Estabilidad de espacios localmente convexos por ultraproductos

Por JOSE ANTONIO FACENDA AGUIRRE

Recibido: 2 marzo 1983

Presentado por el académico correspondiente D. Antonio de Castro Brzezicki.

Resumen

Estudiamos en este artículo la estabilidad de algunas clases de espacios localmente convexos bajo la formacion de ultraproductos. Se demuestra que los espacios bornologicos y ultrabornológicos son estables (teorema 2) pero no así los espacios tonelados, Montel, completos, B-completos y B_r-completos (teorema 4).

Abstract

In this paper we study the stability of some classes of locally convex spaces under ultraproducts. It is proved that the bornological and ultrabornological spaces are stable (theorem 2) but barrelled, Montel, complete, B-complete and B_r-complete spaces are not (theorem 4).

Admitiendo la existencia de cardinales medibles se define en |2| el ultraproducto de una familia de espacios localmente convexos, cuya construcción recordamos a continuación:

Sea $[E_i\colon i \in I]$ una familia de espacios localmente convexos tales que card$(I) \geqslant \mu$, primer cardinal medible no numerable y denotemos por $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no trivial, numerablemente completo sobre I. En el espacio producto $\Pi[E_i\colon i \in I]$ se define la relación de equivalencia

$$< x_i\colon i \in I > =_{\mathcal{F}} < y_i\colon i \in I > \text{ si } [i \in I\colon x_i = y_i] \in \mathcal{F}$$

En el espacio cociente se consideran las seminormas dadas por

$$\bar{p}([< x_i\colon i \in I >]) = \lim_{\mathcal{F}} p_i(x_i),$$

donde p_i denota una seminorma continua arbitraria sobre E_i. A dicho espacio dotado de la topología localmente convexa definida por esta familia de seminormas lo llamamos ultraproducto de $[E_i\colon i \in I]$ y lo notamos por $\underset{i \in I}{P}(E_i)$.

Si $\mathfrak{C}$ es una clase de espacios localmente convexos, se dice que es estable por ultraproductos si siempre que $[E_i\colon i \in I]$ sea una familia de $\mathfrak{C}$ es

$\underset{i \in I}{P}(E_i)$ un espacio de $\mathbf{C}$. En |2| estudiamos algunas clases estables por ultraproductos. Se demostró que los espacios (HM) o espacios con envolventes no estándar invariantes |3|, no son estables. En este artículo vamos a estudiar la estabilidad de algunas clases no consideradas en |2|.

Es conocido que si $[E_i\colon i \in I]$ es una familia de espacios bornológicos, el producto es bornológico sí y sólo si no existe una medida de Ulam sobre I. Vamos a demostrar a continuación que los espacios bornológicos son no obstante estables por ultraproductos, y para ello necesitamos un resultado de fácil demostración:

Lema 1.–"Los espacios de Banach son estables por ultraproductos".

Demostración: Sea $[E_i\colon i \in I]$ una familia de espacios de Banach, card(I) mayor que μ y sea $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro no trivial numerablemente completo sobre I. Sea $\underset{i \in I}{P}(E_i)$ el ultraproducto de la familia a través de $\mathfrak{F}$. Es conocido |2| que tal espacio es normado. Sea $\bar{p}$ la norma del ultraproducto y p_i la de E_i. Sea $[\bar{x}^n : n < \omega]$ una sucesión de Cauchy para $\bar{p}$, es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe k natural tal que

$$\bar{p}(\bar{x}^m - \bar{x}^n) < \epsilon \quad \text{si} \quad m > k \text{ y } n > k.$$

Dado que $\bar{p}(\bar{x}) = \lim\limits_{\mathfrak{F}} p_i(x_i)$, existe $A_\epsilon \in \mathfrak{F}$ tal que si $i \in A_\epsilon$ es $p_i(x^m - x^n) < \epsilon$. Sea

$$A = \cap[A_\epsilon\colon \epsilon > 0] \in \mathfrak{F}$$

Es claro que para cada $i \in A$ es $[x_i^n : n < \omega]$ una sucesión de Cauchy en E_i. Llamemos x_i a su límite. Definamos

$$\bar{y} \in \underset{i \in I}{P}(E_i) \text{ por } \begin{cases} y_i = 0 \text{ si } i \in A, \\ y_i = x_i \text{ si } i \notin A. \end{cases}$$

Es fácil probar que $\bar{y}$ es el límite de la sucesión $[x^n : n < \omega]$.

Podemos pues afirmar que los espacios metrizables y completos son estables por ultraproductos. Sin embargo, demostraremos porteriormente que los espacios completos no lo son.

Teorema 2.– "Los espacios bornológicos y ultrabornológicos son estables por ultraproductos".

Demostración: Sea $[E_i\colon i \in I]$ una familia de espacios ultrabornológicos, card$(I) \geqslant \mu$, y sea $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro no trivial numerablemente completo sobre I. Sea E el ultraproducto de $[E_i\colon i \in I]$ a través de $\mathfrak{F}$. Para cada $i \in I$ sea $[X_\alpha : \alpha \in A_i]$ una familia de espacios de Banach tal que E_i es límite inductivo de dicha familia. Por comodidad en la notación, suponemos que los conjuntos de índices A_i, $i \in I$, son disjuntos. Para cada $\alpha \in A_i$ tenemos dada por hipótesis una aplicación lineal y continua $f_a : X_a \to E_i$. Denotamos por $\mathfrak{B}$ el conjunto de los selectores de la familia $[A_i \colon i \in I]$. Es decir, cada conjunto $B \in \mathfrak{B}$ corta a cada A_i en exactamente un punto. Dado que card(I) = card(B), consideramos el ultrafiltro $\mathfrak{F}$ sobre B y lo identificaremos con su imagen en B. Sean los espacios de Banach $Y_B = \underset{a \in B}{P}(X_a)$ y las aplicaciones lineales $g_B : Y_B \to E$ tales que

$$g_B([<y_a : \alpha \in B>]) = [<f_a(y_a) \colon \alpha \in B>], B \in \mathfrak{B}.$$

Es fácil ver que están bien definidas. Denotemos por T la topología de E como ultraproducto de la familia $[E_i \colon i \in I]$ y por T_1 la topología sobre E límite inductivo relativa a los espacios de Banach Y_B y las aplicaciones g_B, $B \in \mathfrak{B}$. Veamos que coinciden:

a) $T \leqslant T_1$.

Sea $\bar{U} = [\bar{x} \in E \colon \bar{p}(\bar{x}) < 1]$, donde $\bar{p} = \lim p_i$ es una seminorma continua sobre $E(T)$. Llamemos $U_i = [t \in E_i \colon p_i(t) < 1]$, entorno de cero en E_i y sea $V_a = f_a^{-1}(U_i)$, entorno de cero en X_a. Entonces,

$$\begin{aligned} g_B^{-1}(\bar{U}) &= [\bar{z} \in Y_B : [<f_a(z_a) \colon \alpha \in B>] \in \bar{U}] = \\ &= [\bar{z} \in Y_B : \lim_{\mathfrak{F}} p_i(f_a(z_a)) < 1] = \\ &= [\bar{z} \in Y_B : \exists\, A \in \mathfrak{F}, i \in A \to p_i(f_a(z_a)) < 1] = \\ &= [\bar{z} \in Y_b : \exists\, A \in \mathfrak{F}, \alpha \in A \to z_a \in V_a] = \\ &= \underset{a \in B}{P}(V_a), \end{aligned}$$

que evidentemente es un entorno de cero en Y_B. Luego cada aplicación g_B es continua para la topología T sobre E y por tanto, $T \leqslant T_1$.

b) $T_1 \leqslant T$.

Si $\bar{U}_B$ es la bola unidad abierta de Y_B basta probar que $g_B(\bar{U}_B)$ es entorno de cero en $E(T)$. Nótese por otra parte que si llamamos B_a a la bola unidad abierta de X_a es

$$\bar{z} = [<z_a \colon \alpha \in B>] \in \bar{U}_B \Leftrightarrow \exists\, A \in \mathfrak{F} \mid \alpha \in A \to z_a \in B_a$$

luego

$$g_B(\bar{U}_B) = \left\{ [<f_a(z_a) \colon \alpha \in B>] : \bar{z} \in \bar{U}_B \right\} = \underset{a \in B}{P}(f_a(B_a)).$$

que es entorno de cero en $E(T)$ por serlo cada $f_a(B_a)$ en E_i.

Si la familia $[E_i \colon i \in I]$ es de espacios bornológicos, para cada $i \in I$ se considera $[X_a \colon \alpha \in A_i]$ familia de espacios normados tal que E_i es límite inductivo de ella. Entonces, $\underset{i\in I}{P}(E)$ es límite inductivo de la familia de espacios normados $[Y_B: B \in \mathfrak{B}]$ igual que en la demostración anterior y por tanto el ultraproducto es bornológico.

En la segunda parte de nuestro trabajo, vamos a dar algunos ejemplos de clases de espacios que no son estables por ultraproductos. Si $[E_i: i \in I]$ es una familia cualquiera de espacios y denotamos por E_i^* el dual algebraico de E_i, es fácil demostrar que se verifica la contención $\underset{i\in I}{P}(E_i^*) \subset (\underset{i\in I}{P}(E_i))^*$. Para obtener ejemplos de clases no estables, vamos a probar en primer lugar la existencia de clases para las que la contención anterior es estricta:

Teorema 3.– "Existen familias de espacios $[E_i \in I]$, card $(I) \geqslant \mu$ tales que el ultraproducto de los duales algebraicos $\underset{i\in I}{P}(E_i^*)$ está contenido estrictamente en el dual algebraico $(\underset{i\in I}{P}(E_i))^*$".

Demostración: Sea E un espacio vectorial con base de Hamel $[\alpha: \alpha < \mu]$ y para cada $i < \mu$ sea $E_i = E$. Consideremos un ultrafiltro no trivial numerablemente completo sobre el primer cardinal medible μ y llamemos $P(E)$ al ultraproducto de la familia $[E_i: i < \mu]$ a través del ultrafiltro $\mathfrak{F}$. Denotemos por $P\mu$ el ultraproducto de μ, luego sus elementos son clases $[< \alpha_i: i < \mu >]$, $\alpha_i < \mu$ (ver |1|). Entonces,

a) $P(E)$ tiene base de Hamel $P\mu$.

En efecto, sea $\bar{x} = [< x_i: i < \mu >]$ un elemento de $P(E)$. Cada $x_i \in E_i$ luego podemos expresar

$$x_i = \Sigma\, [r_{ik}\alpha_{ik}: 1 \leqslant k \leqslant n(i)] \text{ y } \alpha_{ik} < \mu.$$

Dado que $\mu = \bigcup_{n<\omega} [i < \mu: n(i) = n]$ existe un n natural tal que $A = [i < \mu: n(i) = n]$ está en $\mathfrak{F}$. Pero para cada $k \in [1, \ldots, n]$ es $A = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} [i \in A: r_{ik} = r]$, luego existe un real r_k tal que el conjunto $A_k = [i \in A: r_{ik} = r_k]$ está en $\mathfrak{F}$. Definamos $B = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ y $\bar{\beta}_k$ la clase de $<\alpha_{ik}: i < \mu >$ en $P\mu$. Entonces es

$$\bar{x} = \Sigma[r_k\bar{\beta}_k: 1 \leqslant k \leqslant n]$$

pues si $i \in B$ es $\quad x_i = \Sigma[r_k\alpha_{ik}: 1 \leqslant k \leqslant n]$.

b) Podemos por tanto afirmar que el cardinal del dual algebraico $(P(E_i))^*$ es igual a $(2^{\aleph_0})^{\mathrm{card}(P\mu)} = 2^{\mathrm{card}(P\mu)}$

Por otra parte, el cardinal de cada espacio E_i^* es 2^μ por lo que el cardinal del ultraproducto de los duales algebraicos $\underset{i<\mu}{P}(E_i^*)$ es menor o igual que

$(2^\mu)^\mu = 2^\mu$. Pero dado que $2^\mu \leqslant \mathrm{card}(P\mu) < 2^{\mathrm{card}(P\mu)}$(ver |4|, p. 145 lema 8. 7(i)) se sigue que $\underset{i<\mu}{P}(E_i^*)$ está contenido estrictamente en $(\underset{i<\mu}{P}(E_i))^*$.

Debido a la existencia de familias con esta propiedad podemos enunciar:

Teorema 4.– "Los espacios B_r–completos, B–completos, tonelados y Montel no son estables por ultraproductos".

Demostración: Sea E el espacio del teorema 3 dotado de la topología localmente convexa más fina y consideremos E_i^* dotado de la topología débil $\sigma(E_i^*, E_i)$. Es conocido que estos espacios son B–completos (|5|, *p.* 123), por tanto B_r–completos y completos, y de Montel (|5|, *p*. 75). Más aún, el ultraproducto $\underset{i\in I}{P}(E_i^*)$ está dotado de la topología débil $\sigma(\underset{i\in I}{P}(E_i^*), \underset{i\in I}{P}(E_i))$ (ver |2|). Dado que es $\underset{i\in I}{P}(E_i^*)$ distinto de $(\underset{i\in I}{P}(E_i))^*$ se sigue que $\underset{i\in I}{P}(E_i^*)$ no es completo (luego no es B–completo ni B_r–completo) ni tonelado (luego no es Montel).

BIBLIOGRAFIA

[1] BELL, J. L. y SLOMSON, A. B.: Models and ultraproducts: an introductión. (Amsterdam: North Holland). (1967).

[2] FACENDA AGUIRRE, J. A.: "Ultraproducts of locally convex Spaces" *Rév. Roumaine Math. Pures Appl*, 32, 2. (1986).

[3] HENSON, C. W. y MOORE, L. C.: The nonstandard theory of topological vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 172, 405-435. (1972).

[4] KANAMORI, A. y MAGIDOR, M.:The evolution of large cardinals in set theory. Lecture Notes in Math. (Berlín: Springer). 669, 99-277. (1978).

[5] ROBERTSON, A. P. y ROBERTSON, W. J.: Topological vector spaces. (Cambridge University Press). (1973).

José Antonio Facenda Aguirre
Facultad de Matemáticas
Dpto. de Teoría de Funciones.