.35 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.35 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.35 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.35 | $\not\Longrightarrow$ | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.35 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.35 | — | $\not\Longrightarrow$ Remark 2.41 |
| $(D_{\alpha,\rho})$ | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.40 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.40 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.40 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.40 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.40 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.40 | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.40 | $\Longrightarrow$ Prop. 2.42 | ??? | $\not\Longrightarrow$ Ex. 2.40 | — |

# Depósito y defensa de la tesis

- El 14 de diciembre de 2012, deposité la tesis.
- El 5 de abril de este año, la defendí.

# Depósito y defensa de la tesis

- El 14 de diciembre de 2012, deposité la tesis.
- El 5 de abril de este año, la defendí.

# *¡¡Gracias por vuestra atención!!*

# Aplicaciones tipo Chatterjea

Nueve años después después del TPF de Kannan, Rhoades publicó un *artículo* comparando **parcialmente** **250** diferentes condiciones de contractividad las cuales fueron usadas para obtener nuevos TPF.

Hemos llevado a cabo un estudio exhaustivo estudio de las differentes conecciones entre las más relevantes condiciones de contractividad hasta la fecha.

# Aplicaciones tipo Chatterjea

Nueve años después después del TPF de Kannan, Rhoades publicó un *artículo* comparando **parcialmente** **250** diferentes condiciones de contractividad las cuales fueron usadas para obtener nuevos TPF.

Hemos llevado a cabo un estudio exhaustivo estudio de las differentes conecciones entre las más relevantes condiciones de contractividad hasta la fecha.

Chatterjea (1972) demostró un TPF usando una condición similar a la condición de Kannan.

**APLICACIONES CHATTERJEA(1972)**

Existe una constante $\xi \in [0,1)$ tal que

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{\xi}{2}\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right] \quad \text{para todo } x,y \in D. \tag{Ch}$$

# Aplicaciones tipo Reich-Rus y tipo Hardy-Rogers

### APLICACIONES REICH-RUS (1971)

Existen dos constantes $a, b \geq 0$, con $a + 2b < 1$, tales que

$$d(Tx, Ty) \leq a\, d(x, y) + b\, [d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad \text{para todo } x, y \in D. \tag{RR}$$

# Aplicaciones tipo Reich-Rus y tipo Hardy-Rogers

**APLICACIONES REICH-RUS (1971)**

Existen dos constantes $a, b \geq 0$, con $a + 2b < 1$, tales que

$$d(Tx, Ty) \leq a\, d(x, y) + b\, [d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad \text{para todo } x, y \in D. \tag{RR}$$

**APLICACIONES HARDY-ROGERS (1973)**

Existen tres constantes no negativas $a, b, c$, con $a + 2b + 2c < 1$, tales que

$$d(Tx, Ty) \leq a\, d(x, y) + b\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right] + c\left[d(x, Ty) + d(y, Tx)\right], \tag{HR}$$

para todo $x, y \in D$.

# Aplicaciones tipo Zamfirescu, Condición Orbital de Banach, las quasi-contracciones

## Aplicaciones Zamfirescu (1972)

Existe una constante $\zeta \in [0,1)$ tal que para todo $x, y \in D$ tenemos que

$$d(Tx,Ty) \leq \zeta \max\left\{d(x,y), \frac{1}{2}\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right], \frac{1}{2}\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]\right\} \tag{Z}$$

# Aplicaciones tipo Zamfirescu, Condición Orbital de Banach, las quasi-contracciones

## Aplicaciones Zamfirescu (1972)

Existe una constante $\zeta \in [0,1)$ tal que para todo $x, y \in D$ tenemos que

$$d(Tx, Ty) \leq \zeta \max\left\{d(x,y), \frac{1}{2}\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right], \frac{1}{2}\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]\right\} \tag{Z}$$

## Banach Orbital Condition

Existe una constante $\alpha \in [0,1)$ tal que

$$d(Tx, T^2x) \leq \alpha\, d(x, Tx), \quad \text{para todo } x \in D. \tag{BOC}$$

# Aplicaciones tipo Zamfirescu, Condición Orbital de Banach, las quasi-contracciones

### Aplicaciones Zamfirescu (1972)

Existe una constante $\zeta \in [0,1)$ tal que para todo $x, y \in D$ tenemos que

$$d(Tx,Ty) \leq \zeta \max\left\{d(x,y), \frac{1}{2}\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right], \frac{1}{2}\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]\right\} \tag{Z}$$

### Banach Orbital Condition

Existe una constante $\alpha \in [0,1)$ tal que

$$d(Tx,T^2x) \leq \alpha\, d(x,Tx), \;\; \text{para todo } x \in D. \tag{BOC}$$

### Quasi-contracción (1974)

Existe una constante $q \in [0,1)$ tal que

$$d(Tx,Ty) \leq q \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\right\} \tag{QC}$$

para todo $x, y \in D$.

# Aplicaciones tipo Berinde

Usando sólo la desigualdad triangular, se prueba que toda aplicación Zamfirescu $T$ satisface la siguiente desigualdad:

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{\zeta}{2-\zeta}\, d(x,y) + \frac{2\,\zeta}{2-\zeta}\, d(y,Tx) \text{ para todo } x,y \in D.$$

**Aplicaciones Berinde (2004)**

There exist two constants $\delta \in [0,1)$ and $L \geq 0$ such that

$$d(Tx,Ty) \leq \delta\, d(x,y) + L\, d(y,Tx) \quad \text{para todo } x,y \in D. \tag{AC}$$

# Contracciones tipo Suzuki

*Theorem 8 (Suzuki, 2008).*

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. $X$ es completo si, y sólo si, toda aplicaciones $T : X \to X$ que satisface la siguiente condición tiene un punto fijo en $X$.

# Contracciones tipo Suzuki

*Theorem 8 (Suzuki, 2008).*

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. $X$ es completo si, y sólo si, toda aplicaciones $T : X \to X$ que satisface la siguiente condición tiene un punto fijo en $X$.

**CONTRACCIÓN TIPO SUZUKI (2008)**

Existe una constante $r \in [0,1)$ tal que para cada $x, y \in D$

$$\theta(r)\, d(x,Tx) \le d(x,y) \quad \text{implies} \quad d(Tx,Ty) \le r\, d(x,y), \tag{S}$$

# Contracciones tipo Suzuki

*Theorem 8 (Suzuki, 2008).*

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. $X$ es completo si, y sólo si, toda aplicaciones $T:X\to X$ que satisface la siguiente condición tiene un punto fijo en $X$.

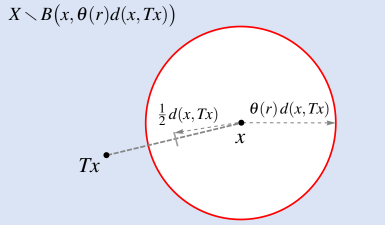
**CONTRACCIÓN TIPO SUZUKI (2008)**

Existe una constante $r\in[0,1)$ tal que para cada $x,y\in D$

$$\theta(r)\,d(x,Tx)\le d(x,y)\quad\text{implies}\quad d(Tx,Ty)\le r\,d(x,y),\tag{S}$$

donde $\theta:[0,1)\to(1/2,1]$ es definido por

$$\theta(r):=\begin{cases}1 & \text{if } 0\le r\le\frac{\sqrt{5}-1}{2},\\ (1-r)r^{-2} & \text{if } \frac{\sqrt{5}-1}{2}\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}},\\ (1+r)^{-1} & \text{if } \frac{1}{\sqrt{2}}\le r<1.\end{cases}$$




Aquí, $T$ es a contracción.

# La condición $(E_{\alpha,\mu})$ y la condición $(D_{\alpha,\rho})$

Hemos introducido dos nuevas condiciones de contractividad para obtener TPF.

**CONDICIÓN $(E_{\alpha,\mu})$ (2013)**

Existen dos constantes $\alpha \in [0,1)$ y $\mu \geq 1$ tales que

$$d(x,Ty) \leq \alpha\, d(x,y) + \mu\, d(x,Tx), \qquad \text{para todo } x,y \in D. \qquad (E_{\alpha,\mu})$$

# La condición $(E_{\alpha,\mu})$ y la condición $(D_{\alpha,\rho})$

Hemos introducido dos nuevas condiciones de contractividad para obtener TPF.

**CONDICIÓN $(E_{\alpha,\mu})$ (2013)**

Existen dos constantes $\alpha \in [0,1)$ y $\mu \geq 1$ tales que

$$d(x,Ty) \leq \alpha\, d(x,y) + \mu\, d(x,Tx), \qquad \text{para todo } x,y \in D. \tag{$E_{\alpha,\mu}$}$$

**CONDICIÓN $(D_{\alpha,\rho})$ (2013)**

Existen dos constantes $\alpha \in [0,1)$ y $\rho \geq 1$ tales que

$$d(x,Tx) \leq \alpha\, d(x,y) + \rho\, d(x,Ty), \qquad \text{for all } x,y \in D. \tag{$D_{\alpha,\rho}$}$$