

Estudio numérico de modelos unidimensionales en la interacción fluido-estructura y en la dinámica de chorros y gotas electrificados



Javier Rivero Rodríguez

Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Universidad de Sevilla

Tesis Doctoral

Director:
Miguel Pérez-Saborid
Sánchez-Pastor

Febrero 2016

A mis padres . . .

Abstract

La elaboración de esta tesis se enmarca dentro de los objetivos del Proyecto del Plan Nacional de I+D+I *Aspectos fundamentales de la operación de electrosprays. Aplicaciones a la producción de nanopartículas y nanoemulsiones.*

En esta tesis se ha implementado un método numérico robusto para estudiar la dinámica de modelos unidimensionales en diversos problemas de la interacción fluido estructura y de chorros y gotas electrificados. El método numérico empleado se basa en la forma conservativa del sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales (DAE) involucradas en dichos problemas y sistematiza la resolución de las mismas haciendo un uso del cálculo eficiente de los jacobianos mediante la funciones simbólicas de MATLAB.

En primer lugar, se ha considerado el problema del flameo de conductos empotrados-libres bajo la acción de la gravedad cuando por el circula un caudal suficientemente grande de líquido. Los cálculos de la formas de equilibrio muestran que la gravedad es alinear el conducto con ella misma mientras que el flujo tiende a enderezarla debido a la fuerza de reacción ejercida por el fluido que abandona el conducto. El análisis de estabilidad lineal de las formas de equilibrio muestra que el sistema puede hacerse inestable mediante una bifurcación de Hopf, experimentando flameo para valores críticos de los parámetros adimensionales del problema: el caudal adimensional, la relación entre la gravedad y la rigidez a flexión y la relación entre la masa de fluido y la total. Los resultados del análisis de estabilidad muestran que el efecto estabilizante o desestabilizante del caudal de líquido depende crucialmente del desalineamiento entre el la gravedad y el empotramiento. Así, para valores bajos del caudal, conductos desalineados con la gravedad se comportan de forma similar a los alineados para un mismo valor de la gravedad adimensional. Sin embargo, para valores grandes del caudal los conductos desalineados se enderezan y, por tanto, exhiben el mismo comportamiento que los alineados pero con una gravedad efectiva debido al desalineamiento. Además, se ha llevado a cabo un estudio del régimen no lineal transitorio que tiene lugar para valores del caudal superiores al crítico. Los resultados muestran que conductos desalineados con la gravedad tienen una preferencia a oscilar fuera del plano de la

forma de equilibrio y que tanto órbitas planas como circulares pueden ocurrir para valores moderados del caudal. Para valores mayores se tienen órbitas caóticas.

También se ha considerado en esta tesis, la dinámica de chorros electrificados. Las ecuaciones que gobiernan dicha dinámica en la aproximación unidimensional, se han resuelto mediante el mismo esquema numérico que el que se ha propuesto en esta tesis. Se ha comprobado que los resultados reproducen los reportados en la literatura, para chorros axilimétricos eléctricamente neutros tanto en lo que concierne a problema de estabilidad lineal como al problema no lineal y no estacionario de la transición de chorro a goteo. Además se ha analizado la retracción experimentada por un chorro tras el *pinch-off*, y, por primera, se ha obtenido una solución de semejanza para las ecuaciones del modelo unidimensional que concuerda satisfactoriamente con las reportadas en la literatura pero obtenidas mediante modelos tridimensionales mucho más complejos. También se ha considerado la dinámica no axilimétrica de chorros electrificados con el objeto de entender los procesos involucrados en el fenómeno de latigüe o *whipping*. En particular, se ha obtenido el diagrama de estabilidad que muestra que para un campo eléctrico dado, existe un valor umbral de la intensidad de corriente eléctrica, que disminuye al aumentar el número de Reynolds, por encima del cual el chorro se hace inestable frente a perturbaciones laterales y se origina el latigüe del mismo. Para valores supercríticos de los parámetros tiene lugar un régimen transitorio no lineal que eventualmente da lugar a órbitas periódicas o caóticas, análogas al caso del conducto flexible y que también se han calculado numéricamente con el método propuesto en esta tesis.

Finalmente, se han estudiado, tanto desde el punto de vista numérico como experimental, las vibraciones de gotas cargadas eléctricamente. Los experimentos muestran que existe un valor crítico del campo eléctrico por encima del cual no existe forma de equilibrio, y se han medido las frecuencias de los primeros modos de vibración observándose que disminuyen con el campo aplicado. El problema se ha formulado de forma que las ecuaciones que describen la geometría de la superficie de la gota se integran numéricamente en el tiempo haciendo uso de un mallado fijo que evita los remallados engorrosos normalmente usados en la literatura. Se han calculado las formas de equilibrio de gotas, tanto ancladas como libres, confirmándose la existencia de valores máximos del campo eléctrico para la existencia de formas de equilibrio. En particular, en el caso de gotas ancladas, el método numérico reproduce con gran exactitud los valores críticos de la carga de Rayleigh y del campo de Taylor, respectivamente. También se ha estudiado la estabilidad lineal de las formas de equilibrio, que pone de manifiesto que la pérdida de soluciones de equilibrio se debe a una bifurcación de tipo *folding* que

aparece para el valor umbral del campo eléctrico. Además los resultados numéricos obtenidos han puesto de manifiesto un aparente error en los publicados en una de las referencias clásicas sobre el tema en la literatura. Se ha resuelto también el problema no lineal de las vibraciones de gran amplitud de gotas ancladas y se ha comprobado que sus frecuencias están de acuerdo con las obtenidas tanto experimentalmente como con el análisis de estabilidad lineal.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Modelos unidimensionales y sus aplicaciones a la interacción fluido-estructura y a la dinámica de chorros y gotas electrificados	1
1.1.1. Flameo de conductos flexibles	2
1.1.2. Chorros y gotas cargados	4
1.2. Descripción del método numérico	6
1.2.1. Forma de equilibrio y análisis estabilidad	7
1.2.2. Análisis del régimen transitorio	8
Bibliografía	10
2. Influencia de la gravedad en el flameo de conductos flexibles	13
2.1. Formulación del problema	14
2.2. Formas de equilibrio	20
2.3. Análisis de estabilidad lineal	25
2.3.1. Conductos alineados y contraalineados con la gravedad	27
2.3.2. Conductos desalineados con la gravedad	28
2.4. Dinámica no lineal: regímenes transitorios y órbitas periódicas	31
2.4.1. Órbitas periódicas circulares en conductos alineados con la gravedad y su estabilidad lineal	32
2.4.2. Órbitas en conductos no alineados con la gravedad	37
Bibliografía	40
3. Dinámica de chorros	41
3.1. Chorros axilsimétricos bajo la acción de la gravedad	43
3.1.1. Formas de equilibrio y análisis de estabilidad global	45
3.1.2. Régimen transitorio no lineal de un chorro de longitud finita	49
3.1.3. Retracción autosemejante de un cono infinito	52

3.2. Dinámica no axilsimétrica de chorros electrificados	56
3.2.1. Análisis de estabilidad lineal	61
3.2.2. Régimen no lineal y órbitas periódicas	63
Bibliografía	69
4. Vibración de gotas	72
4.1. Introducción	72
4.2. Experimentos	73
4.3. Análisis teórico	79
4.3.1. Formulación del problema	79
4.3.2. Resolución numérica	84
4.4. Formas de equilibrio y análisis de estabilidad lineal	88
4.4.1. Formas de equilibrio	89
4.4.2. Análisis de estabilidad	92
4.5. Apéndice: Cálculo del campo eléctrico normal sobre la superficie perturbada	98
Bibliografía	101
5. Conclusiones	103
A. Parámetros de Euler	106

Capítulo 1

Introducción

Der Vorteil des schlechten Gedächtnisses ist, dass man dieselben guten Dinge mehrere Male zum ersten Mal genießt.

Friedrich Nietzsche

1.1. Modelos unidimensionales y sus aplicaciones a la interacción fluido-estructura y a la dinámica de chorros y gotas electrificados

La existencia de efectos tridimensionales en las grandes deformaciones de sólidos unida, en el caso de fluidos, a la interfase de una entrefase libre desconocida a priori, hace el cálculo de la evolución de estos sistemas tremendamente complicado. No obstante, existen muchas circunstancias en que las ecuaciones generales del medio continuo que gobiernan la evolución de estos sistemas pueden simplificarse basado en consideraciones geométricas. Esto ocurre por ejemplo, en el caso en que una dimensión característica del sistema es mucho mayor, la longitudinal, es mucho mayor que las dimensiones características transversales. Así por ejemplo, al estudiar la evolución o las grandes deformaciones de una barra flexible se hace uso con frecuencia de las denominadas ecuaciones de Kirchhof [1] que proporcionan la distribución de esfuerzos y de momentos en cada sección de la barra como funciones de la coordenada longitudinal tomada a lo largo de la línea que une los centros geométricos de las secciones de la barra. Este modelo unidimensional, también conocido en la mecánica de sólidos como modelo de Cosserat, también tiene su análogo en la mecánica de fluidos en el caso de

chorros donde se conoce como aproximación unidireccional y tiene grandes aplicaciones a casos tales como láminas y chorros esbeltos [9] y [24].

En esta tesis, se han usado los modelos unidimensionales referidos anteriormente para resolver numéricamente problemas de la interacción fluido-estructura y en la dinámica de chorros y gotas electrificados como se explica a continuación.

1.1.1. Flameo de conductos flexibles

El fenómeno de flameo es muy común en la naturaleza, siendo un ejemplo bien conocido el del movimiento vibratorio, de gran amplitud y automantenido que caracteriza el comportamiento de una manguera de jardín con caudales suficientemente grandes. En esta tesis se tratará la dinámica de conductos flexibles que transportan líquidos, considerando en la estabilidad del sistema en presencia de gravedad y su comportamiento no lineal poscrítico. Aparentemente, fue Benjamin [4, 5] el primero en investigar este fenómeno, quien caracterizó tanto experimental como analíticamente el caudal crítico para el cual aparece flameo en un sistema consistente en dos conductos articulados a caudales de líquidos constantes. Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del problema fue obtenida por Benjamin por el método de los desplazamientos virtuales. Tres años después, Roth [26] obtuvo las ecuaciones del movimiento débilmente no lineales en términos de los desplazamientos transversales para casos como para conductos de sección variable o conductos apoyados en un lecho elástico. Posteriormente, el problema fue formulado usando tanto el método de Newton como el de Hamilton por diferentes autores Sethna et al. [29, 30], quienes consideraron el caso de caudal constante, o Herrman and Rousselet [13], quien analizó por primera vez el caso de una diferencia de presión impuesta entre la entrada y la salida del conducto empotrado-libre (en un trabajo anterior, Holmes [14] reportó que el flameo nunca ocurre en conductos doblemente empotrados). Posteriormente, [15] estudió el problema, no desde el punto de la estabilidad del sistema, sino del equilibrio dinámico alcanzado por el conducto y el líquido bombeado bajo excitaciones armónicas transversales de la base de aquel. También han sido considerado otros aspectos de la inestabilidad de flameo en conductos transportando fluido han sido considerados, tales como la influencia de la longitud del conducto [8], el caso de un conducto aspirando un fluido [17], o efectos de la dinámica no lineal y tridimensional. Así, Copeland and Moon [6] estudió órbitas no lineales, planas o circulares, en un conducto en empotrado libre con una masa fijada en su extremo libre, mientras que el comportamiento tridimensional y no lineal de un sistema más sencillo, consistente en dos conductos articulados, fue estudiado por Bajaj and Sethna [2, 3]. Recientemente, el flameo de conductos ha experimentado un creciente interés

debido a las aplicaciones que tiene en el campo del almacenamiento de energía (*energy harvesting*) [31, 32]. El efecto del desalineamiento entre el conducto y la gravedad ha sido analizado para el caso de un conducto excitado por un flujo externo en el trabajo reciente de [27].

Las principales investigaciones llevadas a cabo históricamente sobre el flameo en conductos y, más generalmente, en el campo de la interacción fluido-estructura, han sido recogidas en las excelentes referencias de Paidoussis [20, 21] and Paidoussis et al. [23]. Paidoussis extendió los estudios para conductos empotrados-libres a tres dimensiones Paidoussis et al. [22], J.L. et al. [16], Semler et al. [28] usando, como la mayoría de las referencias citadas más arriba, coordenadas cartesianas y una aproximación cuasi-lineal para la curvatura del conducto. Mathew et al. [19] aplicó por primera vez al caso de conductos flexible la formulación intrínseca, que no involucra aproximaciones en la curvatura, del modelo de Cosserat, también denominado aproximación esbelta, usado con frecuencia en la mecánica de sólidos [1].

En esta tesis se ha llevado a cabo, haciendo uso de una formulación intrínseca del modelo de Cosserat, un estudio numérico de la dinámica tridimensional y no lineal de un conducto flexible empotrado-libre (conducto en voladizo), por el que circula un caudal constante de líquido en presencia de la gravedad. En particular, se ha prestado especial atención a los regímenes de flameo, lineal y no lineal, que experimentan este tipo de conductos cuando el caudal circulante excede un cierto valor crítico. Aparentemente, este es el primer estudio completo de la dinámica de conductos en voladizo cuyo empotramiento puede estar desalineado con la gravedad. Por simplicidad, se han considerado sólo conductos que son rectos en reposo, aunque, el análisis realizado puede extenderse fácilmente al caso de conductos curvos en reposo, como en el caso de que posean codos o boquillas. Primero, se ha analizado el efecto del desalineamiento en las formas de equilibrio. Posteriormente, se ha estudiado la pérdida de estabilidad lineal del equilibrio mediante una bifurcación de Hopf. Los resultados del análisis de estabilidad lineal muestra que el efecto estabilizante o desestabilizante del flujo depende crucialmente del ángulo que forman en el empotramiento la gravedad y la línea media del conducto. Finalmente, también se calculado, mediante integración directa de las ecuaciones, el régimen transitorio no lineal que, después de un cierto transitorio inicial, aparece tras la inestabilidad (régimen poscrítico), que puede dar lugar a órbitas periódicas (planas o circulares) o, si el caudal es suficientemente grande, a órbitas caóticas. Eventualmente, para valores suficientemente grandes del flujo se puede obtener comportamientos caóticos. En los casos de órbitas periódicas de gran

amplitud en conductos alineados con la gravedad, también se ha propuesto un método para la determinación directa de las mismas.

1.1.2. Chorros y gotas cargados

La interacción de un campo eléctrico intenso con la interfase entre un líquido conductor y un medio dieléctrico se conoce desde que Gilbert [10] reportó en 1600 la formación de un menisco cónico cuando una pieza de ámbar cargada se aproxima lo suficiente a una gota de agua. La interfase de la gota experimenta entonces una deformación causada por la fuerza que el campo eléctrico ejerce sobre la carga superficial inducida por el mismo campo. En este fenómeno se basa el funcionamiento de los dispositivos modernos para la producción de micro y nano-estructuras de aplicación en diversos campos de la tecnología. Como se esquematiza en la [figura 1.1a](#), estos dispositivos consisten, esencialmente, de una fuente de alto voltaje, una aguja metálica y un electrodo conectado a tierra (electrodo base). La aguja metálica está conectada a una bomba de jeringa mediante la que se impulsa un caudal constante y controlable de líquido. Si se establece un voltaje elevado (normalmente de 1 a 30 KV) entre la aguja metálica y el electrodo base, el campo eléctrico induce una corriente eléctrica en la gota que pende de la salida de la aguja y se acumula carga eléctrica en su superficie, lo que origina un esfuerzo eléctrico tangencial que elonga la gota en la dirección del campo. Entonces se observa que, si la intensidad del campo está por debajo de un cierto valor umbral, el balance de los esfuerzos eléctricos y los de tensión superficial origina un menisco de líquido en reposo cuya forma aproximadamente cónica, y que es conocido como cono de Taylor [33]. Sin embargo, por encima del valor umbral, se originan unos esfuerzos eléctricos muy elevados, concentrados muy cerca de la punta del cono, que sobrepasan los de tensión superficial y dan lugar a la emisión de un chorro electrificado desde la punta del menisco.

Para ciertos valores del voltaje aplicado y del caudal inyectado, el chorro emitido es estacionario, rompiéndose en gotas a cierta distancia aguas abajo debido a las inestabilidades axilimétricas (varicosas) de Rayleigh- Plateau, debida a efectos capilares modificados por la presencia de carga superficial. Se tiene entonces el régimen denominado cono-chorro (véase la [figura 1.1b](#)), que es la base de la técnica del electrospray [7] para generar gotas monodispersas muy pequeñas, con grandes aplicaciones en recubrimientos muy finos, síntesis de polvos, micro y nanocápsulas, etc.

Sin embargo, debido a la carga neta transportada por el chorro, también pueden desarrollarse inestabilidades no axilimétricas. En efecto, si una porción del chorro cargado se desplaza levemente fuera del eje, la fuerza ejercida por la carga distribuida

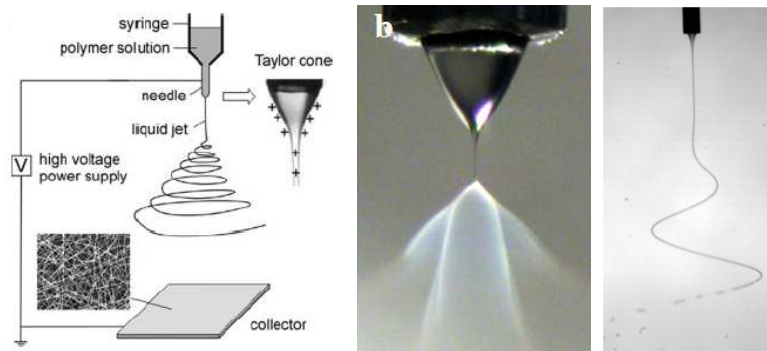


Figura 1.1 (a) Montaje experimental, (b) modo cono chorro y (c) modo de latigqueo. Reproducido de [25].

en el resto del chorro forzar  dicha porci3n a apartarse am s aún del eje, de acuerdo con el teorema de Earnshaw. Se origina entonces la inestabilidad lateral denominada de latigqueo (*whipping*). Si la tasa de crecimiento de esta inestabilidad es mayor que la correspondiente a la rotura varicosa del chorro, como ocurre por ejemplo, si el voltaje o la viscosidad del líquido son lo suficientemente elevados, el movimiento no axial del chorro resulta una de las característica más significativas de su evoluci3n (figura 1.1c). Normalmente, el modo whipping se manifiesta en la forma de latigazos ca3ticos, violentos y rápido, que dan lugar a grandes tensiones axiales en el chorro, debidas a los efectos viscosos, y a un estrechamiento dramático del mismo. Este hecho posee una importancia fundamental el proceso conocido como *electrospinning* [34, 18] donde micro o nanofibras de un fluido polimérico se producen por solidificaci3n del chorro emitido del cono de Taylor antes de que se rompa en gotas. La evaporaci3n del disolvente se facilita en gran medida por una reducci3n del diámetro del chorro que es, típicamente, de varios 3rdenes de magnitud, lo que hace que el electrospinning compita favorablemente con otras técnicas tales como la separaci3n de fase o el auto-ensamblado. Conviene indicar que, debido a la naturaleza ca3tica del whipping, resulta muy difícil analizar y cuantificar experimentalmente con detalle sus mecanismos y origen físico. Sin embargo, hay ciertas circunstancias que ensanchan la ventana paramétrica para la que la inestabilidad lateral da lugar a una estructura helicoidal estable, más fácil de analizar. Tales casos se producen, por ejemplo, cuando el chorro de líquido conductor está rodeado de un baño dieléctrico Riboux et al. [25], o por otro fluido confluyendo con él [11].

1.2. Descripción del método numérico

En esta tesis, gran parte de las ecuaciones se pueden escribir en la forma conservativa genérica:

$$\partial_t m[x, t, y(x, t)] + \partial_x q[x, t, y(x, t)] = p[x, t, y(x, t)], \quad (1.1)$$

donde x es la variable espacial, t corresponde al tiempo, $y(x, t)$ es una N_v -tupla que corresponde a las N_v variables dependientes del problema, y m , q y p son también N_v -tuplas de funciones conocidas, en general no lineales, de las variables de x , t e y . Obsérvese que algunas de la componente de m , q o p pueden ser idénticamente nulas, por lo que (1.1) representa, en general, un sistema diferencial-algebraico (DAE). Las ecuaciones (1.1) deben ser resueltas sujetas a condiciones de contorno en los extremos $x = x_a$ y $x = x_b$ del intervalo de interés, que serán relaciones algebraicas, en general no lineales, entre los valores de las variables en dichos puntos. En forma compacta, dichas relaciones pueden escribirse de la forma

$$g[t, y(x_a, t), y(x_b, t)] = 0, \quad (1.2)$$

donde g es también una N_v -tupla. Dependiendo del tipo de problema considerado, también será necesario especificar condiciones iniciales para algunas (o todas) las variables y .

En lo que sigue, se explicará el procedimiento de discretización y el código MATLAB implementado para la resolución numérica del sistema general DAE (1.1)-(1.2), que previa identificación de las N_v variables y y de las funciones m , q , p y g , servirá para la integración de todos los problemas considerados en esta tesis. Puesto que el problema (1.1)-(1.2) es, en general, diferencial-algebraico, serán de uso obligado los esquemas numéricos implícitos. Por tanto, para disminuir los costes computacionales en los esquemas iterativos de tipo Newton-Raphson que se usarán para resolver las ecuaciones algebraicas resultantes de la discretización, deben proveerse los jacobianos de las funciones m , q y p . Adicionalmente, estos jacobianos son necesarios para los análisis de estabilidad lineal, en los que (1.1)-(1.2) se linealizan en torno a una solución de equilibrio. Debido a la complejidad de las ecuaciones involucradas en los problemas considerados en esta tesis, las matrices jacobianas resultan extraordinariamente tediosas de calcular manualmente, siendo una aportaciones de esta tesis el haber investigado cómo calcular simbólicamente dichas matrices haciendo uso de la función *Jacobian.m* de MATLAB, así como de la función *MatlabFunction.m* que permite convertir las expresiones simbólicas

la determinación de los valores discretos de las variables. Además, la discretización empleada es consistente con la forma conservativa de las ecuaciones (1.1).

Si, para la solución de equilibrio, los valores de las variables de y , p y q sobre la malla en x son $y_{0,i} \equiv y_0(x_i)$, $p_i \equiv p(x_i, y_{0i})$ y $q_i \equiv q(x_i, y_{0i})$, el promediado en cada celda mediante la regla de los trapecios proporciona el sistema de ecuaciones algebraico para las $N_v(N + 1)$ incógnitas $y_{0,0}, \dots, y_{0,N+1}$:

$$(q_i - q_{i-1}) - (p_i + p_{i-1})\frac{h_i}{2} = 0, (i = 1..N) \quad (1.6a)$$

$$g(y_{0,0}, y_{0,N}) = 0, \quad (1.6b)$$

que se resuelve iterativamente utilizando un Newton-Raphson. La matriz jacobiana del sistema (1.8) es dispersa, biadiagonal por bloques, por lo que puede usarse la función *sparse* de MATLAB para optimizar el cálculo.

Una vez calculada la equilibrio, puede resolverse el problema de autovalores (1.5b) de forma análoga. Si los valores de y_1 , Q , P y M en la malla son $y_{1,i} \equiv y_1(x_i)$, $Q_i \equiv Q(x_i)$, $M_i \equiv M(x_i)$ y $P_i \equiv P(x_i)$, la regla de los trapecios proporciona :

$$\left(Q_i + \lambda \frac{h_i}{2} M_i - \frac{h_i}{2} P_i \right) y_{1,i} + \left(-Q_{i-1} + \lambda \frac{h_i}{2} M_{i-1} - \frac{h_i}{2} P_{i-1} \right) y_{1,i-1} = 0, (i = 1..N) \quad (1.7a)$$

$$Ay_{1,0} + By_{1,N} = 0, \quad (1.7b)$$

que es un sistema lineal algebraico para las $N_v(N + 1)$ incógnitas $y_{1,0}, \dots, y_{1,N+1}$ junto con el autovalor λ donde $y_{1i} = y_1(x_i)$, $p_{y,i} = \partial_y p(x_i, y_{0i})$, $q_{y,i} = \partial_y q(x_i, y_{0i})$, $m_{y,i} = \partial_y m(x_i, y_{0i})$. Este problema se ha resuelto usando las funciones de MATLAB *eig.com* o *eigs.com*, haciendo uso esta última función de la naturaleza dispersa, bidiagonal por bloques, de la matriz del sistema (1.7).

1.2.2. Análisis del régimen transitorio

En esta tesis también se ha resuelto (1.1) para calcular el régimen transitorio en diversos problemas. En estos casos la discretización espacial se ha realizado como se explicó en la subsección anterior. Una vez discretizadas en el espacio, resulta un sistema diferencial-algebraico en el tiempo, ya que puede algunas componentes de la N_v -tupla $m[x, y(x, t)]$ en (1.1) puede contener que son idénticamente nulas, de manera que no todas la ecuaciones contengan derivadas temporales. Este sistema se integra en el tiempo mediante un método implícito de que todas las restricciones se cumplan simultáneamente

en el instante actual t_j . En este caso, el sistema es diferencial-algebraico en el tiempo, y sólo un método implícito en el tiempo asegura que las ecuaciones del sistema (algebraicas y/o diferenciales) se cumplen en cada instante. Además, sólo un método implícito puro permite evitar el problema de tener que calcular en el instante de partida, valores de las variables para los que no existen condiciones iniciales que sean consistentes con las restricciones algebraicas. El método que se ha usado aquí es el denominado *backward Euler*, en el que la discretización de las derivadas temporales se realiza hacia atrás con diferencias finitas de primer orden en el incremento de tiempo, $\Delta = t_j - t_{j-1}$. Como desventajas de este método cabe mencionar que es sólo de primer orden y que no es conservativo (simpléctico) como, por ejemplo lo sería, un promediado en Δ mediante la regla de los trapecios. Sin embargo, al ser implícito puro, posee buenas características de estabilidad y, como se ha indicado, permite despreocuparse de la consistencia de las condiciones iniciales. Por tanto, la discretización de (1.1)-(1.2) da lugar al sistema no lineal

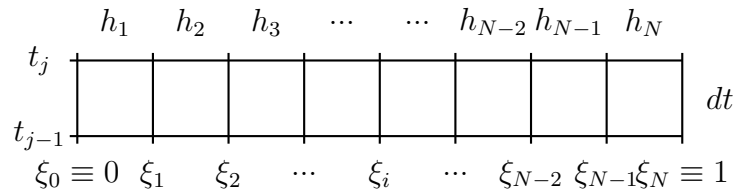


Figura 1.3 Mallado para análisis transitorio

$$h_i (m_{j,i} + m_{j,i-1} - m_{j-1,i}^{j-1} - m_{j-1,i-1}) + 2\Delta (q_{j,i} - q_{j,i-1}) + \Delta t h_i (p_{j,i} + p_{j,i-1}) = 0, \quad (1.8a)$$

$$g(y_{j,0}, y_{j,N}) = 0, \quad (1.8b)$$

donde subíndice hace referencia al instante t_j y el segundo, a la posición x_i . Este sistema se resuelve en cada instante de tiempo mediante el método de Newton-Raphson para determinar la distribución espacial de las variables $y(x_i, t_j)$ ($i = 0 \dots N$) en t_j .

Bibliografía

- [1] Antman, S. S. (2006). Nonlinear problems of elasticity. *Springer Verlag. New York.*
- [2] Bajaj, A. K. and Sethna, P. R. (1982a). Bifurcations in three-dimensional motions of articulated tubes, part 1: Linear systems and symmetry. *Journal of Applied Mechanics*, 49:606–611.
- [3] Bajaj, A. K. and Sethna, P. R. (1982b). Bifurcations in three-dimensional motions of articulated tubes, part 2: Nonlinear analysis. *Journal of Applied Mechanics*, 49:612–618.
- [4] Benjamin, T. B. (1961a). Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid. i: theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Science.*, 261 (1307):457–486.
- [5] Benjamin, T. B. (1961b). Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid. ii: experiments. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Science.*, 261 (1307):457–486.
- [6] Copeland, G. and Moon, F. (1992). Chaotic flow-induced vibration of a flexible tube with end mass. *Fluid and Structures*, 6:705–718.
- [7] De La Mora, J. F. and Loscertales, I. G. (1994). The current emitted by highly conducting Taylor cones. *Journal of Fluid Mechanics*, 260:155–184.
- [8] Doaré, O. and de Langre, E. (2002). The flow-induced instability of long hanging pipes. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21:857–867.
- [9] Eggers, J. and Dupont, T. F. (1994). Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier–Stokes equation. *Journal of fluid mechanics*, 262:205–221.
- [10] Gilbert, W. (1893). *De Magnete*. J. Wiley & Sons, New York. Translated by P.F. Mottelay, original work from 1600.

-
- [11] Guerrero, J., Rivero, J., Gundabala, V. R., Perez-Saborid, M., and Fernandez-Nieves, A. (2014). Whipping of electrified liquid jets. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(38):13763–13767.
- [12] Herrada, M. and Montanero, J. (2016). A numerical method to study the dynamics of capillary fluid systems. *Journal of Computational Physics*, 306:137–147.
- [13] Herrman, G. and Rousselet, J. (1980). Dynamic behavior of continuous cantilevered pipes conveying fluid near critical velocities. *Journal of Applied Mechanics*, 48:213–230.
- [14] Holmes, P. J. (1978). Pipes supported at both ends cannot flutter. *Journal of Applied Mechanics*, 45:622–669.
- [15] Jensen, J. S. (1997). Fluid transport due to nonlinear fluid-structure interaction. *Journal of Fluids and Structures*, 11:327–344.
- [16] J.L., L., Paidoussis, M. P., and Semler, C. (2002). Linear and nonlinear dynamics of cantilevered cylinders in axial flow. part 2: the equations of motion. *Journal of Fluids and Structures*, 16(6):715–737.
- [17] Kuiper, G. L. and Metrikine, A. V. (2008). Experimental investigation of dynamic stability of a cantilever pipe aspirating fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 24(4):541–558.
- [18] Li, D. and Xia, Y. (2004). Electrospinning of nanofibers: reinventing the wheel? *Advanced materials*, 16(14):1151–1170.
- [19] Mathew, M. T., Beauregard, A., and Goriely, A. (2010). The nonlinear dynamics of elastic tubes conveying fluid. *International Journal of Solids and Structures*, 47:161–168.
- [20] Paidoussis, M. P. (1998). Fluid-structure interactions: Slender structures and axial flow. *London: Academic Press*, 1.
- [21] Paidoussis, M. P. (2004). Fluid-structure interactions: Slender structures and axial flow. *London: Elsevier, Academic Press*, 2.
- [22] Paidoussis, M. P., Grinevich, E., Adamovicy, D., and Semler, C. (2002). Linear and nonlinear dynamics of cantilevered cylinders in axial flow. part 1: physical dynamics. *Journal of Fluids and Structures*, 16(6):691–713.

- [23] Paidoussis, M. P., Price, S. J., and de Langre, E. (2011). Fluid-structure interactions: Fluid-structure interactions : cross-flow-induced instabilities. *New York : Cambridge University Press*.
- [24] Ribe, N. M. (2004). Coiling of viscous jets. *Proceedings of the Royal Society of London, A.*, 2004(5):3223–3239.
- [25] Riboux, G., Marín, A., Loscertales, I. G., and Barrero, A. (2011). Whipping instability characterization of an electrified visco-capillary jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 671:226–253.
- [26] Roth, W. (1964). Instabilitaet durchstroemte rohre. *Ingenieur-Archiv*, 33:236–263.
- [27] Schouveiler, L., Eloy, C., and Le Gal, C. (2005). Flow-induced vibrations of high mass ratio flexible filaments freely hanging in a flow. *Physics of Fluids*, 17:047104.
- [28] Semler, C., J.L., L., Augu, N., and Paidoussis, M. P. (2002). Linear and nonlinear dynamics of cantilevered cylinders in axial flow. part 3: nonlinear dynamics. *Journal of Fluids and Structures*, 16(6):739–759.
- [29] Sethna, P. R., Lundgren, T. S., and Bajaj, A. K. (1979). Stability boundaries for flow induced motions of tubes with and inclined nozzle. *Journal of Sound and Vibration*, 64:553–571.
- [30] Sethna, P. R., Lundgren, T. S., and Bajaj, A. K. (1980). Hopf bifurcation phenomena in tubes carrying a fluid. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 39:213–230.
- [31] Singh, K., Michelin, S., and de Langre, E. (2012a). The effect of non-uniform damping on flutter in axial flow and energy-harvesting strategies. *Proceedings of the Royal Society A, Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468:3620–3635.
- [32] Singh, K., Michelin, S., and de Langre, E. (2012b). Energy harvesting from axial fluid-elastic instabilities of a cylinder. *Fluid and Structures*, 30:159–172.
- [33] Taylor, G. (1964). Disintegration of water drops in an electric field. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 280, pages 383–397. The Royal Society.
- [34] Yarin, A. L., Koombhongse, S., and Reneker, D. H. (2001). Taylor cone and jetting from liquid droplets in electrospinning of nanofibers. *Journal of applied physics*, 90(9):4836–4846.

Capítulo 2

Influencia de la gravedad en el flameo de conductos flexibles

Der Vorteil des schlechten Gedächtnisses ist, dass man dieselben guten Dinge mehrere Male zum ersten Mal genießt.

Friedrich Nietzsche

EN este capítulo, se ha llevado a cabo un estudio numérico de la dinámica tridimensional y no lineal de un conducto flexible, con la sección de entrada empotrada y libre la de salida, por el que circula un caudal constante de líquido en presencia de gravedad. En particular, se ha prestado especial atención al fenómeno de flameo que experimentan este tipo de conductos cuando el caudal circulante excede un cierto valor crítico. La estructura del capítulo es similar a la del mismo trabajo publicado [7] y se muestra a continuación. En §2.1 introducimos las relaciones geométricas y cinemáticas del problema usando el modelo de viga de Cosserat [1] y se obtienen las ecuaciones que gobiernan la dinámica del problema aplicando las leyes de balance de momento lineal y angular. Hemos asumido que el conducto es recto en reposo e inextensible comparado con su flexibilidad a flexión, se ha usado una relación constitutiva del material lineal, es decir momentos flectores y curvatura son proporcionales, demostrándose mediante comparación con experimentos que la aproximación es suficientemente buena, así como que la inercia a rotación del conducto se puede despreciar (viga de Bernoulli). Para el modelo de Kirchhoff aplicado al flameo de conductos rectos en ausencia de gravedad véase Mathew et al. [4]. En §2.2 estudiamos la forma de equilibrio y como depende de los parámetros del problema y en §2.3 analizamos la pérdida de estabilidad para pequeñas perturbaciones mediante bifurcaciones de Hopf. En §2.4 estudiamos la pérdida

de estabilidad de órbitas periódicas circulares que conducen a órbitas planas y también algunos aspectos cualitativos del caos.

2.1. Formulación del problema

En esta sección se establecerán las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un conducto flexible por el que circula un caudal de líquido independiente del tiempo. Se considerará que el conducto es inextensible, de longitud L , y posee una sección transversal circular, de área A , que también se supone indeformable durante el proceso. Dicha sección está formada por una corona circular, de área A_p , que forma la pared del conducto, y por la sección de paso del fluido, de área A_f , de manera que $A = A_p + A_f$. Además, se supondrá que el conducto es muy esbelto ($L \gg \sqrt{A}$), por lo que, en primera aproximación, su configuración geométrica está definida en cada instante mediante el vector posición de cada punto de su línea media, $\mathbf{r}(s, t)$, donde s representa la longitud de arco a lo largo de dicha línea, medida desde la sección de entrada al conducto, y t es el tiempo. Asimismo, y puesto que como se verá en lo que sigue, los esfuerzos y momentos en cada sección del conducto flexible dependen de forma esencial de la geometría local del mismo, particularmente de su curvatura, es conveniente describir el movimiento usando un triedro intrínseco, ortonormal y dextrógiro, $\{\mathbf{d}_i(s, t)\}_{i=1,2,3}$, como el esquematizado en la [figura 2.1a](#), de manera que el vector $\mathbf{d}_3(s, t)$ es tangente a la línea media del conducto:

$$\mathbf{d}_3(s, t) = \partial_s \mathbf{r}(s, t). \quad (2.1)$$

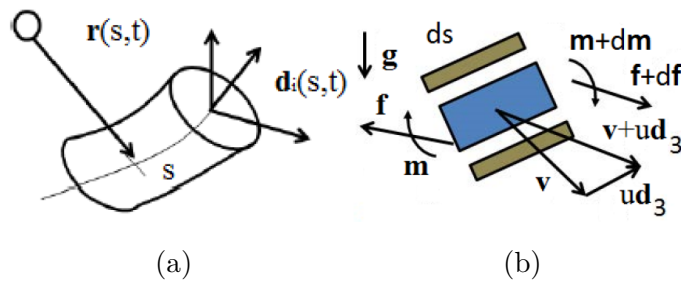


Figura 2.1 (a) Descripción geométrica de la línea media basa en un triedro intrínseco y (b) balances de cantidad de movimiento lineal y angular aplicadas sobre una rebanada diferencial de conducto y líquido.

Además, se supondrá que la velocidad del líquido relativa al conducto, u , es uniforme en cada sección transversal del mismo, por lo que en términos del caudal circulante, Q ,

se tiene que $u = Q/A_f$. Esta hipótesis está justificada si se verifica que $Q/(\nu L) \gg 1$, donde ν es la viscosidad cinemática del fluido, o bien si $Q/(\nu\sqrt{A}) > Re_{cr}$, donde Re_{cr} es el número de Reynolds crítico para la transición a la turbulencia (normalmente en torno a 2300), debido a la gran uniformidad que en cada sección posee el perfil de velocidades medias del flujo turbulento. De esta forma, y puesto que la velocidad de la línea media en cada sección está dada por

$$\mathbf{v}(s, t) = \partial_t \mathbf{r}(s, t), \quad (2.2)$$

la velocidad absoluta del fluido es $\mathbf{v} + u\mathbf{d}_3$.

Obsérvese que, debido a la ortonormalidad del triedro intrínseco, siempre es posible encontrar dos vectores $\boldsymbol{\kappa}(s, t)$ y $\boldsymbol{\omega}(s, t)$ son los vectores de Darboux [Stoker], denominados, respectivamente, curvatura y velocidad angular del triedro, tales que:

$$\partial_s \mathbf{d}_i = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i, \quad (2.3a)$$

$$\partial_t \mathbf{d}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.3b)$$

por lo que la distribución espacial y la evolución temporal de los vectores del triedro y, por tanto, de la línea media del conducto $\mathbf{r}(s, t) = \int_0^s ds' \mathbf{d}_3(s', t)$, están determinadas por los vectores $\boldsymbol{\kappa}(s, t)$ y $\boldsymbol{\omega}(s, t)$ que, naturalmente, deben calcularse como parte del problema. Además, los vectores \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\kappa}$ no son independientes, sino que deben satisfacer las siguientes relaciones de compatibilidad obtenidas de (2.1)-(2.3) haciendo uso de la igualdad de las derivadas cruzadas $\partial_s \partial_t \mathbf{r} = \partial_t \partial_s \mathbf{r}$ y $\partial_s \partial_t \mathbf{d}_i = \partial_t \partial_s \mathbf{d}_i$:

$$\partial_s \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{d}_3 \quad (2.4)$$

y

$$\partial_t \boldsymbol{\kappa} = \partial_s \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}, \quad (2.5)$$

donde para obtener la relación (2.5) se ha hecho uso de la identidad de Jacobi para el doble producto vectorial, $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i) + \mathbf{d}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}) + \boldsymbol{\kappa} \times (\mathbf{d}_i \times \boldsymbol{\omega}) = 0$.

Para cerrar el problema, las ecuaciones cinemáticas (2.4)-(2.5) deben complementarse con las ecuaciones dinámicas del sistema conducto-líquido. Estas ecuaciones se obtienen mediante balances de cantidad de movimiento y de momento angular aplicados a una rebanada infinitesimal genérica del conducto como la mostrada en la [figura 2.1b](#). En primer lugar, si ρ_p y ρ_f son las densidades del material de la pared del conducto y

del fluido, respectivamente, el balance de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{f} + (\rho_p A_p + \rho_f A_f) \mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial t} [\rho_p A_p \mathbf{v} + \rho_f A_f (\mathbf{v} + u \mathbf{d}_3)] + \frac{\partial}{\partial s} [u \rho_f A_f (\mathbf{v} + u \mathbf{d}_3)] \quad (2.6)$$

y reorganizando haciendo uso de (2.4),

$$\frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{f} - \rho_p A_p u^2 \mathbf{d}_3) + (\rho_p A_p + \rho_f A_f) \mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial t} [(\rho_p A_p + \rho_f A_f) \mathbf{v} + 2 \rho_f A_f u \mathbf{d}_3] \quad (2.7)$$

donde \mathbf{g} es la aceleración de la gravedad, $\mathbf{f}(s, t)$ es la fuerza de superficie debida a los esfuerzos axiales y cortantes que actúan sobre la sección transversal situada en s . Obsérvese que, puesto que el conducto se supone inextensible y la velocidad relativa del líquido respecto del conducto es uniforme (es decir, no existen fuerzas de viscosidad asociadas gradientes longitudinales o transversales de u), no se debe dar ninguna relación constitutiva para \mathbf{f} , que debe calcularse como parte del problema. Por otra parte, si I_p e I_f denotan los momentos de inercia de las secciones de la pared del conducto y la de paso del fluido, respectivamente, el balance de momento angular respecto del centro de la rebanada proporciona :

$$\partial_s \mathbf{m} + \mathbf{d}_3 \times \mathbf{f} = \partial_t [\rho_p I_p \mathcal{P}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho_f I_f \mathcal{P}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega} + u \boldsymbol{\kappa})] + \partial_s [u \rho_f I_f \mathcal{P}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega} + u \boldsymbol{\kappa})], \quad (2.8)$$

siendo $\mathcal{P}_k = \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + k \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3$ y la inercial de una corona circular respecto al centro de ésta es el doble que respecto a un diámetro. En (2.8) $\boldsymbol{\omega} + u \boldsymbol{\kappa}$ representa la velocidad angular total (de arrastre con el triedro más la relativa debida a la curvatura del conducto) del fluido en la sección s , $\mathbf{m}(s, t)$ representa el momento que actúa sobre la sección en s , y no se han considerado momentos causados por agentes externos al sistema conducto-líquido.

El sistema (2.4)-(2.8) consta de cuatro ecuaciones vectoriales en derivadas parciales cuya resolución, sujeta a condiciones iniciales y de contorno apropiadas, permite calcular las incógnitas \mathbf{v} , $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{f} . No obstante, primero es necesario proporcionar una ley constitutiva que relacione el momento \mathbf{m} con las incógnitas del problema. Para ello, se supondrá que, como es usual para conductos esbeltos, la rigidez a flexión es proporcional a la curvatura, mientras que para los momentos debidos a la viscosidad del fluido se usará una ley constitutiva válida para chorros esbeltos de fluidos newtonianos [2] que establece que dichos momentos son proporcionales al gradiente de velocidad angular. Por tanto, se tiene que

$$\mathbf{m} = EI_p \mathcal{P}_2 \cdot \boldsymbol{\kappa} + 3\mu I_f \mathcal{P}_{2/3} \cdot \partial_s (\boldsymbol{\omega} + u \boldsymbol{\kappa}), \quad (2.9)$$

donde E es el módulo de Young del material del conducto y μ el coeficiente de viscosidad del fluido.

El sistema de ecuaciones (2.4)-(2.8), junto con la ley constitutiva (2.9), se resuelve sujeto a las condiciones de contorno correspondientes a un conducto empotrado-libre, es decir, en el extremo empotrado $s = 0$ se tiene

$$\mathbf{v}(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\omega}(0, t) = 0, \quad (2.10)$$

mientras que en el extremo libre $s = L$ las fuerzas y momentos deben ser nulos:

$$\mathbf{f}(L, t) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{m}(L, t) = 0. \quad (2.11)$$

Como se verá en lo que sigue, las ecuaciones (2.4)-(2.11) se resolverán proyectándolas en cada punto en el triedro intrínseco, $\{\mathbf{d}_i(s, t)\}_{i=1,2,3}$. Para ello, antes es conveniente tener en cuenta que, aunque \mathbf{g} es un vector constante sobre toda la longitud del conducto, sus componentes intrínsecas no lo son, por lo que es conveniente añadir a las ecuaciones anteriores la ecuación

$$\partial_s \mathbf{g} = 0. \quad (2.12)$$

La condición de contorno que se impondrá a \mathbf{g} es:

$$\mathbf{g}(0, t) = g[\cos \theta \mathbf{a}_3 + \sin \theta \mathbf{a}_2], \quad (2.13)$$

donde θ es el ángulo que forma la gravedad con la tangente a la línea media del conducto en el extremo empotrado, $s = 0$, y, en lo que sigue, se denotarán por $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$ los vectores del triedro intrínseco en $s = 0$, $\{\mathbf{d}_i(0, t)\}_{i=1,2,3}$. Obsérvese que, puesto que el empotramiento se supondrá fijo en todos los casos considerados aquí, los \mathbf{a}_i constituyen un triedro fijo, independiente del tiempo, que se usará más adelante como la base de un sistema de ejes de referencia para determinar, por ejemplo, la posición de la línea media del conducto, $\mathbf{r}(s, t)$. Además, y sin pérdida de generalidad, se elegirán las orientaciones de \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 tales que \mathbf{g} está contenida en el plano \mathbf{a}_2 y \mathbf{a}_3 . Por otra parte, el ángulo θ se denominará en lo que sigue ángulo de desalineación o, simplemente, desalineación.

Las ecuaciones (2.4)-(2.13) se escribirán en términos de las variables adimensionales

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t/\omega_0, & s &\rightarrow Ls, & \mathbf{f} &\rightarrow \rho A \omega_0^2 L^2 \mathbf{f}, & \mathbf{m} &\rightarrow \rho A \omega_0^2 L^3 \mathbf{m}, \\ \mathbf{v} &\rightarrow \omega_0 L \mathbf{v}, & \boldsymbol{\omega} &\rightarrow \omega_0 \boldsymbol{\omega}, & \boldsymbol{\kappa} &\rightarrow L^{-1} \boldsymbol{\kappa}, & \mathbf{g} &\rightarrow L \omega_0^2 \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde $\rho = (\rho_p A_p + \rho_f A_f)/A$ es la densidad aparente y $\omega_0 = \sqrt{EI_p/\rho AL^4}$ es la frecuencia natural característica de flexión. Además, teniendo en cuenta que $I_f \sim I_p \sim A^2$, las ecuaciones se pueden simplificar despreciando los términos de inercia que aparecen en la ecuación del momento angular (2.8) frente a los debidos a la curvatura (del orden de $\partial_s \mathbf{m}$), puesto que su relación es del orden $I_f/(AL^2) \ll 1$ para el conducto, e $I_p/(AL^2) \ll 1$ para el fluido. Asimismo pueden despreciarse los momentos asociados a los efectos viscosos in (2.9), cuya magnitud frente a los de curvatura es del orden $EI_p/\mu I_f \omega_0 \gg 1$.

Como se indicó anteriormente, el sistema (2.4)-(2.13) se expresará continuación en la base local definida por los vectores del triedro intrínseco. Para ello, obsérvese que la derivada espacial de un vector genérico viene dada por

$$\partial_s \mathbf{b} = \sum_i (\partial_s b_i) \mathbf{d}_i + b_i \partial_s \mathbf{d}_i \equiv \mathbf{b}' + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{b} \quad (2.15)$$

y, análogamente, la derivada temporal es

$$\partial_t \mathbf{b} \equiv \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}, \quad (2.16)$$

donde, para simplificar notación, hemos definido los vectores $\mathbf{b}' \equiv \sum_i (\partial_s b_i) \mathbf{d}_i$ y $\dot{\mathbf{b}} \equiv \sum_i (\partial_t b_i) \mathbf{d}_i$, que representan la derivadas intrínsecas espaciales y temporales, respectivamente, del vector $\mathbf{b}(s, t)$. Nótese que las derivadas intrínsecas, al no involucrar derivadas de los vectores de la base, conmutan, i.e., $(\mathbf{b}') \cdot = (\dot{\mathbf{b}})'$. En lo que sigue se hará un uso extensivo de las definiciones dadas para las derivadas intrínsecas y de su relación con las derivadas parciales mediante (2.15)-(2.16).

Si se sustituyen ahora las expresiones (2.14) en las ecuaciones (2.4)-(2.13), se desprecian ellas los términos de inercia en la ecuación (2.8), los momentos viscosos en la ecuación (2.9) y se tienen en cuenta las expresiones (2.15)-(2.16), se obtiene el

sistema de ecuaciones y condiciones de contorno :

$$\mathbf{v}' = -\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_3, \quad (2.17a)$$

$$\boldsymbol{\omega}' = -\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}, \quad (2.17b)$$

$$\mathbf{f}' = -\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{f} + \dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + 2\beta U \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_3 + \beta U^2 \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_3 - \mathbf{g}, \quad (2.17c)$$

$$\boldsymbol{\kappa}' = -\mathbf{d}_3 \times \mathbf{f}, \quad (2.17d)$$

$$\mathbf{g}' = -\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{g} \quad (2.17e)$$

y

$$\mathbf{v}(0, t) = \boldsymbol{\omega}(0, t) = \mathbf{f}(1, t) = \boldsymbol{\kappa}(1, t) = \mathbf{g}(0, t) - \gamma(\cos \theta \mathbf{a}_3 + \sin \theta \mathbf{a}_2) = 0. \quad (2.18)$$

Los parámetros adimensionales que aparecen en (2.17)-(2.18) son

$$\gamma = \frac{g}{L\omega_0^2}, \quad \beta \equiv \frac{\rho_f A_f}{\rho_f A_f + \rho_p A_p} \quad \text{y} \quad U = \frac{u}{\omega_0 L}, \quad (2.19)$$

que representan, respectivamente, la aceleración de la gravedad adimensional, la relación de masa de líquido frente a la total del sistema y la velocidad adimensional del fluido relativa al conducto. A título orientativo, para el conducto de silicona usado en los experimentos de la siguiente sección, §2.2, que posee una longitud $L = 1m$ y diámetros exterior e interior $\phi_o = 20mm$ y $\phi_i = 10mm$, el orden de magnitud de los parámetros involucrados en el problema son $\omega_0 \sim 0,36Hz$, $\omega_0 L \sim 0,36m/s$, $\beta \sim 0,23$, $\gamma \sim 72$ y, para una velocidad relativa típica $u = 4m/s$, $U \sim 10$.

Obsérvese que en las ecuaciones (2.17) no aparecen derivadas de los vectores del triedro intrínseco, por lo que sus componentes en dicha base pueden escribirse directamente como:

$$\partial_s v_i = \epsilon_{ijk}(-\kappa_j v_k + \omega_j \delta_{k3}), \quad (2.20a)$$

$$\partial_s \omega_i = \partial_t \kappa_i - \epsilon_{ijk} \kappa_j \omega_k, \quad (2.20b)$$

$$\partial_s f_i = \partial_t v_i - g_i + \epsilon_{ijk}(-\kappa_j f_k + \omega_j v_k + 2\beta U \omega_j \delta_{k3} + \beta U^2 \kappa_j \delta_{k3}), \quad (2.20c)$$

$$\partial_s \kappa_i = -\epsilon_{ijk} \delta_{j3} f_k, \quad (2.20d)$$

$$\partial_s g_i = -\epsilon_{ijk} \kappa_j g_k, \quad (2.20e)$$

y las condiciones de contorno

$$v_i(0, t) = \omega_i(0, t) = f_i(1, t) = \kappa_i(1, t) = g_i(0, t) - \gamma(\cos \theta \delta_{i3} + \sin \theta \delta_{i2}) = 0, \quad (2.21)$$

donde $i, j, k = 1, 2, 3$ y se ha usado el convenio de sumación de Einstein.

Una vez las ecuaciones (2.20)-(2.21) han sido resueltas, la posición del conducto puede determinarse con respecto al triedro fijo, $\mathbf{r}(s, t) = \sum_{i=1}^3 r_i(s, t)\mathbf{a}_i$, usando, por ejemplo, los parámetros de Euler. Aunque la teoría de los parámetros de Euler es bien conocida [11, 6], en §A se ha llevado cabo una breve revisión de la misma con el objeto de deducir de una manera directa, que hace uso del cálculo vectorial compacto y que no se ha encontrado en la literatura, los resultados necesarios para este trabajo. Para calcular la evolución de las componentes de $\mathbf{r}(s, t)$ en la base fija $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$, se expresa la ecuación (2.1) en dicha base teniendo en cuenta que los vectores \mathbf{a}_i son constantes (independientes de s) y haciendo uso de la expresión (A.14) para las componentes de \mathbf{d}_3 , lo que proporciona

$$r'_i = (2q_0^2 - 1)\delta_{i3} + 2q_i q_3 + 2q_0 \epsilon_{ij3} q_j. \quad (2.22a)$$

El cálculo de los parámetros de Euler durante la evolución del sistema se lleva a cabo integrando (A.13) para las derivadas espaciales intrínsecas de q_0 y de $\mathbf{q}_v = \sum_{i=1}^3 q_i(s, t)\mathbf{d}_i$. Cuando dichas ecuaciones se proyectan en la base intrínseca se obtienen :

$$q'_0 = \sum_{i=1}^3 -\kappa_i q_i / 2, \quad (2.23a)$$

$$q'_i = (q_0 \kappa_i + \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} q_j \kappa_k) / 2. \quad (2.23b)$$

Las ecuaciones (2.22a)-(2.23) se han integrado con las condiciones de contorno correspondientes al empotramiento:

$$r_i(0) = 0, \quad q_0(0) = 1 \quad \text{and} \quad q_i(0) = 0. \quad (2.24)$$

2.2. Formas de equilibrio

Las ecuaciones que gobiernan las formas de equilibrio del conducto se obtienen al anular las derivadas temporales en las ecuaciones (2.17). Si se denotan por el subíndice 0 las variables correspondientes a las soluciones de equilibrio, las dos primeras ecuaciones (2.17) junto con las condiciones de contorno de empotramiento en $s = 0$ implican inmediatamente que $\mathbf{v}_0(s) = \boldsymbol{\omega}_0(s) = 0$, mientras que para el resto de las variables se

tiene el sistema

$$\mathbf{f}'_0 = -\boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{f}_0 + \beta U^2 \boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{d}_3 - \mathbf{g}_0, \quad (2.25a)$$

$$\boldsymbol{\kappa}'_0 = -\mathbf{d}_3 \times \mathbf{f}_0, \quad (2.25b)$$

$$\mathbf{g}'_0 = -\boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{g}_0, \quad (2.25c)$$

junto con las condiciones de contorno

$$\mathbf{f}_0(1) = \boldsymbol{\kappa}_0(1) = \mathbf{g}_0(0) - \gamma[\cos\theta\mathbf{a}_3 + \sin\theta\mathbf{a}_2] = 0. \quad (2.26)$$

Obsérvese que las formas de equilibrio deben estar contenidas en el plano formado por los vectores \mathbf{a}_3 y \mathbf{a}_2 , que es también el que forman \mathbf{d}_3 y \mathbf{g} , por lo que será conveniente en lo que sigue representar dichas formas usando coordenadas cartesianas x e y dirigidas según los vectores \mathbf{a}_3 y $-\mathbf{a}_2$, respectivamente. La posición en el plano x - y esta gobernada por las ecuaciones (2.22a)-(2.23), sin embargo, dado que el problema es plano, ésta también se puede describir más fácilmente por las posiciones x e y y el ángulo ϕ formado por \mathbf{f} y \mathbf{d}_3 que cumplen las ecuaciones

$$x' = \cos\phi, \quad y' = \sin\phi \quad \text{y} \quad \phi' = -\boldsymbol{\kappa}_0 \cdot \mathbf{d}_1 \quad (2.27a)$$

sujetas a las condiciones de contorno

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi(0) = \theta, \quad (2.28)$$

donde se ha tomado el origen de coordenadas en el empotramiento y la gravedad está orientada en la dirección negativa del eje y .

El problema de valores de contorno (2.25)-(2.28) es de la forma (1.1)-(1.2) y, por tanto, puede integrarse con el esquema numérico descrito en §1.2. Para acelerar la convergencia se ha usado una estrategia de continuación paramétrica a partir de unos valores de los parámetros para los que la solución es conocida, como lo es, por ejemplo, la solución trivial para $\gamma = \beta U = \beta U^2 = 0$.

Las formas de equilibrio calculadas numéricamente se han comparado con las obtenidas con el montaje de la [figura 2.2a](#), que consiste en una conducto de silicona de sección circular y reforzada con fibras en la dirección axial, de densidad lineal $\rho_p A_p = 0,28kg/m$, diámetros exterior e interior $\phi_e = 20mm$ y $\phi_i = 10mm$, y una longitud efectiva $L < 1m$ que puede ser ajustada cambiando el punto de empotramiento

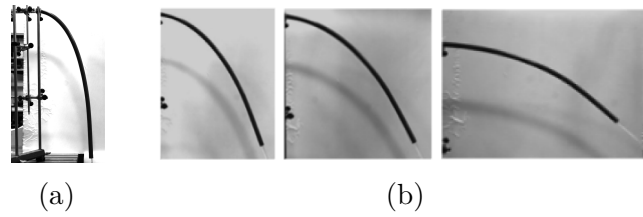


Figura 2.2 (a) Montaje experimental de una manguera de silicona. y (b) algunas formas de equilibrio para caudal creciente U .

como se muestra en la [figura 2.2a](#). En la [figura 2.2b](#) se muestran varias soluciones de equilibrio obtenidas experimentalmente para caudales crecientes.

Obsérvese que, para comparar los resultados experimentales con los numéricos, es necesario determinar primero cuáles son los valores de los parámetros adimensionales del problema correspondiente a cada experimento. Esto ha requerido determinar el módulo de Young E del material del conducto, no facilitado por el proveedor, y que interviene en la definición (2.19) de γ y de U a través de la frecuencia natural de flexión ω_0 . Con este propósito, se han considerado primero formas de equilibrio para distintos valores de L del conducto en ausencia de fluido y, para cada valor de L , se ha variado el valor del parámetro γ hasta que la solución numérica obtenida coincidiera con la forma experimental adimensionalizada según se muestra en la [figura 2.3](#). En la [figura 2.3a](#) se muestran los valores experimentales de $\log \gamma$ para distintos valores de $\log L$, y en la [figura 2.3b](#) se comparan las formas teóricas y experimentales correspondientes. Del ajuste por mínimos cuadrados de los datos de la [figura 2.3a](#) se deduce la ley experimental $\gamma = kL^\alpha$, con $k = 9,6143$, en unidades del sistema internacional, y $\alpha = 3,027$. Esta dependencia de γ con L confirma con buena aproximación la que se obtiene sustituyendo la expresión $\omega_0 = \sqrt{EI_p/\rho AL^4}$ en la de γ en (2.19) :

$$\gamma = \frac{\rho AgL^3}{EI_p}, \quad (2.29)$$

por lo que, si se igualan k y el coeficiente de L^3 en (2.29), se obtiene el valor del módulo de Young $E = 25,9 \text{ MPa}$, que es mayor que el típico de la silicona pura debido a que la usada en los experimentos posee fibras de refuerzo. Finalmente, obsérvese que el buen acuerdo entre las formas de equilibrio y experimentales mostradas en la [figura 2.3b](#) permite justificar el uso de la hipótesis de esbeltez que se ha hecho para el análisis de la dinámica del conducto en este estudio.

Para analizar los efectos de la gravedad y del caudal del líquido sobre las formas de equilibrio es conveniente tener en cuenta que, haciendo uso de (2.3) y (2.15), la

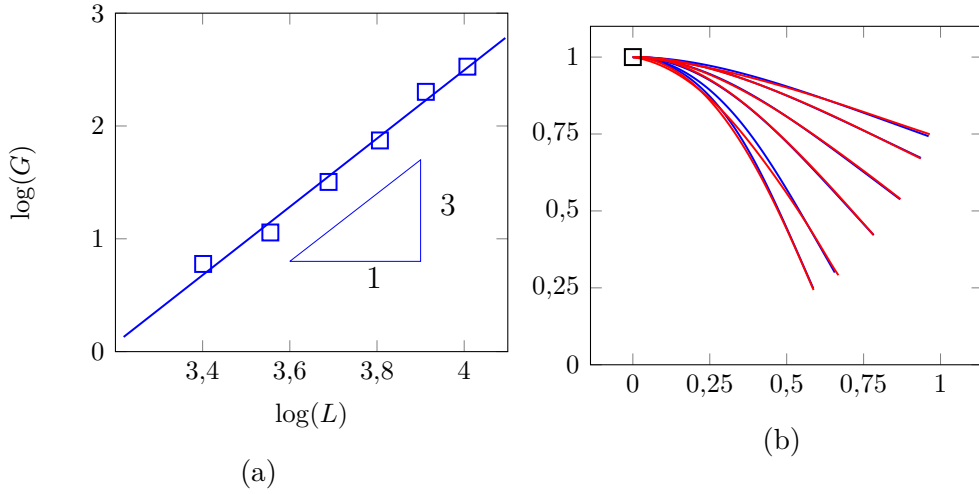


Figura 2.3 Comparación de formas de equilibrio obtenidas numérica y experimentalmente para posiciones horizontales del conducto, $\theta = \pi/2$, y en ausencia de líquido $\beta U = \beta U^2 = 0$. (a) ajuste por mínimos cuadrados de la curva teórica $\gamma = kL^\alpha$ y (b) resultados experimentales (—) y teóricos (—).

ecuación (2.25a) se puede escribir como $\partial_s(\mathbf{f}_0 - \beta U^2 \mathbf{d}_3) = \mathbf{g}_0$, que puede integrarse inmediatamente entre $s = 1$, donde $\mathbf{f}_0(1) = 0$, y un valor genérico s ,

$$\mathbf{f}_0 = (1 - s)\mathbf{g} + \beta U^2[\mathbf{d}_3(s) - \mathbf{d}_3(1)], \quad (2.30)$$

y proporciona la distribución de fuerzas en cada sección como función de $\mathbf{d}_3(s)$. En particular, si se proyecta la ecuación anterior sobre $\mathbf{d}_3(s)$ se obtiene la distribución de fuerzas axiales

$$\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{d}_3 = \gamma(1 - s) \cos \phi(s) + \beta U^2\{1 - \cos[\phi(1) - \phi(s)]\}. \quad (2.31)$$

En la [figura 2.4](#) se muestra la influencia de la gravedad en las soluciones de equilibrio en ausencia de caudal de líquido ($\beta U^2 = 0$) y para el desalineamiento máximo $\theta = \pi/2$ entre gravedad y empotramiento. Obsérvese en la [figura 2.4a](#) cómo las formas de equilibrio tienden a alinearse con la gravedad para valores crecientes de γ y dan lugar a la distribución de fuerzas axiales mostradas en [figura 2.4b](#). Nótese que cada rebanada del conducto está bajo tracción ($\mathbf{f} \cdot \mathbf{d}_3 > 0$) y, puesto que la tracción siempre tiende a estabilizar, este hecho será relevante a la hora de analizar la estabilidad de las formas de equilibrio en §2.3. Obsérvese también que, para el caso considerado de $\theta = \pi/2$, la fuerza axial es nula en $s = 0$, por lo que la fuerza en el extremo empotrado es el cortante soporta todo el peso de la manguera. Las líneas rectas en trazo fino en [figura 2.4b](#)

corresponden a conductos alineados con la gravedad y se han dibujado como referencia.

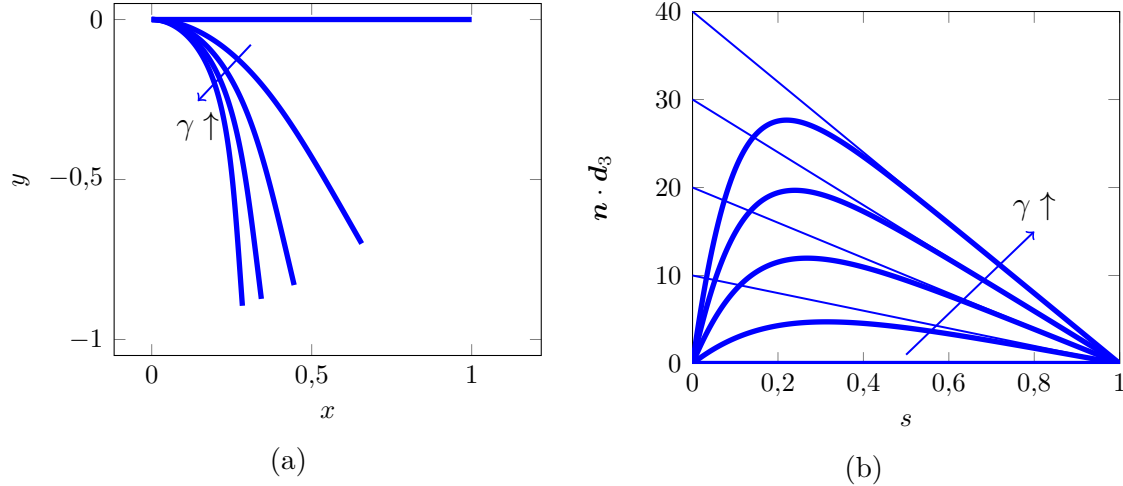


Figura 2.4 Efecto alineador de la gravedad, γ , en conductos horizontales, $\theta = \pi/2$, en ausencia de líquido $\beta U^2 = 0$. (a) Formas de equilibrio para gravedades crecientes y (b) distribución de axiles correspondientes.

En la [figura 2.5](#) se muestra la influencia del caudal en las formas de equilibrio para un valor dado de la gravedad adimensional ($\gamma = 30$) y un desalineamiento $\theta = \pi/2$. Obsérvese en [figura 2.5a](#) cómo el flujo de cantidad de movimiento que abandona el conducto ejerce una reacción sobre el mismo que, de acuerdo con los experimentos (véase [figura 2.2b](#)), tiende a enderezar las formas de equilibrio. Asimismo, debido a dicha reacción, la distribución de fuerzas axiles se modifica, de acuerdo con (2.31), con respecto a la del caso de caudal nulo y, como se muestra en [figura 2.5b](#), las fuerzas de tracción tienden a disminuir con βU^2 apareciendo, además, fuerzas axiles no nulas en el extremo empotrado. Nótese también en la [figura 2.5](#) que para valores grandes de βU^2 se tienen conductos casi rectos ($\phi(s) \rightarrow \theta$) y, por tanto, la distribución de fuerzas axiles (2.31) tiende a $\mathbf{f} \cdot \mathbf{d}_3 \rightarrow \gamma(1-s) \cos \theta$. Esto indica que para valores suficientemente grandes del caudal dicha distribución es la misma que la de un conducto alineado con la gravedad, siendo el valor efectivo de ésta $\gamma \cos \theta$. Como referencia, también se ha mostrado la distribución de fuerzas axiles, correspondiente a la línea recta en trazo fino en [figura 2.5b](#), para conductos alineados con la gravedad ($\theta = 0$) y $\gamma = 30$.

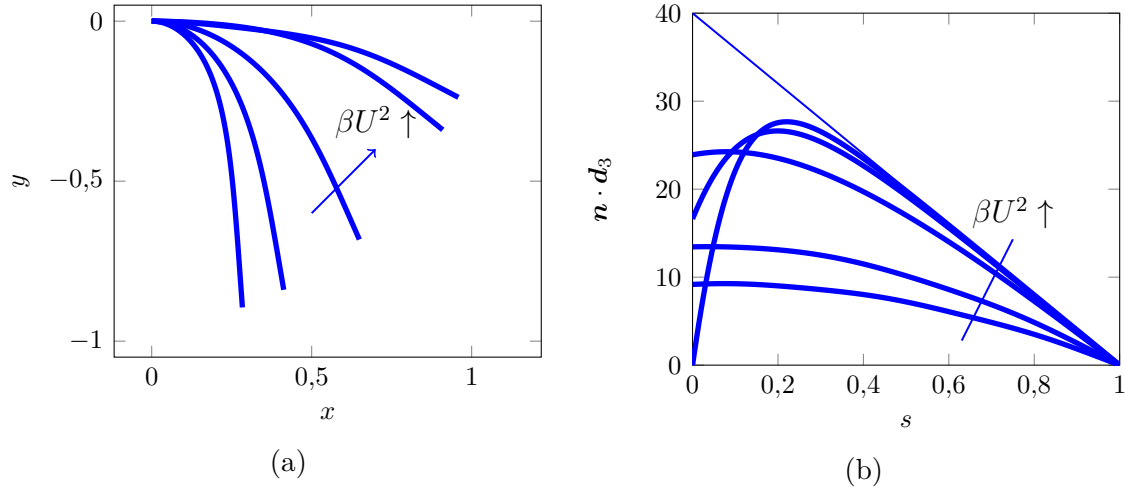


Figura 2.5 Efecto enderezador del flujo βU^2 en conductos horizontales $\theta = \pi/2$, con gravedad dada $\gamma = 30$. (a) Formas de equilibrio y (b) distribución de axiles correspondientes.

2.3. Análisis de estabilidad lineal

Con el propósito de realizar un análisis de estabilidad frente a pequeñas perturbaciones de las soluciones de equilibrio obtenidas en la sección anterior, las variables del sistema (2.17)-(2.18) se escriben de la forma

$$\mathbf{v}(s, t) = \epsilon e^{\lambda t} \mathbf{v}_1(s), \quad (2.32a)$$

$$\boldsymbol{\omega}(s, t) = \epsilon e^{\lambda t} \boldsymbol{\omega}_1(s), \quad (2.32b)$$

$$\mathbf{f}(s, t) = \mathbf{f}_0(s) + \epsilon e^{\lambda t} \mathbf{f}_1(s), \quad (2.32c)$$

$$\boldsymbol{\kappa}(s, t) = \boldsymbol{\kappa}_0(s) + \epsilon e^{\lambda t} \boldsymbol{\kappa}_1(s), \quad (2.32d)$$

$$\mathbf{g}(s, t) = \mathbf{g}_0(s) + \epsilon e^{\lambda t} \mathbf{g}_1(s). \quad (2.32e)$$

donde el subíndice 0 denota los valores de equilibrio, ϵ es un parámetro pequeño que caracteriza la magnitud de las perturbaciones, y λ es el autovalor del problema que caracteriza la dependencia temporal de la perturbación. Obsérvese que no se han incluido en las expresiones (2.32) los vectores del triedro intrínseco $\{\mathbf{d}_i(s, t)\}_{i=1,2,3}$, y estos son los definidos en cada instante por la forma (variable en el tiempo) que adopta la línea media del conducto bajo la perturbación. Como se hizo para obtener las ecuaciones generales (2.20), dichos vectores se usará como base para proyectar las ecuaciones escritas en forma vectorial. Así, en (2.32) se considera que las componentes de los vectores con subíndice 0 en la base intrínseca variable son las calculadas en la

sección anterior, mientras que las de los vectores subindicados con 1 tienen en cuenta las desviaciones de dichas componentes respecto de la base debidas a la perturbación. Si las expresiones (2.32) se introducen en el sistema (2.17)-(2.18) se obtienen, en el orden cero en ϵ , las ecuaciones para el equilibrio (2.25)-(2.26), mientras que en el orden ϵ se obtienen las ecuaciones para las perturbaciones de las variables:

$$\mathbf{v}'_1 = -\boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d}_3, \quad (2.33a)$$

$$\boldsymbol{\omega}'_1 = \lambda \boldsymbol{\kappa}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\kappa}_0, \quad (2.33b)$$

$$\mathbf{f}'_1 = -\boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{f}_1 - \boldsymbol{\kappa}_1 \times \mathbf{f}_0 - \mathbf{g}_1 + \lambda \mathbf{v}_1 + 2\beta U \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d}_3 + \beta U^2 \boldsymbol{\kappa}_1 \times \mathbf{d}_3, \quad (2.33c)$$

$$\boldsymbol{\kappa}'_1 = -\mathbf{d}_3 \times \mathbf{f}_1, \quad (2.33d)$$

$$\mathbf{g}'_1 = -\boldsymbol{\kappa}_1 \times \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{g}_1, \quad (2.33e)$$

y

$$\mathbf{v}_1(0) = \boldsymbol{\omega}_1(0) = \mathbf{f}_1(1) = \boldsymbol{\kappa}_1(1) = \mathbf{g}_1(0) = 0. \quad (2.34)$$

El sistema lineal de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno homogéneas (2.33)-(2.34) define un problema de autovalores que permite calcular λ para cada conjunto dado de valores de los parámetros del problema γ , θ , βU y βU^2 . Para la resolución del problema de autovalores (2.33)-(2.34) se utiliza el método de la sección §1.2. Una vez calculado el conjunto de autovalores $\lambda_i = \lambda_i(\beta U, \beta U^2, \gamma, \theta)$ ($i = 1, 2, \dots$) la región paramétrica de estabilidad puede también determinarse como aquella dada por la condición $Re(\lambda_i) < 0$, para todo i . Obsérvese que, en vez de con β y U por separado, se ha preferido trabajar con sus combinaciones βU^2 y βU , que son las que aparecen directamente en las ecuaciones y, además, poseen un significado físico claro. En efecto, el parámetro βU , que no aparece en las ecuaciones de las formas de equilibrio, está asociado al efecto de la fuerza de Coriolis que, como se verá, juega un papel estabilizador frente a perturbaciones. Por otra parte, el parámetro βU^2 mide el efecto de la fuerza de reacción experimentada por el conducto si el flujo de cantidad de movimiento a través de la sección de salida posee un dirección distinta que la que tiene en la entrada; esta fuerza tiende a enderezar la forma de equilibrio del conducto y, como se verá en lo que sigue, las perturbaciones de la línea media del conducto se amplifican si el valor de βU^2 excede un cierto umbral dando lugar al fenómeno conocido como flameo.

A continuación, se considerarán primero en §2.3.1 los casos correspondientes a gravedad alineada y contraalineada con el empotramiento, $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, respectivamente. Aunque estos casos han sido previamente estudiados en la literatura [5], los resultados obtenidos servirá tanto para comprobar la validez del esquema numérico utilizado como

de referencia para interpretar los resultados del análisis de conductos desalineados ($0 < \theta < \pi$) que se llevará a cabo en §2.3.2.

2.3.1. Conductos alineados y contraalineados con la gravedad

En el análisis de estabilidad de conductos alineados ($\theta = 0$) o contraalineados ($\theta = \pi$) con la gravedad llevado a cabo en esta sección, las formas de equilibrio de los mismos se suponen rectas dado que no se consideran en este trabajo formas de equilibrio posterior al pandeo que puede ocurrir para el caso $\theta = \pi$. Además, primero se ha considerado para estos conductos únicamente el efecto del flujo ($\gamma = 0$) para, posteriormente, incluir también el efecto de la gravedad.

En la [figura 2.6](#) se han representado diagramas de Argand para varios casos típicos de conductos rectos en ausencia de gravedad, y, como referencia, se han marcado en ellos con (□) los puntos correspondientes a parejas de autovalores de un conducto empotrado-libre en ausencia tanto de gravedad como de flujo, es decir, de una viga. La [figura 2.6a](#) muestra el diagrama de Argand obtenido para valores crecientes de βU y un valor dado de βU^2 , y se observa cómo todos los autovalores se mueven hacia la parte estable del plano, $Re(\lambda) < 0$, debido al efecto estabilizador de la fuerza de Coriolis. En la [figura 2.6b](#) se muestra el efecto de incrementar βU^2 para un valor de βU nulo (o, si se prefiere, muy pequeño, $\beta U \rightarrow 0^+$); se observa en este caso cómo dos parejas de autovalores imaginarios puros coalescen dando lugar a dos parejas complejas conjugadas, una que se mueve hacia el semiplano $Re(\lambda) < 0$ y otra hacia el $Re(\lambda) > 0$, dando lugar a la situación de flameo análoga a la que se presenta en el problema de la carga seguidora [10]. Finalmente, en la [figura 2.6c](#) se muestra el efecto de aumentar simultáneamente ambos, βU y βU^2 , para un conducto con $\beta = 0,2$; nótese cómo para valores pequeños de U el efecto de Coriolis (βU) domina y tiende a estabilizar el sistema, mientras que para valores mayores de U el efecto de βU^2 se impone al de Coriolis y mueve algunos autovalores al semiplano inestable $Re(\lambda) > 0$.

En la [figura 2.7](#) se representan diversas características de la influencia de la gravedad sobre la estabilidad de conductos rectos. En [figura 2.7a](#) se representan en el plano $\beta U^2 - \beta U$ las curvas correspondientes a las condiciones de estabilidad marginal, $Re(\lambda) = 0$, para conductos sin gravedad y para conductos bajo la acción de la gravedad (con $\gamma = 30$) alineados o desalineados con la misma; las formas de equilibrio con valores de βU y βU^2 correspondientes a puntos situados a la derecha (izquierda) de la curva de estabilidad marginal son inestables (estables). También, obsérvese que en el plano $\beta U^2 - \beta U$, solamente tiene sentido físico la región definida por $\beta U \leq \sqrt{\beta U^2}$, correspondiente a valores $\beta \leq 1$. Nótese que si $\beta U \rightarrow 0$, como ocurre, por ejemplo, si la masa del

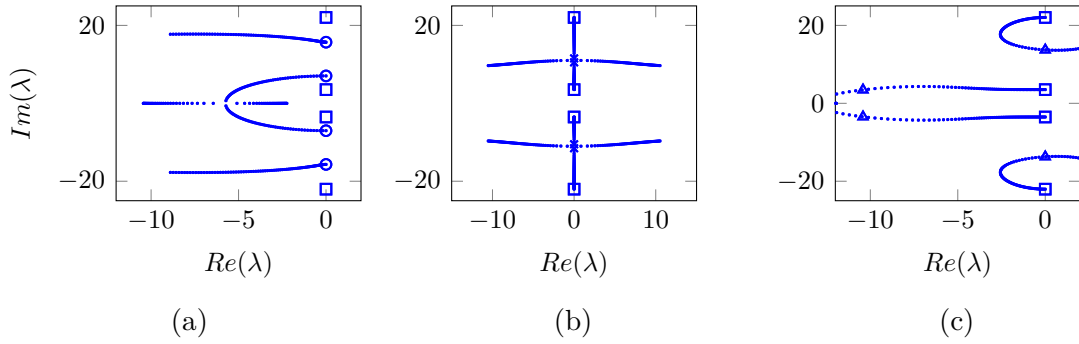


Figura 2.6 Diagrama de Argand para gravedad despreciable $\gamma = 0$. Los símbolos corresponden a autovalores para $\beta U = \beta U^2 = 0$ (\square), $\beta U = 0$ y $\beta U^2 = 16$ (\circ), $\beta U = 0$ y $\beta U^2 = 20$ (\times), y $\beta U = 2,5$ y $\beta U^2 = 31,25$ (\triangle). (a) $0 < \beta U < 4$ y $\beta U^2 = 16$, (b) $\beta U = 0$ y $0 < \beta U^2 < 40$ y (c) $\beta = 0,2$ y $0 < U < 15$

conducto es pequeña frente a la del conducto, es necesario en todos los casos un valor umbral de βU^2 para que las fuerzas de reacción debidas al flujo superen los efectos de la rigidez del conducto y se produzca el flameo del sistema. Además, dicho valor umbral es menor para conductos contralineados, debido al efecto estabilizador de las fuerzas axiales de compresión, mientras que para los conductos alineados es mayor debido al efecto estabilizador de las fuerzas axiales de tracción. Obsérvese también que, en todos los casos, los valores de βU^2 necesarios para desestabilizar el sistema aumentan al hacerlo βU . En la figura 2.6b se muestra la frecuencia en condiciones de estabilidad marginal del primer modo que se hace inestable, y se observa que dicha frecuencia aumenta con βU^2 debido al efecto enderezador que sobre el conducto ejerce la reacción del fluido.

Finalmente, la validez de los resultados obtenidos con el procedimiento numérico implementado aquí se ha confirmado en la figura 2.8, donde pueden compararse, para los mismos valores de γ , las curvas de estabilidad marginal con las obtenidas aquí con las obtenidas por Paidoussis[5] mediante un procedimiento diferente.

2.3.2. Conductos desalineados con la gravedad

Si el conducto no está alineado con la gravedad en el extremo empotrado ($0 < \theta < \pi$), la solución de equilibrio no es recta y depende, como se vió en §2.2, de los parámetros γ , θ y βU^2 . En figura 2.9 se han representado diversas características de la estabilidad del conducto con $\beta = 0,2$ y para el caso de máximo desalineamiento $\theta = \pi/2$. El diagrama de Argand de figura 2.9a se ha obtenido incrementando U desde $U = 0$ y muestra que, dado que la solución de equilibrio está contenida en el plano determinado por $\mathbf{d}_3(0)$ y \mathbf{g} , aparecen dos tipos de modos diferentes: los que están contenidos en dicho

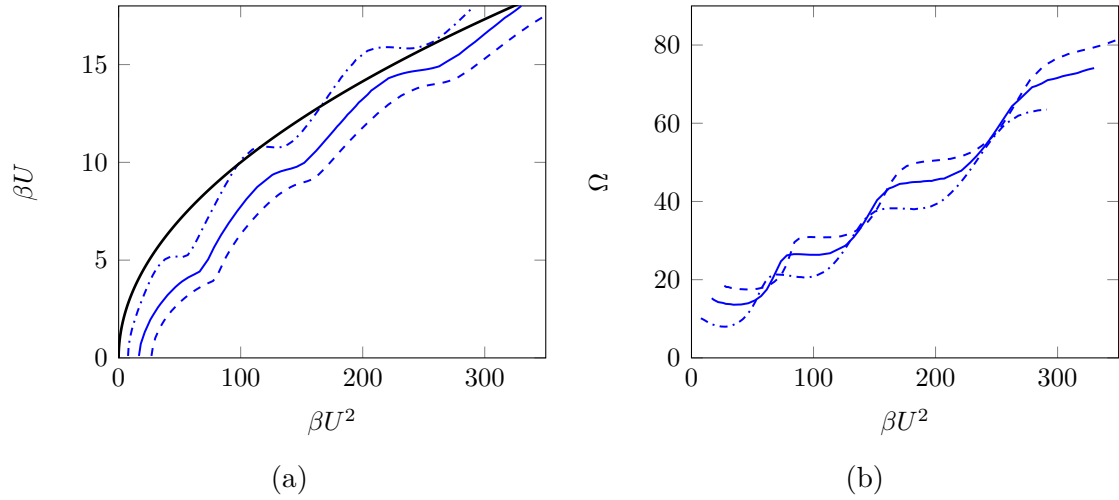


Figura 2.7 Estabilidad de conductos (contra)alineados $\theta = 0$ con forma de equilibrio recto $\kappa(s) = 0$. Curva de límite físico $\beta = 1$ (—). $\gamma \cos \theta = -30$ (-·-·-), $\gamma \cos \theta = 0$ (—) y $\gamma \cos \theta = 30$ (- - -). (a) Diagrama de estabilidad y (b) parte imaginaria del autovalor crítico $\lambda = \pm i\Omega$.

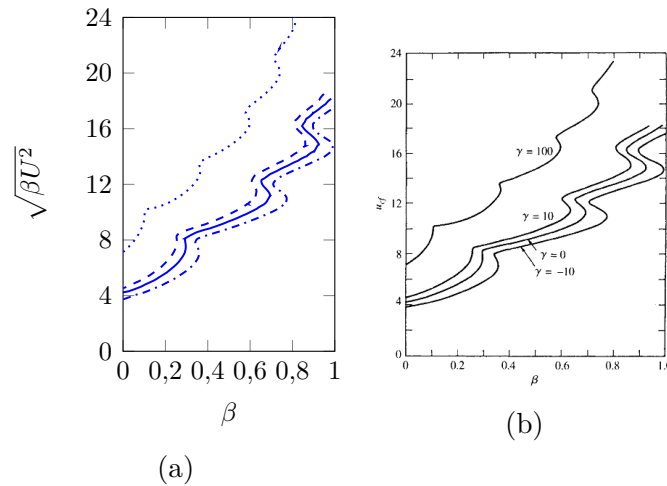


Figura 2.8 Comparación en el plano β - $\beta^{1/2}U$ y mismos valores de gravedad de (a) nuestras curvas críticas con (b) aquellas dadas en [5]. La cantidad u_{cf} usada por [5] es igual que nuestra $\beta^{1/2}U$. Valores de gravedad: $\gamma = -10$ (-·-·-), $\gamma = 0$ (—), $\gamma = 10$ (- - -) y $\gamma = 100$ (·····).

plano y aquellos fuera del plano. Como se observa en la [figura 2.9a](#), los modos fuera del plano poseen frecuencias de vibración mayores que los contenidos en el plano (en el caso sin flujo) y, además, se hacen inestables con menores valores de U . Este hecho es contrario a lo que ocurre en los casos de vigas desalineadas con la gravedad sometidas a un flujo externo [8], donde se observa que los modos fuera de plano son estables.

Por tanto, parece que, en el caso de flujo interno, la curvatura del conducto juega un papel estabilizador para los modos dentro del plano de la forma de equilibrio. Además, obsérvese que para valores grandes de βU^2 ambos tipos de modos tienden a poseer los mismos autovalores debido a que la forma de equilibrio tiende a enderezarse (figura 2.5a) haciendo que el plano de la solución de equilibrio pierda su papel distinguido. Este hecho se hace patente en el diagrama de estabilidad de figura 2.9b, donde se observa que la curva de estabilidad marginal del problema restringido al plano tiende a la del problema completo tridimensional para valores grandes de βU^2 .

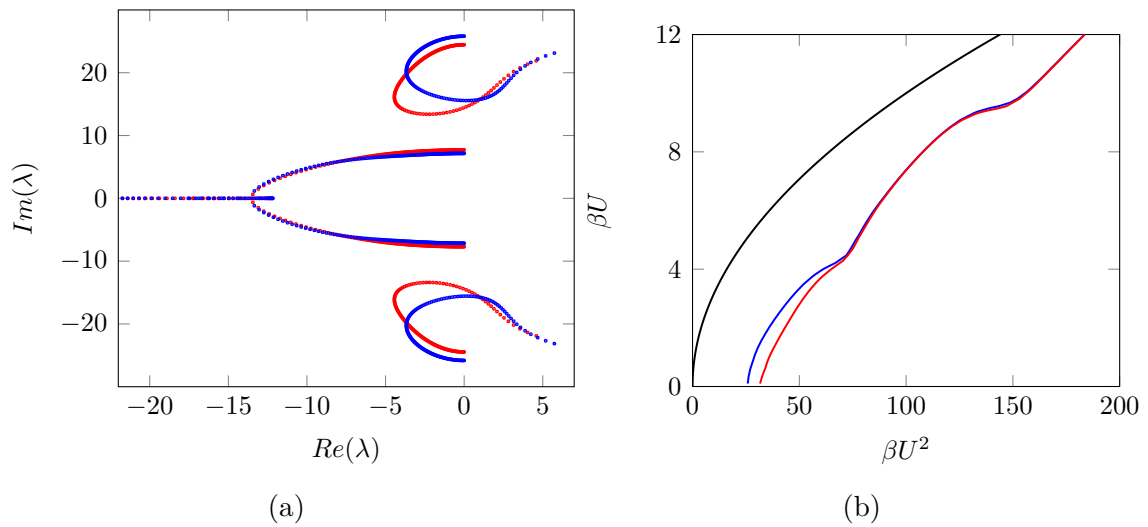


Figura 2.9 Estabilidad de modos dentro del plano (—) o fuera de plano (—) de un conducto con gravedad $\gamma = 30$ y $\theta = \pi/2$. (a) Diagrama de Argand para valores fijos de $\beta = 0,2$ y U crecientes y (b) diagrama de estabilidad.

Finalmente, la figura 2.10 muestra que, independientemente del valor del ángulo de desalineamiento, θ , la curva de estabilidad marginal presenta comportamientos límites tanto para valores grandes como pequeños de βU^2 . De hecho, para valores pequeños el efecto alineador de la gravedad domina y la curva de estabilidad tiende a la de un conducto alineado con la gravedad ($\theta = 0$) con el mismo valor de γ , mientras que para valores grandes el conducto se endereza y, por tanto, la estabilidad se asemeja a la de un conducto recto también alineado ($\theta = 0$) con una gravedad efectiva de valor $\gamma \cos \theta$.

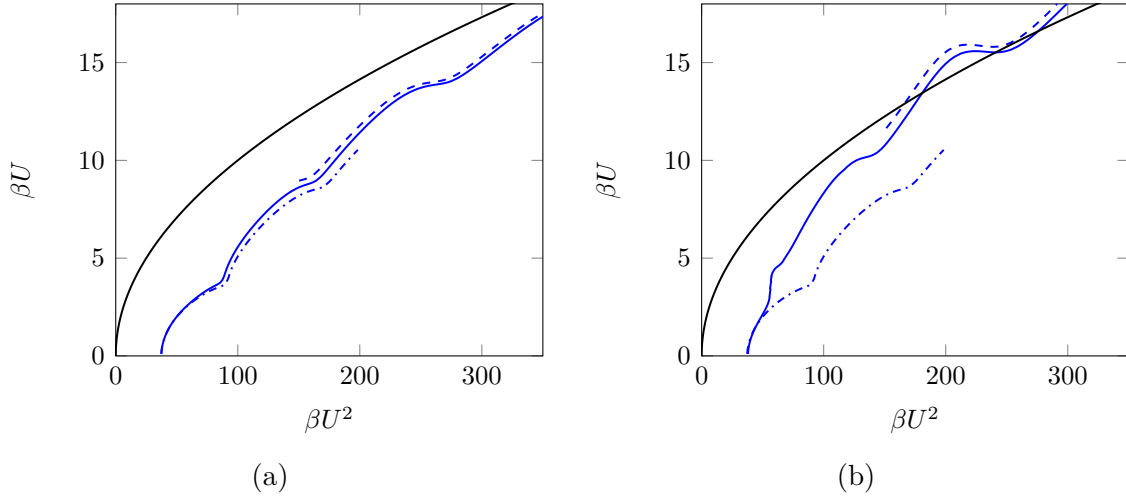


Figura 2.10 Diagramas de estabilidad de conductos desalineados con la gravedad, $\gamma = 60$. Estabilidad marginal para $\gamma = 60$ y $\theta = \theta^\circ$ (—), para $\gamma = 60$ y $\theta = 0$ (---) y para $\gamma = 60 \cos \theta^\circ$ y $\theta = 0$ (-.-.). (a) $\theta^\circ = \pi/3$ y (b) $\theta^\circ = 2\pi/3$.

2.4. Dinámica no lineal: regímenes transitorios y órbitas periódicas

Para valores de los parámetros localizados en las zona inestable en los diagramas de estabilidad, el sistema experimenta un transitorio no lineal que puede evolucionar a órbitas periódicas o incluso caóticas si el valor del caudal adimensional U es suficientemente grande. La evolución no lineal, se obtiene de integrar en el tiempo las ecuaciones (2.17)-(2.18) usando los esquemas numéricos dados en §1.2.

La figura 2.11 muestra la evolución temporal de las componentes transversales de la velocidad del extremo libre, $v_1(1, t)$ y $v_2(1, t)$, en el caso de gravedad despreciable. Se observa que, dependiendo de los valores de β y U , para tiempos grandes el sistema puede moverse en órbitas periódicas estables, ya sean circulares como las de la figura 2.11a, o contenidas en un plano de orientación arbitraria (figura 2.11b,c). Tanto la orientación de las órbitas planas como el sentido de rotación y la fase de las órbitas circulares dependen de las condiciones iniciales como se observa en las figuras 2.11a,b,c. Además, para valores suficientemente grandes de U se pueden encontrar órbitas de periodos múltiples (figura 2.11d), diferentes tipos de atractores (figura 2.11e) y comportamiento caóticos completamente desarrollados figura 2.11f. Naturalmente, en los casos de comportamiento caótico se encuentra una extraordinaria sensibilidad de las órbitas frente a las condiciones iniciales.

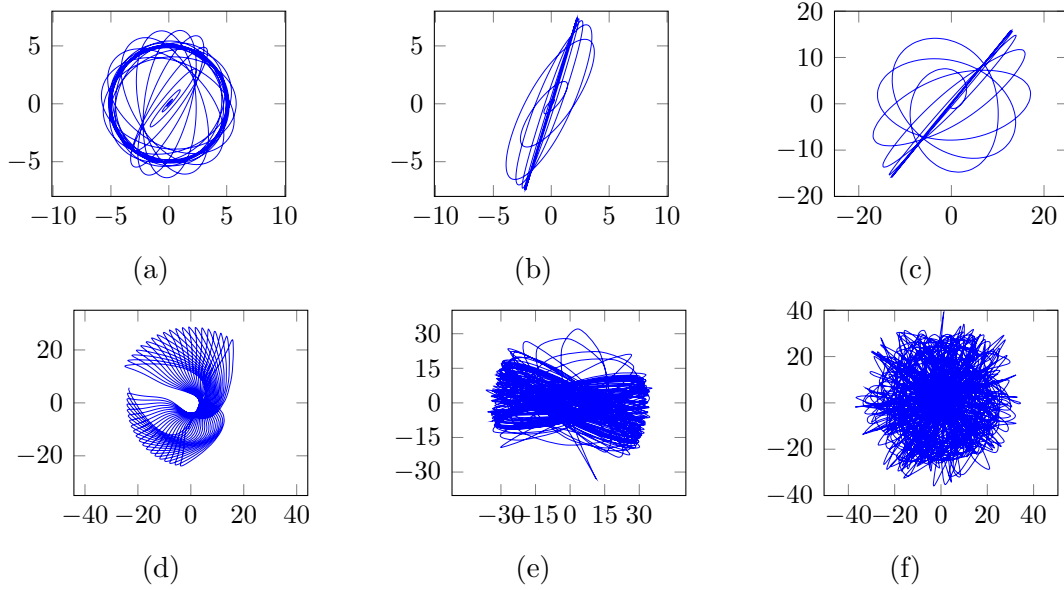


Figura 2.11 Velocidades transversales del extremo libre durante un transitorio de conductos con gravedad despreciable $\gamma = 0$. Diferentes colores corresponden a diferentes condiciones iniciales. Se muestran comportamientos típicos como (a) órbita periódicas circular para $\beta U = 3,2$ y $\beta U^2 = 51,2$, (b) órbitas periódicas planas para $\beta U = 5,6$ y $\beta U^2 = 89,6$, (c) órbitas periódicas planas para $\beta U = 12,25$ y $\beta U^2 = 428,75$, (d) órbita periódicas múltiples para $\beta U = 2$ y $\beta U^2 = 150$, (e) comportamiento caótico con atractor para $\beta U = 11$ y $\beta U^2 = 605$ y (f) comportamiento caótico para $\beta U = 2$ y $\beta U^2 = 200$.

2.4.1. Órbitas periódicas circulares en conductos alineados con la gravedad y su estabilidad lineal

A continuación se expondrá un método para el cálculo directo de las órbitas circulares, tales como la de la [figura 2.11a](#), en el caso de un conducto alineado con la gravedad, o en ausencia de la misma, para el que no se está interesado en calcular el transitorio inicial. Para ello, obsérvese que, si Ω denota la frecuencia (desconocida a priori) de giro del sistema alrededor del eje \mathbf{a}_3 y si las variables en la órbita circular se denotan por $\mathbf{v}^\circ(s, t)$, $\boldsymbol{\omega}^\circ(s, t)$, $\mathbf{f}^\circ(s, t)$, $\boldsymbol{\kappa}^\circ(s, t)$ y $\mathbf{g}^\circ(s, t)$, para cualquiera de dichas variables, $\mathbf{b}^\circ(s, t)$, debe cumplirse que

$$\partial_t \mathbf{b}^\circ(s, t) = \Omega \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}^\circ(s, t). \quad (2.35)$$

La ecuación (2.35) expresa que la derivada temporal del vector $\mathbf{b}^\circ(s, t)$ es la correspondiente a un giro del mismo alrededor del eje \mathbf{a}_3 con velocidad angular Ω .

Para calcular las variables de la órbita periódica se resolverá el sistema de ecuaciones (2.17)-(2.18) haciendo uso de la condición (2.35). Sin embargo, y puesto que, como se ha venido haciendo a lo largo de este capítulo, dicha resolución se llevará a cabo proyectando las ecuaciones resultantes en la base intrínseca, es conveniente escribir (2.35) en una forma alternativa, aunque equivalente, en la que no aparezca la base $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$. Para ello, obsérvese que, si se hace uso de (2.35) en la ecuación de compatibilidad (2.5), se tiene :

$$\partial_s(\boldsymbol{\omega}^\circ - \Omega \mathbf{a}_3) = \boldsymbol{\kappa}^\circ \times (\boldsymbol{\omega}^\circ - \Omega \mathbf{a}_3). \quad (2.36)$$

De acuerdo con (2.15), la ecuación (2.36) implica que la derivada intrínseca del vector $\boldsymbol{\omega}^\circ - \Omega \mathbf{a}_3$ es nula y, por tanto, dicho vector puede escribirse como $\boldsymbol{\omega}^\circ - \Omega \mathbf{a}_3 = c_1 \mathbf{d}_1^\circ(s, t) + c_2 \mathbf{d}_2^\circ(s, t) + c_3 \mathbf{d}_3^\circ(s, t)$, siendo las componentes c_1, c_2, c_3 de dicho vector con respecto a la base intrínseca independientes de s . Puesto que el conducto está empotrado en $s = 0$, donde $\boldsymbol{\omega}^\circ(s, t) = 0$, se tiene que $-\Omega \mathbf{a}_3 = \sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{d}_i^\circ(s, t)$ y, por tanto,

$$\boldsymbol{\omega}^\circ(s, t) = \Omega[\mathbf{a}_3 - \mathbf{d}_3^\circ(s, t)]. \quad (2.37)$$

Si ahora se sustituye (2.16) y (2.37) en (2.35) se obtiene :

$$\dot{\mathbf{b}}^\circ(s, t) = \Omega \mathbf{d}_3(s, t) \times \mathbf{b}^\circ(s, t), \quad (2.38)$$

que es la expresión buscada equivalente a (2.35).

A continuación se reescribirán las ecuaciones y condiciones de contorno (2.17)-(2.18) haciendo uso de la expresión (2.38). Para ello, se sustituye (2.38) en (2.17)-(2.18) obteniéndose el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$0 = \mathbf{v}^{\circ'} + \boldsymbol{\kappa}^\circ \times \mathbf{v}^\circ - \boldsymbol{\omega}^\circ \times \mathbf{d}_3^\circ, \quad (2.39a)$$

$$0 = \boldsymbol{\omega}^{\circ'} - \Omega \mathbf{d}_3^\circ + \boldsymbol{\omega}^\circ \times \boldsymbol{\kappa}^\circ, \quad (2.39b)$$

$$0 = \mathbf{f}^{\circ'} + \boldsymbol{\kappa}^\circ \times \mathbf{f}^\circ - (\Omega \mathbf{d}_3^\circ + \boldsymbol{\omega}^\circ) \times \mathbf{v}^\circ - 2\beta U \boldsymbol{\omega}^\circ \times \mathbf{d}_3^\circ - \beta U^2 \boldsymbol{\kappa}^\circ \times \mathbf{d}_3^\circ + \mathbf{g}^\circ, \quad (2.39c)$$

$$0 = \boldsymbol{\kappa}^{\circ'} + \mathbf{d}_3 \times \mathbf{f}^\circ, \quad (2.39d)$$

$$0 = \mathbf{g}^{\circ'} + \boldsymbol{\kappa}^\circ \times \mathbf{g}^\circ, \quad (2.39e)$$

junto con las condiciones de contorno

$$\mathbf{v}^\circ(0, t) = \boldsymbol{\omega}^\circ(0, t) = \mathbf{f}^\circ(1, t) = \boldsymbol{\kappa}^\circ(1, t) = \mathbf{g}^\circ(0, t) - \gamma \mathbf{a}_3 = 0. \quad (2.40)$$

Obsérvese que, dado que (2.39)-(2.40) deben cumplirse en todo t y en ellas no intervienen derivadas temporales, dichas ecuaciones pueden resolverse en un instante inicial para obtener los valores de las variables, y usar dichos valores como condiciones iniciales para, mediante integración de (2.38), hallar su valor en cualquier otro $t > 0$. Sin embargo, es necesario indicar que antes de proceder a la integración de (2.39)-(2.40), y puesto que la frecuencia Ω del movimiento periódico es desconocida a priori, se debe imponer una condición adicional para su determinación. Esta condición proviene del hecho de que, dado que la órbita es periódica, se puede elegir sin pérdida de generalidad el instante inicial como aquel en que la velocidad del extremo libre es paralela al vector $\mathbf{d}_1(1, 0)$, o a cualquier otra dirección en el plano normal a $\mathbf{d}_3(1, 0)$, es decir,

$$\mathbf{d}_2(1, 0) \cdot \mathbf{v}^\circ(1, 0) = 0. \quad (2.41)$$

La ecuación (2.41) puede interpretarse como una condición para la fase del movimiento periódico descrito por (2.38).

No obstante, es necesario comprobar que (2.35), o análogamente (2.38), es efectivamente, una solución temporal del problema (2.39)-(2.40). Para ello, es conveniente tener en cuenta que como se vió anteriormente, las derivadas intrínsecas conmutan

$$(\mathbf{b}^\circ)' = (\dot{\mathbf{b}}^\circ)' = (\Omega \mathbf{d}_3 \times \mathbf{b}^\circ)' = \Omega \mathbf{d}_3 \times (\mathbf{b}^\circ)'. \quad (2.42)$$

y si además, un vector \mathbf{c}° también satisface (2.38), entonces también la satisface el producto vectorial $\mathbf{b}^\circ \times \mathbf{c}^\circ$

$$(\mathbf{b}^\circ \times \mathbf{c}^\circ)' = (\Omega \mathbf{d}_3^\circ \times \mathbf{b}^\circ) \times \mathbf{c}^\circ + \mathbf{b}^\circ \times (\Omega \mathbf{d}_3^\circ \times \mathbf{c}^\circ) = \Omega \mathbf{d}_3^\circ \times (\mathbf{b}^\circ + \mathbf{c}^\circ), \quad (2.43)$$

donde se ha usado la identidad de Jacobi del producto triple de vectores. Si se deriva intrínsecamente respecto del tiempo las ecuaciones (2.39)-(2.40), se obtiene:

$$0 = \Omega \mathbf{d}_3^\circ \times (\mathbf{v}^{\circ'} + \boldsymbol{\kappa}^\circ \times \mathbf{v}^\circ - \boldsymbol{\omega}^\circ \times \mathbf{d}_3^\circ), \quad (2.44a)$$

$$0 = \Omega \mathbf{d}_3^\circ \times [\boldsymbol{\omega}^{\circ'} - (\Omega \mathbf{d}_3^\circ + \boldsymbol{\omega}^\circ) \times \boldsymbol{\kappa}^\circ], \quad (2.44b)$$

$$0 = \Omega \mathbf{d}_3^\circ \times [\mathbf{f}^{\circ'} + \boldsymbol{\kappa}^\circ \times \mathbf{f}^\circ - (\Omega \mathbf{d}_3^\circ + \boldsymbol{\omega}^\circ) \times \mathbf{v}^\circ - 2\beta U \boldsymbol{\omega}^\circ \times \mathbf{d}_3^\circ - \beta U^2 \boldsymbol{\kappa}^\circ \times \mathbf{d}_3^\circ + \mathbf{g}^\circ], \quad (2.44c)$$

$$0 = \Omega \mathbf{d}_3^\circ \times (\boldsymbol{\kappa}^{\circ'} + \mathbf{d}_3 \times \mathbf{f}^\circ), \quad (2.44d)$$

$$0 = \Omega \mathbf{d}_3^\circ \times (\mathbf{g}^{\circ'} + \boldsymbol{\kappa}^\circ \times \mathbf{g}^\circ), \quad (2.44e)$$

y

$$\begin{aligned}\Omega \mathbf{d}_3^\circ \times \mathbf{v}^\circ(0, t) &= \Omega \mathbf{d}_3^\circ \times \boldsymbol{\omega}^\circ(0, t) = \Omega \mathbf{d}_3^\circ \times \mathbf{f}^\circ(1, t) = \\ \Omega \mathbf{d}_3^\circ \times \boldsymbol{\kappa}^\circ(1, t) &= \Omega \mathbf{d}_3^\circ \times [\mathbf{g}^\circ(0, t) - \gamma \mathbf{a}_3] = 0\end{aligned}\quad (2.45)$$

que dado que son proporcionales a ellas mismas, queda demostrado que (2.35) es válido como cabía esperar.

El problema de valores de contorno (2.39)-(2.41) ha sido resuelto con el esquema numérico dado en §1.2 y haciendo uso de un método de continuación a partir de las órbitas periódicas del cálculo del análisis transitorio de las ecuaciones (2.17)-(2.18). En la [figura 2.12](#) se ha representado una órbita periódica circular típica para un conducto empotrado-libre en ausencia de gravedad ($\gamma = 0$), y se observa el buen acuerdo que existe entre la solución obtenida mediante la integración en el tiempo de las ecuaciones y la obtenida a partir de (2.38).

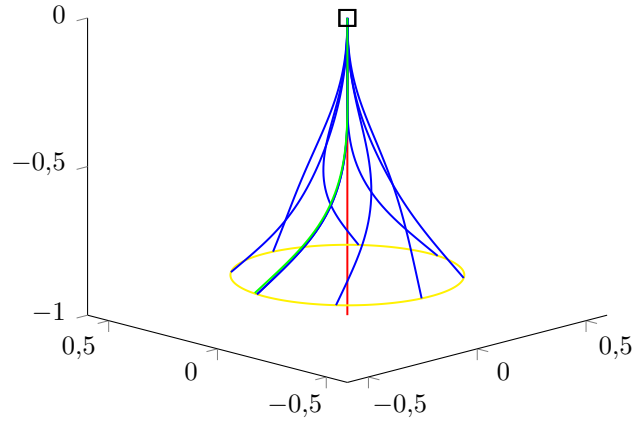


Figura 2.12 Órbitas periódicas de conductos en voladizos empotrados en \square en ausencia de gravedad $\gamma = 0$ y flujo tal que $\beta U = 3$ y $\beta U^2 = 45$. Formas de equilibrio (—), trayectoria del extremo libre (—), algunos instantes de las órbitas periódicas por integración en el tiempo del sistema (2.17)-(2.18) (—) y órbita calculada con la dependencia temporal dada en (2.38) (—).

A continuación, se analizará la estabilidad de las órbitas circulares obtenidas. Para ello considérese una órbita circular, de frecuencia Ω_0 , que es solución de (2.39)-(2.41). Si $\mathbf{b}_0^\circ(s, t)$ denota cualesquiera de las variables en dicho sistema, su valor en la órbita perturbada se escribirá como

$$\mathbf{b}(s, t) = \mathbf{b}_0^\circ(s, t) + \varepsilon e^{\lambda t} \mathbf{b}_1(s, t), \quad (2.46)$$

donde el parámetro $\epsilon \ll 1$ es una medida de la amplitud de la perturbación y λ , que es un autovalor del problema, representa la tasa de crecimiento de la misma. Se supondrá que la función $\mathbf{b}_1(s, t)$ es tal que, si la amplitud de la perturbación no varía con el tiempo, es decir, si $\lambda = 0$, la órbita perturbada sigue siendo circular y de frecuencia $\Omega_0 + \epsilon\Omega_1$, donde la cantidad Ω_1 , que debe calcularse como parte del problema, mide la desviación respecto a la frecuencia de la órbita sin perturbar. En este caso, también se cumple (2.38) para la órbita perturbada, es decir (omitiendo por abreviar los argumentos s y t), $\dot{\mathbf{b}}_0^\circ + \epsilon\dot{\mathbf{b}}_1 = (\Omega_0 + \epsilon\Omega_1)\mathbf{d}_3 \times (\mathbf{b}_0^\circ + \epsilon\mathbf{b}_1)$, e igualando términos de orden cero y orden ϵ se obtiene, respectivamente :

$$\dot{\mathbf{b}}_0^\circ = \Omega_0\mathbf{d}_3 \times \mathbf{b}_0^\circ \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{b}}_1 = \Omega_1\mathbf{d}_3 \times \mathbf{b}_0^\circ + \Omega_0\mathbf{d}_3 \times \mathbf{b}_1. \quad (2.47)$$

La sustitución de (2.46)-(2.47) en (2.17)-(2.18) proporciona las ecuaciones (2.39)-(2.40) para el orden cero en ϵ , mientras que para el orden uno se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$0 = \mathbf{v}'_1 + \boldsymbol{\kappa}_0^\circ \times \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\kappa}_1 \times \mathbf{v}_0^\circ - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d}_3, \quad (2.48a)$$

$$0 = \boldsymbol{\omega}'_1 + \boldsymbol{\kappa}_0^\circ \times (\Omega_1\mathbf{d}_3 + \boldsymbol{\omega}_1) + \boldsymbol{\kappa}_1 \times (\Omega_0\mathbf{d}_3 + \boldsymbol{\omega}_0^\circ) - \lambda\boldsymbol{\kappa}_1, \quad (2.48b)$$

$$0 = \mathbf{f}'_1 + \boldsymbol{\kappa}_0^\circ \times \mathbf{f}_1 + \boldsymbol{\kappa}_1 \times \mathbf{f}_0^\circ - \lambda\mathbf{v}_1 - (\Omega_0\mathbf{d}_3 + \boldsymbol{\omega}_0^\circ) \times \mathbf{v}_1 \\ - (\Omega_1\mathbf{d}_3 + \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{v}_0^\circ - 2\beta U\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d}_3 - \beta U^2\boldsymbol{\kappa}_1 \times \mathbf{d}_3 + \mathbf{g}_1, \quad (2.48c)$$

$$0 = \boldsymbol{\kappa}'_1 + \mathbf{d}_3 \times \mathbf{f}_1, \quad (2.48d)$$

$$0 = \mathbf{g}'_1 + \boldsymbol{\kappa}_0^\circ \times \mathbf{g}_1 + \boldsymbol{\kappa}_1 \times \mathbf{g}_0^\circ, \quad (2.48e)$$

sujeto a las condiciones de contorno

$$\mathbf{v}_1(0, t) = \boldsymbol{\omega}_1(0, t) = \mathbf{f}_1(1, t) = \boldsymbol{\kappa}_1(1, t) = \mathbf{g}_1(0, t) = 0. \quad (2.49)$$

Análoga a la condición (2.41) para Ω , la condición de contorno para Ω_1 es:

$$\mathbf{d}_2(1, 0) \cdot \mathbf{v}_p(1, 0) = 0. \quad (2.50)$$

De nuevo, las ecuaciones (2.48)-(2.50) se han proyectado en la base intrínseca, $\{\mathbf{d}_i^\circ(s, t)\}_{i=1,2,3}$, y el problema de autovalores lineales se ha resuelto con los esquemas numéricos de §1.2. La [figura 2.13](#) muestra las curvas de estabilidad marginal para las órbitas periódicas circulares junto con las de los dos primeros modos de flameo (bifurcaciones de Hopf) de las soluciones de equilibrio. Las órbitas periódicas circulares son estables dentro de las regiones aisladas (islas) de la [figura 2.13](#) y, como se observa

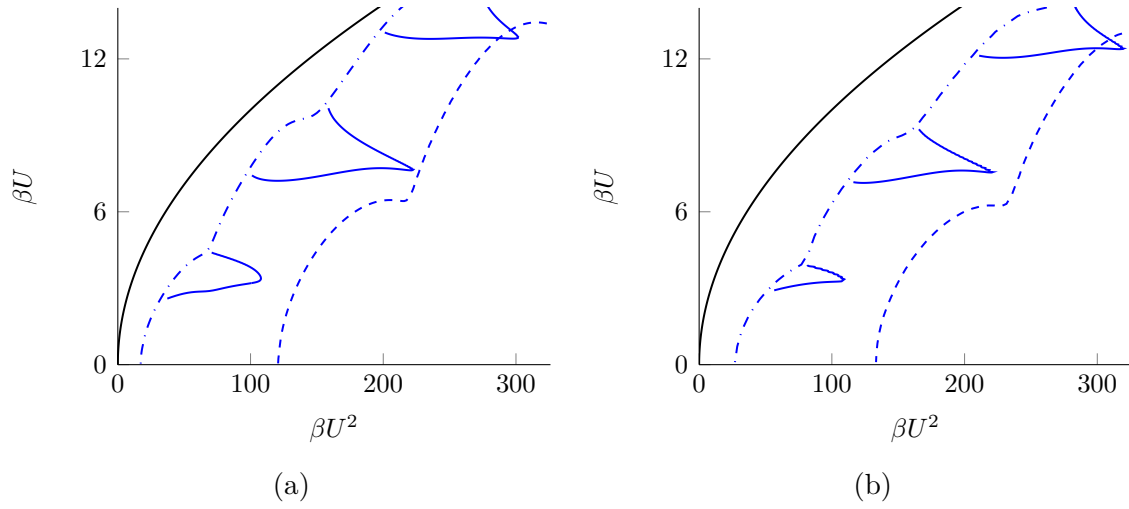


Figura 2.13 Inestabilidad de flameo de órbitas periódicas circulares de conductos alineados (—) y valores de gravedad (a) $\gamma = 0$ y (b) $\gamma = 30$. Curvas críticas del flameo principal (·-·-) y para el secundario (- - -)

si se comparan la [figura 2.13a](#) y la [figura 2.13b](#), dichas islas se reducen de tamaño al aumentar la gravedad. Fuera de estas regiones, las órbitas periódicas circulares pierden la estabilidad por una bifurcación de Hopf y se ha obtenido mediante integración en el tiempo del sistema (2.17)-(2.18) que evolucionan hacia órbitas periódicas planas como las de la [figura 2.11b,c](#), como ha sido reportado previamente por [3] para un problema similar. Finalmente, para valores de βU y βU^2 dentro de la región de la derecha a la curva correspondiente a la del segundo modo de flameo (segunda bifurcación de Hopf) de la solución de equilibrio, puede aparecer caos manifestándose de diversas formas como se muestra en [figura 2.11d,e,f](#).

2.4.2. Órbitas en conductos no alineados con la gravedad

Si el conducto no está alineado con la gravedad, la evolución temporal de las variables no satisface (2.35) y, por tanto, el procedimiento de cálculo de órbitas periódicas de la sección anterior no es válido. Esto puede comprobarse, por ejemplo, con el vector gravedad $\mathbf{g}(s, t)$, que es constante en el tiempo (e independiente de s) para todos los puntos del conducto y, sin embargo, (2.35) proporciona que $\partial_t \mathbf{g} = \Omega \mathbf{a}_3 \times \mathbf{g} \neq 0$. Debido a esto, las órbitas, periódicas o no, para conductos desalineados con la gravedad se han calculado en esta subsección directamente, integrando en el tiempo las ecuaciones generales (2.17)-(2.18).

En la [figura 2.14](#) se presenta una órbita periódica para un conducto con máximo desalineamiento. Obsérvese cómo la gravedad deforma la órbita con respecto al caso de

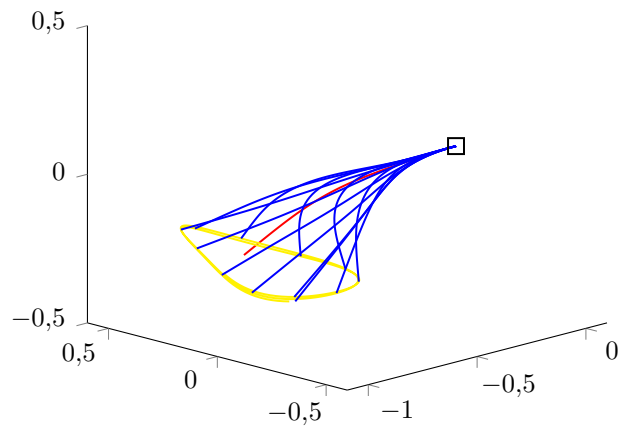


Figura 2.14 Órbitas periódicas de conductos en voladizos empotrados en \square desalineado con la gravedad para $\beta = 0,2$, $U = 18$, $\gamma = 30$ and $\theta = \pi/2$. Formas de equilibrio (—), trayectoria del extremo libre (—), algunos instantes de las órbitas periódicas por integración en el tiempo de (2.17)(2.18) (—).

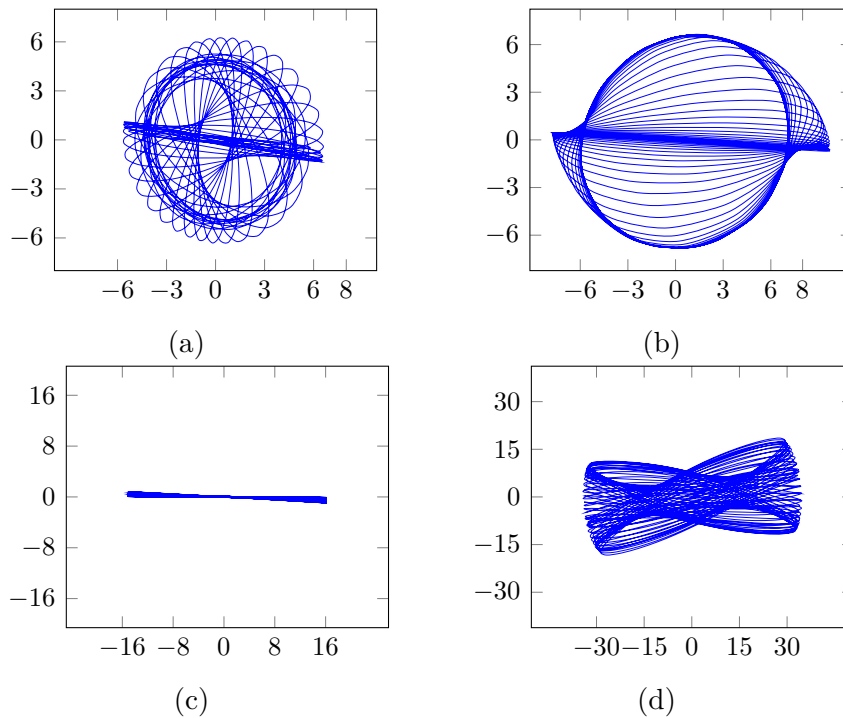


Figura 2.15 Velocidades transversales del extremo libre durante un transitorio de conductos con gravedad $\gamma = 10$, $\theta = \pi/2$, ratio de masas $\beta = 0,2$ y diferentes valores de caudal. Diferentes colores correspond a diferentes condiciones iniciales. Comportamiento típico como (a) órbita periódica circular para $U = 16$, (b) órbita periódica circular para $U = 20$, (c) órbita periódica plana para $U = 25$ y (d) atractor para $U = 55$

un conducto alineado, y cómo el extremo libre del conducto traza una curva periódica de mayor amplitud en la dirección perpendicular al plano que contiene a la forma de equilibrio. Esto se debe, según se explicó anteriormente, a que el conducto es más inestable en esta dirección.

La influencia del desalineamiento en el transitorio se muestra en [figura 2.15](#). Obsérvese ([figura 2.15a](#)) que, dependiendo de los valores del parámetro βU^2 , pueden tener lugar órbitas periódicas casi circulares en el plano $v_1(1, t) - v_2(1, t)$ que, debido a la influencia de la gravedad, se deforman ligeramente de forma asimétrica. Para valores de βU^2 tales que las órbitas circulares se hacen inestables, el conducto tiende a oscilar en un plano con una dirección que, preferentemente, es perpendicular al plano de la forma de equilibrio ([figura 2.15c](#)), según se ha reportado más arriba en la sección §2.3; esto está en contraposición con el caso de conductos alineados con la gravedad, para los que el plano de oscilación puede ser arbitrario. Finalmente, para valores suficientemente grandes de βU^2 , se obtienen comportamientos caóticos ([figura 2.15d](#)) similares a los reportados en el caso de conductos alineados ([figura 2.11](#)).

Bibliografía

- [1] Antman, S. S. (2006). Nonlinear problems of elasticity. *Springer Verlag. New York.*
- [2] Arne, W., Marheineke, N., Meister, A., and Wegener, R. (2010). Numerical analysis of cosserat rod and string models for viscous jets in rotational spinning processes. *Mathematical Models Methods Applied Science*, 20(10):1941–1965.
- [3] Copeland, G. and Moon, F. (1992). Chaotic flow-induced vibration of a flexible tube with end mass. *Fluid and Structures*, 6:705–718.
- [4] Mathew, M. T., Beauregard, A., and Goriely, A. (2010). The nonlinear dynamics of elastic tubes conveying fluid. *International Journal of Solids and Structures*, 47:161–168.
- [5] Paidoussis, M. P. (1998). Fluid-structure interactions: Slender structures and axial flow. *London: Academic Press*, 1.
- [6] Ribe, N. M. (2004). Coiling of viscous jets. *Proceedings of the Royal Society of London, A.*, 2004(5):3223–3239.
- [7] Rivero-Rodriguez, J. and Pérez-Saborid, M. (2015). Numerical investigation of the influence of gravity on flutter of cantilevered pipes conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 55:106–121.
- [8] Schouveiler, L., Eloy, C., and Le Gal, C. (2005). Flow-induced vibrations of high mass ratio flexible filaments freely hanging in a flow. *Physics of Fluids*, 17:047104.
- [Stoker] Stoker, J. Differential geometry. 1969.
- [10] Thomsen, J. J. (2003). Vibrations and stability: advance theory, analysis and tools. *Springer Verlag.*
- [11] Whittaker, E. T. (1944). A treatise on analytical dynamics of particles and rigid bodies. *New York, Dover.*

Capítulo 3

Dinámica de chorros

Der Vorteil des schlechten Gedächtnisses ist, dass man dieselben guten Dinge mehrere Male zum ersten Mal genießt.

Friedrich Nietzsche

En este capítulo se lleva a cabo un estudio de la dinámica de chorros haciendo uso de la aproximación unidireccional. Se considerarán tanto el caso axilsimétrico, en el que la línea media del chorro permanece recta, como el más general, asimétrico, en que la línea media describe una curva en el espacio. Además se tratarán tanto chorros neutros como cargados eléctricamente.

En el caso de chorros axilsimétricos, la aproximación unidireccional se ha usado ampliamente en la literatura [11], [6] tanto para chorros neutros [21], Dewynne and Wilmott [4] como para chorros cargados eléctricamente Ganán-Calvo [9], Gañán-Calvo [10], Hohman et al. [16], Higuera [14], Lopez-Herra. Así, Rubio-Rubio et al. [21] estudiaron la estabilidad lineal global de chorros bajo la acción de la gravedad con el objeto de determinar la región paramétrica en la que se produce la transición de chorro a goteo. En su análisis, emplearon las ecuaciones del modelo unidireccional modelando la curvatura exacta (axial más azimutal) de la superficie del chorro en términos del radio y de sus derivadas con respecto a la coordenada longitudinal, lo que daba lugar a expresiones muy complejas a la hora de linealizar las ecuaciones. En la sección §3.1, se formulará este problema de una manera diferente, adjuntando a las ecuaciones unidireccionales de continuidad y de cantidad de movimiento del chorro, las ecuaciones que gobiernan la geometría de la superficie en términos de la curvatura axial, el radio de curvatura azimutal y el semiángulo del cono tangente a la superficie. Como se verá, esto da lugar a un sistema de ecuaciones más sencillo de resolver tanto en el caso de buscar la solución de equilibrio como a la hora de linealizar para estudiar su

estabilidad. Además, en casos en que se desee estudiar transitorios, tales como el goteo, este procedimiento permite evitar de forma natural los problemas que introduce la singularidad que en la punta del chorro tiene la derivada longitudinal del radio. Como prueba de la validez de las ecuaciones obtenidas, se han reproducido con gran exactitud los resultados de Rubio-Rubio et al. [21] en la sección §3.1.1. También, haciendo uso de este modelo, se ha considerado en la sección §3.1.2 la evolución transitoria de un chorro cuando a través de la sección de entrada se inyecta un caudal constante, y se ha calculado el régimen de goteo que tiene lugar dependiendo de los parámetros del problema. Finalmente en la sección §3.1.3 se ha aplicado el modelo al estudio de la retracción experimentada por un dominio semi-infinito e inicialmente cónico de fluido que es una idealización del formado, por ejemplo, tras la rotura de una gota. El carácter autosemejante de este problema fue puesto de manifiesto por primera vez por Schulkes [23], quien, para el caso de una gota colgante, escaló las soluciones posteriores a la rotura con una potencial del tiempo desde la rotura obteniendo así una solución de semejanza, lo que se predice también con las ecuaciones del modelo introducido aquí. Este problema ha sido estudiado en mayor profundidad por Sierou and Lister [24].

En el caso de chorros asimétricos, cuya línea media es curva también es habitual realizar una aproximación unidimensional, bien con descripciones cartesianas de la geometría de la línea media [7, 27, 26, 25] o basadas en descripciones intrínsecas o locales de ésta Ribe [19], Arne et al. [1]. En el caso de chorros neutros, se pueden citar los trabajos Ribe [19], que la han usado para el estudio del bobinado (coiling) de chorros viscosos, y de Arne et al. [1] para el hilado de fibras procedentes de un tambor rotatorio. En el caso de chorros electrificados, cabe citar los trabajos de Hohman et al. [15, 16] y de Fridrikh et al. [8] sobre la estabilidad lineal local de chorros cargados, y de Yarin et al. [27, 26], sobre el régimen de latiguo (whipping) que, bajo ciertas condiciones, experimentan chorros generados por electrosprays. En la sección §3.1.1 se ha formulado las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un chorro cargados haciendo de la hipótesis de interacción electrostática local debida a Yarin et al. [27]. En particular, se han obtenido una aproximación unidireccional de las ecuaciones de movimiento que gobiernan la dinámica de chorros cargados cuya estabilidad lineal global frente a perturbaciones laterales es estudiada en §3.2.1, un problema de interés fundamental para la comprensión de la aparición del fenómeno de latiguo, y que, aparentemente, solo ha sido considerado hasta ahora mediante la aproximación cuasi-paralela [15]. Finalmente, en la sección §3.2.2 se han resuelto el sistema de ecuaciones no lineales completo para estudiar los regímenes transitorios y periódico correspondientes al latiguo.

3.1. Chorros axilsimétricos bajo la acción de la gravedad

En esta sección se formularán las ecuaciones que gobiernan la dinámica de chorros axilsimétricos no cargados, bajo la acción de la gravedad en la aproximación unidireccional.

La geometría de la superficie de un chorro axilsimétrico puede describirse convenientemente atendiendo al esquema de la [figura 4.9](#), en la que se muestra un chorro de longitud $L(t)$ en la coordenada axial z y cuyo radio es $r = a(z, t)$. Puesto que la

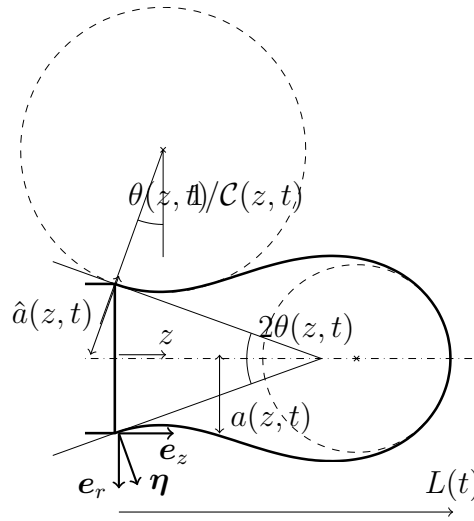


Figura 3.1 Geometry of an axisymmetric drop. Osculating circle (— —)

ecuación de la superficie puede escribirse también como $F(r, z, t) \equiv r - a(z, t) = 0$, el vector unitario normal a la misma está dado por

$$\boldsymbol{\eta}(\vartheta, z) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\mathbf{e}_r(\vartheta) - \partial_z a \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_z a)^2}}, \quad (3.1)$$

donde ϑ es el ángulo azimutal. Teniendo en cuenta $\partial \mathbf{e}_r / \partial \vartheta = \mathbf{e}_\vartheta$, la divergencia de $\boldsymbol{\eta}$ evaluada sobre los puntos de la superficie, $r = a(z)$, está dada por :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}|_{r=a, z} = \frac{1}{a} \mathbf{e}_\vartheta \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial z} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_z a)^2}} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial_z a}{\sqrt{1 + (\partial_z a)^2}} \right)', \quad (3.2)$$

que es la curvatura de la superficie; el primer sumando del último miembro de (3.2) representa la curvatura azimutal, mientras que el segundo es la curvatura axial. Debido

a que en la punta del chorro $\partial_z a \rightarrow \infty$, la expresión (3.2) posee una singularidad en $z = L$ que, aunque evitable, no es conveniente numéricamente. Por eso, en vez de truncar arbitrariamente el chorro cerca de la punta e imponer allí un condición ad hoc, como es lo usual en la literatura, se ha preferido aquí proceder de una forma más rigurosa y caracterizar la curvatura por variables diferentes a $\partial_z a$ y a $\partial_{zz} a$. Para ello, se introduce el semiángulo del cono tangente, $\theta(z, t)$, véase figura 4.9, de manera que

$$\partial_z a = \tan \theta, \quad (3.3)$$

Obsérvese que, puesto que $\cos \theta = 1/\sqrt{1 + (\partial_z a)^2}$, la curvatura axial en (3.2), que en lo que sigue se denotará por \mathcal{C} , está dada por:

$$\mathcal{C} = \partial_z(-\sin \theta). \quad (3.4)$$

Además, cerca de la punta del chorro se deduce de (3.3)-(3.4) que $a \rightarrow \cos \theta / \mathcal{C}$ ¹. Por tanto, en lugar de a , es conveniente usar el radio de curvatura azimutal $\hat{a} = a / \cos \theta$ (véase figura 4.9), cuyo valor y derivadas permanecen acotadas para $z \rightarrow L$.

Por otra parte, las ecuaciones que gobiernan la dinámica del chorro en la aproximación unidireccional han sido deducidas con profusión en la literatura [11], [6]. En este modelo se considera que los campos de velocidades y de presiones son uniformes en cada sección, estando la presión determinada por las fuerzas de tensión superficial teniendo la expresión exacta de la curvatura de la superficie, es decir, $p = \gamma(\mathcal{C} + \cos \theta / a)$. Los balances de masa y de cantidad de movimiento aplicados a cada rebanada diferencial del chorro proporcionan entonces las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento :

$$\partial_t(a^2) + \partial_z(a^2 u) = 0, \quad (3.5a)$$

$$\partial_t(a^2 u) + \partial_z(a^2 u^2) = \partial_z(3\mu a^2 \partial_z u) + \partial_z[\gamma(a \cos \theta - a^2 \mathcal{C})] + \rho g a^2, \quad (3.5b)$$

donde ρ , μ y γ son, respectivamente, la densidad, la viscosidad y el coeficiente de tensión superficial del líquido, y g es la aceleración de la gravedad. Obsérvese en (3.5b) que, puesto que el perímetro de cada sección está sometido a una tracción debida a las fuerzas de tensión superficial cuya componente axial es $2\pi\gamma a \cos \theta$, la componente axial de la fuerza resultante de presión y de tensión superficial en cada sección es $-\pi a^2 p + 2\pi\gamma a \cos \theta = \gamma\pi(a \cos \theta - a^2 \mathcal{C})$.

¹En efecto, si se aplica la regla de L'Hôpital al cociente $a/\cos \theta$ se tiene de (3.3)-(3.4) que $\lim_{z \rightarrow L} \frac{a}{\cos \theta} = -\frac{\partial_z a}{\sin \theta \partial_z \theta} = -\frac{1}{\cos \theta \partial_z \theta} = \frac{1}{\partial_z(-\sin \theta)} = \frac{1}{\mathcal{C}}$.

El conjunto de ecuaciones (3.3)-(3.4) y (3.5) constituye un sistema diferencial algebraico no lineal de cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas a , θ , \mathcal{C} y u . No obstante, para su resolución numérica es conveniente primero : a) reescribir todas las ecuaciones en términos del radio de curvatura azimutal, \hat{a} , en lugar del radio, a ; b) multiplicar la ecuación (3.4) por $2\hat{a} \cos \theta$, ya expresada en términos de \hat{a} , para eliminar el término $\tan \theta$, que es singular en la punta, y c) eliminar la derivada segunda de u con respecto de z en (3.5b) haciendo uso de las ecuaciones (3.5a) y de (3.3). Resulta entonces el sistema de ecuaciones :

$$\partial_z(\hat{a}^2 \cos^2 \theta) = 2\hat{a} \sin \theta, \quad (3.6a)$$

$$\partial_z(-\sin \theta) = \mathcal{C}, \quad (3.6b)$$

$$\partial_t(\hat{a}^2 \cos^2 \theta) + \partial_z(\hat{a}^2 \cos^2 \theta u) = 0, \quad (3.6c)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(\rho \hat{a}^2 \cos^2 \theta u + 6\mu \hat{a} \sin \theta) + \\ & \partial_z[(\rho \hat{a}^2 \cos^2 \theta u + 6\mu \hat{a} \sin \theta)u - \gamma \hat{a} \cos^2 \theta (1 - \hat{a}\mathcal{C})] = \rho g \hat{a}^2 \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.6d)$$

que se ha integrado numéricamente en los casos considerados en los siguientes apartados de esta sección sujeto a las condiciones iniciales y de contorno pertinentes a cada caso.

3.1.1. Formas de equilibrio y análisis de estabilidad global

En este apartado se han resuelto numéricamente, mediante los métodos descritos en §1.2, las ecuaciones (3.6) para el problema de la estabilidad global de chorros semiinfinitos estirados bajo la acción de la gravedad. Este problema fue considerado primero por Sauter and Buggisch [22] y, de forma más completa y general, por Rubio-Rubio et al. [21]. En particular, estos autores pusieron de manifiesto la importancia que tiene, a la hora de determinar los diagramas de estabilidad para la transición goteo-chorro, el llevar a cabo un análisis de estabilidad global en vez del clásico local, y el retener todos los términos de la curvatura en lugar de una aproximación cilíndrica, respectivamente.

El sistema de ecuaciones (3.6) se ha adimensionalizado en términos de las variables adimensionales definidas mediante el cambio de variables, análogo al dado en [21],

$$\begin{aligned} z & \rightarrow z\sqrt{\gamma/\rho g}, & \hat{a} & \rightarrow \hat{a}\sqrt{\gamma/\rho g}, & u & \rightarrow (g\gamma/\rho)^{1/4}, \\ \mathcal{C} & \rightarrow \mathcal{C}/\sqrt{\gamma/\rho g} & \text{y} & & t & \rightarrow t(\gamma/\rho g^3)^{1/4}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde las escalas para adimensionalizar variables han sido elegidas de manera que los términos de inercia, de tensión superficial y gravitatorios sean del mismo orden (3.6). Se obtiene entonces el sistema de ecuaciones adimensionales,

$$\partial_z(\hat{a}^2 \cos^2 \theta) = 2\hat{a} \sin \theta, \quad (3.8a)$$

$$\partial_z(-\sin \theta) = \mathcal{C}, \quad (3.8b)$$

$$\partial_t(\hat{a}^2 \cos^2 \theta) + \partial_z(\hat{a}^2 \cos^2 \theta u) = 0, \quad (3.8c)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(\hat{a}^2 \cos^2 \theta u + 2\Gamma \hat{a} \sin \theta) + \\ & \partial_z[\hat{a}^2 \cos^2 \theta u + 2\Gamma \hat{a} \sin \theta] u - \hat{a} \cos^2 \theta (1 - \hat{a}\mathcal{C}) = \hat{a}^2 \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.8d)$$

junto con las condiciones de contorno que expresan que el radio del chorro, R , y la velocidad de inyección, U , son dados en $z = 0$, y que muy lejos aguas abajo ($z \rightarrow \infty$) tanto θ como \mathcal{C} deben tender a cero :

$$\hat{a}(0, t) \cos \theta(0, t) = Bo^{1/2}, \quad u(0, t) = We^{1/2} Bo^{-1/4}, \quad (3.9)$$

y

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \theta(z, t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{C}(z, t) = 0, \quad (3.10)$$

donde los números de Bond, Weber y Kapitza, han sido definidos, respectivamente, como

$$Bo = \frac{\rho g R^2}{\gamma}, \quad We = \frac{\rho U^2 R}{\gamma} \quad \text{y} \quad \Gamma = 3\nu \left(\frac{\rho^3 g}{\gamma^3} \right)^{1/4}. \quad (3.11)$$

Puesto que el dominio de z es semiinfinito, la integración numérica de (3.8), (3.9), (3.10) se ha realizado mediante el cambio de variable

$$z = -b \log(1 - \xi), \quad (3.12)$$

que transforma el dominio al intervalo $[0, 1]$ en la nueva variable independiente ξ , y donde b es un parámetro que puede elegirse conveniente y determina la escala del cambio de variable anterior o un factor para acumular una región del dominio de ξ más cercano(lejano) a $z = 0$ para valores menores(mayores) de b . Una vez introducida (3.12) en (3.8)-(3.10) se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma (1.1)-(1.2) que puede integrarse con el esquema de la sección §1.2. En la [figura 3.2](#) se representa los resultados de dicha integración para el caso de una solución de equilibrio obtenida para

dos valores diferentes de b , y puede observarse la poca sensibilidad de la solución frente a este parámetro. Además, se puede comprobar la convergencia del método, que solo necesita una malla de 11 puntos para obtener la solución.

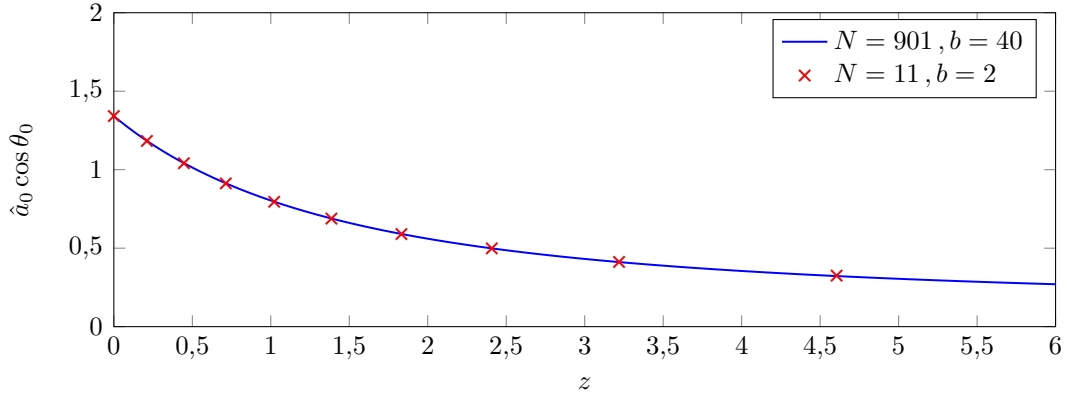


Figura 3.2 Solución de equilibrio para un $Bo = 1,8$, $We = 3 \cdot 10^{-3}$ y $\Gamma = 5,83$ usando una malla de N puntos y uniforme en ξ .

El sistema de ecuaciones y de condiciones de contorno (3.8)-(3.10) se ha integrado numéricamente como se ha explicado en la sección §1.2, para calcular las formas equilibrio y su estabilidad lineal, expresando previamente las variables de la forma:

$$\hat{a}(\xi) = \hat{a}_0(\xi) + \varepsilon e^{\lambda t} \hat{a}_1(\xi), \quad (3.13a)$$

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \varepsilon e^{\lambda t} u_1(\xi), \quad (3.13b)$$

$$\theta(\xi) = \theta_0(\xi) + \varepsilon e^{\lambda t} \theta_1(\xi), \quad (3.13c)$$

$$\mathcal{C}(\xi) = \mathcal{C}_0(\xi) + \varepsilon e^{\lambda t} \mathcal{C}_1(\xi), \quad (3.13d)$$

donde el subíndice 0 denota la solución de equilibrio, el 1 la forma de la perturbación respecto, λ es la tasa de crecimiento de la misma, que es un autovalor del problema, y el parámetro $\varepsilon \ll 1$ mide la pequeñez de las perturbaciones.

En la figura ?? se muestra el espectro de los autovalores con mayor parte real, las formas de equilibrio y las autofunciones correspondientes al autovalor de mayor parte real, para valores dados de Γ , Bo y dos valores de We , uno para el que la solución de equilibrio es estable ($We = 8 \cdot 10^{-3}$) y otro para el que es inestable ($We = 3 \cdot 10^{-3}$). Los valores de los parámetros, que corresponden a casos muy cercanos al de estabilidad marginal ($\lambda_{r,max} = 0$), son los mismos que los de la figura 3 de [21]. Puede comprobarse cómo el método numérico propuesto en esta tesis reproduce fielmente sus resultados.

En la figura 3.4 se representan en el plano $Bo-We$ las curvas estabilidad marginal, o curvas críticas, para diferentes valores de Γ , estando de nuevo, los resultados en

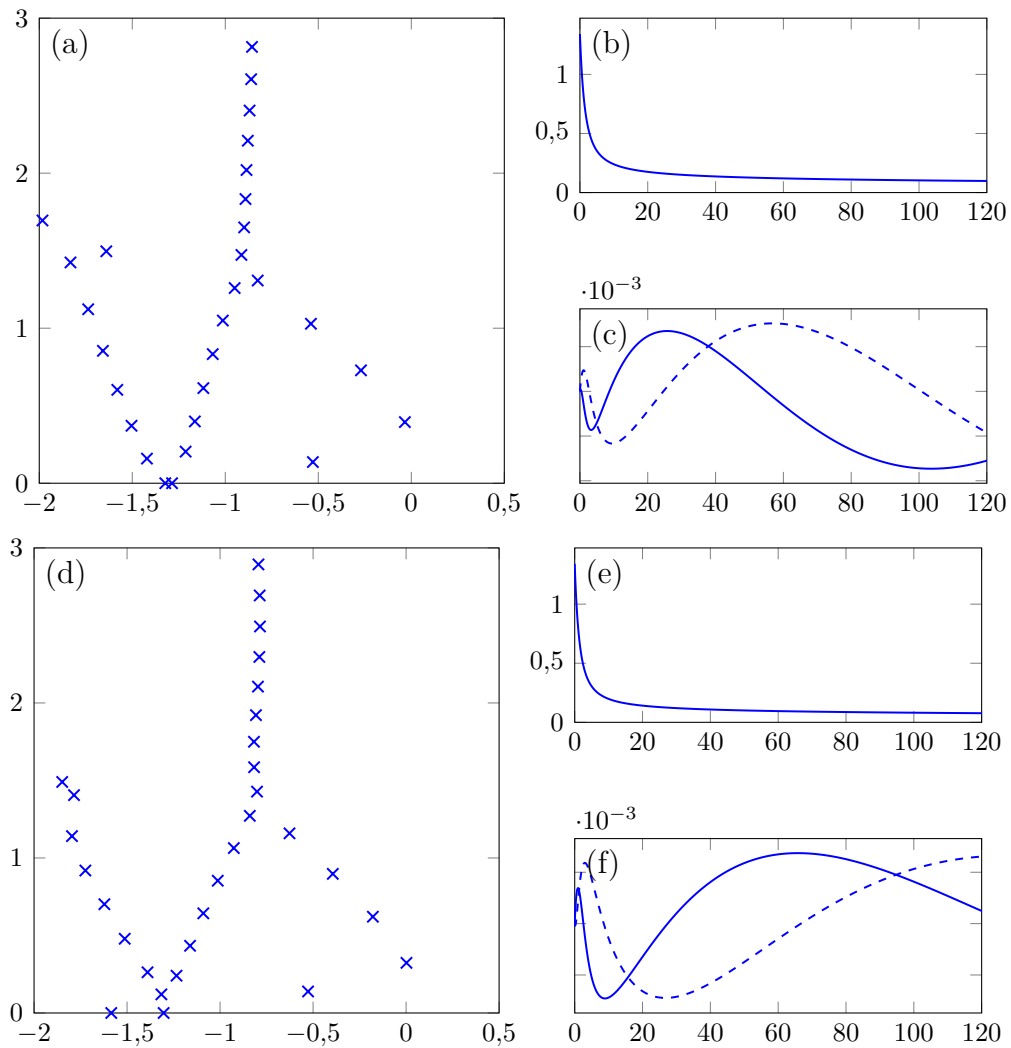


Figura 3.3 Solución del problema de autovalores de (3.8), (3.9), (3.10) para $Bo = 1,8$, $\Gamma = 5,83$ y We , (a-c) $We = 8 \cdot 10^{-3}$ o (d-f) $We = 3 \cdot 10^{-3}$. (a,d) Espectro de autovalores, (b,e) forma de equilibrio y (c,f) autovalor dominante.

buen acuerdo con los de la figura 5 de [21]. Para cada valor de Γ , la parte estable del plano es la que está por encima de la curva crítica, de manera que, dado un número de Bond, existe un número de Weber por debajo del cual el chorro deja de ser estable y se produce el goteo.

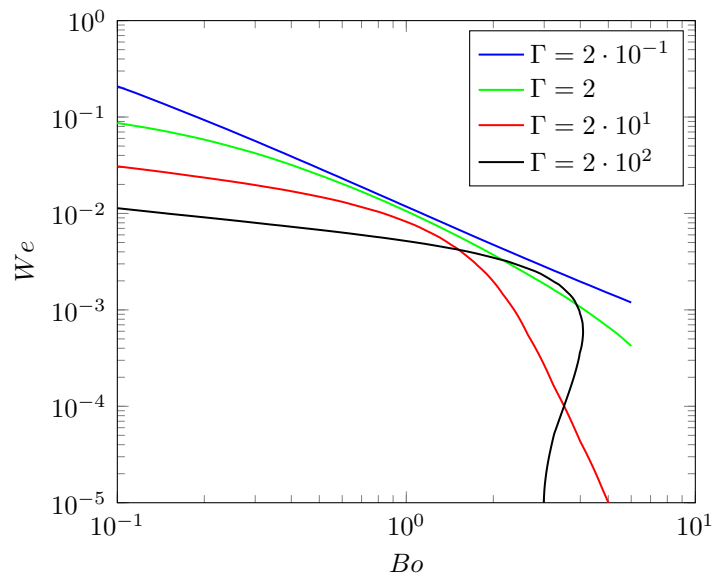


Figura 3.4 Estabilidad de chorros estirados por gravedad.

3.1.2. Régimen transitorio no lineal de un chorro de longitud finita

El problema del régimen transitorio no lineal correspondiente a la evolución de un chorro de longitud finita en presencia de la gravedad fue analizado por primera vez con un modelo unidimensional o con flujo potencial (resuelto con el método de los elementos de contorno) de forma numérica por Eggers and Dupont [6], y Schulkes [23], respectivamente. El método numérico propuesto por Eggers and Dupont [6], que ha sido simiente para otros posteriores [13], es engorroso en su implementación y, además, requiere viscosidad artificial para su estabilidad numérica y tiene el problema de la singularidad en la punta del chorro. En este apartado se ha aplicado el método numérico propuesto en §1.2 para resolver las ecuaciones (3.8) correspondientes, dentro del modelo unidimensional, a la evolución no lineal de un chorro finito. La resolución de dichas ecuaciones, que, como se ha indicado anteriormente son regulares en la punta, se realizará para el caso $\Gamma = 0$, y los resultados muestran que el método no necesita ningún tipo de viscosidad, ni natural ni artificial, para su estabilidad. Los resultados numéricos obtenidos se han comparado con los de Clanet and Lasheras [2] obteniendo excelentes resultados.

El sistema de ecuaciones (3.8) debe resolverse sujeto a las condiciones de contorno (3.9) en el inyector y, puesto que el chorro es finito, a las siguientes condiciones en la

punta:

$$\hat{a}(L, t)\mathcal{C}(L, t) = 1 \quad \text{y} \quad \theta(L, t) = -\pi/2. \quad (3.14)$$

Además, puesto que la longitud del chorro debe calcularse como parte del problema, debe imponerse la condición adicional de que en la punta del chorro se verifique que:

$$\partial_t L(t) = u[L(t), t], \quad (3.15)$$

donde, para no introducir notación adicional, la derivada de $L(t)$ respecto del tiempo se ha denotado por ∂_t .

Para la resolución numérica, es conveniente escalar la variable espacial z para fijar el intervalo de integración mediante el cambio de variable

$$z = L(t)\xi. \quad (3.16)$$

Si se introduce (3.16) en (3.8), y se define la variable $v(\xi, t) \equiv \xi\partial_t L(t)$, las ecuaciones resultantes se escriben:

$$\partial_\xi L(\hat{a}^2 \cos^2 \theta) = 2L\hat{a} \sin \theta, \quad (3.17a)$$

$$\partial_\xi L(-\sin \theta) = L\mathcal{C}, \quad (3.17b)$$

$$\partial_t L(\hat{a}^2 \cos^2 \theta) + \partial_z[\hat{a}^2 \cos^2 \theta(u - v)] = 0 \quad (3.17c)$$

$$\partial_t L(\hat{a}^2 \cos^2 \theta u + 6\Gamma\hat{a} \sin \theta) +$$

$$\partial_z[\hat{a}^2 \cos^2 \theta u + 6\Gamma\hat{a} \sin \theta](u - v) - \hat{a} \cos^2 \theta(1 - \hat{a}\mathcal{C}) = L\hat{a}^2 \cos^2 \theta, \quad (3.17d)$$

$$\partial_t(-L) + \partial_\xi v = 0, \quad (3.17e)$$

$$\partial_\xi L = 0, \quad (3.17f)$$

donde la penúltima ecuación es la forma diferencial de la definición de v y la última ecuación permite tratar numéricamente $L(t)$ como el resto de las variables del problema. Además, el sistema (3.17) debe suplementarse con las condiciones de contorno (3.9), (3.14), una para la forma diferencial de (3.16), que se puede tomar, por sencillez, (3.16) particularizada en $\xi = 0$ y por último (3.15):

$$\hat{a}(0, t) \cos \theta(0, t) = Bo^{1/2}, \quad v(0, t) = 0, \quad u(0, t) = We^{1/2}Bo^{-1/4}, \quad (3.18a)$$

$$\hat{a}(1, t)\mathcal{C}(1, t) = 1, \quad \theta(1, t) = -\frac{\pi}{2}, \quad v(1, t) = u(1, t). \quad (3.18b)$$

Finalmente, para calcular la evolución se ha partido de las condiciones iniciales correspondientes a una semiesfera moviéndose con una velocidad uniforme correspondiente a la de inyección:

$$\begin{aligned}\hat{a}(\xi, 0) &= Bo^{1/2}, & u(\xi, 0) &= We^{1/2}Bo^{-1/4}, & \theta(\xi, 0) &= -\arcsin(\xi), \\ \mathcal{C}(\xi, 0) &= Bo^{-1/2}, & L(\xi, 0) &= Bo^{1/2}, & v(\xi, 0) &= We^{1/2}Bo^{-1/4}\xi.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Se ha comprobado que, en la evolución del chorro, pronto se pierde memoria de los detalles de las condiciones iniciales.

Puede ocurrir que el chorro se rompa colapsando en un punto del dominio, lo que se denomina pinch-off [5, 3, 18], y el esquema numérico diverja. Para evitar esto, es necesario realizar un corte del dominio en este punto y seguir calculado los subdominios por separado. Para ello, debe establecerse un criterio para determinar cuándo y en qué posición se realiza dicho corte y, como es habitual en la literatura, se ha basado dicho criterio en un radio adimensional mínimo (en nuestro caso, $Bo^{1/2}/20$). Así, si en un instante t_c , el radio de la sección cae por debajo del radio mínimo en algún $\xi = \xi_c$, $\hat{a}(\xi_c, t_c) \cos \theta(\xi_c, t_c) \leq Bo^{1/2}/20$, y, además se tiene $\theta(\xi_c, t_c) = 0$ (el chorro posee una garganta en la sección), se trunca en el chorro en ξ_c y se reescala la variable independiente $\xi \rightarrow \xi/\xi_c$. Nótese que, entonces, las condiciones de contorno (3.15) dejan de cumplirse súbitamente y, para evitar la divergencia del método, es necesario imponerlas con un método de relajación².

En la [figura 3.5](#) se muestran las evoluciones de dos chorros con $Bo = 1,8$, $\Gamma = 5,83$ y respectivos $We = 8 \cdot 10^{-4}$ y $We = 2 \cdot 10^{-2}$. Obsérvese en la [figura 3.5a](#) que, para el We menor, la evolución corresponde a la de un goteo quedando, debido a la acción de la viscosidad, un filamento muy alargado justo después de la rotura que se retrae por los efectos de la tensión superficial. Sin embargo, en la [figura 3.5b](#) se observa la formación de un chorro estable, para el We mayor.

En la [figura 3.6](#), se representa dos instantes $T = 5,2$ y $T = 9,2$, correspondientes a momentos inmediatamente posterior a la rotura, en la transición de modo goteo a modo chorro estudiada en [2]. En esta se observa el rizado que se forma en la rotura del chorro, correspondiente a ondas capilares que están reportadas en [2]. En la siguiente sección, se estudiará con más detalle la formación de este tipo de ondas. Se observan

²El método de relajación aplicado aquí consiste en que, si en un instante dado t_0 una restricción de la forma $g[y(0, t), y(1, t), t] = 0$, deja de cumplirse y se tiene $g[y(0, t), y(1, t), t_c] = g_c$, la condición que se impone a g a partir de dicho instante es $g[y(0, t), y(1, t), t] = g_c e^{-(t-t_c)/\tau}$, siendo τ un parámetro pequeño que se ajusta convenientemente y que mide la rapidez con que la condición se adapta a su valor correcto $g = 0$.

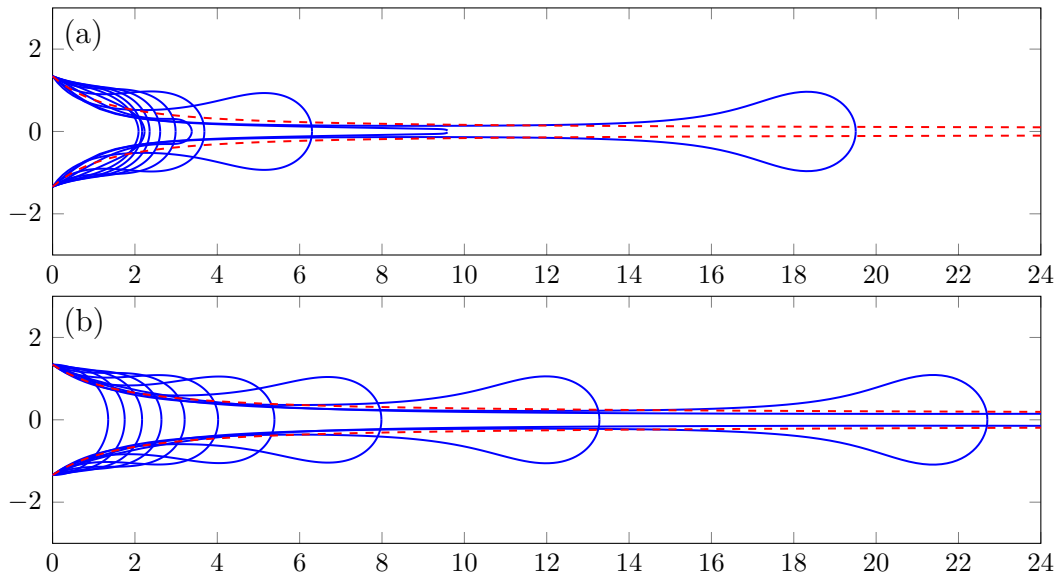


Figura 3.5 Transitorios en presencia de gravedad. (a) Goteo, $Bo = 1,8$, $\Gamma = 5,83$ y $We = 8 \cdot 10^{-4}$ en tiempos $t = [05,25, 10,50, 15,76, 21,01, 26,26, 31,51, 36,76, 42,02, 47,27, 52,52, 53,52]$ de periodo 53,0196. (b) Chorro, $Bo = 1,8$, $\Gamma = 5,83$ y $We = 2 \cdot 10^{-2}$ y $t = [0, 2,4, 4,8, 7,2, 9,6, 12,0, 14,4, 16,8, 19,2, 21,6, 24,0]$

también en las simulaciones, que la solución es completamente similar en el caso en que $\Gamma = 0$ y no da lugar a problemas numéricos, a pesar de no tener ninguna viscosidad.

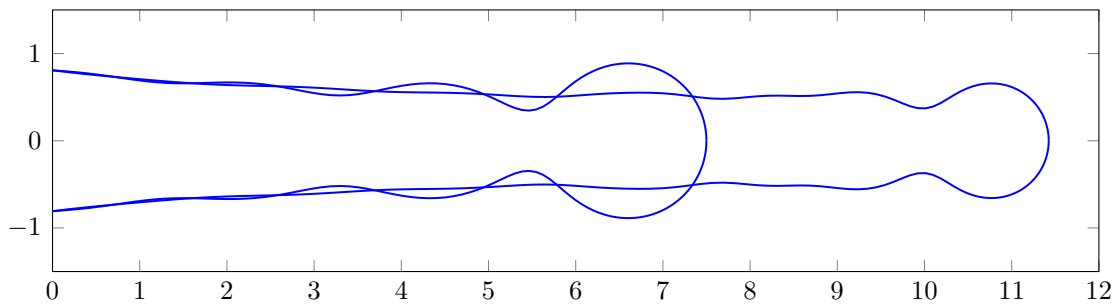


Figura 3.6 Transitorios en presencia de gravedad en transición de modo goteo a chorro, $Bo = 0,65$, $\Gamma = 6,5 \cdot 10^{-3}$ y $We = 1,73$.

3.1.3. Retracción autosemejante de un cono infinito

La retracción de un dominio fluido es autosemejante para conos infinitos [24] y depende exclusivamente del semiángulo de este, θ_0 . La dinámica de dicho dominio se puede aproximar por las ecuaciones unidimensionales de apartados anteriores, en efecto,

desde un sistema de referencia no inercial anclado a la punta del cono, el cual se retrae a una velocidad $w(t)$, las ecuaciones de la geometría son idénticas al caso anterior

$$\partial_z(\hat{a}^2 \cos^2 \theta) = 2\hat{a} \sin \theta, \quad (3.20a)$$

$$\partial_z(-\sin \theta) = \mathcal{C}, \quad (3.20b)$$

y las ecuaciones de conservación de la masa y de cantidad de movimiento se escriben como

$$\partial_t(\hat{a}^2 \cos^2 \theta) + \partial_z(\hat{a}^2 \cos^2 \theta u) = 0 \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(\hat{a}^2 \cos^2 \theta u + 6\hat{a} \sin \theta) + \\ & \partial_z[(\hat{a}^2 \cos^2 \theta u + 6\hat{a} \sin \theta)u - \hat{a} \cos^2 \theta(1 - \hat{a}\mathcal{C})] = -\hat{a}^2 \cos \theta \partial_t w, \end{aligned} \quad (3.21b)$$

que incluyen un término adicional que corresponde a las fuerzas de inercia $-\hat{a}^2 \cos \theta \partial_t w$. Las condiciones de contorno del cono en la punta, $z = 0$, son

$$u(0, t) = 0, \quad \theta(0, t) = +\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \hat{a}(0, 0)\mathcal{C}(0, t) = 1, \quad (3.22)$$

y en infinito,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \theta(z, t) = \theta_0 \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u(z, t) = -w(t), \quad (3.23)$$

correspondientes a un cono en reposo. Nótese que esto impone que el cono en el infinito, que está en reposo en un sistema de referencia inercial, está acelerado en el sistema de referencia anclado a la punta y tiene una velocidad $\lim_{z \rightarrow \infty} u(z, t) = -w$, opuesta a la de la punta. En efecto, un sistema de referencia no inercial introduce una aceleración $-a^2 \partial w / \partial t$. Las condiciones iniciales correspondientes igualmente a las de un cono se escriben como

$$\theta(z, 0) = \theta_0 \quad \text{y} \quad u(z, 0) = -w(0). \quad (3.24)$$

Es conveniente adimensionalizar el sistema de ecuaciones (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) y (3.24). Para ello, se eligen la longitud característica, l_c , y tiempos característicos, t_c , de forma que las presiones características capilar, inercial y viscosa sean del mismo orden

$$\frac{\gamma}{l_c} \sim \rho \frac{l_c^2}{t_c^2} \sim \frac{\mu}{t_c} \quad (3.25)$$

obteniéndose $l_c = \mu^2/(\rho\gamma)$ y $t_c = \mu^3/(\rho\gamma^2)$. Por tanto, las ecuaciones (3.6), escritas en forma adimensional se escriben como

$$\partial_z(\hat{a}^2 \cos^2 \theta) = 2\hat{a} \sin \theta \quad (3.26a)$$

$$\partial_z(-\sin \theta) = \mathcal{C} \quad (3.26b)$$

$$\partial_t(\hat{a}^2 \cos^2 \theta) + \partial_z(\hat{a}^2 \cos^2 \theta u) = 0 \quad (3.26c)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(\hat{a}^2 \cos^2 \theta u + 6\hat{a} \sin \theta) \\ & + \partial_z[(\hat{a}^2 \cos^2 \theta u + 6\hat{a} \sin \theta)u - \hat{a} \cos^2 \theta(1 - \hat{a}\mathcal{C})] = -\hat{a}^2 \cos^2 \theta \frac{\partial w}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.26d)$$

que admite una solución de semejanza para tiempos largos $t \gg 1$ con variable de semejanza $\eta = zt^{-\frac{2}{3}}$ del tipo

$$\begin{aligned} a(s, t) &= a_*(\eta)t^{2/3}, \quad u(s, t) = u_*(\eta)t^{-1/3}, \quad \theta(s, t) = \theta_*(\eta), \\ \mathcal{C}(s, t) &= \mathcal{C}_*(\eta)t^{-2/3} \quad \text{y} \quad w(t) = w_*t^{-1/3}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

En efecto, sustituyendo (3.27) en (3.26), (3.22), (3.23) y (3.24) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(a_*^2) = 2\hat{a}_* \sin \theta_*, \quad (3.28a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\sin \theta_*) = \mathcal{C}_*, \quad (3.28b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}[a_*^2(u_* - \frac{2}{3}\eta)] = -2a_*^2, \quad (3.28c)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta}[(a_*^2 u_* + t^{-1/3} 6\hat{a}_* \sin \theta_*)(u_* - \frac{2}{3}\eta) - \hat{a}_* \cos^2 \theta_*(\hat{a}_* \mathcal{C}_* + 1)] = \\ & = \frac{1}{3}a_*^2 w_* - \frac{5}{3}a_*^2 u_* - t^{-1/3} 6\hat{a}_* \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.28d)$$

junta a las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u_*(0) &= 0, \quad \theta_*(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \hat{a}_*(0)\mathcal{C}_*(0) = 1, \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta_*(\eta) &= \theta_0 \quad \text{y} \quad w + \lim_{\eta \rightarrow \infty} u(\eta) = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde los términos viscosos desaparecen para tiempos largos $t \gg 1$. Las ecuaciones (3.28)-(3.29) se escriben de la forma (1.1)-(1.2) y pueden resolverse con el esquema numérico (1.8b).

En la [figura 3.7](#), se representa las formas de la solución de semejanza para los mismos valores del ángulos del cono dados en [24], θ_0 , donde se puede observar el rizado

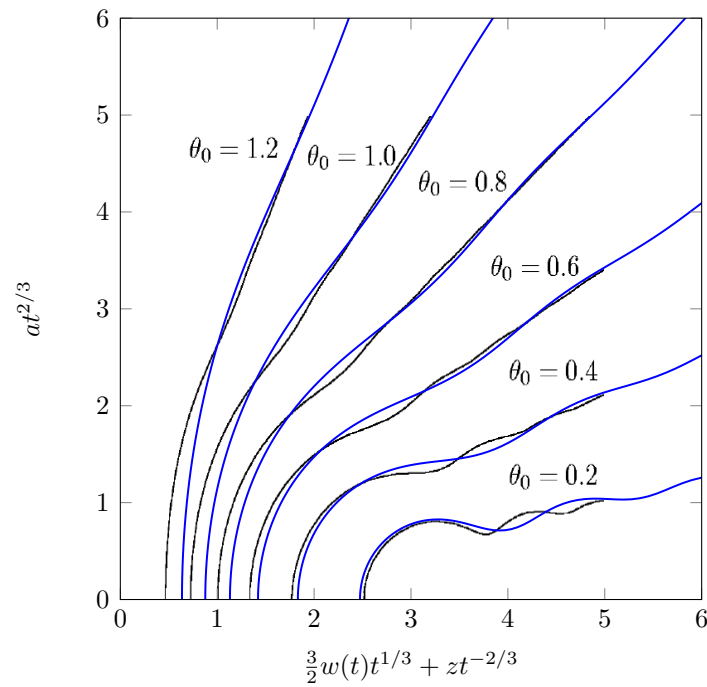


Figura 3.7 Forma de la solución de semejanza.

característico que se observa después de la rotura de un chorro. Nótese que cuando el cono es más cerrado, el rizado es más marcado.

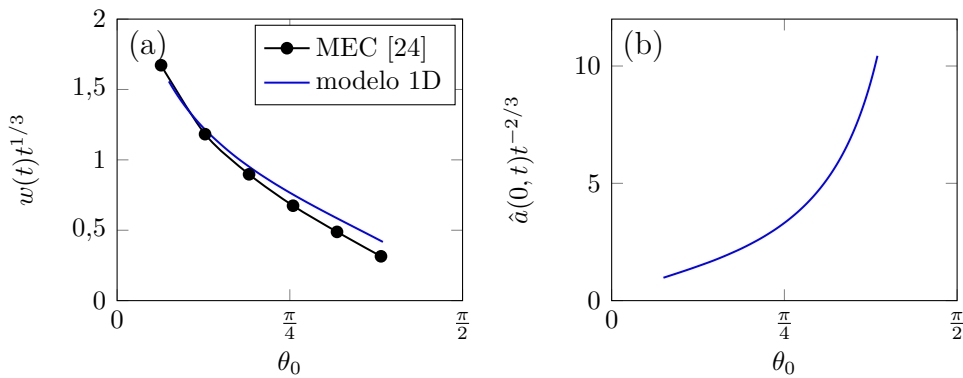


Figura 3.8 Variables en la punta del cono en función del ángulo de éste. (a) Velocidad de retracción w_* y (b) radio de curvatura de la punta \hat{a}_* .

En la [figura 3.8](#), se representan la velocidad de retracción de la punta del cono y la curvatura de ésta. En [figura 3.8a](#) se observa como conos más cerrados, se retraen más rápidamente debido a que tienen menos inercia (sección) y la presión capilar es mayor, como se puede observar en la [figura 3.8b](#)

3.2. Dinámica no axilsimétrica de chorros electrificados

En esta sección se llevará a cabo un estudio numérico de la inestabilidad lateral (fenómeno de latiguelo o *whipping*) que, como se explicó en §1.1.2, se desarrolla bajo ciertas circunstancias en chorros electrificados debido a la autorepulsión culombiana entre sus cargas. Aunque el análisis completo de este problema es extraordinariamente complicado debido, fundamentalmente, a la compleja interacción entre el campo eléctrico exterior y el chorro, cuya geometría no es conocida a priori, siendo, además, su intensidad eléctrica y distribución de carga dependientes de los procesos electrohidrodinámicos que tienen lugar aguas arriba, en la región no esbelta que incluye al cono de Taylor donde se origina el spray, véase Garoz Gómez [12], Ibáñez León [17]. No obstante, se considerará aquí un modelo simplificado del problema consistente en un chorro electrificado de un líquido de viscosidad μ y tensión superficial γ , que se inyecta con velocidad U a través de un orificio de radio R , suponiéndose conocida la intensidad de corriente transportada por el chorro, I , en dicha sección. Además se supondrá que el fluido que sale el orificio proviene de una zona suficientemente lejana aguas arriba como para que la carga eléctrica pueda suponerse toda ella relajada en la superficie del chorro, así como el éste se encuentra en un campo eléctrico exterior que, en ausencia de chorro, se supone uniforme de valor \mathbf{E}_∞ . El objetivo es, entonces, analizar los efectos que sobre la dinámica del chorro poseen las propiedades del fluido, el valor del campo eléctrico exterior, el caudal inyectado y la corriente eléctrica inyectada. El análisis se basará en un modelo unidimensional, puesto que, de acuerdo con los experimentos (véase la [figura 1.1](#)), en la región donde se desarrolla la inestabilidad el chorro puede considerarse esbelto, puesto su radio de curvatura y su longitud característica son mucho mayores que el valor típico del radio de su sección. En esta sección se han formulado primero las ecuaciones unidimensionales que gobiernan la dinámica no axilsimétrica del chorro electrificado y se han resuelto en las subsecciones siguientes tanto para analizar la estabilidad global de un chorro recto frente a pequeñas perturbaciones laterales (§3.2.1), como para calcular la evolución transitoria no lineal hacia regímenes periódicos o caóticos (§3.2.2).

La formulación de las ecuaciones que gobiernan la cinemática y la dinámica no axilsimétrica de un chorro esbelto es similar a la efectuada en §2.1. Al igual que se vio allí, su configuración geométrica se supone, en primera aproximación, definida en cada instante mediante el vector de posición de cada punto de su línea media, $\mathbf{r}(s, t)$, donde s representa la longitud de arco a lo largo de dicha línea medida desde la sección

de entrada al chorro, y por la geometría de la sección transversal, la cual se supone siempre circular de radio $a(s, t)$ y perpendicular a la línea media $\mathbf{r}(s, t)$. Asimismo, es conveniente describir el movimiento usando un triedro intrínseco $\{\mathbf{d}_i(s, t)\}_{i=1,2,3}$, introducido en el capítulo anterior, de manera que $\mathbf{d}_3(s, t)$ denota el vector unitario tangente al chorro:

$$\mathbf{d}_3 = \partial_s \mathbf{r}. \quad (3.30)$$

Además, se supondrá que la velocidad relativa del fluido respecto a la de la línea media del chorro es uniforme en cada sección y dirigida según $\mathbf{d}_3(s, t)$. Así, $u(s, t)\mathbf{d}_3(s, t)$ denota dicha velocidad, la velocidad total del fluido en cada sección es :

$$\mathbf{v}(s, t) = \partial_t \mathbf{r} + u\mathbf{d}_3. \quad (3.31)$$

También, y como se indicó en el capítulo anterior, debido a la ortonormalidad del triedro intrínseco, siempre existen dos vectores $\boldsymbol{\kappa}(s, t)$ y $\boldsymbol{\omega}(s, t)$ denominados curvatura y velocidad angular, respectivamente, de la sección fluida, tales que

$$\partial_s \mathbf{d}_i = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i, \quad (3.32a)$$

$$\partial_t \mathbf{d}_i = (\boldsymbol{\omega} - u\boldsymbol{\kappa}) \times \mathbf{d}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.32b)$$

Nótese que en (3.32b) se ha definido la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de tal forma que es la correspondiente a un triedro ligado a una sección transversal de fluido que en s se mueve con la velocidad relativa a la línea media $u(s, t)\mathbf{d}_3(s, t)$, puesto que la derivada siguiendo a dicha sección es entonces $\partial_t \mathbf{d}_i + u\partial_s \mathbf{d}_i = \partial_t \mathbf{d}_i + u\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i$. Esta definición de $\boldsymbol{\omega}$ está motivada por el hecho de que es dicha velocidad angular es la que aparecerá en las ecuaciones de balance de momento angular y en las relaciones constitutivas que se verán más abajo.

Como se vio en el capítulo anterior, los vectores \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\kappa}$ no son independientes entre si, sino que deben satisfacer las siguientes relaciones de compatibilidad obtenidas de (3.30)-(3.32) haciendo uso de la igualdad de las derivadas cruzadas, $\partial_s \partial_t \mathbf{r} = \partial_t \partial_s \mathbf{r}$ y $\partial_s \partial_t \mathbf{d}_i = \partial_t \partial_s \mathbf{d}_i$:

$$\partial_s (\mathbf{v} - u\mathbf{d}_3) = (\boldsymbol{\omega} - u\boldsymbol{\kappa}) \times \mathbf{d}_3 \quad (3.33)$$

y

$$\partial_t \boldsymbol{\kappa} = \partial_s (\boldsymbol{\omega} - u\boldsymbol{\kappa}) + (\boldsymbol{\omega} - u\boldsymbol{\kappa}) \times \boldsymbol{\kappa}, \quad (3.34)$$

que son análogas a las ecuaciones (2.4) y (2.5). Además, de la misma manera que en el capítulo anterior (véase §2), para describir la configuración geométrica del chorro es conveniente también aquí hacer uso de los parámetros de Euler, que definen la rotación entre el triedro en un s genérico, $\{\mathbf{d}_i(s, t)\}_{i=1,2,3}$ y el triedro en $s = 0$, $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$ donde $\mathbf{a}_i = \mathbf{d}_i(0, t)$ (véase §A). Por ello, en las ecuaciones que gobiernan la dinámica del chorro se incluirán también las ecuaciones diferenciales (A.9) y (A.11) que relacionan las derivadas espaciales de los parámetros de Euler y la curvatura, $\boldsymbol{\kappa}(s, t)$. Las condiciones de contorno que satisfacen las variables cinemáticas en el orificio son, por tanto :

$$a(0, t) = R, \quad u(0, t) = U, \quad \mathbf{v}(0, t) = U\mathbf{a}_3, \quad \boldsymbol{\omega}(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\kappa}(0, t) = 0. \quad (3.35)$$

Las ecuaciones anteriores deben complementarse con las que resultan de aplicar balances de masa y cantidad de movimiento, tanto lineal como angular, a una rebanada infinitesimal genérica del chorro en una posición s . Si ρ es la densidad del líquido, A es el área de la sección, $A = \pi a^2$, y \mathcal{J} es el tensor de inercia de la sección, $\mathcal{J} = \frac{\pi}{4}a^4\mathcal{P}_2$, entonces, las ecuaciones de balance proporcionan

$$\partial_t(\rho A) + \partial_s(u\rho A) = 0, \quad (3.36a)$$

$$\partial_t(\rho A\mathbf{v}) + \partial_s(u\rho A\mathbf{v}) = \partial_s\mathbf{n}\mathbf{f}, \quad (3.36b)$$

$$\partial_t(\rho\mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \partial_s u\rho\mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \partial_s\mathbf{m} + \mathbf{d}_3 \times \mathbf{n}, \quad (3.36c)$$

donde \mathbf{n} y \mathbf{m} son la fuerza y el momento resultante aplicada en la sección, respectivamente, y \mathbf{f} es la fuerza electrostática resultante del campo exterior y de la repulsión entre las cargas del chorro. Aunque el cálculo de esta fuerza, que depende de la geometría del chorro y la distribución de carga a lo largo del mismo, es muy complicado en el caso general, se supondrá aquí que, como una primera aproximación al problema, dicha fuerza puede modelarse convenientemente según la denominada aproximación de interacción local de Yarin et al. [27], según la cual se tiene:

$$\mathbf{f} = 2\pi a\sigma[\mathbf{E}_\infty - \frac{a\sigma}{2\varepsilon}\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_3]. \quad (3.37)$$

En la ecuación (3.37) \mathbf{E}_∞ denota el campo en ausencia de chorro, que en esta tesis se considerará uniforme, $\mathbf{E}_\infty = E_\infty\mathbf{a}_3$, y, además, se supone que toda la carga es convectada con el fluido y está relajada en la superficie del chorro, siendo la densidad superficial de carga $\sigma(s, t)$. Puesto que, por tanto, la superficie del chorro no recibe carga por conducción desde el interior del mismo, el balance de carga aplicado a un

elemento de superficie $2\pi a(s, t)ds$ proporciona la ecuación

$$\partial_t(2\pi a\sigma) + \partial_s(2\pi a\sigma u) = 0, \quad (3.38)$$

siendo la condición de contorno para σ :

$$2\pi a(0, t)\sigma(0, t)u(0, t) = I. \quad (3.39)$$

Además, para cerrar el sistema (3.36), es necesario especificar leyes constitutivas para la componente axial fuerzas, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_3$, y para los momentos en cada sección [20, 1]:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_3 = 3\mu A\partial_s u + \pi\gamma a, \quad (3.40a)$$

$$\mathcal{P}_3 \cdot \mathbf{m} = 3\mu \mathcal{J} \cdot \partial_s \boldsymbol{\omega}, \quad (3.40b)$$

donde μ y γ son, respectivamente, la viscosidad y la tensión superficial del líquido.

Finalmente, si se adimensionalizan las ecuaciones anteriores mediante el siguiente escalado de variables:

$$\mathbf{r} \rightarrow R\mathbf{r}, \quad q_0 \rightarrow q_0, \quad \mathbf{q}_v \rightarrow \mathbf{q}_v, \quad \mathbf{v} \rightarrow U\mathbf{v}, \quad (3.41a)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \rightarrow R^{-1}\boldsymbol{\kappa}, \quad a \rightarrow Ra, \quad \mathbf{n} \rightarrow \mu UR\mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \rightarrow \mu UR^2\mathbf{m}, \quad (3.41b)$$

$$u \rightarrow Uu, \quad \boldsymbol{\omega} \rightarrow UR^{-1}\boldsymbol{\omega} \quad \text{y} \quad \sigma \rightarrow \varepsilon_0 E_\infty^2 \sigma, \quad (3.41c)$$

las ecuaciones que gobiernan la dinámica del chorro son:

$$\partial_s \mathbf{r} = \mathbf{d}_3 \quad (3.42a)$$

$$\partial_s q_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v \cdot \boldsymbol{\kappa} \quad (3.42b)$$

$$\partial_s \mathbf{q}_v = \frac{1}{2} (q_0 \boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q}_v \times \boldsymbol{\kappa}) \quad (3.42c)$$

$$\partial_s (\mathbf{v} - u\mathbf{d}_3) = (\boldsymbol{\omega} - u\boldsymbol{\kappa}) \times \mathbf{d}_3 \quad (3.42d)$$

$$\partial_t (-\boldsymbol{\kappa}) + \partial_s (\boldsymbol{\omega} - u\boldsymbol{\kappa}) = \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\omega} \quad (3.42e)$$

$$\partial_t (a^2) + \partial_s (a^2 u) = 0 \quad (3.42f)$$

$$\partial_t (\text{Re } a^2 \mathbf{v}) + \partial_s (\text{Re } ua^2 \mathbf{v} - \mathbf{n}) = 2a\sigma [\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a}_3 - \Theta \frac{1}{2} a\sigma \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_3] \quad (3.42g)$$

$$\partial_t (\text{Re } a^4 \mathcal{P}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}) + \partial_s (\text{Re } ua^4 \mathcal{P}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} - 4\mathbf{m}) = 4\mathbf{d}_3 \times \mathbf{n} \quad (3.42h)$$

$$\partial_s u = (n_3 - \text{Ca}^{-1}a)/(3a^2) \quad (3.42i)$$

$$\partial_s \boldsymbol{\omega} = \frac{4}{3a^4} \mathcal{P}_{3/2} \cdot \mathbf{m} \quad (3.42j)$$

$$\partial_t(2a\sigma) + \partial_s(2a\sigma u) = 0, \quad (3.42k)$$

donde aparecen los parámetros adimensionales

$$\text{Re} = \frac{\rho UR}{\mu}, \quad \text{Ca} = \frac{\mu U}{\gamma}, \quad \mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 E_\infty^2 R}{\mu U} \frac{I}{\pi R U \varepsilon_0 E_\infty}, \quad \Theta = \left(\frac{I}{\pi R U \varepsilon_0 E_\infty} \right)^2. \quad (3.43)$$

que son, respectivamente: el número de Reynolds, el número capilar, la intensidad adimensional del campo eléctrico exterior y la intensidad adimensional de la fuerza de repulsión. Las condiciones de contorno necesarias para las ecuaciones (3.42) son las correspondientes a la entrada (inyección),

$$\begin{aligned} a(0, t) = 1, \quad u(0, t) = 1, \quad \mathbf{v}(0, t) = \mathbf{a}_3, \\ \boldsymbol{\omega}(0, t) = 0, \quad \mathbf{r}(0, t) = 0, \quad q_0(0, t) = 1, \\ \mathbf{q}_v(0, t) = 0, \quad \boldsymbol{\kappa}(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad 2a(0, t)\sigma(0, t)u(0, t) = \Theta, \end{aligned} \quad (3.44)$$

y, en el otro extremo, $l_\infty < s$, muy lejos del orificio, se supondrá que los esfuerzos son muy pequeños :

$$\mathbf{n}(l_\infty, t) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{m}(l_\infty, t) = 0. \quad (3.45)$$

Para la resolución del sistema de ecuaciones (3.42), es conveniente, de igual manera que para el problema estudiado en el capítulo anterior, proyectar sobre una base cartesiana $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$ la ecuación vectorial para la posición $\mathbf{r}(s, t)$ (3.42a), mientras el resto de ecuaciones vectoriales, conviene proyectarla sobre la base intrínseca $\{\mathbf{d}_i(s, t)\}_{i=1,2,3}$. Para ello, es necesario definir las derivadas espaciales y temporales de un vector $\mathbf{b}(s, t)$ en dicha base, análogamente a (2.15) y (2.16),

$$\partial_s \mathbf{b} \equiv \mathbf{b}' + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{b}, \quad (3.46a)$$

$$\partial_t \mathbf{b} \equiv \dot{\mathbf{b}} + (\boldsymbol{\omega} - u\boldsymbol{\kappa}) \times \mathbf{b}. \quad (3.46b)$$

No obstante, no se considera necesario reescribir las ecuaciones (3.42) ni en términos de derivadas intrínsecas, ni en términos de componentes puesto que ya se ha hecho anteriormente en el capítulo §2 obteniéndose las ecuaciones similares a (2.20)-(2.24), lo que sirve para ilustrar el procedimiento que debe seguirse también aquí.

3.2.1. Análisis de estabilidad lineal

Con el propósito de realizar un análisis de estabilidad frente a pequeñas perturbaciones de soluciones rectas del sistema de ecuaciones (3.42), las variables del sistema se perturban como

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}_0(s) + \varepsilon e^{\lambda t} \mathbf{r}_1(s), \quad (3.47a)$$

$$q_0(s, t) = 1 + \varepsilon e^{\lambda t} q_{01}(s), \quad (3.47b)$$

$$\mathbf{q}_v(s, t) = +\varepsilon e^{\lambda t} \mathbf{q}_{v1}(s), \quad (3.47c)$$

$$\mathbf{v}(s, t) = u_0(s) \mathbf{d}_3 + \varepsilon e^{\lambda t} \mathbf{v}_1(s), \quad (3.47d)$$

$$\boldsymbol{\kappa}(s, t) = +\varepsilon e^{\lambda t} \boldsymbol{\kappa}_1(s), \quad (3.47e)$$

$$a(s, t) = a_0(s) + \varepsilon e^{\lambda t} a_1(s), \quad (3.47f)$$

$$\mathbf{n}(s, t) = n_{03}(s) \mathbf{d}_3 + \varepsilon e^{\lambda t} \mathbf{n}_1(s), \quad (3.47g)$$

$$\mathbf{m}(s, t) = +\varepsilon e^{\lambda t} \mathbf{m}_1(s), \quad (3.47h)$$

$$u(s, t) = u_0(s) + \varepsilon e^{\lambda t} u_1(s), \quad (3.47i)$$

$$\boldsymbol{\omega}(s, t) = +\varepsilon e^{\lambda t} \boldsymbol{\omega}_1(s), \quad (3.47j)$$

$$\sigma(s, t) = \sigma_0(s) + \varepsilon e^{\lambda t} \sigma_1(s), \quad (3.47k)$$

donde el subíndice 0 denota los valores de equilibrio y se ha tenido en cuenta que la solución del chorro es recta, ε es un parámetro pequeño, λ es el autovalor y el subíndice 1 denota la variable perturbada.

Lo tedioso de sustituir (3.47) en las ecuaciones (3.42) fue la motivación original del desarrollo del método numérico de la sección §1.2. Se recuerda, que con este método solo es necesario escribir las ecuaciones en la forma (1.1)-(1.2) y organizar las componentes de las variables en una tupla y , así como organizar las ecuaciones en las funciones $m[x, t, y(x, t)]$, $q[x, t, y(x, t)]$, $p[x, t, y(x, t)]$ y $g[t, y(x_a, t), y(x_b, t)]$. Dadas estas funciones, el esquema numérico (1.5b) resuelve la solución de equilibrio y (1.8) resuelve el problema de autovalores. Por tanto, no se van a escribir aquí las innecesarias ecuaciones que gobiernan la solución de equilibrio y el problema de autovalores.

En la [figura 3.9a](#) se observa cómo el efecto de la inercia se opone al estiramiento del chorro, así como también lo hace el de la tensión superficial. En la [figura 3.9b](#) se observa que para valores de \mathcal{E} suficientemente grande, la forma del chorro solo depende del número de Reynolds y es independiente de la tensión superficial, puesto que para un Re dado, la curva para capilares diferentes prácticamente colapsan.

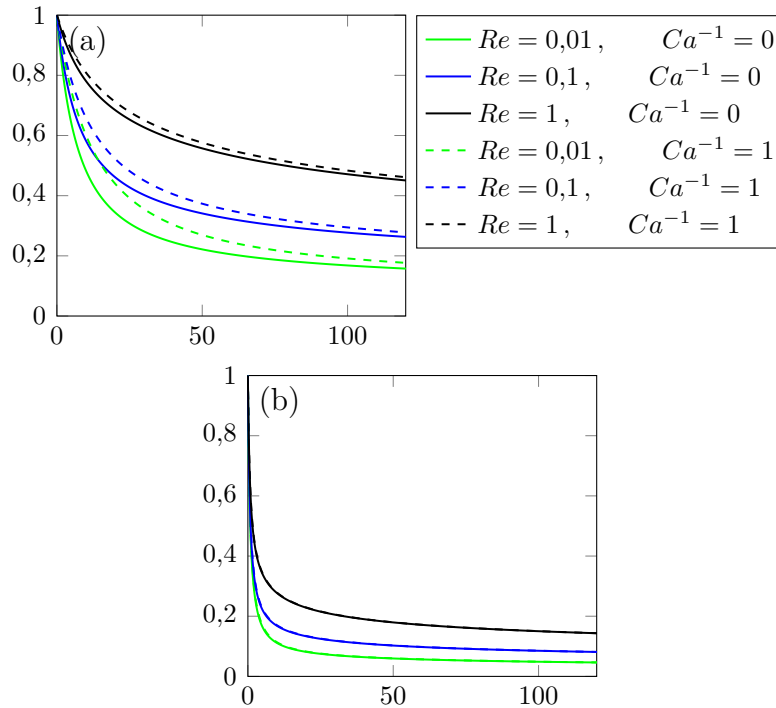


Figura 3.9 Formas de la solución de equilibrio para chorros estirados con campo eléctrico (a) $\mathcal{E} = 0,1$ y (b) $\mathcal{E} = 10$.

En la [figura 3.10](#), se representan el espectro de autovalores y la posición del modo dominante. En ésta se observa como un autovector se hace inestable. También se representa la parte real e imaginaria de la posición del autovector asociado al autovalores que cruza el eje de ordenadas.

En la [figura 3.11](#), se representan en el plano $\mathcal{E}-\Theta$ las curvas correspondientes a las condiciones de estabilidad marginal, $Re(\lambda) = 0$, para diferentes números de Reynolds Re y capilares Ca . Los valores que quedan por debajo(encima) de dichas curvas, corresponden a situaciones en que las soluciones de equilibrio rectas son estables(inestables). En la [figura 3.11](#), se puede observar como la inercia desestabiliza. Esto es debido a que, aunque la inercia (Re mayores) hace tender al chorro a ir en línea recta en ausencia de otras fuerzas, también hace que se estire menos y, por tanto, se diluya menos la carga y en consecuencia la repulsión, siendo este último efecto dominante. Por otro lado, la tensión superficial (Ca menores), estabiliza dominando el efecto lateral sobre el efecto axial, contrariamente a la inercia. También se puede observar que el efecto de la tensión superficial es apreciable con fuerzas del campo eléctrico ξ pequeñas, donde es del mismo orden que las de inercia y/o viscosidad. Esto se debe a que cuanto mayor

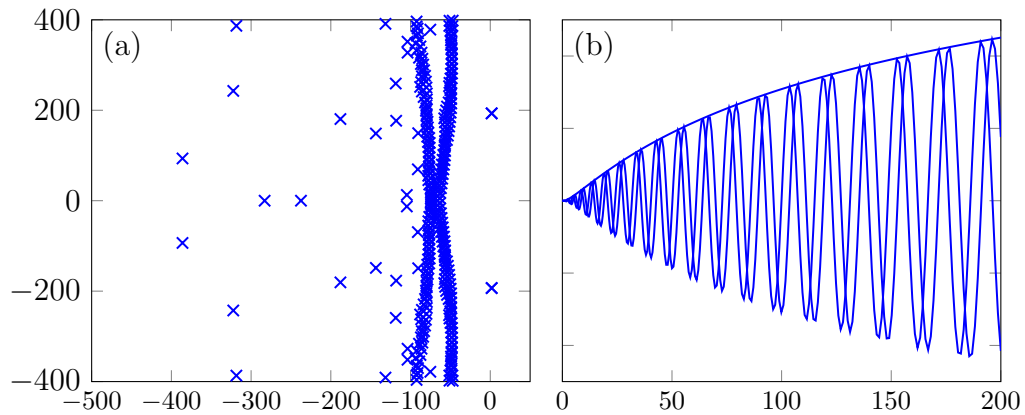


Figura 3.10 Análisis de estabilidad de un chorro con $Re = 1$, Ca^{-1} , $\mathcal{E} = 10^3$, $\Theta = 6,667 \cdot 10^4$. Datos numéricos: $l_\infty = 200$, $N = 301$, malla con distribución $x_i = (i/N)^2$ donde $i = 1, \dots, N$ y 1000 modos laterales. (a) Espectro de autovalores y (b) modo dominante.

es el estiramiento, más dominante es la viscosidad y, por tanto, el efecto del capilar se vuelve despreciable.

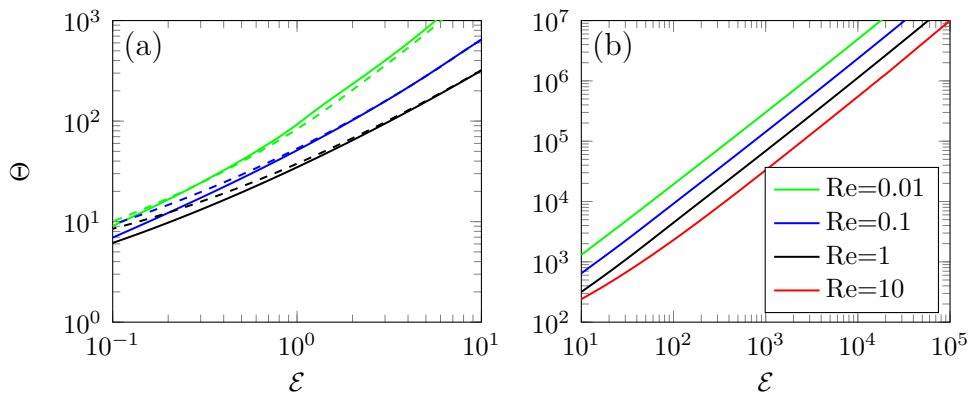


Figura 3.11 Diagrama de estabilidad del electrospinning resuelto con una malla de distribución parabólica $\xi_i = i/N$ ($i=1, \dots, N+1$), con $N = 301$ y longitud de corte $l_\infty = 400$. (a) Valores pequeños de \mathcal{E} y dos valores de tensión superficial $Ca^1 = 0$ (continua) y $Ca^{-1} = 0,5$ (trazos). (b) valores grande \mathcal{E} . Un ajuste por mínimos cuadrados proporciona $\Theta = k Re^\alpha \mathcal{E}^\beta$, con $\log k = 2,87$, $\alpha = -1/3$ y $\beta = 6/5$.

3.2.2. Régimen no lineal y órbitas periódicas

En esta subsección, se realizará una análisis de la dinámica de chorros electrificados descrita por las ecuaciones (3.42)-(3.45).

La curva de trazas en la [figura 3.12a](#) representa el estiramiento correspondiente a una solución de un equilibrio cuyo análisis de estabilidad se muestra en el espectro de autovalores [figura 3.12b](#). Se observa que hay varios autovalores en la parte inestable del espectro. Cuando se imprime una pequeña perturbación a dicha solución, se obtiene una evolución transitoria del chorro hacia la órbita periódica helicoidal mostrada en la [figura 3.12c](#). El estiramiento instantaneos correspondiente a dicha órbita se ha representado por la curva en la [figura 3.12a](#). Obsérvese como el estiramiento del chorro aumenta sustancialmente con respecto al del chorro recto.

En la [figura 3.13a](#), se muestra el estiramiento de un chorro recto, para el que el análisis de estabilidad lineal proporciona el espectro de la [figura 3.13b](#). Obsérvese que, debido a que el parámetro de repulsión Θ es cinco veces mayor que en el caso anterior, el número de autovalores en la zona inestable del espectro aumenta sustancialmente. Debido a esto, tras una perturbación inicial el chorro evoluciona no a una órbita periódica sino a una órbita caótica cuya configuración para dos instantes diferentes está representada en la [figura 3.13c](#). Obsérvese que el estiramiento aumenta sustancialmente respecto al caso anterior.

También se han calculado órbitas periódicas por el método visto en la sección ??, es decir, introduciendo en las ecuaciones 3.42, la dependencia temporal de la forma

$$\dot{\mathbf{b}}(s, t) = \Omega \mathbf{d}_3 \times \mathbf{b}(s, t). \quad (3.48)$$

En la [figura 3.14](#), se representa la órbita periódica para valores de \mathcal{E} y Θ dados. Se observa que la apertura de la envolvente de la órbita aumenta con el número de Reynolds, Re . Esto es debido a que al aumentar el efecto de la inercia disminuye el estiramiento del chorro, por lo que la densidad de carga superficial aumenta y así lo hace el efecto de la repulsión.

En la [figura 3.15](#) se representa el efecto del campo eléctrico exterior para Re y Θ dados. Se observa como al aumentar el campo eléctrico exterior frente al de repulsión de las cargas el efecto relativo de la repulsión es mejor y la apertura de la envolvente del chorro disminuye.

El efecto del aumento del parámetro de repulsión, está representado en la [figura 3.15](#), donde se observa que al aumentar Θ , aumenta la apertura de la envolvente del chorro.

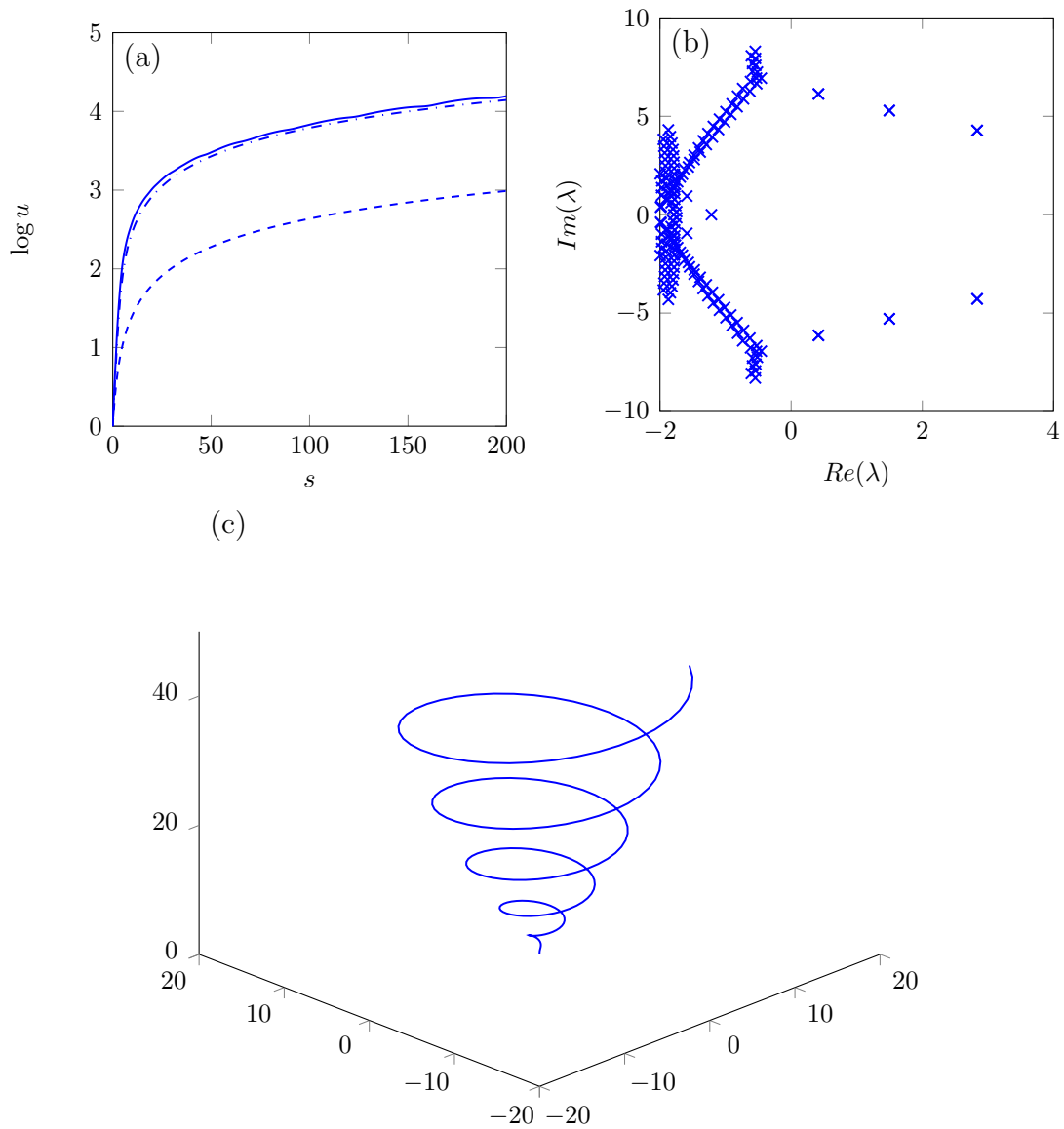


Figura 3.12 Diferentes características del transitorio de un chorro con $Re = 1$, $Ca^{-1} = 0$, $\mathcal{E} = 1$, $\Theta = 120$ y de longitud de corte $l_c = 200$, y con malla parabólica $\xi_i = (i/N)^2$ ($i = 0, \dots, N$) de $N = 200$. (a) Estiramiento medido como $\log u(s)$, (b) espectro de autovalores y (c) geometría de la línea media.

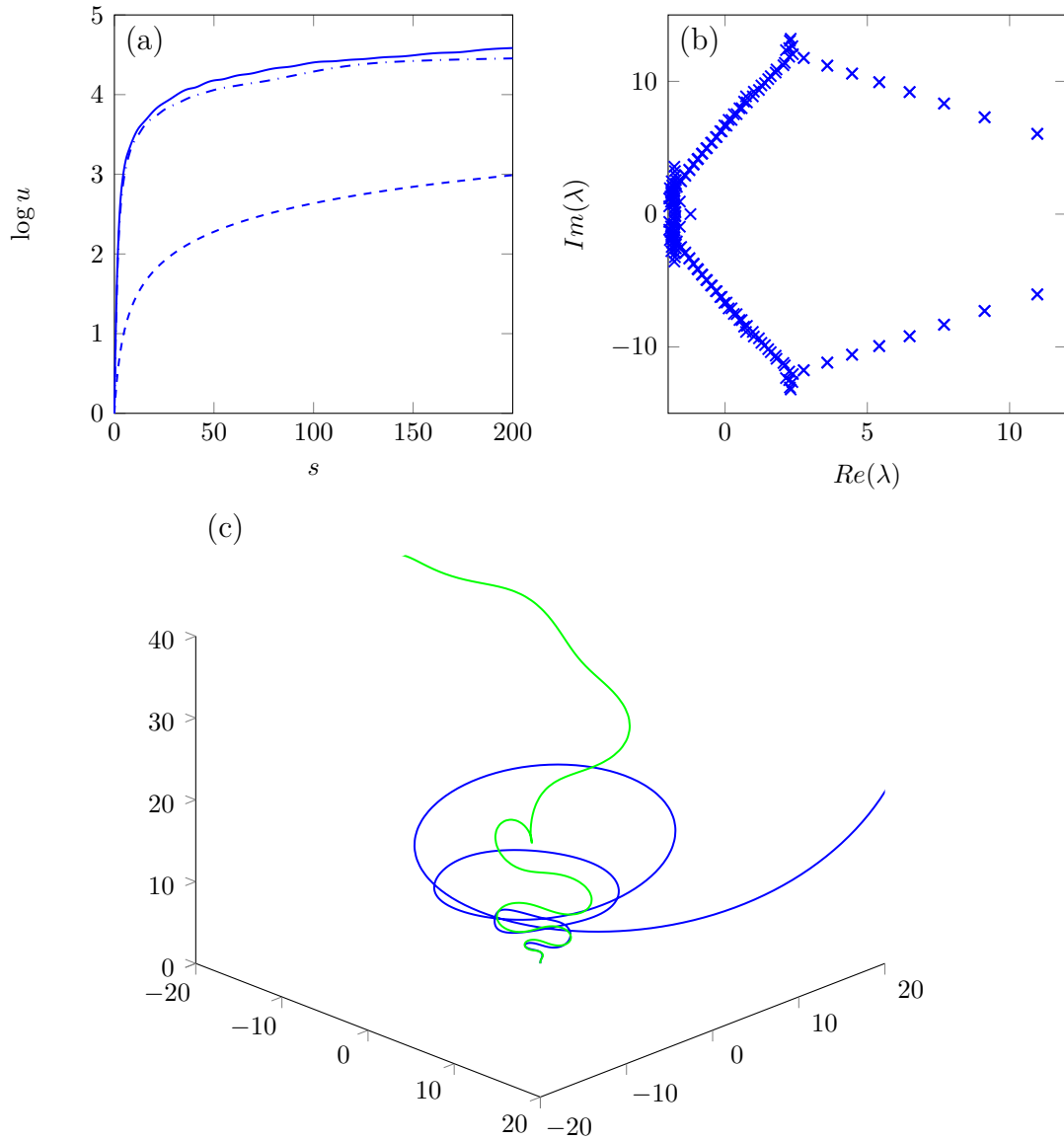


Figura 3.13 Diferentes características del transitorio de un chorro con $Re = 1$, $Ca^{-1} = 0$, $\mathcal{E} = 1$, $\Theta = 600$ y de longitud de corte $l_c = 200$, y con malla parabólica $\xi_i = (i/N)^2$ ($i = 0, \dots, N$) de $N = 200$. (a) Estiramiento medido como $\log u(s)$, (b) espectro de autovalores y (c) geometría de la línea media.

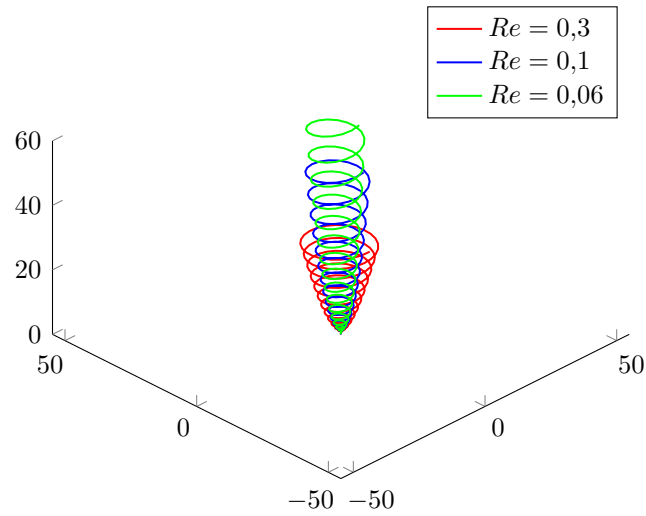


Figura 3.14 Efecto de Re . $Ca^{-1} = 0$, $\mathcal{E} = 57,8762$, $\Theta = 5,787 \cdot 10^4$ y de longitud de corte $l_c = 400$, y con malla parabólica $\xi_i = (i/N)^2$ ($i = 0, \dots, N$) de $N = 301$. $Re = 0,3$ $\Omega = 224$, $Re = 0,1$ $\Omega = 288$ y $Re = 0,06$ $\Omega = 334$.

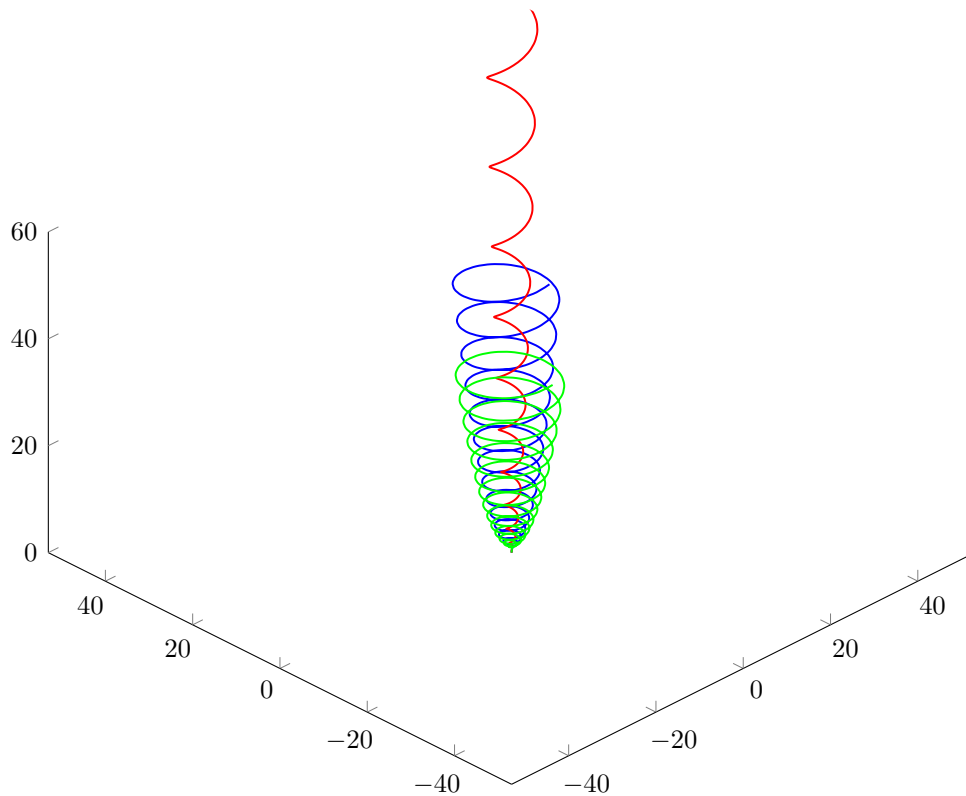


Figura 3.15 Efecto de \mathcal{E} . $Re = ,1$. $Ca^{-1} = 0$, $\mathcal{E} = 57,8762$, $\Theta = 5,787 \cdot 10^4$ y de longitud de corte $l_c = 400$, y con malla parabólica $\xi_i = (i/N)^2$ ($i = 0, \dots, N$) de $N = 301$. $\mathcal{E} = 347,2560$ $\Omega = 281$, $\mathcal{E} = 57,8762$ $\Omega = 288$ y $\mathcal{E} = 17,3628$ $\Omega = 298$.

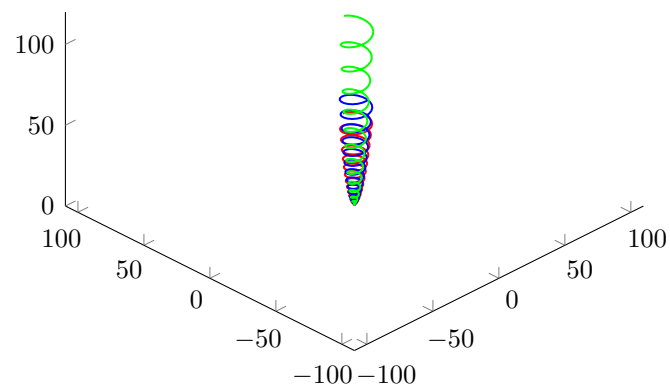


Figura 3.16 Efecto de Θ . $Re = 1$, $Ca^{-1} = 0$, $\mathcal{E} = 57,8762$, y de longitud de corte $l_c = 400$, y con malla parabólica $\xi_i = (i/N)^2$ ($i = 0, \dots, N$) de $N = 301$. $\Theta = 5,7876 \cdot 10^4$ $\Omega = 288,2177$, $\Theta = 3,4726 \cdot 10^4$ $\Omega = 288,2177$ y $\Theta = 1,7363 \cdot 10^4$ $\Omega = 216,8406$.

Bibliografía

- [1] Arne, W., Marheineke, N., Meister, A., and Wegener, R. (2010). Numerical analysis of cosserat rod and string models for viscous jets in rotational spinning processes. *Mathematical Models Methods Applied Science*, 20(10):1941–1965.
- [2] Clanet, C. and Lasheras, J. C. (1999). Transition from dripping to jetting. *Journal of fluid mechanics*, 383:307–326.
- [3] Day, R. F., Hinch, E. J., and Lister, J. R. (1998). Self-similar capillary pinchoff of an inviscid fluid. *Physical review letters*, 80(4):704.
- [4] Dewynne, J. and Wilmott, P. (1993). Slender axisymmetric fluid jets. *Mathematical and computer modelling*, 18(10):69–82.
- [5] Eggers, J. (1993). Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Physical Review Letters*, 71(21):3458.
- [6] Eggers, J. and Dupont, T. F. (1994). Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier–stokes equation. *Journal of fluid mechanics*, 262:205–221.
- [7] Entov, V. M. and Yarin, A. L. (1984). The dynamics of thin liquid jets in air. *Journal of Fluid Mechanics*, 140:91–111.
- [8] Fridrikh, S., Yu, J., Brenner, M., and Rutledge, G. (2006). Nonlinear whipping behavior of electrified fluid jets. In *ACS Symposium series*, volume 918, pages 36–55. Oxford University Press.
- [9] Ganan-Calvo, A. M. (1997). On the theory of electrohydrodynamically driven capillary jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 335:165–188.
- [10] Gañán-Calvo, A. M. (1999). The surface charge in electrospaying: its nature and its universal scaling laws. *Journal of Aerosol Science*, 30(7):863–872.

- [11] García, F. J. and Castellanos, A. (1994). One-dimensional models for slender axisymmetric viscous liquid jets. *Physics of Fluids (1994-present)*, 6(8):2676–2689.
- [12] Garoz Gómez, D. (2010). *Flujos con superficies libres electrospray y generación de burbujas*. PhD thesis, Aeronauticos.
- [13] Hanchak, M. S. (2009). *One dimensional model of thermo-capillary driven liquid jet break-up with drop merging*. PhD thesis, University of Dayton.
- [14] Higuera, F. J. (2010). Electrodispersion of a liquid of finite electrical conductivity in an immiscible dielectric liquid. *Journal of Fluids*, 22:507–542.
- [15] Hohman, M. M., Shin, M., Rutledge, G., and Brenner, M. P. (2001a). Electrospinning and electrically forced jets. i. stability theory. *Physics of fluids*, 13(8):2201–2220.
- [16] Hohman, M. M., Shin, M., Rutledge, G., and Brenner, M. P. (2001b). Electrospinning and electrically forced jets. ii. applications. *Physics of fluids*, 13(8):2221–2236.
- [17] Ibáñez León, S. E. (2015). *Análisis y simulación numérica de problemas electrohidrodinámicos relacionados con el electrospray*. PhD thesis, Aeronauticos.
- [18] Leppinen, D. and Lister, J. R. (2003). Capillary pinch-off in inviscid fluids. *Physics of Fluids*, 15(2):568–578.
- [19] Ribe, N. M. (2004). Coiling of viscous jets. *Proceedings of the Royal Society of London, A*, 2004(5):3223–3239.
- [20] Ribe, N. M., Habibi, M., and Bonn, D. (2006). Stability of liquid rope coiling. *Physics of fluids*, 18:084–102.
- [21] Rubio-Rubio, M., Sevilla, A., and Gordillo, J. (2013). On the thinnest steady threads obtained by gravitational stretching of capillary jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 729:471–483.
- [22] Sauter, U. S. and Buggisch, H. W. (2005). Stability of initially slow viscous jets driven by gravity. *Journal of Fluid Mechanics*, 533:237–257.
- [23] Schulkes, R. (1994). The evolution and bifurcation of a pendant drop. *Journal of Fluid Mechanics*, 278:83–100.
- [24] Sierou, A. and Lister, J. R. (2004). Self-similar recoil of inviscid drops. *Physics of Fluids (1994-present)*, 16(5):1379–1394.

-
- [25] Wallwork, I., Decent, S., King, A., and Schulkes, R. (2002). The trajectory and stability of a spiralling liquid jet. part 1. inviscid theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 459:43–65.
- [26] Yarin, A. L., Koombhongse, S., and Reneker, D. H. (2000). Bending instability of electrically charged liquid jets of polymer solution in electrospinning. *Journal of Applied Physics*, 87(9):4531–4547.
- [27] Yarin, A. L., Koombhongse, S., and Reneker, D. H. (2001). Bending instability in electrospinning of nanofibers. *Journal of Applied Physics*, 89(5):3018–3026.

Capítulo 4

Vibración de gotas

Der Vorteil des schlechten Gedächtnisses ist, dass man dieselben guten Dinge mehrere Male zum ersten Mal genießt.

Friedrich Nietzsche

4.1. Introducción

EN este capítulo se ha llevado a cabo un estudio, tanto experimental como numérico, de las vibraciones experimentadas por gotas cargadas eléctricamente en presencia de un campo eléctrico. Se han considerado los casos en que las gotas pueden estar en contacto parcial con una superficie plana (gotas ancladas), o bien se encuentran libres moviéndose su centro de masas con una aceleración uniforme bajo la acción de un campo eléctrico constante. En la sección §4.2 se describe el montaje experimental utilizado para el caso de gotas ancladas, así como los procedimientos de excitación eléctrica y mecánica aplicados a las gotas. Los experimentos muestran que existe un valor crítico del campo eléctrico por encima del cual deja de haber forma de equilibrio y la gota emite un fino chorro desde la punta Wohlhuter and Basaran [13], Ferrera et al. [4]. Además, se han determinado experimentalmente las frecuencias de los primeros modos naturales de vibración y se ha observado cómo éstas disminuyen al aumentar el campo eléctrico, Ferrera et al. [4]. Los resultados experimentales se han confirmado mediante la integración numérica de las ecuaciones del problema formuladas en la sección §4.3. Las ecuaciones se han formulado de manera que las ecuaciones que describen la geometría de la superficie y la dinámica de la gota se integran simultáneamente en el tiempo introduciendo, mediante un cambio de variable, una parametrización de la superficie que define un mallado de la misma que es independiente del tiempo. Esto evita los

remallados e interpolaciones, engorrosos y con problemas de pérdida de precisión numérica, normalmente usados en la literatura Eggers and Dupont [3], Hanchak [5].

Los cálculos realizados en la sección §4.4.1 de formas de equilibrio de gotas ancladas muestran un buen acuerdo con las observaciones, confirmándose la no existencia de solución de equilibrio a partir de un campo eléctrico crítico. También se han analizado en esta sección las formas de equilibrio de gotas libres, determinándose para cada valor de la carga de la gota el valor crítico del campo eléctrico por encima del cual no existe solución de equilibrio estable. En particular, cuando el campo externo a la gota es nulo, se ha reproducido con gran exactitud el valor de la carga crítica de Rayleigh [9], mientras que para una gota no cargada se ha obtenido el valor del campo crítico de Taylor [12].

En la sección §4.4.2 se ha formulado y resuelto el problema de la estabilidad lineal de las formas de equilibrio calculadas anteriormente. En primer lugar, se han obtenido las frecuencias naturales de los primeros modos de vibración de una gota anclada en ausencia de campo eléctrico y se han comparado con las obtenidas por Strani and Sabetta [11] para un problema similar. Se ha puesto de manifiesto una aparente contradicción en los resultados de este autor consistente en el hecho de que para anclajes de radio muy pequeño, tales que la gota puede considerarse prácticamente libre, las frecuencias calculadas por Strani para anclajes tendiendo a cero no coinciden con las calculadas por Rayleigh [9], mientras que sí lo hacen las calculadas en esta tesis, en consonancia con las reportadas por Ramalingam et al. [8] en el mismo caso límite. Además, los resultados del análisis de estabilidad lineal obtenidos pone de manifiesto que la no existencia de soluciones de equilibrio para una gota anclada a partir de un valor umbral del campo eléctrico externo se debe a que se produce una bifurcación de tipo "folding", en la que una pareja de autovalores complejos conjugados coalescen en el origen y aparecen soluciones inestables con autovalores reales puros. Finalmente, se ha resuelto también el problema de grandes deformaciones de la gota mediante la integración numérica en el tiempo de las ecuaciones completas, no lineales, de la sección §4.3.2, comprobándose que las frecuencias obtenidas están en buen acuerdo con las correspondientes a los primeros modos de vibración que proporciona el análisis de estabilidad lineal.

4.2. Experimentos

En esta sección se expondrán los experimentos llevados a cabo conjuntamente con el grupo de investigación del Profesor Ignacio González-Loscertales de la Universidad

de Málaga sobre las vibraciones axilsimétricas de una gota líquida sometida a campo eléctrico variable con el tiempo. En particular, se agradece especialmente la labor de D. Antonio Hijano en lo que concierne a su ayuda en el montaje de los experimentos, así como en el tratamiento numérico de las imágenes. El líquido usado en los experimentos ha sido formamida con un 25 % de agua para saturarla de agua y eliminar el efecto de la higroscopicidad y, de esta forma, poder considerar que la gota posee un volumen constante durante todo el experimento. La mezcla posee una densidad $\rho = 1095 \text{ kg/m}^3$, tensión superficial $\gamma = 60,6 \text{ mN/m}$, y una conductividad eléctrica $K \approx 2,1 \text{ mS/cm}$ (22.5); aunque no ha sido medida la viscosidad, ésta puede considerarse del mismo orden que la de la formamida pura, $\mu = 3,3 \text{ mPa s}$. La gota está anclada mediante una arandela de espesor $e = 0,1 \text{ mm}$ y radio exterior $a = 0,5 \text{ mm}$ a una superficie conductora plana (véase el esquema 4.1) que es un círculo de radio $L = 26,5 \text{ mm}$ y que se encuentra a un potencial eléctrico Φ con respecto a un contraelectrodo de la misma geometría conectado a tierra y situado a una distancia $H = 11,5 \text{ mm}$ de la superficie de anclaje; en nuestro experimento el valor del potencial eléctrico se ha variado hasta un máximo de 10 kV . Obsérvese que el radio de anclaje es tal que

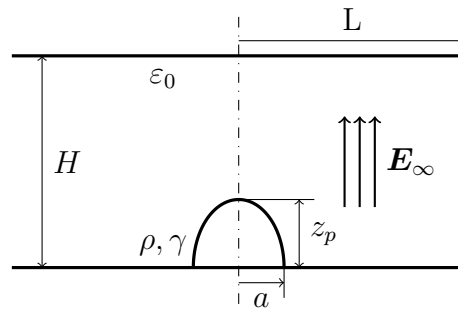


Figura 4.1 Esquema de una gota anclada sometida a una diferencia de potencial entre dos placas planas.

$\rho g a^2 / \gamma = 4,4 \cdot 10^{-2} \ll 1$, por lo que en primera aproximación los efectos gravitatorios pueden despreciarse en el análisis frente a los de tensión superficial y, en ausencia de campo eléctrico exterior, la gota puede considerarse un casquete esférico en primera aproximación. Este hecho permite caracterizar la geometría de las diferentes gotas usadas en los experimentos por su radio, R , y el ángulo α que define el casquete esférico como se indica en la [figura 4.2](#) siendo, por tanto, $a = R \cos \alpha$. A la hora de comparar los resultados experimentales y teóricos se ha comprobado que esta caracterización es más conveniente que otra basada, por ejemplo, en el volumen y el radio de anclaje.

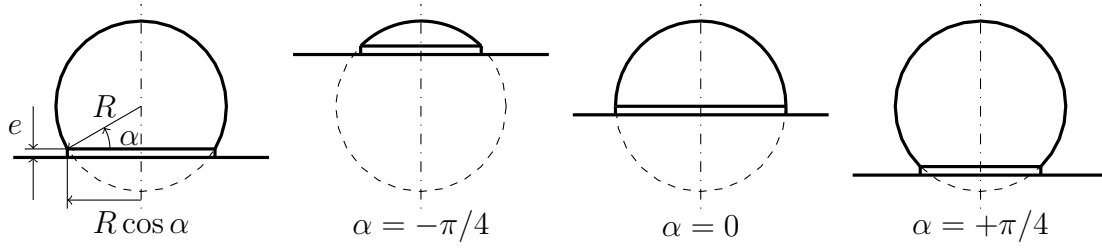


Figura 4.2 Esquema del anclaje de la gota.

En nuestros experimentos se han medido tanto las formas de equilibrio de las gotas como su respuesta frente a excitaciones periódicas del potencial eléctrico. Dicha respuesta se ha caracterizado analizando la evolución temporal de la distancia entre el extremo superior de la gota y la superficie conductora, z_p en el esquema 4.1, cuando el potencial se varía de la forma $\Phi(t) = \Phi_b + \Delta\Phi e^{i\omega t}$, donde Φ_b es el valor base (medio), constante en el tiempo, y $\Delta\Phi$, ω y Υ son, respectivamente, la amplitud, la frecuencia y la fase dadas a la excitación. Como se muestra en la [figura 4.3](#), la vibración de la gota se excita con un generador de señal (GS) conectado a la superficie conductora mediante una fase de amplificación (A), y el movimiento se graba con una cámara Photron modelo fastcam apx-rs (C) retroiluminando la gota con un rayo de luz proveniente de una fuente (FL) y que atraviesa un difusor (D). No obstante, conviene indicar que, puesto que la presión eléctrica sobre la superficie de la gota está dada por $\frac{1}{2}\varepsilon E_n^2$, la respuesta de la gota será proporcional a Φ^2 :

$$\Phi^2(t) = [\Phi_b + \Delta \cos(\omega t + \Upsilon)]^2 = \Phi_b^2 + 2\Phi_b\Delta\Phi \cos(\omega t + \Upsilon) + \frac{1}{2}\Delta\Phi^2[1 + \cos 2(\omega t + \Upsilon)], \quad (4.1)$$

por lo que, si $\Delta\Phi$ no es pequeño frente a Φ_b , ésta última no representa la media de la excitación efectiva, apareciendo en la misma, además, armónicos de orden superior. En estos casos, de muy pequeño Φ_b la vibración de la gota se analizó experimentalmente mediante el dispositivo de excitación mecánica mostrado en la [figura 4.4](#), donde el oscilador vertical (O) consiste en una aguja de radio a unida a un altavoz alimentado directamente mediante el generador de señal (GS).

En la [figura 4.5](#) se representan las diferentes formas de equilibrio obtenidas para dos gotas con $\alpha = 0,115\frac{\pi}{2}$ y $\alpha = 0,495\frac{\pi}{2}$ al variar el potencial Φ_b desde 0 kV a 10 kV en incrementos de 2 kV . Obsérvese que el efecto del campo eléctrico exterior es mucho más pronunciado para la gota mayor $\alpha = 0,495\frac{\pi}{2}$. Además, si se aumenta el campo eléctrico por encima de un valor crítico, que es mayor para la gota menor, llega a emitirse un

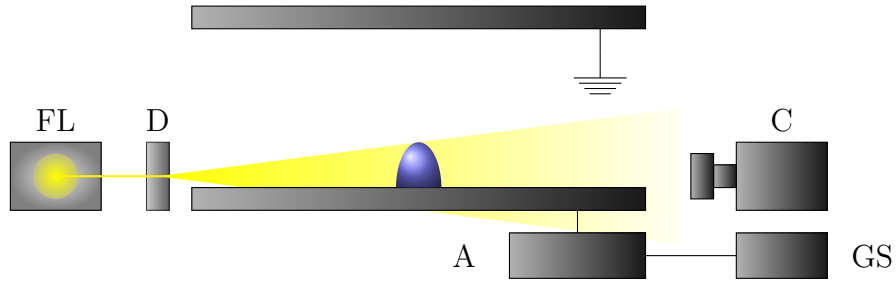


Figura 4.3 Esquema montaje con excitación eléctrica. Fuente de alimentación (FL), difusor (D), cámara (C), amplificador (A) y generador de señal (GS).

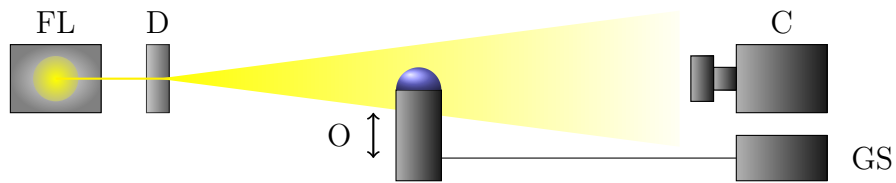


Figura 4.4 Esquema montaje con excitación mecánica. Fuente de alimentación (FL), difusor (D), cámara (C), oscilador (O) y generador de señal (GS).

chorro cargado desde la punta. En nuestras condiciones experimentales, y debido a la baja conductividad eléctrica de la formamida, la visualización de la emisión de este chorro es complicada debido a que tiene lugar en tiempos tan cortos que no puede ser captada con buena resolución temporal por la cámara. Sin embargo, en la [figura 4.6](#) se observa con claridad el fino chorro emitido para un voltaje de $\Phi_b = 8,5 \text{ kV}$ por una gota de etilenglicol puro.

La dinámica de la gota sometida a un campo eléctrico oscilante se ha caracterizado experimentalmente en función de los parámetros α y del número de Bond eléctrico definido como

$$Bo_E = \varepsilon_0 E_\infty^2 R / \gamma, \quad (4.2)$$

donde E_∞ se define como el valor del campo eléctrico que existe en el centro del electrodo inferior cuando éste se encuentra a potencial Φ_b y en ausencia de gota; obsérvese debido a que el tamaño característico de la gota, R , verifica que $R \ll L$ y $R \ll H$, E_∞ puede considerarse también en primera aproximación como el valor del campo exterior en la región ocupada por la gota. Dicho valor se ha expresado como $E_\infty = f\Phi_b/H$, siendo f un factor de forma que tiene en cuenta la intensificación del campo debido a los efectos tridimensionales asociados a que el diámetro de los

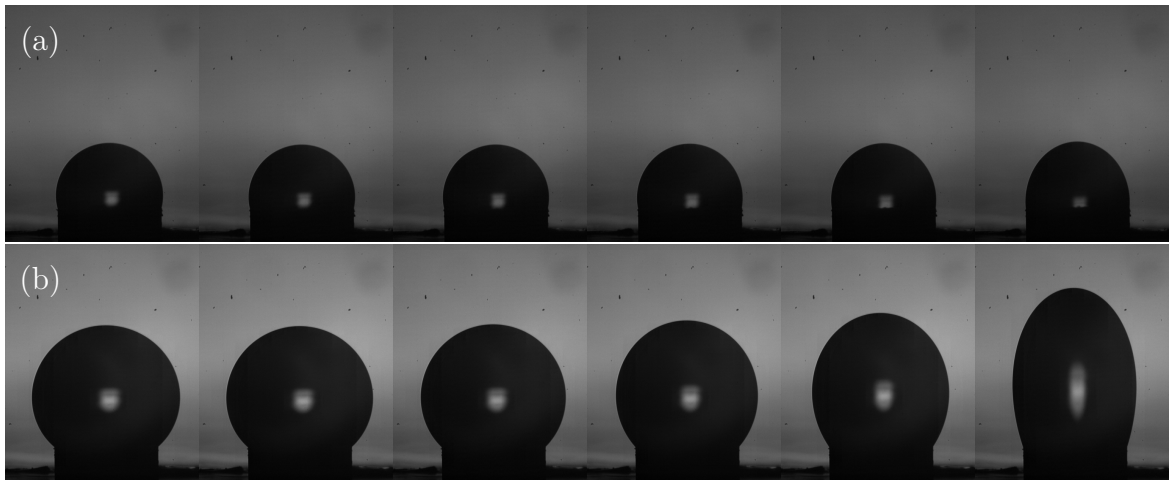


Figura 4.5 Soluciones de equilibrios para diferentes volúmenes, aumentando potencial desde 0kV hasta 10kV en incrementos de 2kV. (a) $\alpha = 0,115\frac{\pi}{2}$ y (b) $\alpha = 0,490\frac{\pi}{2}$



Figura 4.6 Emisión de chorro cargado de una gota de etilenglicol conectada a 8,5kV.

electrodos es del mismo orden que su separación, $L \sim H$; el valor de f se ha obtenido ajustando a las formas de equilibrio experimentales las teóricas obtenidas mediante el método explicado en la sección §4.4.1, y se ha comprobado que siempre resulta el mismo valor $f = 1,245$ independientemente de los valores de α y de Φ_b . Para cada valor de α y Bo_E , se han obtenido experimentalmente el valor máximo adimensional de $z_p(t)$, $z_{p,max}/R$, como función de la frecuencia adimensional de excitación $\omega\sqrt{\rho R^3/\gamma}$. En la **figura** 4.7 se muestra un diagrama típico de respuesta en frecuencia obtenido para una gota con $\alpha = 0,43\frac{\pi}{2}$, habiéndose observado comportamientos muy similares en todos los diagramas obtenidos para diferentes valores de α . Obsérvese que existe un pico en la amplitud de la oscilación para una frecuencia bien definida, la frecuencia de

resonancia, y que dicha amplitud cae prácticamente a la de la situación de equilibrio para frecuencias fuera de un estrecho entorno de la frecuencia de resonancia. Además, se observa que al aumentar Bo_E la gota se elonga en mayor medida, como se ha comentado anteriormente para las formas de equilibrio, y la frecuencia de resonancia disminuye. Este último efecto ha sido ya reportado en la literatura [4], y puede atribuirse al hecho de que la repulsión entre las cargas superficiales tiende a contrarrestar las fuerzas de tensión superficial y a disminuir, por tanto, la frecuencia de vibración de la gota.

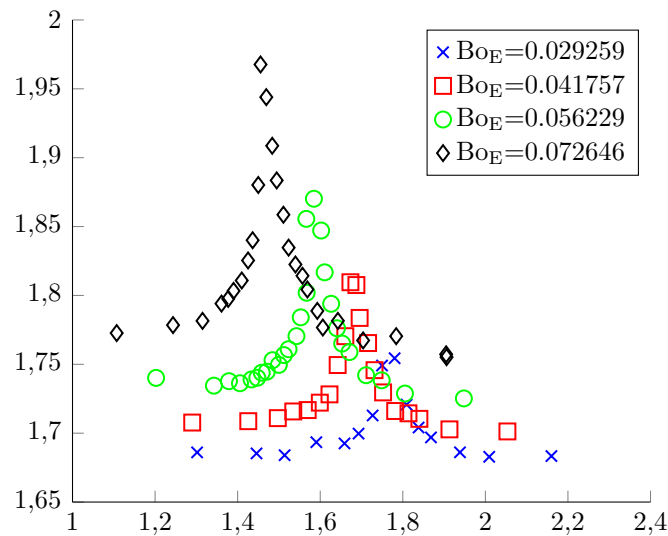


Figura 4.7 Respuesta en frecuencia ante excitaciones eléctricas $\alpha = 0,43\frac{\pi}{2}$

Finalmente, también se han realizado experimentos excitando las gotas de una forma puramente mecánica ($Bo_E = 0$) mediante el dispositivo esquematizado en la figura 4.4. En la figura 4.8 los experimentos marcados en verde se han realizado aumentando la frecuencia, mientras que los marcados en rojo disminuyéndola. Obsérvese en la figura 4.8a histéresis de tipo *softening* que aparece en la amplitud y que ha sido previamente reportada [2]. En la figura 4.8(a) se observa la variación (del orden del 10 %) medida en el volumen de la gota debido al efecto de la evaporación de la mezcla de formamida; esta evaporación, que es indeseable desde el punto de vista experimental, ha sido ineludible en nuestros experimentos y se ha acrecentado enormemente cuando se ha usado otro tipo de líquidos como, por ejemplo, el etilenglicol.

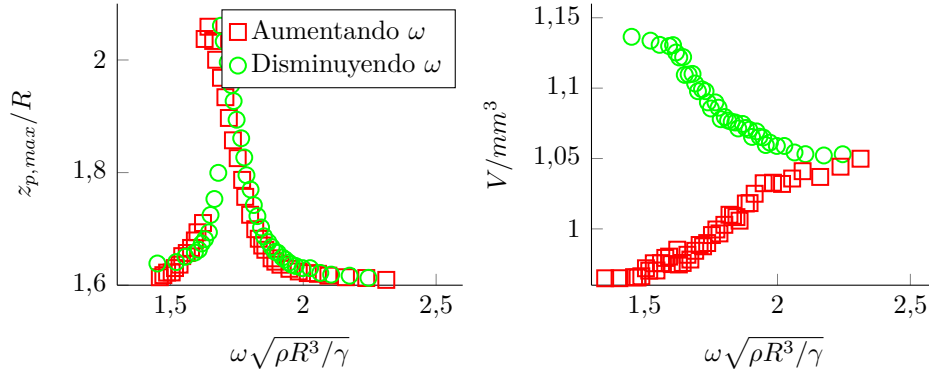


Figura 4.8 Respuesta en frecuencia ante excitaciones mecánicas $\alpha = 0,449\frac{\pi}{2}$

4.3. Análisis teórico

En esta sección se formulará la dinámica de gotas no viscosas, ancladas o libres, y en el seno de un campo eléctrico uniforme. Posteriormente, se expondrá un método apropiado para su resolución numérica.

4.3.1. Formulación del problema

En esta sección se formularán las ecuaciones que gobiernan la dinámica de las gotas cargadas consideradas en los experimentos reportados en la sección anterior con el objeto de comparar los resultados experimentales con los teóricos obtenidos mediante la resolución numérica de dichas ecuaciones. En primer lugar obsérvese que en el análisis del movimiento vibratorio de una gota se espera que en la ecuación de cantidad de movimiento los términos de inercia local sean del mismo orden que los gradientes de presiones asociados a la fuerzas restauradoras de la tensión superficial. Si el valor característico del desplazamiento de la superficie de la gota, donde $\zeta \sim O(1)$ ó $\zeta \ll 1$ en el caso vibraciones de pequeña amplitud, los valores característicos de las variaciones de presión en el interior de la gota con respecto a la presión de equilibrio y del gradiente de presión asociado a dichas variaciones pueden estimarse, respectivamente, como

$$p'_c \sim \frac{\gamma}{R + \zeta R} - \frac{\gamma}{R} \sim \frac{\gamma}{R}\zeta, \quad \text{y} \quad \nabla p \sim \frac{p'_c}{R} \sim \frac{\gamma}{R^2}\zeta, \quad (4.3)$$

donde se ha supuesto que la longitud de onda típica de las vibraciones es de orden R . Por otra parte, si t_c denota el periodo característico de vibración de la gota, la velocidad de vibración será $v_c \sim \zeta R/t_c$, y el término de inercia local en la ecuación de

cantidad de movimiento puede estimarse como

$$\rho \partial_t \mathbf{v} \sim \rho \frac{\zeta R}{t_c^2}. \quad (4.4)$$

Igualando el orden de magnitud de este término con el de ∇p de (4.3), resulta la estimación para t_c

$$t_c \sim \sqrt{\frac{\rho R^3}{\gamma}}. \quad (4.5)$$

La importancia de las fuerzas de viscosidad en el movimiento de la gota puede estimarse ahora en términos del número de Ohnesorge, Oh, como

$$\frac{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}{\rho \partial_t \mathbf{v}} \sim \frac{\mu v_c / R^2}{\rho v_c / t_c} \sim \sqrt{\frac{\mu^2}{\rho \gamma R}} \equiv \text{Oh}. \quad (4.6)$$

En nuestros experimentos el número de Ohnesorge es $\text{Oh} = 0,018 \ll 1$, por lo que resulta justificado despreciar las fuerzas de viscosidad en las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la gota, que serán, por tanto, las de un fluido incompresible e ideal:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.7a)$$

$$\rho \partial_t \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathcal{I} + cz \mathcal{I}) = 0, \quad (4.7b)$$

donde \mathcal{I} es el tensor identidad, y se ha incluido un potencial de fuerzas másicas de la forma cz puesto que, por generalidad, en lo que sigue se considerarán teóricamente no sólo vibraciones de gotas cargadas ancladas, sino también el de gotas libres cuyo centro de masas se desplaza bajo la acción de un campo eléctrico constante con una aceleración constante c en la dirección z . En este caso es conveniente tomar ejes ligados al centro de masa de la gota, mientras que para gotas ancladas se tomarán ejes inerciales y, por tanto, $c = 0$.

Como el movimiento del fluido es inicialmente irrotacional y se han despreciado las fuerzas de viscosidad, el campo de velocidades deriva de un potencial: $\mathbf{v} = \nabla \phi$. Entonces, es conveniente escribir las ecuaciones (4.7) en términos de ϕ , en cuyo caso la ecuación de continuidad da lugar a la de Laplace,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (4.8)$$

que debe resolverse en el interior del dominio de la gota sujeta a la condición de contorno de que en la superficie libre, que se denotará por $F(\mathbf{x}, t) = 0$ y deberá calcularse como parte del problema, se de la condición de superficie fluida,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \nabla F = 0, \quad (4.9)$$

y, además, si la gota está anclada, debe satisfacerse la condición de impenetrabilidad del líquido en el soporte $z = 0$, $\partial\phi/\partial z = 0$. Además, la ecuación de cantidad de movimiento puede integrarse espacialmente una vez para proporcionar la ecuación no estacionaria de Bernoulli que permite calcular la presión en el interior de la gota en términos de ϕ :

$$\rho \frac{\partial\phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\rho v^2(\mathbf{x}, t) + p(\mathbf{x}, t) + \rho cz - p_{eq0} = 0, \quad (4.10)$$

donde la constante p_{eq0} que resulta de la integración espacial está determinada por el volumen de la gota, y representa la presión reducida que existe en el interior de la gota en equilibrio, que coincide con la presión en el plano $z = 0$. Como se verá posterior el valor p_{eq0} juega un papel fundamental en la estabilidad de la gota.

Conjuntamente con las ecuaciones (4.8)-(4.10) para la dinámica de la gota, deben resolverse también las que determinan el campo eléctrico sobre la misma. En nuestro caso, el periodo característico de vibración estimado por (4.5) permite suponer que todas las cargas de la gota están relajadas en su superficie, por lo que dichas ecuaciones se reducen a la ecuación de Laplace para el potencial eléctrico. En efecto, el tiempo de relajación de las cargas puede estimarse como $t_{re} \sim \varepsilon/K$, y su relación con t_c en nuestros experimentos resulta:

$$\frac{t_{re}}{t_c} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2 \gamma}{K^2 \rho R^3}} \approx 3 \cdot 10^{-8}. \quad (4.11)$$

Si φ denota el potencial eléctrico, debe cumplirse entonces que

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (4.12)$$

y el campo eléctrico está dado por $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Como condiciones de contorno para el potencial eléctrico se impondrán: a) $\varphi = 0$ sobre las superficies de la gota y del electrodo, y b) $\varphi \rightarrow \varphi_\infty = -f\Phi(t)z/H$ lejos de la superficie de la gota, donde $\Phi(t)$ es el potencial de excitación dado.

Las ecuaciones de los problemas hidrodinámico y eléctrico, (4.7) y (4.12) respectivamente, están acopladas mediante las condiciones de contorno en la superficie de la

gota, donde debe cumplirse que la suma de los esfuerzos eléctricos y de presión del líquido interior debe ser igual al esfuerzo de tensión superficial:

$$p + \frac{\varepsilon_0}{2} E_n^2 = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad (4.13)$$

donde $\mathbf{e}_{nS} = \nabla F / |\nabla F|$ es el vector unitario normal a la superficie, $E_n = -\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi$ es el campo normal a la misma y $\nabla \cdot \mathbf{n}$ su curvatura; obsérvese también que se ha definido p como la presión manométrica respecto a la del exterior de la gota, p_a .

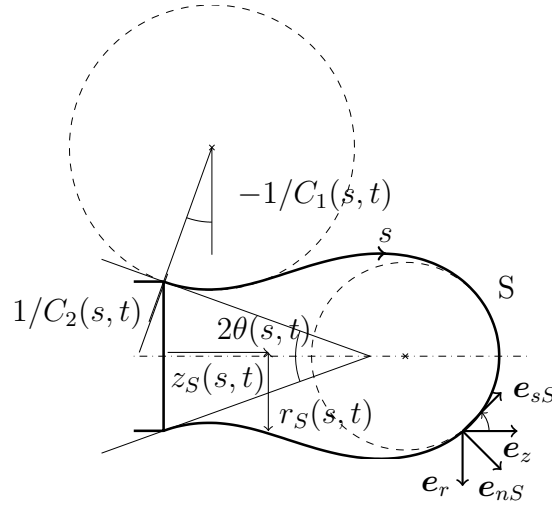


Figura 4.9 Geometría de una gota/chorro.

Dada la axilsimetría del problema, conviene parametrizar geoméricamente la gota como se indica en la [figura 4.9](#). En ella se muestra la longitud de arco s sobre la curva en que cualquier plano que contenga al eje z corta a la superficie $F(\mathbf{x}, t) = 0$. Las coordenadas cilíndricas de cualquier punto de dicha curva pueden expresarse como $r = r_S(s, t)$ y $z = z_S(s, t)$, satisfaciéndose que

$$r'_S - \sin \theta = z'_S - \cos \theta = 0, \quad (4.14)$$

donde $'$ denota derivada parcial con respecto de s y θ es el ángulo que la tangente a la curva forma con el eje z . Además, en cada punto de dicha curva, las curvaturas principales de la superficie, C_s y C_θ , que corresponden a las direcciones tangentes dentro del plano de la curva y acimutal, respectivamente, están relacionadas con el ángulo θ mediante las ecuaciones

$$C_s + \theta' = C_\theta - \frac{\cos \theta}{r_S} = 0. \quad (4.15)$$

Obsérvese que en la segunda expresión en (4.15) posee una singularidad evitable en la punta de la gota, donde $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ y $r_S \rightarrow 0$. En efecto, cerca de la punta de la gota se tiene, aplicando la regla de l'Hôpital,

$$C_\vartheta = \frac{-\sin \theta \theta'}{r'_S} = -\theta' = C_s \quad (4.16)$$

lo que debe ser debido a la axilsimetría de la superficie.

En el caso de que la gota esté anclada ($c = 0$) los valores de r , z y θ se deben de cumplir la siguientes condiciones de contorno en el perímetro de anclaje $s = 0$ y en la punta de la gota $s = L$ (que se determinará a posteriori como parte del problema):

$$z_S(0, t) = r_S(0, t) - R \cos \alpha = r_S(L, t) = \cos \theta(L, t) = 0. \quad (4.17)$$

Las condiciones para el caso de una gota libre cuyo centro de masas se desplaza en la dirección z con aceleración constante c son

$$r_S(0, t) = \cos \theta(0, t) = r_S(L, t) = \cos \theta(L, t) = 0, \quad (4.18)$$

donde ahora el punto $s = 0$ corresponde al extremo inferior de la gota, que está sobre el eje de simetría al igual que su otro extremo (punta) en $s = L$. En este caso, debe añadirse también la condición de que el centro de masa de la gota está fijo en $z = 0$ respecto a los ejes no inerciales:

$$\int_0^{L(t)} z_S(s, t) r_S^2(s, t) \cos \theta(s, t) ds = 0. \quad (4.19)$$

En la superficie las velocidades normales fluido y de la interfase. Como para un punto de S está dada por $\mathbf{w}(s, t) = w\mathbf{e}_r + u\mathbf{e}_z$ siendo

$$w = \dot{r}_S, \quad u = \dot{z}_S. \quad (4.20)$$

y, de acuerdo con la [figura 4.9](#), $\mathbf{e}_n = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_z$, se debe cumplir la condición de contorno para ϕ

$$\mathbf{e}_n \cdot \nabla \phi = w \cos \theta - u \sin \theta \quad (4.21)$$

que es equivalente a (4.9).

4.3.2. Resolución numérica

Una vez establecidas las ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan el potencial velocidades, el potencial eléctrico y las variables geométricas que definen la superficie, se procederá a continuación describir el procedimiento numérico llevado a cabo para su resolución. En primer lugar obsérvese que, puesto que estamos interesados en la dinámica de la superficie de la gota y ésta depende de magnitudes definidas sobre la misma, es conveniente usar la representación integral de Green para los potenciales de velocidades y eléctrico que, automáticamente, asegura el cumplimiento de sus respectivas ecuaciones de Laplace. Particularizada en la superficie, la fórmula integral de Green proporciona:

$$\frac{1}{2}(\varphi_S - \varphi_\infty) + \int_0^L h_\varphi(s, s', t)[\varphi_S - \varphi_\infty] ds' = \int_0^L g_\varphi(s, s', t)[E_{nS} - E_{nS\infty}] ds', \quad (4.22a)$$

$$-\frac{1}{2}\phi_S + \int_0^L h_\phi(s, s', t)\phi_S ds' = \int_0^L g_\phi(s, s', t)v_{nS} ds', \quad (4.22b)$$

donde el subíndice S denota valores sobre la superficie, h_φ , h_ϕ , g_φ y h_ϕ son kernels cuyas expresiones se escribirán explícitamente más abajo y que dependen de las coordenadas de los puntos de la superficie, $r_S(s, t)$, $z_S(s, t)$ y $\theta(s, t)$ que, al igual que φ_S , ϕ_S , v_{nS} y E_{nS} , son desconocidas a priori debiéndose calcular como parte del problema. Obsérvese que en la fórmula de Green para el potencial y campo eléctricos se ha escrito en términos de la diferencia de éstos con respecto a los del exterior de forma que se cumpla la condición de contorno $\lim_{x \rightarrow \infty}(\varphi - \varphi_\infty) = 0$. Asimismo, la ecuación no estacionaria de Bernoulli (4.10) particularizada en la superficie puede expresarse en términos de las variables sobre la misma teniendo en cuenta la definición $\phi_S(s, t) \equiv \phi[\mathbf{x}(s, t), t]$, que proporciona

$$\frac{\partial \phi_S(s, t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S} + \frac{\partial \mathbf{x}_S(s, t)}{\partial t} \cdot [\nabla \phi]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_S} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_S, \quad (4.23)$$

y sustituyendo la presión en la superficie en términos de E_{nS} y $\nabla \cdot \mathbf{e}_n = C_s + C_\vartheta$ haciendo uso de (4.13). Se obtiene entonces:

$$\rho \frac{\partial \phi_S}{\partial t} + \rho \mathbf{v}_S \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_S - \mathbf{w} \right) + \gamma(C_s + C_\vartheta) - \frac{\varepsilon_0}{2} E_{S,n}^2 + \rho c z(\mathbf{x}) = p_{eq0}. \quad (4.24)$$

Las ecuaciones (4.22) y (4.24) conjuntamente con las asociadas a la geometría de la superficie introducidas en la subsección anterior permiten cerrar el problema y proceder a su resolución numérica. Para ello, es conveniente normalizar el rango de la variable

espacial al intervalo $[0, 1]$ mediante el cambio de variable independiente

$$s = L(t)\xi, \quad (4.25)$$

por lo que cualquier función f_S definida sobre puede ser considerada bien como una función de (s, t) o de (ξ, t) , estando sus derivadas relacionadas por:

$$\left[\frac{\partial f_S}{\partial s} \right]_t = \frac{1}{L(t)} \left[\frac{\partial f_S}{\partial \xi} \right]_t, \quad (4.26a)$$

$$\left[\frac{\partial f_S}{\partial t} \right]_s = \left[\frac{\partial f_S}{\partial t} \right]_\xi + \left[\frac{\partial f_S}{\partial \xi} \right]_t \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} \right]_s = \left[\frac{\partial f_S}{\partial t} \right]_\xi - \frac{U(t)}{L(t)} \xi \left[\frac{\partial f_S}{\partial \xi} \right]_t. \quad (4.26b)$$

donde $U(t) = dL(t)/dt$. Finalmente, las ecuaciones que gobiernan las 13 incógnitas del problema:

$$r_S, z_S, \theta, C_s, C_\vartheta, u, w, \phi_S, v_{nS}, \varphi_S, E_{nS}, L \text{ y } U, \quad (4.27)$$

se obtienen de expresar las ecuaciones geométricas, Green, Bernoulli, en términos de ξ y t haciendo uso de (4.26)

$$\frac{\partial r_S}{\partial \xi} = L \sin \theta, \quad (4.28a)$$

$$\frac{\partial z_S}{\partial \xi} = L \cos \theta, \quad (4.28b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -LC_s, \quad (4.28c)$$

$$C_\vartheta = \frac{\cos \theta}{r_S}, \quad (4.28d)$$

$$\frac{\partial r_S}{\partial t} + \xi U \sin \theta = w, \quad (4.28e)$$

$$\frac{\partial z_S}{\partial t} + \xi U \cos \theta = u, \quad (4.28f)$$

$$\frac{dL}{dt} = U, \quad (4.28g)$$

$$v_{nS} = w \cos \theta - u \sin \theta, \quad (4.28h)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \phi_S}{\partial t} - \rho \xi \frac{U}{L} \frac{\partial \phi_S}{\partial \xi} - \frac{\rho}{2} [v_{nS}^2 + 2 \frac{1}{L} \frac{\partial \phi_S}{\partial \xi} (\cos \theta u + \sin \theta w) - (\frac{1}{L} \frac{\partial \phi_S}{\partial \xi})^2] + \\ = -\gamma(C_s + C_\vartheta) + \frac{\varepsilon}{2} E_{nS}^2 - cz_S + p_{eq0}, \end{aligned} \quad (4.28i)$$

$$-\frac{\varphi_S(\xi, t) - \varphi_\infty(\xi', t)}{2L} + \int_0^1 [h(\xi, \xi', t) - \tilde{h}(\xi, \xi', t)] [\varphi_S(\xi', t) - \varphi_\infty(\xi', t)] d\xi' =$$

$$+ \int_0^1 [g(\xi, \xi', t) - \tilde{g}(\xi, \xi', t)][E_{nS}(\xi', t) - E_{n\infty}(\xi', t)]d\xi', \quad (4.28j)$$

$$\frac{\phi_S(\xi, t)}{2L} + \int_0^1 [h(\xi, \xi', t) + \tilde{h}(\xi, \xi', t)]\phi_S(\xi', t)d\xi' = \int_0^1 [g(\xi, \xi', t) + \tilde{g}(\xi, \xi', t)]v_{nS}(\xi', t)d\xi', \quad (4.28k)$$

$$\varphi_S = 0 \quad (4.28l)$$

donde las funciones g y h en (4.28j) y (4.28k) están dados explícitamente por [6]

$$g(\xi, \xi', t) = \frac{2r_S(\xi', t)}{\pi\tilde{A}^{1/2}(\xi, \xi', t)}K[\tilde{m}(\xi, \xi', t)], \quad (4.29a)$$

$$h(\xi, \xi', t) = \frac{2r_S(\xi', t)}{\pi\tilde{A}^{1/2}(\xi, \xi', t)}E[\tilde{m}(\xi, \xi', t)] \left\{ \frac{\cos\theta(\xi', t)}{2r_S(\xi', t)} + \frac{[r_S(\xi, t) - r_S(\xi', t)]\cos\theta(\xi', t) - [z_S(\xi, t) - z_S(\xi', t)]\sin\theta(\xi', t)}{\tilde{B}(\xi, \xi', t)} \right\} - \frac{\cos\theta(\xi', t)}{\pi\tilde{A}^{1/2}(\xi, \xi', t)}K[\tilde{m}(\xi, \xi', t)] \quad (4.29b)$$

siendo $\tilde{A}(\xi, \xi', t) = [r_S(\xi, t) + r_S(\xi', t)]^2 + [z_S(\xi, t) - z_S(\xi', t)]^2$, $\tilde{B}(\xi, \xi', t) = [r_S(\xi, t) - r_S(\xi', t)]^2 + [z_S(\xi, t) - z_S(\xi', t)]^2$ y $\tilde{m}(\xi, \xi', t) = 4r_S(\xi, t)r_S(\xi', t)/\tilde{A}(\xi, \xi', t)$, y las funciones \tilde{g} y \tilde{h} son nulas para una gota libre, mientras que para una anclada surgen de la aplicación del método de las imágenes obteniéndose de las expresiones de g y h , respectivamente, reemplazando en ellas $z_S(\xi', t)$ por $-z_S(\xi', t)$ y $\cos\theta(\xi', t)$ por $-\cos\theta(\xi', t)$. Obsérvese que \tilde{g} y \tilde{h} son las apropiadas para que la superficie $z = 0$ sea una de potencial eléctrico(en este caso nulo) e impermeable para el potencial de velocidades. El sistema fuertemente no lineal e integro-algebraico-diferencial (4.28) involucra ecuaciones diferenciales en ξ para variables r_S , z_S y θ debiéndose, además, calcular $L(t)$ como parte del problema. Esto requiere especificar un total de cuatro condiciones de contorno que, para el caso de gota anclada son

$$z_S(0, t) = r_S(0, t) - R\cos\alpha = r_S(1, t) = \cos\theta(1, t) = 0, \quad (4.30)$$

mientras que en el caso de gota libre se tiene una condición adicional que fija a $z = 0$ la posición del centro de masas en los ejes no inerciales, resultando :

$$r_S(0, t) = \cos \theta(0, t) = r_S(1, t) = \cos \theta(1, t) = \int_0^1 r_S^2(\xi, t) z_S(\xi, t) \cos \theta(\xi, t) d\xi = 0. \quad (4.31)$$

Obsérvese que, aunque en la ecuación (4.28i) aparece $\partial \phi_S / \partial \xi$, no se requiere imponer condiciones de contorno para el potencial eléctrico debido a que, como se indicó anteriormente, éstas ya están implícitas en la ecuación de Green (4.28k). Las condiciones iniciales para las variables cuyas derivadas temporales aparecen en las ecuaciones (4.28) son

$$r_S(\xi, 0) - \cos[\alpha(1 - \xi) - \frac{\pi}{2}\xi] = z_S(\xi, 0) + \sin[\alpha(1 - \xi) - \frac{\pi}{2}\xi] = \phi_S(\xi, 0) = 0, \quad (4.32)$$

Obsérvese, que la condición inicial para $L(0)$ debe ser compatible con $r_S(\xi, 0)$ y $z_S(\xi, 0)$, mediante la relación $L(0)^2 = [\partial_\xi r_S(\xi, 0)]^2 + [\partial_\xi z_S(\xi, 0)]^2$ que se obtiene de manipular (4.28a)-(4.28b) y, por tanto,

$$L(0) = \alpha + \frac{\pi}{2}. \quad (4.33)$$

El sistema de ecuaciones y condiciones de contorno, fuertemente no lineal e integro-algebraico-diferencial, (4.28) junto con (4.51) o (4.31), se ha integrado numéricamente avanzando en el tiempo desde t_{j-1} hasta t_j con un esquema en diferencias finitas implícito puro. En efecto, las derivadas temporales se discretizan hacia atrás, de manera que para una ecuación de la forma genérica una $\partial y(\xi, t) / \partial \xi = f[y(\xi, t), \xi, t]$ tal como (4.28)e,f, las innumerables se tiene

$$\frac{y(\xi_i, t_j) - y(\xi_i, t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = f[y(\xi_i, t_j), \xi_i, t_j]. \quad (4.34)$$

donde ξ_i es el punto i de la malla de $N + 1$ puntos esquematizada en la [figura 4.10](#).



Figura 4.10 Malla en ξ

Además, ecuaciones de la forma genérica $\partial y(\xi, t) / \partial \xi = f[y(\xi, t), \xi, t]$, tales como las (4.28a)-(4.28c), se discretizan integrando en la celda i mediante la regla de los

trapecios:

$$y(\xi_i, t_j) - y(\xi_{i-1}, t_j) = \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f d\xi \approx \frac{h_i}{2} \{f[y(\xi_i, t_j), \xi_{i-1}, t_j]\}, \quad (4.35)$$

para $i = 1, \dots, N$. Nótese que dado que para $\partial\phi_S/\partial\xi$ no es necesario condiciones de contorno, y por ello, se discretiza en los puntos interiores $i = 1, \dots, N - 1$ mediante diferencias finitas centradas, y en los puntos extremos $i = 0$ e $i = N$ se tiene en cuenta que el valor de su derivada es nulo,

$$\frac{\partial\phi_S}{\partial\xi}(\xi_i, t_j) \approx \frac{\phi_S(\xi_{i+1}, t_j) - \phi_S(\xi_{i-1}, t_j)}{h_i + h_{i+1}}, \quad \frac{\partial\phi_S}{\partial\xi}(\xi_0, t_j) = \frac{\partial\phi_S}{\partial\xi}(\xi_N, t_j) = 0. \quad (4.36)$$

Finalmente, las ecuaciones (4.28j)-(4.28k), que contienen integrales, se discretizan por colocación en todos los puntos de la malla $\xi = \xi_i$ ($i = 0, \dots, N$) realizándose las integrales mediante cuadratura de Gauss de orden N_g , en este caso $N_g = 8$,

$$\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{N_g} w_k f\left(\frac{1 - \eta_k}{2}\xi_i + \frac{1 + \eta_k}{2}\xi_{i+1}\right) \quad (4.37)$$

donde η_k y w_k son los N_g puntos de cuadratura y sus correspondientes pesos [7, 6].

Finalmente, el sistema algebraico resultante de la discretización se ha resuelto mediante el algoritmo iterativo de Newton-Raphson. En la sección §4.4.2 se compararán los resultados con los obtenidos mediante un análisis de estabilidad lineal de las ecuaciones (4.28).

4.4. Formas de equilibrio y análisis de estabilidad lineal

El procedimiento de resolución numérica descrito en la sección §4.3.2 es general y permite, en principio, calcular las vibraciones axilsimétricas de gotas cargadas incluso cuando estas son de gran amplitud. Sin embargo, por ser de interés a la hora de interpretar los resultados y comparar con los experimentos, se procederá en esta sección a calcular las posibles formas de equilibrio de la gota y a realizar un análisis de estabilidad de dichas formas frente a pequeñas perturbaciones de dichas formas.

4.4.1. Formas de equilibrio

Las ecuaciones que gobiernan las soluciones de equilibrio del sistema (4.28)-(4.33) se obtienen anulando los términos de derivadas temporales, lo que implica automáticamente que todas las variables cinématicas son nulas: $u = w = v_{nS} = \phi_S = U = 0$ son nulas. Denotando por el subíndice las variables de la solución de equilibrio, y teniendo en cuenta que $u_0 = w_0 = v_{nS0} = \phi_{S0} = U_0 = 0$, las ecuaciones que gobiernan las formas de equilibrio son:

$$\frac{dr_{S0}}{d\xi} = L_0 \sin \theta_0, \quad (4.38a)$$

$$\frac{dz_{S0}}{d\xi} = L_0 \cos \theta_0, \quad (4.38b)$$

$$\frac{d\theta_0}{d\xi} = -L_0 C_{s0}, \quad (4.38c)$$

$$C_{\vartheta 0} = \frac{\cos \theta_0}{r_{S0}}, \quad (4.38d)$$

$$\gamma(C_{s0} + C_{\vartheta 0}) - \frac{\varepsilon}{2} E_{Sn0}^2 + cz_{S0} = p_{eq0}, \quad (4.38e)$$

$$-\frac{\varphi_{S0} - \varphi_{\infty}}{2L_0} + \int_0^1 (h - \tilde{h})(\varphi_{S0} - \varphi_{\infty}) d\xi' = \int_0^1 (g - \tilde{g})(E_{nS0} - E_{n\infty}) d\xi', \quad (4.38f)$$

$$\varphi_{S0} = 0. \quad (4.38g)$$

Las ecuaciones condiciones de contorno (4.38) deben resolverse junto con las condiciones de contorno

$$z_{S0}(0) = r_{S0}(0) - R \cos \alpha = r_{S0}(1) = \cos \theta_0(1) = 0, \quad (4.39)$$

que en el caso de una gota libre debe suplementarse con una condición adicional que fija a $z = 0$ la posición del centro de masas en los ejes no inerciales, resultando:

$$r_{S0}(0) = \cos \theta_0(0) = r_{S0}(1) = \cos \theta_0(1) = \int_0^1 r_{S0}^2(\xi) z_{S0}(\xi) \cos \theta_0(\xi) d\xi = 0. \quad (4.40)$$

El sistema de ecuaciones (4.38)-(4.40), se ha resuelto mediante el método de Newton-Raphson, una vez discretizadas las derivadas e integrales como se explico en la sección anterior.

En la [figura 4.11](#), se han comparado las formas de equilibrio experimentales con las obtenidas numéricamente. Para ello, ha sido necesario primero, calcular el factor de forma f que, como se indicó en la sección §4.4, tiene en cuenta los efecto de borde. El

cálculo de f se ha realizado ajustando la forma de equilibrio obtenida numéricamente a la experimental para una gota con α y Bo_E dados, resultando el valor $f = 1,245$. Se ha comprobado que dicho valor es el que ajusta las formas de equilibrio teóricas y experimentales para cualquier otro caso. Obsérvese que el efecto del campo eléctrico es mayor cuanto mayor es el tamaño de la gota. En particular, para la gota de mayor tamaño en la [figura 4.11](#), correspondiente a $\alpha = 0,49\frac{\pi}{2}$, se observa una distorsión apreciable para los valores más alto del potencial eléctrico, y si se sigue aumentando éste, se producirá emisión de líquido desde la punta de la gota [10] (véase [figura 4.6](#)).

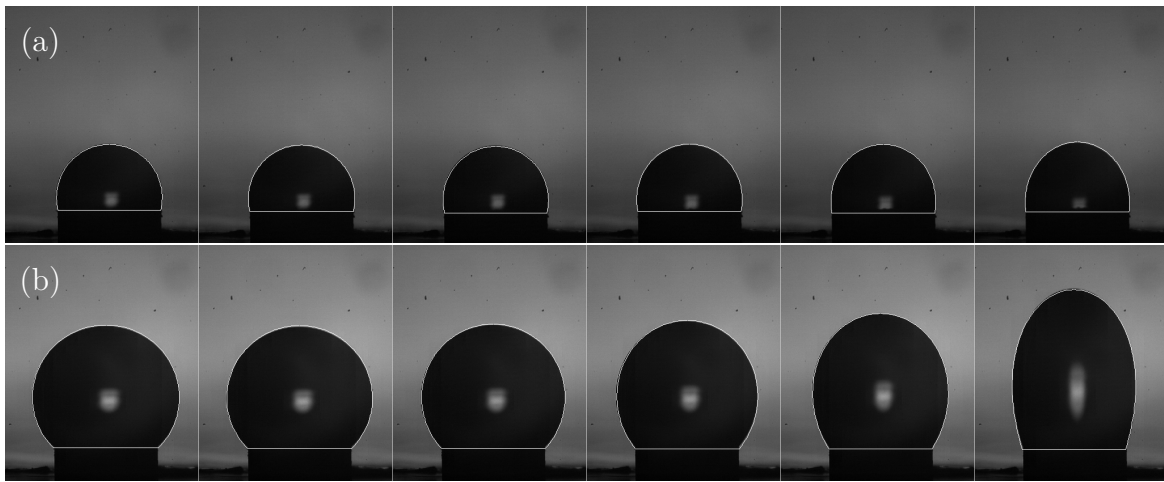


Figura 4.11 Gota anclada en un campo constante. $\alpha = 0,155\pi/2$ y $\alpha = 0,490\pi/2$. Fotos desde $\phi = 0kV$ hasta $\phi = 10kV$, en incrementos de $2kV$. factor de forma $f = 1,245$.

En la [figura 4.12](#) se representa la distancia adimensional, z_{max}/R , desde la punta de la gota al electrodo como función de Bo_E para distintos ángulos de anclaje. Se observa como, para cada valor de α existe un valor crítico del número de Bond, Bo_E^* , por encima del cual no existe formas de equilibrio [13]. Por debajo de dicho valor la teoría predice que son posibles varias soluciones de equilibrio de las cuales solo es estable la correspondiente al mínimo valor de z_{max}/R . En la [figura 4.12](#) se observa que el valor de Bo_E^* disminuye para valores crecientes del ángulo de anclaje, puesto que aumenta el volumen de la gota.

También se han considerado en este trabajo las formas de equilibrio de gotas libres conductoras y cargadas en presencia de un campo eléctrico exterior uniforme. En este caso, el centro de masas de la gota posee una aceleración constante y, dependiendo de los valores de la carga y del campo eléctrico, esta puede romperse o adquirir una forma de equilibrio elongada, en general asimétrica, por el efecto conjunto del campo eléctrico y la carga. La [figura 4.13](#), que es análoga a la [figura 4.12b](#), muestra que, también en el caso de gotas libres, existe, para cada valor de la carga adimensional

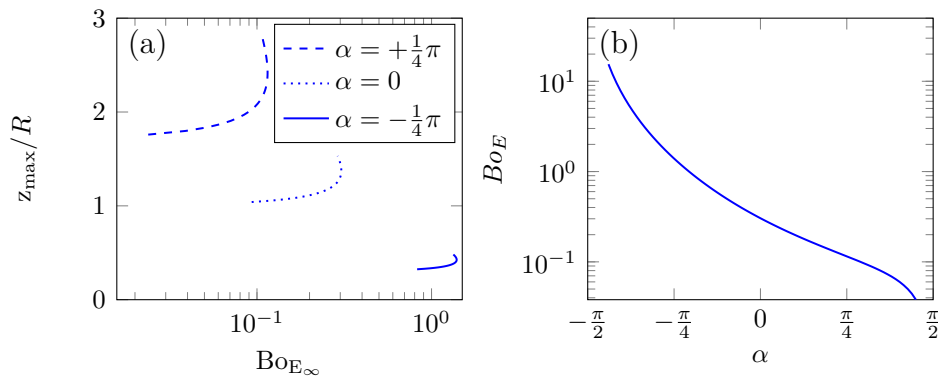


Figura 4.12 Inestabilidad tipo 'folding'.

$q/4\pi\sqrt{\gamma\varepsilon_0 R^3}$, un valor crítico del número de Bo_E^* por encima del cual no existe solución de equilibrio estable [1]. Además, se observa que el valor máximo, correspondiente a $Bo_E^* = 0$, que puede tener la carga para que exista solución de equilibrio coincide con el carga crítica de Rayleigh [9], $8\pi\sqrt{\gamma\varepsilon_0 R^3}$, por encima de la cual la gota experimenta una explosión coulombiana. Al disminuir la carga de la gota, el valor del número Bo_E^* aumenta hasta alcanzar el límite de Taylor [12], $Bo_E^* = 0,2025$, para la estabilidad de una gota conductora de carga nula en un campo eléctrico uniforme; por encima de dicho, la acción del campo eléctrico sobre la carga polarizada sobre la superficie de la gota es lo suficientemente fuerte para romper la misma. Finalmente, en la figura 4.13b las formas de equilibrio correspondientes a los valores críticos de Bo_E^* señalados en la figura 4.13a.

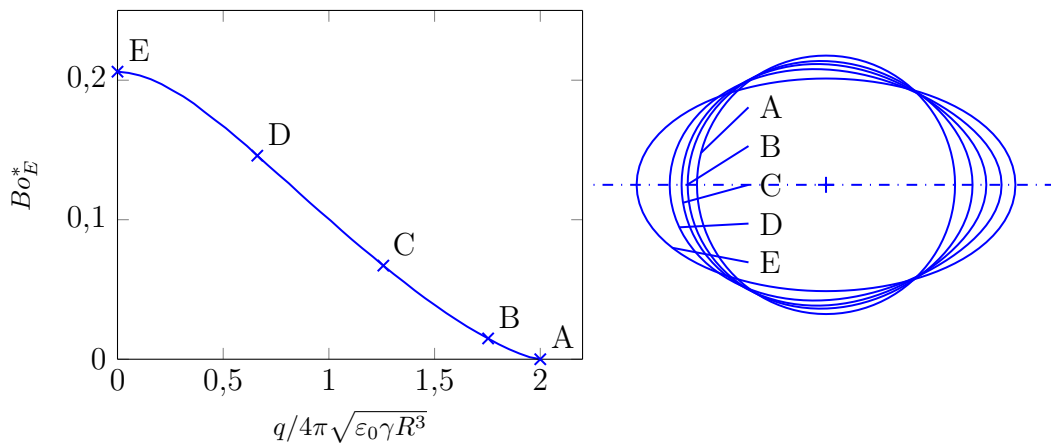


Figura 4.13 Estabilidad gota libre

4.4.2. Análisis de estabilidad

Para efectuar el análisis de estabilidad lineal de las formas de equilibrio obtenidas en la sección anterior, en las se perturban directamente las ecuaciones (4.28a)-(4.28i) expresando las variables r_S , z_S , θ , C_s , C_ϑ , u , w , L y U de la forma

$$r_S(\xi, t) = r_{S0}(\xi) + \epsilon e^{\lambda t} r_{S1}(\xi), \quad (4.41a)$$

$$z_S(\xi, t) = z_{S0}(\xi) + \epsilon e^{\lambda t} z_{S1}(\xi), \quad (4.41b)$$

$$C_s(\xi, t) = C_{s0}(\xi) + \epsilon e^{\lambda t} C_{s1}(\xi), \quad (4.41c)$$

$$C_\vartheta(\xi, t) = C_{\vartheta0}(\xi) + \epsilon e^{\lambda t} C_{\vartheta1}(\xi), \quad (4.41d)$$

$$u(\xi, t) = u_0(\xi) + \epsilon e^{\lambda t} w_0(\xi), \quad (4.41e)$$

$$w(\xi, t) = w_0(\xi) + \epsilon e^{\lambda t} w_1(\xi), \quad (4.41f)$$

$$\theta(\xi, t) = \theta_0(\xi) + \epsilon e^{\lambda t} \theta_1(\xi), \quad (4.41g)$$

$$L(t) = L_0 + \epsilon e^{\lambda t} L_1, \quad (4.41h)$$

$$U(t) = U_0 + \epsilon e^{\lambda t} U_1 \quad (4.41i)$$

donde el subíndice cero denota valores de equilibrio, el parámetro $\epsilon \ll 1$ representa la magnitud de la perturbación, y con el subíndice 1 se denotan las autofunciones correspondientes al autovalor λ , que representa la tasa de crecimiento de la perturbación. En cuanto a las ecuaciones (4.28j)-(4.28k), resultantes de las ecuaciones de Laplace para los potenciales eléctricos y de velocidades, y que contienen expresiones integrales cuyos núcleos son funciones complicadas de las variables que caracterizan la geometría de la superficie, se ha efectuado su perturbación siguiendo el procedimiento alternativo que se expone a continuación. Los potenciales y campos de velocidades y eléctrico en cada punto del espacio \mathbf{x} , perteneciente bien al interior de la gota o la región exterior a la misma, se expresan como suma de sus valores de equilibrio más las correspondientes perturbaciones de la forma:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(\mathbf{x}) + \epsilon e^{\lambda t} \varphi_1(\mathbf{x}), \quad (4.42a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) + \epsilon e^{\lambda t} \mathbf{E}_1(\mathbf{x}), \quad (4.42b)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \epsilon e^{\lambda t} \phi_1(\mathbf{x}), \quad (4.42c)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \epsilon e^{\lambda t} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}). \quad (4.42d)$$

Entonces, si $\mathbf{x}_S(\xi, t) = \mathbf{x}_0(\xi) + \epsilon e^{\lambda t} \mathbf{x}_1(\xi)$ denota un punto genérico de la superficie perturbada cuya posición en el equilibrio es $\mathbf{x}_0(\xi)$, los valores hasta orden ϵ de las

variables (4.42d) son:

$$\varphi(\mathbf{x}_S) = \varphi_0(\mathbf{x}_0) + \epsilon e^{\lambda t} [\varphi_1(\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_1 \cdot \nabla \varphi_0(\mathbf{x}_0)], \quad (4.43a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_S) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0) + \epsilon e^{\lambda t} [\mathbf{E}_1(\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_1 \cdot \nabla \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0)], \quad (4.43b)$$

$$\phi(\mathbf{x}_S) = \epsilon e^{\lambda t} \phi_1(\mathbf{x}_0), \quad (4.43c)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_S) = \epsilon e^{\lambda t} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}_0), \quad (4.43d)$$

donde se ha hecho uso de las series de Taylor hasta orden ϵ de φ_0 y de \mathbf{E}_0 . Por tanto, las ecuaciones y condiciones de contorno que satisfacen las perturbaciones de los campos eléctricos y de velocidades son, (4.28l) y (4.28h), respectivamente:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1(\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_1 \cdot \nabla \varphi_0(\mathbf{x}_0) = 0, \quad (4.44a)$$

$$\nabla^2 \phi_1 = 0, \quad v_{n1}(\mathbf{x}_0) = w_1 \cos \theta_0 - u_1 \sin \theta_0. \quad (4.44b)$$

Estas ecuaciones se reescribirán más abajo haciendo uso de la fórmula integral de Green.

Por otra parte, también es necesario calcular la componente normal del campo eléctrico sobre la superficie perturbada y que aparece en la ecuación de Bernoulli (4.28i). Para ello, como base para expresar las cantidades vectoriales del problema que, como están definidas sobre la superficie se usarán los vectores normal y tangencial a la superficie de equilibrio definidos como funciones de $\theta_0(\xi)$ por:

$$\mathbf{e}_{sS0}(\xi) = \cos \theta_0 \mathbf{e}_z + \sin \theta_0 \mathbf{e}_r \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_{nS0}(\xi) = -\sin \theta_0 \mathbf{e}_z + \cos \theta_0 \mathbf{e}_r, \quad (4.45)$$

Además, teniendo en cuenta que, de forma general :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{sS}}{\partial \theta} = \mathbf{e}_{nS}(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{nS}}{\partial \theta} = \mathbf{e}_{sS}(\theta), \quad (4.46)$$

se obtiene en primera aproximación para los vectores tangente y normal a la superficie perturbada,

$$\mathbf{e}_{nS}(\xi, t) = \mathbf{e}_{nS0} - \epsilon e^{\lambda t} \theta_1 \mathbf{e}_{sS0}, \quad (4.47a)$$

$$\mathbf{e}_{sS}(\xi, t) = \mathbf{e}_{sS0} + \epsilon e^{\lambda t} \theta_1 \mathbf{e}_{nS0}, \quad (4.47b)$$

donde \mathbf{e}_{nS0} y \mathbf{e}_{sS0} vienen dados por la expresión (4.45). Entonces, si se multiplica (4.43b) escalarmente por \mathbf{e}_{nS} teniendo en cuenta (4.47a), el campo eléctrico normal

sobre la superficie perturbada resulta, hasta orden ϵ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_S) \cdot \mathbf{e}_{nS} = E_{nS0}(\xi) + \epsilon e^{\lambda t} \{E_{nS1} - \theta_1 E_{sS0} + \mathbf{x}_1(\xi) \cdot [\nabla \mathbf{E}_0]_{x=x_0(\xi)} \cdot \mathbf{e}_{nS0}(\xi)\}, \quad (4.48)$$

siendo $E_{nS0} = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_{nS0}$ y $E_{nS1} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_{nS0}$ los campos eléctricos de equilibrio y perturbado, normales a la superficie de equilibrio, respectivamente, y $E_{sS0} = -\partial_s \varphi_{S0}$, que es igual a cero para el caso de superficie conductora que nos ocupa, $E_{sS0} = 0$. Además, como se demuestra en el Apéndice de este capítulo, si se expresa $\mathbf{x}_1 = x_{1n} \mathbf{e}_{nS0} + x_{1s} \mathbf{e}_{sS0}$ y se hace uso de (4.60), el último término de (4.48) está dado por:

$$\mathbf{x}_1 \cdot \nabla \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_{nS0} = x_{1s} \frac{1}{L_0} \frac{dE_{nS0}}{d\xi} - x_{1n} (C_{s0} + C_{\vartheta 0}) E_{nS0}, \quad (4.49)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\varphi_{S0} = 0$.

Finalmente, si se introducen (4.41) y (4.48)-(4.49) en (4.28), y se usa la fórmula integral de Green para las (4.44) se obtiene el sistema de ecuaciones para las cantidades de perturbación:

$$\frac{dr_{S1}}{d\xi} = L_1 \sin \theta_0 + L_0 \cos \theta_0 \theta_1, \quad (4.50a)$$

$$\frac{dz_{S1}}{d\xi} = L_1 \cos \theta_0 - L_0 \sin \theta_0 \theta_1, \quad (4.50b)$$

$$\frac{d\theta_1}{d\xi} = -L_1 C_{s0} - L_0 C_{s1}, \quad (4.50c)$$

$$C_{\vartheta 1} = -\frac{\sin \theta_0}{r_{S0}} \theta_1 - \frac{\cos \theta_0}{r_{S0}^2} r_{S1}, \quad (4.50d)$$

$$\lambda r_{S1} + \xi U_1 \sin \theta_0 = w_1, \quad (4.50e)$$

$$\lambda z_{S1} + \xi U_1 \cos \theta_0 = u_1, \quad (4.50f)$$

$$\lambda L_1 = U_1, \quad (4.50g)$$

$$v_{nS1} = w_1 \cos \theta_0 - u_1 \sin \theta_0, \quad (4.50h)$$

$$\lambda \rho \phi_{S1} = -\gamma (C_{s1} + C_{\vartheta 1}) + \varepsilon E_{nS0} [E_{nS1} + x_{1s} E'_{nS0} / L_0 - x_{1n} (C_{s0} + C_{\vartheta 0}) E_{nS0}] - c_0 z_{S1}, \quad (4.50i)$$

$$-\frac{\varphi'_{S1}}{2L_0} + \int_0^1 (h - \tilde{h}) \varphi_{S1} d\xi' = \int_0^1 (g - \tilde{g}) E_{nS1} d\xi', \quad (4.50j)$$

$$\frac{\phi_{S1}}{2L_0} + \int_0^1 (h + \tilde{h}) \phi_{S1} d\xi' = \int_0^1 (g + \tilde{g}) v_{nS1} d\xi', \quad (4.50k)$$

$$\varphi_{S1} - x_{1n} E_{nS0} = 0 \quad (4.50l)$$

donde se han definido $x_{1s} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{e}_{sS0} = r_{S1} \cos \theta_0 + z_{S1} \sin \theta_0$, $x_{1n} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{e}_{nS0} = -r_{S1} \sin \theta_0 + z_{S1} \cos \theta_0$, $\varphi_{S1} = \varphi_1(\mathbf{x}_0)$, $\phi_{S1} = \phi_1(\mathbf{x}_0)$ y $v_{nS1} = \mathbf{v}_1(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_{nS0}$. Obsérvese que las únicas variables que contienen derivadas con respecto de ξ son z_{S1} , r_{S1} y θ_1 , para las que el problema de autovalores requiere especificar las condiciones de contorno y una adicional para L^1

$$z_{S1}(0) = r_{S1}(0) = r_{S1}(1) = -\theta_1(1) \sin \theta_0(1) = 0. \quad (4.51)$$

El problema de autovalores (4.50)-(4.51) se ha resuelto numéricamente discretizándolo espacialmente como se explicó en la sección §4.4.1 y calculando los autovalores λ y las autofunciones asociadas con la función *eigs.m* de MATLAB.

En la [figura 4.14](#) se representa frente al ángulo de anclaje la parte imaginaria de la frecuencia adimensional de los primeros modos naturales de vibración, $\omega_n \sqrt{\rho R^3 / \gamma}$, de gotas ancladas en ausencia de campo eléctrico. En dicha figura se comparan con los resultados obtenidos por Strani and Sabetta [11] con los calculados haciendo uso de las ecuaciones que resultan de perturbar las (3.6) de la aproximación unidireccional introducida en el capítulo §3, y con valores obtenidos experimentalmente. Strani and Sabetta [11] consideró las vibraciones naturales de una gota esférica anclada a lo largo de un sector esférico de la misma, y en la [figura 4.14](#) se observa que las frecuencias obtenidas aquí difieren apreciablemente de las de Strani incluso en el límite $\alpha \rightarrow \pi/2$, para el que las condiciones de anclaje coinciden. No obstante, la validez de los resultados obtenidos aquí parece avalada por el hecho de que las frecuencias obtenidas coinciden con las de la gota libre en este límite (marcadas con una cruz en [figura 4.14](#)), cosa que no ocurre con los resultados de Strani and Sabetta [11], pero sí con los reportados por Ramalingam et al. [8] sobre las vibraciones de gotas esféricas restringidas al lo largo de un paralelo. Además, se observa en la figura que, para los modos de frecuencia natural más baja, las frecuencias obtenidas mediante el método numérico introducido en este capítulo coinciden con las obtenidas haciendo uso de la aproximación unidireccional, mientras que la aproximación unidireccional falla para modos de frecuencia mayor y,

¹Aunque el análisis de estabilidad y el cálculo de frecuencias modales se ha expuesto aquí solo para el caso de gotas ancladas, se ha suelto el problema de vibración de gotas libres y se han reproducido las frecuencias naturales dadas por Rayleigh [9] ω_n para las cuales se indican a continuación las condiciones de contorno que deben imponerse y que se obtienen de perturbar las condiciones (4.31):

$$r_{S1}(0) = -\theta_1(0) \sin \theta_0(0) = r_{S1}(1) = -\sin \theta_0(1) \theta_1(1) = \\ \int_0^1 (2r_{S1} r_{S0} z_{S0} \cos \theta_0 + 2r_{S0}^2 z_{S1} \cos \theta_0 - r_{S0}^2 z_{S0} \sin \theta_0 \theta_1) d\xi = 0$$

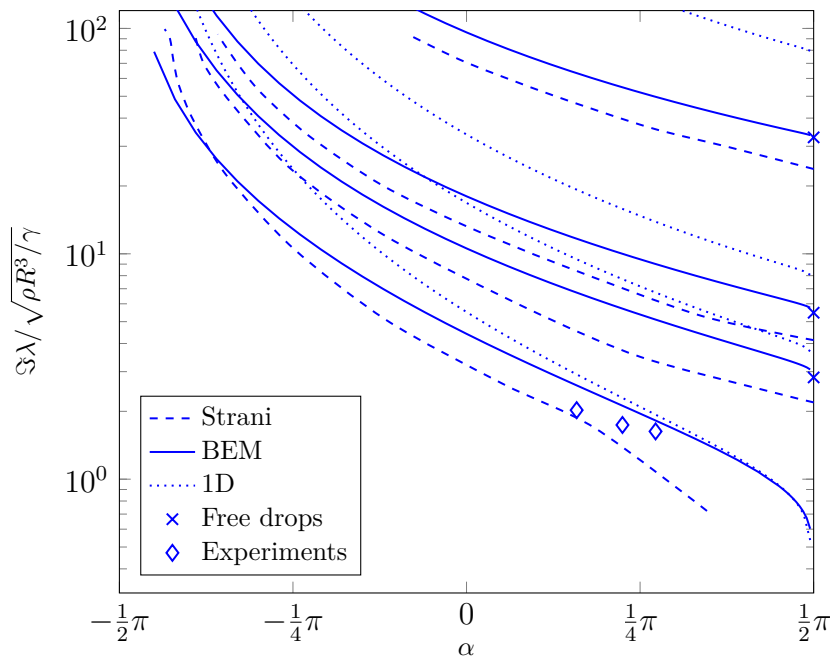


Figura 4.14 Frecuencia en función del ángulo de anclaje.

también, al reducir el valor de α (gotas más pequeñas). Lógicamente, esto es debido a que los efectos tridimensionales se hacen más importantes en estos casos. En cuanto a la comparación con los resultados experimentales, marcados con rombos en la [figura 4.14](#), nótese que difieren algo de los calculados numéricamente, especialmente para los valores más pequeños de α considerados en los experimentos. Aunque las causas de esta discrepancia deben aún estudiarse con mayor profundidad, podrían deberse al hecho de que en los experimentos se ha usado una mezcla de líquidos, con lo que podría haber efectos de Marangoni involucrados en el proceso, así como al hecho de que para valores pequeños de α el tamaño de las gotas disminuye, con lo que los efectos de viscosidad y de evaporación adquieren una mayor importancia.

En la [figura 4.15](#) se han representado frente a Bo_E las frecuencias naturales de vibración del primer modo para gotas en presencia de campo eléctrico ancladas con diferentes valores de α . Obsérvese que, como se anticipó al analizar las formas de equilibrio, las frecuencias se anulan para los valores de Bo_E^* , dependientes de α , por encima de los que no existe solución de equilibrio. En estos puntos las formas de equilibrio son las correspondientes a los puntos de tipo "folding" de la [figura 1.12a](#), y el análisis de estabilidad muestra que las parejas de autovalores complejos conjugados coalescen en el origen y aparecen soluciones inestables con autovalores reales puros. Los puntos marcados con rombos en la [figura 4.15](#) corresponden a resultados experimentales

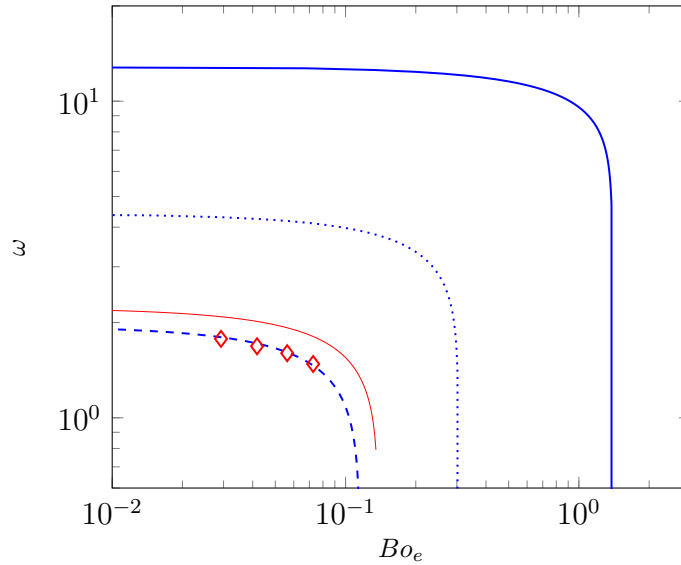


Figura 4.15 Frecuencia en función del número de Bond eléctrico: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ---, $\alpha = 0$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ —. Experimentos (\diamond) y solución numérica (—) para $\alpha = 0,43\frac{\pi}{2}$

para $\alpha = 0,43\pi/2$ y, de nuevo, se observa que existe cierta discrepancia con los resultados numéricos obtenidos para el mismo valor α (sobre la curva roja de la figura), que puede achacarse a los efectos comentados al final del párrafo anterior.

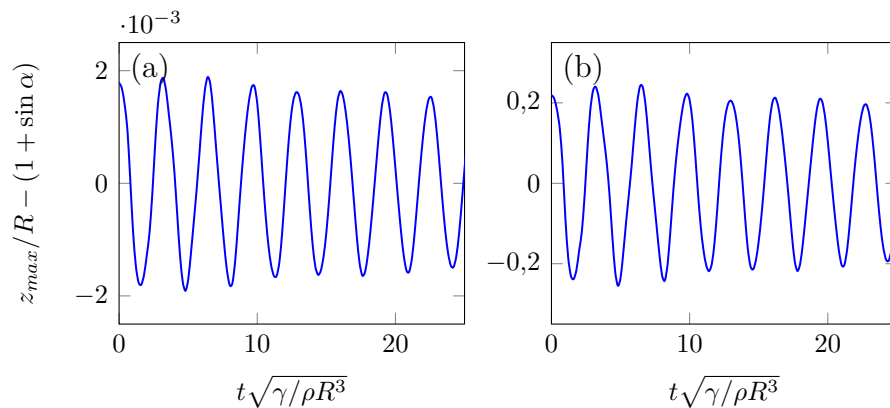


Figura 4.16 Transitorio con $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $Bo_E = 0$ y dos soluciones iniciales diferentes. (a) $\omega_1\sqrt{\rho R^3/\gamma} = 1,9578$ y (b) $\omega_1\sqrt{\rho R^3/\gamma} = 1,9440$.

Finalmente, se representa en la [figura 4.16](#) se representa el resultado de la integración temporal de las ecuaciones completas (4.28), con las condiciones iniciales (4.32)-(4.33) y con valores $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $Bo_g \cos^2 \alpha = 10^{-3}$ y $Bo_E = 0$. En particular, se representa la distancia de la punta z_{max}/R frente al tiempo $t\sqrt{\gamma/\rho R^3}$, y se puede observar que hay un modo de vibración dominante de frecuencia $\omega\sqrt{\rho R^3/\gamma} = 1,941$. Se ha usado una

incremento $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ y una discretización espacial uniforme en ξ con 100 celdas, habiéndose comprobado la independencia del resultado con respecto a la discretización. Obsérvese que la frecuencia de vibración obtenida mediante el análisis de estabilidad resulta $\omega\sqrt{\rho R^3/\gamma} = 1,9548$, que es muy próxima a la resultante de la evolución no lineal respresentada en la figura incluso para amplitudes apreciables de la perturbación, lo que demuestra la existencia del modo dominante.

Bibliografía

- [1] Basaran, O. and Scriven, L. (1989). Axisymmetric shapes and stability of charged drops in an external electric field. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, 1(5):799–809.
- [2] DePaoli, D., Feng, J., Basaran, O., and Scott, T. (1995). Hysteresis in forced oscillations of pendant drops. *Physics of Fluids (1994-present)*, 7(6):1181–1183.
- [3] Eggers, J. and Dupont, T. F. (1994). Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier–stokes equation. *Journal of fluid mechanics*, 262:205–221.
- [4] Ferrera, C., Herrada, M. A., Montanero, J. M., and Acero, A. J. (2013). Dynamical behavior of electrified pendant drops. *Physics of Fluids*, 012104(25).
- [5] Hanchak, M. S. (2009). *One dimensional model of thermo-capillary driven liquid jet break-up with drop merging*. PhD thesis, University of Dayton.
- [6] Pozrikidis, C. (2002). *A practical guide to boundary element methods with the software library BEMLIB*. CRC Press.
- [7] Press, W. H. (2007). *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press.
- [8] Ramalingam, S., Ramkrishna, D., and Basaran, O. A. (2012). Free vibrations of a spherical drop constrained at an azimuth. *Physics of Fluids (1994-present)*, 24(8):082102.
- [9] Rayleigh, L. (1882). Xx. on the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 14(87):184–186.
- [10] Reznik, S., Yarin, A., Theron, A., and Zussman, E. (2004). Transient and steady shapes of droplets attached to a surface in a strong electric field. *Journal of Fluid Mechanics*, 516:349–377.

-
- [11] Strani, M. and Sabetta, F. (1984). Free vibrations of a drop in partial contact with a solid support. *Journal of Fluid Mechanics*, 141:233–247.
- [12] Taylor, G. (1964). Disintegration of water drops in an electric field. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 280, pages 383–397. The Royal Society.
- [13] Wohlhuter, F. K. and Basaran, O. A. (1992). Shapes and stability of pendant and sessile dielectric drops in an electric field. *Journal of Fluid Mechanics*, 235:481–510.

Capítulo 5

Conclusiones

La elaboración de esta tesis se enmarca dentro de los objetivos del Proyecto del Plan Nacional de I+D+I *Aspectos fundamentales de la operación de electrosprays. Aplicaciones a la producción de nanopartículas y nanoemulsiones.*

En esta tesis se ha implementado un método numérico robusto para estudiar la dinámica de modelos unidimensionales en diversos problemas de la interacción fluido estructura y de chorros y gotas electrificados. El método numérico empleado se basa en la forma conservativa del sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales (DAE) involucradas en dichos problemas y sistematiza la resolución de las mismas haciendo un uso del cálculo eficiente de los jacobianos mediante la funciones simbólicas de MATLAB.

En primer lugar, se ha considerado el problema del flameo de conductos empotrados-libres bajo la acción de la gravedad cuando por el circula un caudal suficientemente grande de líquido. Los cálculos de la formas de equilibrio muestran que la gravedad es alinear el conducto con ella misma mientras que el flujo tiende a enderezarla debido a la fuerza de reacción ejercida por el fluido que abandona el conducto. El análisis de estabilidad lineal de las formas de equilibrio muestra que el sistema puede hacerse inestable mediante una bifurcación de Hopf, experimentando flameo para valores críticos de los parámetros adimensionales del problema: el caudal adimensional, la relación entre la gravedad y la rigidez a flexión y la relación entre la masa de fluido y la total. Los resultados del análisis de estabilidad muestran que el efecto estabilizante o desestabilizante del caudal de líquido depende crucialmente del desalineamiento entre el la gravedad y el empotramiento. Así, para valores bajos del caudal, conductos desalineados con la gravedad se comportan de forma similar a los alineados para un mismo valor de la gravedad adimensional. Sin embargo, para valores grandes del caudal los conductos desalineados se enderezan y, por tanto, exhiben el mismo comportamiento

que los alineados pero con una gravedad efectiva debido al desalineamiento. Además, se ha llevado a cabo un estudio del régimen no lineal transitorio que tiene lugar para valores del caudal superiores al crítico. Los resultados muestran que conductos desalineados con la gravedad tienen una preferencia a oscilar fuera del plano de la forma de equilibrio y que tanto órbitas planas como circulares pueden ocurrir para valores moderados del caudal. Para valores mayores se tienen órbitas caóticas.

También se ha considerado en esta tesis, la dinámica de chorros electrificados. Las ecuaciones que gobiernan dicha dinámica en la aproximación unidimensional, se han resuelto mediante el mismo esquema numérico que el que se ha propuesto en esta tesis. Se ha comprobado que los resultados reproducen los reportados en la literatura, para chorros axilsimétricos eléctricamente neutros tanto en lo que concierne a problema de estabilidad lineal como al problema no lineal y no estacionario de la transición de chorro a goteo. Además se ha analizado la retracción experimentada por un chorro tras el *pinch-off*, y, por primera, se ha obtenido una solución de semejanza para las ecuaciones del modelo unidimensional que concuerda satisfactoriamente con las reportadas en la literatura pero obtenidas mediante modelos tridimensionales mucho más complejos. También se ha considerado la dinámica no axilsimétrica de chorros electrificados con el objeto de entender los procesos involucrados en el fenómeno de latiguelo o *whipping*. En particular, se ha obtenido el diagrama de estabilidad que muestra que para un campo eléctrico dado, existe un valor umbral de la intensidad de corriente eléctrica, que disminuye al aumentar el número de Reynolds, por encima del cual el chorro se hace inestable frente a perturbaciones laterales y se origina el latiguelo del mismo. Para valores supercríticos de los parámetros tiene lugar un régimen transitorio no lineal que eventualmente da lugar a órbitas periódicas o caóticas, análogas al caso del conducto flexible y que también se han calculado numéricamente con el método propuesto en esta tesis.

Finalmente, se han estudiado, tanto desde el punto de vista numérico como experimental, las vibraciones de gotas cargadas eléctricamente. Los experimentos muestran que existe un valor crítico del campo eléctrico por encima del cual no existe forma de equilibrio, y se han medido las frecuencias de los primeros modos de vibración observándose que disminuyen con el campo aplicado. El problema se ha formulado de forma que las ecuaciones que describen la geometría de la superficie de la gota se integran numéricamente en el tiempo haciendo uso de un mallado fijo que evita los remallados engorrosos normalmente usados en la literatura. Se han calculado las formas de equilibrio de gotas, tanto ancladas como libres, confirmándose la existencia de valores máximos del campo eléctrico para la existencia de formas de equilibrio. En particular,

en el caso de gotas ancladas, el método numérico reproduce con gran exactitud los valores críticos de la carga de Rayleigh y del campo de Taylor, respectivamente. También se ha estudiado la estabilidad lineal de las formas de equilibrio, que pone de manifiesto que la pérdida de soluciones de equilibrio se debe a una bifurcación de tipo *folding* que aparece para el valor umbral del campo eléctrico. Además los resultados numéricos obtenidos han puesto de manifiesto un aparente error en los publicados en una de las referencias clásicas sobre el tema en la literatura. Se ha resuelto también el problema no lineal de las vibraciones de gran amplitud de gotas ancladas y se ha comprobado que sus frecuencias están de acuerdo con las obtenidas tanto experimentalmente como con el análisis de estabilidad lineal.

Apéndice A

Parámetros de Euler

Para introducir los parámetros de Euler conviene partir del denominado tensor (diádica) de rotación entre dos triedros ortonormales, que en nuestro caso son el triedro fijo $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$ y el intrínseco $\{\mathbf{d}_i(s, t)\}_{i=1,2,3}$:

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_i \mathbf{a}_i . \quad (\text{A.1})$$

Obsérvese que si \mathcal{D} actúa por la derecha sobre cada uno de los vectores \mathbf{a}_k , se obtiene $\mathcal{D} \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{d}_k$, mientras que si actúa por la izquierda sobre los \mathbf{d}_k , proporciona $\mathbf{d}_k \cdot \mathcal{D} = \mathcal{D}^T \cdot \mathbf{d}_k = \mathbf{a}_k$, por lo que, efectivamente, la acción de \mathcal{D} representa la rotación que transforma un triedro en otro; nótese también que $\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^T$. Por otra parte, toda rotación está únicamente determinada por el eje de rotación, representado por un vector unitario \mathbf{n} , y el ángulo de giro Φ alrededor del mismo, de forma que \mathcal{D} puede escribirse también como (según la fórmula de la rotación de Rodrigues) :

$$\mathcal{D} = \mathcal{I} \cos \Phi + \mathbf{n} \mathbf{n} (1 - \cos \Phi) + \mathbf{n} \times \mathcal{I} \sin \Phi , \quad (\text{A.2})$$

donde $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i$ es el tensor identidad y $\mathbf{n} \times \mathcal{I}$ es el tensor que se obtiene multiplicando vectorialmente \mathbf{n} por los antecedentes de \mathcal{I} .

En muchas ocasiones es más conveniente expresar (A.2) en términos del escalar q_0 y del vector \mathbf{q}_v definidos como :

$$q_0 = \cos(\Phi/2) \quad \text{y} \quad \mathbf{q}_v = \mathbf{n} \sin(\Phi/2) . \quad (\text{A.3})$$

El vector \mathbf{q}_v , colineal con el eje de rotación, es invariante bajo la acción de \mathcal{D} , $\mathbf{q}_v = \mathcal{D} \cdot \mathbf{q}_v = \mathbf{q}_v \cdot \mathcal{D}$, y, por tanto, posee las mismas componentes (q_1, q_2, q_3) en las bases

$\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$ y $\{\mathbf{d}_i\}_{i=1,2,3}$, es decir,

$$q_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{q}_v = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{q}_v. \quad (\text{A.4})$$

Los parámetros q_0 , q_1 , q_2 y q_3 se denominan parámetros de Euler, y de la definición (A.3) se deduce inmediatamente que satisfacen la relación :

$$q_0^2 + \mathbf{q}_v \cdot \mathbf{q}_v = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (\text{A.5})$$

En términos de q_0 y \mathbf{q}_v , el tensor de rotación (A.2) se escribe :

$$\mathcal{D} = (2q_0^2 - 1)\mathcal{I} + 2\mathbf{q}_v\mathbf{q}_v + 2q_0\mathbf{q}_v \times \mathcal{I}. \quad (\text{A.6})$$

Se necesitarán también aquí las derivadas de los parámetros de Euler con respecto a la coordenada s . Estas pueden obtenerse de forma compacta y directa a partir del escalar (traza) y del vector del tensor \mathcal{D} , que están definidos, respectivamente, como las cantidades que se obtienen tomando el producto escalar y vectorial entre los antecedentes y consecuentes de \mathcal{D} . Si D_e y \mathbf{D}_v denotan el escalar y el vector de \mathcal{D} , se obtiene de (A.6) que:

$$D_e \equiv \sum_i \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{a}_i = 4q_0^2 - 1, \quad (\text{A.7a})$$

$$\mathbf{D}_v \equiv \sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_i \times \mathbf{a}_i = 2q_0 \sum_{i=1}^3 (\mathbf{q}_v \times \mathbf{a}_i) \times \mathbf{a}_i = -4q_0\mathbf{q}_v, \quad (\text{A.7b})$$

donde en \mathbf{D}_v se ha tenido en cuenta la identidad para el doble producto vectorial $(\mathbf{q}_v \times \mathbf{a}_i) \times \mathbf{a}_i = \mathbf{q}_v \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i - \mathbf{q}_v$. Si se deriva D_e respecto a s , teniendo en cuenta (2.3a) y que los \mathbf{a}_i son constantes, se obtiene :

$$\sum_{i=1}^3 (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i) \cdot \mathbf{a}_i = 8q_0 \partial_s q_0, \quad (\text{A.8})$$

que, puesto que $\sum_{i=1}^3 (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i) \cdot \mathbf{a}_i = \boldsymbol{\kappa} \cdot \sum_{i=1}^3 (\mathbf{d}_i \times \mathbf{a}_i) = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{D}_v$, proporciona,

$$\partial_s q_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v \cdot \boldsymbol{\kappa}, \quad (\text{A.9})$$

donde se ha sustituido la expresión de \mathbf{D}_v (A.7b). Análogamente, si se deriva \mathbf{D}_v en (A.7b) y se desarrollan los dobles productos vectoriales se obtiene:

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{d}_i \mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\kappa} - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{a}_i \boldsymbol{\kappa}) = \mathcal{D} \cdot \boldsymbol{\kappa} - D_e \boldsymbol{\kappa} = -4\partial_s(q_0 \mathbf{q}_v), \quad (\text{A.10})$$

Si se substituyen en (A.10) $\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{\kappa} = (2q_0^2 - 1)\boldsymbol{\kappa} + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v \cdot \boldsymbol{\kappa} + 2q_0 \mathbf{q}_v \times \boldsymbol{\kappa}$ y $D_e \boldsymbol{\kappa} = (4q_0^2 - 1)\boldsymbol{\kappa}$, y se desarrolla la derivada del último miembro teniendo en cuenta (A.9), se obtiene finalmente :

$$\partial_s \mathbf{q}_v = (q_0 \boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q}_v \times \boldsymbol{\kappa})/2. \quad (\text{A.11})$$

De la misma forma, las derivadas temporales de los parámetros de Euler se obtienen simplemente reemplazando t por s y $\boldsymbol{\kappa}$ por $\boldsymbol{\omega}$ en el desarrollo anterior; por tanto, se tiene :

$$\partial_t q_0 = -\mathbf{q}_v \cdot \boldsymbol{\omega}/2, \quad \text{y} \quad \partial_t \mathbf{q}_v = (q_0 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{q}_v \times \boldsymbol{\omega})/2. \quad (\text{A.12})$$

Las derivadas espaciales intrínsecas de los parámetros de Euler se obtienen a partir de (A.9) y (A.11) sin más que tener en cuenta que $q'_0 = \partial_s q_0$ y $\mathbf{q}'_v = \partial_s \mathbf{q}_v - \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{q}_v$, son :

$$q'_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v \cdot \boldsymbol{\kappa}, \quad \text{y} \quad \mathbf{q}'_v = (q_0 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{q}_v \times \boldsymbol{\kappa})/2. \quad (\text{A.13})$$

Las expresiones (A.13) son idénticas a las dadas por [11],[?] pero han sido deducidas aquí haciendo uso del cálculo vectorial compacto en vez de usar la engorrosa forma explícita de la matriz de giro en términos de los parámetros de Euler.

Finalmente, y con vistas a las aplicaciones de los parámetros de Euler, es conveniente tener una forma sistemática para expresar las componentes de un vector en una de las bases en términos de las que posee en la otra base. Esto puede hacerse fácilmente haciendo uso de la expresión (A.6) para el tensor de rotación escrito en términos de dichos parámetros. En efecto, si, por ejemplo, se quiere expresar el vector $\mathbf{d}_3 = \mathcal{D} \cdot \mathbf{a}_3$ en términos de los $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$, se tiene para la i -ésima componente :

$$d_{3i} = \mathbf{a}_i \cdot \mathcal{D} \cdot \mathbf{a}_3 = (2q_0^2 - 1)\delta_{i3} + 2q_i q_3 + 2q_0 \varepsilon_{ij3} q_j, \quad (\text{A.14})$$

donde se ha hecho uso de (A.4) y, análogamente, para expresar el vector \mathbf{a}_3 en la base $\{\mathbf{d}_i(s, t)\}_{i=1,2,3}$, se tiene para la i -ésima componente:

$$a_{3i} = \mathbf{d}_3 \cdot \mathcal{D} \cdot \mathbf{d}_i = (2q_0^2 - 1)\delta_{i3} + 2q_i q_3 - 2q_0 \varepsilon_{ij3} q_j. \quad (\text{A.15})$$

Apéndice B

Cálculo del campo eléctrico normal sobre la superficie perturbada

Para calcular los gradientes que aparecen en el esquema de perturbaciones (4.43), conviene hacer uso de la siguiente base ortonormal definida por la familia de superficies $F_0(r, z) = cte$. ($cte \geq 0$), que contiene a la superficie de equilibrio de la gota para $cte = 0$:

$$\mathbf{e}_n(r, z, \vartheta) = \frac{\nabla F_0}{|\nabla F_0|}, \quad \mathbf{e}_\vartheta(r, z, \vartheta) \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_s(r, z, \vartheta) = \mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_n, \quad (\text{B.1})$$

donde ϑ es el ángulo polar alrededor del eje z . Obsérvese que, si dn y ds representan los elementos de longitud a lo largo de las líneas de coordenadas definidas por los vectores \mathbf{e}_n y \mathbf{e}_s , la expresión del operador gradiente está dado por

$$\nabla = \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial n} + \mathbf{e}_s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\mathbf{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \quad (\text{B.2})$$

Por tanto, teniendo en cuenta la axisimetría del problema, se tiene para el gradiente del potencial eléctrico $\varphi_0(r, z)$:

$$\nabla \varphi_0 = \mathbf{e}_n \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + \mathbf{e}_s \frac{\partial \varphi_0}{\partial s}, \quad (\text{B.3})$$

y para el gradiente del campo eléctrico $\mathbf{E}_0 = E_{n0}(r, z)\mathbf{e}_n + E_{s0}(r, z)\mathbf{e}_s$:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E}_0 = & \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n \frac{\partial E_{n0}}{\partial n} + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_s \frac{\partial E_{s0}}{\partial n} + \mathbf{e}_s \mathbf{e}_n \frac{\partial E_{n0}}{\partial s} + \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s \frac{\partial E_{s0}}{\partial s} + \\ & + E_{n0} \left(\mathbf{e}_n \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial n} + \mathbf{e}_s \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial s} + \frac{\mathbf{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \vartheta} \right) + E_{s0} \left(\mathbf{e}_n \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial n} + \mathbf{e}_s \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s} + \frac{\mathbf{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Obsérvese que, contrayendo las diadas en (4.55) y teniendo en cuenta que los vectores de la base son unitarios, por lo que $\mathbf{e}_n \cdot (\partial \mathbf{e}_n / \partial n) = \mathbf{e}_s \cdot (\partial \mathbf{e}_s / \partial s) = 0$, se obtiene la expresión para la divergencia de \mathbf{E}_0 (que debe ser nula):

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\partial E_{n0}}{\partial n} + \frac{\partial E_{s0}}{\partial s} + E_{n0} \mathbf{e}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial s} + E_{s0} \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial n} - \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_r}{r} = 0, \quad (\text{B.5})$$

donde se ha hecho uso de que $\mathbf{e}_\vartheta \cdot (\partial \mathbf{e}_n / \partial \vartheta) = -\mathbf{e}_n \cdot (\partial \mathbf{e}_\vartheta / \partial \vartheta) = -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_r$ y que $\mathbf{e}_\vartheta \cdot (\partial \mathbf{e}_s / \partial \vartheta) = -\mathbf{e}_s \cdot (\partial \mathbf{e}_\vartheta / \partial \vartheta) = -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_r$, donde \mathbf{e}_r es el vector unitario radial.

Para calcular el término de perturbación que aparece en la ecuación (4.43b), $\mathbf{x}_1 \cdot [\nabla \mathbf{E}_0]_{\mathbf{x}_0}$, sobre los puntos de la superficie sin perturbar, \mathbf{x}_0 , será necesario particularizar sobre dicha superficie los vectores $\mathbf{e}_s \cdot \nabla \mathbf{E}_0$ y $\mathbf{e}_n \cdot \nabla \mathbf{E}_0$. Pero antes de llevar a cabo dicha particularización, es conveniente expresar dichos vectores de forma que no aparezcan las derivadas en la dirección normal de las componentes del campo ni la de los vectores unitarios. Para ello, la expresión (4.55) proporciona directamente

$$\mathbf{e}_s \cdot \nabla \mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_n \frac{\partial E_{n0}}{\partial s} + \mathbf{e}_s \frac{\partial E_{s0}}{\partial s} + E_{n0} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial s} + E_{s0} \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s}, \quad (\text{B.6})$$

que no contiene los términos aludidos, mientras que éstos pueden eliminarse de la expresión para $\mathbf{e}_n \cdot \nabla \mathbf{E}_0$ haciendo uso de la simetría del tensor $\nabla \mathbf{E}_0 = -\nabla \nabla \varphi_0$, y restando la ecuación (4.56) multiplicada por \mathbf{e}_n , lo que proporciona:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \cdot \nabla \mathbf{E}_0 &= (\nabla \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_n \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \\ &= \mathbf{e}_s \left(\frac{\partial E_{n0}}{\partial s} + E_{s0} \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_n \right) - \mathbf{e}_n \left(\frac{\partial E_{s0}}{\partial s} + E_{n0} \mathbf{e}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial s} - \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_r}{r} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Entonces, teniendo en cuenta que sobre la superficie de equilibrio de la gota $\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_{sS0}(s)$, $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{nS0}(s)$, y si el campo eléctrico sobre dicha superficie es ¹

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{x}_0) = -\frac{d\varphi_{S0}}{ds} \mathbf{e}_{sS0} + E_{nS0} \mathbf{e}_{nS0}, \quad (\text{B.8})$$

¹Se considerará aquí el caso más general de un dieléctrico para el que $E_{sS0} = -d\varphi_{S0}/ds$ no es, en general, nulo. Posteriormente se particularizará el resultado para un superficie conductora.

resulta de (4.57)-(4.58) que:

$$\mathbf{e}_{sS_0} \cdot \nabla \mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_{sS_0} \left(-\frac{\partial \varphi_{S_0}}{\partial s} + C_{s_0} E_{nS_0} \right) + \mathbf{e}_{nS_0} \left(\frac{\partial E_{nS_0}}{\partial s} + C_{s_0} \frac{\partial \varphi_{S_0}}{\partial s} \right), \quad (\text{B.9a})$$

$$\mathbf{e}_{nS_0} \cdot \nabla \mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_{sS_0} \left(\frac{\partial E_{nS_0}}{\partial s} + C_{s_0} \frac{\partial \varphi_{S_0}}{\partial s} \right) + \mathbf{e}_{nS_0} \left[\frac{1}{r_{S_0}} \frac{\partial}{\partial s} \left(r_{S_0} \frac{\partial \varphi_{S_0}}{\partial s} \right) - (C_{s_0} + C_{\vartheta_0}) E_{nS_0} \right], \quad (\text{B.9b})$$

donde, de acuerdo con las expresiones (4.15), se ha hecho uso de las que definen las curvaturas de la superficie de equilibrio, $C_{s_0} = -\partial_s \theta_0$ y $C_{\vartheta_0} = -\cos \theta_0 / r_{S_0}$.

Finalmente, si en (4.60) se particulariza para una superficie conductora: $d\varphi_{S_0}/ds = d^2\varphi_{S_0}/ds^2 = 0$, y se parametriza la superficie de equilibrio con $\xi = s/L_0$, resulta (4.49).