

La forma ideal de las cúpulas: el ensayo de Bouguer

Gema López Manzanares

DATOS BIOGRÁFICOS

Pierre Bouguer fue un brillante científico francés de la primera mitad del siglo XVIII, miembro de la Real Academia de Ciencias de París y de la Royal Society de Londres (figura 1).¹ Nació en la ciudad de Le Croisic en 1698 y murió en París en 1758. Pierre estudió en el colegio de los jesuitas de Vannes, pero fue su padre, Jean Bouguer, durante más de veinte años profesor real de hidrografía en Le Croisic y autor de un tratado de navegación, quien se ocupó de su formación matemática y científica.² Sin embargo, Pierre superaría muy pronto a su padre ya que a su muerte, en 1714, ocupó su plaza de profesor, con tan sólo dieciséis años, y rápidamente se convirtió en la primera autoridad teórica sobre problemas náuticos.

En los años 1727, 1729 y 1731 tres ensayos de Bouguer fueron premiados por la Real Academia de Ciencias de París, el primero sobre los mástiles de los barcos y el segundo y el tercero sobre los métodos de observación de la altitud de las estrellas y la declinación magnética en el mar. Estos premios le hicieron merecedor de su nombramiento en 1731 como geómetra asociado de la Real Academia. Mientras tanto Bouguer seguía dedicado a la docencia, habiendo sido nombrado en 1730 profesor de hidrografía en Havre, y comenzó a interesarse por otros problemas científicos. Así, durante esos años estudió el problema de la transmisión de la luz a través de sustancias transparentes e inició la llamada fotometría astronómica comparando el brillo aparente de las estrellas



Figura 1
Retrato de Pierre Bouguer. Lamontagne (1964)

con el de la llama de una vela, investigaciones que publicaría en su *Essai d'optique* de 1729.

El año 1735 va a ser un año clave en la carrera científica de Bouguer ya que va a ser nombrado miembro de pleno derecho de la Real Academia de

Ciencias de París por su prestigio como hidrógrafo y físico. Además, a la muerte del astrónomo Lieutaud va a ser nombrado *pensionnaire* astrónomo de la Academia que le va a escoger para formar parte de la expedición enviada al Perú para medir un arco de meridiano en la zona del Ecuador. Por aquella época uno de los grandes problemas que se planteaba la ciencia era el de conocer la verdadera figura de la Tierra y el mejor modo de averiguar si ésta era perfectamente esférica o no era medir un arco de meridiano en el Ecuador y en el polo Norte y comparar ambas mediciones. Así pues, Bouguer, junto a Charles Marie de La Condamine, Louis Godin y Joseph de Jussieu partieron de La Rochelle en 1735 y un año después llegaron a Quito, lugar de comienzo de la expedición, que finalizaría en 1744. No sólo se midió el arco de meridiano sino que Bouguer aprovechó el viaje para estudiar diversas cuestiones de astronomía, física, geografía, historia natural, etc., por ejemplo, midió la dilatación de varios sólidos valiéndose de la gran variación de temperaturas en la cordillera andina, investigó la refracción atmosférica y la medición de la altitud con el barómetro y midió la fuerza de la gravedad a diferentes latitudes. Toda esa información aparece recogida en *De la figure de la terre*, libro publicado en 1749 y que constituye un verdadero modelo por la precisión y minuciosidad con que Bouguer aplica el método científico.

Después de su largo viaje, Bouguer se verá envuelto en una agria polémica con su compañero La Condamine que duraría hasta 1754. Bouguer, que había sido el alma de la expedición, pensó que La Condamine quería atribuirse todo el éxito y decidió denunciarlo por escrito, lo que suscitó la respuesta de su compañero de viaje. Al margen de esta polémica, de la que hablaba a su amigo Daniel Bernoulli y que afectó a su salud, Bouguer publicó varios tratados más sobre construcción de barcos y navegación donde resolvía el problema de determinar el centro de gravedad de un navío cargado, la colocación de los mástiles o el empuje del viento sobre las velas. De 1752 a 1755 fue uno de los principales redactores del *Journal des Savants* y en 1757 participó en la verificación del arco de meridiano comprendido entre París y Amiens con Pingré, Camus y Cassini. También inventó el heliómetro, aparato que sirve para medir los diámetros aparentes del sol y los planetas.

El incansable Bouguer siguió trabajando hasta el final de su vida. En agosto de 1758 pocos días antes de morir y después de haber publicado numerosos libros y más de treinta ensayos en las *Mémoires* de la Real Academia de Ciencias de París y en el *Journal de Savants*, Bouguer entregaba en una librería su último manuscrito, el de la segunda edición de su obra sobre la intensidad de la luz, que no pudo ya revisar y que su amigo Lacaille publicaría como obra póstuma.³

LA FORMA IDEAL DE LAS CÚPULAS

Entre los numerosos ensayos publicados por Bouguer en las *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* aparece uno con fecha de 19 de mayo de 1734, justo un año antes de partir hacia Perú, que lleva por título «Sur les lignes courbes qui sont propres a former les voutes en dome» (figura 2).⁴ Este ensayo, que no se menciona en ninguna de las biografías de Bouguer⁵ y que sólo ha analizado parcialmente Benvenuto constituye un hito en el desarrollo de la teoría de cúpulas, ya que, según el pro-

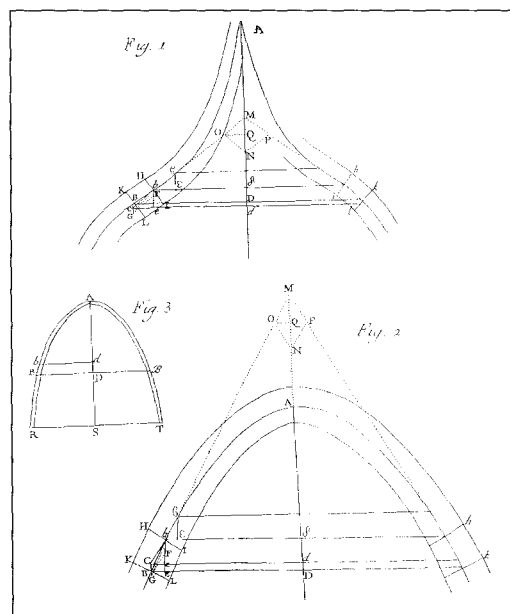


Figura 2

La forma ideal de las cúpulas. Bouguer (1734)

pio Bouguer señala, sobre el tema de las bóvedas ya se habían ocupado muchos autores como Couplet, pero nadie había estudiado las cúpulas, tan frecuentes en la mayoría de los edificios.

El nuevo método científico se aplicaba a multitud de problemas y entre ellos estaba el de la estabilidad de las bóvedas. Ya a finales del siglo XVII Hooke plantea los dos problemas básicos a resolver, el de la forma ideal, que según él era la catenaria invertida y el del dimensionado del contrarresto, que era el que realmente interesaba a los constructores. Después habían ido apareciendo ensayos como los de La Hire, Couplet, Danyzy, Parent o Pitot, en Francia o Gregory y Stirling, en Inglaterra, pero siempre en relación con arcos o bóvedas de cañón. Bouguer dirige pues su atención a un tema del mayor interés en ese momento y resuelve el problema de encontrar la forma ideal, es decir, la ecuación matemática exacta de las curvas que por revolución pueden generar una cúpula estable gracias a su gran capacidad como matemático y su dominio del reciente cálculo integral y diferencial.

Estructura del ensayo

El objetivo de Bouguer, expresado por él mismo al comienzo de su ensayo es averiguar qué formas de cúpula son válidas desde un punto de vista estructural, es decir, en equilibrio. Para ello considera la hipótesis de ausencia de rozamiento entre las dovelas, que para Bouguer no es real pero otorga un margen de seguridad a los cálculos.

La estructura del artículo es muy clara. En primer lugar, establece las condiciones de equilibrio y hace un recorrido para analizar la validez de los tres tipos básicos de superficies de revolución: cóncavas, cónicas y convexas. Después obtiene la ecuación general del equilibrio relacionando la geometría con las cargas de una cúpula cualquiera y resuelve tres problemas fundamentales. El primero consiste en calcular los espesores que ha de tener una cúpula de una forma dada cualquiera para ser estable. En el segundo realiza un estudio de la validez de ciertas formas habituales de cúpula de espesor conocido generadas por curvas como la elipse, el semicírculo y la parábola. Por último, obtiene la ecuación de la forma límite, es decir, aquella en la que los esfuerzos anulares son nulos.

El equilibrio en las cúpulas

Bouguer comienza considerando una cúpula cualquiera obtenida por la revolución de la curva BbA en torno al eje AD (figura 3). Esta curva es la que pasa por el punto medio de los lechos de las dovelas que, de acuerdo con la práctica, se consideran perpendiculares a la curva. El espesor es relativamente pequeño en relación a las dimensiones de la cúpula.

Supongamos que sobre uno de estos lechos, HI, actúa el empuje bC y que éste es perpendicular a él por la ausencia de rozamiento, es decir, coincidente con la curva de revolución, BbA, en el tramo Cb. El empuje lo produce el peso de la parte de cúpula situada por encima, MN, y su magnitud MO se deduce del polígono de fuerzas. Ahora bien, la dirección del empuje varía infinitesimalmente desde la clave hasta el arranque con el peso de las sucesivas hiladas anulares, es decir, para el lecho KL (que delimita una dovela infinitesimal) habría que componer bC con bF, y obtendríamos un nuevo empuje bG. Este no tiene por qué ser perpendicular al lecho correspondiente, es decir, la curva que forma la «dirección de la presión»⁶ puede o no coincidir con la superficie media de la cúpula aunque hayamos partido de un hipotético empuje perpendicular al lecho.

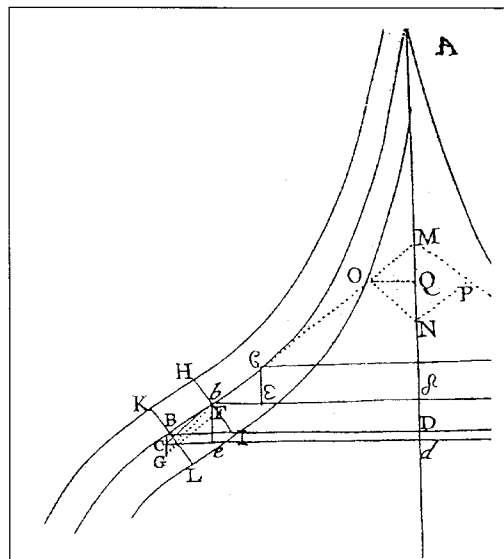


Figura 3
El equilibrio en las cúpulas cóncavas. Bouguer (1734)

Se pueden dar tres casos en la posición relativa de la línea media bB , del empuje bC y del empuje bG que actúa sobre un lecho situado inmediatamente por debajo del anterior:

1. Cúpulas cóncavas

En este tipo de cúpulas si sumamos al empuje bC , que se supone perpendicular a un lecho dado HI , el peso de una dovela infinitesimal, obtenemos un nuevo empuje bG que no es perpendicular al lecho contiguo, pues presenta una componente dirigida hacia el interior de la cúpula. Esta situación es estable siempre y cuando la curva AbB no sea horizontal en ningún punto, es decir, no existan problemas de deslizamiento vertical de las dovelas. La explicación de la estabilidad se halla en el hecho de que en una cúpula es posible contar con el esfuerzo ejercido por las dovelas situadas a ambos lados de las juntas verticales, lo cual no puede suceder en una bóveda de cañón. La componente horizontal del empuje podría hacer volcar o desplazar la dovela hacia el interior, pero es absorbida por las juntas verticales adyacentes con una fuerza de compresión de igual magnitud.

Así pues, las formas engendradas por una curva cóncava, es decir, con el centro de curvatura en el exterior del volumen engendrado serán siempre estables.

2. Cúpulas cónicas

Se trata de un caso límite del tipo anterior, como son las flechas y agujas, que siempre serán estables independientemente del ángulo de abertura en el vértice. Partiendo de un empuje perpendicular a un cierto lecho, los incrementos infinitesimales de peso dan lugar a empujes con una componente horizontal dirigida hacia el eje de revolución.

3. Cúpulas convexas

En este tipo de cúpulas el empuje bC es exterior al tramo de curva media bB situado inmediatamente por debajo del lecho HI correspondiente, aun siendo perpendicular a él (figuras 4 y 5). La situación es admisible mientras bG , que es el empuje que resulta al sumar al empuje bC el peso bF de la dovela $HIKL$

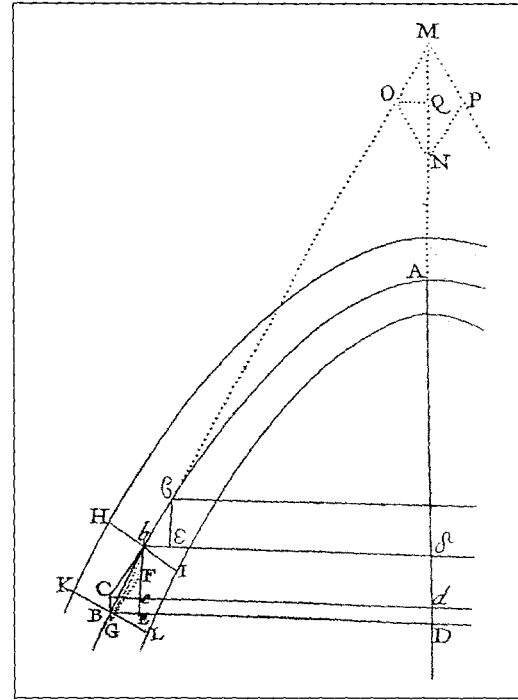


Figura 4
El equilibrio en las cúpulas convexas. Bouguer (1734)

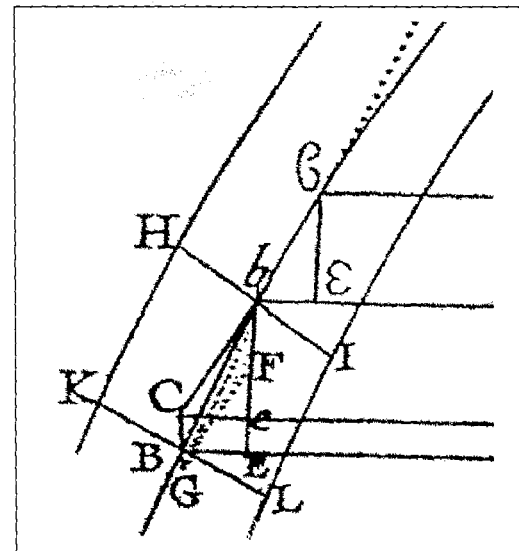


Figura 5
El equilibrio de fuerzas en un lecho. Bouguer (1734)

sea interior a la línea media bB. Pero esta situación podría cambiar si, por ejemplo, la forma cambiara bruscamente su curvatura. Habría una componente horizontal del empuje hacia fuera que haría volcar o desplazaría la dovela, sin que en este caso nada pudiera colaborar a contrarrestar el esfuerzo, pues las fábricas no resisten tracción (figura 6).

Es decir, no todas las formas convexas serán válidas, sólo aquellas en las que la línea media bB se halle comprendida entre bC y bG. La límite será aquella en la que bB coincida con bG, en la que por tanto las juntas verticales no tendrán que soportar ningún tipo de esfuerzo de compresión ni de tracción.

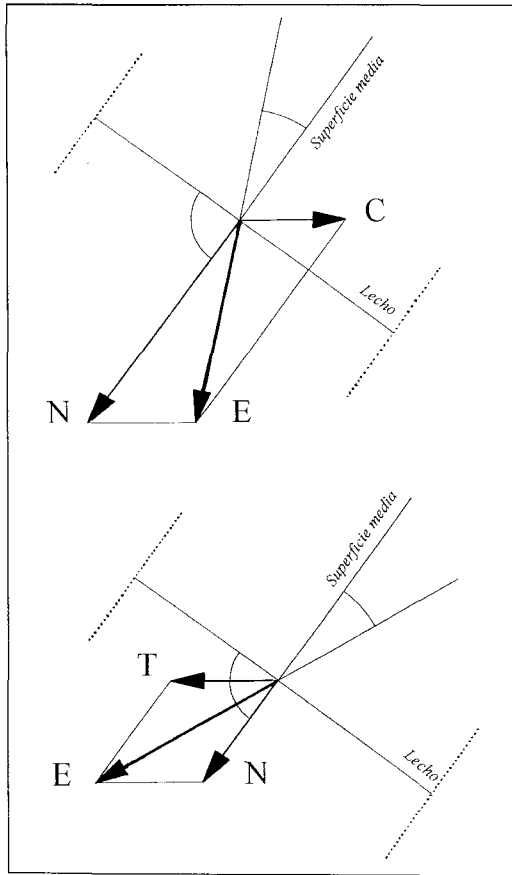


Figura 6
Descomposición del empuje en una componente normal al lecho y otra horizontal que produce esfuerzos anulares N_0 de compresión o tracción

Por lo tanto, las formas cóncavas y las cónicas son siempre estables gracias a la capacidad de las cúpulas para desarrollar esfuerzos anulares de compresión. Las formas convexas deberán cumplir ciertas condiciones, que se pueden resumir en que $CG \geq CB$, condición geométrica de la que va a obtener la ecuación general de equilibrio.

Ecuación de las curvas convexas idóneas

Bouguer traduce la condición $CG \geq CB$ en una ecuación diferencial que relaciona cargas y geometría de la cúpula.

En primer lugar, el valor del empuje bC en el lecho HI se calcula en el polígono de fuerzas MNO PQ. Prolongando la tangente a la curva en b, obtiene el punto M de intersección con el eje. MN es el peso total de la cúpula por encima del lecho HI. MO es el valor del empuje bC y, por tanto, *be* será proporcional al peso MQ de la mitad de cúpula situada por encima de HI, o sea, la parte AH. El empuje bC pasa a ser el bG en el lecho inferior KL, que se obtendría componiendo el bC con el peso del anillo inferior, CG.⁷

Por otro lado, Bouguer analiza la geometría de la curva de revolución tomando el eje AD como eje de abscisas *x* y el perpendicular BD como eje de ordenadas *y*.⁸ El segmento *be* = δd ó el $bE = \delta D$ será por tanto un *dx*. Del mismo modo, *BE* será un *dy*. Por tanto, si tomamos *be* = $bE = dx$ y *BE* = *dy*, entonces bB, que representa la curva en el anillo HIKL será $bB = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.⁹ El área del trapecio HIKL será entonces $e\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, donde *e* es el espesor de la cúpula, HI ó KL. Como se trata de una superficie de revolución, la relación entre el peso de las diversas hiladas vendrá dada en función de la ordenada *y* o radio horizontal y así, el peso de cada dovela infinitesimal de cúpula será $e y \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$. El peso total de la parte HA será la integral de esa expresión, $\int e y \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.¹⁰

De lo anterior se deduce que el peso total de la semicúpula o parte de cúpula situada a un lado del eje de revolución hasta una flecha HI cualquiera y proporcional a $\int e y \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, será a *be* = $bE = dx$,¹¹ como el peso de una «dovela» infinitesimal de peso $e y \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ a *bF* = CG, o sea $CG = e y dx \sqrt{(dy^2 + dx^2)} / \int e y \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$. De la condición $CG \geq CB$, donde $CB = dD = ddx$, resultará que $e y dx \sqrt{(dy^2 + dx^2)} /$

$f e y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} \geq ddx$. Todas las curvas donde se cumpla esa relación entre la x y la y serán válidas, y la límite será aquella en la que $e ydx\sqrt{(dy^2 + dx^2)}/f e y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = ddx$, que Bouguer llama la *última*.

Una vez determinada la ecuación diferencial que se ha de cumplir en las cúpulas convexas, Bouguer va a sacar diversas conclusiones prácticas: no son adecuadas las curvas en las cuales la curvatura aumenta rápidamente, es decir, las que se aproximan mucho al eje de revolución, ya que ddx se hace mayor que el otro término de la desigualdad. Hay un límite, pues si la cúpula es muy convexa también pesa más en la zona superior y el empuje que produce no varía prácticamente su inclinación al componerse con el peso del anillo inferior, esto es, podría resultar un empuje exterior a la curva. Expresando la ecuación de otra manera, es decir, intercambiando ddx por la integral, $e ydx\sqrt{(dy^2 + dx^2)}/ddx \geq f e y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, se ve que efectivamente no se puede sobrecargar mucho la zona superior de la cúpula y que, sin embargo, la desigualdad se cumpliría si el peso se redujera e incluso fuera nulo.¹² La cúpula es un tipo de bóveda peculiar y su comportamiento depende claramente de su hiladas anulares. En palabras de Bouguer, «*le Dome est, pour ainsi dire, plus Voute que les autres Voutes*».¹³

Aplicaciones de la ecuación de equilibrio

El resto del ensayo lo dedica Bouguer a resolver tres problemas que se pueden plantear al analizar una cúpula y para ello parte de la ecuación general de equilibrio obtenida.

1º Problema

Espesor ideal de las cúpulas para una dada

Como antes, Bouguer hace pasar la curva ideal por el punto medio del espesor y establece que p sea el cociente entre $e ydx\sqrt{(dy^2 + dx^2)}/ddx$ $f e y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = p$, que ha de ser ≥ 1 para que la cúpula esté en equilibrio. Tomando $p = 1$ que corresponde a un caso límite se obtiene la ecuación del espesor mínimo en función de la geometría de la cúpula: $e = pa dx^{p-1} ddx/ydy^p\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.¹⁴

2º Problema

Estabilidad de una cúpula de forma y espesor

Según Bouguer este problema resulta más difícil de resolver que el primero puesto que pertenecería a la Geometría trascendente. Habría que ser capaces de resolver la integral $f e y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ de la fórmula $e ydx\sqrt{(dy^2 + dx^2)}/ddx \geq f e y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.

Comienza con el caso general del elipsoide o cúpula elíptica, Fig. 3 de la figura 2. Aunque él no especifica todos los pasos, se deduce de sus resultados que ha tomado como sistema de coordenadas el de origen A y, por tanto, las coordenadas de los puntos de una sección deberían responder a la ecuación de una elipse, donde a es AS y b , RT. Así: $(a-x)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, de donde $x = a[1 - (\sqrt{(b^2 - y^2)})/b]$. Si diferenciamos esta expresión obtenemos como Bouguer,¹⁵ $dx = ay dy/b\sqrt{(b^2 - y^2)}$. Y, volviendo a diferenciar esta expresión tendríamos: $ddx = ab dy^2/(b^2 - y^2)^{3/2}$.¹⁶

El siguiente paso sería sustituir esas expresiones en la fórmula ya conocida, $e ydx\sqrt{(dy^2 + dx^2)}/ddx \geq f e y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$. El resultado vendría dado por: $[ey^2 a dy^2\sqrt{(b^2 + (a^2 - b^2)y^2)}/b(b^2 - y^2)]/ddx \geq f[ey dy\sqrt{(b^2 + (a^2 - b^2)y^2)}/(b^2 - y^2)]/b$, donde podríamos simplificar la b .¹⁷

Para resolver un ejemplo más sencillo de integrar, toma el caso particular de una cúpula esférica, en la que $a = b =$ radio, y para la que el espesor será constante. Sustituyendo en la expresión anterior obtiene: $y^2\sqrt{(a^2 - y^2)} \geq \int (a^2 y dy/\sqrt{(a^2 - y^2)})$, e integrando resulta: $y^2\sqrt{(a^2 - y^2)} \geq a^3 - a^2\sqrt{(a^2 - y^2)}$. Despejando en la ecuación, $a\sqrt{(-1/2 + \sqrt{5/4})} \geq y$. Esta es la condición de estabilidad para una cúpula esférica de espesor constante, esto es, aquellas zonas de la cúpula cuya y sea superior a ese valor presentarán empujes con una componente horizontal hacia el exterior y, por tanto, serán inadmisibles. Toma un valor para el radio de 1000 y de ahí deduce $y = 382$, y $BB = 1572$. O sea, un poco menos de 52° desde la clave hasta el borde de la cúpula será la apertura límite para construir una cúpula esférica segura.¹⁸

Por último, termina este segundo apartado aplicando el mismo procedimiento al estudio de las cúpulas de perfil parabólico.

3º Problema

La curva límite de las cúpulas

El tercer problema resuelto por Bouguer es el de hallar una expresión manejable de las curvas admisibles en las cúpulas ya que las ecuaciones iniciales eran demasiado generales. Primero desarrolla la ecuación para un espesor variable y después toma un espesor constante. Integrando por series para este segundo caso y fijando el valor de $p = 1$, que corresponde a las curvas límite, despeja la x de la curva en función de potencias de y y de una constante de integración a :

$$x = y^3/6a + y^7/336 a^3 + y^{11}/42240 a^5 + y^{15}/9676800 a^7 + y^{19}/3530096640 a^9 + y^{23}/1880240947200 a^{11} + \dots$$

Para demostrar que las posibles curvas, infinitas, son fáciles de obtener a partir de esa ecuación, toma un valor cualquiera de $a = 100000$ y elabora la tabla de ordenadas y abscisas correspondiente, que no llega a representar gráficamente (figuras 7 y 8).¹⁹

T A B L E
Des Dimensions de la demiétre de toutes les Lignes courbes, qui est propre à former des Domes.

LARGEURS du Dome.	HAUTEURS depuis le fommet jusqu'à chaque point de l'axe.	LARGEURS du Dome.	HAUTEURS depuis le fommet jusqu'à chaque point de l'axe.
100	0 $\frac{1}{3}$	1560	1495
200	1 $\frac{2}{3}$	1600	1721
300	5 $\frac{2}{3}$	1640	1986
400	13 $\frac{1}{3}$	1670	2216
500	26 $\frac{1}{3}$	1700	2476
600	45 $\frac{2}{3}$	1720	2668
700	73 $\frac{2}{3}$	1740	2878
800	111 $\frac{2}{3}$	1760	3107
900	163 $\frac{1}{3}$	1780	3357
1000	232 $\frac{2}{3}$	1800	3630
1080	305 $\frac{1}{3}$	1820	3928
1140	372	1840	4255
1200	452	1860	4613
1260	550	1880	5005
1320	668	1900	5436
1360	761	1920	5909
1400	869	1940	6429
1440	992	1960	7003
1480	1135	1980	7635
1520	1301	2000	8330

Figura 7
Tabla de abscisas y ordenanzas de una posible curva límite Bouguer (1734)

Esta curva, mecánica según Bouguer, y que aunque en ningún momento lo dice corresponde a una catenaria de peso variable, estará en equilibrio perfecto, es decir, no podría soportar cargas exteriores que alterasen mínimamente ese equilibrio. Sin embargo, Bouguer observa que en la realidad los lechos de las dovelas sí tienen rozamiento, lo cual supone una mayor seguridad en la práctica. Además, en este caso, al ser la curva límite de todas las posibles la más próxima al eje, su empuje horizontal será el mínimo y, aunque no es de su competencia, dice haberse asegurado de que sería agradable a la vista si llegara a construirse.

Por último, Bouguer termina su ensayo sugiriendo una regla práctica para el caso en el que la cúpula trazada según esa curva soportase una linterna o una pequeña cúpula, es decir, si estuviese perforada en la clave: el peso de la linterna debe ser menor o igual al de la parte de cúpula que se ha suprimido.²⁰

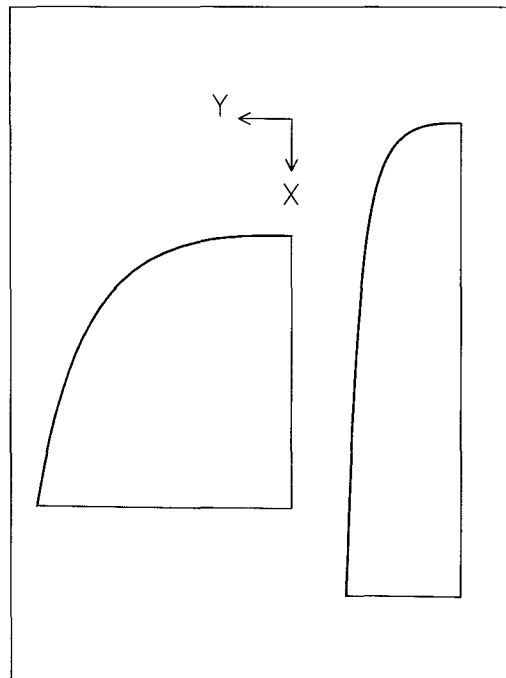


Figura 8
Representación gráfica de la curva obtenida por Bouguer. A la izquierda, detalle de la zona de la clave

CONCLUSIONES

El ensayo de Bouguer es el primero en el que desde un punto de vista científico, es decir, basado en las leyes del equilibrio de fuerzas y el conocimiento de la resistencia de materiales se estudian las condiciones para el equilibrio de las cúpulas, intrínsecamente relacionado con su forma geométrica y teniendo en cuenta su carácter tridimensional mediante un análisis de membrana y la nula capacidad de las fábricas para resistir la tracción.²¹

Constituye un jalón más en el camino emprendido por Hooke al enunciar el principio de la catenaria como la forma ideal de los arcos y las bóvedas. Parece ser que Hooke afirmó que las cúpulas, un tipo particular de bóveda, deberían tener la forma de una parábola cúbica, forma muy aproximada a la catenaria de peso variable.²² Pero el caso es que Hooke no tenía la formación adecuada y no supo expresar matemáticamente la ecuación de la catenaria, ni la de los arcos ni la de las cúpulas.

Más tarde, Bernoulli, Leibniz y Huygens encontrarían la ecuación de la catenaria homogénea. Ahora bien, el objetivo de Bouguer, con una base matemática muy importante, no era sólo ampliar a las cúpulas la solución al problema geométrico de obtener la ecuación de la catenaria, de la que, como hemos dicho, no habla en ningún momento como tal. Aunque el carácter teórico del ensayo es evidente, Bouguer enlaza con la teoría de arcos y bóvedas de fábrica que desde Hooke había venido desarrollándose a finales del siglo XVII y principios del XVIII y así reconoce que ya se habían estudiado los arcos y bóvedas en general en las memorias de Couplet, pero que nadie se había ocupado de las cúpulas. Es decir, Bouguer hace consideraciones relativas a la nula capacidad de resistencia a tracción de las fábricas, al rozamiento como factor de seguridad y, sobre todo, a la escasa importancia de la resistencia frente a la estabilidad y la geometría. No se trataba simplemente de un ensayo matemático, ya que además sirvió para justificar prácticas constructivas habituales como la construcción sin cimbras de las cúpulas o propuso reglas como la del peso máximo de la linterna.

Por otro lado, el problema resuelto por Bouguer constituye sólo una parte del problema de la mecánica de las estructuras abovedadas, y si se quiere el más teórico. Lo que en la práctica interesaba a los constructores era dimensionar el estribo que contrarresta el em-

puje, problema para el cual La Hire había encontrado una solución teórica bastante satisfactoria, formalizada definitivamente Bédior. Bouguer ni siquiera menciona en su ensayo este problema, aunque en su favor hay que recordar que los constructores sabían que el problema del contrarresto en las cúpulas no era tan grave como en los arcos y las bóvedas, e incluso se creía que no producían empujes.²³

Influencia en la teoría y en la práctica constructiva del siglo XVIII

Es evidente la potencia del ensayo de Bouguer a la hora de proponer infinitas formas equilibradas posibles para las cúpulas. Todas las cúpulas cóncavas y cónicas eran seguras y de las convexas había una infinidad de curvas posibles. Curiosamente acaba su ensayo haciendo una alabanza estética, y no sólo estática, de la curva obtenida por él como ejemplo. Sin embargo, Bouguer encuentra defectos en la cúpula semiesférica de espesor constante, tan alabada siempre hasta entonces tanto desde el punto de vista estético como estructural. Es decir, el ensayo de Bouguer pudiera haber tenido alguna influencia en la construcción de cúpulas durante el siglo XVIII y refleja un cambio de valores estéticos en consonancia con los avances de la ciencia. De hecho, el principio de la catenaria de Hooke había sido aplicado por Wren a finales del siglo XVII en la cúpula de San Pablo de Londres, y ésta fue seguramente el modelo que inspiró los primeros proyectos de Soufflot para la cúpula de Santa Genoveva en París, construida en el último cuarto de siglo. En cuanto a Bouguer no podemos afirmar que su ensayo tuviera trascendencia en la práctica. Sin embargo, en la Frauenkirche de Dresde, cuya cúpula comenzó a construirse a partir de 1735 según el proyecto de Bähr, encontramos un perfil cóncavo en la base, perfectamente seguro según Bouguer y nada habitual (figura 9). La parte superior, convexa, también parece responder a una forma como la de la tabla de Bouguer. Es posible que el ensayo de Bouguer, prestigioso científico, llegara a manos de Bähr, o incluso que el problema de la construcción de esa cúpula sugiriera a Bouguer la publicación de un ensayo puntual sobre ese problema.

Por otra parte, sí encontramos menciones al ensayo de Bouguer en varios tratados e informes de la segunda mitad del siglo XVIII. Así lo hace Poleni en

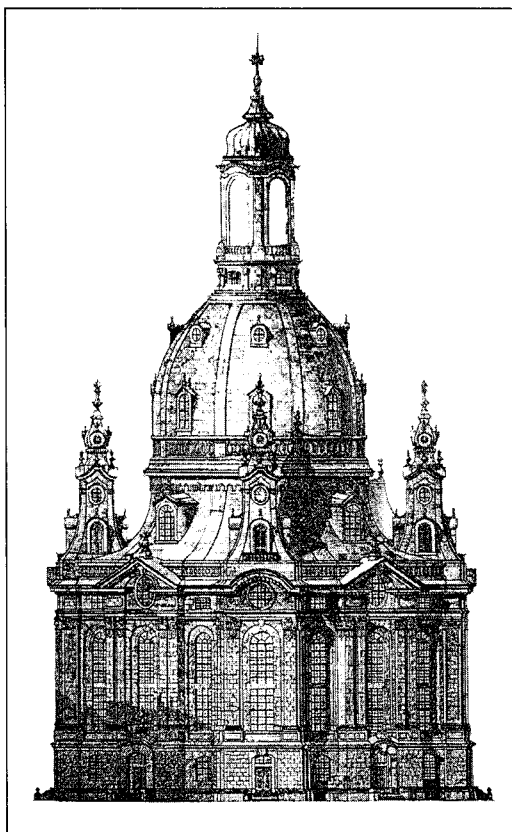


Figura 9
Alzado de la Frauenkirche de Dresde, construida por Bähr

sus *Memorie* sobre la cúpula de San Pedro dentro del apartado que dedica al estado de la teoría de arcos y bóvedas.²⁴ Sin embargo, Poleni introduce una modificación sustancial respecto al análisis de Bouguer y que él mismo afirma considerar por primera vez, y es que las cúpulas se pueden dividir en sectores infinitesimales por planos convergentes en el eje, es decir, según Bouguer, Poleni estaría analizando formas límites. De este modo Poleni prescinde del comportamiento de membrana analizado por Bouguer, es decir las N_0 , que Bouguer sabía que no podían ser de tracción pero que tampoco considera Poleni aunque sean de compresión. Lo que hará Poleni, aplicando el principio de Gregory-Stirling será comparar la catenaria correspondiente a los pesos variables de la cúpula dividida en cincuenta sectores (y forma última

para Bouguer) con la línea media de la sección de la cúpula. Además, Poleni prefirió construir la catenaria a plantear la ecuación matemática exacta para esa forma de cúpula peculiar.

Más adelante, ya en la segunda mitad del siglo XVIII, el matemático Bossut vuelve a mencionar a Bouguer en sus dos memorias sobre el dimensionado del estribo y la forma ideal de bóvedas y cúpulas. Bossut destaca el hecho de que Bouguer no se hubiera ocupado del problema de dimensionar el estribo de las cúpulas, que él resuelve aplicando el método de la Hire a una cúpula dividida en gajos. Después en la segunda memoria se ocupa del problema de la forma ideal de las cúpulas y también de las bóvedas en general, pero la influencia de Poleni a quien no menciona, aparece a la hora de prescindir de las N_0 , es decir, analiza la forma ideal de un sector de cúpula sin esfuerzos anulares, es decir, la curva última de Bouguer.

En Italia, en 1785, Mascheroni retoma el ensayo de Bouguer dentro de su tratado. El enfoque de Mascheroni, como el de Bossut, es aún más teórico que el de Bouguer. En realidad, pasa revista punto a punto a los problemas resueltos por Bouguer, el de encontrar el espesor correcto para una figura dada y el de encontrar una figura ideal para espesor constante. Considera incorrecto que Bouguer tome los pesos y las fuerzas actuando en la mitad del espesor y no en el centro de gravedad. Por otro lado, Mascheroni es el primero en dar nombre a la superficie que resultaría al suspender un velo o tela de un anillo circular, el *velario*, que es el equivalente a la catenaria en los arcos, pero sigue en la línea de Bossut, y también analiza la forma ideal de un sector de cúpula, no de la cúpula como superficie tridimensional, y por tanto su forma límite. Lo que sí añade Mascheroni es la consideración de otros tipos de carga, que Bouguer había omitido o tratado de pasada, como las cargas puntuales, anulares, etc., y por primera vez analiza la forma de las cúpulas poligonales u ovals.

Más adelante, las menciones a Bouguer desaparecen. En el siglo XIX se recuperará la idea de los esfuerzos anulares de compresión para obtener líneas de empujes dentro del tercio central del espesor de las cúpulas, como había propuesto Navier, y asegurar así que no aparecieran tracciones. Pero será a finales de siglo y principios del XX, cuando se desarrolle plenamente la llamada teoría de cáscaras a partir del análisis de membrana estudiado por primera vez en el ensayo de Bouguer.

NOTAS

1. Coulston Gillispie, Charles: *Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner's Sons, 1973, vol. II, pp. 343-344; Lamontagne, Roland: *La vie et l'oeuvre de Pierre Bouguer*. Montreal: Presses de l'Université de Montreal, 1964, 97 pp.; Michaud, J. Fr.: *Biographie universelle, ancienne e moderne*. Graz: Akademische Druck y Verlagsanstalt, 1966, vol. 5, pp. 207-209; Prevost, M. y D'Amat, Roman: *Dictionnaire de biographie française*. París: Librairie Letourey et ané, 1954, pp. 1298-1299.
Otras fuentes contemporáneas son: *Trionfo della grazia e della fedde. Lettere che contengono le conferenze di un dottore de Sorbona col signor Bouguer*. Pesaro, 1780, 109 pp.
Laberthonie, Pierre-Thomas: *Relation de la conversion et de la mort de M. Bouguer, membre de l'Académie royale des sciences*. París: Chez Mequignon le jeune, 1785, 163 pp.
2. Bouguer, Jean. *Traité complet de la navigation, contenant les propositions & pratiques de géometrie, de la sphere & d'astronomie, les tables du mouvement du soleil...& plusieurs autres, nouvellement calculées, & reformées pour le siecle prochain*. París, Nantes, Croisic: Chez P. De Heuqueville et chez l'auteur, 1698, 224 pp. Este libro tuvo una segunda edición en 1706.
3. He aquí una lista ordenada cronológicamente de las publicaciones más importantes de Bouguer. *De la mâtire des vaisseaux: piece qui a remporté le prix de l'Académie royale des sciences, proposé pour l'année 1727, selon la fondation faite par feu M. Rouillé de Meslay*. París: Chez C. Jombert, 1727, 164 pp.; *De la methode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres: piece qui a remporté le prix proposé par l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1729*. París: Chez Claude Jombert, 1729, 72 pp.; *Essai d'optique: sur la gradation de la lumière*. París: C. Jombert, 1729, 164 pp.; *Remarques sur le Memoire de Mr. Meynier. Touchant la meilleure methode d'observer sur mer la déclinaison de l'aiguille aimantée (1731?)*. París: 1732, 7 pp. *Entretiens sur la cause de l'inclinaison des orbites des planets. O l'on répond a la question proposée par l'Académie royale des sciences*. París: Chez Ch. Ant. Jombert, 1734, 63 pp.; «Relation abrégée du voyage fait au Pérou par messieurs de l'Académie Royale des Sciences, pour mesurer les degrés du méridien aux environs de l'Équateur. & en conclure la figure de la terre.» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1744, pp. 249-300. *Traité du navire: de sa construction, et de ses mouvements*. París: Chez Ch. Ant. Jombert, 1746, 682 pp.; «Suite de la relation abrégée, donnée en 1744, du voyage fait au Pérou pour la mesure de la terre.» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1746, pp. 569-606; *Entretiens sur la cause de l'inclinaison des orbites des planets. O l'on répond ó la question proposée par l'Académie royale des sciences, pour le sujet du prix des années 1732. & 1734*. 2^e ed. París: Chez Ch. Ant. Jombert, 1748, 140 pp.; *La figure de la terre, déterminée par les observations de Messieurs Bouguer, & de la Condamine...envoyés par ordre du roy au Pérou, pour observer aux environs de l'équateur*. París: C.A. Jombert, 1749, 394 pp.; «Remarques sur le Memoire de Mr. Meynier. Touchant la meilleure methode d'observer sur mer la déclinaison de l'aiguille aimantée (1731?)» *Recueil des pieces de the Académie des sciences*, vol. 2, ca. 1750, 7 pp.; *Justification des mémoires de l'Académie Royale des Sciences de 1744: et du livre de La figure de la terre: déterminée par les observations faites au Pérou, sur plusieurs faits qui concernent les opérations des académiciens*. París: Chez Ch. Ant. Jombert, 1752, 54 pp.; *Nouveau traité de navigation, contenant la théorie et la pratique du pilotage*. París: H.L. Guerin, 1753, 442 pp.; *Lettre á Monsieur *** dans laquelle on discute divers points d'astronomie pratique, et o l'on fait quelques remarques sur le supplément au Journal historique du voyage á l'Équateur de M. De la Condamine*. París: H.L. Guerin & L.F. Delatour, 1754, 51 pp.; *De la manoeuvre des vaisseaux, ou Traité de mécanique et de dynamique dans lequel on réduit á des solutions très simples les problèmes de marine les plus difficiles, qui ont pour objet le mouvement du navire*. París: Chez H.L. Guerin & L.F. Delatour, 1757, 520 pp.; *Traité d'optique sur la gradation de la lumière*. París: De l'imprimerie de H.L. Guerin & L.F. Delatour, 1760, 368 pp.
4. P. Bouguer, «Sur les lignes courbes propres a former les voûtes en dome», *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1734, pp. 149-66, 1 lám.
5. Benvenuto, Edoardo: «Bouguer's first static theory of domes», *An introduction to the History of structural mechanics*. New York, Berlín: Springer Verlag, 1991, pp. 344-348.
6. Bouguer: *op. cit.*, p. 150.
7. Bouguer representa el equilibrio en un elemento infinitesimal de cúpula, pero lo representa como si fuera finito, ver figuras.
8. El origen de coordenadas será el punto A.
9. La x y la y son las coordenadas de los puntos de la curva AbB que engendra la cúpula; be no es igual a bE , en todo caso si toma $be = dx$ sería $bE = be + ddx = dx'$, pero parece despreciar ese término ddx . En realidad, sería $bB = \sqrt{dy^2 + (dx+ddx)^2}$. Por otro lado, si tomamos $be = dx$, en realidad deberíamos considerar el triángulo bEe proporcional al bCe , y que nos indicaría la situación geométrica previa a la rebanada $HIKL$. Así donde $be = dx$, deberíamos decir, $6e = dx$ y al ser $be = 6e$, o propor-

- cional, es por eso que al final toma $be = dx$. Sería más correcto sustituir bB por $b\delta$, be por $\delta\epsilon = dx$ y bE por $be = dy$. $b\delta$ es la curva en el tramo inmediatamente anterior al HIKL.
10. Bouguer no deja muy claro si está hablando del peso total de la mitad de la cúpula, pues en ese caso habría que multiplicar por π . En definitiva, los resultados totales no varían, pero no sabemos si está considerando una rebanaada finísima, *diferencial* o se trata de eliminar un factor que desaparece en los cálculos.
 11. Bouguer: *op. cit.*, p. 153. Realmente $be = dx - ddx$.
 12. Así, al final del ensayo recomienda que la linterna no exceda del peso del óculo al que sustituye. De lo que no habla Bouguer, por ejemplo, es de que las cúpulas se pueden construir por anillos autoestables, a los que le falta precisamente carga en la zona superior.
 13. Bouguer: *op. cit.*, p. 155.
 14. Bouguer: *op. cit.*, pp. 155-6.
 15. Bouguer: *op. cit.*, p. 157. Hay errores en los pasos intermedios, pero los resultados que ofrece Bouguer son correctos.
 16. *Ibidem*. Bouguer se equivoca y pone dy en lugar de dy^2 .
 17. *Ibidem*. Error de Bouguer en la primera expresión.
 18. *Ibidem*. Bouguer no relaciona su importante hallazgo con la aparición de grietas meridionales en las cúpulas, aunque se deduce de su planteamiento. Tampoco habla de la conveniencia de colocar zunchos precisamente en la base traccionada de las cúpulas.
 19. Bouguer: *op. cit.*, pp. 164-5. El resultado es correcto. Así lo ha demostrado Benvenuto, *op. cit.* También podemos comparar la ecuación con la obtenida por Heyman en «Hooke's cubico-parabolical conoid,» *Notes Rec. Royal Society of London*, 1998, 52 (1), pp. 39-50, que resulta equivalente.
 20. Bouguer: *op. cit.*, p. 166.
 21. Para entender el comportamiento de las cúpulas de fábrica en el marco del análisis límite ver: Heyman, Jacques: *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera, 1995.
 22. Heyman: *op.cit.*
 23. Rondelet afirma que las cúpulas no producen empujes en la segunda mitad del siglo. Realmente lo que se estaba diciendo era que no había que regruesar el tambor respecto al espesor de la cúpula en el arranque.
 24. López Manzanares, Gema: «Estabilidad y construcción de cúpulas de fábrica: el nacimiento de la teoría y su relación con la práctica,» *Tesis doctoral*, Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, 1998.